



XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING
BRASÍLIA - DF - BRAZIL

LARGE DEFLECTION ANALYSIS OF ANISOTROPIC LAMINATED PLATES BY CONTINUOUS AND NON-CONTINUOUS GFEM

Marx Ribeiro

Paulo de Tarso R. Mendonça

Clovis S. de Barcellos

ribeiromarx@hotmail.com

mendonca@grante.ufsc.br

clovis.barcellos@gmail.com

GRANTE, Department of Mechanical Engineering, Federal University of Santa Catarina-UFSC
Department of Mechanical Engineering, CP 476, UFSC, 88040-900 - Florianópolis, SC, Brazil

Diego Amadeu F. Torres

diego.amadeu@gmail.com

Department of Mechanical Engineering, Federal University of Technology of Paraná-UTFPR
Department of Mechanical Engineering, UTFPR, 86036-370 - Londrina, PR, Brazil

Abstract. *This work addresses the application of the GFEM to laminated plates under moderately large transverse displacements by the von Kármán's hypothesis, in the frame of the Kirchhoff-Love and Reissner-Mindlin kinematical plate models. The formulation admits the general case of laminated plates composed of anisotropic layers in the elastic range. The behaviors of two types of GFEM formulations are compared, one based on $C0$ continuous PoU , and the other is based on *infinitely* PoU . Here, the adequate number of integration points in the element is investigated for each degree of enrichment polynomial. For the transverse shear stresses obtained from integration of the local equilibrium equations, a theorem is presented to explain the reason why, in some cases, the null value is not reached at the end of the integration across the laminate thickness. Numerical results are compared with literature results.*

Keywords: *Laminated plate bending, GFEM, Continuous GFEM, Large displacements in plate*

1 INTRODUÇÃO

As placas e cascas são elementos estruturais utilizados extensivamente em muitos setores da indústria, como em equipamentos, em dutos ou vasos de pressão, na indústria aeroespacial muitas vezes sob forma de compostos laminados, em navios, pontes e muitos outros. Do ponto de vista físico, o processo consiste em aproximar campos de deslocamentos tridimensionais a partir da combinação de campos incógnitos de duas dimensões com hipóteses cinemáticas. Então, reduz-se a complexidade e o número de variáveis do problema a ser resolvido. Sob a ótica matemática, os modelos de placas e cascas apresentam um desafio interessante por diversos fatores, por exemplo: (1) seja pelo acoplamento das equações diferenciais que surgem com não linearidades geométricas, como quando se assume as hipóteses de von Kármán; (2) pelo surgimento de problemas numéricos, a notar o travamento por cisalhamento (Garcia et al., 2000); (3) pela exigência de alta regularidade das funções de aproximação (Barcellos et al., 2009) que não são providas naturalmente pelo Método de Elementos Finitos (MEF). Ao longo dos anos, diversos modelos foram propostos tentando superar deficiências dos resultados de deslocamento ou de tensão (Lee & Plan, 1978; Hughes et al., 1977; Reddy, 1984, 1989) conforme o interesse de cada área.

Nos diversos modelos de placa existem hipóteses referentes às relações cinemáticas do movimento que levam a importantes consequências matemáticas. Uma destas consequências, comum a vários modelos, é o requisito da existência e continuidade das derivadas de ordem superior, como o modelo de Kirchhoff-Love ou Teoria Clássica de Placas (Ventsel & Krauthammer, 2001; Reddy, 2006), em que, entre outras características, as funções de aproximação precisam ser de classe C^1 . Neste contexto, o Método de Elementos Finitos Generalizados (MEFG) (Duarte et al., 2000) se aplica muito bem, pois é possível utilizar funções de aproximação de regularidade arbitrária (Duarte et al., 2006). Com isso, esta formulação apresenta grande vantagem em relação ao uso de elementos híbridos como realizado por Veiga et al. (2007). Ela não requer a aproximação dos campos derivados usando funções de forma como em Reddy (2006), pois o próprio campo tem diferenciabilidade suficiente, o que irá produzir campos de tensão contínuos nas interfaces entre elementos. É uma característica natural do método proporcionar refino adaptativo p , evitando a necessidade de remalhamento. De fato, alguns trabalhos já existem neste sentido (Garcia et al., 2000; Barcellos et al., 2009; Mendonça et al., 2011), usando a metodologia de MEFG na implementação de modelos de placa.

O objetivo deste trabalho é implementar os modelos de placa de Kirchhoff-Love e Reissner-Mindlin em laminados, usando o MEFG com funções de aproximação de classes C^0 e C^k , incluindo as hipóteses de não-linearidade de deformação de von Kármán, de modo a capturar com maior precisão grandes rotações e deslocamentos transversais, mas ainda com pequenas deformações.

2 PARTIÇÃO DA UNIDADE E FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO

A Partição da Unidade (PU) se caracteriza por ser um conjunto de funções cuja soma dos valores é igual à unidade em qualquer ponto de seu suporte. As funções de aproximação $\varphi_\alpha(\mathbf{x})$ associadas aos nós $\alpha = 1, 2, \dots, N_{nos}$, se caracterizam por serem não nulas apenas dentro de uma região de suporte compacta. Neste caso, a PU com funções polinomiais de enriquecimento formam o subespaço de aproximação.

Para construir as funções de aproximação de MEFG, pode-se considerar a superfície média de uma placa como um domínio aberto, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, a qual possui uma malha de elementos triangulares de arestas retas com N_{el} elementos \mathcal{K}_e , $\{\mathcal{K}_e\}_{j=1}^{N_{el}}$, N nós com coordenadas $\{\mathbf{x}_\alpha\}_{\alpha=1}^N$. Cada um destes nós é associado a uma nuvem, ω_α , para $\alpha = 1, \dots, N$, a qual é formada pela união dos elementos triangulares adjacentes a este nó α (Barcellos et al., 2009).

Considerando o conjunto de funções $\{\varphi_\alpha(\mathbf{x})\}_{\alpha=1}^N$ tendo como suporte compacto a correspondente nuvem ω_α , Babuška et al. (2004) definem PU como um conjunto de funções formadas de tal forma que: 1) A soma de seus valores é igual à unidade em qualquer ponto de suporte. $\sum_{\alpha=1}^N \varphi_\alpha(\mathbf{x}) = 1, \forall (\mathbf{x}) \in \Omega$; 2) Todo subconjunto compacto de Ω intersecciona apenas um número finito de suportes; 3) A função φ_α é diferente de zero apenas sobre sua respectiva nuvem, ω_α , e possui diferenciabilidade requerida dentro da nuvem de pelo menos k derivadas contínuas. $\varphi_\alpha(\mathbf{x}) \in C_0^k(\omega_\alpha)$, $k \geq 0$. Assim, o conjunto de funções $\{\varphi_\alpha(\mathbf{x})\}_{\alpha=1}^N$ pode ser considerado como uma PU subordinada à cobertura \mathfrak{S}_N .

O Método de Elementos Finitos Generalizados com funções suaves (MEFG- C^k) baseia-se no emprego de PU suaves que forneçam k derivadas contínuas sobre Ω . As funções de forma são construídas pelo produto da partição da unidade de Shepard com funções de enriquecimento. Já o MEFG- C^0 baseia-se no emprego de funções PU que são as próprias funções de forma C^0 do MEF tradicional.

Partição da Unidade com Elementos Finitos Padrão

Como as funções de forma do MEF tradicional são consideradas uma PU, pode-se adotar o caso em que a nuvem ω_α é a união dos elementos que compartilham o mesmo nó \mathbf{x}_α como vértice de elementos de uma malha triangular linear, onde a função φ_α é a própria função de forma global do MEF. Estas funções tem um custo computacional baixo e são facilmente integráveis por quadratura numérica, porém sua continuidade é limitada a C^0 (Mendonça et al., 2011).

Partição da Unidade de Shepard

Para problemas que exigem derivadas contínuas dos deslocamentos, como o caso da TCP, a PU utilizando as funções de forma do MEF é inadequada, sendo difícil atingir a continuidade desejada. Desta forma, parte-se para a solução proposta por Shepard (1968) e empregada por Barcellos et al. (2009) e Mendonça et al. (2011).

Seja uma função $\mathcal{W}_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com um suporte compacto, ω_α , pertencente ao espaço $C_0^k(\omega_\alpha)$, a função peso em cada nuvem, ω_α , da cobertura aberta \mathfrak{S}_N do domínio Ω . Então, a PU de Shepard subordinada à cobertura \mathfrak{S}_N é definida como:

$$\varphi_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{W}_\alpha}{\sum_{\beta(\mathbf{x})} \mathcal{W}_\beta(\mathbf{x})} \quad \beta(\mathbf{x}) \in \{\gamma \mid \mathcal{W}_\gamma(\mathbf{x}) \neq 0\}, \quad (1)$$

onde a regularidade $\varphi_\alpha(\mathbf{x})$ depende apenas da regularidade das funções peso. Logo, resta definir as funções peso (ou ponderação) com a regularidade necessária.

Algumas considerações devem ser levadas em conta na escolha das funções peso. Elas precisam ter, no mínimo, a continuidade desejada e serem, juntamente com suas derivadas, razoavelmente integráveis (Barcellos et al., 2009). Para construção da partição da unidade de Shepard são necessárias funções pesos, em que para o caso de nuvens convexas utilizam-se as

funções peso propostas por Edwards e descritas em Duarte et al. (2006). Neste método, define-se uma coordenada normal à aresta do contorno da nuvem $\xi_j(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_{\alpha,j} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b}_{\alpha,j})$, onde $\mathbf{b}_{\alpha,j}$ é um ponto na fronteira que é selecionado para ser o ponto central da aresta j , e $\mathbf{n}_{\alpha,j}$ é o vetor normal à aresta apontando para o interior da nuvem. A função de aresta da nuvem é escolhida como uma função que possui valor positivo dentro da nuvem e valor zero fora do suporte da nuvem. Foram escolhidas as funções com continuidade C^∞ seguindo Barcellos et al. (2009).

A função de aresta, que é então redefinida como

$$\varepsilon_{\alpha,j}[\xi_j(\mathbf{x})] = \hat{\varepsilon}_{\alpha,j} := \begin{cases} Ae^{-\frac{\xi_j}{B}^{-\gamma}} & , \text{ se } 0 < \xi_j \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (2)$$

em que os valores dos parâmetros são escolhidos como $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3$ conforme Barcellos et al. (2009). As funções peso irão determinar qual a influência de cada nó dentro de um mesmo elemento e são definidas por:

$$\mathcal{W}_\alpha(\mathbf{x}) = e^{c_\alpha} \prod_{j=1}^{M_\alpha} \varepsilon_{\alpha,j}(\xi_j), \quad (3)$$

sendo c_α um parâmetro de escala que garanta $\mathcal{W}_\alpha = 1$ no nó \mathbf{x}_α .

As funções PU de Shepard, Eq. (1), como observado por Duarte et al. (2006), tem diferenciabilidade C^∞ para nuvens convexas. Por isso, diz-se que a regularidade é arbitrária. Adicionalmente, a implementação pode usar qualquer ordem de derivada que a formulação requisitar. E além disso, é possível utilizar regularidades diferentes para cada campo incógnita por meio do uso combinado de funções C^0 e C^k (Mendonça et al., 2013).

Enriquecimento das Funções de Aproximação

O enriquecimento tem por objetivo aumentar a qualidade dos resultados numéricos, por meio da expansão do espaço de aproximação, feito na prática pelo aumento do número de graus de liberdade em cada direção. Isso pode ser feito multiplicando as funções PU por funções polinomiais, harmônicas ou parte da solução (Barcellos et al., 2009).

Se L_S é um conjunto de polinômios do tipo: $L_S = \{L_0, L_1, L_2, \dots, L_p\}$, e o conjunto \mathfrak{S}_N^p é o espaço de procura do Método de Galerkin, formalmente definido como: $\mathfrak{S}_N^p = \{\{\varphi_\alpha(x)\} \cup \{\varphi_\alpha(x)L_{\alpha i}(x)\} \mid 0 \leq \alpha \leq N, 0 \leq i \leq p, p \geq k\}$.

Para os elementos da PU e do enriquecimento pertencerem ao conjunto \mathfrak{S}_N^p , estes elementos necessitam idealmente ser linearmente independentes entre si (Barcellos et al., 2009). Por este motivo, deve-se tomar cuidado na escolha das funções de enriquecimento quando ambas - funções PU e de enriquecimento - forem polinômios, pois o sistema de equações gerado se torna positivo semi-definido (Freitas et al., 2015).

3 MODELOS DE PLACAS E DISCRETIZAÇÃO MEFG

3.1 Modelo de Placas de Kirchhoff-Love

A Teoria Clássica de Placas (TCP), também conhecida como modelo de placa de Kirchhoff-Love, que obteve-se uma equação governante para o deslocamento transversal e duas condições

de contorno independentes em placas homogêneas, isotrópicas, elásticas e submetidas a esforços perpendiculares ao plano médio. Considerando uma região V pertencente ao sistema cartesiano tridimensional \mathbb{R}^3 , definido por espessura constante e $h > 0$ e superfície média Ω , que possui a região de contorno Γ . Para $\mathbf{x} = x, y, z^T$, a região V pode ser descrita por

$$V = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right], (x, y) \in \Omega, \Omega \in \mathbb{R}^2 \right\} \quad (4)$$

Devido às hipóteses assumidas, os campos de deslocamentos do modelo de flexão de Kirchhoff para placas delgadas são definidos por:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x}(x, y) \\ u_y(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) \\ u_z(x, y, z) &= w(x, y), \end{aligned} \quad (5)$$

onde u_0 e v_0 são as componentes de deslocamentos na direção x e y , w é o deslocamento transversal na direção do eixo z , $\frac{\partial w}{\partial x}$ e $\frac{\partial w}{\partial y}$ são as rotações em relação aos eixos y e x , respectivamente. Adicionalmente, as funções u_0, v_0 e w são em relação à superfície média $z = 0$.

O campo de deformação parte da simplificação do Tensor de Deformação de Green-Lagrange (\mathbf{E}), em que as componentes na forma cartesianas, em notação indicial, assumem o seguinte formato:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad (6)$$

Utilizando hipóteses de pequenas deformações e pequenos deslocamentos, por meio da consideração de que as deformações no plano (u_0 e v_0) são pequenas, os termos quadráticos tornam-se desprezíveis. Por outro lado, quando as hipóteses não lineares de deformação de von Kármán são utilizadas para pequenas deformações e moderadas rotações (entre 10° e 15°), os termos não lineares relativos às rotações são pequenos porém não desprezáveis, o que exige a permanência dos mesmos: $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$, $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$, $\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$.

Estes termos são os responsáveis pela chamada não linearidade geométrica. Devido a manutenção destes termos quadráticos, os deslocamentos transversais são considerados como grandes, $w/h \geq 0.2$ (Ventsel & Krauthammer, 2001) porém não arbitrariamente grandes a ponto de serem comparáveis às outras dimensões (largura e comprimento) da placa.

$$\epsilon(x, y, z) = \epsilon(x, y) + z\kappa(x, y) \quad (7)$$

onde ϵ é a deformação de membrana e κ é a mudança de curvatura devido à flexão. A deformação ϵ pode ser decomposta em duas parcelas, uma linear ϵ^0 e outra não linear ϵ^{NL}

$$\epsilon = \epsilon^0 + \epsilon^{NL} \quad (8)$$

onde

$$\epsilon^0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \end{pmatrix}; \quad \epsilon^{NL} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix}; \quad \kappa = \begin{pmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

Utilizando a Lei de Hooke $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$ com as relações $\mathbf{N} = \int_z \boldsymbol{\sigma} dz$ e $\mathbf{M} = \int_z \boldsymbol{\sigma} z dz$, para $\mathbf{N} = \{N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}\}^T$ e $\mathbf{M} = \{M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}\}^T$, obtém-se a relação entre os esforços generalizados e deformações:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ z\boldsymbol{\sigma} \end{Bmatrix} dz = \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}, \equiv [\mathbf{C}] \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

onde a matriz \mathbf{A} é conhecida como matriz *rigidez extensional*, a matriz \mathbf{D} como matriz *rigidez flexional* e a matriz \mathbf{B} representa o acoplamento entre deformação de membrana e de flexão.

Define-se, respectivamente, operadores bilineares e lineares

$$G(\mathbf{d}, \delta\mathbf{d}) = \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ \delta\boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} d\Omega, \quad F(\delta w) = \int_{\Omega} q\delta w d\Omega \quad (11)$$

tal que $G(\mathbf{d}, \delta\mathbf{d}) = F(\delta w)$.

Aplicando a relação Eq. (8) ao operador bilinear $G(\mathbf{d}, \delta\mathbf{d})$ da Eq. (11) obtém-se

$$G(\mathbf{d}, \delta\mathbf{d}) = \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \delta\boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \delta\boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{NL} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$+ \begin{Bmatrix} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{NL} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{NL} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{NL} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} d\Omega. \quad (13)$$

3.2 Modelo de Placas de Reissner-Mindlin

Tem-se o campo de deslocamentos dados por

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) \\ u_y(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) \\ u_z(x, y, z) &= w(x, y). \end{aligned} \quad (14)$$

Assim como na teoria de Kirchhoff, o campo de deformações para o modelo de Reissner-Mindlin pode também ser expresso na forma matricial. Porém, devido ao cisalhamento transversal não ser nulo, surge um novo vetor, representado neste trabalho por $\boldsymbol{\gamma}^c = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^T$. Assim, as deformações não nulas são

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{NL} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\gamma}^c = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \end{Bmatrix}. \quad (15)$$

Ao utilizar as definição de esforços generalizados a Lei de Hooke Generalizada têm-se as seguintes equações

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{Q}\} = [\mathbf{E}^c] \{\boldsymbol{\gamma}^c\} \quad (16)$$

Em que \mathbf{N} e \mathbf{M} foram definidos na Eq. (10) e $\mathbf{Q} = \{Q_x, Q_y\}^T$

O operador linear possui a mesma definição que na TCP, enquanto que o operador bilinear para o Modelo de Reissner-Mindlin fica como

$$G(\mathbf{d}, \delta\mathbf{d}) = \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ \delta\boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} \{\delta\boldsymbol{\gamma}^c\}^T [\mathbf{E}^c] \{\boldsymbol{\gamma}^c\} d\Omega \quad (17)$$

3.3 Discretização do Modelo de Kirchhoff-Love

Propõe-se aproximar um campo de deslocamentos incógnitos (\mathbf{u}^e) no elemento por:

$$u_i^e(x, y) = \sum_{j=1}^{nnoe} \varphi_{ij}(x, y) \left\{ u_{ij} + \sum_{k=1}^{nfu_i} L_{ijk}(x, y) b_{ijk} \right\} = \mathbf{N}^e \mathbf{U}^e, \quad (18)$$

onde, $nnoe$ é o número de nós no elemento, φ_j as funções PU associadas ao nó j , i é a direção de cada grau de liberdade e k o número de monômio enriquecedor. No caso da TCP, $\mathbf{u} = \{u_0, v_0, w\}^T$. E nfu é o número de funções enriquecedoras associadas ao nó j , L_{jk} são as funções de enriquecimento associadas a esse mesmo nó e b_{jk} o coeficiente de cada função L_k do nó j . Na formulação tradicional de elementos finitos para TCP, tem-se cinco campos incógnitos, $u_0, v_0, w, \frac{\partial w}{\partial x}$ e $\frac{\partial w}{\partial y}$. Esta abordagem era escolhida, pois possibilitava aproximar os campos derivados usando as próprias funções de forma, contornando a exigência da continuidade C^1 quando formulado em termos de u_0, v_0, w somente (Barcellos et al., 2009; Reddy, 2004). Porém, na formulação proposta, as funções de forma usadas para aproximar o campo de deslocamento transversal w tem diferenciabilidade suficiente, de forma que os campos incógnitos podem ser apenas u_0, v_0, w . Por conveniência, os parâmetros nodais no elemento u_{ij}, b_{jk} são representados apenas pelos termos U_l^e e as funções $\varphi_{ij} L_{jk}$ representadas por N_{il} , para $l = 1, \dots, ngle$, tal que:

$$u_i^e = \sum_{j=1}^{ngle} N_{ij}(x, y) U_j^e = \mathbf{N}^e \mathbf{U}^e, \quad (19)$$

onde o subíndice $ngle$ representa o número de graus de liberdade do elemento.

Esquemáticamente a Eq. (19) para os deslocamentos generalizados para o Modelo de Placas de Kirchhoff-Love para o elemento apresentados a seguir:

$$\mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} u_0^e \\ v_0^e \\ w^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \cdots & N_{nfu} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_{nfu} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_{nfu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^e \\ U_2^e \\ \vdots \\ U_{ngle}^e \end{Bmatrix}. \quad (20)$$

É interessante definir vetores das funções de aproximação associadas a cada uma das componentes de deslocamento u_0, v_0 ou w , onde cada vetor representa uma linha da matriz, tal que

$\mathbf{N}^e = \{\mathbf{N}^u, \mathbf{N}^v, \mathbf{N}^w\}^T$ da Eq. (20), mostrada a seguir:

$$\mathbf{N}^u \equiv [N_1 \ 0 \ 0 \mid N_2 \ 0 \ 0 \mid \cdots \mid N_{n_{fu}} \ 0 \ 0] \quad (21)$$

$$\mathbf{N}^v \equiv [0 \ N_1 \ 0 \mid 0 \ N_2 \ 0 \mid \cdots \mid 0 \ N_{n_{fu}} \ 0] \quad (22)$$

$$\mathbf{N}^w \equiv [0 \ 0 \ N_1 \mid 0 \ 0 \ N_2 \mid \cdots \mid 0 \ 0 \ N_{n_{fu}}] \quad (23)$$

Assim, a aproximação para cada componente de deslocamento fica representada por:

$$u_0^e = \mathbf{N}^u \mathbf{U}^e \quad \delta u_0^e = \mathbf{N}^u \delta \mathbf{U}^e \quad (24)$$

$$v_0^e = \mathbf{N}^v \mathbf{U}^e \quad \delta v_0^e = \mathbf{N}^v \delta \mathbf{U}^e \quad (25)$$

$$w_0^e = \mathbf{N}^w \mathbf{U}^e \quad \delta w_0^e = \mathbf{N}^w \delta \mathbf{U}^e \quad (26)$$

As deformações da parcela linear são definidas como $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \mathbf{L}^0 \cdot \mathbf{u}^e$ e $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{L}^k \cdot \mathbf{u}^e$, em que \mathbf{L}^0 e \mathbf{L}^k são operadores diferenciais definidos como

$$\mathbf{L}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Sendo possível assim definir uma matriz de derivadas \mathbf{B}^0

$$\mathbf{B}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{L}^0 \mathbf{N} \\ \mathbf{L}^k \mathbf{N} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Zienkiewicz & Taylor (1991) utilizam matrizes auxiliares para definir a deformação não-linear, que foram adaptadas para a discretização em MEFG, em que utiliza-se a Eq. (23) para a definição da matriz \mathbf{G}

$$(\mathbf{A}^z)^T \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & \frac{\partial w}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Com as matrizes auxiliares \mathbf{A}^z e \mathbf{G} definidas, pode-se montar o vetor $\boldsymbol{\theta}$ referente às rotações das normais à placa e sua variação $\delta \boldsymbol{\theta}$,

$$\boldsymbol{\theta} \equiv \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^1 \\ \vdots \\ U^{N_{gl}} \end{Bmatrix} = \mathbf{G} \mathbf{U}, \quad \delta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{G} \delta \mathbf{U} \quad (30)$$

Assim, pode-se definir o vetor de deformações não-lineares de (9) em função da matriz \mathbf{A}^z

e do vetor $\boldsymbol{\theta}$

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{NL} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\ 2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{A}^z \boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2} \mathbf{A}^z \mathbf{G} \mathbf{U}. \quad (31)$$

Pode-se facilmente mostrar (Zienkiewicz & Taylor, 1991) que a variação da deformação não linear pode ser representada num formato mais conveniente para programação, isto é:

$$\begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{NL} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \delta \left(\frac{1}{2} \mathbf{A}^z \boldsymbol{\theta} \right) = \frac{1}{2} \delta \mathbf{A}^z \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \mathbf{A}^z \delta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}^z \delta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}^z \mathbf{G} \delta \mathbf{U}. \quad (32)$$

Definindo $\mathbf{B}^{NL} \equiv \mathbf{A}^z \mathbf{G}$ e utilizando a definição de (28), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{NL} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{B}^{NL}(\mathbf{U}) \mathbf{U}, \quad \begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{NL} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}^{NL}(\mathbf{U}) \delta \mathbf{U}; \quad \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}^0 \mathbf{U} \quad \begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \delta \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}^0 \delta \mathbf{U} \quad (33)$$

Aplicando as definições de Eq. (33) e (10) ao operador bilinear (Eq. (12)), que representa a variação do trabalho interno (δW_{int}), tem-se a seguinte forma matricial

$$\begin{aligned} G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \delta W_{int} = \int_{\Omega} \delta \mathbf{U}^T (\mathbf{B}^0)^T \mathbf{C} \mathbf{B}^0 \mathbf{U} + \delta \mathbf{U}^T (\mathbf{B}^0)^T \mathbf{C} \frac{1}{2} \mathbf{B}^{NL} \mathbf{U} \\ + \delta \mathbf{U}^T (\mathbf{B}^{NL})^T \mathbf{C} \mathbf{B}^0 \mathbf{U} + \delta \mathbf{U}^T (\mathbf{B}^{NL})^T \mathbf{C} \frac{1}{2} \mathbf{B}^{NL} \mathbf{U}. \end{aligned} \quad (34)$$

Colocando os vetores $\delta \mathbf{U}$ e \mathbf{U} em evidência obtêm-se:

$$\delta W_{int} = \int_{\Omega} \delta \mathbf{U}^T \left[(\mathbf{B}^0)^T \mathbf{C} \mathbf{B}^0 + (\mathbf{B}^0)^T \mathbf{C} \frac{1}{2} \mathbf{B}^{NL} (\mathbf{B}^{NL})^T \mathbf{C} \mathbf{B}^0 + (\mathbf{B}^{NL})^T \mathbf{C} \frac{1}{2} \mathbf{B}^{NL} \right] \mathbf{U} d\Omega. \quad (35)$$

É possível particularizar δW_{int} para um elemento. Assim a variação do trabalho interno para este elemento é denotada por δW_{int}^e dada por $\delta W_{int}^e = (\delta \mathbf{U}^e)^T \mathbf{F}_{int}^e$. Então defini-se a Matriz de Rigidez do elemento (\mathbf{K}^e) tal que $\mathbf{F}_{int}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{U}^e$, onde (colchetes de (35))

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega} \left[(\mathbf{B}^0)^T \mathbf{C} \mathbf{B}^0 + (\mathbf{B}^0)^T \mathbf{C} \frac{1}{2} \mathbf{B}^{NL} + (\mathbf{B}^{NL})^T \mathbf{C} \mathbf{B}^0 + (\mathbf{B}^{NL})^T \mathbf{C} \frac{1}{2} \mathbf{B}^{NL} \right] d\Omega. \quad (36)$$

O próximo passo é aplicar uma regra de quadratura para realizar a integração numérica da Eq. (36). No presente trabalho foi usada a regra de integração triangular de Wandzura & Xiao (2003), escolhida devido a propriedade de ser simétrica no triângulo.

Genericamente, tem-se um sistema algébrico global de equações que, neste caso, devido às não linearidades geradas pela utilização das hipóteses de von Kármán, a própria matriz de

rigidez do sistema depende do vetor solução, o que pode ser explicitado como $\mathbf{K}(\mathbf{U})\mathbf{U} = \mathbf{F}$. No presente trabalho é usado o Método de Newton-Raphson completo. De forma simplificada, nomeia-se os vetores \mathbf{F}_{int} e \mathbf{F}_{ext} que representam as forças internas e externas, respectivamente, e define-se um vetor de resíduo \mathbf{R} como

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}) - \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{R}. \quad (37)$$

A partir de uma estimativa inicial, \mathbf{U}^k , calcula-se o resíduo e sua derivada em relação ao vetor solução, a qual é nomeada como Matriz de Rigidez Tangente (\mathbf{K}^{TG}), sabendo que $\frac{\partial \mathbf{F}_{ext}}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{0}$, tem-se:

$$\mathbf{K}^{TG} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial \mathbf{F}_{int} - \mathbf{F}_{ext}}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial \mathbf{F}_{int}}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial \mathbf{F}_{ext}}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial \mathbf{F}_{int}}{\partial \mathbf{U}}. \quad (38)$$

Essa matriz \mathbf{K}^{TG} é utilizada para resolver um sistema linear de equações e assim chegar a um incremento $\Delta \mathbf{U}$ que deve ser adicionado à estimativa inicial, \mathbf{U}^k , de forma que se obtenha uma estimativa corrigida para o vetor solução \mathbf{U}^{k+1} . Como a Matriz de Rigidez Tangente se torna mal condicionada é necessário um método capaz de solucionar esse sistema linear de equações descrito abaixo em (b). Neste trabalho utiliza-se o procedimento de Babuška descrito em Strouboulis et al. (2000) e Duarte et al. (2000) que necessita a definição de uma constante ϵ_{ps} e uma tolerância tol_ϵ . O processo é o seguinte:

- (a) Definir ϵ_{ps} e tol_ϵ , adotado neste trabalho como $\epsilon_{ps} = 10^{-6}$ e $tol_\epsilon < 10^{-9}$;
- (b) Resolver o sistema $\mathbf{K}^{TG}(\Delta \mathbf{U}) = -\mathbf{R}$ para $\Delta \mathbf{U}$;
- (c) Corrige $\mathbf{U}^{k+1} = \mathbf{U}^k + \Delta \mathbf{U}$.

No próximo passo, após encontrar \mathbf{U}^{k+1} , deve-se refazer os cálculos do vetor força $\mathbf{F}_{int}(\mathbf{U})$ com $\mathbf{U}^k = \mathbf{U}^{k+1}$ e reiniciar os cálculos na Eq. (37) até que as seguintes tolerâncias sejam satisfeitas: $\frac{\|\mathbf{R}\|}{\|\mathbf{F}_{ext}\|} < 10^{-6}$ e $\frac{\|\Delta \mathbf{U}^k\|}{\|\mathbf{U}^{k+1}\|} < 10^{-6}$.

Partindo da Eq. (38), na forma indicial, como $F_i^{int} = K_{ij}U_j$, para encontrar a Matriz de Rigidez Tangente, tem-se

$$K_{ir}^{TG} = \frac{\partial K_{ij}U_j}{\partial U_r} = \frac{\partial K_{ij}}{\partial U_r}U_j + K_{ij}\frac{\partial U_j}{\partial U_r} = \frac{\partial K_{ij}}{\partial U_r}U_j + K_{ij}\delta_{jr} = \frac{\partial K_{ij}}{\partial U_r}U_j + K_{ir} \quad (39)$$

e aplicando a Eq. (36) ao primeiro termo da Eq. (39), tem-se

$$\frac{\partial K_{ij}}{\partial U_r}U_j = \frac{\partial}{\partial U_r} \left[\int_{\Omega} \left(B_{mi}C_{mn}B_{nj} + B_{mi}^{NL}C_{mn}B_{nj} + B_{mi}C_{mn}\frac{B_{nj}^{NL}}{2} + B_{mi}^{NL}C_{mn}\frac{B_{nj}^{NL}}{2} \right) d\Omega \right] U_j. \quad (40)$$

Para desenvolver a Eq. (40), é interessante usar a definição da matriz $\mathbf{B}^{NL} = \mathbf{A}^z\mathbf{G}$. Derivando ambos os lados da equação tem-se

$$\frac{\partial \mathbf{B}^{NL}}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial (\mathbf{A}^z\mathbf{G})}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial (\mathbf{A}^z)}{\partial \mathbf{U}}\mathbf{G} + \mathbf{A}^z\frac{\partial (\mathbf{G})}{\partial \mathbf{U}}. \quad (41)$$

Como $\frac{\partial (\mathbf{G})}{\partial \mathbf{U}} = 0$, ver Eq. (29), tem-se

$$\frac{\partial \mathbf{B}^{NL}}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial (\mathbf{A}^z)}{\partial \mathbf{U}}\mathbf{G}. \quad (42)$$

Para resolver a derivada da matriz \mathbf{A}^z em relação a \mathbf{U} , é necessário ainda definir a derivada do deslocamento transversal w em relação a \mathbf{U} . Para isso, utiliza-se a notação indicial

$$\frac{\partial w}{\partial U_r} = \frac{\partial (N_k^w U_k)}{\partial U_r} = N_k^w \frac{\partial (U_k)}{\partial U_r} = N_k^w \delta_{kr} = N_r^w \quad (43)$$

e deve-se resolver usando (29)

$$\frac{\partial (A_{kl}^z)}{\partial U_r} = \frac{\partial}{\partial U_r} \begin{bmatrix} w_{,x} & 0 \\ 0 & w_{,y} \\ w_{,y} & w_{,x} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial (N_k^w{}_{,x} U_k)}{\partial U_r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial (N_k^w{}_{,y} U_k)}{\partial U_r} \\ \frac{\partial (N_k^w{}_{,y} U_k)}{\partial U_r} & \frac{\partial (N_k^w{}_{,x} U_k)}{\partial U_r} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_r^w{}_{,x} & 0 \\ 0 & N_r^w{}_{,y} \\ N_r^w{}_{,y} & N_r^w{}_{,x} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Para facilitar a representação das equações da Matriz Tangente utiliza-se a notação abaixo

$$\frac{\partial (A_{kl}^z)}{\partial U_r} \equiv Ar_{klr}.$$

Após a definição da derivada da matriz \mathbf{B}^{NL} , pode-se escrever termo a termo da Eq. (40), sendo apresentadas abaixo as deduções dos termos da Eq. (40)

$$\frac{\partial}{\partial U_r} (B_{mi} C_{mn} B_{nj}) = 0; \quad (45)$$

$$\frac{\partial}{\partial U_r} (B_{mi}^{NL} C_{mn} B_{nj}) = \frac{\partial B_{mi}^{NL}}{\partial U_r} C_{mn} B_{nj} = \frac{\partial (A_{mk}^z G_{ki})}{\partial U_r} C_{mn} B_{nj} = Ar_{mkr} G_{ki} C_{mn} B_{nj}; \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial U_r} \left(B_{mi} C_{mn} \frac{B_{nj}^{NL}}{2} \right) &= B_{mi} C_{mn} \frac{1}{2} \frac{\partial B_{nj}^{NL}}{\partial U_r} = B_{mi} C_{mn} \frac{1}{2} \frac{\partial (A_{nk}^z G_{kj})}{\partial U_r} \\ &= B_{mi} C_{mn} \frac{1}{2} \frac{\partial (A_{nk}^z)}{\partial U_r} G_{kj} = B_{mi} C_{mn} \frac{1}{2} Ar_{nkr} G_{kj}; \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial U_r} \left(B_{mi}^{NL} C_{mn} \frac{1}{2} B_{nj}^{NL} \right) &= \frac{\partial B_{mi}^{NL}}{\partial U_r} C_{mn} \frac{1}{2} B_{nj}^{NL} + B_{mi}^{NL} C_{mn} \frac{1}{2} \frac{\partial B_{nj}^{NL}}{\partial U_r} \\ &= \frac{\partial (G_{km} A_{ki}^z)}{\partial U_r} C_{mn} \frac{1}{2} A_{nl}^z G_{lj} + G_{km} A_{ki}^z C_{mn} \frac{1}{2} \frac{\partial (A_{nl}^z G_{lj})}{\partial U_r} \\ &= G_{km} Ar_{kir} C_{mn} \frac{1}{2} A_{nl}^z G_{lj} + G_{km} A_{ki}^z C_{mn} \frac{1}{2} Ar_{nlr} G_{lj}. \end{aligned} \quad (48)$$

A junção das Eq. (46) a (48) ao segundo termo da Eq. (39) forma a Matriz Tangente utilizada pelo Método de Newton-Raphson. A Matriz Tangente na forma indicial é apresentada.

$$\begin{aligned} K_{ir}^{TG} &= K_{ir} + Ar_{mkr} G_{ki} C_{mn} B_{nj} + B_{mi} C_{mn} \frac{1}{2} Ar_{nkr} G_{kj} \\ &\quad + G_{km} Ar_{kir} C_{mn} \frac{1}{2} A_{nl}^z G_{lj} + G_{km} A_{ki}^z C_{mn} \frac{1}{2} Ar_{nlr} G_{lj}. \end{aligned} \quad (49)$$

3.4 Discretização do Modelo de Reissner-Mindlin

A discretização para o modelo de placa de Reissner-Mindlin é análoga ao de Kirchhoff-Love com algumas poucas mudanças para adaptá-lo ao modelo matemático. Devido ao grau de liberdade referentes às rotações θ_x e θ_y , a representação da aproximação dos deslocamentos fica com o seguinte formato:

$$\mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} u_0^e \\ v_0^e \\ w^e \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^e \\ U_2^e \\ U_3^e \\ \vdots \\ U_{ngle}^e \end{Bmatrix}, \quad (50)$$

Em relação às deformações, Eq. (19) sofre mudança na parcela relativa à curvatura ($\boldsymbol{\kappa}$) e acrescenta-se o termo relativo ao cisalhamento transversal ($\boldsymbol{\gamma}^{cis}$), as parcelas de deformação ficam como

$$\mathbf{L}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}^\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (51)$$

em que as matrizes de derivadas \mathbf{B}^0 e \mathbf{B}^C são definidas por

$$\mathbf{B}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{L}^0 \mathbf{N} \\ \mathbf{L}^k \mathbf{N} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^C = [\mathbf{L}^\gamma \mathbf{N}] \quad (52)$$

enquanto a matriz \mathbf{B}^{NL} é a mesma do Modelo de Placa de Kirchhoff, a matriz \mathbf{B}^C é referente à deformação transversal, tal que

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}^0 \mathbf{U}, \quad \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{NL} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}^{NL} \mathbf{U}, \quad \boldsymbol{\gamma}^{cis} = \mathbf{B}^C \mathbf{U} \quad (53)$$

De modo semelhante à discretização para placas finas, chega-se a

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega} \left[(\mathbf{B}^0)^T \mathbf{C} \mathbf{B}^0 + (\mathbf{B}^0)^T \mathbf{C} \frac{1}{2} \mathbf{B}^{NL} + (\mathbf{B}^{NL})^T \mathbf{C} \mathbf{B}^0 + (\mathbf{B}^{NL})^T \mathbf{C} \frac{1}{2} \mathbf{B}^{NL} + (\mathbf{B}^C)^T \mathbf{C}^{cis} \mathbf{B}^C \right] d\Omega. \quad (54)$$

Como os termos nos quais há alteração de valor estão na parcela linear de rigidez, K_{ir} da Eq. (54), a Matriz de Rigidez Tangente para o Modelo de Reissner-Mindlin fica no mesmo formato que a Eq. (49).

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Esta seção abrange os resultados referentes às comparações entre o código utilizado neste trabalho e exemplos numéricos presentes em Levy (1942) e Reddy (2004) de mesmo modelo cinemático com distintos métodos de solução por expansão de séries e MEF, respectivamente. São realizadas também comparações entre teorias de placas de Reissner-Mindlin e Kirchhoff-Love utilizando as hipóteses de von Kármán, assim como entre MEFG com PU lineares (C^0) ou com continuidade arbitrária (C^k).

Para análise da convergência não linear do deslocamento máximo com o modelo de placa de Reissner-Mindlin, na Seção 4.1 utiliza-se um caso estudado por Levy (1942) de uma placa fina de liga de alumínio, submetida a uma pressão e engastada nas bordas. Na Seção 4.2, visando verificar e comparar os resultados obtidos no código de teste, foram replicado um caso apresentado por Reddy (2004), em que uma placa espessa está simplesmente apoiadas, feita de material isotrópico.

4.1 Placa de Alumínio homogênea e engastada

Neste exemplo, uma solução da literatura (Levy, 1942) para placa fina, isotrópica e engastada é comparada com o Modelo de Placa de Reissner-Mindlin, que é testado utilizando MEFG- C^0 ou MEFG- C^k e variando os graus de enriquecimento e com uma simulação realizada em Abaqus[®]. Este exemplo numérico também é utilizado para analisar a convergência para um caso não-linear, além dos efeitos do refino da malha e do número de pontos de integração numérica para diversos graus de enriquecimento.

Os valores obtidos para comparação envolvem a deflexão máxima e de tensão de membrana (σ_x) no centro da placa quadrada e no ponto médio de sua borda respectivamente, ambos na superfície inferior. Considera-se uma placa de liga de alumínio com os seguintes parâmetros geométricos e de material:

$a, b = 254$ mm (comprimento e largura); $h = 1,27$ mm (espessura);
 $E = 68,947$ GPa (módulo de elasticidade); $\nu = 0,316$ (coeficiente de poisson);
 $q_0 = 0,0138$ MPa (carga uniformemente distribuída na superfície superior).

As condições de contorno aplicadas são mostradas abaixo.

$$\begin{aligned} \text{Engaste em } x = a/2 : \quad & u_0 = v_0 = w = \theta_x = \theta_y = 0 \\ & \text{em } y = b/2 : \quad u_0 = v_0 = w = \theta_x = \theta_y = 0 \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \text{Condição de Simetria em } x = 0 : \quad & u_0 = \theta_x = 0 \\ & \text{em } y = 0 : \quad v_0 = \theta_y = 0 \end{aligned} \quad (56)$$

No caso que utiliza MEFG, é importante definir como as condições de contorno serão impostas pois, devido ao maior grau polinomial das funções utilizadas não basta impor valor zero apenas nos coeficientes relativos à partição da unidade, assim como ocorre no MEF tradicional. É necessário restringir os coeficientes referentes as funções enriquecidas, para os coeficientes que não se anulam naturalmente na região com condição de contorno, seguindo, para tal, os trabalhos de Barcellos et al. (2009) e Mendonça et al. (2011) para imposição das condições de contorno.

A malha escolhida é composta por elementos no formato de triângulo retângulo, onde o

número de elementos compondo uma borda denomina a malha. Por exemplo, a Figura 1 mostra malhas com 1, 4 e 8 divisões em cada borda, denominadas respectivamente, M1, M4 e M8.

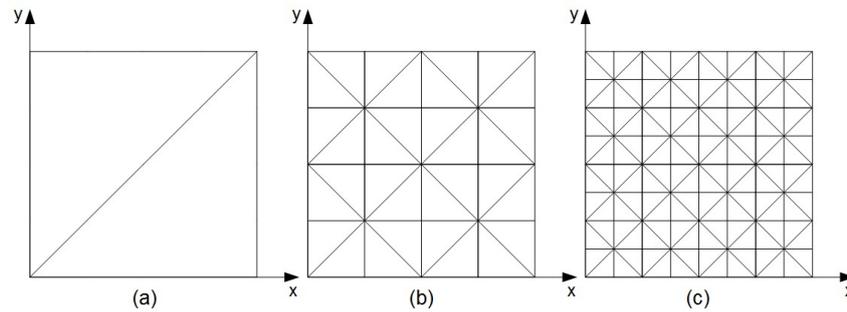


Figura 1: Malhas triangulares (a) M1; (b) M4 e (c) M8.

No gráfico da Figura 2 observa-se a tendência de convergência do deslocamento transversal, w , localizado no centro da placa para análise não linear, com o valor de referência $w_{REF} = 1,7272$ mm (Levy, 1942), utilizando MEF $G-C^0$ com 7 e 25 pontos de integração numérica para regra de triângulo de Wandzura & Xiao (2003). A parametrização da carga é feita através da relação $\bar{P} \equiv q_0 a^4 / Eh^4$. Neste caso resulta em $\bar{P} = 320$, essa magnitude de carga resulta em um caso com uma não linearidade forte para os deslocamentos transversais, já que a relação w/h é de aproximadamente 1,7, enquanto que casos lineares são considerados para $w/h < 0,5$.

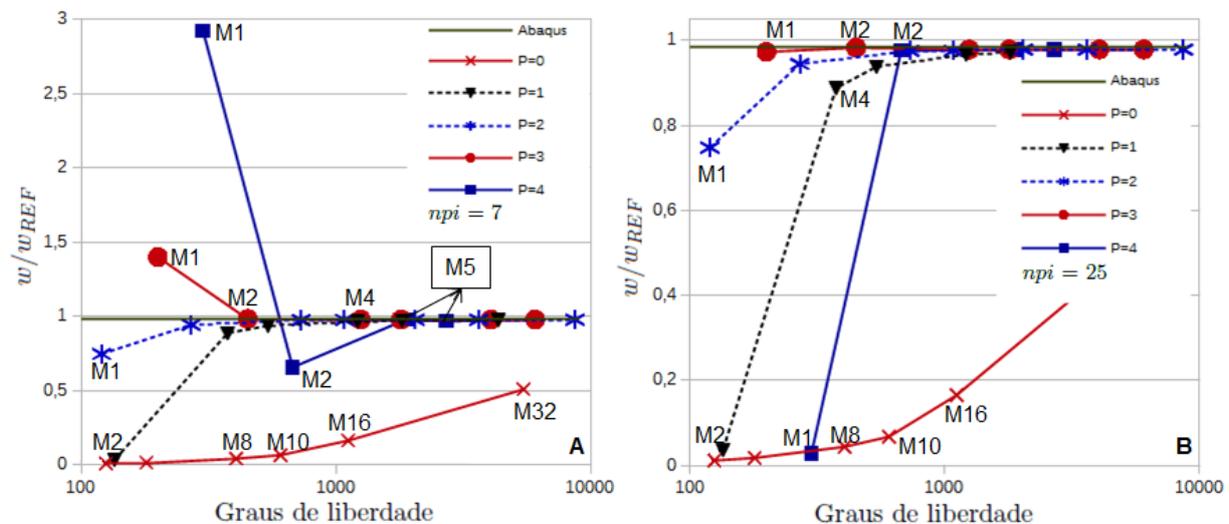


Figura 2: Relação entre o deslocamento transversal pela referência (w/w_{REF}), no centro da placa para MEF $G-C^0$ com refino da malha para vários graus de enriquecimento, $\bar{P} = 320$. Com $n_{pi} = 7$ (A) e $n_{pi} = 25$ (B) pontos de integração de triângulo.

É interessante notar que enriquecimentos com polinômio de grau 4 possui um desempenho aparentemente inferior aos outros enriquecimentos em relação ao número de graus de liberdade, porém, essa defasagem se deve principalmente a dois fatores: O pequeno número de pontos de integração para o elemento causa uma sub-integração, já que a base gerada representa até um polinômio de grau 5; Adicionalmente, apesar do primeiro ponto da curva $p=4$ possuir 300 graus de liberdade, a malha da placa possui apenas 2 elementos (M1), o que representa um efeito negativo na precisão do resultado, principalmente pela predominância dos efeitos das condições

de contorno para essa malha. Por outro lado, nota-se o efeito claro do travamento no caso sem enriquecimento ($p=0$) das funções PU. Já para a parte B da Figura 2 mostra os deslocamentos transversais utilizando 25 pontos de integração. Observa-se que para MEFG- C^0 com enriquecimento até grau 2, o aumento no número de pontos de integração não tem efeito muito significativo. Para $p > 2$, o efeito do número de ponto é perceptível para malhas com poucos elementos, pois a medida que aumenta a quantidade de elementos o efeito da sub-integração diminui, mesmo para bases formadas de grau 4 ou 5 em MEFG- C^0 .

O MEFG com funções PU suaves é mais sensível à variação do número de pontos de integração. A Figura 3 mostra a variação do deslocamento transversal para várias malhas (M4, M8, M10, M16) com 7, 25 e 54 pontos de integração para o caso de MEFG- C^k com enriquecimento $p=1$, $p=2$ e $p=3$. Para maiores graus de enriquecimento o efeito da sub-integração é ainda maior, chegando a causar a não convergência no Método de Newton-Raphson em muitos casos, como em caso de enriquecimento de grau 4 com 7 pontos de integração. Nota-se claramente neste caso como uma integração numérica adequada é importante ao MEFG com funções contínuas, mesmo para uma base de aproximação de grau 1 ($p = 1$), pois a dificuldade de integração para MEFG- C^k está na derivada da PU suave C^k . Enquanto que para MEFG- C^0 , 7 pontos de integração são suficientes para representar mesmo uma base de grau 5 ($p=4$) para uma malha M4 ou superior.

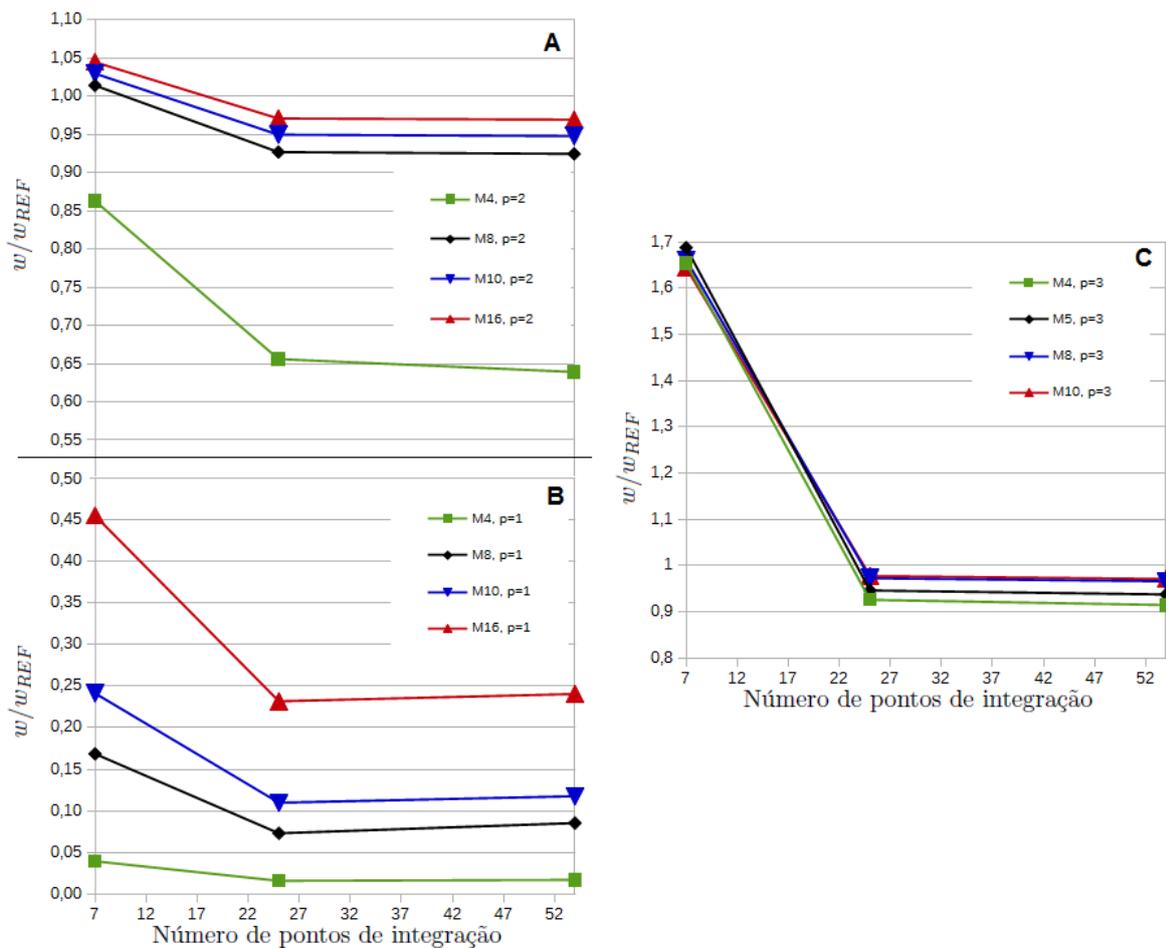


Figura 3: Relação w/w_{REF} , no centro da placa para MEFG- C^k com várias malhas e enriquecimento $p = 1$ (A), $p = 2$ (B) e $p = 3$ (C) com $\bar{P} = 320$.

O gráfico da Figura 4 mostra a tendência do deslocamento, w/w_{REF} , no centro da placa, para vários graus de enriquecimento com o acréscimo do número de graus de liberdade do modelo. Como já comentado sobre a sensibilidade do MEF $G-C^k$ à sub-integração, para enriquecimentos de grau 1 e 2 foram utilizados 25 pontos de integração, já para enriquecimentos de grau 3 e 4 foram utilizados 54 pontos.

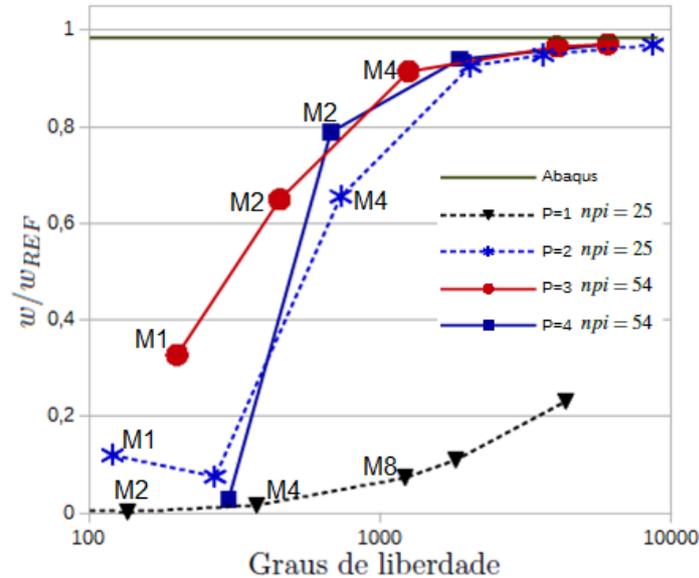


Figura 4: Relação w/w_{REF} , no centro da placa para MEF $G-C^k$ com refino da malha para vários graus de enriquecimento e $\bar{P} = 320$.

Na Figura 4 é possível perceber que a aproximação feita com base de grau 1 ($p=1$) mostrou sinais de travamento por cisalhamento, assim como MEF $G-C^0$ de mesma base ($p=0$), conforme indica a Figura 2. Após esse levantamento de dados, analisando principalmente a Figura 4, optou-se por utilizar, preferencialmente, uma malha M8 com enriquecimento $p=2$ com 25 pontos de integração para MEF $G-C^0$ e $p=3$ com 54 pontos de integração para MEF $G-C^k$, ambos representando uma base de funções de aproximação cúbica.

4.2 Placa Espessa

Neste exemplo é reproduzido o caso encontrado em Reddy (2004), para verificar se resultados de deslocamentos transversal e tensões coplanares estão coerentes com a literatura, é considera uma placa espessa, quadrada, isotrópica com Modelo de Placas de Reissner-Mindlin e com os seguintes parâmetros:

$$a, b = 254 \text{ mm}; \quad h = 25,4 \text{ mm}; \quad a/h = 10; \quad K_s = 5/6; \quad E = 53,779 \text{ GPa}; \quad \nu = 0,3.$$

Neste caso o autor considera condições de contorno de placa simplesmente apoiada é utilizada, denominada como SS-3 (do inglês *simply supported*), em que os deslocamentos são nulos com as rotações livres, com considerações de simetria ao longo dos eixos x e y (ver Eq. (56))

$$\begin{aligned} \text{SS-3 em } x = a/2 : \quad & u_0 = v_0 = w = 0 \\ \text{em } y = b/2 : \quad & u_0 = v_0 = w = 0 \end{aligned} \quad (57)$$

Os resultados obtidos por Reddy (2004) são a deflexão no centro da placa $\bar{w} = w/h$ e as tensões normalizadas $\bar{\sigma}_x = \sigma_x(a^2/Eh^2)$ no ponto $(15,875; 15,875; -h/2)$ para uma malha

uniforme com 16 elementos quadrangulares de nove nós (4x4Q9) e carga uniformemente distribuída, onde o parâmetro de carga é $\bar{P} \equiv q_0 a^4 / Eh^4$. Para MEF G utilizou-se malha M8, fmando uma malha com 128 elementos e 81 nós, como mostrado na Figura 1. Os enriquecimentos das funções PU foram feitos para formar uma base de aproximação de grau 3. Ou seja, para MEF G - C^0 enriquecido com polinômios de grau 2 e MEF G - C^k enriquecido com polinômios de grau 3. Para ilustrar o comportamento do deslocamento transversal no centro da placa e tensão na direção x, com o aumento da carga, é utilizada a Figuras 5, as quais representam, respectivamente, as plotagens \bar{w} e $\bar{\sigma}_x$ para MEF G - C^0 e Reddy (2004).

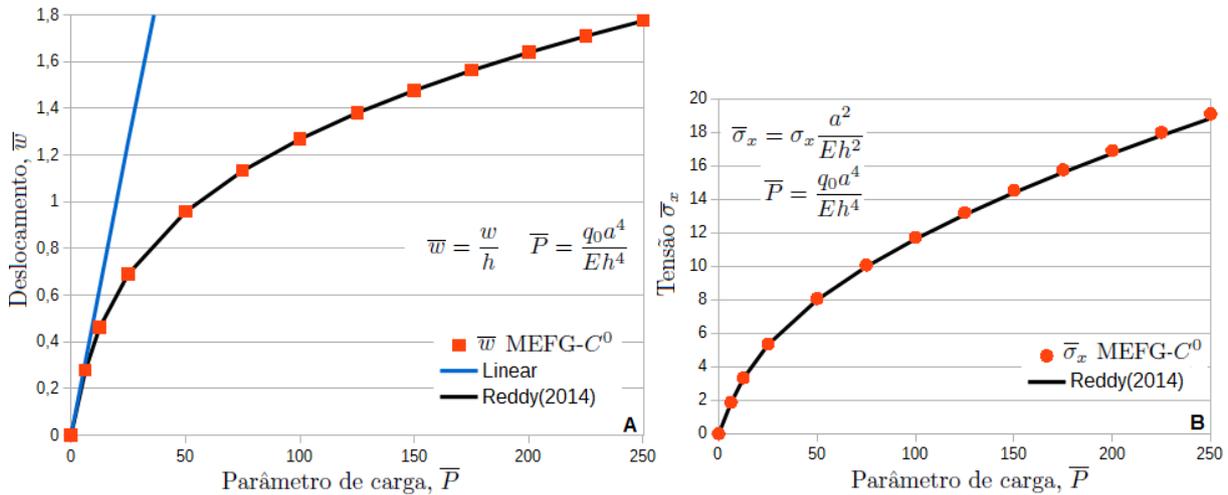


Figura 5: Deslocamento transversal \bar{w} (A) e tensão parametrizada $\bar{\sigma}_x$ (B) para referência e MEF G - C^0 com enriquecimento $p = 2$ e $n_{pi} = 25$ utilizando SS-3.

Como observado na Figura 5, os resultados obtidos e de referência são muito próximos, o que indica um bom funcionamento do algoritmo.

Como característica a teoria de Reissner-Mindlin considera a deformação cisalhante transversal com valor constante ao longo da espessura da placa. Uma forma mais precisa de estimar as tensões cisalhantes é pela integração das equações diferenciais de equilíbrio local sem componentes de inércia, apresentada por Chaudhuri (1986) Mendonça (2005).

A Figura 6 (A) apresenta os valores da tensão de cisalhamento transversal por integração, $\bar{\tau}_{xz}$ (Chaudhuri, 1986), no ponto médio da borda ($a/2; 0$) levando em consideração a condição de simetria utilizada para SS-3, carregamento $\bar{P} = 250$, MEF G - C^0 , $p = 3$ e 25 pontos de integração. Na figura é possível observar resultados para análise linear de $\bar{\tau}_{xz}$ com 10 pontos através da espessura e outros dois não lineares com 4 e 10 pontos. Como há uma diferença grande na escala dos valores de tensões calculadas de forma linear (sem hipóteses de von Kármán) e não linear na Figura 6 (A), gerou-se a parte (B), na qual são plotadas apenas as tensões calculadas de forma não linear.

Na Figura 6 (A), é possível notar que a tensão $\bar{\tau}_{xz}$ calculado da forma linear tem formato simétrico através da espessura e que, nas superfícies superior e inferior, as tensões são nulas. O que não ocorre quando assumida as hipóteses de von Kármán. Como não há nenhum carregamento cisalhante no plano, pela Lei de Conservação do Momento Angular em um elemento infinitesimal próximo à superfície, as tensões $\bar{\tau}_{xz}$ deveriam ter valor igual a zero em pontos com $z = +h/2$, o que é facilmente notado que não ocorre na Figura 6 (B).

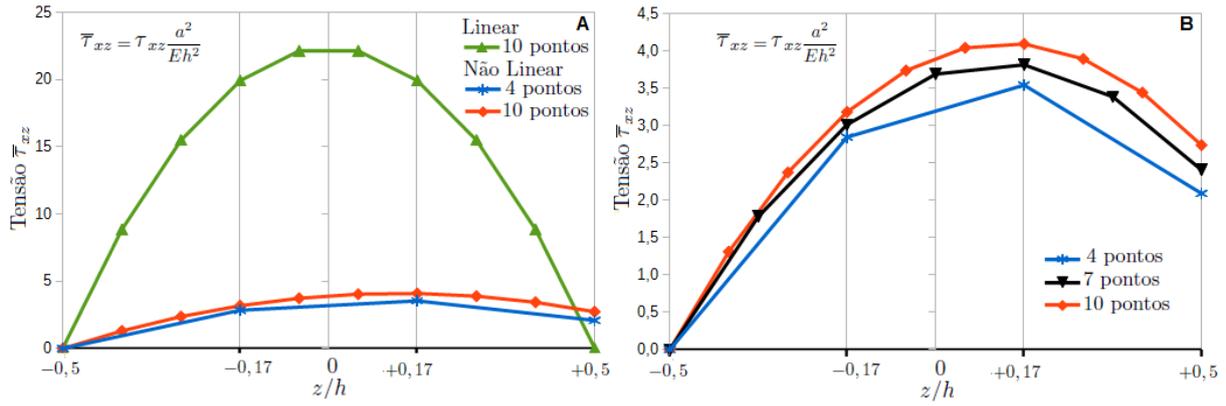


Figura 6: Tensão $\bar{\tau}_{xz}(a/2; 0)$ através da espessura com MEFG- C^0 , $p = 3$ utilizando SS-3 e $\bar{P} = 250$. Calculadas de forma linear e não linear (A) e apenas não linear (B).

Teorema: A condição para que $\tau = 0$ em $z = +h/2$ no processo de integração é que as tensões de membrana devem satisfazer exatamente as Equações de Equilíbrio.

Para entender melhor, parte-se da recuperação das tensões transversais pela integração das Equações de Equilíbrio para $z = -h/2$ até $z = +h/2$ e, utilizando a condição de contorno $\tau_{x,z}(x, y, -h/2) \equiv 0$, tem-se:

$$\begin{aligned}\tau_{xz}^i(x, y, z) &= - \int_{z=-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x \right) dz \\ \tau_{yz}^i(x, y, z) &= - \int_{z=-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y \right) dz \\ \sigma_z^i(x, y, z) &= - \int_{z=-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \tau_{xz}^i}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^i}{\partial y} + b_z \right) dz\end{aligned}\quad (58)$$

e multiplicando as duas primeiras equações de (58) por z e integrando

$$\begin{aligned}\int_{z=-h/2}^{h/2} \frac{\partial \tau_{xz}^i}{\partial z} z dz &= - \int_{z=-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x \right) z dz \\ \int_{z=-h/2}^{h/2} \frac{\partial \tau_{yz}^i}{\partial z} z dz &= - \int_{z=-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y \right) z dz.\end{aligned}\quad (59)$$

Aplicando a definição de forças resultantes (10), às Eq. (58)

$$\begin{aligned}\tau_{xz}^i(x, y, h/2) &= - \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \int_{z=-h/2}^{h/2} b_x dz \right) = q_x^+ \\ \tau_{yz}^i(x, y, h/2) &= - \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \int_{z=-h/2}^{h/2} b_y dz \right) = q_y^+ \\ \sigma_z^i(x, y, h/2) &= - \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \int_{z=-h/2}^{h/2} b_z dz \right) = q_z\end{aligned}\quad (60)$$

onde q_x^+, q_y^+ e q_z são cargas distribuídas aplicadas na superfície superior, e considera-se a superfície inferior livre de carregamentos. Aplicando, similarmente, a equação de momentos

resultantes (10) nas Eq. (59), tem-se:

$$\int_{z=-h/2}^{h/2} \frac{\partial \tau_{xz}^i}{\partial z} z dz = - \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \int_{z=-h/2}^{h/2} b_x z dz \right)$$

$$\int_{z=-h/2}^{h/2} \frac{\partial \tau_{yz}^i}{\partial z} z dz = - \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \int_{z=-h/2}^{h/2} b_y z dz \right) \quad (61)$$

Integrando por partes o lado esquerdo, por exemplo

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \tau_{xz}^i}{\partial z} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{\partial}{\partial z} (z \tau_{xz}^i) - \tau_{xz}^i \right] dz \quad (62)$$

$$= z \tau_{xz}^i \Big|_{-h/2}^{h/2} - Q_x \quad (63)$$

considerando

$$-\frac{h}{2} \tau_{xz}^i \left(-\frac{h}{2} \right) = 0 \quad \frac{h}{2} \tau_{xz}^i \left(\frac{h}{2} \right) \simeq 0$$

então

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \tau_{xz}^i}{\partial z} dz = -Q_x. \quad (64)$$

Consequentemente,

$$-Q_x = - \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \int_{z=-h/2}^{h/2} b_x z dz \right)$$

$$-Q_y = - \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \int_{z=-h/2}^{h/2} b_y z dz \right). \quad (65)$$

Observou-se que as Eq. (60) e (65) contêm cinco equações diferenciais de equilíbrio do modelo de primeira ordem, quando incorporados os efeitos de força de corpo. Se a solução aproximada satisfaz perfeitamente o equilíbrio local do modelo de placa, quando se realiza a integração, obtém-se automaticamente τ_{xz} , τ_{yz} e σ_z que satisfazem os carregamentos externos nas face superior da placa. Consequentemente, o campo de tensões admissíveis por integração também satisfaz as condições de forças de contorno nas bordas da placa. Por outro lado, se a solução aproximada vem de uma solução de Elementos Finitos que, geralmente, não satisfaz o equilíbrio local, ao fim da integração, as tensões transversais não satisfarão a distribuição de carregamentos na superfície superior.

5 CONCLUSÕES

A implementação foi realizada por meio de algoritmos no *software* MATLAB®, em que placas, laminadas ou não, com diferentes materiais lineares foram testadas e os resultados comparados com os da literatura (Levy, 1942; Reddy, 2004) e/ou com o *software* comercial de análise por elementos finitos Abaqus®. A formulação discretizada para MEF3D, desenvolvida para este caso de não linearidade geométrica, se mostrou capaz de obter os campos de deslocamentos e de tensões, tanto para placas isotrópicas ou anisotrópicas, quanto para laminados

de acordo com a literatura, apesar da dificuldade de validar o código, devido a ausência de resultados analíticos.

A utilização de MEEG- C^k mostrou-se uma forma eficaz para formar base com continuidade $C1$, requerida pelas equações de placa fina, sem a necessidade da utilização de elementos não conformes como em Reddy (2004).

O MEEG permite enriquecimento polinomial hierárquico, o que facilita a eliminação de patologias numéricas (como *locking*), de forma natural, além de permitir outros tipos especiais de enriquecimento (para problemas de trincas, por exemplo, ou outros com altos gradientes ou singularidades ou descontinuidades). O código também permite a utilização de MEF, bastando usar funções PU C^0 sem enriquecimento.

Os esforços de membrana, devido às hipóteses de von Kármán, afetam a obtenção das tensões transversais pelo método de integração de Chaudhuri (1986), tornando necessário uma outra abordagem para tornar mais precisas essas tensões.

AGRADECIMENTOS

Se sobrar espaço.

REFERÊNCIAS

- Goossens, M., Mittelbach, F., & Samarin, A., 1994. *The LaTeX Companion*. Addison-Wesley.
- Hinton, E., Sienz, J., & Afonso, S. M. B., 1995. Experiences with Olhoffs exact semi-analytical algorithm. In Olhoff, N. & Rozvany, G. I. N., eds, *First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-1)*, pp. 4146.
- Mattiasson, K., 1980. Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 17, n. 1, pp. 145153.
- Ramm, E., 1981. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. In Wunderlich, W., Stein, E., & Bathe, K. J., eds, *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, pp. 6389. Springer-Verlag.
- Sienez, J., 1994. *Integrated Structural Modelling, Adaptive Analysis and Shape Optimization*. PhD thesis, University of Wales/Swansea.