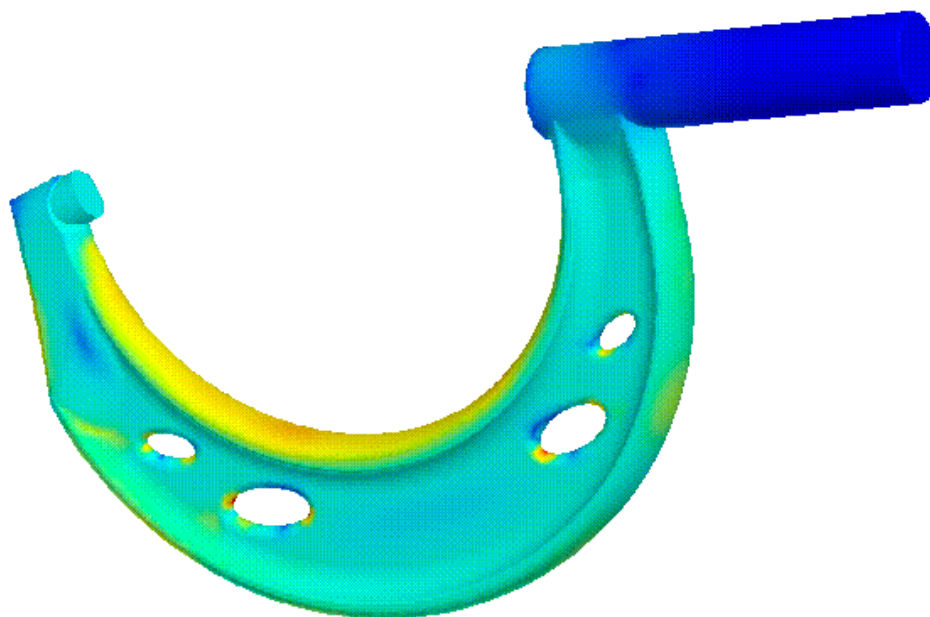




CURSO DE MECÂNICA DOS SÓLIDOS A

Prof. José Carlos Pereira

Agosto de 2003

SUMÁRIO

1 – CÁLCULO DAS REAÇÕES.....	1
1.1 – Tipos de suportes (ou apoios).....	1
1.2 – Tipos de carregamentos	2
1.3 – Classificação de vigas.....	3
1.4 – Cálculo das reações nas vigas	4
2 – DIAGRAMAS DE FORÇA AXIAL, CORTANTE E DE MOMENTOS	6
2.1 – Método das seções.....	6
2.1.1 – Força cortante nas vigas (V)	6
2.1.2 – Força axial nas vigas (P)	7
2.1.3 – Momento fletor (M)	7
2.1.4 – Diagramas de forças cortante e axial e do momento fletor	8
2.2 – Método do somatório.	21
2.2.1 – Equações diferenciais de equilíbrio	21
3 – TENSÃO.....	28
3.1 – Definição de Tensão	28
3.2 – Tensor de Tensões	28
3.3 – Tensões em membros com carregamento axial	29
3.3.1 – Carga axial	29
3.3.2 – Tensão média de cisalhamento.....	30
3.4 – Tensões Admissíveis; Fator de segurança	35
3.5 – Projeto de membros e pinos com carregamento axial	36
4 – DEFORMAÇÃO	44
4.1 – Significado físico da deformação	44
4.2 – Definição matemática de deformação.....	44
4.3 – Propriedades mecânicas dos materiais isotrópicos	46
4.3.1 – Diagrama tensão-deformação	46
4.3.2 – Coeficiente de poisson para materiais isotrópicos.....	51
4.3.3 – Lei de Hooke para materiais isotrópicos (Estado triaxial de tensões) ...	52
4.4 – Energias de deformação elástica.....	54
4.4.1 – Energia de deformação elástica para tensão uniaxial	54
4.4.2 – Energia de deformação elástica para tensão de cisalhamento	54

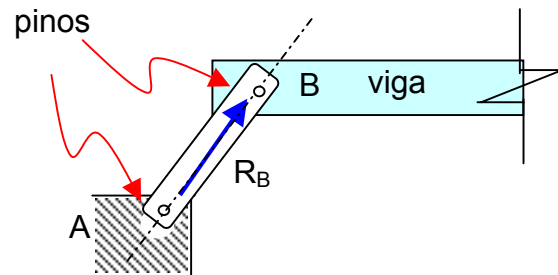
4.4.3 – Energia de deformação elástica para um estado de tensão multiaxial	55
4.5 – Deformação de membros carregados axialmente	55
4.6 – Tensões Residuais.....	62
5 – TORÇÃO	67
5.1 – Aplicação do método das seções	67
5.2 – Premissas Básicas.....	67
5.3 – A fórmula da torção.....	68
5.4 – Observações sobre a fórmula da torção	69
5.5 – Projeto de membros circulares em torção.....	73
5.6 – Ângulo de torção de membros circulares.....	74
5.7 – Fórmula da torção para eixos com diferentes materiais.....	81
5.8 – Membros maciços não circulares.....	84
6 – TENSÃO DE FLEXÃO EM VIGAS	85
6.1 – Premissa cinemática básica.....	85
6.2 – Fórmula da flexão elástica	86
6.3 – Centróide de área	88
6.4 – Momento de inércia de área	90
6.5 – Flexão pura de vigas com seção assimétrica	94
6.6 – Tensão de flexão em vigas com diferentes materiais (Método da rigidez equivalente)	97
7 – TENSÃO DE CISALHAMENTO EM VIGAS	102
7.1 – Preliminares	102
7.2 – Fórmula da tensão de cisalhamento em vigas.....	102
7.3 – Distribuição da tensão de cisalhamento em vigas	105
7.4 – Tensão de cisalhamento em vigas com diferentes materiais (Método da rigidez equivalente).....	109
7.5 – Fluxo de cisalhamento	113
8 – TENSÕES COMPOSTAS.....	120
8.1 – Superposição e suas limitações.....	120
8.2 – Flexão oblíqua	123
8.3 – Elementos estruturais com carregamento excêntrico	126
8.4 – Superposição de tensões de cisalhamento.....	129
9 – TRANSFORMAÇÃO DE TENSÕES.....	133
9.1 – Introdução	133

9.2 – Equações gerais para transformação de tensão plana	137
9.3 – Círculo de tensões de Mohr	139
9.3 – Construção do círculo de tensões de Mohr	141
9.4 – Importante transformação de tensão	146
9.6 – Tensões principais para o estado geral de tensões	148
9.7 – Círculo de Mohr para o estado geral de tensões	150
9.7 – Critérios de escoamento e de fratura	151
9.7.1 – Observações preliminares	151
9.7.2 – Teoria da máxima tensão de cisalhamento (Tresca) (mat. dúcteis)	152
9.7.3 – Teoria da máxima energia de distorção (von Mises) (mat. dúcteis)	155
9.7.4 – Teoria da máxima tensão normal (mat. frágeis)	159

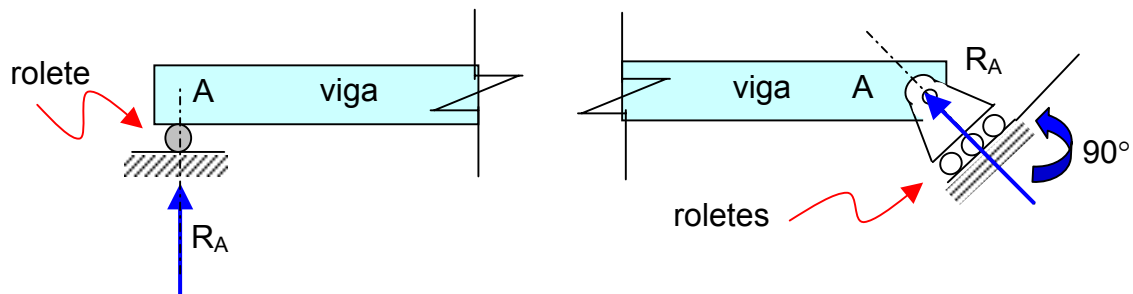
1 – CÁLCULO DAS REAÇÕES

1.1 – Tipos de suportes (ou apoios)

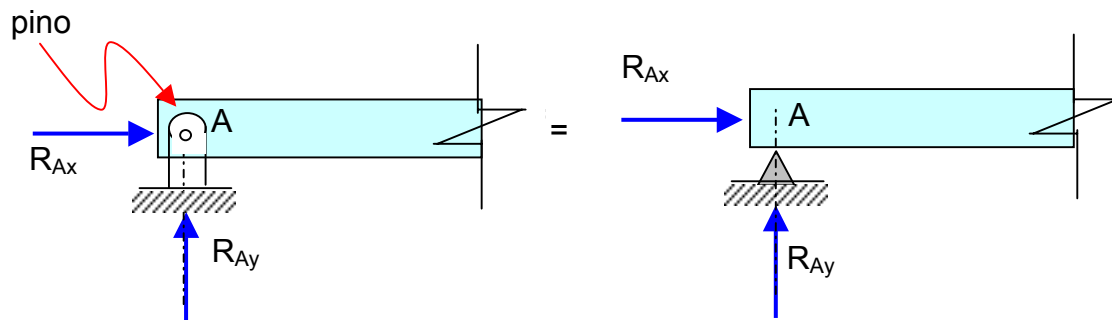
a) Articulação: (Resiste à uma força em apenas uma direção)



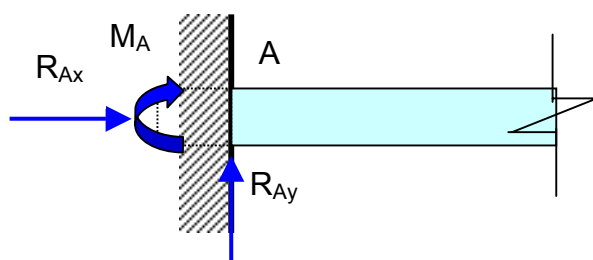
b) Rolete: (Resiste à uma força em apenas uma direção)



c) Pino: (Resiste à uma força que age em qualquer direção)

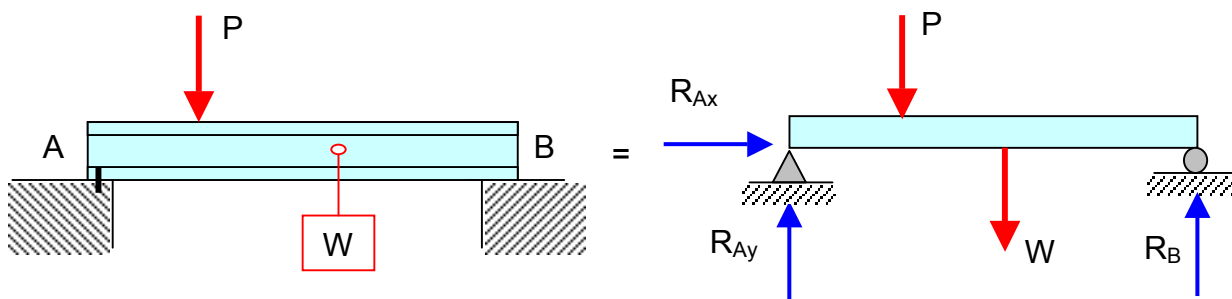


d) Engastamento: (Resiste à uma força que age em qualquer direção e à um momento)

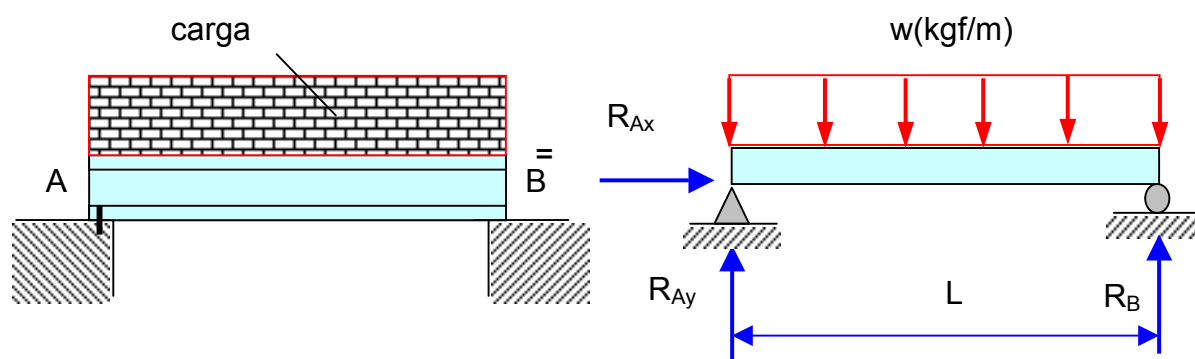


1.2 – Tipos de carregamentos

a) Forças concentradas

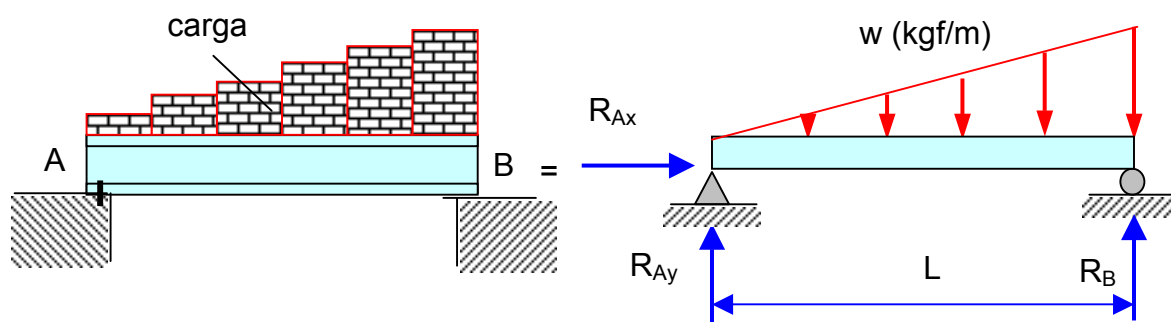


b) Carga uniforme distribuída



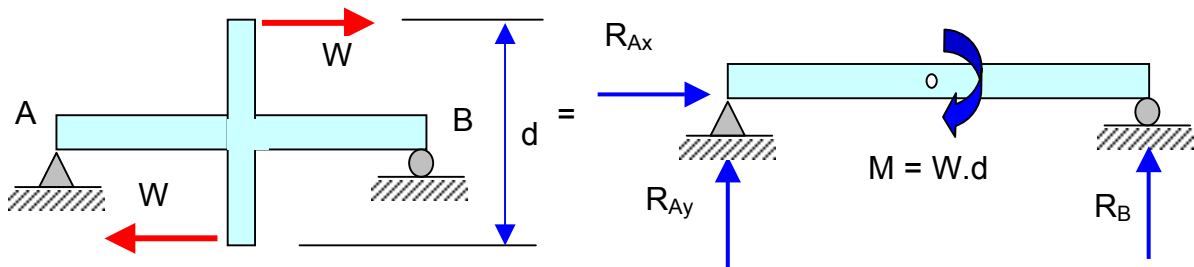
Observação: Para o cálculo das reações de apoio, a carga uniforme distribuída é substituída por uma força concentrada equivalente W igual a área da figura geométrica da carga e que passa pelo seu centróide: $W = p \cdot L$

c) Carga uniformemente variável



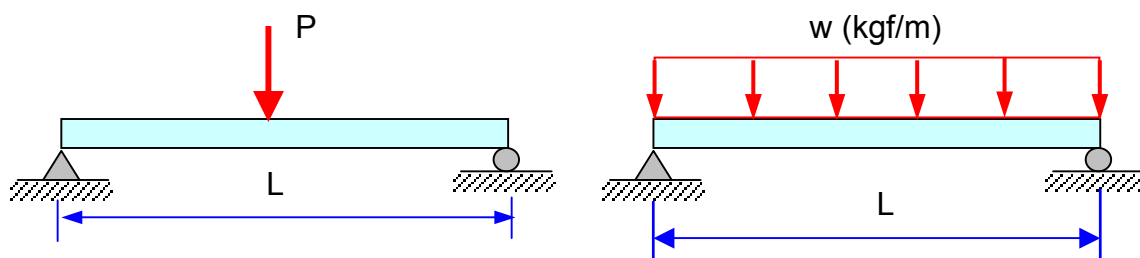
Observação: Para o cálculo das reações de apoio, a carga uniforme variável é substituída por uma força concentrada equivalente W igual a área da figura geométrica da carga e que passa pelo seu centróide: $W = (p \cdot L) / 2$

d) Momento concentrado

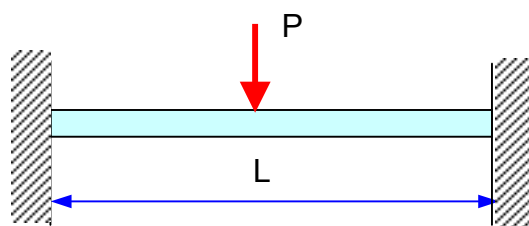


1.3 – Classificação de vigas

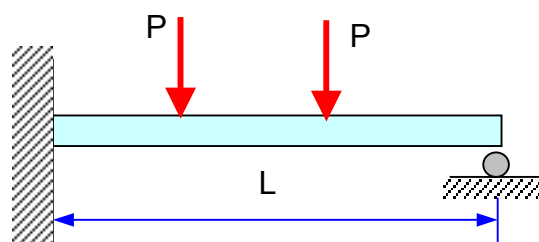
a) Simplesmente apoiadas



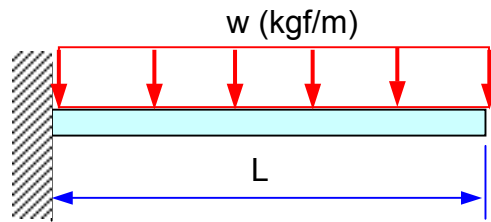
b) Bi-engastada (fixa)



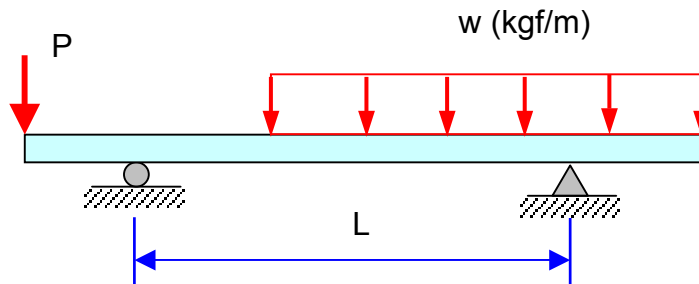
c) Engastada- Apoiada



d) Em balanço



e) Em balanço nas extremidades



1.4 – Cálculo das reações nas vigas

Equações de equilíbrio estático (forças aplicadas em um plano): $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ e $\sum M_{A \text{ ou } B} = 0$ ou $\sum F_x = 0$, $\sum M_A = 0$ e $\sum M_B = 0$

Exemplo 1.1: Calcular as reações nos apoios da viga. Desprezar o peso da viga.

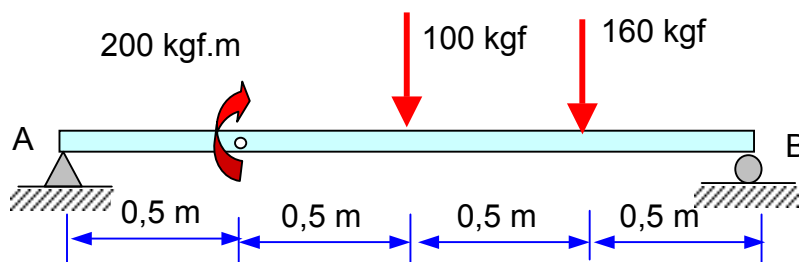
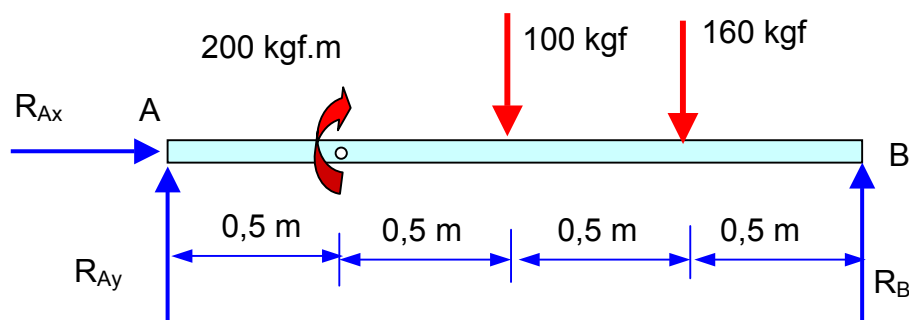


Diagrama de corpo livre (D.C.L.):



$$\rightarrow \sum F_x = 0 \rightarrow R_{Ax} = 0$$

$$\curvearrowright \sum M_A = 0, \quad 200 + 100 \cdot 1 + 160 \cdot 1,5 - R_B \cdot 2 = 0 \rightarrow R_B = 270 \text{ kgf}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad R_{Ay} - 100 - 160 + 270 = 0 \rightarrow R_{Ay} = -10 \text{ kgf}$$

Verificação:

$$\curvearrowright \sum M_B = 0 \rightarrow -10 \cdot 2 + 200 - 100 \cdot 1 - 160 \cdot 0,5 = 0 \quad \text{OK}$$

Observação: Nenhum momento é transmitido por uma junta articulada, apenas as forças horizontais e verticais são transmitidas.

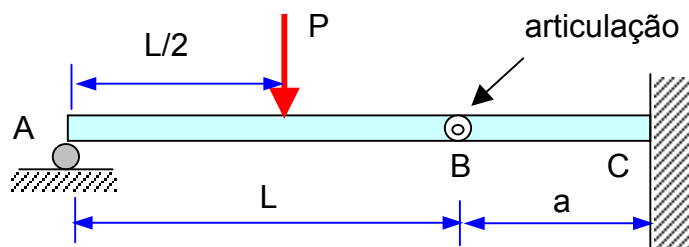
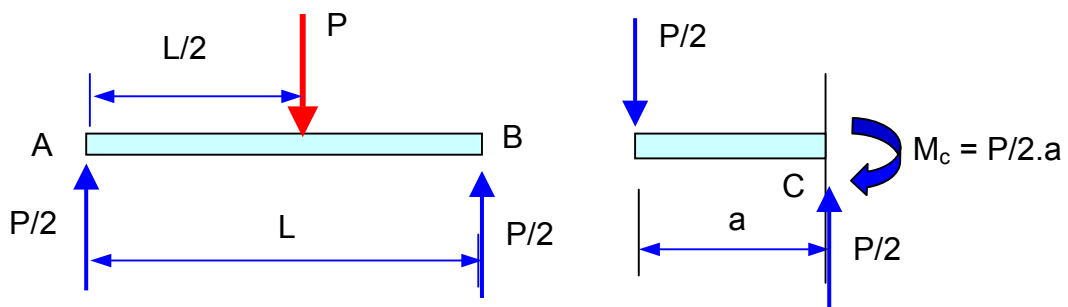


Diagrama de corpo livre (D.C.L.):



2 – DIAGRAMAS DE FORÇA AXIAL, CORTANTE E DE MOMENTOS

2.1 – Método das seções

O método das seções estabelece procedimentos para a determinação dos esforços internos ao longo do comprimento da viga. O conceito de equilíbrio das partes de um corpo é utilizado quando o corpo com um todo está em equilíbrio.

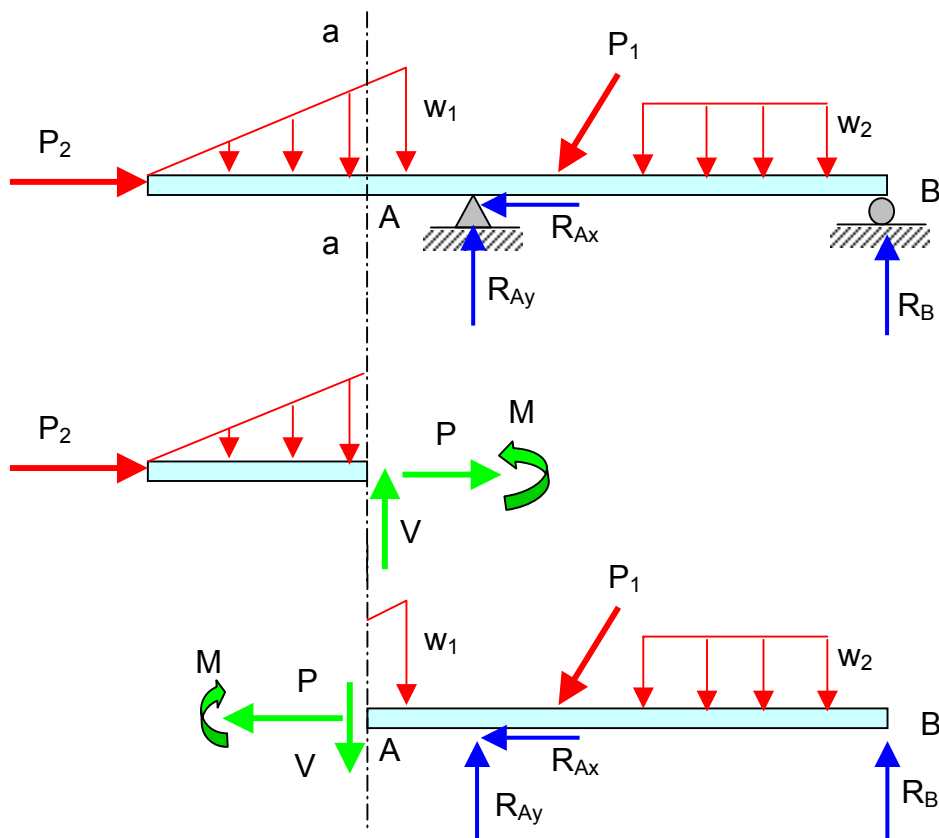


Figura 2.1 – Esforços internos em vigas

onde V é a força cortante, P é a força axial e M é o momento fletor.

2.1.1 – Força cortante nas vigas (V)

A força cortante V , perpendicular ao eixo da viga, deve ser introduzida na seção: A-A para satisfazer a equação de equilíbrio $\sum F_y = 0$.

A força cortante é definida positiva quando girar a seção no sentido anti-horário.

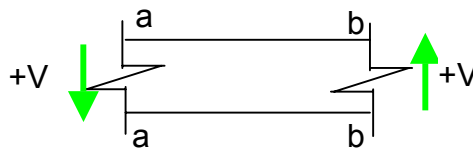


Figura 2.2 – Força cortante

2.1.2 – Força axial nas vigas (P)

A força axial P , paralela ao eixo da viga e que passa pelo centróide da seção, deve ser introduzida na seção A-A para satisfazer a equação de equilíbrio $\sum F_x = 0$.

A força axial é definida positiva ou de tração quando agir de dentro para fora da seção e negativa ou de compressão em caso contrário.

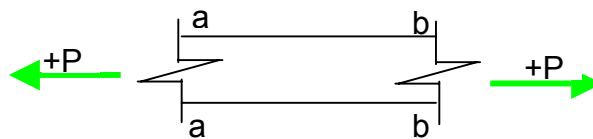


Figura 2.3 – Força axial

2.1.3 – Momento fletor (M)

O momento fletor M , que gira em torno de um eixo perpendicular ao plano que contém a viga, deve ser introduzido na seção A-A para satisfazer a equação de equilíbrio $\sum M_z = 0$. Para isto, o momento provocado pelas forças é normalmente calculado em torno do ponto de interseção de V e P .

O momento fletor é definido positivo quando tracionar a parte interior da viga e comprimir a parte superior da viga, e negativo em caso contrário.

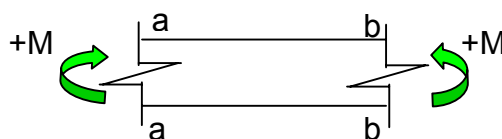
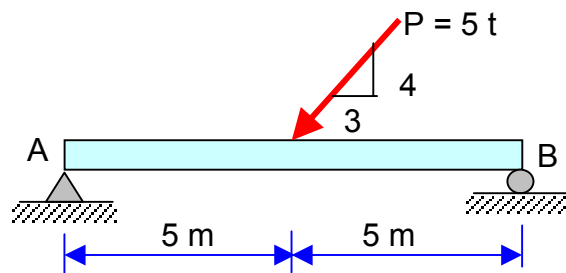


Figura 2.4 – Momento fletor

2.1.4 – Diagramas de forças cortante e axial e do momento fletor

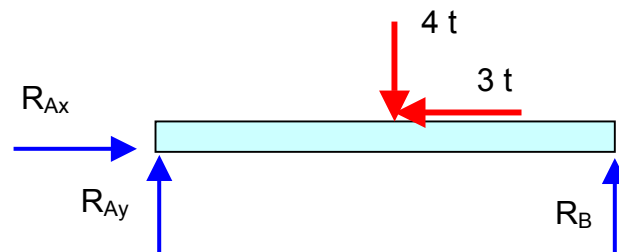
Os diagramas de esforços internos são traçados para se determinar a evolução das forças cortante e axial e do momento fletor ao longo da viga, respectivamente.

Exemplo 2.1: Traçar os diagramas de forças cortante, força axial e de momento fletor para a viga abaixo, sujeita à força inclinada de $P = 5 \text{ t}$. Desprezar o peso da viga.



a - Determinar as reações de apoio.

Diagrama de corpo livre (D.C.L.):



$$\rightarrow \sum F_x = 0, R_{Ax} - 3 = 0, R_{Ax} = 3 \text{ t}$$

$$\curvearrowright \sum M_B = 0, R_{Ay} \cdot 10 - 4 \cdot 5 = 0, R_{Ay} = 2 \text{ t}$$

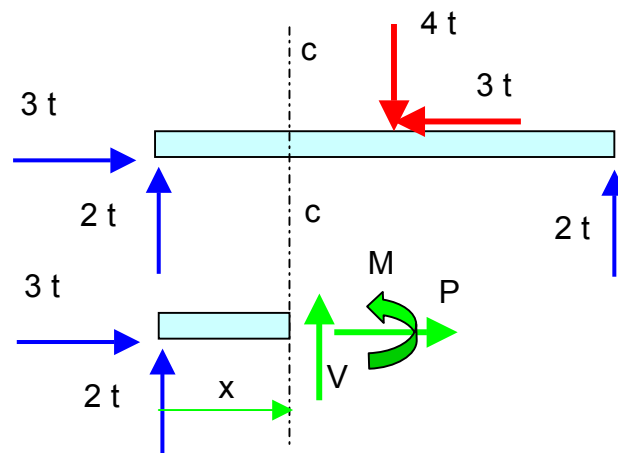
$$\uparrow \sum F_y = 0, 2 - 4 + R_{AB} = 0, R_B = 2 \text{ t}$$

Verificação:

$$\curvearrowright \sum M_A = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 10 = 0 \quad (\text{OK})$$

b - Determinar as forças cortante e axial e o momento fletor em seções entre duas forças concentradas.

Seção c-c ($0 < x < 5$):

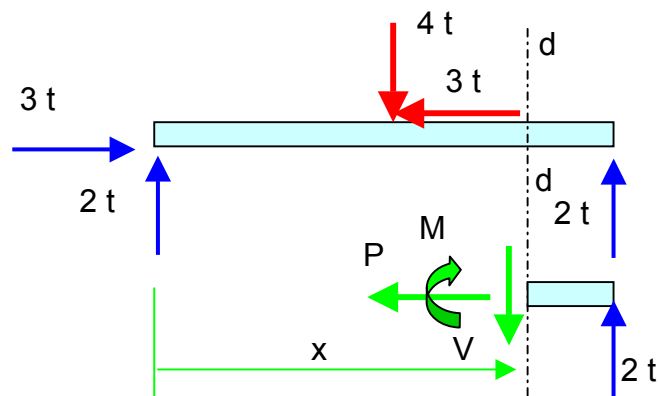


$$\rightarrow \sum F_x = 0, \quad P + 3 = 0, \quad P = -3 \text{ (t)}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad V + 2 = 0, \quad V = -2 \text{ (t)}$$

$$\curvearrowright \sum M_c = 0, \quad -2 \cdot x + M = 0, \quad M = 2x \text{ (t.m)}$$

Seção d-d ($5 < x < 10$):

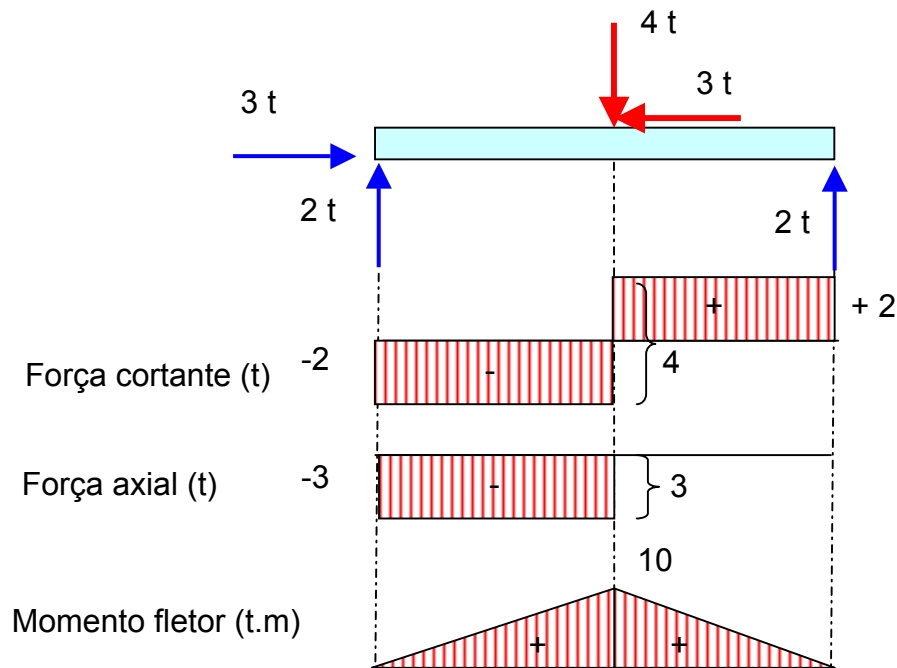


$$\rightarrow \sum F_x = 0, \quad P = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad -V + 2 = 0, \quad V = 2 \text{ (t)}$$

$$\curvearrowright \sum M_d = 0, \quad -2 \cdot (10 - x) + M = 0, \quad M = -2x + 20 \text{ (t.m)}$$

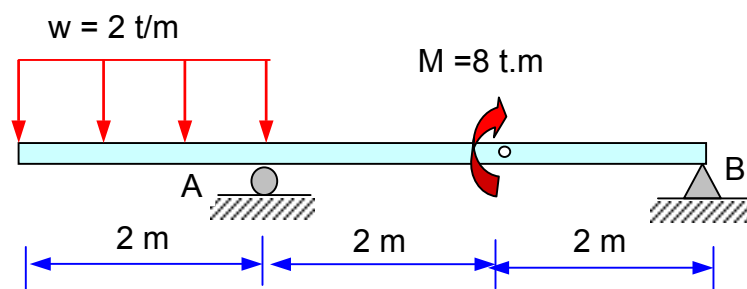
c - Traçar os diagramas de força cortante, força axial e do momento fletor.



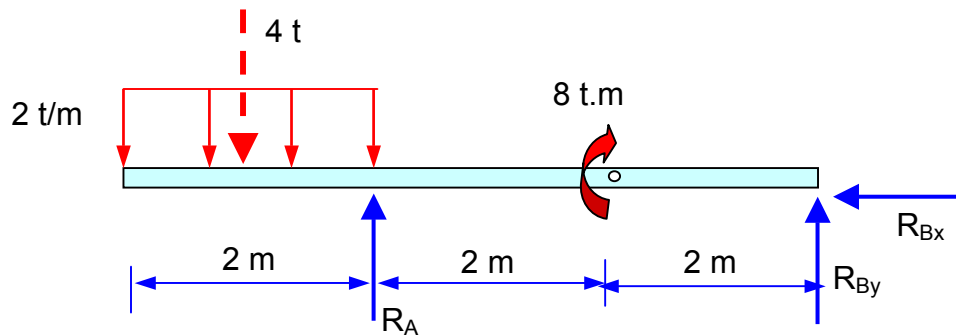
Conclusões Importantes:

- Ponto de força concentrada vertical $\Rightarrow$ Descontinuidade no diagrama de força cortante igual a força concentrada vertical.
- Ponto de força concentrada axial $\Rightarrow$ Descontinuidade no diagrama de força axial igual a força concentrada axial.

Exemplo 2.2: Traçar os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga apresentada abaixo, sujeita à uma força distribuída e a um momento concentrado.



a - Determinar as reações nos apoios (D.C.L.):



$$\rightarrow \sum F_x = 0, \quad R_{Bx} = 0$$

$$\curvearrowright \sum M_B = 0, \quad -4 \cdot 5 + R_A \cdot 4 + 8 = 0, \quad R_A = 3 \text{ t}$$

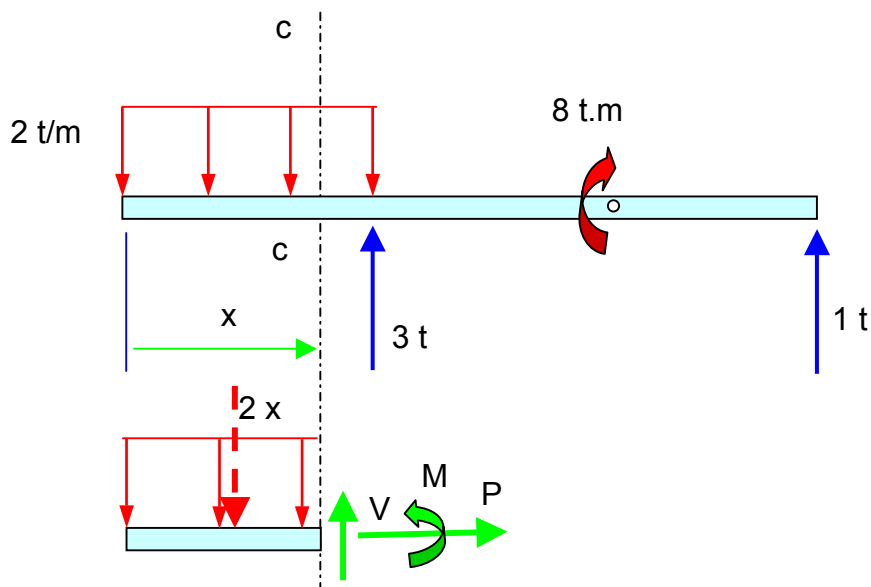
$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad -4 + 3 + R_{By} = 0, \quad R_{By} = 1 \text{ t}$$

Verificação:

$$\curvearrowright \sum M_A = -4 \cdot 1 + 8 - 1 \cdot 4 = 0 \quad (\text{OK})$$

2 - Determinar as forças cortante e o momento fletor em seções entre forças e momentos concentrados e ao longo de uma carga distribuída.

Seção c-c ($0 < x < 2$):

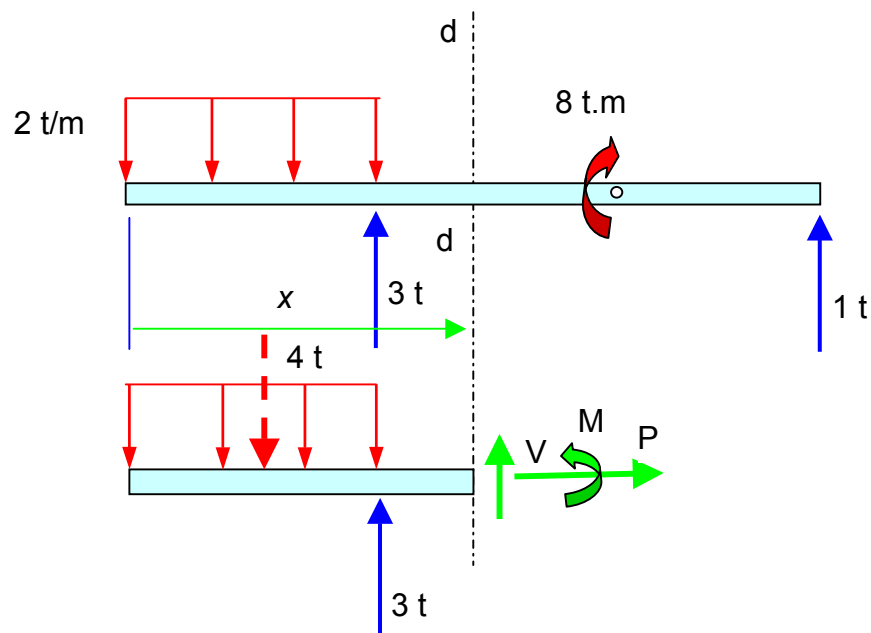


$$\rightarrow \sum F_x = 0, \quad P = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad -2 \cdot x + V = 0, \quad V = 2x \text{ (t)}$$

$$\curvearrowright \sum M_C = 0, \quad 2 \cdot x \cdot x / 2 + M = 0, \quad M = -x^2 \text{ (t.m)}$$

Seção d-d ($2 < x < 4$):

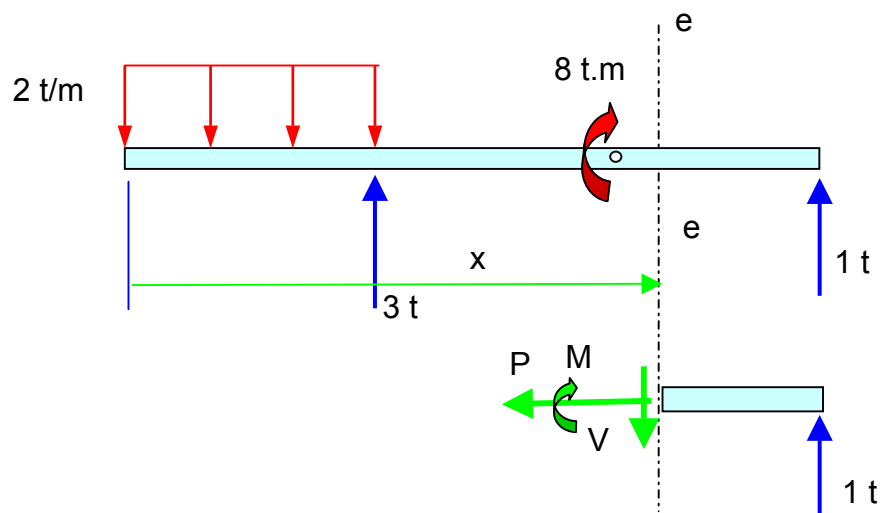


$$\rightarrow \sum F_x = 0, \quad P = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad -4 + 3 + V = 0, \quad V = 1 \text{ (t)}$$

$$\curvearrowleft \sum M_d = 0, \quad 4 \cdot (x - 1) - 3 \cdot (x - 2) + M = 0, \quad M = -x - 2 \text{ (t.m)}$$

Seção e-e ($4 < x < 6$):

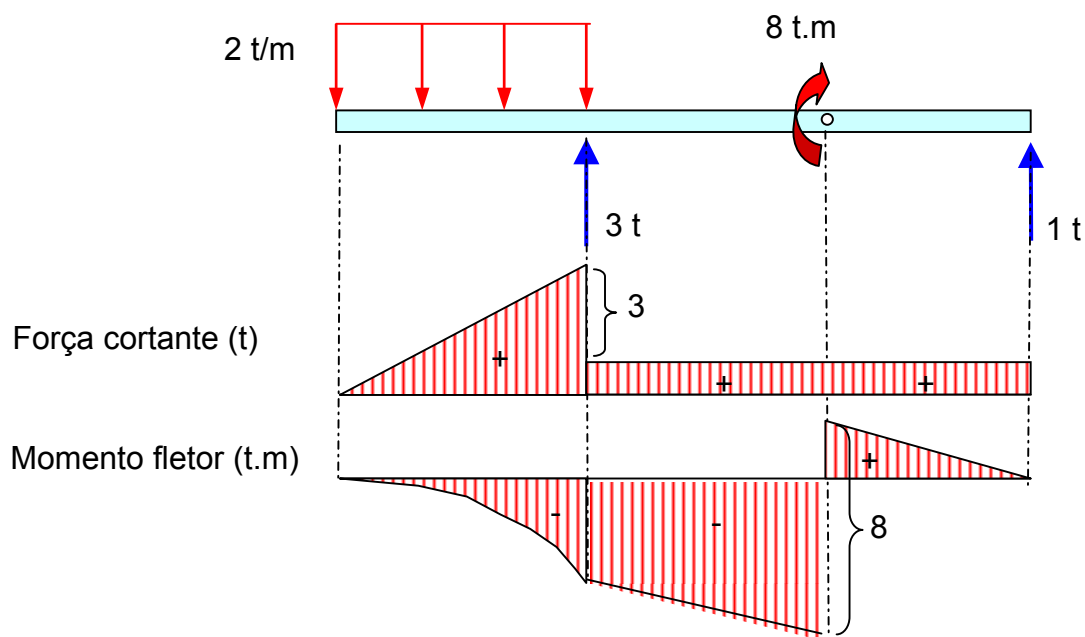


$$\rightarrow \sum F_x = 0, \quad P = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad -V + 1 = 0, \quad V = 1 \text{ (t)}$$

$$\curvearrowright \sum M_E = 0, \quad -1 \cdot (6 - x) + M = 0, \quad M = -x + 6 \text{ (t.m)}$$

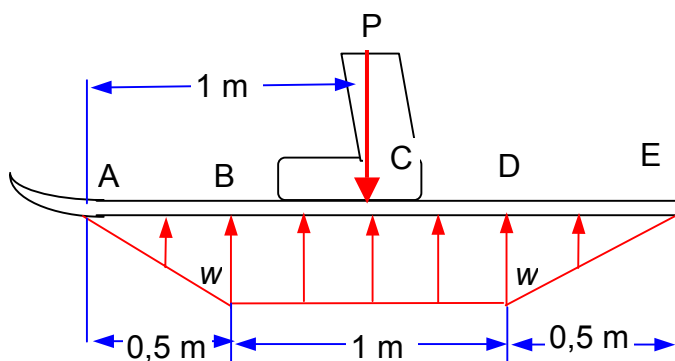
c -Traçar os diagramas de força cortante e do momento fletor.



Conclusões Importantes (além das anteriores):

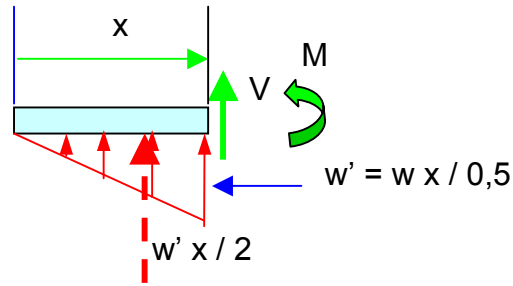
- Ponto de momento concentrado $\Rightarrow$ Descontinuidade no diagrama de momento fletor igual ao momento concentrado.

Exemplo 2.3: Os skis suportam um homem de 80 kg . Se o carregamento da neve na superfície inferior de um ski é trapezoidal como mostrado abaixo, determine a intensidade w e trace os diagramas de força cortante e de momento fletor para um ski. Tome $g=10 \text{ m/s}^2$.



$$\uparrow \sum F_y = 0 \quad , \quad 0,25 w + w + 0,25 w - 400 = 0 \quad , \quad w = 266,67 \text{ N/m}$$

Trecho AB



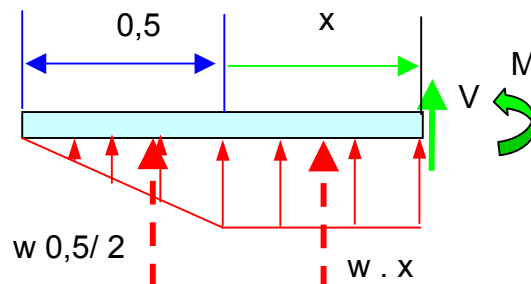
$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad \frac{w x}{0,5} \frac{x}{2} + V = 0, \quad V = -266,67 x^2 \text{ (N)}$$

$$\begin{cases} p/x = 0, V = 0 \\ p/x = 0,5, V = -66,67 \text{ N} \end{cases}$$

$$\curvearrowright \sum M = 0, \quad -\frac{w x}{0,5} \frac{x}{2} \frac{x}{3} + M = 0, \quad M = 88,89 x^3 \text{ (N.m)}$$

$$\begin{cases} p/x = 0, M = 0 \\ p/x = 0,5, M = 11,11 \text{ Nm} \end{cases}$$

Trecho BC



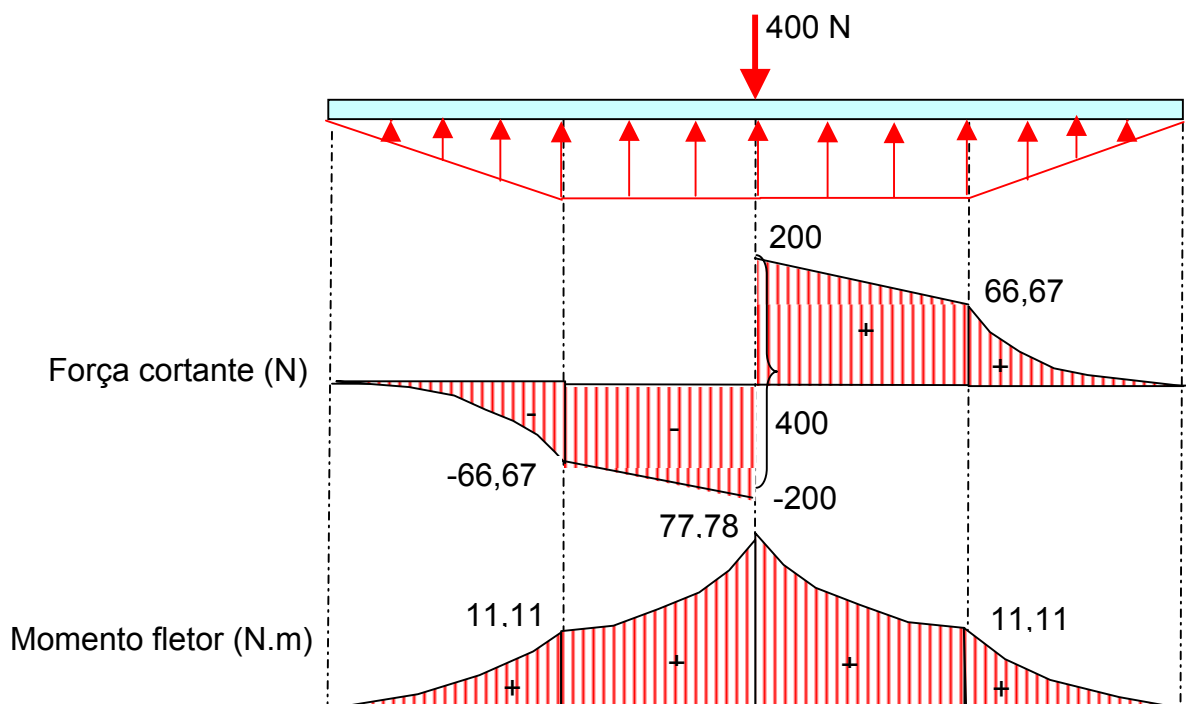
$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad \frac{w \cdot 0,5}{2} + w x + V = 0, \quad V = -266,67 x - 66,67 \text{ (N)}$$

$$\begin{cases} p/x = 0, V = -66,67 \text{ N} \\ p/x = 0,5, V = -200 \text{ N} \end{cases}$$

$$\curvearrowright \sum M = 0, \quad -\frac{w \cdot 0,5}{2} \left(0,5 \frac{1}{3} + x\right) - w x \frac{x}{2} + M = 0, \quad M = 133,34 x^2 + 66,67 x + 11,11$$

$$\begin{cases} p/x = 0, M = 11,11 \text{ N.m} \\ p/x = 0,5, M = 77,78 \text{ N.m} \end{cases}$$

Devido à simetria temos:



Exemplo 2.4: Determine os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga abaixo.

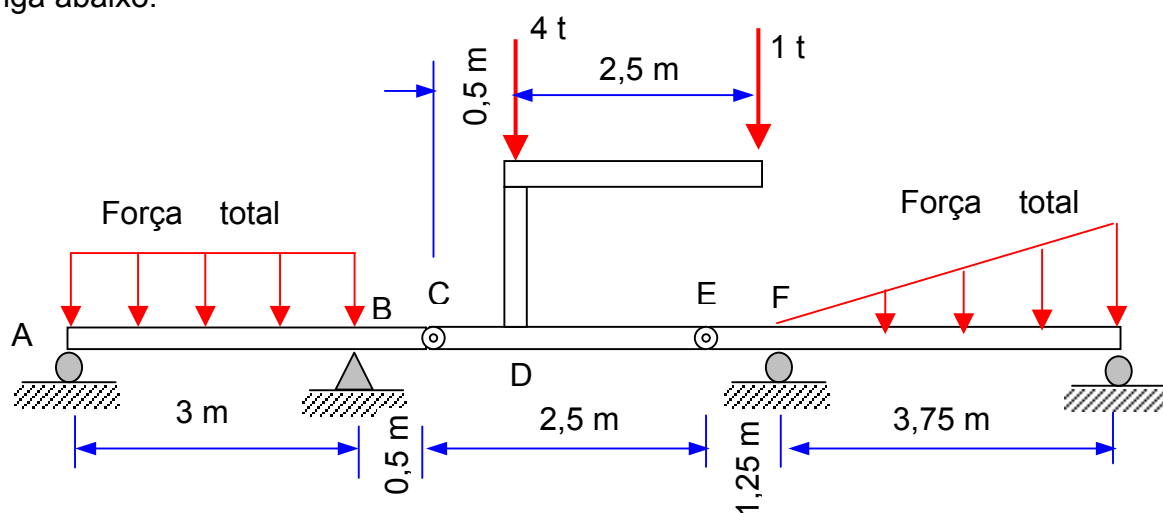
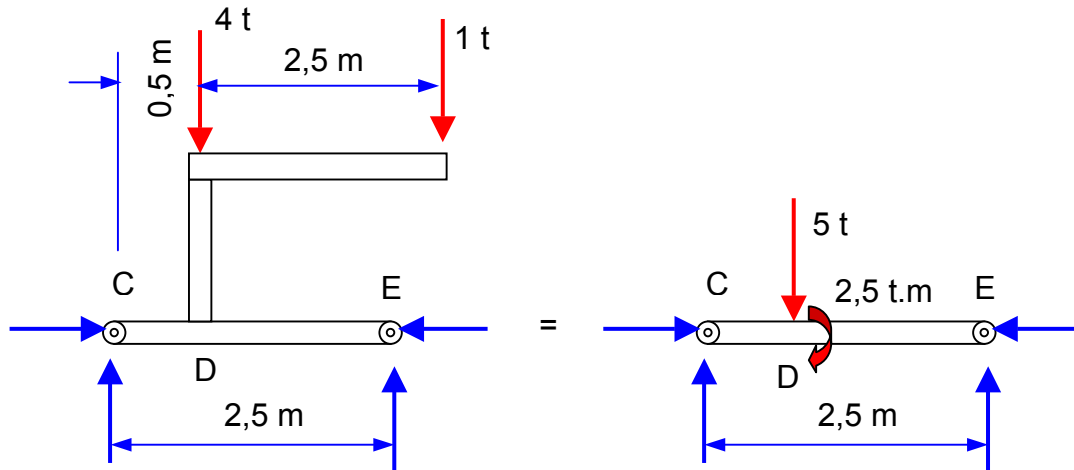


Diagrama de Corpo Livre (DCL):

Viga CDE:

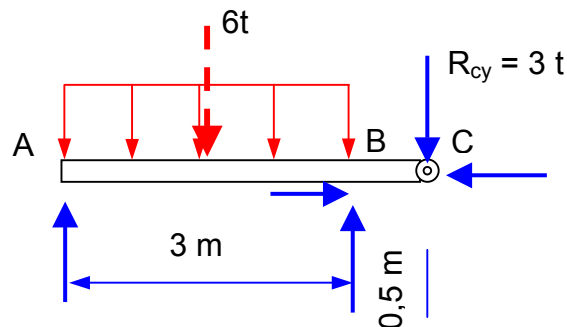


$$\rightarrow \sum F_x = 0, \quad R_{Cx} - R_{Ex} = 0 \Rightarrow R_{Cx} = R_{Ex}$$

$$\curvearrowleft \sum M_C = 0, \quad R_{Ex} \cdot 2,5 - 1 \cdot 3 - 4 \cdot 0,5 = 0 \Rightarrow R_{Ex} = 2 \text{ t}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad R_{Cy} + R_{Ey} - 4 - 1 = 0 \Rightarrow R_{Cy} = 3 \text{ t}$$

Viga ABC:

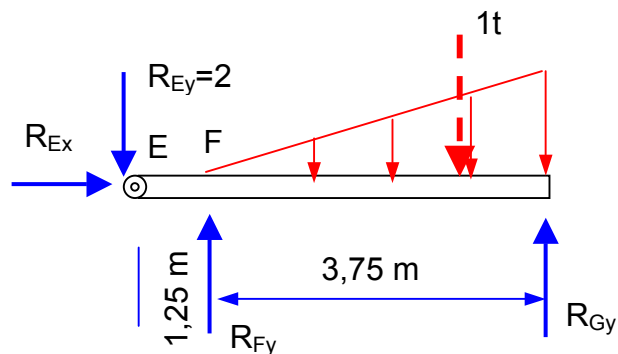


$$\rightarrow \sum F_x = 0, \quad R_{Bx} - R_{Cx} = 0 \Rightarrow R_{Bx} = R_{Cx}$$

$$\curvearrowleft \sum M_A = 0, \quad R_{By} \cdot 3 - 6 \cdot 1,5 - R_{Cy} \cdot 3,5 = 0 \Rightarrow R_{By} = 6,5 \text{ t}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad R_{Ay} + R_{Ey} - 6 - R_{Cy} = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 2,5 \text{ t}$$

Viga EFG:



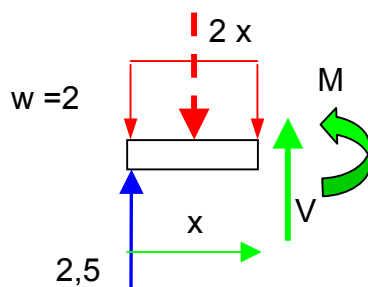
$$\rightarrow \sum F_x = 0, \quad R_{Ex} = 0 \Rightarrow R_{Bx} = R_{Cx} = R_{Ex} = 0$$

$$\curvearrowleft \sum M_E = 0, \quad 2 \cdot (1,25 + 3,75) - R_{Fy} \cdot 3,75 + 1 \cdot 3,75/3 = 0 \Rightarrow R_{Fy} = 3 \text{ t}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad -6 + R_{Fy} - 1 + R_{Gy} = 0 \Rightarrow R_{Gy} = 0 \text{ t}$$

Viga ABC

Trecho AB ($0 < x < 3$):



$$w \cdot 3 = 6 \text{ t (força total)}$$

$$w = 2 \text{ t/m}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad 2,5 - 2x + V = 0 \Rightarrow V = 2x - 2,5 \text{ (t)}$$

$$p/x = 0, \quad V_A = -2,5 \text{ t}$$

$$p/x = 3, \quad V_B = 3,5 \text{ t}$$

$$\curvearrowleft \sum M = 0, \quad -2,5x + 2x \cdot x / 2 + M = 0 \Rightarrow M = -x^2 + 2,5x \text{ (t.m)}$$

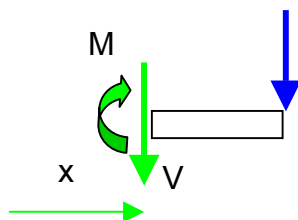
$$p/x = 0, \quad M_A = 0 \text{ t.m}$$

$$p/x = 3, \quad M_B = -1,5 \text{ t.m}$$

$$\text{Momento máximo: } \frac{dM}{dx} = 0, \quad -2x + 2,5 = 0 \Rightarrow x = 1,25 \text{ m}$$

$$M_{\max} (x = 1,25\text{m}) = -(1,25)^2 + 2,5 \cdot 1,25 \Rightarrow M_{\max} = 1,5625 \text{ (t.m)}$$

Trecho BC ($0 < x < 0,5$):



$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad -3 - V = 0 \Rightarrow V = -3 \text{ (t)}$$

$$p/x = 0, \quad V_B = -3 \text{ t}$$

$$p/x = 0,5, \quad V_C = -3 \text{ t}$$

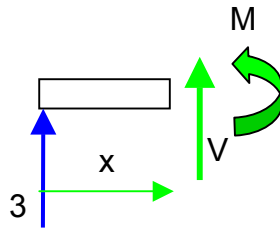
$$\curvearrowleft \sum M = 0, \quad -3 \cdot (0,5 - x) - M = 0 \Rightarrow M = 3x - 1,5 \text{ (t.m)}$$

$$p/x = 0, \quad M_B = -1,5 \text{ t.m}$$

$$p/x = 0,5, \quad M_C = 0 \text{ t.m}$$

Viga CDE

Trecho CD ($0 < x < 0,5$):



$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad 3 + V = 0 \Rightarrow V = -3 \text{ (t)}$$

$$p/x = 0, \quad V_C = -3 \text{ t}$$

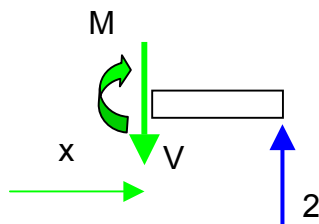
$$p/x = 0,5, \quad V_D = -3 \text{ t}$$

$$\curvearrowleft \sum M = 0, \quad -3x + M = 0 \Rightarrow M = 3x \text{ (t.m)}$$

$$p/x = 0, \quad M_C = 0 \text{ t.m}$$

$$p/x = 0,5, \quad M_D = 1,5 \text{ t.m}$$

Trecho DE ($0 < x < 2$):



$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad -V + 2 = 0 \Rightarrow V = 2 \text{ (t)}$$

$$p/x = 0, \quad V_D = 2 \text{ t}$$

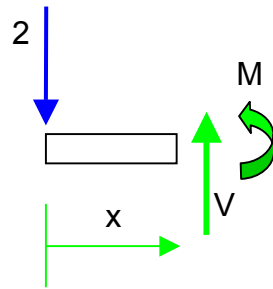
$$p/x = 2, \quad V_E = 2 \text{ t}$$

$$\curvearrowleft \sum M = 0, \quad 2 \cdot (2 - x) - M = 0 \Rightarrow M = -2x + 4 \text{ (t.m)}$$

$$p/x = 0, \quad M_D = 4 \text{ t.m}$$

$$p/x = 2, \quad M_E = 0 \text{ t.m}$$

Viga EFG

Trecho EF ($0 < x < 1,25$):

$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad -2 + V = 0 \Rightarrow V = 2 \text{ (t)}$$

$$p/x = 0, \quad V_E = 2 \text{ t}$$

$$p/x = 1,25, \quad V_F = 2 \text{ t}$$

$$\curvearrowright \sum M = 0, \quad 2x + M = 0 \Rightarrow M = -2x \text{ (t.m)}$$

$$p/x = 0, \quad M_E = 0 \text{ t.m}$$

$$p/x = 1,25, \quad M_F = -2,5 \text{ t.m}$$

Trecho FG ($0 < x < 3,75$):

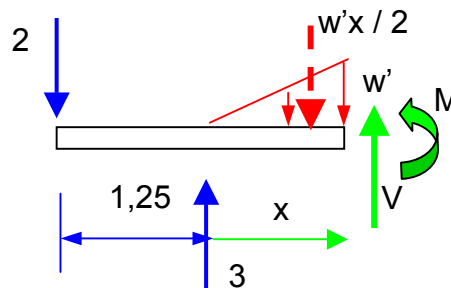
$$\frac{w \cdot 3,75}{2} = 1 \text{ (total)}$$

$$w = \frac{2}{3,75} \text{ (t.m)}$$

$$w \rightarrow 3,75$$

$$w' \rightarrow x$$

$$w' = \frac{2}{3,75^2} x$$



$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad -2 + 3 - w'x/2 + V = 0 \Rightarrow V = \frac{x^2}{3,75^2} - x \text{ (t)}$$

$$p/x = 0, \quad V_F = -1 \text{ t}$$

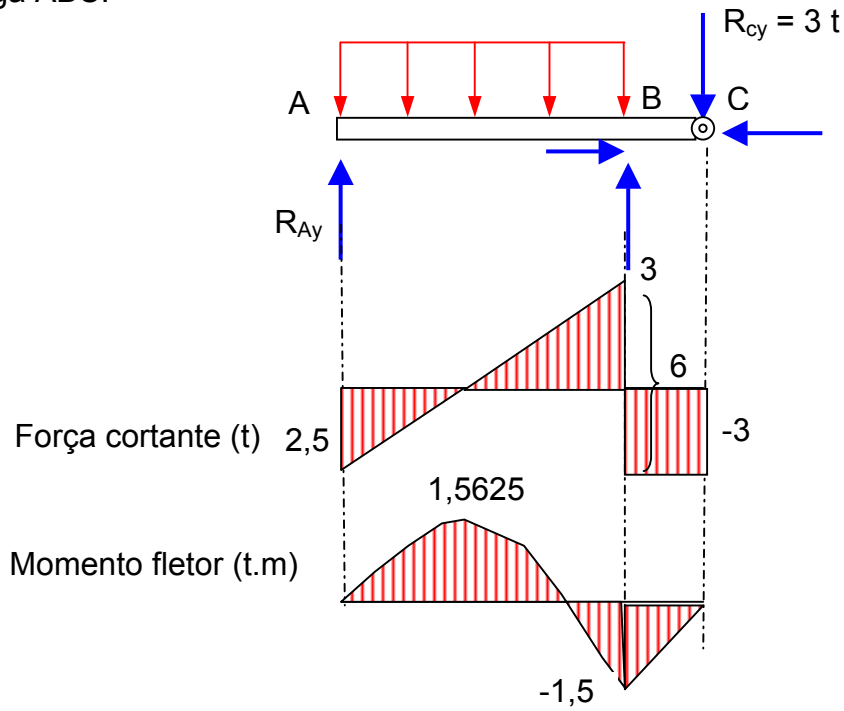
$$p/x = 3,75, \quad V_G = 0 \text{ t}$$

$$\curvearrowright \sum M = 0, \quad 2 \cdot (1,25 + x) - 3 \cdot x + (w'x/2) \cdot x/3 + M = 0 \Rightarrow M = -\frac{x^3}{3 \cdot 3,75^2} + x - 2,5 \text{ (t.m)}$$

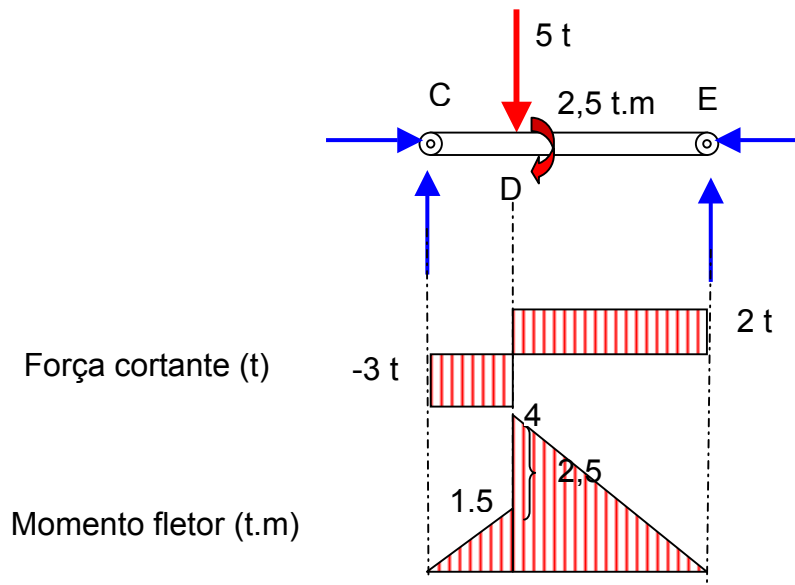
$$p/x = 0, \quad M_F = -2,5 \text{ t.m}$$

$$p/x = 3,75, \quad M_G = 0 \text{ t.m}$$

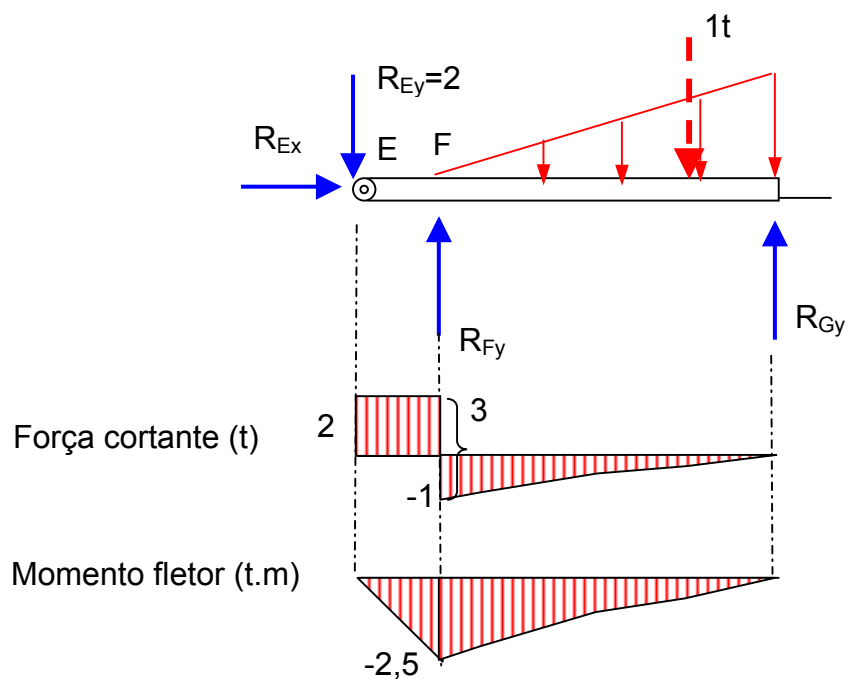
Viga ABC:



Viga CDE



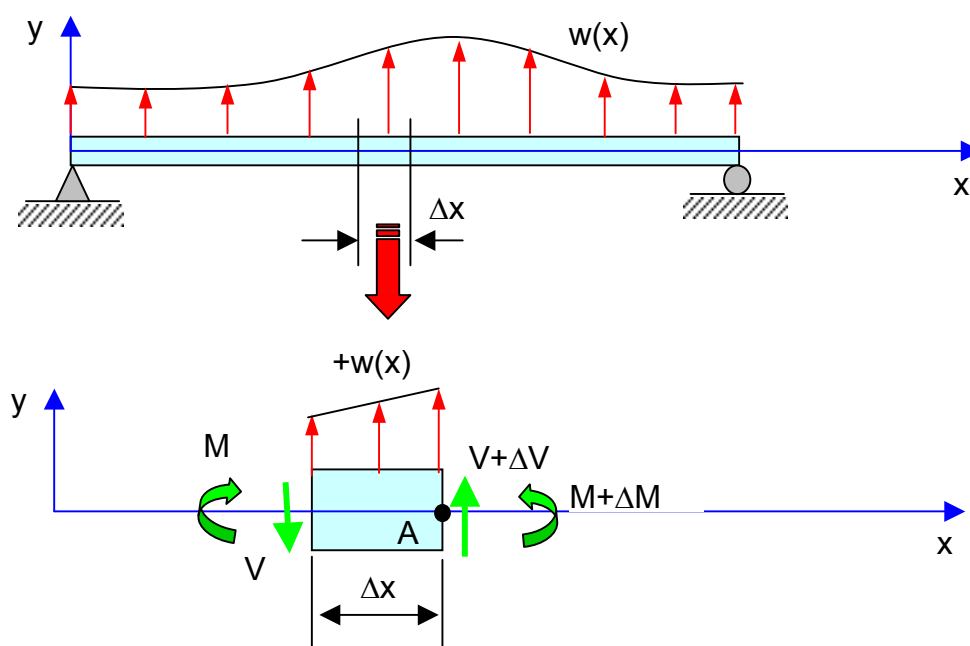
Viga EFG:



2.2 – Método do somatório.

2.2.1 – Equações diferenciais de equilíbrio

Considere a viga com uma carga distribuída $w(x)$.



Pelas condições de equilíbrio das forças verticais ($\sum F_y = 0$) e dos momentos ($\sum M = 0$) temos:

$$\uparrow \sum F_y = 0, -V + w \cdot \Delta x + (V + \Delta V) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta x} = -w \quad (2.1)$$

$$\curvearrowleft \sum M_A = 0, M - V \cdot \Delta x + w \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta x}{2} - (M + \Delta M) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta M}{\Delta x} = -V + w \cdot \frac{\Delta x}{2} \quad (2.2)$$

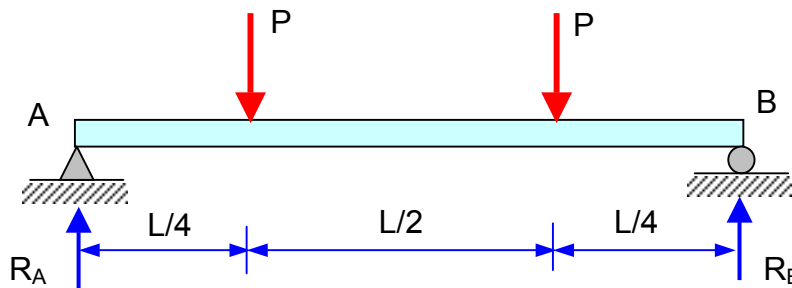
As eqs. (2.1) e (2.2) sendo avaliadas no limite, quando $\Delta x \Rightarrow 0$, fornecem as duas equações diferenciais básicas:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} \equiv \frac{dV}{dx} = -w \Rightarrow V(x) = -\int_0^x w(x) \cdot dx + C_1 \quad (2.3)$$

e

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} \equiv \frac{dM}{dx} = -V \Rightarrow M(x) = -\int_0^x V(x) \cdot dx + C_2 \quad (2.4)$$

Exemplo 2.5: Traçar os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga usando o método do somatório.



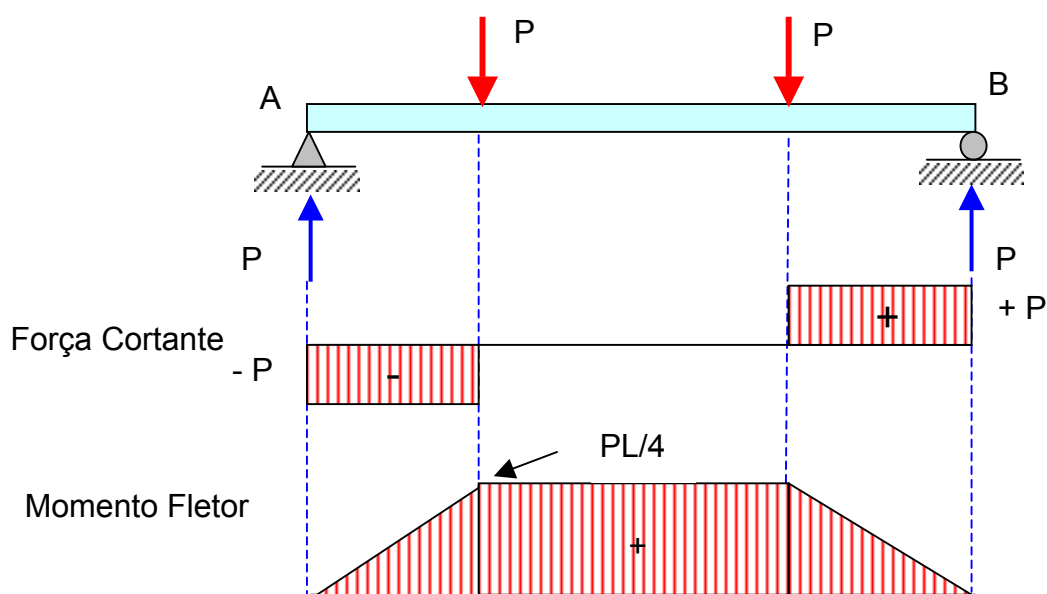
a - Determinar as reações nos apoios.

$$\curvearrowright \sum M_A = 0, -P \cdot \frac{L}{4} - P \cdot \frac{3L}{4} + R_B \cdot L = 0 \Rightarrow R_B = P$$

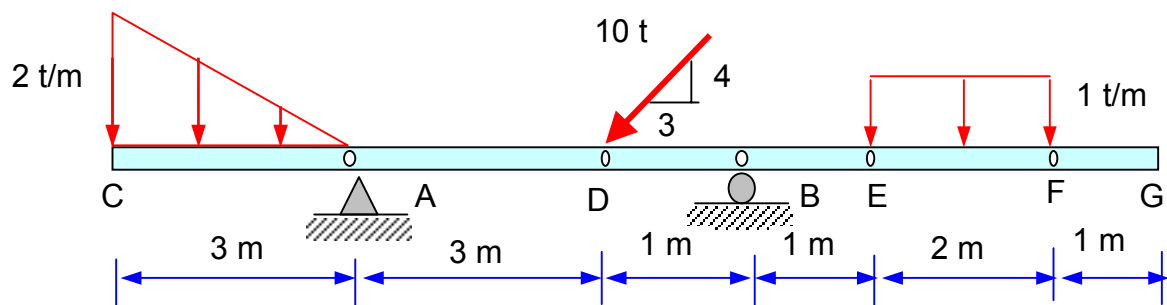
$$\uparrow \sum F_y = 0, R_A - P - P + P = 0 \Rightarrow R_A = P$$

Da eq. (2.3), sabendo que $w(x) = 0 \Rightarrow V(x) = \text{constante} = V$. Da eq.(2.4), como V é constante, a equação de momento fletor no trecho é da forma: $M(x) = -V x + C_2$

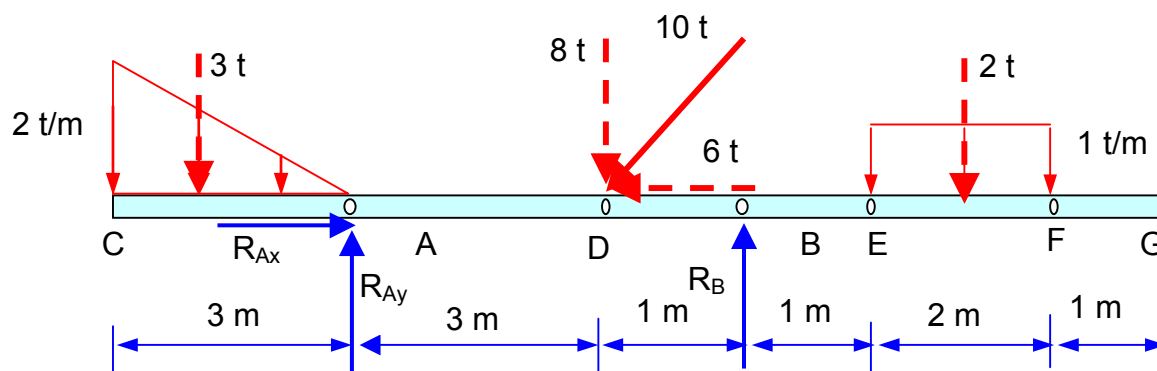
b - Traçar os diagramas de força cortante e momento fletor.



Exemplo 2.6: Construir os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga com o carregamento mostrado abaixo, usando o método do somatório.



a - Determinar as reações nos apoios.



$$\rightarrow \sum F_x = 0, R_{Ax} - 6 = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 6 \text{ t}$$

$$\curvearrowright \sum M_A = 0, 3 \cdot 2 - 8 \cdot 3 + R_B \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0 \Rightarrow R_B = 7,5 \text{ t}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, -3 + R_{Ay} - 8 + 7,5 - 2 = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 5,5 \text{ t}$$

b - Determinar as funções da força cortante $V(x)$ e do momento fletor $M(x)$ para cada trecho da viga.

Partir da extremidade mais a esquerda, ponto C:

Trecho C-A:

$$V(x) = -\int_0^x w(x) dx + C1$$

$$w(x) = ax + b \dots \begin{cases} p/x = 0, w = -2 \Rightarrow b = -2 \\ p/x = 3, w = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$w(x) = \frac{2}{3}x - 2 \text{ (t/m)}$$

$$V(x) = -\int_0^x \left(\frac{2}{3}x - 2 \right) dx + C1 \Rightarrow V(x) = -\frac{2}{3} \frac{x^2}{2} + 2x + C1 \text{ (t)}$$

$$p/x = 0, V_c = 0 \Rightarrow C1 = 0 \text{ (não há força concentrada em C)}$$

$$V(x) = -\frac{x^2}{3} + 2x$$

$$p/x = 3 \Rightarrow V_A = 3 \text{ t}$$

$$M(x) = -\int_0^x V(x) dx + C2 \Rightarrow M(x) = -\int_0^x \left(-\frac{2}{3} \frac{x^2}{2} + 2x \right) dx + C2$$

$$M(x) = -\left(-\frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + \frac{2}{2} x^2 \right) + C2$$

$$p/x = 0, M_c = 0 \Rightarrow C2 = 0 \text{ (não há momento concentrado em C)}$$

$$M(x) = \frac{x^3}{9} - x^2 \text{ (t.m)}$$

$$p/x = 3 \Rightarrow M_A = -6 \text{ t.m}$$

força axial: $P = 0$

Trecho A-D:

$$V(x) = -\int_0^x w(x) dx + C1$$

como $w(x) = 0 \Rightarrow V(x) = \text{constante} = C1 = -2,5 \text{ t}$

$$M(x) = -\int_0^x V(x) dx + C2, \quad M(x) = -\int_0^x (-2,5) dx + C2 \Rightarrow M(x) = 2,5 x + C2$$

$p/x = 0, M_A = -6 \Rightarrow C2 = -6$ (não há momento concentrado em A)

$$M(x) = 2,5 x - 6 \text{ (t.m)}$$

$p/x = 3 \Rightarrow M_D = 1,5 \text{ t} \cdot \text{m}$

força axial: $P = -6 \text{ t}$

Trecho D-B:

$$V(x) = -\int_0^x w(x) dx + C1$$

como $w(x) = 0 \Rightarrow V(x) = \text{constante} = C1 = 5,5 \text{ t}$

$$M(x) = -\int_0^x V(x) dx + C2, \quad M(x) = -\int_0^x 5,5 dx + C2 \Rightarrow M(x) = -5,5 x + C2$$

$p/x = 0, M_D = 1,5 \Rightarrow C2 = 1,5$ (não há momento concentrado em D)

$$M(x) = 5,5 x + 1,5 \text{ (t.m)}$$

$p/x = 1 \Rightarrow M_B = -4 \text{ t} \cdot \text{m}$

Força axial $P = 0$

Trecho B-E:

$$V(x) = -\int_0^x w(x) dx + C1$$

como $w(x) = 0 \Rightarrow V(x) = \text{constante} = C1 = -2 \Rightarrow V = -2 \text{ t}$

$$M(x) = -\int_0^x V(x) dx + C2, \quad M(x) = -\int_0^x (-2) dx + C2 \Rightarrow M(x) = 2x + C2$$

$p/x = 0, M_B = -4 \Rightarrow C2 = -4$ (não há momento concentrado em B)

$$M(x) = 2x - 4 \text{ (t.m)}$$

$p/x = 1 \Rightarrow M_E = -2 \text{ t.m}$

Força axial $P = 0$

Trecho E-F:

$$V(x) = -\int_0^x w(x) dx + C1, \quad V(x) = -\int_0^x (-1) dx + C1 \Rightarrow V(x) = x - C1$$

$p/x = 0, V_E = -2 \Rightarrow C1 = -2$ (não há força concentrado em E)

$$V(x) = x - 2$$

$p/x = 2 \Rightarrow V_F = 0$

$$M(x) = -\int_0^x V(x) dx + C2, \quad M(x) = -\int_0^x (x - 2) dx + C2 \Rightarrow M(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x + C2$$

$p/x = 0, M_E = -2 \Rightarrow C2 = -2$ (não há momento concentrado em E)

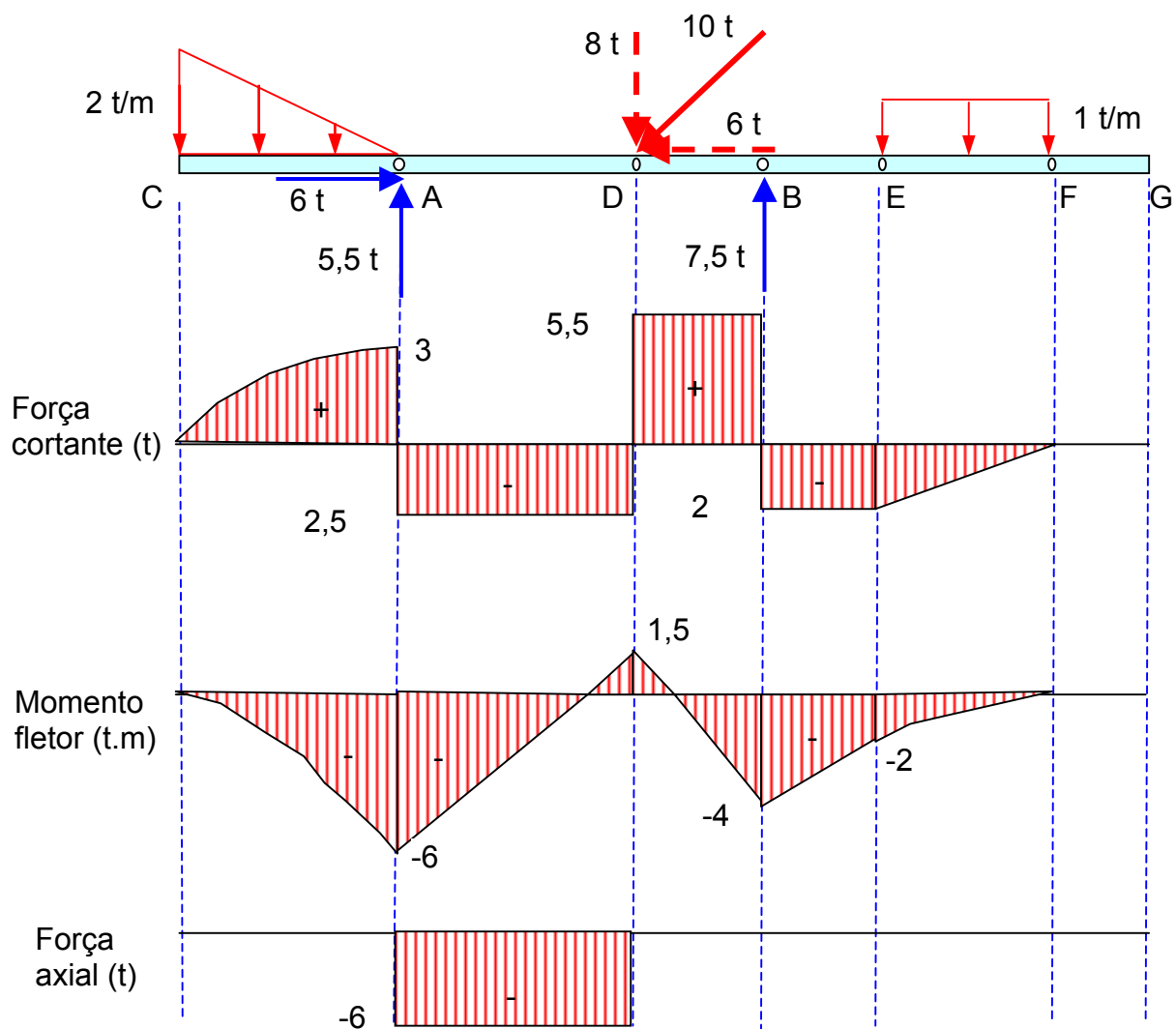
$$M(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x - 2 \text{ (t.m)}$$

$p/x = 2 \Rightarrow M_F = 0 \text{ t.m}$

Força axial $P = 0$

não há forças e momentos concentrados: $V = 0, M = 0, P = 0$

Traçar os diagramas de forças cortante e axial e de momento fletor.



3 – TENSÃO

3.1 – Definição de Tensão

Considere um o corpo seccionado, submetido à forças externas P_1 e P_2 e à forças internas ΔP atuantes em áreas infinitesimais ΔA , Fig.3.1.

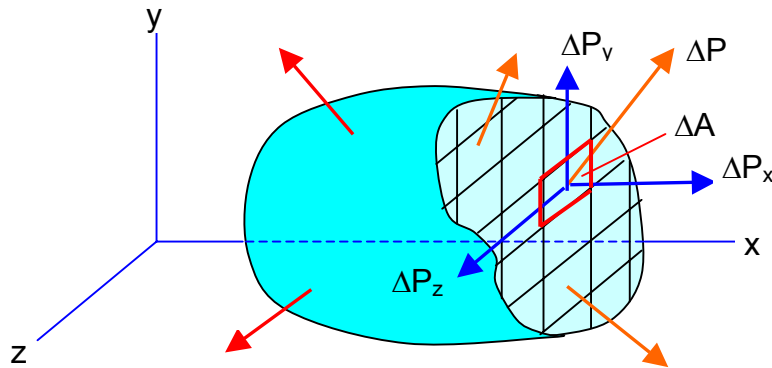


Figura 3.1 – Esforços externos e internos num corpo seccionado

A tensão normal à face seccionada é por definição da forma:

$$\tau_{xx} = \sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A} \quad (3.1)$$

e, as tensões de cisalhamento que atuam na face seccionada são por definição da forma:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta A} \\ \tau_{xz} &= \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A} \end{aligned} \quad (3.2)$$

O primeiro índice da tensão de cisalhamento indica o eixo que é perpendicular à face onde atua a tensão e o segundo indica a direção da tensão.

3.2 – Tensor de Tensões

Considere um elemento infinitesimal de dimensões Δx , Δy e Δz com todas as tensões que atuam sobre ele, Fig. 3.2.

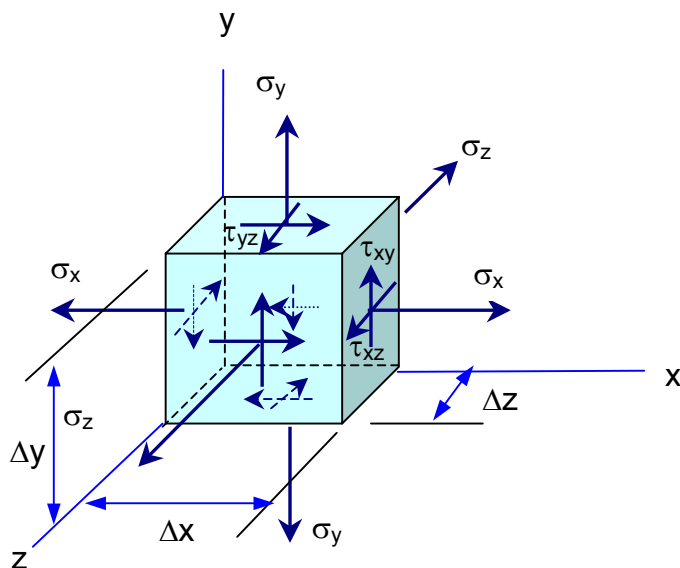


Figura 3.2 – Elemento infinitesimal solicitado triaxialmente

O tensor de tensões é uma matriz de dimensão (3x3) onde são colocadas todas as tensões atuantes num elemento infinitesimal:

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Verifica-se que o tensor de tensões é simétrico: $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$.

Demonstração:

$$\sum M_{\text{eixo } z} = 0 \quad , \quad (\tau_{yx} \cdot \Delta x \cdot \Delta z) \Delta y - (\tau_{xy} \cdot \Delta y \cdot \Delta z) \Delta x = 0 \Rightarrow \tau_{yx} = \tau_{xy}$$

3.3 – Tensões em membros com carregamento axial

3.3.1 – Carga axial

Considere uma barra sem peso e em equilíbrio, sujeita à duas forças F (tração ou compressão) em suas extremidades.

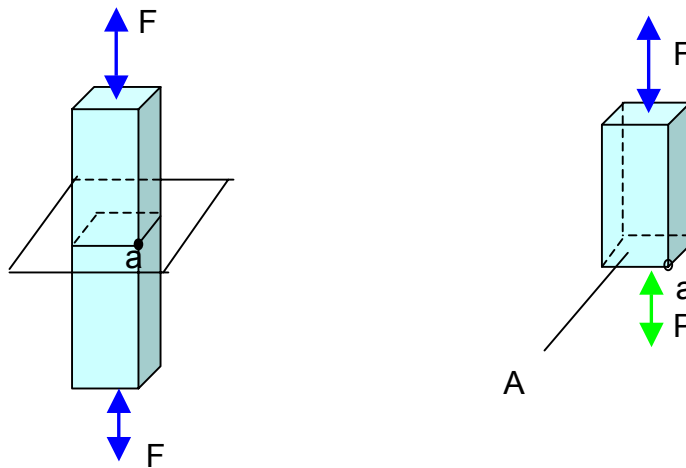


Figura 3.3 – Barra solicitada axialmente

A área da seção transversal no ponto onde se seccionou a barra é A e a força interna é igual a P e positiva (se tracionada) ou negativa (se comprimida), logo a tensão normal é da forma:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (3.4)$$

No caso da barra estar sendo comprimida, seu comprimento deve ser suficientemente pequeno para que não ocorra flambagem.

3.3.2 – Tensão média de cisalhamento

Considere um corpo sendo arrastado sobre outro corpo por uma P .

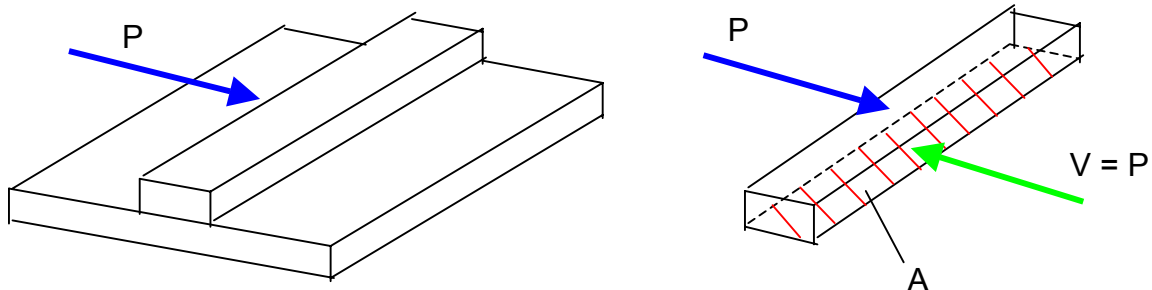


Figura 3.4 – Corpo sendo cisalhado

Se o corpo que está sendo arrastado tem área A na interface de contato entre os corpos, a tensão média de cisalhamento¹ é da forma:

$$\tau_m = \frac{V}{A} \quad (3.5)$$

A eq. (3.5) é frequentemente utilizada para dimensionar pinos, parafusos, rebites, etc. que estão sendo solicitados por esforços cisalhantes.

Corpos podem ser cisalhados de formas diferentes. Um corpo pode estar sendo submetido à um cisalhamento simples quando, Fig. 3.5:

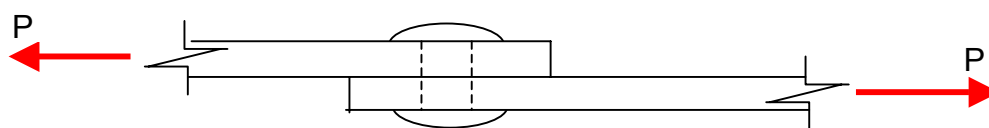


Figura 3.5 – Corpo submetido à um cisalhamento simples

O rebite que une os dois corpos que estão sendo tracionados é cisalhado na interface da seguinte forma, Fig. 3.6:

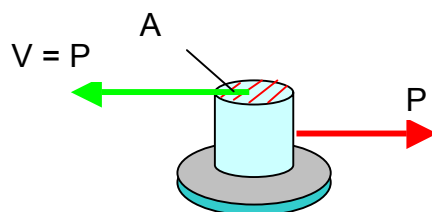


Figura 3.6 – Rebite com cisalhamento simples

Se o rebite tem área A na interface e a força cortante V é P , a tensão de cisalhamento média é:

$$\tau_m = \frac{V}{A} = \frac{P}{A} \quad (3.6)$$

Um corpo pode estar sendo submetido à um cisalhamento duplo quando, Fig. 3.7:

¹ A tensão de cisalhamento é média pois a força que atua em cada área infinitesimal não é a mesma.

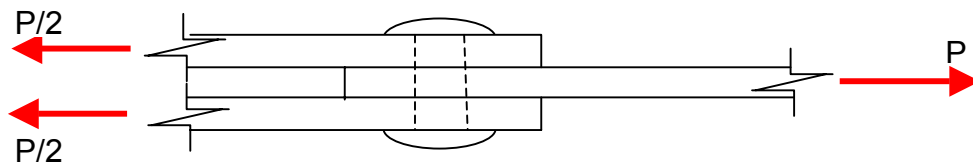


Figura 3.7 – Corpo submetido à um cisalhamento duplo

O rebite que une os três corpos que estão sendo tracionados é cisalhado na interface entre cada corpo e da forma, Fig. 3.8:

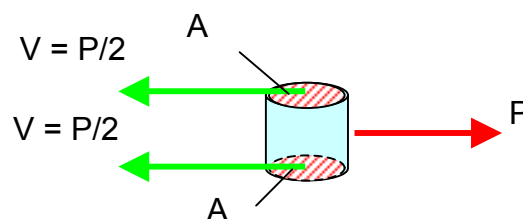
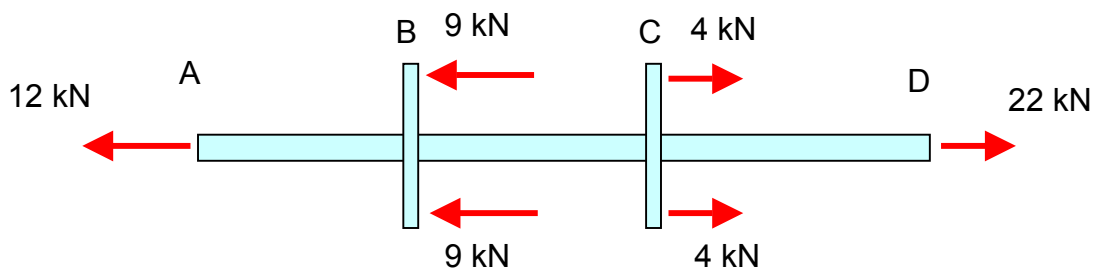


Figura 3.8 – Rebite com cisalhamento duplo

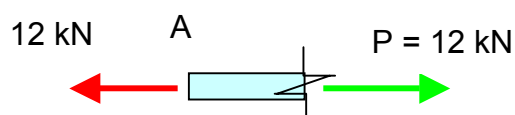
Se o rebite tem área A na interface entre cada corpo, e a força cortante V é $P/2$, a tensão de cisalhamento média é:

$$\tau_m = \frac{V}{A} = \frac{P}{2A} \quad (3.7)$$

Exemplo 3.1: A barra abaixo tem largura de 35 mm e espessura de 10 mm, constantes ao longo de seu comprimento. Determine as tensões normais nos diferentes trechos da barra para o carregamento abaixo.



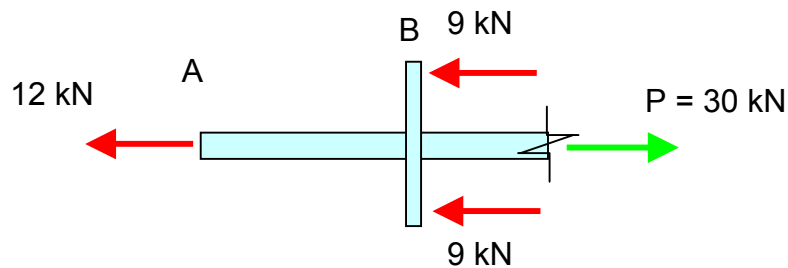
Trecho AB:



$$\sigma_{AB} = \frac{P}{A} = \frac{12000}{0,035 \cdot 0,010} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 34285714 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

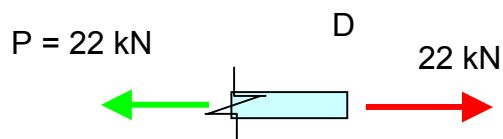
$$\sigma_{AB} = 34285714 \text{ Pa} = 34,3 \text{ MPa}$$

Trecho BC:



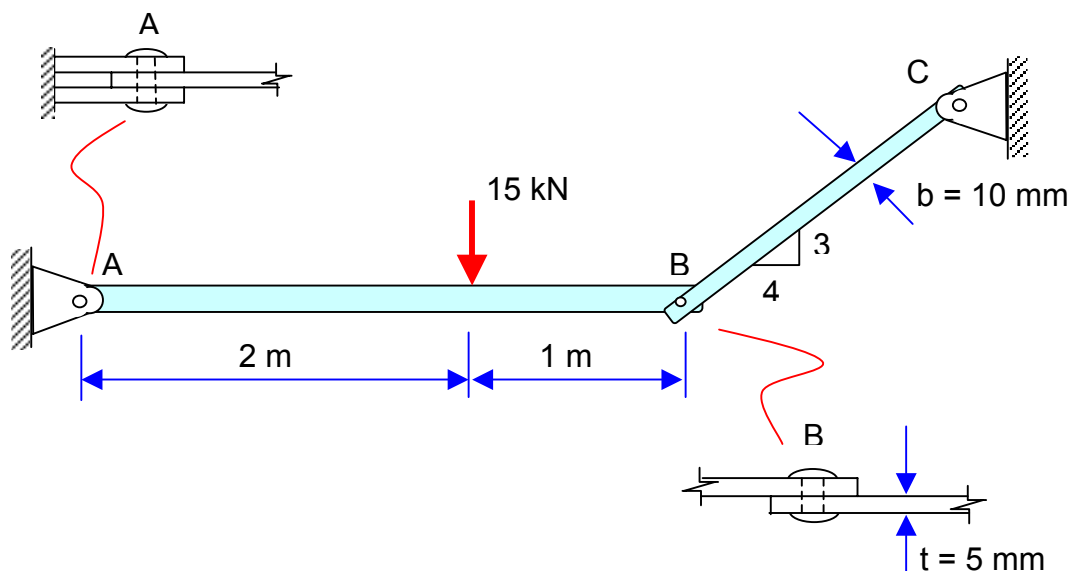
$$\sigma_{BC} = \frac{P}{A} = \frac{30000}{0,035 \cdot 0,010} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 85,7 \text{ MPa}$$

Trecho CD:

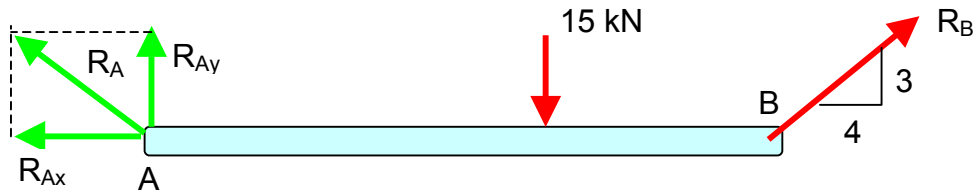


$$\sigma_{CD} = \frac{P}{A} = \frac{22000}{0,035 \cdot 0,010} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 62,4 \text{ MPa}$$

Exemplo 3.2: Determine as tensões nos pinos localizados em A e B com diâmetros $d = 8 \text{ mm}$ e a tensão na barra BC para o conjunto abaixo:



DCL da Barra AB:



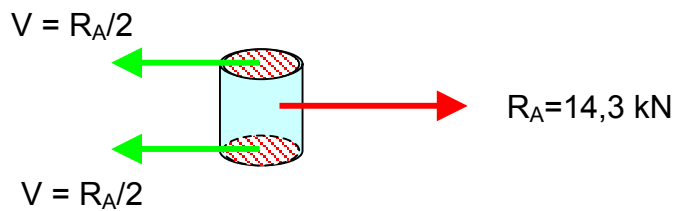
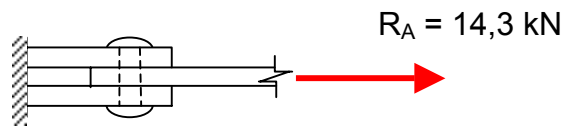
$$\sum M_A = 0, \quad R_B \cdot \frac{3}{5} \cdot 3 - 15 \cdot 2 = 0 \Rightarrow R_B = 16,7 \text{ kN}$$

$$\uparrow \sum F_Y = 0, \quad R_{Ay} - 15 + R_B \cdot \frac{3}{5} = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 5 \text{ kN}$$

$$\rightarrow \sum F_X = 0, \quad -R_{Ax} + R_B \cdot \frac{4}{5} = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 13,4 \text{ kN}$$

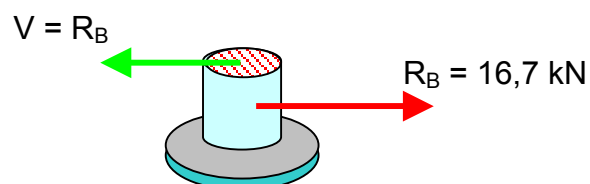
Pino A:

$$R_A = \sqrt{5^2 + 13,4^2} = 14,3 \text{ kN}$$



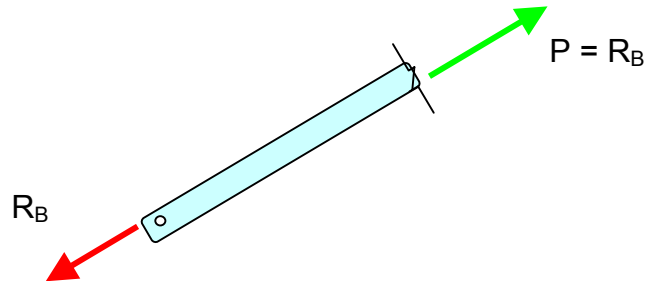
$$\tau_A = \frac{V}{A} = \frac{14300/2}{\frac{\pi 8^2}{4}} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \tau_A = 142,2 \text{ MPa}$$

Pino B:



$$\tau_B = \frac{V}{A} = \frac{16700}{\frac{\pi 8^2}{4}} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \tau_{BC} = 332,2 \text{ MPa}$$

Barra BC:



$$\sigma_{BC} = \frac{P}{A} = \frac{16700}{10,5} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 334 \text{ MPa}$$

3.4 – Tensões Admissíveis; Fator de segurança

Para garantir a segurança de uma estrutura, é necessário escolher uma tensão admissível que restrinja a carga aplicada, a uma que seja menor que aquela que a estrutura possa suportar. Há vários motivos para isso:

- imprecisão de cálculo,
- imperfeições oriundas do processo de fabricação,
- variabilidade nas propriedades mecânicas dos materiais,
- degradação do material, etc.

Uma das maneiras de especificar a tensão admissível é definir um coeficiente de segurança dado por:

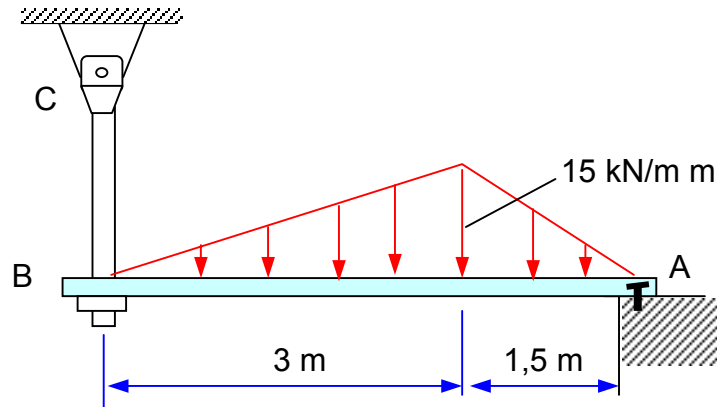
$$\eta = \frac{\sigma_{\text{escoamento}}}{\sigma_{\text{admissível}}} \quad (3.8)$$

$$\eta = \frac{\sigma_{\text{ruptura}}}{\sigma_{\text{admissível}}}$$

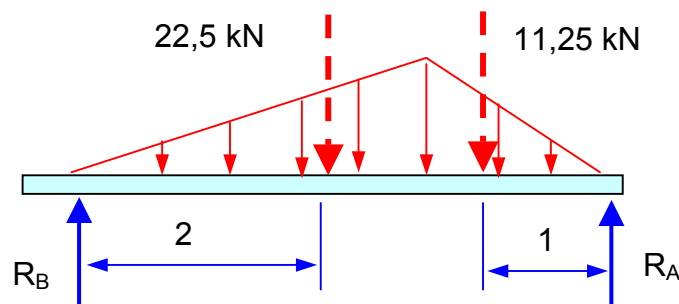
As tensões de ruptura são determinadas experimentalmente e o coeficiente de segurança é selecionado baseado no tipo de estrutura e em suas aplicações.

3.5 – Projeto de membros e pinos com carregamento axial

Exemplo 3.3: Determine o diâmetro da barra BC, se a tensão admissível é $\sigma_{adm} = 155 \text{ MPa}$. A viga é assumida ser parafusada em A.



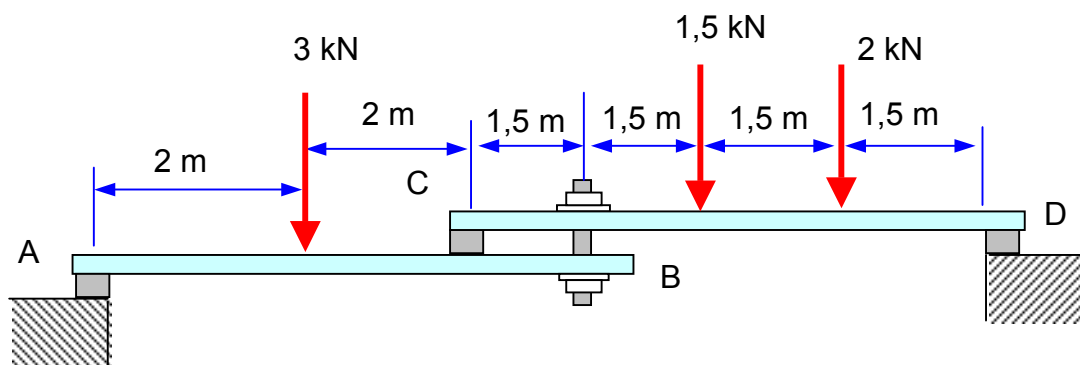
D.C.L da barra AB:



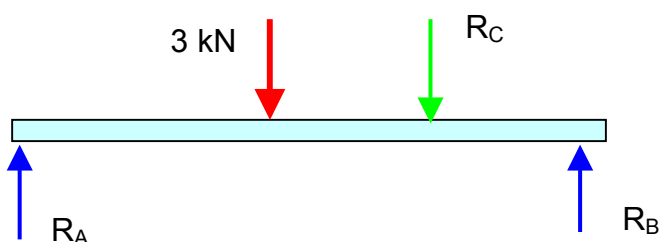
$$\sum M_A = 0 \quad , \quad -R_B \cdot 4,5 + 22,5 \cdot 2,5 + 11,25 \cdot 1 = 0 \Rightarrow R_B = 15 \text{ kN}$$

$$\sigma_{adm} = \frac{R_B}{A_{BC}} \quad , \quad 155 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \frac{15000}{\frac{\pi d_{BC}^2}{4}} \Rightarrow d_{BC} = 11,1 \text{ mm}$$

Exemplo 3.4: Duas vigas de madeira são conectadas por um parafuso em B. Assumindo que as conexões em A, B, C, e D exercem somente forças verticais nas vigas. Determine o diâmetro do parafuso em B e o diâmetro externo de sua arruela se a tensão admissível do parafuso é $\sigma_{adm \text{ p.}} = 150 \text{ MPa}$ e a tensão admissível da madeira é $\sigma_{adm \text{ m.}} = 28 \text{ MPa}$.

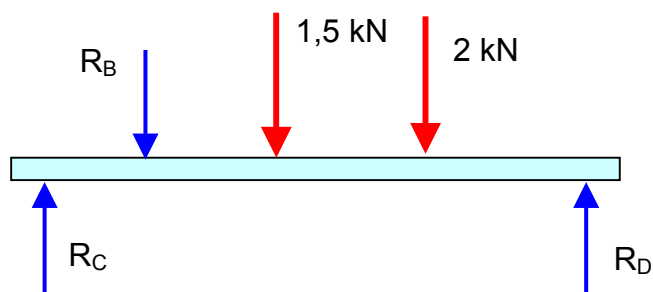


D.C.L. da Viga AB:



$$\sum M_A = 0 \quad , \quad -3 \cdot 2 - R_C \cdot 4 + R_B \cdot 5,5 = 0 \Rightarrow R_C = 1,375 R_B - 1,5$$

D.C.L. da Viga CD:



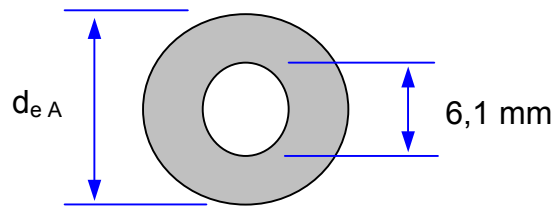
$$\sum M_D = 0 \quad , \quad -R_C \cdot 6 + R_B \cdot 4,5 + 1,5 \cdot 3 + 2 \cdot 1,5 = 0$$

$$- (1,375 R_B - 1,5) \cdot 6 + R_B \cdot 4,5 + 4,5 \cdot 3 + 3 = 0 \Rightarrow R_B = 4,4 \text{ kN}$$

Parafuso:

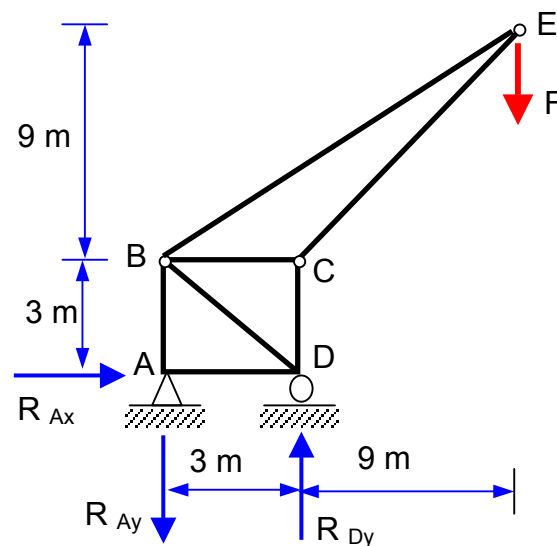
$$\sigma_{adm P.} = \frac{R_B}{\frac{\pi d_P^2}{4}} \quad , \quad 150 = \frac{4400}{\frac{\pi d_P^2}{4}} \Rightarrow d_P = 6,1 \text{ mm}$$

Arruela:



$$\sigma_{adm P.} = \frac{R_B}{\frac{\pi d_{eA}^2}{4} - \frac{\pi d_p^2}{4}}, \quad 26 = \frac{4400}{\frac{\pi d_{eA}^2}{4} - \frac{\pi 6,1^2}{4}} \Rightarrow d_{eA} = 15,4 \text{ mm}$$

Exemplo 3.5: Determine a máxima força F que pode ser aplicada na estrutura se as áreas das seções transversais das barras são $A = 5000 \text{ mm}^2$ e a tensão admissível de tração é $\sigma_{adm t} = 14 \text{ kgf/mm}^2$ e a tensão admissível de compressão é $\sigma_{adm c} = 10,5 \text{ kgf/mm}^2$.

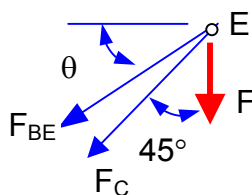


$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 0$$

$$\curvearrowleft \sum M_A = 0, \quad R_{Dy} \cdot 3 - F \cdot 12 = 0 \Rightarrow R_{Dy} = 4 F$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad -R_{Ay} + R_{Dy} - F = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 3 F$$

Ponto E:

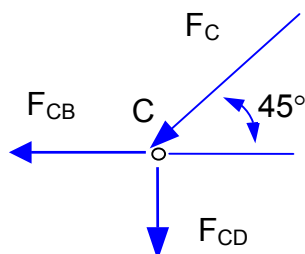


$$\cos \theta = \frac{4}{5}, \quad \sin \theta = \frac{3}{5}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, -F - F_{CE} \cos 45 - F_{BE} \sin \theta = 0 \Rightarrow F_{ce} = -5,66 F \text{ (compressão)}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0, -F_{BE} \cos \theta - F_{CE} \sin 45 = 0 \Rightarrow F_{be} = 5 F \text{ (tração)}$$

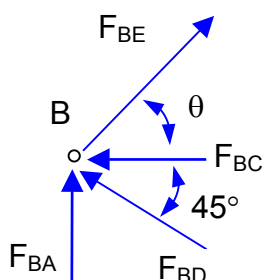
Ponto C:



$$\uparrow \sum F_y = 0, F_{CD} - F_{CE} \sin 45 = 0 \Rightarrow F_{CD} = -4 F \text{ (compressão)}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0, F_{CB} - F_{CE} \cos 45 = 0 \Rightarrow F_{cb} = -4 F \text{ (compressão)}$$

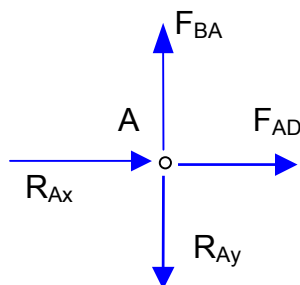
Ponto B:



$$\rightarrow \sum F_x = 0, -F_{BD} \cos 45 - F_{BC} + F_{BE} \cos \theta = 0 \Rightarrow F_{BD} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, F_{BA} + F_{BE} \sin \theta = 0 \Rightarrow F_{BA} = -3 F \text{ (tração)}$$

Ponto A:



$$\rightarrow \sum F_x = 0, R_{Ax} + F_{AD} = 0 \Rightarrow F_{AD} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, -R_{Ay} + F_{BA} = 0 \Rightarrow F_{BA} = 3 F \text{ (tração)}$$

barra CE:

$$\sigma_{adm\ c} = \frac{F_{CE}}{A}, \quad 10,5 = \frac{5,66 F}{5000}, \quad F = 9.276 \text{ kgf}$$

barra BE:

$$\sigma_{adm\ t} = \frac{F_{BE}}{A}, \quad 14 = \frac{5 F}{5000}, \quad F = 14.000 \text{ kgf}$$

barra CD:

$$\sigma_{adm\ c} = \frac{F_{CD}}{A}, \quad 10,5 = \frac{4 F}{5000}, \quad F = 13.125 \text{ kgf}$$

barra CB:

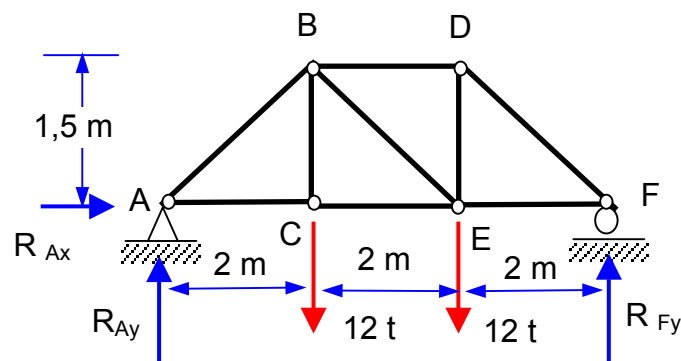
$$\sigma_{adm\ c} = \frac{F_{CB}}{A}, \quad 10,5 = \frac{4 F}{5000}, \quad F = 13.125 \text{ kgf}$$

barra BA:

$$\sigma_{adm\ t} = \frac{F_{BA}}{A}, \quad 14 = \frac{3 F}{5000}, \quad F = 23.333 \text{ kgf}$$

Resposta: A máxima força F é a de $F = 9.276 \text{ kgf}$, pois qualquer força maior que está produziria uma tensão superior a tensão admissível.

Exemplo 3.6: A estrutura treliçada abaixo suporta duas forças de 12 t. Se as tensões admissíveis são $\sigma_{adm\ t} = 14 \text{ kgf/mm}^2$ em tração e $\sigma_{adm\ c} = 10,5 \text{ kgf/mm}^2$ em compressão, determine a menor seção transversal possível para as barras.

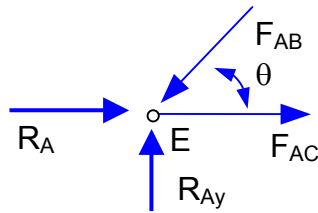


$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 0$$

$$\curvearrowright \sum M_A = 0, \quad R_{Fy} \cdot 6 - 12 \cdot 4 - 12 \cdot 2 = 0 \Rightarrow R_{Fy} = 12 \text{ t}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad R_{Ay} + R_{Fy} - 12 - 12 = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 12 \text{ t}$$

Ponto A:

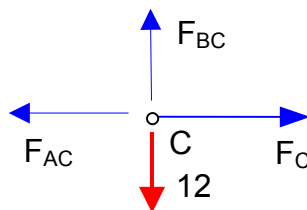


$$\cos \theta = \frac{2}{2,5}, \quad \sin \theta = \frac{1,5}{2,5}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad R_{Ay} - F_{AB} \sin \theta = 0 \Rightarrow F_{AB} = 20 \text{ t (compressão)}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0, \quad R_{Ax} - F_{AB} \cos \theta + F_{AC} = 0 \Rightarrow F_{AC} = 16 \text{ t (tração)}$$

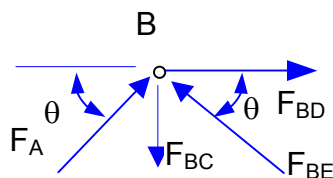
Ponto C:



$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad F_{BC} - 12 = 0 \Rightarrow F_{BC} = 12 \text{ t (tração)}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0, \quad -F_{AC} + F_{CE} = 0 \Rightarrow F_{CE} = 16 \text{ t (tração)}$$

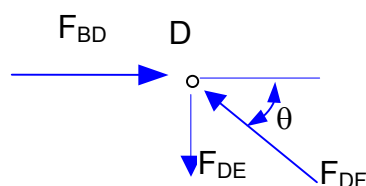
Ponto B:



$$\uparrow \sum F_y = 0, \quad F_{AB} \sin \theta - F_{BC} + F_{BE} \sin \theta = 0 \Rightarrow F_{BE} = 0 \text{ t}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0, \quad F_{AB} \cos \theta - F_{BE} \cos \theta + F_{BD} = 0 \Rightarrow F_{BD} = -16 \text{ t (compressão)}$$

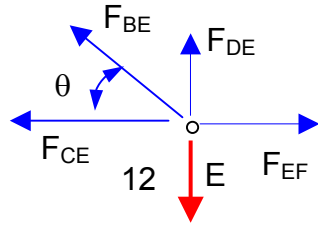
Ponto D:



$$\rightarrow \sum F_x = 0, \quad F_{BD} - F_{DF} \cos \theta = 0 \Rightarrow F_{DF} = 20 \text{ t (compressão)}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \quad , \quad -F_{DE} + F_{DF} \sin \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DE} = 12 \text{ t (tração)}$$

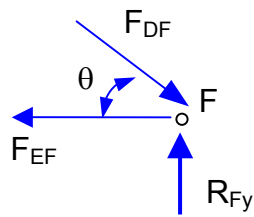
Ponto E:



$$\uparrow \sum F_y = 0 \quad , \quad -12 + F_{DE} + F_{BE} \sin \theta = 0 \quad (\text{ok})$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \quad , \quad -F_{CE} - F_{BE} \cos \theta + F_{EF} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{EF} = 16 \text{ t (tração)}$$

Ponto F:



$$\uparrow \sum F_y = 0 \quad , \quad R_{Fy} - F_{DF} \sin \theta = 0 \quad (\text{ok})$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \quad , \quad -F_{EF} + F_{DF} \cos \theta = 0 \quad (\text{ok})$$

barra AB:

$$\sigma_{adm\ c} = \frac{F_{AB}}{A_{AB}} \quad , \quad 10,5 = \frac{20 \cdot 10^3}{A_{AB}} \quad , \quad A_{AB} = 1904,8 \text{ mm}^2$$

barra AC:

$$\sigma_{adm\ t} = \frac{F_{AC}}{A_{AC}} \quad , \quad 14 = \frac{16 \cdot 10^3}{A_{AC}} \quad , \quad A_{AC} = 1142,9 \text{ mm}^2$$

barra BC:

$$\sigma_{adm\ t} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} \quad , \quad 14 = \frac{12 \cdot 10^3}{A_{BC}} \quad , \quad A_{BC} = 857,2 \text{ mm}^2$$

barra CE:

$$\sigma_{adm\ t} = \frac{F_{CE}}{A_{CE}} \quad , \quad 14 = \frac{16 \cdot 10^3}{A_{CE}} \quad , \quad A_{CE} = 1142,9 \text{ mm}^2$$

barra BD:

$$\sigma_{\text{adm c}} = \frac{F_{\text{BD}}}{A_{\text{BD}}} , \quad 10,5 = \frac{16 \cdot 10^3}{A_{\text{BD}}} , \quad A_{\text{BD}} = 1523,8 \text{ mm}^2$$

barra DF:

$$\sigma_{\text{adm c}} = \frac{F_{\text{DF}}}{A_{\text{DF}}} , \quad 10,5 = \frac{20 \cdot 10^3}{A_{\text{DF}}} , \quad A_{\text{DF}} = 1904,8 \text{ mm}^2$$

barra DE:

$$\sigma_{\text{adm t}} = \frac{F_{\text{DE}}}{A_{\text{DE}}} , \quad 14 = \frac{12 \cdot 10^3}{A_{\text{DE}}} , \quad A_{\text{DE}} = 857,2 \text{ mm}^2$$

barra EF:

$$\sigma_{\text{adm t}} = \frac{F_{\text{EF}}}{A_{\text{EF}}} , \quad 14 = \frac{16 \cdot 10^3}{A_{\text{EF}}} , \quad A_{\text{EF}} = 1142,9 \text{ mm}^2$$

Resposta: A menor área possível é a de $1904,8 \text{ mm}^2$, pois qualquer área menor que está produziria uma tensão superior a tensão admissível.

4 – DEFORMAÇÃO

4.1 – Significado físico da deformação

Um corpo sólido se deforma quando sujeito à mudanças de temperatura ou a uma carga externa, como mostrado abaixo.

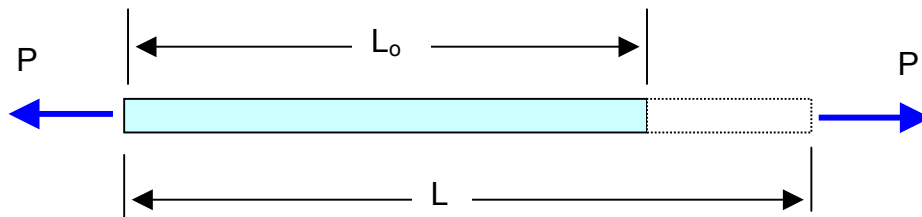


Figura 4.1 – Representação gráfica da deformação linear

Se L_0 é o comprimento inicial e L é o comprimento final do corpo sob tração, o alongamento é $\Delta L = L - L_0$ e o alongamento por unidade de comprimento, chamado deformação linear, é definido como:

$$\varepsilon = \int_0^L \frac{dL}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (4.1)$$

4.2 – Definição matemática de deformação

Considere dois pontos localizados em uma direção x de um corpo sólido na qual uma deformação linear está sendo considerada.

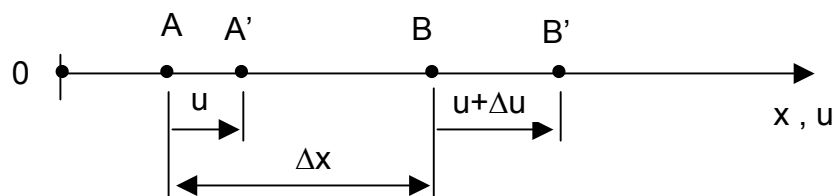


Figura 4.2 – Representação matemática da deformação linear

Assim a definição de deformação linear no ponto A quando $\Delta x \rightarrow 0$ é definida como:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \quad (4.2)$$

Se $\varepsilon > 0$ = Alongação e $\varepsilon < 0$ = Contração.

Se o corpo se deforma em três direções ortogonais x, y, e z e u, v, e w são as três componentes do deslocamento nestas direções, as deformações lineares são respectivamente:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Além da deformação linear, um corpo pode sofrer uma deformação angular, como mostrado na Fig. 4.3.

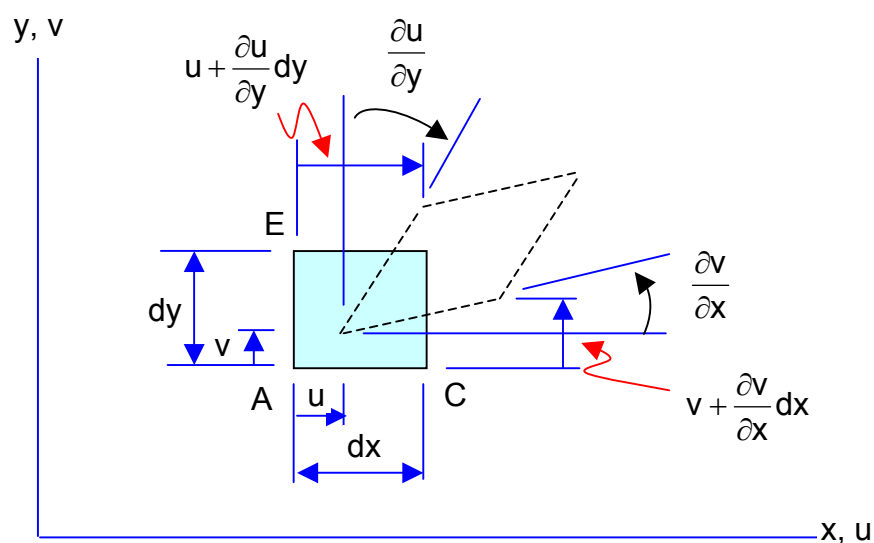


Figura 4.3 – Representação gráfica da deformação angular

Assim, para pequenas mudanças de ângulo, a deformação angular associada ao plano xy é definida por:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.4)$$

Se o corpo se deforma em mais planos ortogonais xz e yz, as deformações angulares nestes planos são:

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} = \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_{yz} = \gamma_{zy} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\end{aligned}\quad (4.5)$$

4.3 – Propriedades mecânicas dos materiais isotrópicos

4.3.1 – Diagrama tensão-deformação

Muitas propriedades de um material podem ser determinadas a partir de um ensaio de tração ou compressão, a partir de uma amostra do material, Fig. 4.4. O resultado desse ensaio pode ser representado num diagrama tensão-deformação.

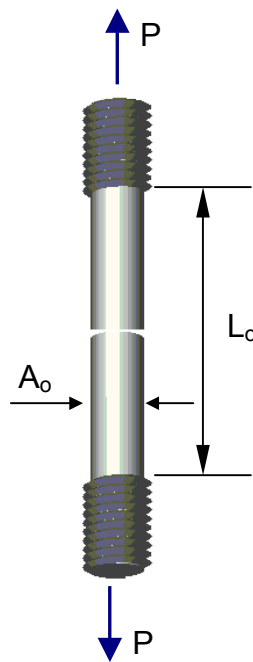


Figura 4.4 – Corpo-de-prova padronizado para ensaios de tração

O diagrama tensão-deformação é executado num corpo-de-prova padronizado, tendo como dimensões originais, a seção transversal A_0 e o comprimento L_0 . A tensão considerada no diagrama é a força aplicada P na seção transversal original A_0 :

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \quad (4.6)$$

Da mesma forma, a deformação é obtida diretamente da leitura do extensômetro, ou pela divisão da variação de comprimento ΔL pelo comprimento original L_0 .

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (4.7)$$

O diagrama tensão-deformação é o gráfico dos correspondentes valores de σ e ε , onde o eixo das ordenadas representa as tensões σ e o eixo das abcissas representa as deformações ε . É importante ressaltar que dois diagramas de dois corpos- de-prova de um mesmo material não são exatamente idênticos, pois os resultados dependem de várias variáveis como, composição do material, imperfeições microscópicas, fabricação, velocidade de aplicação da carga e temperatura do ensaio. A Fig. 4.5 apresenta um diagrama tensão-deformação de um aço usualmente utilizado na engenharia, no qual pode-se distinguir diferentes regiões.

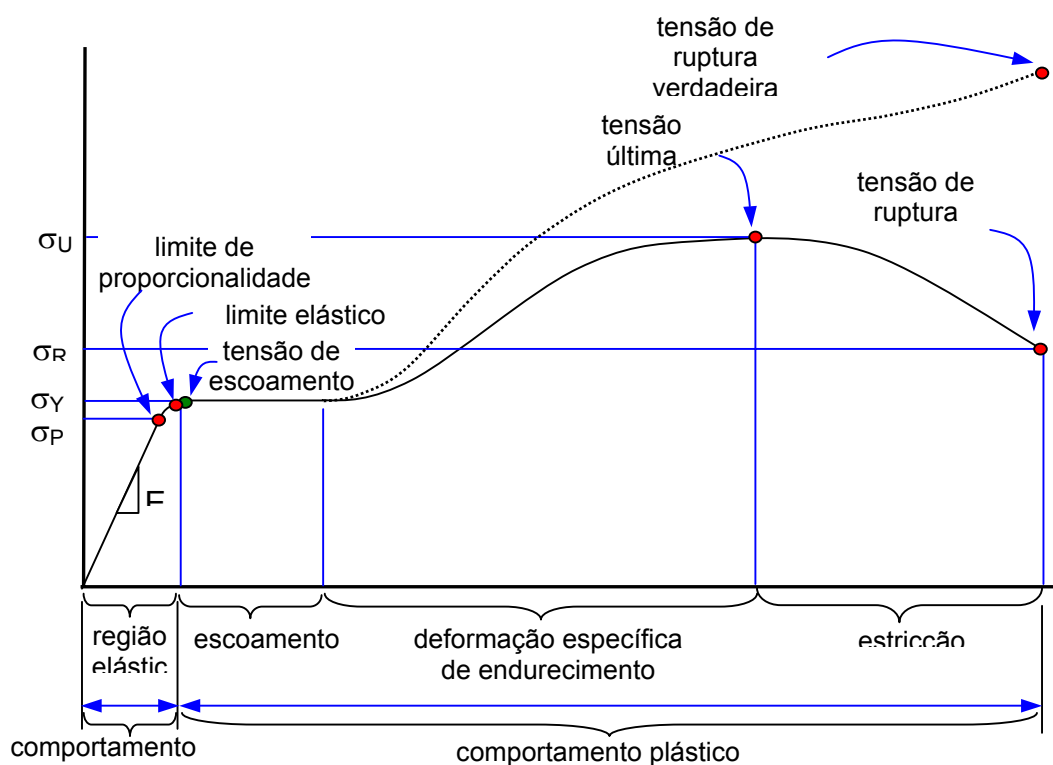


Figura 4.5 – Diagrama tensão-deformação em um ensaio de tração

O comportamento do corpo-de-prova pode ser de diferentes formas, dependendo da intensidade da carga aplicada e do seu grau de deformação.

- Comportamento elástico: Quando o corpo-de-prova retorna à sua forma original quando a carga aplicada é removida. O material é considerado linearmente elástico até o limite superior da tensão, chamado de limite de proporcionalidade, σ_P . Até esse limite de proporcionalidade, a lei de Hooke, que relaciona a tensão σ com a deformação ε pelo módulo de elasticidade E do material é válida:

$$\sigma = E \varepsilon \quad (4.8)$$

O material pode ainda se comportar elasticamente até o limite elástico, mesmo se exceder ligeiramente este limite de proporcionalidade. Neste caso porém, o comportamento não é mais linear.

- Escoamento: Um leve aumento na tensão, acima do limite elástico, resultará numa acomodação do material causando uma deformação permanente. A tensão que causa o escoamento é chamada de tensão de escoamento, σ_Y . Neste caso, mesmo se a carga for removida, o corpo-de-prova continuará deformado. O corpo-de-prova poderá continuar a se alongar mesmo sem qualquer aumento de carga. Nesta região, o material é denominado perfeitamente plástico.
- Deformação específica por endurecimento: Se ao término do escoamento, uma carga adicional for aplicada ao corpo-de-prova, a tensão continuará a aumentar com a deformação específica continuamente até atingir um valor de tensão máxima, referida por tensão última, σ_U . Durante a execução do ensaio nesta região, enquanto o corpo-de-prova é alongado, sua área da seção transversal diminui ao longo de seu comprimento nominal, até o ponto que a deformação corresponda a tensão última.
- Estricção: Ao atingir a tensão última, a área da seção transversal começa a diminuir em uma região localizada do corpo-de-prova, e não mais ao longo do seu comprimento nominal. Este fenômeno é causado pelo deslizamento de planos no interior do material e as deformações reais produzidas pela tensão cisalhante (*necking*). Uma vez que a área da seção transversal diminui constantemente, esta área só pode sustentar uma carga menor. Assim, o diagrama tensão-deformação tende a curvar-se para baixo até a ruptura do corpo-de-prova com uma tensão de ruptura, σ_R .

O comportamento do corpo-de-prova pode ser de diferentes formas, dependendo da intensidade da carga aplicada e do seu grau de deformação.

- Comportamento elástico: Quando o corpo-de-prova retorna à sua forma original quando a carga aplicada é removida. O material é considerado linearmente elástico até o limite superior da tensão, chamado de limite de proporcionalidade, σ_P . Até esse limite de proporcionalidade, a lei de Hooke, que relaciona a tensão σ com a deformação ε pelo módulo de elasticidade E do material é válida:

$$\sigma = E \varepsilon \quad (4.8)$$

O material pode ainda se comportar elasticamente até o limite elástico, mesmo se exceder ligeiramente este limite de proporcionalidade. Neste caso porém, o comportamento não é mais linear.

- Escoamento: Um leve aumento na tensão, acima do limite elástico, resultará numa acomodação do material causando uma deformação permanente. A tensão que causa o escoamento é chamada de tensão de escoamento, σ_Y . Neste caso, mesmo se a carga for removida, o corpo-de-prova continuará deformado. O corpo-de-prova poderá continuar a se alongar mesmo sem qualquer aumento de carga. Nesta região, o material é denominado perfeitamente plástico.
- Deformação específica por endurecimento: Se ao término do escoamento, uma carga adicional for aplicada ao corpo-de-prova, a tensão continuará a aumentar com a deformação específica continuamente até atingir um valor de tensão máxima, referida por tensão última, σ_U . Durante a execução do ensaio nesta região, enquanto o corpo-de-prova é alongado, sua área da seção transversal diminui ao longo de seu comprimento nominal, até o ponto que a deformação corresponda a tensão última.
- Estricção: Ao atingir a tensão última, a área da seção transversal começa a diminuir em uma região localizada do corpo-de-prova, e não mais ao longo do seu comprimento nominal. Este fenômeno é causado pelo deslizamento de planos no interior do material e as deformações reais produzidas pela tensão cisalhante (*necking*), Fig. 4.6. Uma vez que a área da seção transversal diminui constantemente, esta área só pode sustentar uma carga menor. Assim, o diagrama tensão-deformação tende a curvar-se para baixo até a ruptura do corpo-de-prova com uma tensão de ruptura, σ_R .



Figura 4.6 – Estricção da seção transversal do corpo-de-prova

A área sob a curva tensão-deformação representa a energia de deformação absorvida pelo material. Quando a tensão atinge o limite de proporcionalidade, σ_P , a energia de deformação é denominada módulo de resiliência. Quando a tensão atingir a tensão de ruptura, σ_R , a energia de deformação é denominada de tenacidade. Os materiais com alta tenacidade são os mais utilizados em projetos estruturais, pois materiais com baixa tenacidade podem romper subitamente sem dar sinais de um rompimento iminente.

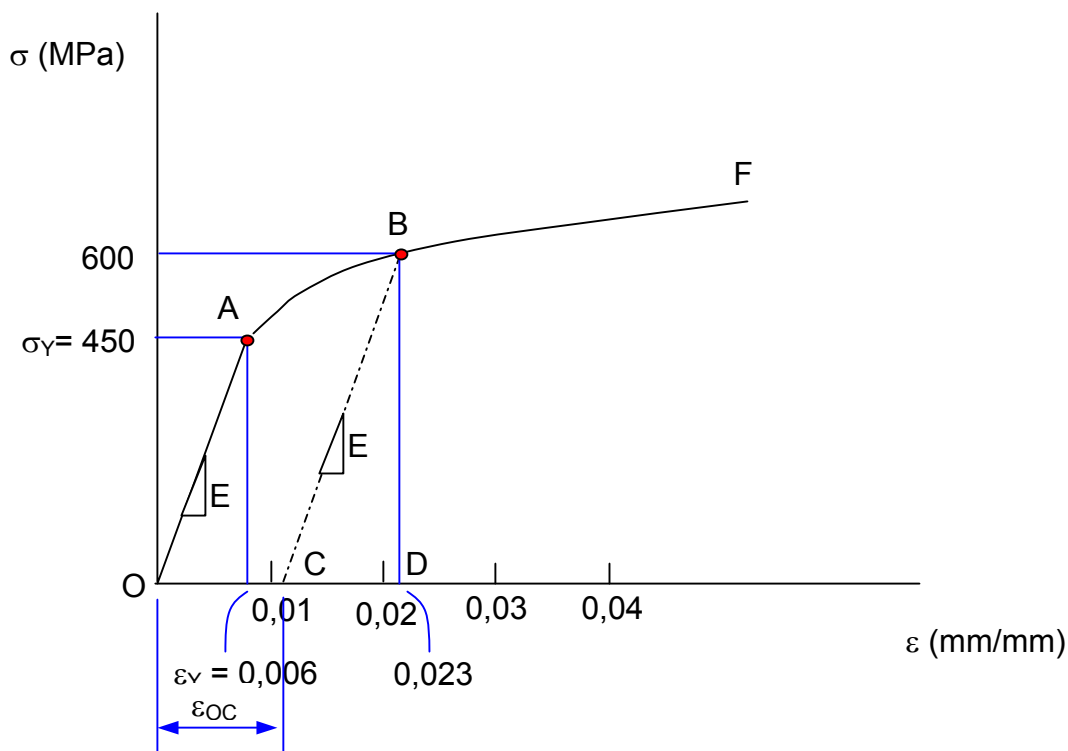
Exemplo 4.1: O diagrama tensão-deformação de um material é mostrado abaixo. Se um corpo-de-prova é carregado até 600 MPa, determine a deformação permanente remanescente quando o corpo é descarregado. Calcule também o módulo de resiliência antes e após a aplicação do carregamento.

O módulo de elasticidade E é obtido pela inclinação da reta OA:

$$E = \frac{\sigma_Y}{\varepsilon_Y} = \frac{450 \text{ MPa}}{0,006 \text{ mm/mm}} = 75 \text{ GPa}$$

Do triângulo CBD, temos:

$$E = \frac{BD}{CD} = \frac{600 \text{ MPa}}{CD} = 75 \text{ GPa} \Rightarrow CD = 0,008 \text{ mm/mm}$$



A deformação dada pelo segmento CD é a deformação elástica recuperada. A deformação permanente, ε_{OC} , é portanto:

$$\varepsilon_{OC} = 0,023 - 0,008 = 0,0150 \text{ mm/mm}$$

Os módulos de resiliência inicial e final são:

$$u_{\text{inicial}} = \frac{1}{2} \sigma_Y \varepsilon_Y = \frac{1}{2} 450 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} 0,006 \text{ mm/mm} = 1,35 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$u_{\text{final}} = \frac{1}{2} \sigma_P \varepsilon_P = \frac{1}{2} 600 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} 0,023 \text{ mm/mm} = 6,90 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

4.3.2 – Coeficiente de poisson para materiais isotrópicos

Considere um corpo sólido submetido à uma força axial como mostra a Fig. 4.7. Pela definição, a deformação axial do corpo é da forma:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (4.9)$$

e, a deformação lateral do corpo é da forma:

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta b}{b_0} \quad (4.10)$$

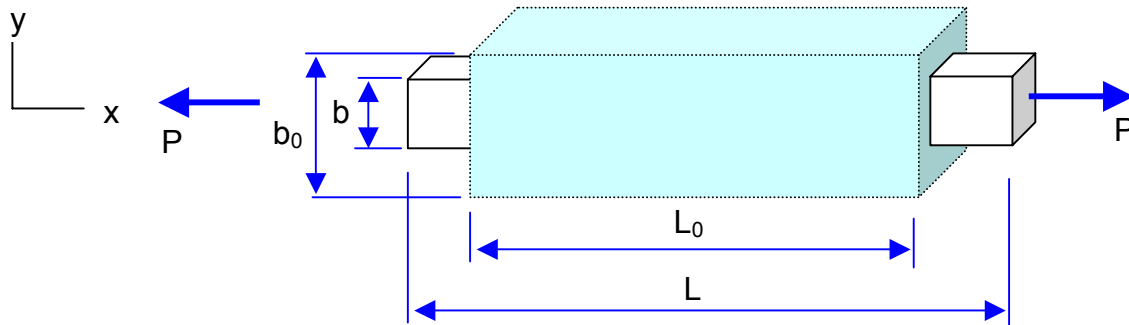


Figura 4.7 – Corpo sólido solicitado uniaxialmente

A relação entre o valor da deformação lateral e a deformação axial é conhecida como coeficiente de poisson:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \quad (4.11)$$

4.3.3 – Lei de Hooke para materiais isotrópicos (Estado triaxial de tensões)

Considere um corpo submetido à um estado triaxial de tensões σ_x , σ_y e σ_z .

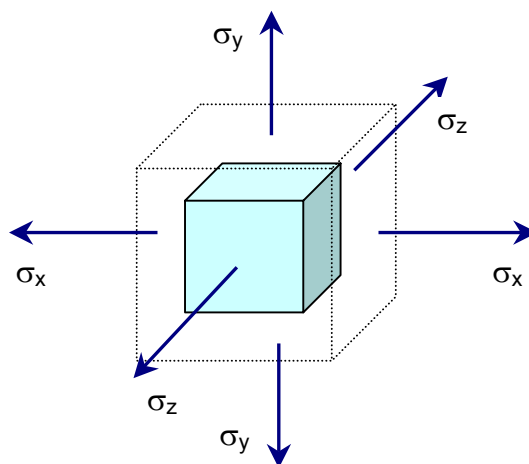


Figura 4.8 – Corpo sólido solicitado triaxialmente

O estado triaxial de tensões pode ser considerado como a superposição de três estados de tensão uniaxial analisados separadamente:

1. Deformações devido à σ_x :

$$\varepsilon'_x, \varepsilon'_y = -\nu \varepsilon'_x, \varepsilon'_z = -\nu \varepsilon'_x \quad (4.12)$$

2. Deformações devido à σ_y :

$$\varepsilon''_y, \varepsilon''_x = -\nu \varepsilon''_y, \varepsilon''_z = -\nu \varepsilon''_y \quad (4.13)$$

3. Deformações devido à σ_z :

$$\varepsilon'''_z, \varepsilon'''_x = -\nu \varepsilon'''_z, \varepsilon'''_y = -\nu \varepsilon'''_z \quad (4.14)$$

Superpondo todas as deformações, temos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon'_x + \varepsilon''_x + \varepsilon'''_x = \varepsilon'_x - \nu \varepsilon''_y - \nu \varepsilon'''_z \\ \varepsilon_y &= \varepsilon'_y + \varepsilon''_y + \varepsilon'''_y = -\nu \varepsilon'_x + \varepsilon''_y - \nu \varepsilon'''_z \\ \varepsilon_z &= \varepsilon'_z + \varepsilon''_z + \varepsilon'''_z = -\nu \varepsilon'_x - \nu \varepsilon''_y + \varepsilon'''_z \end{aligned} \quad (4.15)$$

Da Lei de Hooke, eq. (4.8), as deformações devido à σ_x , σ_y e σ_z são colocadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \quad (4.16)$$

Para o caso do corpo ser submetido a esforços de cisalhamento as relações deformação-tensão são colocadas da forma:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz} \end{aligned} \quad (4.17)$$

O módulo de cisalhamento G está relacionado a E e ν por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.18)$$

4.4 – Energias de deformação elástica

4.4.1 – Energia de deformação elástica para tensão uniaxial

O trabalho interno armazenado em um corpo deformável como energia elástica de deformação ou energia de deformação elástica, é o produto da força média que atua sobre o corpo enquanto ocorre a deformação, multiplicada pela distância na qual ela age. Neste contexto, considere então o elemento de volume infinitesimal dx, dy, dz submetido à um esforço normal σ_x :

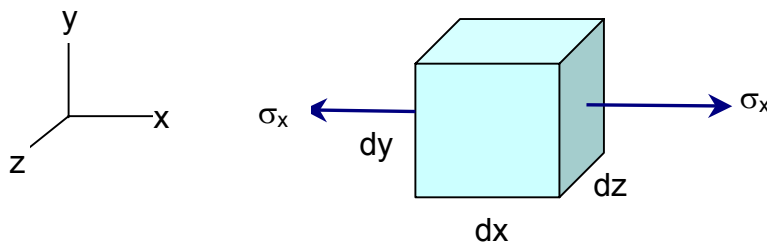


Figura 4.9 – Corpo sólido solicitado uniaxialmente

A densidade de energia de deformação U_0 é interpretada graficamente como sendo a área sob a linha inclinada do diagrama tensão-deformação.

$$\frac{dU}{dV} = U_0 = \frac{\sigma_x \epsilon_x}{2} \quad (4.19)$$

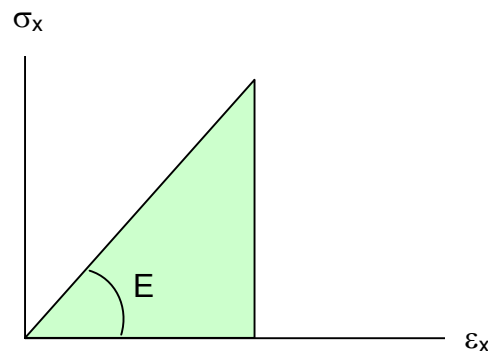


Figura 4.10 – Diagrama tensão-deformação

4.4.2 – Energia de deformação elástica para tensão de cisalhamento

Considere um elemento de volume infinitesimal dx, dy e dz , submetido à um esforço cisalhante. A energia de deformação elástica pode ser colocada da forma:

$$dU = \left(\frac{1}{2} \tau_{xy} dx dz \right) (\gamma_{xy} dy) = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} dV \quad (4.20)$$

A densidade de energia de deformação pode ser colocada da seguinte forma:

$$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} \quad (4.21)$$

4.4.3 – Energia de deformação elástica para um estado de tensão multiaxial

A densidade de energia de deformação elástica de um corpo solicitado triaxialmente pode ser da seguinte forma:

$$\frac{dU}{dV} = dU_o = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x + \frac{1}{2} \sigma_y \varepsilon_y + \frac{1}{2} \sigma_z \varepsilon_z + \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} + \frac{1}{2} \tau_{yz} \gamma_{yz} + \frac{1}{2} \tau_{xz} \gamma_{xz} \quad (4.22)$$

Substituindo a eq. (4.16) na eq. (4.22), a expressão que fornece a densidade de energia de deformação é da forma:

$$U_o = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \quad (4.23)$$

Em geral, para um corpo elástico sob tensão, a energia de deformação total é obtida pela integração volumétrica da densidade de energia de deformação elástica, eq. (4.23):

$$U = \iiint_V U_o dx dy dz \quad (4.24)$$

4.5 – Deformação de membros carregados axialmente

Usando a Lei de Hooke e as definições de tensão e deformação, será desenvolvida uma equação que pode ser usada para determinar a deformação elástica de membros submetidos à cargas axiais. Assim, considere uma barra de seção transversal variável ao longo de seu comprimento, Fig. 4.11. A barra é solicitada por duas forças concentradas nas extremidades e por diferentes forças aplicadas ao longo de seu comprimento.

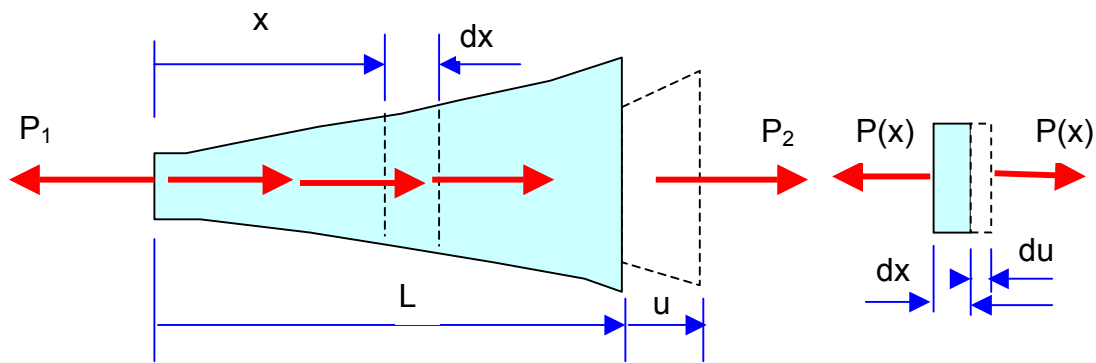


Figura 4.11 – Barra de seção variável solicitada axialmente

Num ponto distante x da extremidade, as seguintes relações são válidas:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{P(x)}{A(x)} \\ \varepsilon &= \frac{du}{dx}\end{aligned}\tag{4.25}$$

Substituindo a eq. (4.25) na Lei de Hooke $\sigma = E \varepsilon$, temos:

$$\frac{P(x)}{A(x)} = E \frac{du}{dx}\tag{4.26}$$

A integração da variação de comprimento du ao longo do comprimento da barra fornece:

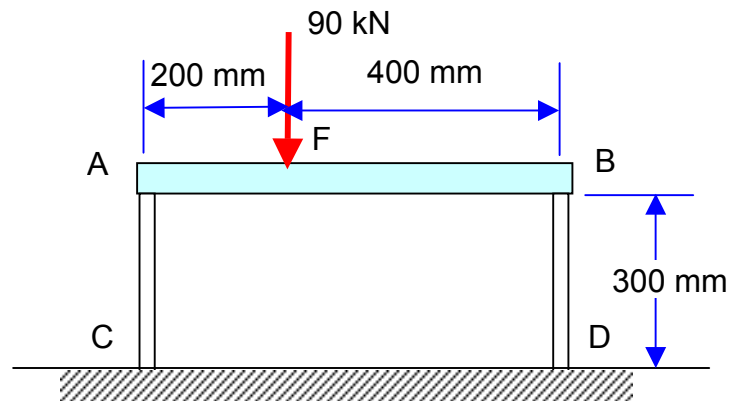
$$u = \int_0^L \frac{P}{A(x)E} dx\tag{4.27}$$

Para o caso da força e da seção transversal serem constantes ao longo do comprimento do membro, tem-se:

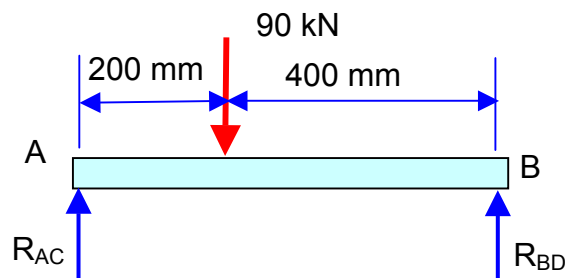
$$u = \frac{PL}{AE}\tag{4.28}$$

Exemplo 4.2: A viga rígida AB está apoiada em duas colunas curtas como apresentado abaixo. A coluna AC é de aço e tem diâmetro de 20 mm, e a coluna BD é de alumínio e tem diâmetro de 40 mm. Determine o deslocamento do ponto F na

viga AB se a carga de 90 kN é aplicada sobre este ponto. Tome $E_{aço} = 200 \text{ Gpa}$, $E_{al} = 70 \text{ Gpa}$.



1 – Determinar as reações das colunas AC e BD na viga AB.



$$\sum M_A = 0, \quad R_{BD} \cdot 600 - 90 \cdot 200 = 0, \quad R_{BD} = 30 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0, \quad R_{AC} - 90 + 30 = 0, \quad R_{AC} = 60 \text{ kN}$$

2 – Determinar os deslocamentos das colunas.

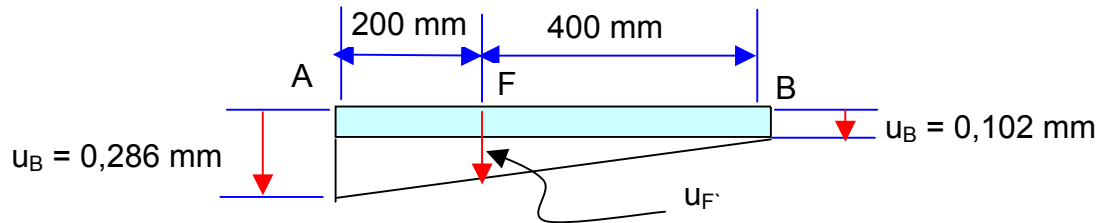
Coluna AC:

$$u_A = \frac{R_{AC} \cdot L_{AC}}{E_{aço} \cdot A_{AC}} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 300}{200 \cdot 10^3 \cdot \frac{\pi \cdot 20^2}{4}} = 0,286 \text{ mm}$$

Coluna BD:

$$u_B = \frac{R_{BD} \cdot L_{BD}}{E_{al} \cdot A_{BD}} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 300}{70 \cdot 10^3 \cdot \frac{\pi \cdot 40^2}{4}} = 0,102 \text{ mm}$$

3 – Determinar o deslocamento do ponto F.

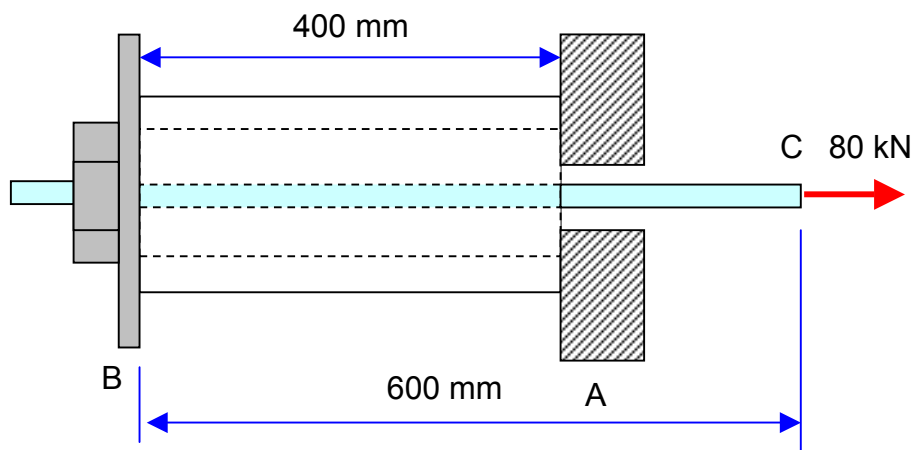


Por semelhança de triângulos:

$$\frac{(0,286 - 0,102)}{(200 + 400)} = \frac{u_F}{400}, \quad u_F = 0,123 \text{ mm}$$

$$u_F = 0,102 + 0,123 = 0,225 \text{ mm}$$

Exemplo 4.3: O conjunto abaixo consiste de um tubo de alumínio AB tendo uma área de 400 mm^2 . Uma haste de aço de diâmetro 10 mm é conectada ao tubo AB por uma arruela e uma porca em B. Se uma força de 80 kN é aplicada na haste, determine o deslocamento da extremidade C. Tome $E_{\text{aço}} = 200 \text{ GPa}$ e $E_{\text{al}} = 70 \text{ GPa}$.

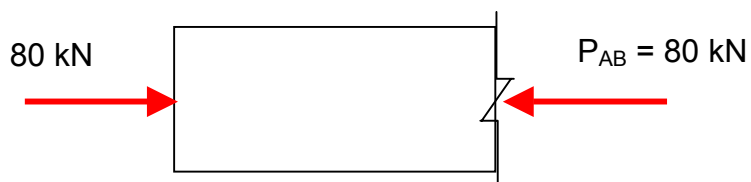


Haste BC:



$$u_{C/B} = \frac{P_{BC} L_{BC}}{E_{\text{aço}} A_{BC}} = \frac{80000 \cdot 600}{200 \cdot 10^3 \cdot \frac{\pi \cdot 10^2}{4}}, \quad u_{C/B} = 3,06 \text{ mm} \rightarrow$$

Tubo AB:



$$u_{B/A} = \frac{P_{AB} L_{AB}}{E_{al} A_{AB}} = \frac{80000 \cdot 400}{70 \cdot 10^3 \cdot 400}, \quad u_{B/A} = 1,14 \text{ mm} \rightarrow$$

$$u_c = u_{C/B} + u_{B/A} = 3,06 + 1,14, \quad u_c = 4,2 \text{ mm} \rightarrow$$

Exemplo 4.4: O conjunto abaixo consiste de duas barras rígidas originalmente horizontais. Elas são suportadas por duas barras de área 25 mm^2 e $E = 200 \text{ GPa}$. Se uma força vertical de 50 kN é aplicada na barra AB, determine o deslocamento em C, B e E.

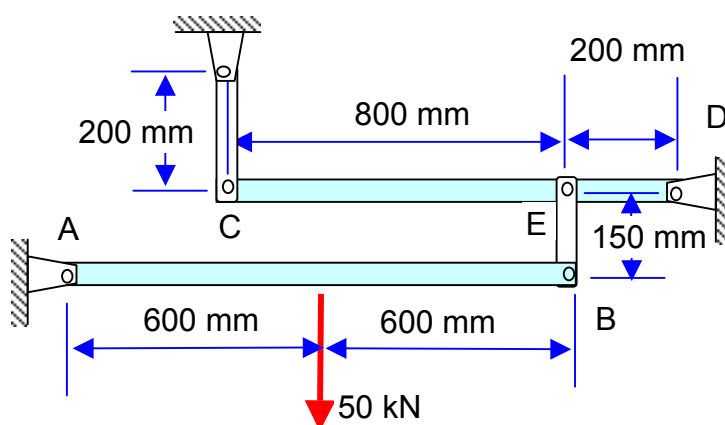
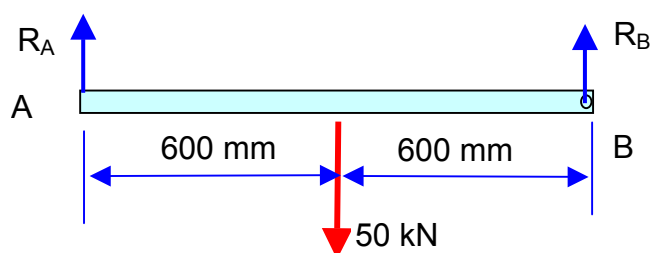
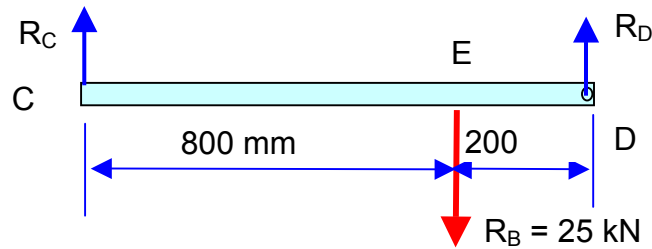


Diagrama de corpo rígido da barra AB:



Devido a simetria: $R_A = R_B = 25 \text{ kN}$

Diagrama de corpo rígido da barra CB:

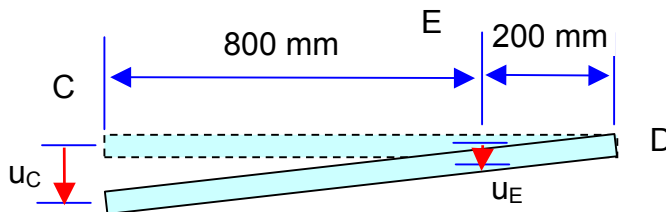


$$\sum M_D = 0, R_B \cdot 200 - R_C \cdot 1000 = 0, R_C = 5 \text{ kN}$$

Deslocamento do ponto C:

$$u_C = \frac{R_C L_C}{E A} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 200}{200 \cdot 10^3 \cdot 25}, u_C = 0,2 \text{ mm}$$

Deslocamento do ponto E:



Por semelhança de triângulos:

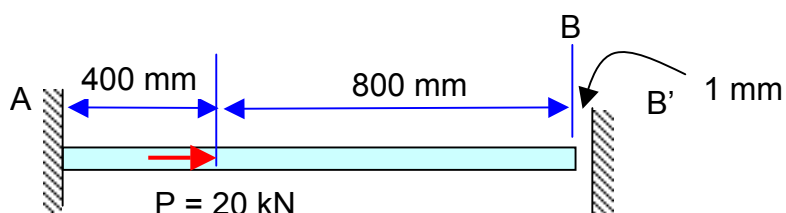
$$\frac{u_E}{200} = \frac{u_C}{1000}, u_E = 0,04 \text{ mm}$$

Deslocamento do ponto B:

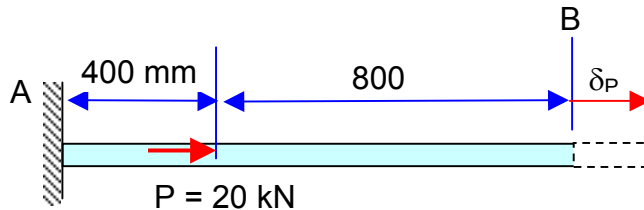
$$u_{B/E} = \frac{R_B L_{BE}}{E A} = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 150}{200 \cdot 10^3 \cdot 25}, u_{B/E} = 0,75 \text{ mm}$$

$$u_B = u_{B/E} + u_E = 0,75 + 0,04, u_B = 0,79 \text{ mm}$$

Exemplo 4.5: A barra abaixo tem diâmetro de 5 mm e está fixa em A. Antes de aplicar a força $P = 20 \text{ kN}$, há um gap entre a parede em B' e a barra de 1 mm. Determine as reações em A e B'. Considere $E = 200 \text{ GPa}$.

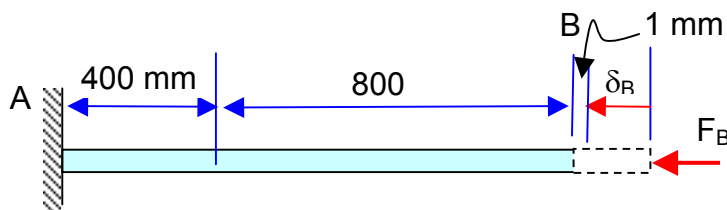


A reação na parede B irá surgir somente se o deslocamento devido a força P for maior que o gap de 1 mm. Neste caso podemos determinar o deslocamento em B devido à duas forças, P e a reação em B. Supondo que não houvesse a parede B', o deslocamento em B devido a força P δ_P seria:



$$\delta_P = \frac{P L_{AC}}{E A} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 400}{200 \cdot 10^3 \cdot \frac{\pi \cdot 5^2}{4}}, \quad \delta_P = 2,037 \text{ mm}$$

e, o deslocamento em B devido a reação em B δ_B seria:

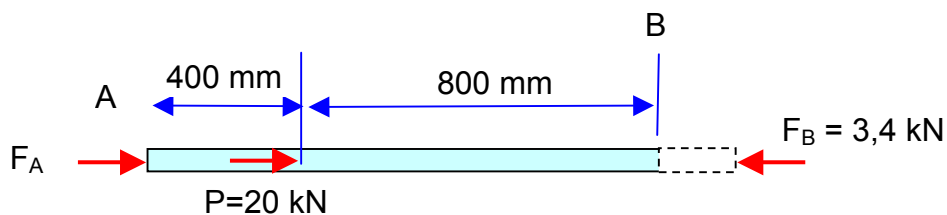


$$\delta_B = \frac{F_B L_{AB}}{E A} = \frac{F_B \cdot 1200}{200 \cdot 10^3 \cdot \frac{\pi \cdot 5^2}{4}}, \quad \delta_B = 0,3056 \cdot 10^{-6} \cdot F_B \text{ mm}$$

A reação em B surgirá somente se o deslocamento δ_P for maior que 1 mm, logo:

$$1 = \delta_P - \delta_B, \quad 1 = 2,037 - 0,3056 \cdot 10^{-6} \cdot F_B, \quad F_B = 3,4 \text{ kN}$$

Do equilíbrio estático, temos:



$$\rightarrow \sum F = 0, \quad F_A + 20 - 3,4 = 0, \quad F_A = 16,6 \text{ kN}$$

4.6 – Tensões Residuais

Se uma estrutura estaticamente indeterminada é carregada excessivamente até causar escoamento do material, isso gerará tensões residuais na estrutura quando o carregamento for removido. A razão do aparecimento dessas tensões residuais está na recuperação elástica do material que ocorre durante o descarregamento. Considere, por exemplo, um material elastoplástico cujo diagrama tensão-deformação é mostrada na Fig. 4.12.

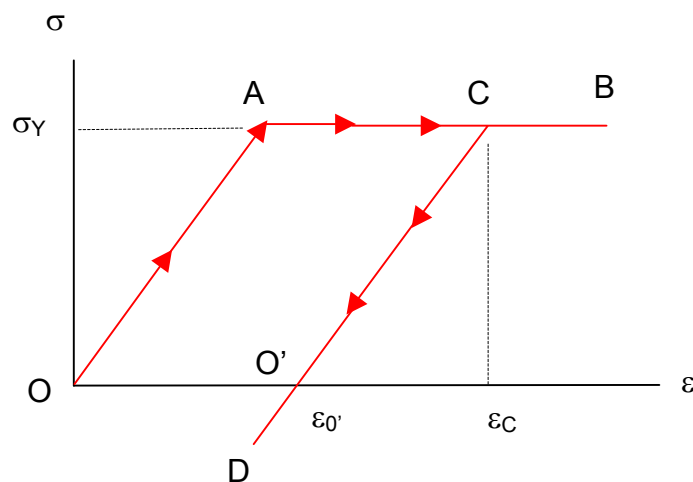


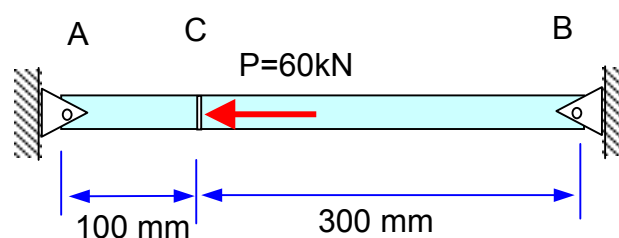
Figura 4.12 – Diagrama tensão-deformação para um material elastoplástico

Se uma carga axial produz uma tensão σ_Y no material e uma correspondente deformação específica plástica ϵ_C , quando a carga for removida, o material responderá elasticamente seguindo a linha CD de forma a recuperar a parte da deformação plástica correspondente. Uma recuperação completa até a tensão nula no ponto O' somente será possível caso a estrutura seja estaticamente determinada, uma vez que as reações de apoio da estrutura deverão ser nulas quando a carga for removida. Nestas condições, a estrutura será deformada permanentemente pela deformação ϵ_0 . Entretanto, se a estrutura é estaticamente indeterminada, a remoção das cargas externas fará com que surjam forças reativas nos apoios que respondem a recuperação elástica CD. Como essas forças restringem a estrutura de uma recuperação plena, elas induzirão tensões residuais na estrutura.

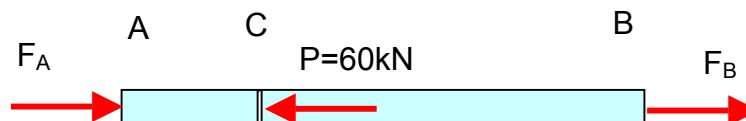
Para resolver este tipo de problema, devemos considerar o ciclo completo de carregamento e descarregamento da estrutura como a superposição de uma carga positiva (carregamento) com uma carga negativa (descarregamento). O

carregamento de O até C resulta em uma distribuição de tensões plásticas, enquanto o descarregamento ao longo de CD resulta apenas em uma distribuição de tensões elásticas. A superposição requer que as cargas se cancelem; entretanto, a distribuição das tensões não se cancelará gerando assim as tensões residuais.

Exemplo 4.6: A barra abaixo tem raio de 5 mm e é fabricada de um material elástico perfeitamente plástico para o qual $\sigma_Y = 420$ MPa e $E = 70$ Gpa. Se uma força $P = 60$ kN é aplicada à barra e, em seguida, removida, determine a tensão residual na barra e o deslocamento permanente do Ponto C.



O diagrama de corpo livre da barra é da forma:



Do equilíbrio estático, temos:

$$F_A - 60 + F_B = 0 \quad (a)$$

Um equação de compatibilidade é obtida impondo a variação nula de comprimento da barra:

$$\delta_{CA} + \delta_{CB} = 0 \quad (b)$$

As forças que irão atuar nos trechos CA e CB são respectivamente F_A e F_B .

Assim:

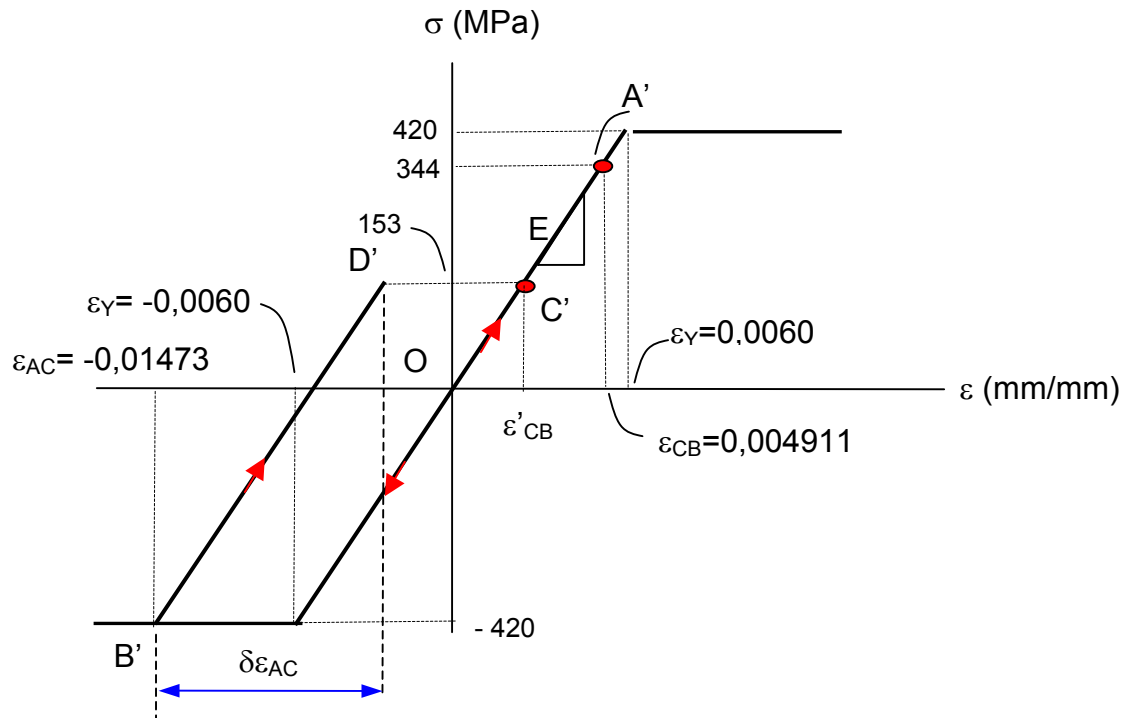
$$\frac{-F_A L_{CA}}{EA} + \frac{F_B L_{CB}}{EA} = 0 \quad (c)$$

Introduzindo a eq. (c) na eq. (a) obtêm-se: $F_A = 45$ kN e $F_B = 15$ kN

Entretanto, estas forças resultam nas tensões:

$$\sigma_{CA} = \frac{-45 \cdot 10^3 \text{ N}}{\pi 5^2 \text{ mm}^2} = -573 \text{ MPa} > \sigma_Y = -420 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{CB} = \frac{15 \cdot 10^3 \text{ N}}{\pi 5^2 \text{ mm}^2} = 191 \text{ MPa} < \sigma_Y = 420 \text{ MPa}$$
(d)



Observa-se que o trecho CA escoá, enquanto o trecho CB não escoá. Como a maior tensão possível no trecho CA é 420 MPa, a maior força possível que surge neste trecho é:

$$F_A = 420 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \pi 5^2 \text{ mm}^2 = 33,0 \text{ kN}$$
(e)

Pela condição de equilíbrio da barra, eq. (a), temos que:

$$F_B = 60 \text{ kN} - 33,0 \text{ kN} = 27,0 \text{ kN}$$
(f)

A tensão em cada segmento da barra será portanto:

$$\sigma_{CA} = \sigma_Y = -420 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{CB} = \frac{27,0 \cdot 10^3 \text{ kN}}{\pi 5^2 \text{ mm}^2} = 344 \text{ MPa} < 420 \text{ MPa}$$

Tensões residuais: De forma a obtermos a tensão residual, é necessário conhecermos a deformação específica em cada segmento devido ao carregamento. Uma vez que o trecho CB responde elasticamente.

$$\delta_C = \frac{F_B}{A} \frac{L_{CB}}{E} = \frac{27,0 \cdot 10^3 \text{ N}}{\pi \cdot 5^2 \text{ mm}^2} \frac{300 \text{ mm}}{70 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2} = 0,1473 \text{ mm}$$

Assim:

$$\varepsilon_{CB} = \frac{\delta_C}{L_{CB}} = \frac{0,1473 \text{ mm}}{300 \text{ mm}} = +0,0004911$$

Sendo δ_C conhecido, a deformação específica no trecho AC será:

$$\varepsilon_{CA} = \frac{\delta_C}{L_{CA}} = -\frac{0,1473 \text{ mm}}{100 \text{ mm}} = -0,001473$$

Este valor pode também ser determinado da forma:

$$\varepsilon_{CA} = \frac{\delta_C}{L_{CA}} = \frac{F_A}{A} \frac{L_{CA}}{E} = \frac{33,0 \cdot 10^3 \text{ N}}{\pi \cdot 5^2 \text{ mm}^2} \frac{100 \text{ mm}}{70 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2} = -0,001473$$

Entretanto, quando a carga P é aplicada, o comportamento do material no trecho CB corresponde a uma evolução do ponto O para o ponto A' do diagrama tensão-deformação. Ao mesmo tempo, o comportamento do material na trecho AC evolui do ponto O para o ponto B'. Se a carga P é aplicada no sentido oposto, ou seja, se a carga for removida ocorrerá uma resposta elástica e forças opostas $F_A = 45 \text{ kN}$ e $F_B = 15 \text{ kN}$ devem ser aplicadas aos correspondentes segmentos. Conforme calculado anteriormente, essas forças produzem as tensões $\sigma_{AC} = 573 \text{ MPa}$ e $\sigma_{CB} = -191 \text{ MPa}$ e, como resultado, a tensão residual em cada trecho será:

$$(\sigma_{AC})_r = -420 + 573 = 153 \text{ MPa}$$

$$(\sigma_{CB})_r = 344 - 191 = 153 \text{ MPa}$$

Deslocamento permanente: A deformação residual em CB é:

$$\varepsilon'_{CB} = \frac{\sigma_{CB}}{E} = \frac{153 \text{ MPa}}{70 \cdot 10^3 \text{ MPa}} = 0,002185$$

Logo, o deslocamento permanente do ponto C será:

$$\delta_C = \varepsilon'_{CB} L_{CB} = 0,002185 \cdot 300 \text{ mm} = \leftarrow 0,655 \text{ mm}$$

Este mesmo resultado pode ser determinado pela deformação específica residual do trecho AC:

$$\delta\varepsilon_{AC} = \frac{\delta\sigma}{E} = \frac{(420 + 153) \text{ MPa}}{70 \cdot 10^3 \text{ MPa}} = 0,008185$$

Portanto:

$$\varepsilon'_{AC} = \varepsilon_{AC} + \delta\varepsilon_{AC} = -0,01473 + 0,008185 = -0,00655$$

Finalmente:

$$\delta_C = \varepsilon'_{AC} L_{AC} = -0,00655 \cdot 100 \text{ mm} = \leftarrow 0,655 \text{ mm}$$

5 – TORÇÃO

5.1 – Aplicação do método das seções

Assim como no caso de vigas solicitadas externamente, onde os esforços internos podem ser determinados pelo método das seções, os esforços internos em eixos de seção circular solicitados por torques externos também podem. Considere então o eixo solicitado por torques em 3 pontos ao longo do seu comprimento. O torque interno no trecho AB pode ser determinado da seguinte forma.

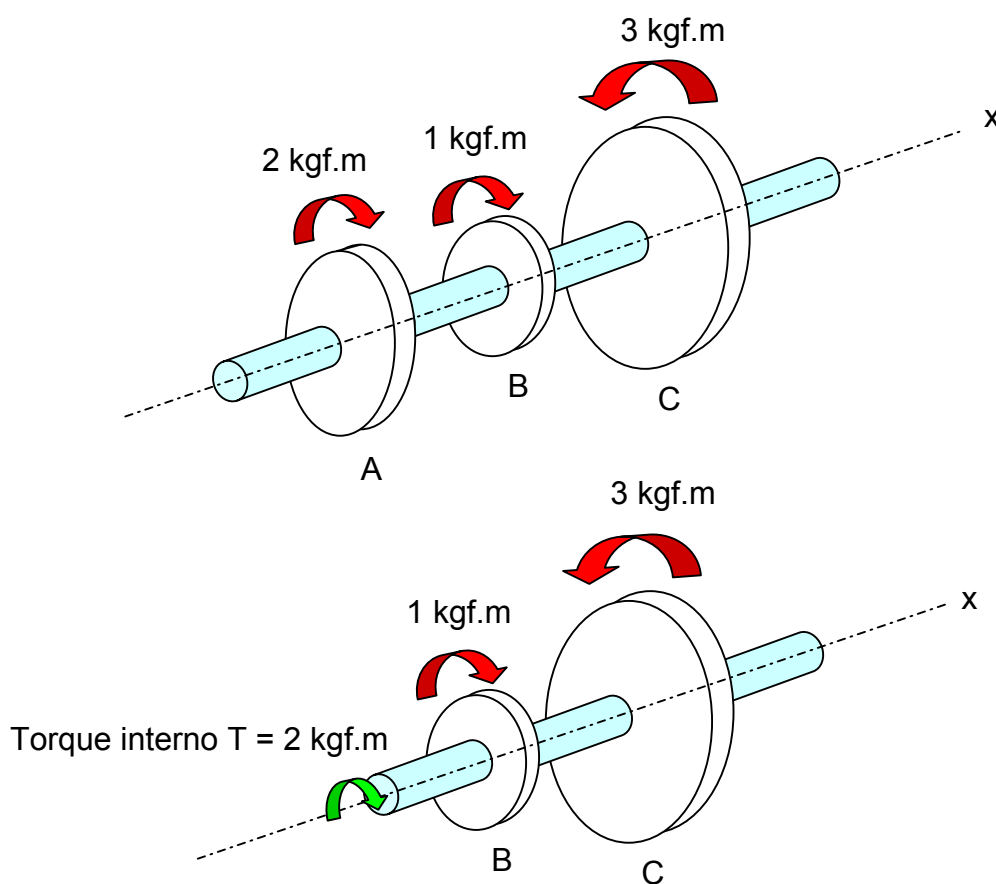


Figura 5.1 – Equilíbrio de torques

5.2 – Premissas Básicas

- Uma seção inicialmente plana, perpendicular ao eixo de seção circular, permanece plana após a aplicação dos torques.

- b) Em um membro circular sujeito à ação de um torque, as deformações angulares γ variam linearmente a partir do eixo central. Isto significa que as linhas radiais nos planos ao longo do eixo x permanecem retas após a deformação.

Observação: Estas premissas são válidas somente para eixos de seção circular.

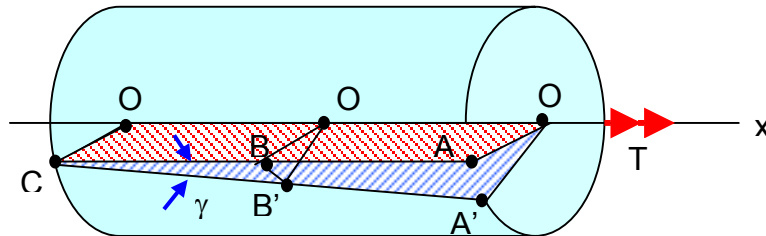


Figura 5.2 – Premissas básicas da torção

5.3 – A fórmula da torção

Para o caso linearmente elástico, a Lei de Hooke se aplica $\tau = G \gamma$:

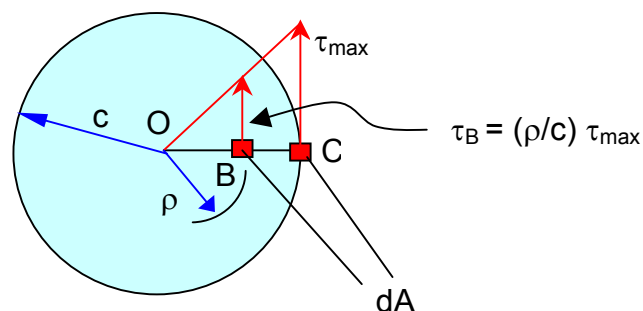


Figura 5.3 – Torque interno atuando na seção transversal

O torque interno na seção transversal é a soma dos torques infinitesimais atuantes em cada área dA .

$$T = \int_A \frac{\rho}{c} \tau_{\max} dA \quad \rho = \frac{\tau_{\max}}{c} J \quad (5.1)$$

onde o momento polar de inércia de área J é dado da forma:

$$J = \int_A \rho^2 dA \quad (5.2)$$

O momento polar de inércia para o caso particular de uma seção circular é da seguinte forma:

$$J = \int_0^c \rho^2 (2\pi \rho d\rho) = 2\pi \int_0^c \rho^3 d\rho = \frac{\pi c^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \quad (5.3)$$

onde d é o diâmetro da seção transversal. Substituindo a eq. (5.3) na eq. (5.1), a expressão da tensão máxima atuando na superfície mais externa do eixo é:

$$\tau_{\max} = \frac{T c}{J} \quad (5.4)$$

A tensão num ponto qualquer da seção circular distante ρ do centro é:

$$\tau = \frac{\rho T c}{c J} = \frac{T \rho}{J} \quad (5.5)$$

Para tubos circulares de raio interno b e raio externo c , o momento polar de inércia pode ser calculado como segue:

$$J = \int_A \rho^2 dA = \int_0^c 2\pi \rho^3 d\rho = \frac{\pi c^4}{2} - \frac{\pi b^4}{2} = J_e - J_i \quad (5.6)$$

5.4 – Observações sobre a fórmula da torção

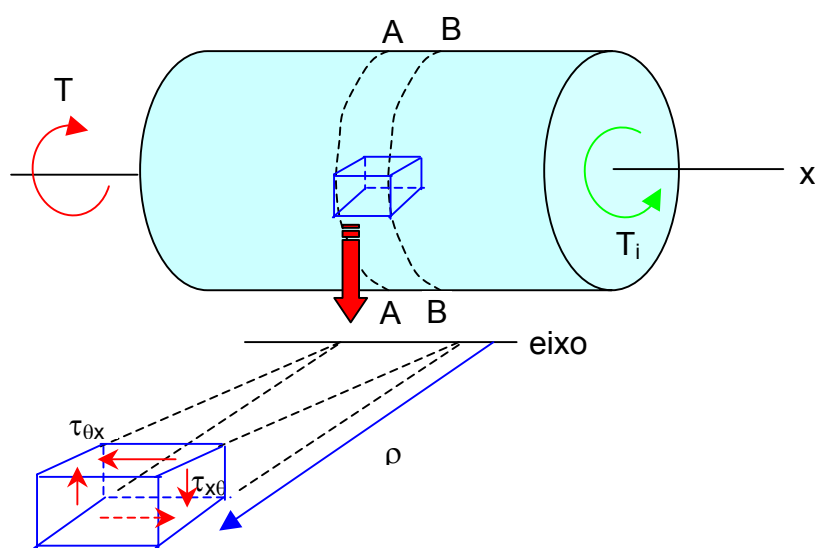


Figura 5.4 – Estado de tensão em um elemento infinitesimal de um eixo em torção

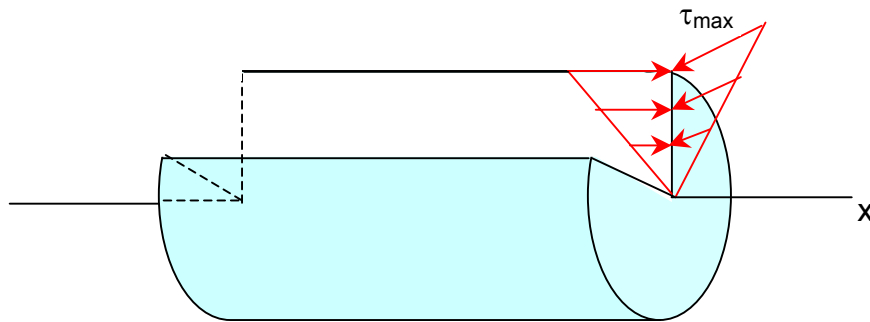


Figura 5.5 – Tensões de cisalhamento atuando em planos ortogonais

Observação Importante: Para o caso de materiais anisotrópicos (diferentes propriedades mecânicas nas direções x , y e z) como por exemplo a madeira, o eixo se rompe ao longo de um plano paralelo ao eixo x .

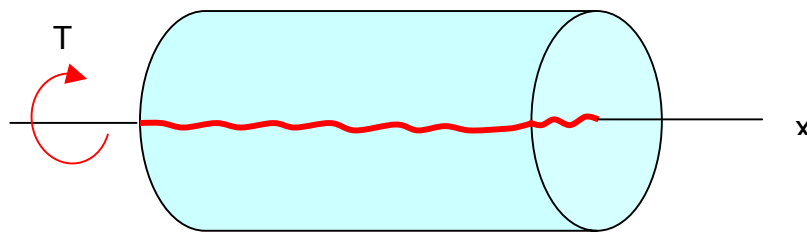
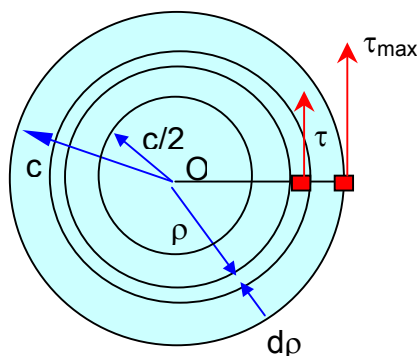


Figura 5.6 – Plano de ruptura em eixos em madeira

Exemplo 5.1: Um eixo maciço de raio c é sujeito a um torque T . Determine a fração de T que é resistida pelo material contido na região externa do eixo, de raio interno $c/2$ e raio externo c .





A fração de T que é resistida pela parte externa do eixo, T' , pode ser calculada da forma:

$$dT' = \rho \tau dA \quad , \quad dT' = \rho \left(\frac{\rho}{c} \tau_{\max} \right) 2\pi \rho d\rho$$

$$T' = \frac{2\pi \tau_{\max}}{c} \int_{c/2}^c \rho^3 d\rho = \frac{2\pi \tau_{\max}}{c} \frac{\rho^4}{4} \Big|_{c/2}^c$$

$$T' = \frac{\pi \tau_{\max}}{2c} \left[c^4 - \frac{c^4}{2^4} \right]$$

$$T' = \frac{\pi \tau_{\max}}{2} \frac{15}{16} c^3$$

e a expressão do torque total T sobre a área é:

$$\tau_{\max} = \frac{T c}{J} = \frac{T c}{\left(\frac{\pi}{2} \right) c^4} \quad , \quad T = \frac{\pi}{2} \tau_{\max} c^3$$

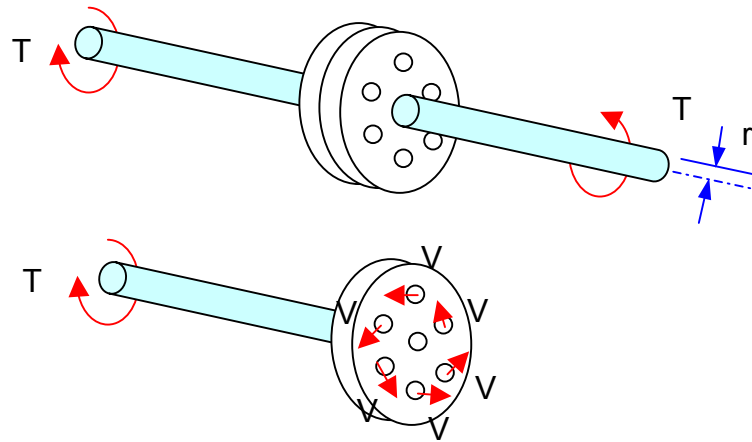
Logo, a relação entre os torques é:

$$T' = \frac{15}{16} T$$

Conclusão: aproximadamente 94 % do torque é resistido pela área externa do eixo.

Exemplo 5.2: O acoplamento abaixo é usado para conectar dois eixos. Assumindo que a tensão de cisalhamento nos parafusos é uniforme, determine o número de parafusos para que a máxima tensão de cisalhamento no eixo seja igual a tensão de

cisalhamento nos parafusos. Cada parafuso tem diâmetro d e está distante R do centro do eixo.



Impondo o equilíbrio estático na porção do eixo:

$$T = n \cdot V \cdot R$$

onde n é número de parafusos, V o esforço cortante em cada parafuso e R a distância do centro do parafuso até o centro do eixo.

A tensão média nos parafusos pode ser calculada da seguinte forma:

$$\tau_m = \frac{V}{A} = \frac{V}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

Logo, o esforço cortante em cada parafuso V é:

$$V = \tau_m \frac{\pi d^2}{4}$$

Sabe-se que a tensão máxima no eixo é:

$$\tau_{\max} = \frac{T \cdot r}{J} = \frac{T \cdot r}{\frac{\pi r^4}{2}} = \frac{2 \cdot T}{\pi r^3}$$

Da imposição do problema, $\tau_m = \tau_{\max}$. Logo:

$$V = \frac{2 \cdot T}{\pi r^3} \frac{\pi d^2}{4}$$

Da relação entre o torque T e o cortante V , temos:

$$T = n \frac{2.T}{\pi r^3} \frac{\pi d^2}{4} R$$

Assim, o número necessário de parafusos é:

$$n = \frac{2.r^3}{R d}$$

5.5 – Projeto de membros circulares em torção

Uma vez conhecido o torque a ser transmitido pelo eixo, e selecionado a máxima tensão de cisalhamento, as proporções do membro tornam-se fixas. Assim, tem-se:

$$\frac{J}{C} = \frac{T}{\tau_{\max}} \quad (5.7)$$

O parâmetro J/c é utilizado para projetar eixos maciços ou perfurados.

Exemplo 5.3: Selecione dois eixos maciços para transmitir 200 CV de potência cada um, de forma que nenhum deles ultrapasse a tensão de cisalhamento de 7 kgf/mm^2 . Um desses eixos deve operar a 20 rpm, e o outro a 20.000 rpm. ($1 \text{ CV} = 4500 \text{ kgf.m/min}$, $\alpha \text{ (rad/min)} = 2\pi N(\text{rpm})$)

Eixo 1:

$$P = T \alpha, \quad 200 \cdot 4500 \frac{\text{kgf} \cdot \text{m}}{\text{min}} = T_1 \cdot 20 \cdot 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{min}}, \quad T_1 = 7162 \text{ kgf} \cdot \text{m}$$

$$\frac{J_1}{C_1} = \frac{T_1}{\tau_{\max}} = \frac{7162 \cdot 10^3}{7} = 1,023 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$\frac{J_1}{C_1} = \frac{\pi C_1^3}{2}, \quad C_1 = 86,7 \text{ mm}, \quad d_1 = 173,4 \text{ mm}$$

Eixo 2:

$$P = T \alpha, \quad 200 \cdot 4500 \frac{\text{kgf} \cdot \text{m}}{\text{min}} = T_2 \cdot 20000 \cdot 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{min}}, \quad T_2 = 7,162 \text{ kgf} \cdot \text{m}$$

$$\frac{J_2}{c_2} = \frac{T_2}{\tau_{\max}} = \frac{7,162 \cdot 10^3}{7} = 1,023 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\frac{J_2}{c_2} = \frac{\pi c_2^3}{2}, \quad c_1 = 8,67 \text{ mm}, \quad d_1 = 17,34 \text{ mm}$$

Conclusão: Transmitir potência à alta velocidade.

5.6 – Ângulo de torção de membros circulares

Além do fato do membro dever resistir aos torques aplicados, ele não deve se deformar excessivamente. Assim, considere um elemento submetido a um torque.

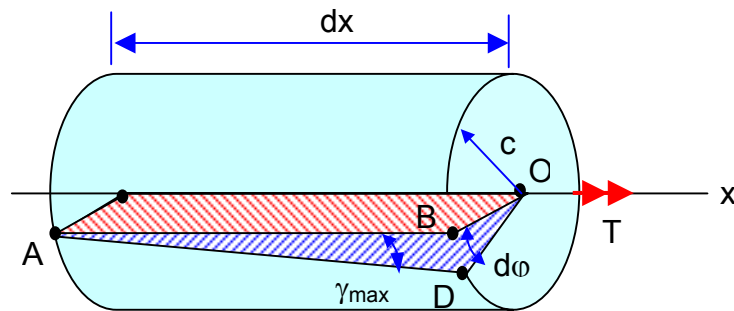


Figura 5.7 – Torção em eixo de seção circular

No plano paralelo ao eixo x, arco $BD = dx \gamma_{\max}$, e no plano perpendicular ao eixo x, arco $BD = c d\phi$. Logo:

$$dx \cdot \gamma_{\max} = c \cdot d\phi \quad (5.8)$$

Limitando-se a região elástica linear onde a lei de Hooke para o cisalhamento é válida, $\tau_{\max} = G \gamma_{\max}$, e sabendo que $\tau_{\max} = \frac{T c}{J}$:

$$d\phi = \frac{T}{JG} dx \quad (5.9)$$

Expressão geral para ângulo de torção:

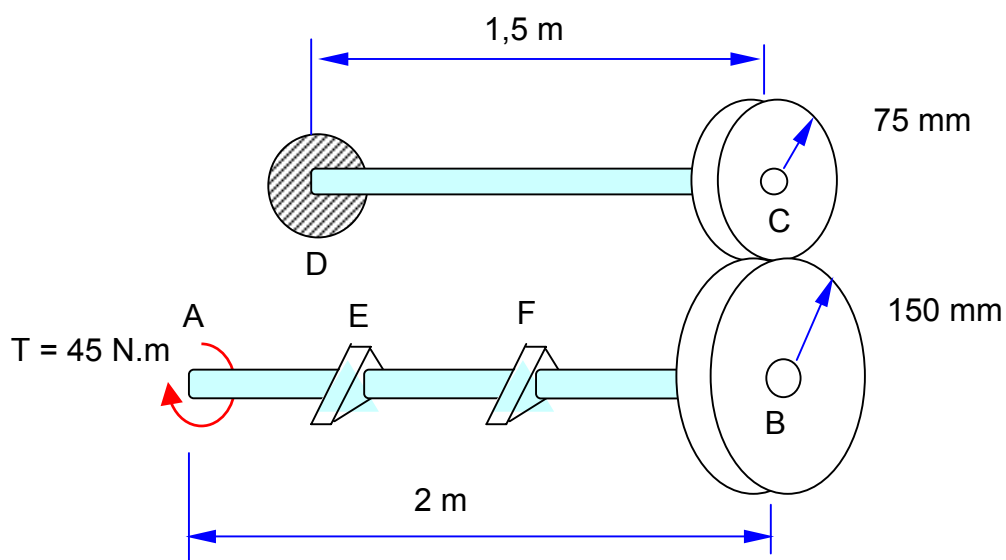
$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)}{J(x) G} dx \quad (5.10)$$

Para o caso do torque e da seção transversal serem constantes ao longo do comprimento do eixo, tem-se:

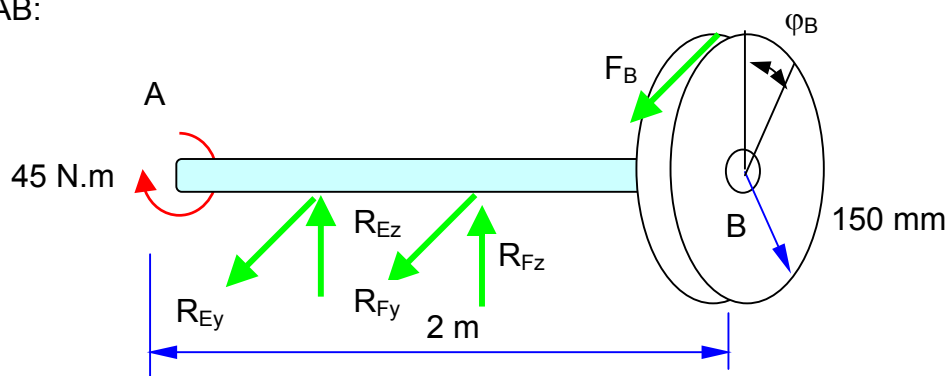
$$\varphi = \frac{T L}{J G} \quad (5.11)$$

A eq. (5.11) é equivalente a eq. (4.11) para calcular o deslocamento de um ponto numa barra solicitada axialmente.

Exemplo 5.4: No conjunto mostrado abaixo, os dois eixos estão acoplados por duas engrenagens C e B. Determine o ângulo de torção na extremidade A do eixo AB onde um torque $T = 45 \text{ N.m}$ é aplicado. Cada eixo tem diâmetro de 20mm e $G = 80 \text{ GPa}$.



Eixo AB:



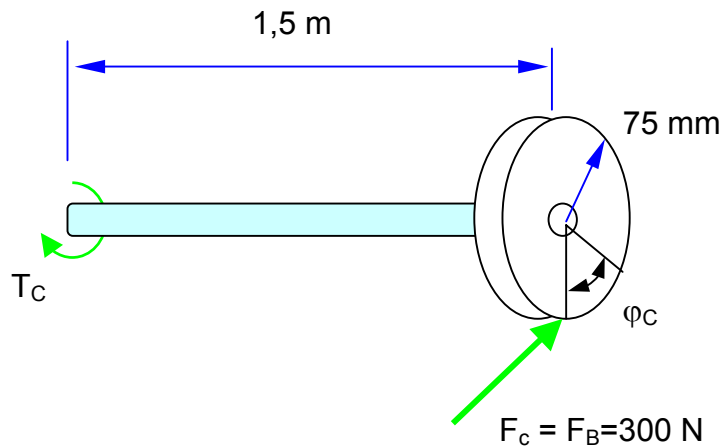
O ângulo de torção entre os pontos A e B é:

$$\varphi_{A/B} = \frac{T_{AB} L_{AB}}{J G} = \frac{45 \cdot 2}{\frac{\pi 0,01^4}{2} 80 \cdot 10^9}, \quad \varphi_{AB} = 0,072 \text{ rad}$$

A força que aparece no ponto de contato entre as engrenagens B e C pode ser determinada impondo o equilíbrio do eixo AB.

$$F_B \cdot 0,15 = 45, \quad F_B = 300 \text{ N}$$

Eixo CD:



O torque no eixo CD pode ser determinado da forma:

$$T_C = 300 \cdot 0,75, \quad T_C = 22,5 \text{ N.m}$$

O ângulo de torção entre os pontos C e D, que está engastado é:

$$\varphi_C = \frac{T_C L_{CD}}{J G} = \frac{22,5 \cdot 1,5}{\frac{\pi 0,01^4}{2} 80 \cdot 10^9}, \quad \varphi_C = 0,027 \text{ rad}$$

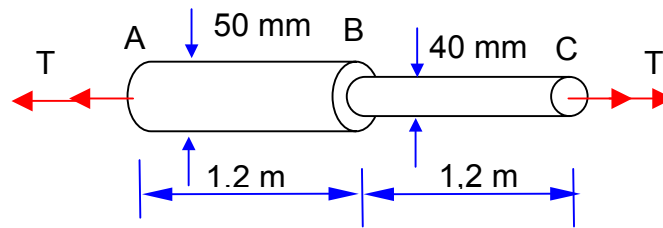
A relação entre os ângulos de torção $\varphi_{A/B}$ e φ_C é:

$$0,15 \cdot \varphi_B = 0,075 \cdot \varphi_C, \quad \varphi_B = 0,0135 \text{ rad}$$

Assim, o ângulo de torção do ponto A é:

$$\varphi_A = \varphi_{A/B} + \varphi_B = 0,072 + 0,0135, \quad \varphi_A = 0,0855 \text{ rad}$$

Exemplo 5.5: Uma barra circular em torção consiste de 2 partes. Determine o máximo torque possível se o ângulo de torção entre as extremidades da barra não deve exceder 0,02 radianos e a tensão de cisalhamento não deve exceder 28 MPa. Assumir $G = 83 \text{ MPa}$.



Trecho AB:

O torque no trecho AB pode ser calculado da forma:

$$\tau = \frac{T c}{J}, \quad 28 = \frac{T \cdot 25}{\frac{\pi 50^4}{32}}, \quad T_{AB} = 687.223,4 \text{ N.mm}$$

e, o ângulo de torção no trecho AB é:

$$\varphi_{AB} = \frac{T L_{AB}}{G J} = \frac{T \cdot 1,2 \cdot 10^3}{83 \cdot 10^9 \frac{\pi 50^4}{32}}, \quad \varphi_{AB} = T \cdot 2,356 \cdot 10^{-8}$$

Trecho BC:

O torque no trecho BC pode ser calculado da forma:

$$\tau = \frac{T c}{J}, \quad 28 = \frac{T \cdot 20}{\frac{\pi 40^4}{32}}, \quad T_{BC} = 351.858,4 \text{ N.mm}$$

e, o ângulo de torção no trecho BC é:

$$\varphi_{BC} = \frac{T L_{BC}}{G J} = \frac{T \cdot 1,2 \cdot 10^3}{83 \cdot 10^9 \frac{\pi 40^4}{32}}, \quad \varphi_{BC} = T \cdot 25,753 \cdot 10^{-8}$$

O ângulo de torção entre as extremidades da barra é:

$$\varphi_{AC} = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} = 0,02$$

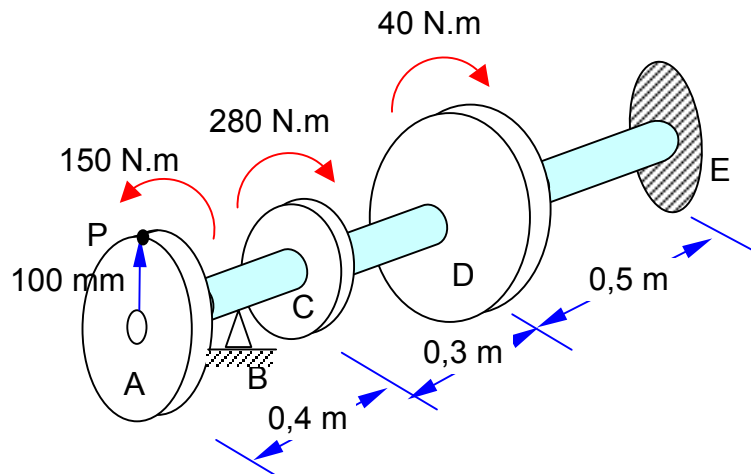
Assim:

$$T \cdot 2,356 \cdot 10^{-8} + T \cdot 25,753 \cdot 10^{-8} = 0,02, \quad T = 246.639,5 \text{ N.mm}$$

Resposta: Se fosse considerado o torque de 687.223,4 N.mm ou o torque de 351.858,4 N.mm, o ângulo de torção seria superior à 0,02 radianos, logo o torque de

246.639,5 N.mm não excede a tensão de 28 MPa e não excede o ângulo de torção de 0,02 radianos.

Exemplo 5.6: O eixo está sujeito aos torques como apresentado abaixo. Se o módulo de cisalhamento é $G = 80 \text{ GPa}$ e o diâmetro do eixo é 14 mm, determine o deslocamento do dente P na engrenagem A. O eixo está engastado em E e o mancal B permite que o eixo gire livremente.



O momento polar de inércia do eixo é:

$$J = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 14^4}{32}, \quad J = 3771,5 \text{ mm}^4$$

Trecho AC:

$$\phi_{A/C} = \frac{T_{AC} L_{AC}}{J G} = \frac{150 \cdot 10^3 \cdot 0,4 \cdot 10^3}{3771,5 \cdot 80 \cdot 10^3}, \quad \phi_{A/C} = 0,199 \text{ rad (anti-horário)}$$

Trecho CD:

$$\phi_{C/D} = \frac{T_{CD} L_{CD}}{J G} = \frac{130 \cdot 10^3 \cdot 0,3 \cdot 10^3}{3771,5 \cdot 80 \cdot 10^3}, \quad \phi_{C/D} = 0,129 \text{ rad (horário)}$$

Trecho DE:

$$\phi_{D/E} = \frac{T_{DE} L_{DE}}{J G} = \frac{170 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 10^3}{3771,5 \cdot 80 \cdot 10^3}, \quad \phi_{D/E} = 0,282 \text{ rad (horário)}$$

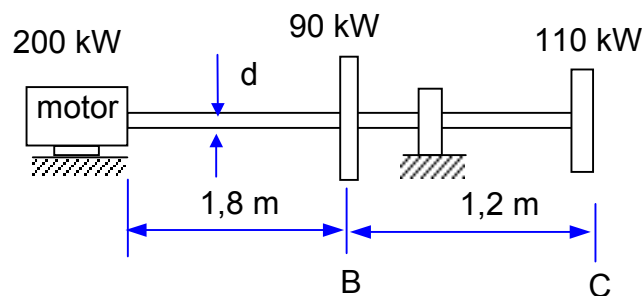
O ângulo de torção entre as extremidades A/E é:

$$\phi_{A/E} = -\phi_{A/C} + \phi_{C/D} + \phi_{D/E} = -0,199 + 0,129 + 0,282, \quad \phi_{A/E} = 0,212 \text{ rad (horário)}$$

Assim, o deslocamento angular do ponto P:

$$\delta_P = \varphi_{A/E} \cdot R = 0,212 \cdot 100 \quad , \quad \delta_P = 21,2 \text{ mm}$$

Exemplo 5.7: Um motor de 200 kW gira a 250 rpm. Para a engrenagem em B é transmitido 90 kW e para a engrenagem em C 110 kW. Determine o menor diâmetro permissível d se a tensão admissível é de 50 MPa e o ângulo de torção entre o motor e a engrenagem C é limitado a 15° . Considerar $G = 80 \text{ GPa}$ e $1 \text{ kW} \approx 60000 \text{ Nm/mim}$.



Trecho motor-engrenagem B:

A relação entre potência e torque entre o motor e a engrenagem B é dada pela rotação do eixo:

$$P_{\text{motor}} = T_{\text{motor}} \cdot \alpha$$

$$200 \cdot 60000 = T_{\text{motor}} \cdot 250 \cdot 2\pi$$

$$T_{\text{motor}} = 7639 \text{ N m}$$

Da expressão para cálculo da tensão máxima eq. (5.4), pode-se determinar o diâmetro d no trecho entre o motor e a engrenagem B.

$$\tau_{\text{max}} = \frac{T \cdot d/2}{\frac{\pi d^4}{32}}, \quad 50 = \frac{7639 \cdot 10^3}{\frac{\pi d^3}{16}}, \quad d = 92 \text{ mm}$$

Trecho B-C:

De maneira análoga, a relação entre potência e torque no trecho BC é dada pela rotação do eixo:

$$P_{\text{BC}} = T_{\text{BC}} \cdot \alpha$$

$$110 \cdot 60000 = T_{\text{BC}} \cdot 250 \cdot 2\pi$$

$$T_{\text{BC}} = 4202 \text{ N m}$$

e, da expressão de tensão máxima, pode-se determinar o diâmetro do eixo neste trecho:

$$\tau_{\max} = \frac{T \cdot d/2}{\frac{\pi d^4}{32}}, \quad 50 = \frac{4202 \cdot 10^3}{\frac{\pi d^3}{16}}, \quad d = 75,4 \text{ mm}$$

Da expressão que fornece o ângulo de torção entre as extremidades do eixo, pode-se determinar um outro diâmetro:

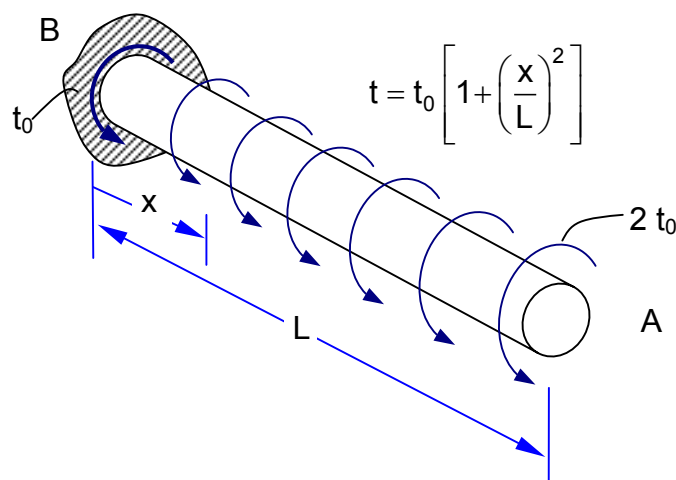
$$\varphi_{C/\text{motor}} = \varphi_{C/B} + \varphi_{B/\text{motor}}$$

$$\varphi_{C/\text{motor}} = \frac{T_{C/B} \cdot L}{G \cdot J} + \frac{T_{\text{motor}} \cdot L}{G \cdot J}$$

$$\varphi_{C/\text{motor}} = \frac{4202 \cdot 10^3 \cdot 1,2 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^3 \cdot \frac{\pi d^4}{32}} + \frac{7639 \cdot 10^3 \cdot 1,8 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^3 \cdot \frac{\pi d^4}{32}} = \frac{15 \cdot \pi}{180}, \quad d = 55 \text{ mm}$$

Resposta: Para que nenhum dos critérios de projeto sejam desrespeitados, o diâmetro deve ser, $d = 92 \text{ mm}$.

Exemplo 5.8: O eixo de raio c mostrado na figura é submetido à um torque distribuído t , medido como torque por unidade de comprimento do eixo. Determine o ângulo de torção do ponto A.

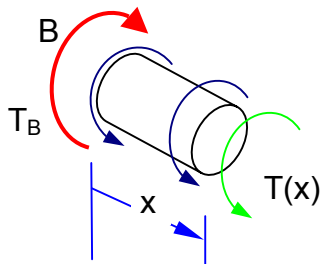


a – Cálculo do torque resistente T_B :

$$\sum T = 0, \quad T_B - \int_0^L t \, dx = 0$$

$$T_B - \int_0^L \left\{ t_0 \left[1 + \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] \right\} dx = 0, \quad T_B = t_0 \left[x + \frac{x^3}{3L^2} \right]_0^L = \frac{4}{3} t_0 L$$

b – Cálculo do torque interno $T(x)$:



$$\sum T = 0, \quad T_B - \int_0^x t \, dx - T(x) = 0$$

$$T(x) = T_B - \int_0^x t_0 \left[1 + \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] dx, \quad T(x) = T_B - t_0 \left(x + \frac{x^3}{3L^2} \right)$$

b – Cálculo do ângulo de torção ϕ_A :

$$\phi_A = \int_0^L \frac{T(x) \, dx}{G J(x)}, \quad \phi_A = \frac{1}{G J} \int_0^L \left[T_B - t_0 \left(x + \frac{x^3}{3L^2} \right) \right] dx$$

$$\phi_A = \frac{1}{G J} \left[T_B x - t_0 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12L^2} \right) \right], \quad \phi_A = \frac{1}{G J} \left[\frac{4}{3} t_0 L^2 - t_0 \left(\frac{L^2}{2} + \frac{L^4}{12L^2} \right) \right]$$

$$\phi_A = \frac{3 t_0 L^2}{4 G J}$$

5.7 – Fórmula da torção para eixos com diferentes materiais

Considere um eixo de seção circular composto de um tubo de material 1 e uma barra interna de material 2 solicitado por um torque.

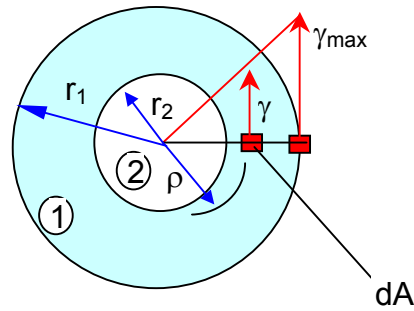


Figura 5.8 – Seção transversal de um eixo com diferentes materiais

A lei de Hooke para o cisalhamento em um material i é $\tau_i = G_i \cdot \gamma$, e o torque interno pode ser obtido através da expressão:

$$T = \int_A \tau \, dA \, \rho \quad (5.12)$$

Usando a lei de Hooke e tomando uma área infinitesimal circular, $dA = 2\pi \rho \, d\rho$, o torque interno pode ser dado por:

$$T = \int_0^{r_1} G_i \, \gamma \, 2\pi \rho \, d\rho \, \rho \quad (5.13)$$

Por semelhança de triângulos, tem-se que:

$$\gamma = \frac{\gamma_{\max} \, \rho}{r_1} \quad (5.14)$$

Substituindo a eq. (5.14) na eq. (5.13), temos:

$$T = \frac{\gamma_{\max}}{r_1} \int_0^{r_1} G_i \, 2\pi \rho^3 \, d\rho \quad (5.15)$$

Chamando de rigidez equivalente em torção, $\langle GJ \rangle$, a integral,

$$\langle GJ \rangle = \int_0^{r_1} G_i \, 2\pi \rho^3 \, d\rho \quad (5.16)$$

Pode-se determinar a relação:

$$\gamma_{\max} = \frac{T r_1}{<GJ>} \quad (5.17)$$

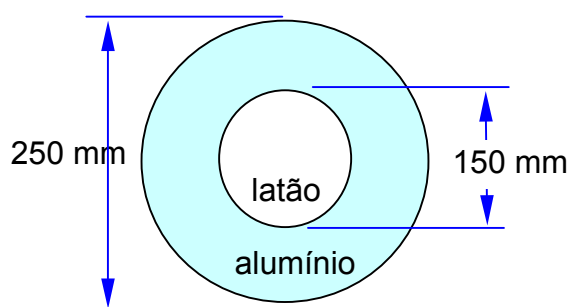
Substituindo a eq. (5.17) na relação que fornece a deformação angular γ numa posição qualquer ρ , tem-se que:

$$\gamma = \frac{T}{<GJ>} \rho \quad (5.18)$$

Finalmente, substituindo a eq. (5.18) na lei de Hooke para cisalhamento, obtém-se a expressão da tensão da torção para eixos circulares com diferentes materiais:

$$\tau_i = G_i \frac{T}{<GJ>} \rho \quad (5.19)$$

Exemplo 5.9: Um eixo circular é feito pela compressão de um tubo de alumínio em uma barra de latão, para formar uma seção de dois materiais, que então agem como uma unidade. (a) Se, devido à aplicação de um torque T , aparecer uma tensão de cisalhamento de 7 kgf/mm^2 nas fibras externas do eixo, qual é a magnitude do torque T ? (b) Se o eixo tem 1 m de comprimento, qual será o ângulo de torção devido ao torque T ? Para o alumínio $E = 7 \cdot 10^3 \text{ kgf/mm}^2$, $G = 2,8 \cdot 10^3 \text{ kgf/mm}^2$ e para o latão $E = 11,2 \cdot 10^3 \text{ kgf/mm}^2$, $G = 4,28 \cdot 10^3 \text{ kgf/mm}^2$.



A rigidez equivalente em torção para o eixo em questão é:

$$<GJ> = G_{\text{lat}} \cdot J_{\text{lat}} + G_{\text{al}} \cdot J_{\text{al}} = 4,2 \cdot 10^3 \cdot \frac{\pi \cdot 150^4}{32} + 2,8 \cdot 10^3 \cdot \frac{\pi}{32} (250^4 - 150^4)$$

$$<GJ> = 1,14 \cdot 10^{12} \text{ kgf/mm}^2$$

A máxima tensão no alumínio é:

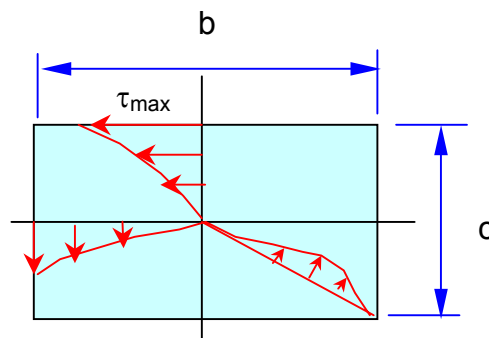
$$\tau_{al} = G_{al} \frac{T}{<GJ>} \rho \quad , \quad 7 = 2,8 \cdot 10^3 \frac{T}{1,14 \cdot 10^{12}} 125, \quad T = 22,8 \cdot 10^6 \text{ kgf.mm}$$

O ângulo de torção do eixo pode ser determinado por uma expressão semelhante àquela para eixos em um único material, eq. (5.11).

$$\varphi = \frac{T \cdot L}{<GJ>} = \frac{22,8 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^3}{1,14 \cdot 10^{12}}, \quad \varphi = 0,02 \text{ rad}$$

5.8 – Membros maciços não circulares

As premissas enunciadas anteriormente para eixos de seção circular não se aplicam para este caso.



As expressões para determinar a máxima tensão e o ângulo de torção em eixos de seção retangular são como seguem:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\alpha \cdot b \cdot c^2} \quad (5.20)$$

$$\varphi = \frac{T \cdot L}{\beta \cdot b \cdot c^3 \cdot G} \quad (5.21)$$

onde os coeficientes α e β são determinados pela relação entre os lado do retângulo:

b/c	1,0	1,5	2,0	3,0	6,0	10,0	∞
α	0,208	0,231	0,246	0,267	0,299	0,312	0,333
β	0,141	0,196	0,229	0,263	0,299	0,312	0,333

6 – TENSÃO DE FLEXÃO EM VIGAS

Algumas limitações importantes da teoria

A teoria de tensões de flexão nas vigas se aplica para vigas admitidas com suficiente estabilidade lateral em virtude de suas proporções ou suficientemente reforçadas na direção transversal.

6.1 – Premissa cinemática básica

Hipótese fundamental da teoria da flexão: As seções planas de uma viga, tomadas normalmente a seu eixo, permanecem planas após a viga ser submetida à flexão. Hipótese válida quando o material se comporta elasticamente ou plasticamente, desde que a relação espessura/comprimento da viga seja pequena.

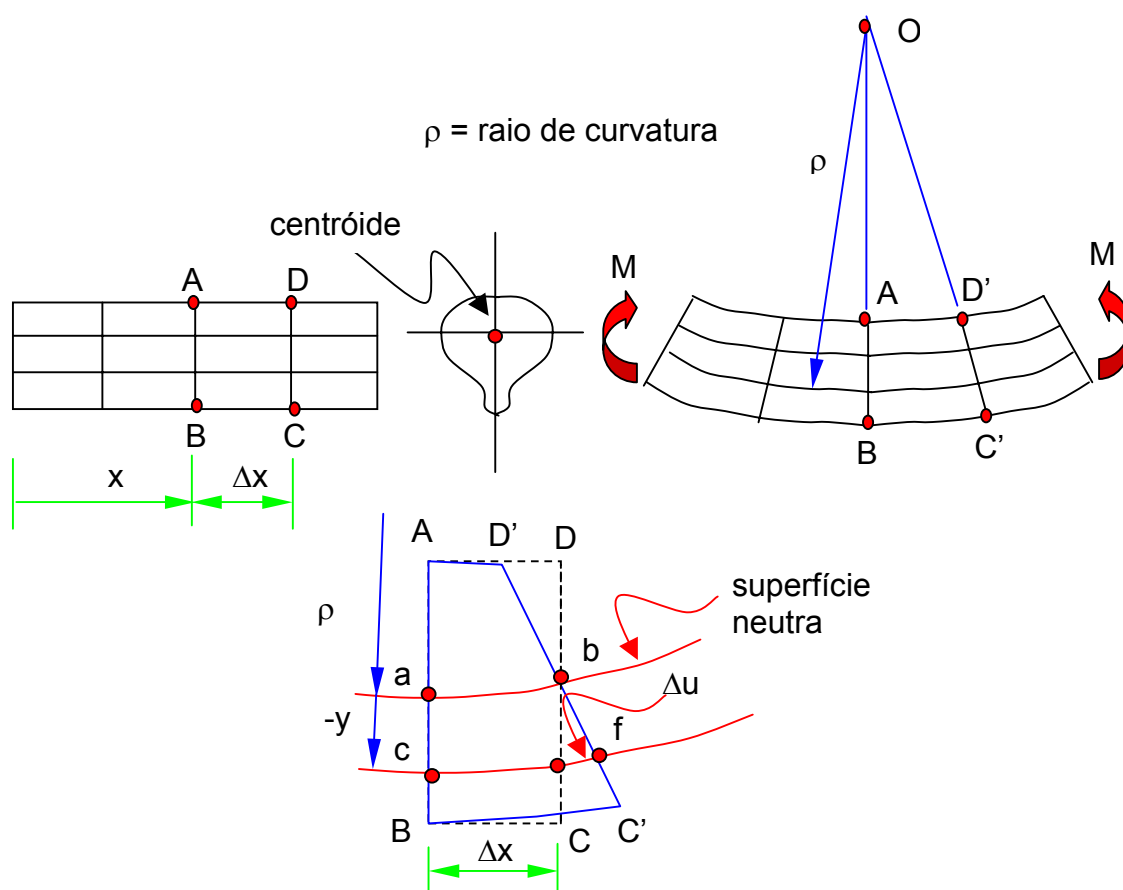


Figura 6.1 – Viga submetida à uma flexão pura

A expressão de deformação linear num ponto qualquer da viga é definida da forma:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \quad (6.1)$$

Da hipótese de que as seções permanecem planas depois de deformadas, observa-se que a deformação evolui de forma linear ao longo da espessura da viga, onde $\varepsilon_{\max}$ é a máxima deformação que ocorre no ponto mais distante da superfície neutra, c . Dessa forma, a deformação em um ponto genérico, distante y da superfície neutra é da forma:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\max} \frac{y}{c} \quad (6.2)$$

6.2 – Fórmula da flexão elástica

Considerando o material trabalhando dentro da região elástico-linear, a Lei de Hooke, $\sigma = E \varepsilon$, se aplica. Logo:

$$\sigma_x = E \frac{\varepsilon_{\max}}{c} y = \frac{\sigma_{\max}}{c} y \quad (6.3)$$

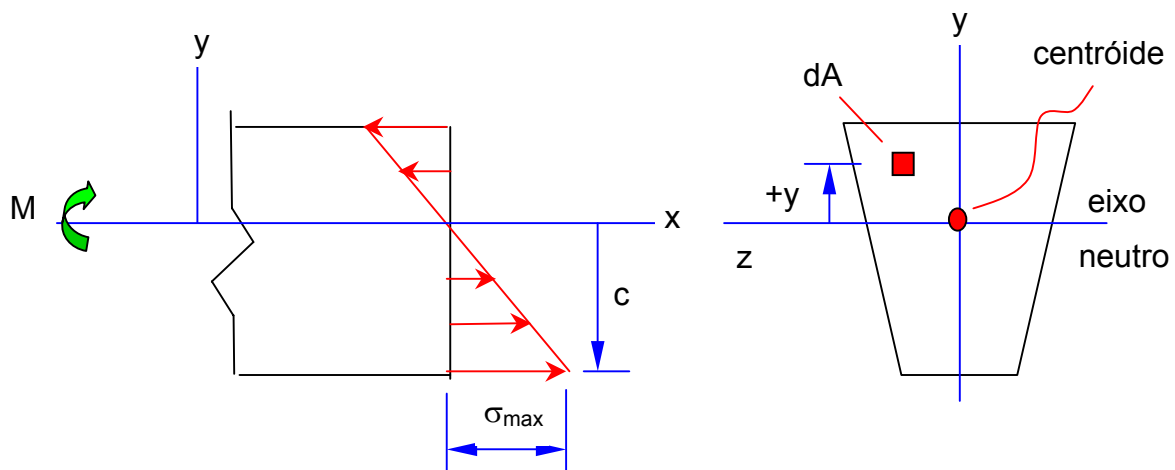


Figura 6.2 – Distribuição das tensões de flexão numa viga

Impondo o equilíbrio de forças na direção x , temos:

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \quad , \quad \int_A \sigma_x dA = 0 \quad (6.4)$$

Substituindo a eq. (6.3) na eq. (6.4), temos:

$$\int_A \frac{\sigma_{\max}}{c} y dA = 0 \quad (6.5)$$

Como $\sigma_{\max}$ e c são valores constantes e não nulos:

$$\int_A y dA = 0 \quad (6.6)$$

De acordo com a equação para determinar a posição do centróide

$$\bar{y} = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} = 0, \text{ conclui-se que o eixo neutro passa pelo centróide da seção}$$

transversal da viga.

O momento interno atuante na seção transversal é a soma dos momentos infinitesimais atuantes nas área dA . Assim, temos:

$$M = \int_A \sigma_x dA y \quad (6.7)$$

Substituindo a eq. (6.3) na eq. (6.7):

$$M = \int_A \frac{\sigma_{\max}}{c} y^2 dA \quad (6.8)$$

O momento de inércia da seção transversal, I , em relação ao eixo que passa seu centróide é definido como:

$$I = \int_A y^2 dA \quad (6.9)$$

Das eqs. (6.8) e (6.9), é possível obter a expressão da máxima tensão de flexão:

$$\sigma_{\max} = \frac{M c}{I} \quad (6.10)$$

Substituindo a eq. (6.10) na eq. (6.3), obtém-se a expressão genérica de tensão de flexão em vigas em um ponto distante y da superfície neutra:

$$\sigma_x = -\frac{M y}{I} \quad (6.11)$$

A eq. (6.11) é análoga a eq. (5.5) usada para determinar a tensão de cisalhamento um ponto qualquer de um eixo de seção circular. O sinal negativo surge na eq. (6.11) pois:

Para y positivo $\Rightarrow$ Tensão de compressão	}	momento positivo
Para y negativo $\Rightarrow$ Tensão de tração		

6.3 – Centróide de área

Considere uma seção transversal qualquer de área A cujo centróide está posicionado em c de coordenadas $\bar{y}$ e $\bar{z}$ com relação aos eixos de referência y e z :

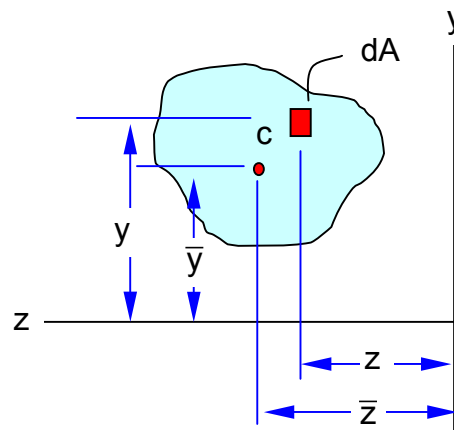


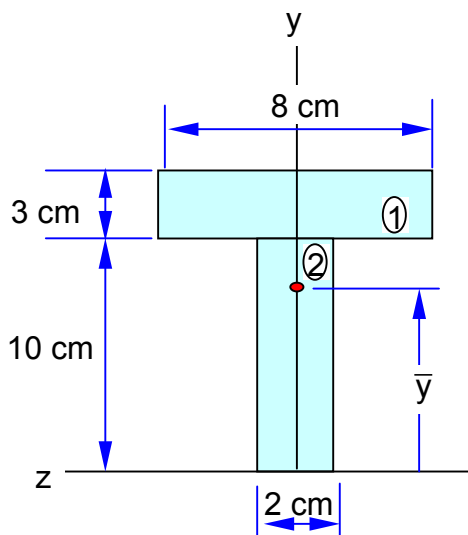
Figura 6.3 – Posição do centróide de seção transversal

As expressões para determinar a posição do centróide de uma seção transversal são:

$$\bar{y} = \frac{\int_A y \, dA}{\int_A dA} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{\int_A z \, dA}{\int_A dA} \quad (6.12)$$

onde as integrais $\int_A y \, dA$ e $\int_A z \, dA$ são chamadas de primeiros momentos de área com relação aos eixos z e y , respectivamente.

Exemplo 6.1: Determine a posição do centróide da seção transversal do tipo T abaixo.

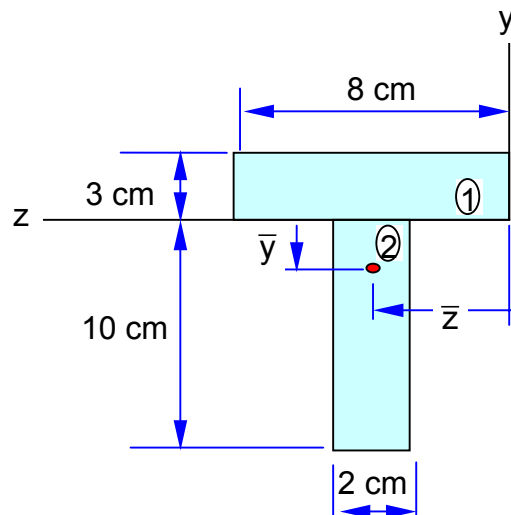


A seção do tipo T é por duas seções retangulares, logo as integrais podem ser substituídas por somatórios. Logo:

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^2 z_i A_i}{\sum_{i=1}^2 A_i}, \quad \bar{z} = \frac{0 \cdot (8 \cdot 3) + 0 \cdot (2 \cdot 10)}{8 \cdot 3 + 2 \cdot 10} = 0 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^2 y_i A_i}{\sum_{i=1}^2 A_i}, \quad \bar{y} = \frac{(10 + 1,5) \cdot (8 \cdot 3) + 5 \cdot (2 \cdot 10)}{8 \cdot 3 + 2 \cdot 10} = 8,55 \text{ cm}$$

Exemplo 6.2: Determine a posição do centróide da seção transversal do exemplo anterior, onde neste caso, os eixos de referência são posicionados de forma diferente.



$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^2 z_i A_i}{\sum_{i=1}^2 A_i}, \quad \bar{z} = \frac{4 \cdot (8 \cdot 3) + 4 \cdot (2 \cdot 10)}{8 \cdot 3 + 2 \cdot 10} = 4 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^2 y_i A_i}{\sum_{i=1}^2 A_i}, \quad \bar{y} = \frac{1,5 \cdot (8 \cdot 3) + (-5) \cdot (2 \cdot 10)}{8 \cdot 3 + 2 \cdot 10} = -1,45 \text{ cm}$$

6.4 – Momento de inércia de área

Considere os eixos y e z sobre os quais deseja-se determinar os momentos de inércia da área A:

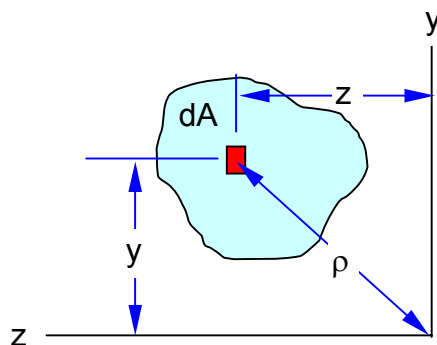


Figura 6.4 – Momentos de inércia de área

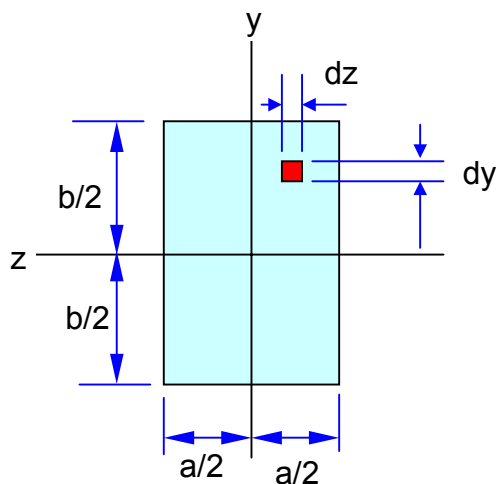
Os momentos de inércia da área A com relação aos eixos y, z e são determinados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} I_y &= \int_A z^2 dA \\ I_z &= \int_A y^2 dA \\ J &= \int_A \rho^2 dA = I_z + I_y \end{aligned} \quad (6.13)$$

Os eixos z e y são chamados de eixos principais de inércia quando passam pelo centróide da seção. Neste caso:

$$I_{yz} = \int_A y z dA = 0 \quad (6.14)$$

Exemplo 6.3: Determine os momentos de inércia da seção transversal retangular de dimensões a e b mostrada abaixo.



$$I_z = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} y^2 dy dz = z \left|_{-a/2}^{a/2} \frac{y^3}{3} \right|_{-b/2}^{b/2}$$

$$I_z = \frac{a b^3}{12}$$

De maneira análoga:

$$I_y = \frac{b a^3}{12}$$

Como os eixos y e z passam pelo centróide da seção, tem-se que:

$$I_{yz} = \int_{-b/2}^{b/2} y \, dy \int_{-a/2}^{a/2} z \, dz = \frac{y^2}{2} \Big|_{-b/2}^{b/2} \frac{z^2}{2} \Big|_{-a/2}^{a/2} = 0$$

Os momentos de inércia de uma seção com relação à eixos paralelos aos eixos principais de inércia podem ser determinados pelo teorema dos eixos paralelos:

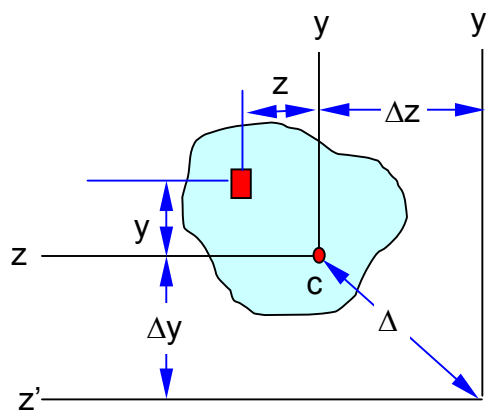


Figura 6.5 – Momentos de inércia de área com relação à eixos paralelos

Da definição de momento de inércia de área dada pela eq. (6.13), o momento de inércia da seção com relação ao eixo z' é:

$$I_{z'} = \int_A (y + \Delta y)^2 \, dA = \int_A y^2 \, dA + 2 \Delta y \int_A y \, dA + \Delta y^2 \int_A dA \quad (6.15)$$

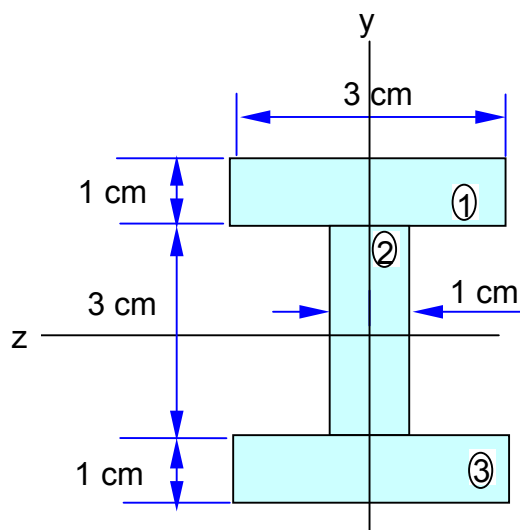
Considerando a eq. (6.6), a expressão final do momento de inércia da seção transversal de área A com relação ao eixo paralelo z' é:

$$I_{z'} = I_z + \Delta y^2 A \quad (6.16)$$

Por analogia, os momentos de inércia com relação aos eixos y' e x' são:

$$\begin{aligned} I_{y'} &= I_y + \Delta z^2 A \\ J_0 &= J_C + \Delta^2 A \end{aligned} \quad (6.17)$$

Exemplo 6.4: Determine o momento de inércia da seção do tipo I com relação aos eixos y e z como mostrado abaixo.



O momento de inércia da seção com relação ao eixo z pode ser determinado considerando a soma dos momentos de inércia das áreas retangulares que formam a seção do tipo I. Logo:

$$I_z = I_{z1} + I_{z2} + I_{z3}$$

$$I_{z1} = \frac{3 \cdot 1^3}{12} + 1 \cdot 3 \cdot 2^2, \quad I_{z1} = 12,25 \text{ cm}^4$$

$$I_{z2} = \frac{1 \cdot 3^3}{12}, \quad I_{z2} = 2,25 \text{ cm}^4$$

$$I_{z3} = \frac{3 \cdot 1^3}{12} + 1 \cdot 3 \cdot 2^2, \quad I_{z3} = 12,25 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 26,75 \text{ cm}^4$$

e, o momento de inércia da seção com relação ao eixo y é:

$$I_y = I_{y1} + I_{y2} + I_{y3}$$

$$I_y = \frac{1 \cdot 3^3}{12} + \frac{3 \cdot 1^3}{12} + \frac{1 \cdot 3^3}{12}$$

$$I_y = 4,75 \text{ cm}^4$$

Importante: O momento de inércia representa a resistência de uma seção transversal em girar em torno de um eixo. Portanto, a seção acima gira mais facilmente em torno do eixo y que do eixo z.

6.5 – Flexão pura de vigas com seção assimétrica

Na discussão anterior, foram analisadas somente vigas com seções transversais simétricas, porém o equacionamento é válido para seções quaisquer, desde que seus eixos sejam os eixos principais de inércia.

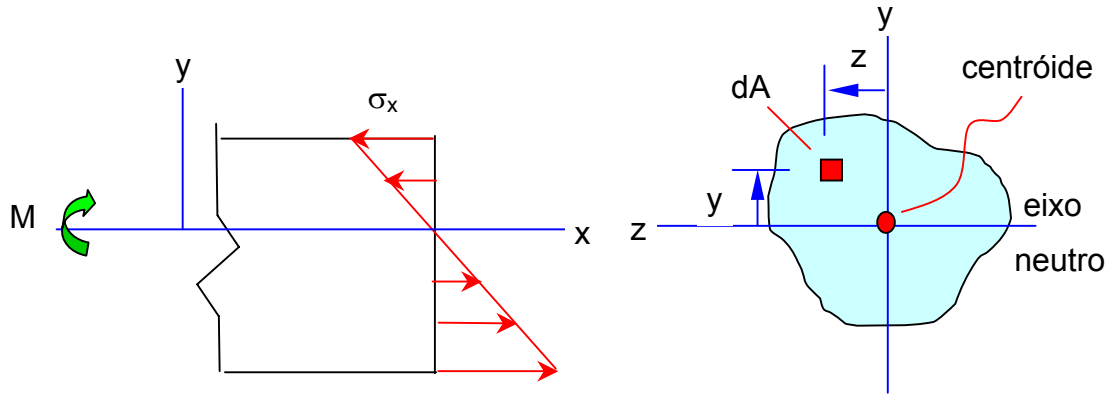


Figura 6.6 – Flexão de vigas assimétricas

Impondo o equilíbrio de momentos com relação ao eixo y, temos:

$$M_y = \int_A \sigma_x z \, dA \quad (6.18)$$

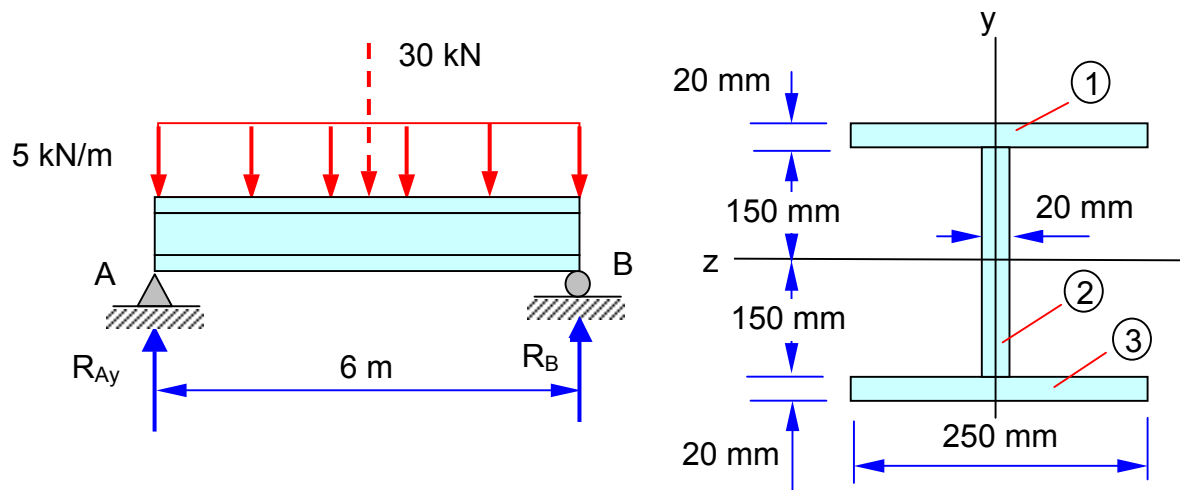
onde M_y é o momento interno resultante.

Substituindo a eq. (6.3) na eq. (6.18), e considerando que $\sigma_{\max}$ e c são constantes:

$$M_y = \frac{\sigma_{\max}}{c} \int_A y z \, dA \quad (6.19)$$

Se y e z são eixos principais de inércia, a integral $\int_A y z \, dA$ é nula, eq. (6.14). Logo, o momento interno resultante $M_y = 0$. Assim, as equações deduzidas anteriormente se aplicam à uma viga de seção transversal qualquer.

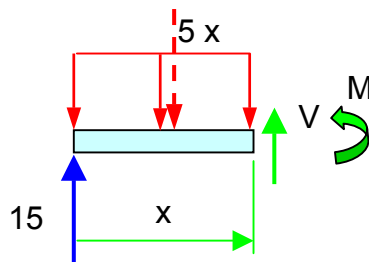
Exemplo 6.5: Determine a tensão de flexão máxima na viga de seção do tipo I submetida à um carregamento distribuído como mostrado abaixo:



a – Cálculo das reações de apoio

$$\sum M_B = 0, R_A \cdot 6 - 30 \cdot 3 = 0, R_A = 15 \text{ kN}$$

b – Cálculo do momento máximo



$$\sum M = 0, -15x + 5x \frac{x}{2} + M = 0$$

$$M = -\frac{5}{2}x^2 + 15x \text{ (kN.m)}$$

$$M_{\max}: \frac{dM}{dx} = 0 = -5x + 15 \Rightarrow x = 3 \text{ m}$$

$$M_{\max (x=3)} = 22,5 \text{ kN.m}$$

c – Cálculo do momento de inércia da seção

$$I_z = I_{z1} + I_{z2} + I_{z3}$$

$$I_z = 2 \left[\frac{250 \cdot 20^3}{12} + 250 \cdot 20 \cdot 160^2 \right] + \left[\frac{20 \cdot 300^3}{12} \right]$$

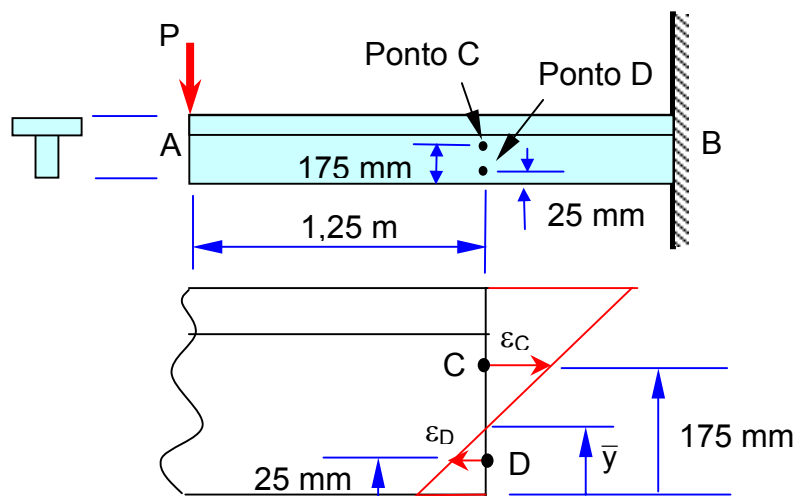
$$I_z = 301,3 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

d – Cálculo da máxima tensão de flexão

$$\sigma_{\max} = -\frac{M_{\max} \cdot c}{I_z} = -\frac{22,5 \cdot 10^6 \cdot (-170)}{301,3 \cdot 10^6}$$

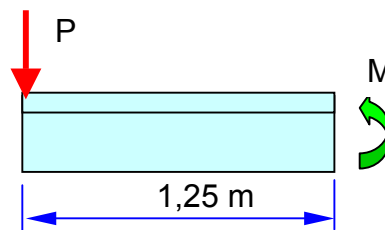
$$\sigma_{\max} = 12,7 \text{ MPa}$$

Exemplo 6.6: Uma viga estrutural em aço do tipo T usada em balanço, é carregada da forma mostrada na figura. Calcular a magnitude da carga P que provoca uma deformação longitudinal no ponto C de $+527 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$ (alongamento) e uma deformação longitudinal no ponto D de $-73 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$ (encurtamento). ($I = 2000 \text{ cm}^4$ e $E_{\text{aço}} = 21 \times 10^3 \text{ kgf/mm}^2$).



Por semelhança de triângulos:

$$\frac{\epsilon_C}{175 - \bar{y}} = \frac{\epsilon_D}{\bar{y} - 25} \Rightarrow \bar{y} = 43,25 \text{ mm}$$



$$\sum M = 0, \quad M + P \cdot 1,5 = 0, \quad M = -1,5 P \text{ (kgf} \cdot \text{m)}$$

$$\sigma_C = -\frac{M \cdot y_C}{I} = E \cdot \epsilon_C$$

$$\frac{P \cdot 1,25 \cdot 10^3 \cdot (175 - 43,25)}{2000 \cdot 10^4} = 21 \cdot 10^3 \cdot 527 \cdot 10^{-6}$$

$$P = 1344 \text{ kgf}$$

6.6 – Tensão de flexão em vigas com diferentes materiais (Método da rigidez equivalente)

Vigas com dois materiais são comumente chamadas de vigas compostas e são projetadas de forma a desenvolver maneiras mais eficientes para resistir às cargas aplicadas.

Como a fórmula da flexão em vigas, dada pela eq. (6.12) foi desenvolvida para o caso de materiais homogêneos, esta fórmula não pode ser aplicada diretamente para determinar as tensões de flexão em vigas compostas por diferentes materiais. Para estudar estes casos de viga, considere uma viga composta de dois diferentes materiais.

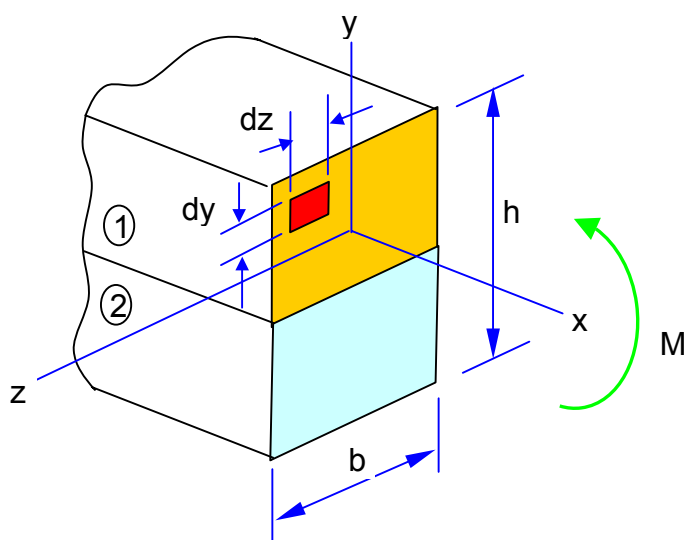
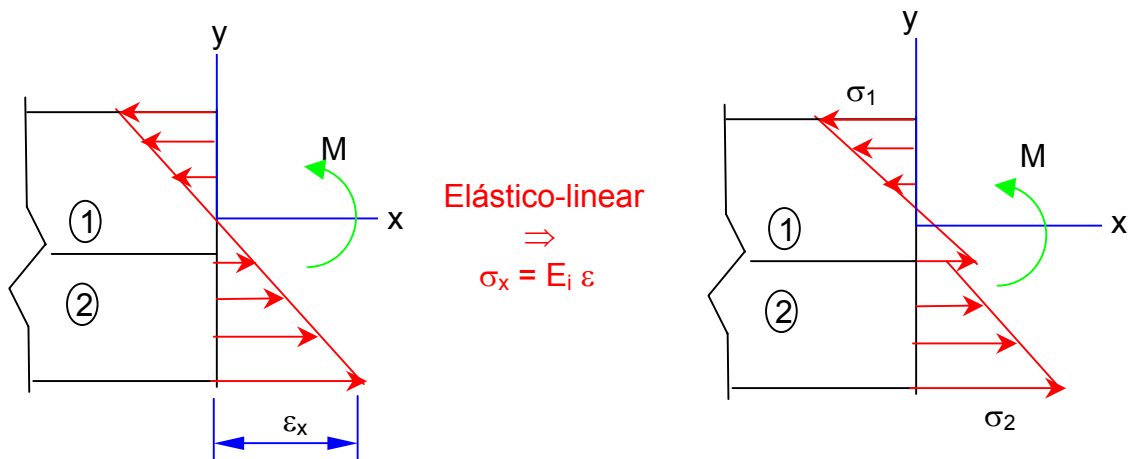


Figura 6.7 – Flexão de vigas compostas

Supondo que $E_1 > E_2$:



Impondo o equilíbrio estático das forças na direção x , obtem-se a mesma eq. (6.3). Supondo que a lei de Hooke é válida para cada material i , e pode ser colocada da forma:

$$\sigma_i = E_i \varepsilon \quad (6.20)$$

onde σ_i é a tensão num ponto situado no material i e E_i é o módulo de elasticidade do material i . Sabendo que a evolução das deformações é da forma pela eq. (6.2), o equilíbrio estático se põe da forma:

$$\frac{\varepsilon_{\max}}{c} \int_A E_i y \, dA = 0 \quad (6.21)$$

Seguindo o mesmo raciocínio feito na eq. (6.6) para no caso de uma viga homogênea, a eq. (6.21) pode usada para determinar a posição do eixo neutro (centróide) da seção transversal com diferentes materiais da seguinte maneira:

$$\bar{y} = \frac{\int_A E_i y \, dA}{\int_A E_i \, dA} = \frac{\sum E_i y_i A_i}{\sum E_i A_i} \quad (6.22)$$

onde y_i é o centróide da área de material i e A_i é a área de material i .

O momento interno é obtido pela soma dos momentos infinitesimais. Assim, considerando as eqs. (6.2) e (6.20), temos:

$$M = \frac{\varepsilon_{\max}}{c} \int_A E_i y^2 \, dA \quad (6.23)$$

A integral da eq. (6.23) pode ser chamada de rigidez equivalente em flexão, $\langle EI \rangle$:

$$\langle EI \rangle = \int_A E_i y^2 \, dA = \sum E_i I_i \quad (6.24)$$

onde I_i é o momento de inércia da área com material i .

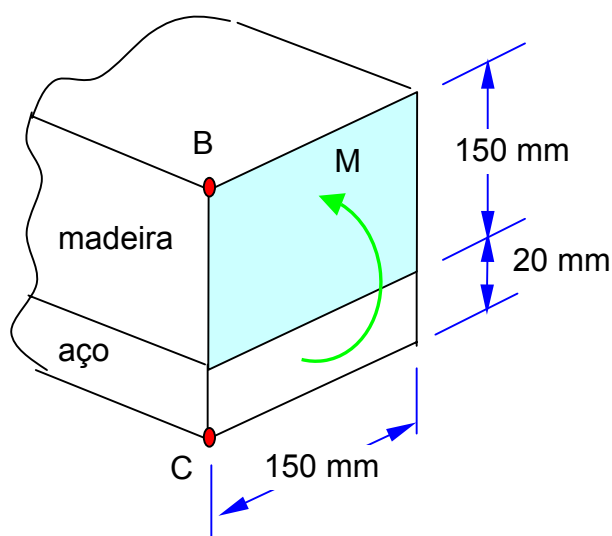
Substituindo a eq. (6.24) na eq. (6.23) e rearranjando, a expressão da máxima deformação pode ser colocada da forma:

$$\varepsilon_{\max} = \frac{M}{\langle EI \rangle} c \quad (6.25)$$

Considerando a relação de deformação dada pela eq. (6.2) e a lei de Hooke para cada material i , eq. (6.20), a expressão que fornece a tensão de flexão em um material i , distante y do eixo neutro é da forma:

$$\sigma_i = -E_i \frac{M}{\langle EI \rangle} y \quad (6.26)$$

Exemplo 6.7: A viga composta abaixo é sujeita a um momento fletor de $M = 2 \text{ kN.m}$. Determine pelo método da rigidez equivalente as tensões nos pontos B e C se $E_{\text{aço}} = 200 \text{ GPa}$ e $E_{\text{mad}} = 12 \text{ GPa}$.



a - Determinar a posição do centróide $\bar{y}$:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^2 E_i y_i A_i}{\sum_{i=1}^2 E_i A_i} = \frac{12 \cdot 10^9 \cdot 95 \cdot 150 \cdot 150 + 200 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 150}{12 \cdot 10^9 \cdot 150 \cdot 150 + 200 \cdot 10^9 \cdot 20 \cdot 150}, \quad \bar{y} = 36,38 \text{ mm}$$

b - Determinar a rigidez equivalente $\langle EI \rangle$:

$$\langle EI \rangle = 12 \cdot 10^3 \left[\frac{150 \cdot 150^3}{12} + 150 \cdot 150 \cdot \left(\frac{150}{2} + 20 - 36,38 \right)^2 \right] + 200 \cdot 10^3 \left[\frac{150 \cdot 20^3}{12} + 20 \cdot 150 \cdot (36,38 - 10)^2 \right]$$

$$\langle EI \rangle = 1,87 \cdot 10^{12} \text{ N.mm}^2$$

c - Determinar as tensões:

Ponto C:

$$\sigma_C = -E_{\text{aço}} \frac{M}{<EI>} y_C = -200 \cdot 10^3 \frac{2000 \cdot 10^3 (-36,38)}{1,87 \cdot 10^{12}}$$

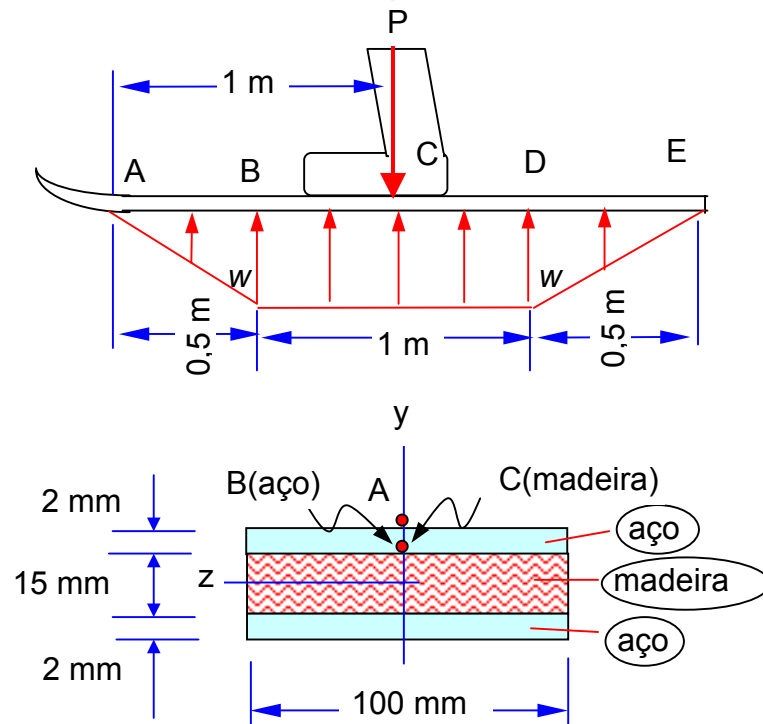
$$\sigma_C = 7,78 \text{ N/mm}^2 = 7,78 \text{ Mpa}$$

Ponto B:

$$\sigma_B = -E_{\text{mad}} \frac{M}{<EI>} y_B = -12 \cdot 10^3 \frac{2000 \cdot 10^3 (150 + 20 - 36,38)}{1,87 \cdot 10^{12}}$$

$$\sigma_B = -1,71 \text{ Mpa}$$

Exemplo 6.8: Se o momento máximo no ski abaixo é 77,78 N.m, determine as tensões de flexão no aço e na madeira se a seção transversal do ski é como apresentado abaixo. Tome $E_{\text{aço}} = 200 \text{ GPa}$ e $E_{\text{mad}} = 12 \text{ GPa}$.



a – Cálculo da rigidez equivalente $<EI>$:

$$<EI> = 2 E_{\text{aço}} \left[\frac{100 \cdot 2^3}{12} + 2 \cdot 100 \cdot \left(\frac{15}{2} + \frac{2}{2} \right)^2 \right] + E_{\text{mad}} \left[\frac{100 \cdot 15^3}{12} \right]$$

$$<EI> = 2 \cdot 200 \cdot 10^3 \left[\frac{100 \cdot 2^3}{12} + 2 \cdot 100 \cdot \left(\frac{15}{2} + \frac{2}{2} \right)^2 \right] + 12 \cdot 10^3 \left[\frac{100 \cdot 15^3}{12} \right]$$

$$<EI> = 6,14.10^9 \text{ N.mm}^2$$

b – Cálculo das tensões:

Ponto A (aço):

$$\sigma_A = -E_{\text{aço}} \frac{M}{<EI>} y_A = -200.10^3 \frac{77,78.10^3 .9,5}{6,14.10^9}, \quad \sigma_A = -24,05 \text{ Mpa}$$

Ponto B (aço):

$$\sigma_B = -E_{\text{aço}} \frac{M}{<EI>} y_B = -200.10^3 \frac{77,78.10^3 .7,5}{6,14.10^9}, \quad \sigma_B = -18,99 \text{ Mpa}$$

Ponto C (madeira):

$$\sigma_C = -E_{\text{mad}} \frac{M}{<EI>} y_C = -12.10^3 \frac{77,78.10^3 .7,5}{6,14.10^9}, \quad \sigma_C = -1,14 \text{ Mpa}$$

7 – TENSÃO DE CISALHAMENTO EM VIGAS

7.1 – Preliminares

Considere a seção transversal de uma viga carregada transversalmente por uma força cortante V como apresentado abaixo, Fig. 7.1.

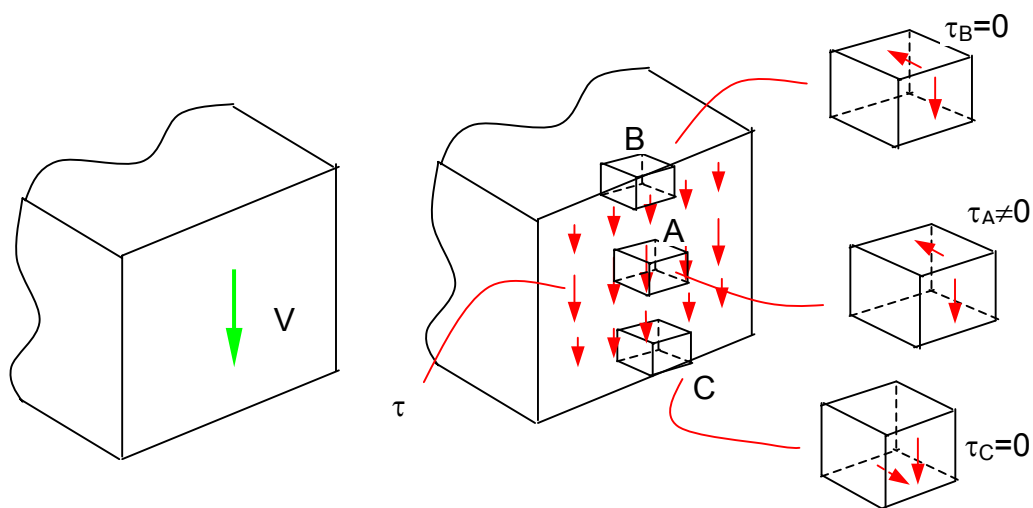


Figura 7.1 – Distribuição das tensões de cisalhamento numa seção transversal

Justificativa do surgimento das tensões de cisalhamento longitudinais.

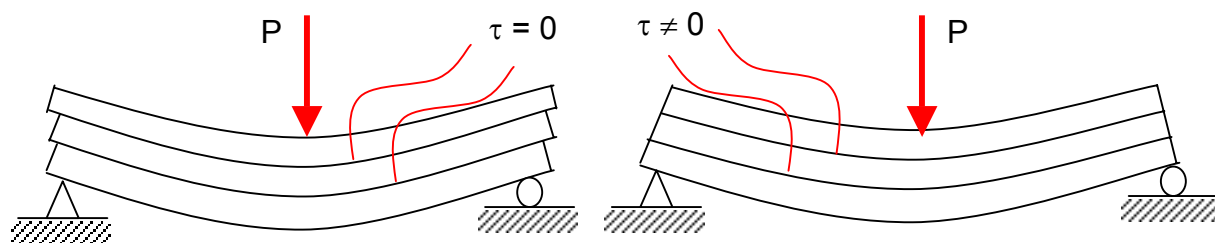


Figura 7.2 – Tensões de cisalhamento longitudinais

7.2 – Fórmula da tensão de cisalhamento em vigas

Considere a viga carregada transversalmente como apresentado abaixo, Fig. 7.3 .

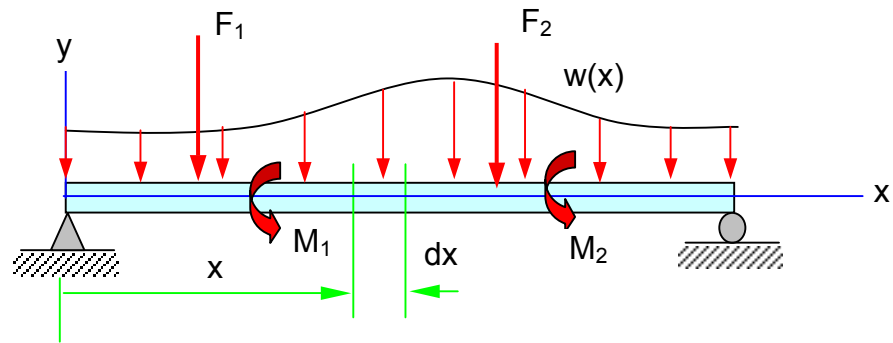


Figura 7.3 – Viga carregada transversalmente

Considerando somente as forças axiais atuando nas seções transversais de um elemento de viga de comprimento dx , temos:

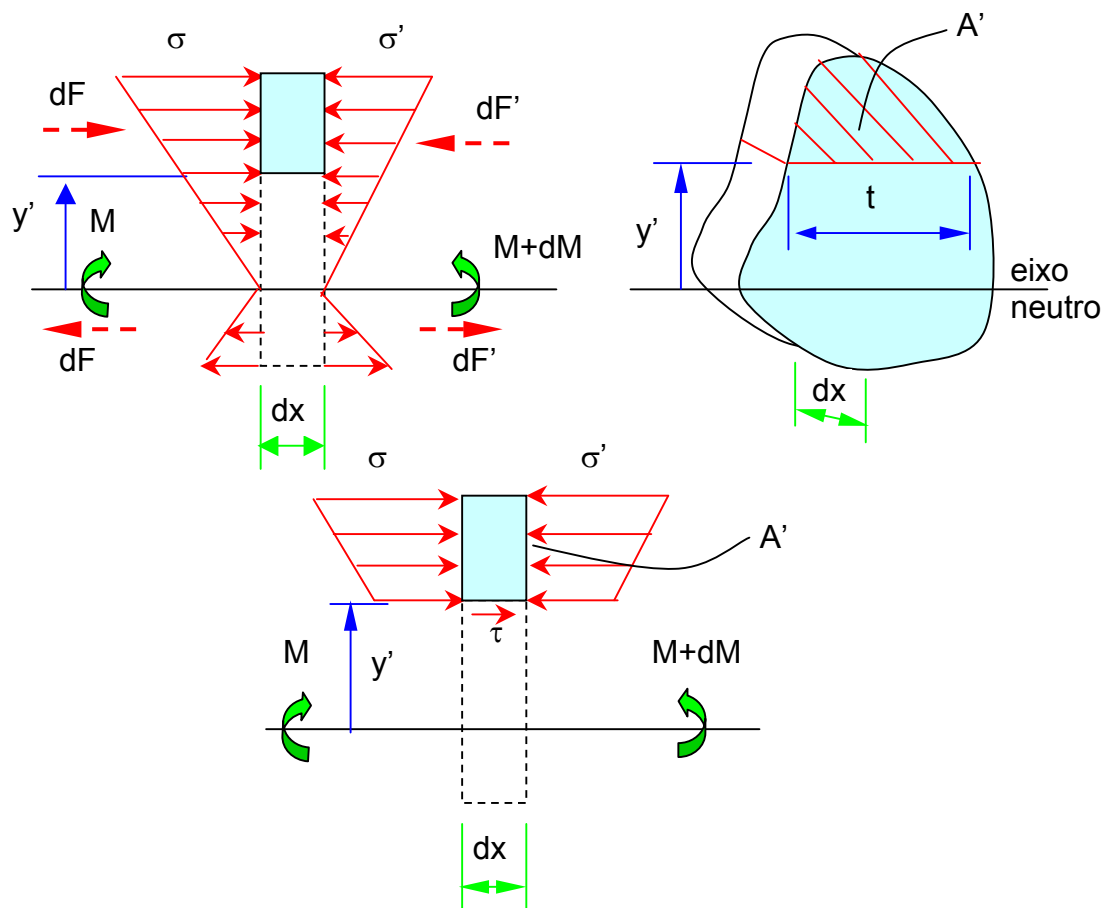


Figura 7.4 – Tensões atuando num elemento de viga

Impondo o equilíbrio das forças atuando na direção axial x , tem-se:

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \quad , \quad \int_{A'} \sigma dA - \int_{A'} \sigma' dA + \tau (t \cdot dx) = 0 \quad (7.1)$$

onde σ é a tensão normal atuando na seção transversal esquerda do elemento, σ' é a tensão normal atuando na seção transversal direita do elemento, t é largura da seção no ponto onde se deseja determinar a tensão de cisalhamento e A' é a área acima do ponto onde se deseja determinar a tensão de cisalhamento.

Substituindo a tensão normal de flexão dada pela eq. (6.7) na eq. (7.1), temos:

$$\int_{A'} \left(-\frac{M}{I} \right) dA - \int_{A'} \left(-\frac{M + dM}{I} \right) dA + \tau (t \cdot dx) = 0 \quad (7.2)$$

Simplificando a eq. (7.2) e considerando que o momento interno M e o momento de inércia I são constantes na seção:

$$\frac{dM}{I} \int_{A'} y dA + \tau (t \cdot dx) = 0 \quad (7.3)$$

Isolando a tensão de cisalhamento, tem-se:

$$\tau = -\frac{dM}{dx} \frac{1}{tI} \int_{A'} y dA \quad (7.4)$$

Como $\frac{dM}{dx} = -V$ e $\int_{A'} y dA$ é o primeiro momento da área A' com relação ao eixo neutro, ou seja $\bar{y}' = \frac{\int_{A'} y dA}{\int_{A'} dA}$. Então:

$$\int_{A'} y dA = \bar{y}' A' = Q \quad (7.5)$$

Logo, a tensão de cisalhamento em uma seção num ponto distante y' do eixo neutro é determinada dada por:

$$\tau = \frac{V Q}{t I} \quad (7.6)$$

Restrições da eq. (7.6):

- Material trabalha dentro do regime elástico-linear,
- Relação espessura/comprimento da viga pequena (hipótese fundamental da teoria de flexão).

- Módulo de elasticidade deve ser o mesmo em tração e em compressão.

7.3 – Distribuição da tensão de cisalhamento em vigas

Considere a viga de seção transversal retangular de altura h e largura b , submetida à um esforço cortante V , Fig. 7.5:

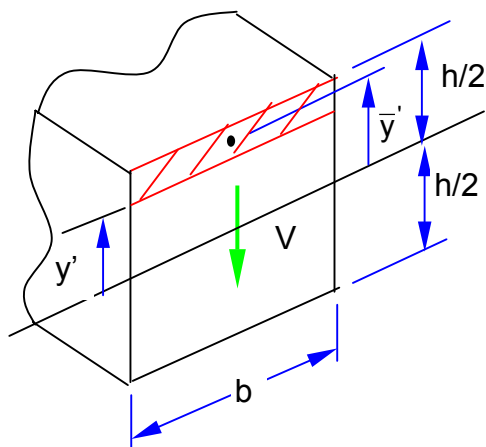


Figura 7.5 – Esforço cortante V atuando numa seção transversal

O primeiro momento da área A' , Q , pode ser determinado como:

$$Q = \bar{y}' A' = \left[y' + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y' \right) \right] \left(\frac{h}{2} - y' \right) b \quad (7.7)$$

Simplificando a eq. (7.7), temos:

$$Q = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y'^2 \right) b \quad (7.8)$$

Substituindo as eqs. (6.9) e (7.8) na eq. (7.6):

$$\tau = \frac{V \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y'^2 \right) b}{\frac{b h^3}{12} b} \quad (7.9)$$

Simplificando a eq. (7.9), temos:

$$\tau = \frac{6 V}{b h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y'^2 \right) \quad (7.10)$$

Conclusões:

- A distribuição da tensão de cisalhamento é parabólica.
- A tensão de cisalhamento é nula nas extremidades ($h/2, -h/2$).
- A tensão de cisalhamento é máxima no eixo neutro ($y = 0$). $\tau = \frac{6 V}{4 b h} = 1,5 \frac{V}{A}$

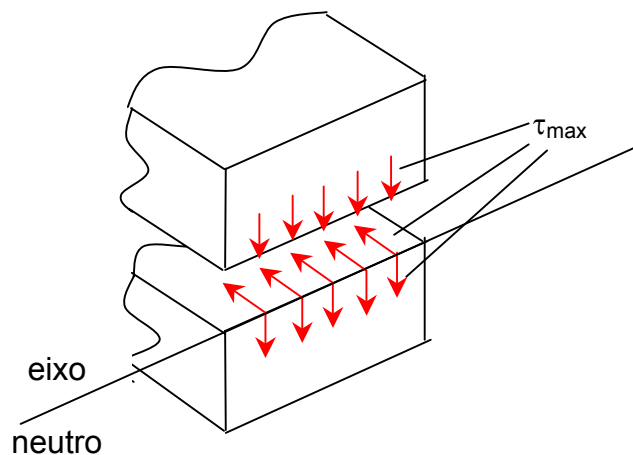


Figura 7.6 – Tensões de cisalhamento atuando em planos ortogonais

Observação importante: Para o caso de um material anisotrópico como por exemplo a madeira, a viga se rompe ao longo do plano horizontal paralelo às fibras, passando pelo eixo neutro da seção.

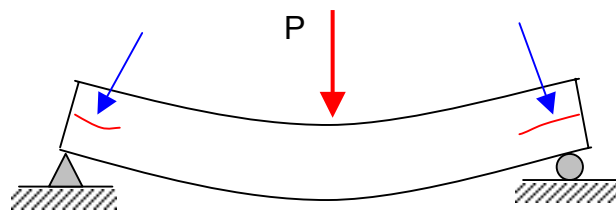
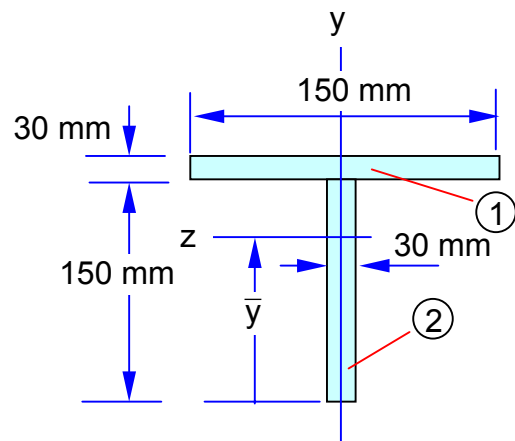
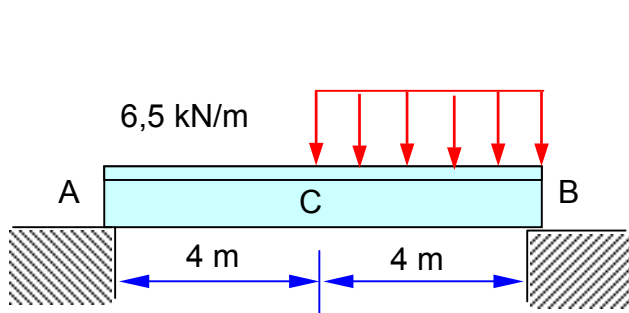
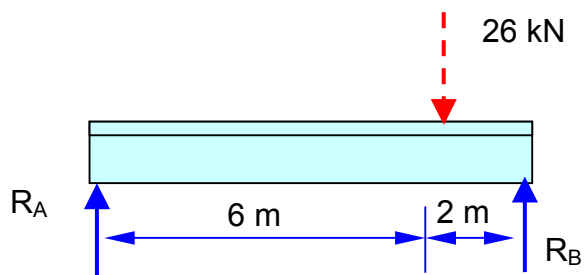


Figura 7.7 – Ruptura por cisalhamento em vigas de madeira

Exemplo 7.1: A viga abaixo é composta de duas pranchas de madeira formando um perfil do tipo T. Determine a máxima tensão cisalhante na cola necessária para mantê-las juntas.



a - Cálculo das reações de apoio:

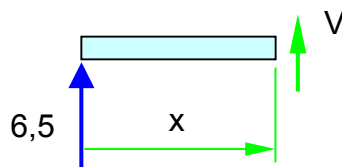


$$\sum M_A = 0, \quad R_B \cdot 8 - 26 \cdot 6 = 0, \quad R_B = 19,5 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0, \quad R_A + 19,5 - 26 = 0, \quad R_A = 6,5 \text{ kN}$$

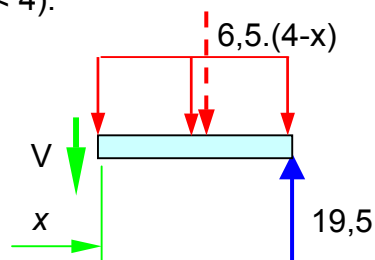
b – Cálculo do diagrama de cortante:

Trecho AC ($0 < x < 4$):



$$\sum F_y = 0, \quad 6,5 + V = 0, \quad V = -6,5 \text{ kN}$$

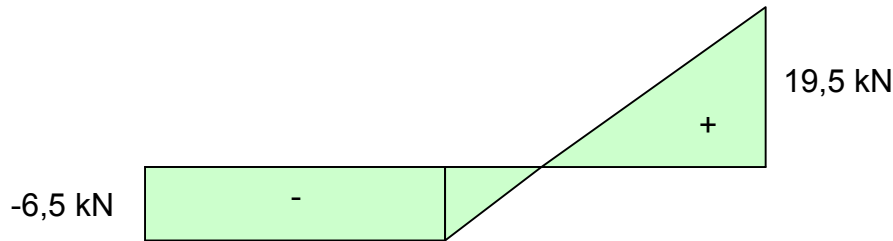
Trecho CB ($0 < x < 4$):



$$\sum F_y = 0, \quad -V - 6,5(4-x) + 19,5 = 0 \quad V = 6,5x - 6,5 \text{ (kN)}$$

$$p/x = 0 \Rightarrow V_C = -6,5 \text{ kN}$$

$$p/x = 4 \Rightarrow V_B = 19,5 \text{ kN}$$



c - Cálculo da posição do eixo neutro (centróide):

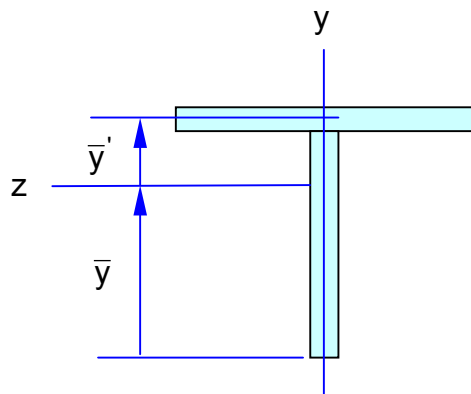
$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^2 y_i A_i}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{75 \cdot 30 \cdot 150 + (15 + 15) \cdot 30 \cdot 150}{30 \cdot 150 + 30 \cdot 150} = 120 \text{ mm}$$

d - Cálculo do momento de inércia I_z :

$$I_z = \frac{30 \cdot 150^3}{12} + 30 \cdot 150 \cdot (120 - 75)^2 + \frac{150 \cdot 30^3}{12} + 30 \cdot 150 \cdot (150 + \frac{30}{2} - 120)^2,$$

$$I_z = 2,7 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

e - Cálculo do primeiro momento Q:



$$Q = \bar{y}' \cdot A' = (150 + 30 - 120 - \frac{30}{2}) 30 \cdot 150 = 2,025 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

f - Cálculo de $\tau_{\max}$:

$$\tau_{\max} = \frac{V Q}{I t} = \frac{19,5 \cdot 10^3 \cdot 2,025 \cdot 10^5}{2,7 \cdot 10^7 \cdot 30} = 4,875 \text{ MPa}$$

7.4 – Tensão de cisalhamento em vigas com diferentes materiais (Método da rigidez equivalente)

Análogamente ao caso de vigas com diferentes materiais trabalhando em flexão, a fórmula para determinar tensão de cisalhamento, eq. (7.6), não pode ser aplicada diretamente para determinar as tensões de cisalhamento para o caso de vigas compostas. Para estudar estes casos de viga sujeitas a um cisalhamento, considere a viga abaixo composta de diferentes materiais, Fig. 7.8.

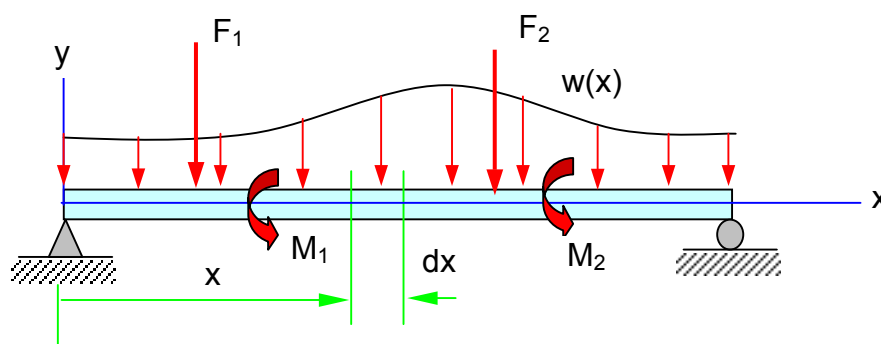
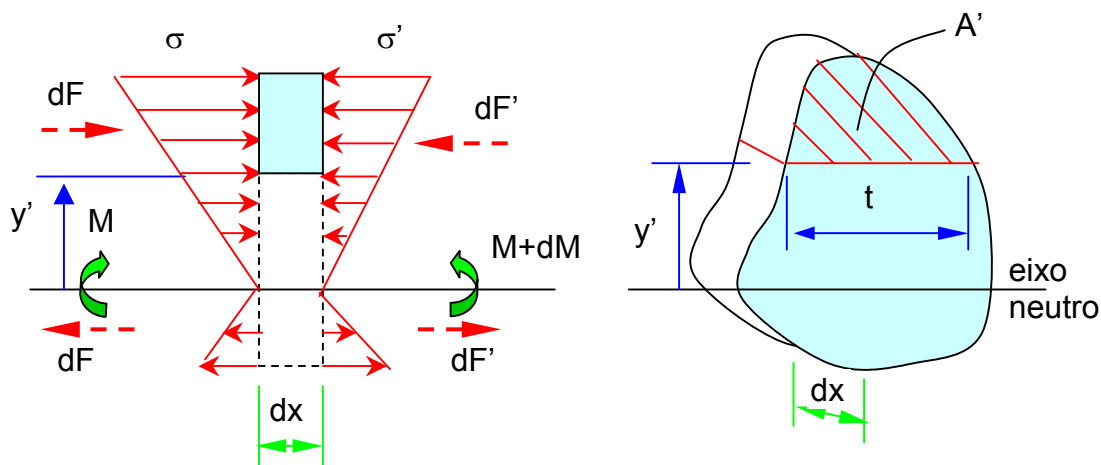


Figura 7.8 – Viga composta carregada transversalmente

Considerando somente as forças axiais atuando nas seções transversais do elemento de comprimento dx da viga composta, temos:



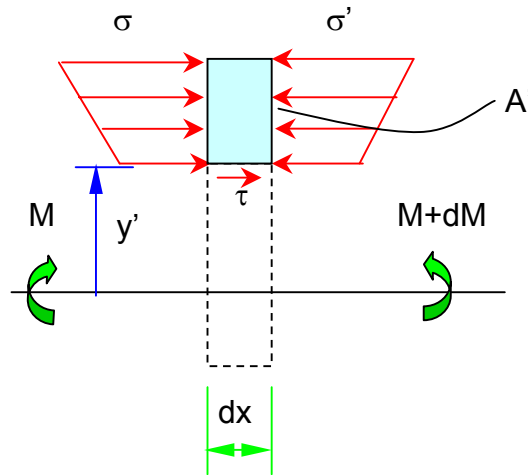


Figura 7.9 – Tensões atuando num elemento de viga composta

Da imposição do equilíbrio de forças atuando na direção x , tem-se a mesma eq.(7.1). Substituindo a eq. (6.9) que fornece a expressão de tensão de flexão de vigas compostas na eq. (7.1), temos:

$$\int_{A'} -E_i \left(\frac{M}{\langle EI \rangle} \right) y \, dA - \int_{A'} -E_i \left(\frac{M + dM}{\langle EI \rangle} \right) y \, dA + \tau (t \, dx) = 0 \quad (7.11)$$

Simplificando a eq. (7.11) e considerando que o momento dM e a rigidez equivalente $\langle EI \rangle$ é constante na seção, temos:

$$\frac{dM}{\langle EI \rangle} \int_{A'} E_i y \, dA + \tau (t \, dx) = 0 \quad (7.12)$$

Isolando a tensão de cisalhamento da eq.(7.12):

$$\tau = - \frac{dM}{dx} \frac{1}{\langle EI \rangle t} \int_{A'} E_i y \, dA \quad (7.13)$$

Sabe-se que, $\frac{dM}{dx} = -V$ e chamando o primeiro momento da área A' de

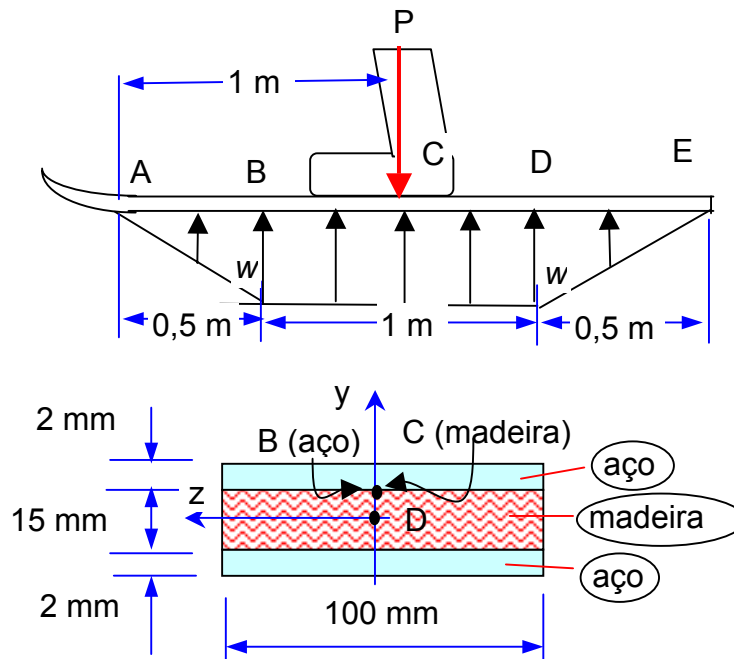
$$Q = \int_{A'} E_i y \, dA = \sum E_i y_i A_i, \text{ temos:}$$

$$\tau = \frac{V Q}{\langle EI \rangle t} \quad (7.14)$$

onde τ é a tensão de cisalhamento na posição y' , V é o cortante na seção analisada, Q é o primeiro momento de área, $\langle EI \rangle$ é a rigidez equivalente e t é a largura da viga

na posição y' . Na expressão de Q , E_i é o módulo de elasticidade do material i , y_i é a posição do centróide da área de material i e A_i é a área do material i . A rigidez equivalente é $\langle EI \rangle = \sum E_i I_i$.

Exemplo 7.2: Se o cortante máximo no ski abaixo é 200 N, determine as tensões de cisalhamento no aço e na madeira se a seção transversal do ski é como apresentado abaixo. Tome $E_{aço} = 200 \text{ GPa}$ e $E_{mad} = 12 \text{ GPa}$.



a – Cálculo da rigidez equivalente $\langle EI \rangle$:

$$\langle EI \rangle = 2 E_{aço} \left[\frac{100 \cdot 2^3}{12} + 2 \cdot 100 \cdot \left(\frac{15}{2} + \frac{2}{2} \right)^2 \right] + E_{mad} \left[\frac{100 \cdot 15^3}{12} \right]$$

$$\langle EI \rangle = 2 \cdot 200 \cdot 10^3 \left[\frac{100 \cdot 2^3}{12} + 2 \cdot 100 \cdot \left(\frac{15}{2} + \frac{2}{2} \right)^2 \right] + 12 \cdot 10^3 \left[\frac{100 \cdot 15^3}{12} \right]$$

$$\langle EI \rangle = 6,14 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{mm}^2$$

Ponto D: (madeira)

$$Q_D = \sum E_i y_i A_i = E_{mad} (3,75 \cdot 100 \cdot 7,5) + E_{aço} (8,5 \cdot 100 \cdot 2)$$

$$Q_D = 12 \cdot 10^3 (3,75 \cdot 100 \cdot 7,5) + 200 \cdot 10^3 (8,5 \cdot 100 \cdot 2)$$

$$Q_D = 373750000 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$\tau_D = \frac{V \cdot Q}{<EI> \cdot t} = \frac{200.373750000}{6,14.10^9.100}, \quad \tau_D = 0,12 \text{ N/mm}^2$$

Ponto C: (madeira)

$$Q_C = \sum E_i y_i A_i = E_{\text{aço}} (8,5.100.2)$$

$$Q_C = 200.10^3 (8,5.100.2)$$

$$Q_C = 340000000 \text{ N.mm}$$

$$\tau_B = \frac{V \cdot Q}{<EI> \cdot t} = \frac{200.340000000}{6,14.10^9.100}, \quad \tau_B = 0,11 \text{ N/mm}^2$$

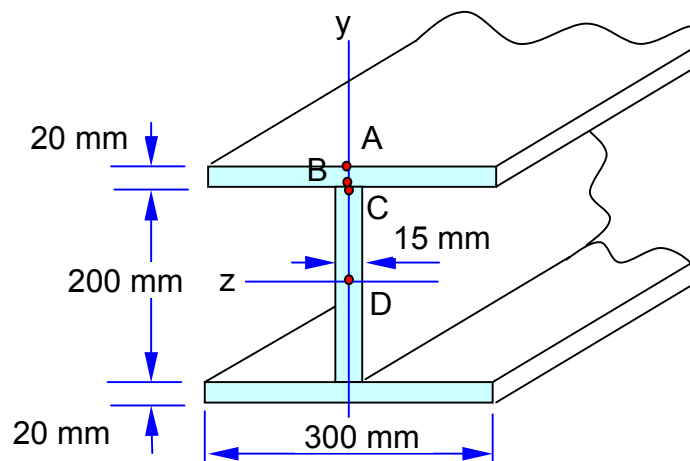
Ponto B: (aço)

$$Q_B = Q_C = 340000000 \text{ N.mm}$$

$$\tau_B = \tau_C = 0,11 \text{ N/mm}^2$$

Conclusão importante: Na interface entre o aço e a madeira há continuidade das tensões de cisalhamento transversal ($\tau_{B \text{ aço}} = \tau_{C \text{ mad}} = 0,11 \text{ MPa}$).

Exemplo 7.3: Plote a distribuição de tensões de cisalhamento na seção transversal de uma viga do tipo I com força cortante $V = 80 \text{ kN}$.



a – Cálculo do momento de inércia I:

$$I = 2 \left[\frac{300 \cdot 20^3}{12} + 110^2 \cdot 300 \cdot 20 \right] + \frac{15 \cdot 200^3}{12} = 1,556 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

Ponto A:

$$Q_A = 0 \Rightarrow \tau_A = 0$$

Ponto B:

$$Q_B = \bar{y}' \cdot A' = 110.300.20 = 6,6.10^5 \text{ mm}^3$$

$$\tau_B = \frac{80.10^3 \cdot 6,6.10^5}{1,556.10^8.300} = 1,13 \text{ MPa}$$

Ponto C:

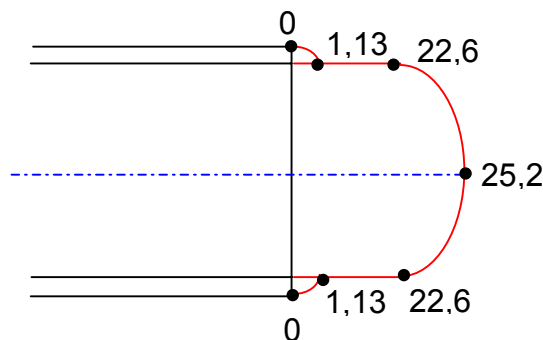
$$Q_B = Q_C = 6,6 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

$$\tau_C = \frac{80.10^3 \cdot 6,6.10^5}{1,556.10^8.15} = 22,62 \text{ MPa}$$

Ponto D:

$$Q_D = \bar{y}_1' \cdot A_1' + \bar{y}_2' \cdot A_2' = 50.100.15 + 110.300.20 = 7,35.10^5 \text{ mm}^3$$

$$\tau_D = \frac{80.10^3 \cdot 7,35.10^5}{1,556.10^8.15} = 25,20 \text{ MPa}$$



7.5 – Fluxo de cisalhamento

Ocasionalmente na engenharia, alguns membros são construídos a partir da união de diferentes partes para poderem resistir as cargas. Nestes casos, a união das diferentes partes do membro é feita através de cola, pregos, parafusos, etc. Para o projeto destes elementos é necessário o conhecimento da força que deve ser

resistida por cada um destes elementos. Seja a viga com o carregamento abaixo, formada pela união de dois elementos:

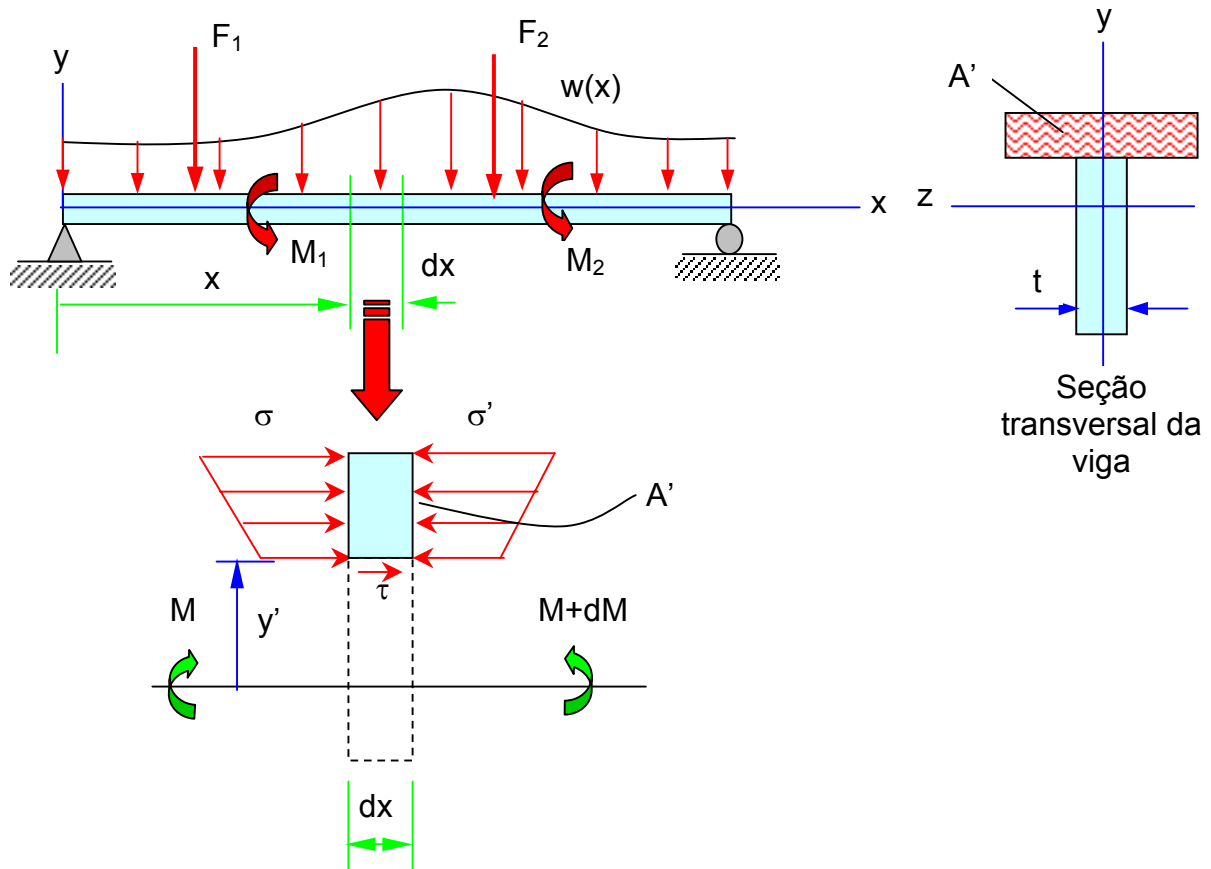


Figura 7.10 – Tensões atuando em elementos unidos por pregos, parafusos, etc.

Da eq. (7.3) que representa o equilíbrio das forças na direção x , tem-se a força de cisalhamento atuante na interface entre dois elementos:

$$-\frac{dM}{dx} \int_{A'} y dA = \tau (t dx) = dF \quad (7.15)$$

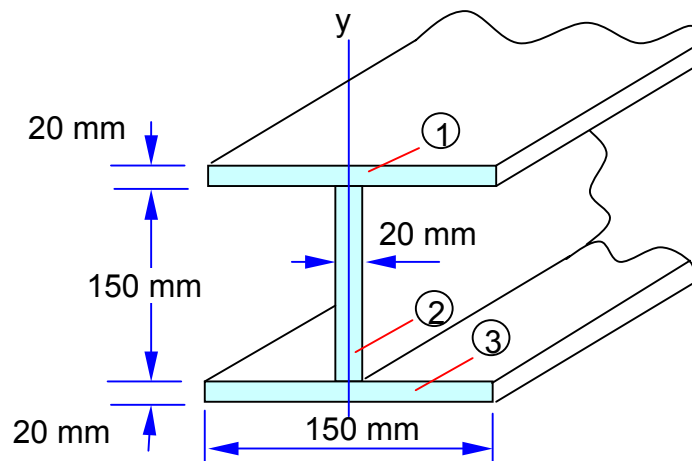
A força de cisalhamento por unidade de comprimento pode ser obtida da forma:

$$\frac{dF}{dx} = -\frac{dM}{dx} \frac{1}{t} \int_{A'} y dA \quad (7.16)$$

Sabendo que $\frac{dM}{dx} = -V$ e $Q = \int_{A'} y dA$, o fluxo de cisalhamento q é dado por:

$$q = \frac{V Q}{I} \quad (7.17)$$

Exemplo 7.4: Determine a quantidade de pregos necessária para manter os elementos da viga abaixo de 3m de comprimento, unidos quando submetida a um cortante de 2 kN. A tensão admissível dos pregos de diâmetro $d = 2 \text{ mm}$ é $\tau_{adm} = 225 \text{ Mpa}$.



a – Cálculo do momento de inércia I e do primeiro momento Q :

$$I = \frac{150 \cdot 190^3}{12} - 2 \left(\frac{65 \cdot 150^3}{12} \right) = 49175000 \text{ mm}^4$$

$$Q = \bar{y}' \cdot A' = \left(\frac{150}{2} + 10 \right) \cdot 150 \cdot 20255000 \text{ mm}^3$$

b – Cálculo do fluxo de cisalhamento q :

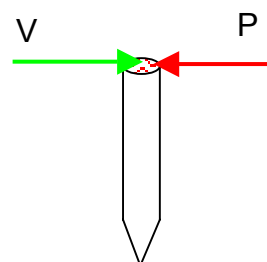
$$q = \frac{V Q}{I} = \frac{2000 \cdot 255000}{49175000} = 10,37 \text{ N / mm}$$

c – Cálculo da força suportada por cada prego:

$$\tau_{adm} P = \frac{V}{A}$$

$$225 = \frac{V}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

$$V = P = 706,86 \text{ N}$$



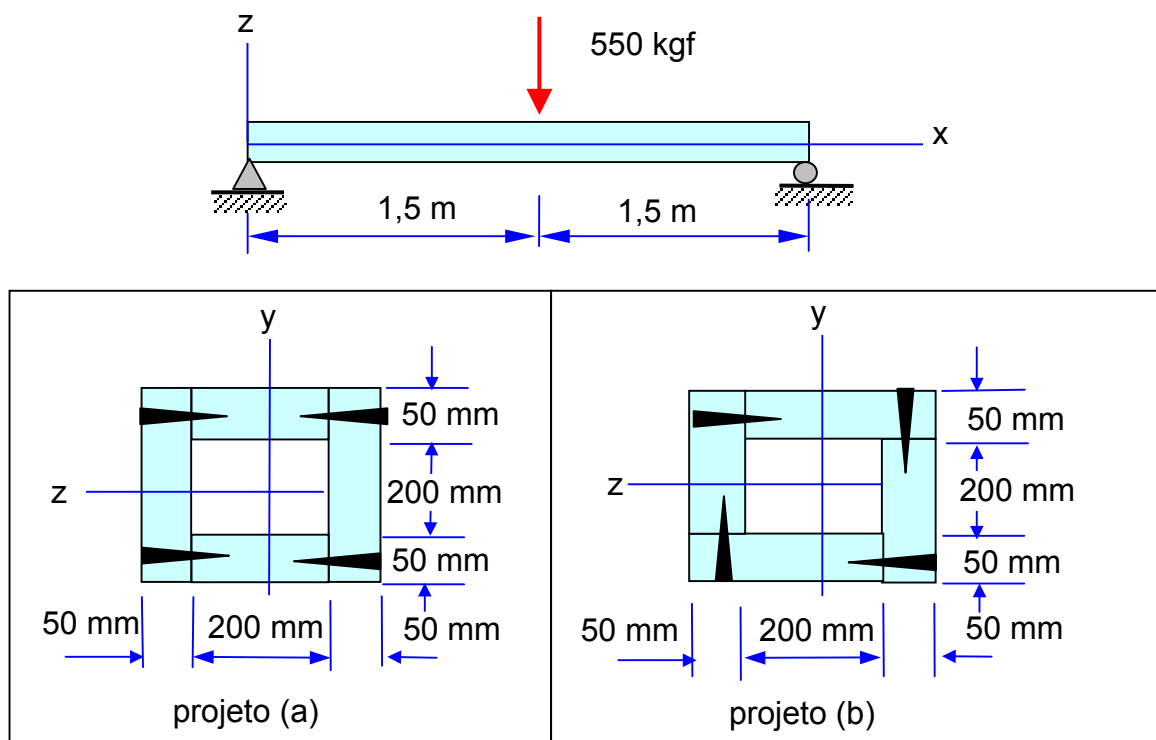
d – Cálculo do espaçamento entre os pregos:

$$e = \frac{P}{q} = \frac{706,86 \text{ N}}{10,37 \text{ N/mm}} = 68,16 \text{ mm}$$

e – Cálculo do número de pregos:

$$n_p = \frac{3000}{68,16} = 44$$

Exemplo 7.5. A viga biapoiada abaixo é composta de 4 pranchas de madeira e suporta uma força concentrada de 550 kgf. Determine o projeto entre (a) e (b) que exige a menor quantidade de pregos. Cada prego resiste a uma força de 20 kgf. O eixo neutro é paralelo ao eixo z.



a – Cálculo das reações de apoio:

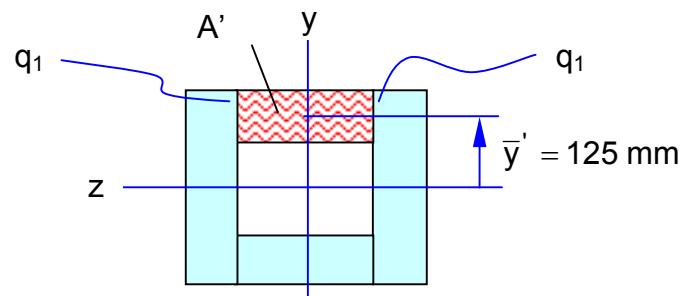
$$\sum M_A = 0 \quad , \quad R_B \cdot 3 - 550 \cdot 1,5 = 0 \quad , \quad R_B = 275 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \quad , \quad R_A + 275 - 550 = 0 \quad , \quad R_A = 275 \text{ kN}$$

b – Cálculo do momento de inércia da seção:

$$I = \frac{300 \cdot 300^3}{12} - \frac{200 \cdot 200^3}{12}, \quad I_z = 541666666,7 \text{ mm}^4$$

➤ Projeto (a):



c₁ – Cálculo do primeiro momento Q₁:

$$Q_1 = \bar{y}' \cdot A' = 125 \cdot 200 \cdot 50 = 1250000 \text{ mm}^3$$

d₁ – Cálculo do fluxo de cisalhamento q₁:

$$q_1 = \frac{V Q_1}{2I} = \frac{275 \cdot 1250000}{2 \cdot 541666666,2} = 0,32 \text{ kgf/mm}$$

e₁ – Cálculo do espaçamento entre os pregos e_p:

$$e_1 = \frac{F_p}{q_1} = \frac{20 \text{ kgf}}{0,32 \text{ kgf/mm}} = 62,5 \text{ mm}$$

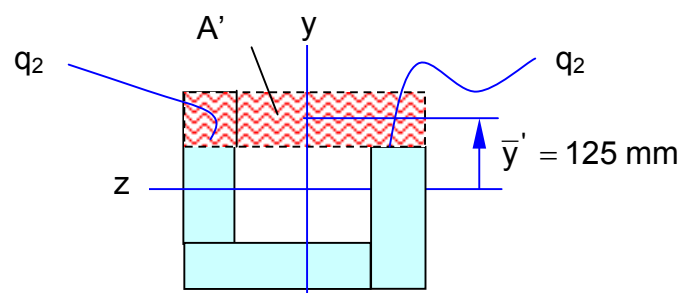
f₁ – Cálculo do número de pregos n_p:

$$n_{p1} = \frac{L}{e_1} = \frac{3000 \text{ mm}}{62,5 \text{ mm}} = 48$$

g₁ – Cálculo do número total de pregos no projeto a:

$$n_{t1} = 4 \cdot 48 = 192$$

➤ Projeto (b):



c₂ – Cálculo do primeiro momento Q₂:

$$Q_1 = \bar{y}' \cdot A' = 125 \cdot 300 \cdot 50 = 1875000 \text{ mm}^3$$

d₂ – Cálculo do fluxo de cisalhamento q₂:

$$q_2 = \frac{V Q}{2I} = \frac{275 \cdot 1875000}{2 \cdot 541666666,2} = 0,48 \text{ kgf/mm}$$

e₂ – Cálculo do espaçamento entre os pregos e_p:

$$e_2 = \frac{F_p}{q_2} = \frac{20 \text{ kgf}}{0,48 \text{ kgf/mm}} = 41,7 \text{ mm}$$

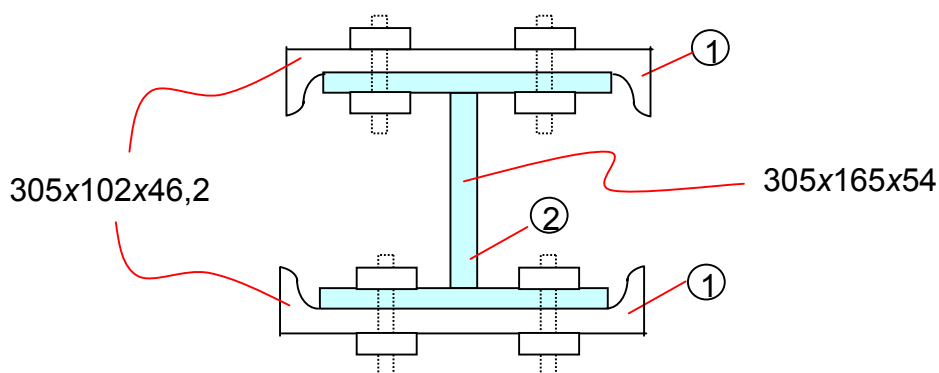
f₂ – Cálculo do número de pregos n_p:

$$n_{p2} = \frac{L}{e_2} = \frac{3000 \text{ mm}}{41,7 \text{ mm}} = 72$$

g₂ – Cálculo do número total de pregos no projeto b:

$$n_{t2} = 2 \cdot 72 + 48 \cdot 2 = 240$$

Exemplo 7.6: A viga abaixo é formada pela união de diferentes perfis parafusados entre si. Determine a máxima força cortante que a viga pode suportar se os parafusos resistem a uma força cortante de 11 kN e estão espaçados de 200 mm.



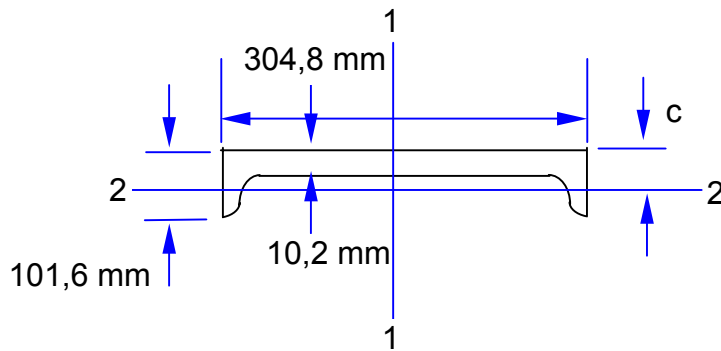
Perfil 305x102x46,2 kg:

$$A = 58,8 \text{ cm}^2$$

$$I_{11} = 8214 \text{ cm}^4$$

$$I_{22} = 500 \text{ cm}^4$$

$$c = 2,66 \text{ cm}$$

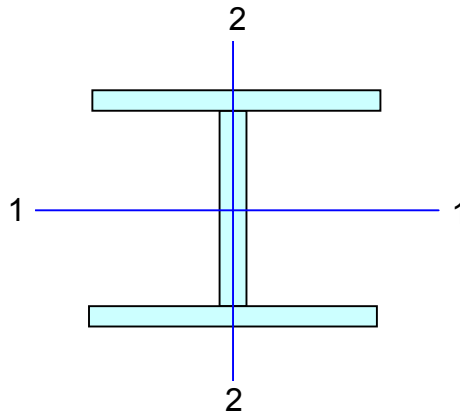


Perfil 305x165x54 kg:

$$A = 68,3 \text{ cm}^2$$

$$I_{11} = 11686 \text{ cm}^4$$

$$I_{22} = 988 \text{ cm}^4$$



a – Cálculo do momento de inércia I de todo o perfil:

$$I = 2 I_1 + I_2 = 2 \left[500 + \left(\frac{31,09}{2} + 1,02 - 2,66 \right)^2 \cdot 58,8 \right] + 11686$$

$$I = 35423,8 \text{ cm}^4 = 35423,8 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

b – Cálculo do primeiro momento Q :

$$Q = \bar{y}' \cdot A' = \left(\frac{31,09}{2} + 1,02 - 2,66 \right) \cdot 58,8 = 817,614 \text{ cm}^3 = 817,614 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

c – Cálculo do fluxo de cisalhamento q :

$$q = \frac{V Q}{I} = \frac{V \cdot 817,614 \cdot 10^3}{35423,8 \cdot 10^4} = 2,308 \cdot 10^{-3} \cdot V$$

d – Cálculo do espaçamento entre os parafusos e_p :

$$e_p = \frac{\text{força cortante nos parafusos}}{q}$$

$$200 = \frac{2 \cdot 11 \cdot 10^3}{2,308 \cdot 10^{-3} \cdot V} \Rightarrow V = 47700 \text{ N}$$

8 – TENSÕES COMPOSTAS

Nos capítulos anteriores, foram desenvolvidos métodos para determinar a distribuição de tensão em membros sujeitos a esforços internos: força axial, força cortante, momento fletor e momento torçor. Muito frequentemente, a seção transversal de um membro está sujeita a vários tipos de esforços internos simultaneamente. A tensão resultante destes esforços é obtida pela superposição das tensões devido a cada esforço interno calculadas separadamente.

8.1 – Superposição e suas limitações

O princípio da superposição pode ser usado desde que haja uma relação linear entre tensão e carregamento. Também deve ser considerado que a geometria do membro não deve sofrer mudança significativa quando as cargas são aplicadas. Isto deve ser assegurado de maneira que a tensão produzida por uma carga não está relacionada com a tensão produzida por uma outra carga. Neste sentido, considere a viga com o carregamento mostrado abaixo, trabalhando dentro do regime elástico linear.

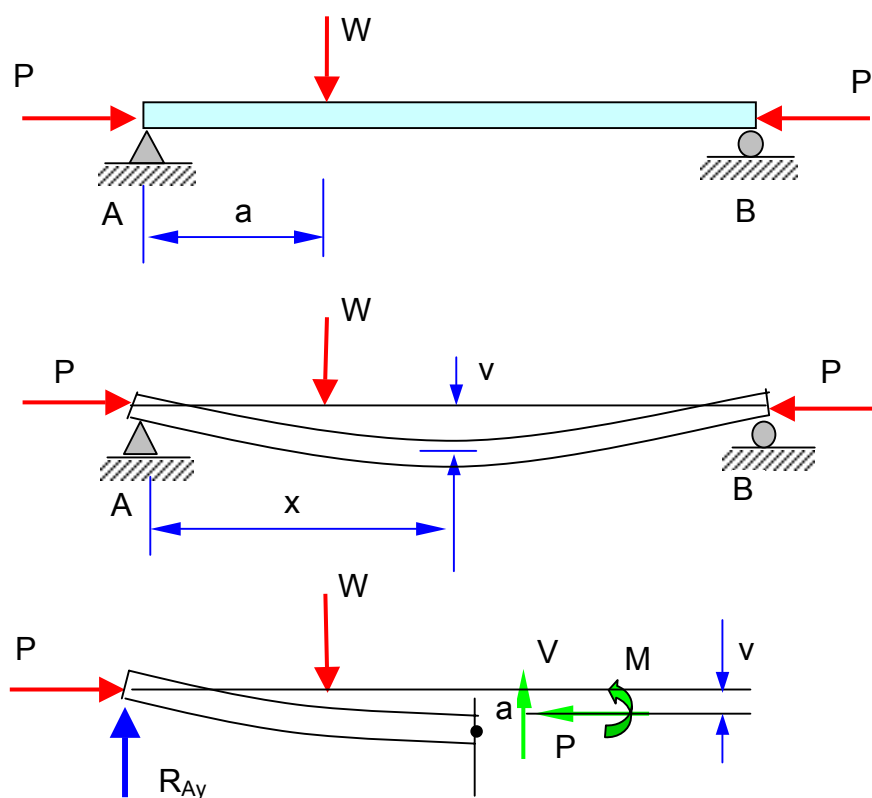


Figura 8.1 – Viga submetida à uma flexo-compressão

onde v é a deflexão da viga de um ponto distante x da extremidade:

Impondo o equilíbrio de momentos com relação ao eixo z , temos:

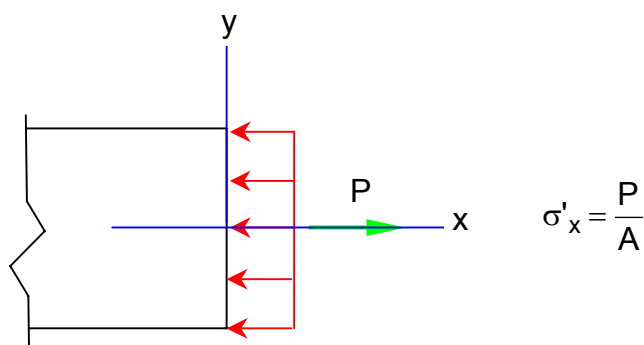
$$\sum M_a = 0, M - P \cdot v - R_{Ay} \cdot x + W \cdot (x - a) = 0 \quad (8.1)$$

Assim, percebe-se que o momento interno M é dependente da deflexão v :

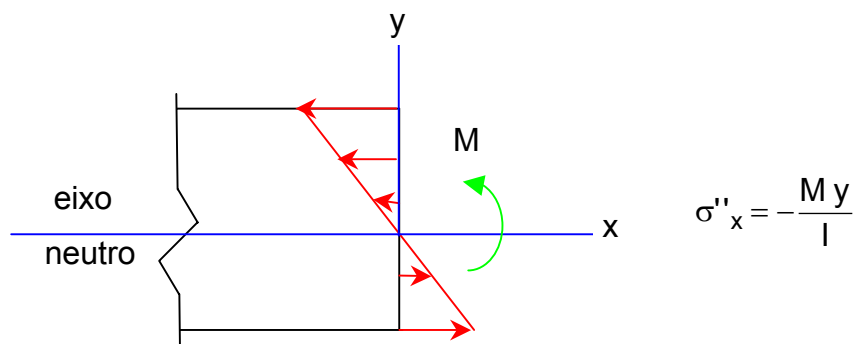
$$M = R_{Ay} \cdot x - W \cdot (x - a) + P \cdot v \quad (8.2)$$

Como a deflexão v é devido ao carregamento W , o momento $P \cdot v$ seria desprezado quando da aplicação do princípio da superposição. Isto poderia ser considerado somente quando a deflexão v for pequena. Portanto, nos casos onde as deformações são pequenas, o princípio da superposição pode ser aplicado separadamente para cada força aplicada na estrutura.

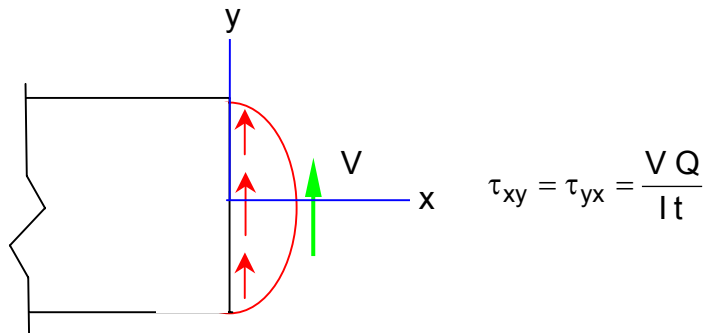
➤ Tensão normal devido à força axial P :



➤ Tensão normal devido ao momento fletor M :



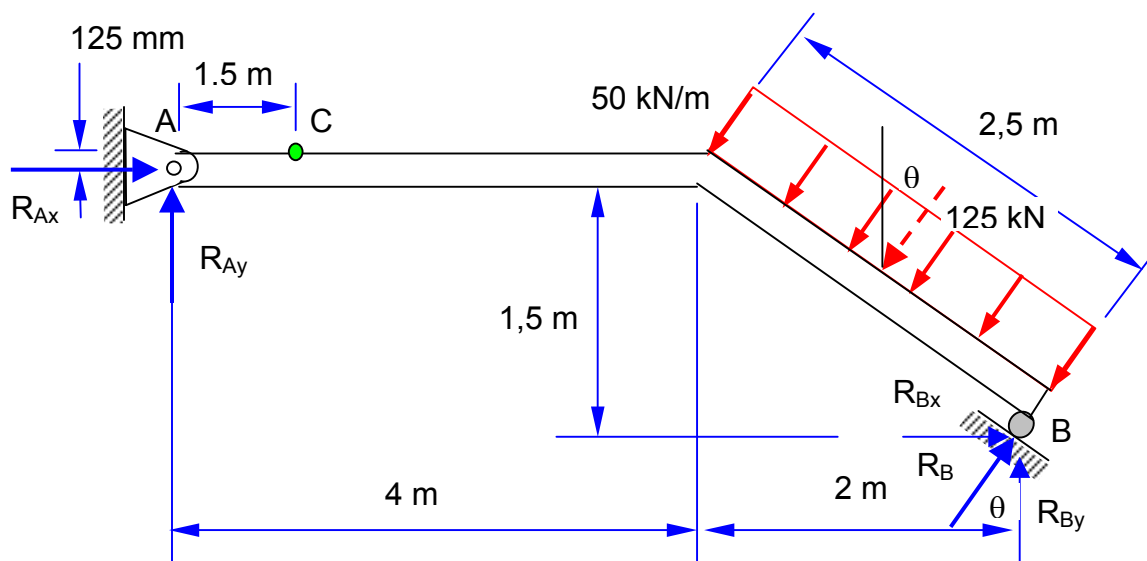
➤ Tensão de cisalhamento devido à força cortante V :



O tensor de tensões é para este caso bidimensional:

$$\begin{bmatrix} \sigma'_x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma''_x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sigma'_x + \sigma''_x) & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & 0 \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

Exemplo 8.1: Calcule o tensor de tensões no ponto C da viga de seção transversal retangular, $b = 50 \text{ mm}$ e $h = 250 \text{ mm}$.



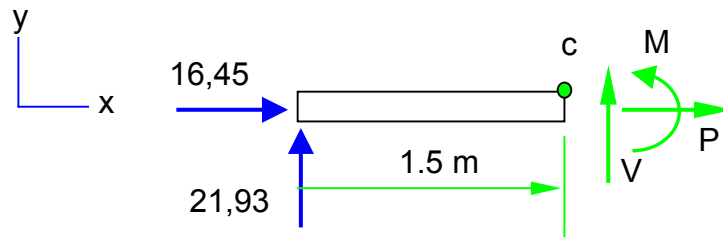
$$\cos \theta = \frac{2}{2,5}, \quad \sin \theta = \frac{1,5}{2,5}$$

a – Cálculo das reações de apoio:

$$\sum M_a = 0, \quad R_B \cdot \frac{2}{2,5} \cdot 6 + R_B \cdot \frac{1,5}{2,5} \cdot 1,5 - 125 \cdot \frac{2}{2,5} \cdot 5 - 125 \cdot \frac{1,5}{2,5} \cdot 0,75 = 0 \Rightarrow R_B = 97,59 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0, \quad 97,59 \cdot \frac{2}{2,5} - 125 \cdot \frac{2}{2,5} + R_{Ay} = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 21,93 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0, \quad R_{Ax} - 125 \cdot \frac{1,5}{2,5} + 97,59 \cdot \frac{1,5}{2,5} = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 16,45 \text{ kN}$$



b – Cálculo dos esforços internos:

$$\rightarrow \sum F_x = 0, 16,45 + P = 0 \Rightarrow P = -16,45 \text{ kN}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0, 21,93 + V = 0 \Rightarrow V = -21,93 \text{ kN}$$

$$\curvearrowright \sum M = 0, -21,93 \cdot 1,5 + M = 0 \Rightarrow M = 32,90 \text{ kN.m}$$

c - Tensão no ponto C devido à força P:

$$\sigma'_x = \frac{P}{A} = -1,316 \text{ MPa}$$

d - Tensão no ponto C devido ao momento M:

$$\sigma''_x = -\frac{M y}{I} = -63,168 \text{ MPa}$$

e - Tensão no ponto C devido ao cortante V:

$$\tau_{xy} = \frac{V Q}{I t} = 0$$

f – Tensor de tensões no ponto C:

$$\begin{bmatrix} -1,316 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -63,168 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -64,48 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (MPa)}$$

8.2 – Flexão oblíqua

Considere uma viga sujeita à um momento inclinado de α com relação aos eixos principais y e z da seção transversal da viga, Fig. 8.1.

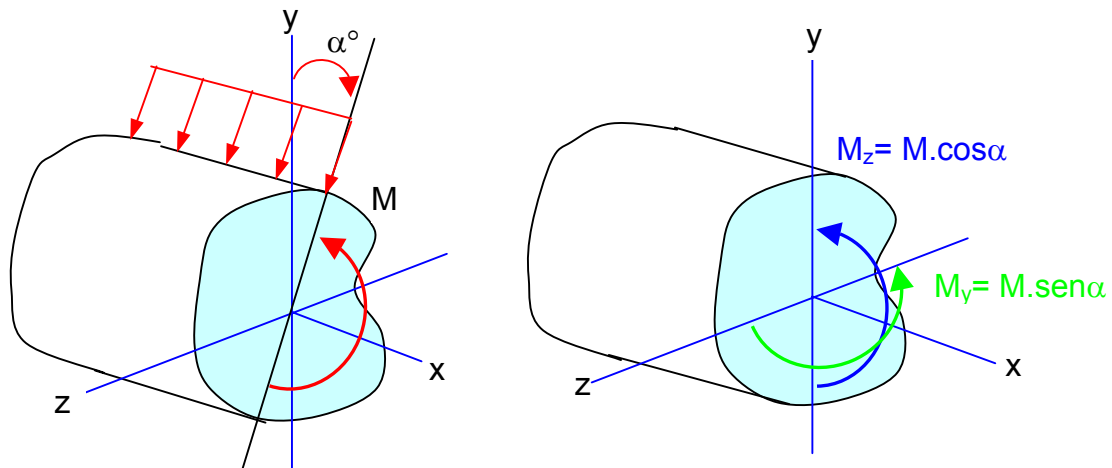


Figura 8.2 - Viga sujeita à um momento inclinado de α

A fórmula da flexão elástica, eq. (6.8), pode ser aplicada para cada componente do momento M_y e M_z , e a tensão combinada dos dois efeitos pode ser obtida pela superposição.

Considere o caso especial de uma seção transversal retangular submetida à um carregamento inclinado, Fig.8.3.

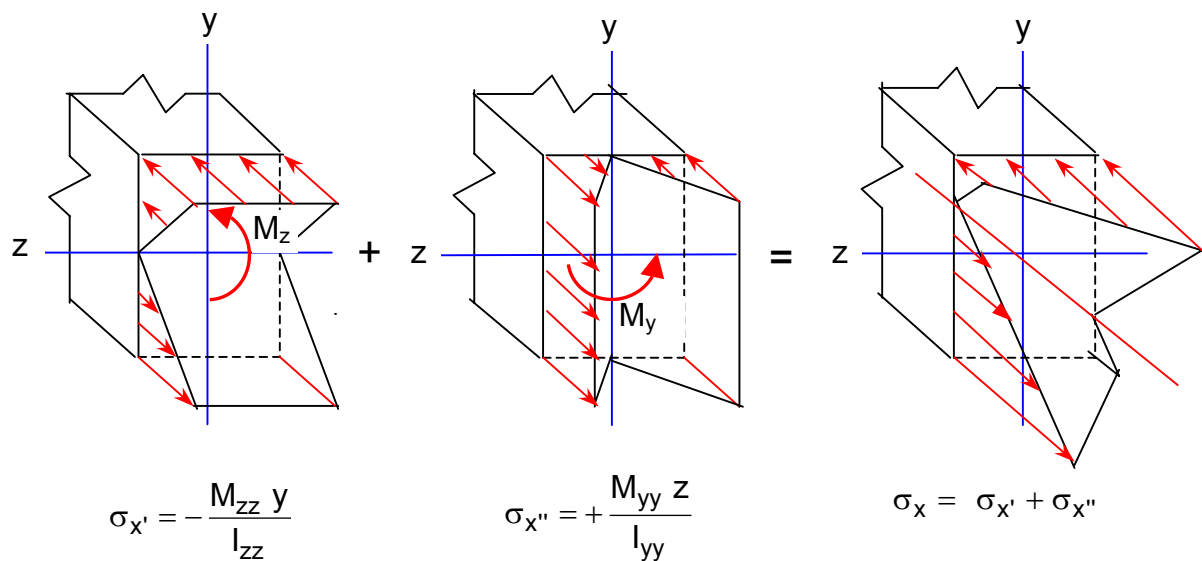


Figura 8.2 – Tensões devido à um carregamento inclinado

A obtenção da posição do eixo neutro é feita fazendo $\sigma_x = 0$:

$$-\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = 0 \quad (8.3)$$

Substituindo as componentes do momento inclinado:

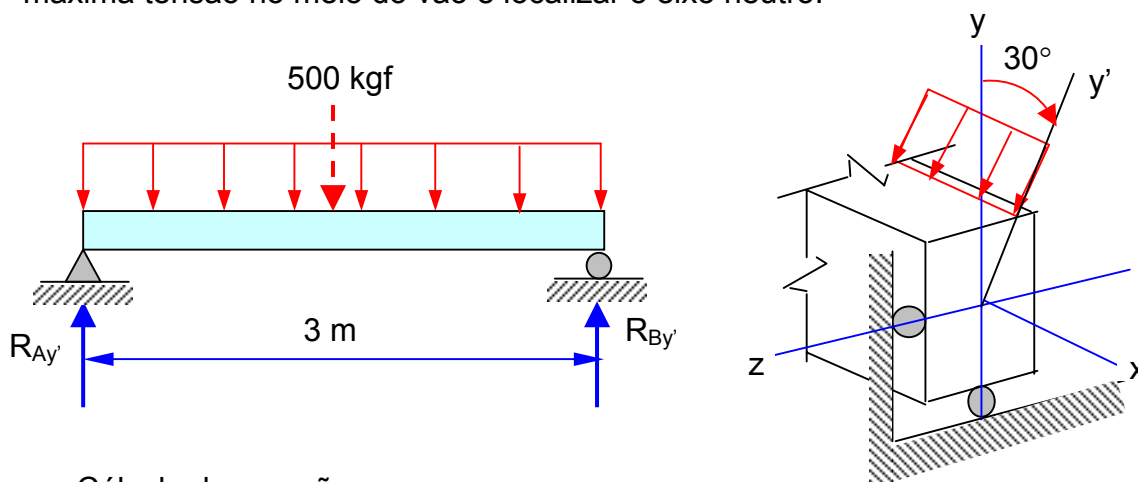
$$-\frac{(M \cos \alpha) y}{I_z} + \frac{(M \sin \alpha) z}{I_y} = 0 \quad (8.4)$$

Assim, a equação que fornece a equação do eixo neutro é da forma:

$$y = z \left(\frac{I_z}{I_y} \right) \operatorname{tg} \alpha \quad (8.5)$$

Conclusão importante: O eixo neutro não é perpendicular ao plano de aplicação do momento, a menos que $I_z = I_y$. Os pontos de máxima tensão de flexão em tração e em compressão se encontram nos vértices da seção transversal.

Exemplo 8.2: A viga de madeira de seção 100 mm x 150 mm mostrada abaixo é usada para suportar uma carga uniformemente distribuída de 500 kgf. A carga aplicada age em um plano que faz um ângulo de 30° com a vertical. Calcular a máxima tensão no meio do vão e localizar o eixo neutro.

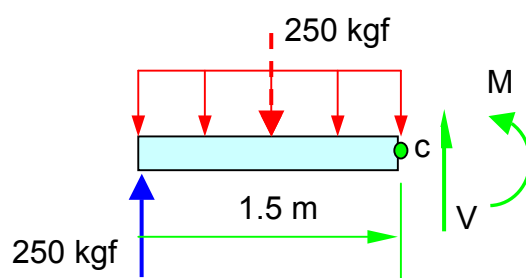


a – Cálculo das reações:

$$\sum M_A = 0, \quad R_{By'} \cdot 3 - 500 \cdot 1,5 = 0 \Rightarrow R_{By'} = 250 \text{ kgf}$$

$$\sum F_{y'} = 0, \quad R_{Ay'} + 250 - 500 = 0 \Rightarrow R_{Ay'} = 250 \text{ kgf}$$

b – Cálculo do momento interno M:



$$\curvearrowleft \sum M_c = 0, \quad -250 \cdot 1,5 + 250 \cdot 0,75 + M = 0 \quad \rightarrow \quad M = 187,5 \text{ kgf.m}$$

c – Cálculo das componentes do momento M:

$$M_z = M \cos 30^\circ = 162,4 \text{ kgf.m}, \quad M_y = M \sin 30^\circ = 93,8 \text{ kgf.m}$$

d – Cálculo dos momentos de inércia de área I_z e I_y :

$$I_z = \frac{100 \cdot 150^3}{12} = 28125000 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{150 \cdot 100^3}{12} = 12500000 \text{ mm}^4$$

e – Cálculo das tensões normais:

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

$$\text{Ponto } (y = -75 \text{ mm}, z = 50 \text{ mm}) \Rightarrow \sigma_x = 0,808 \text{ kgf/mm}^2 \text{ (tração)}$$

$$\text{Ponto } (y = 75 \text{ mm}, z = -50 \text{ mm}) \Rightarrow \sigma_x = -0,808 \text{ kgf/mm}^2 \text{ (compressão)}$$

f – Cálculo da posição do eixo neutro:

$$y = z \left(\frac{I_z}{I_y} \right) \tan \alpha = z \left(\frac{2812,5}{1250} \right) \tan 30^\circ = 1,3 z$$

8.3 – Elementos estruturais com carregamento excêntrico

Considere um elemento estrutural em cuja seção transversal é aplicada uma força excêntrica em relação ao centróide da seção, Fig. 8.4.

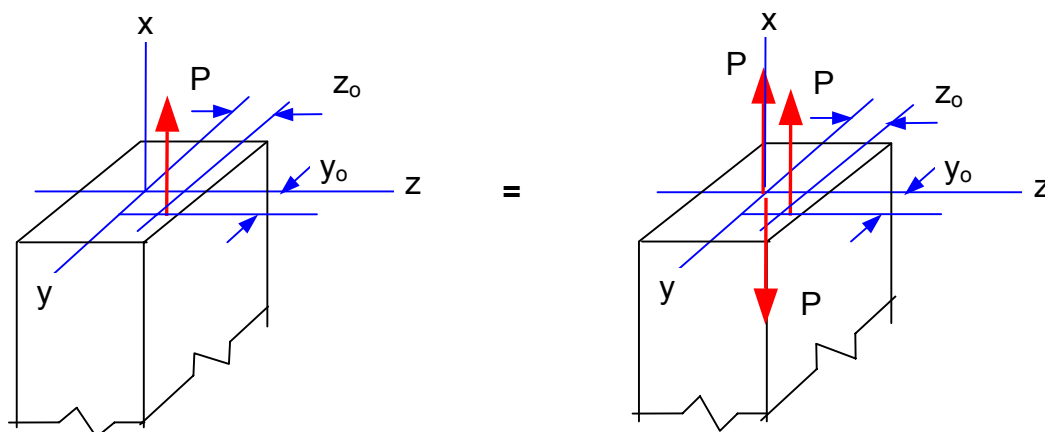


Figura 8.4 – Elemento estrutural solicitado axialmente

Com a superposição dos efeitos, tem-se:

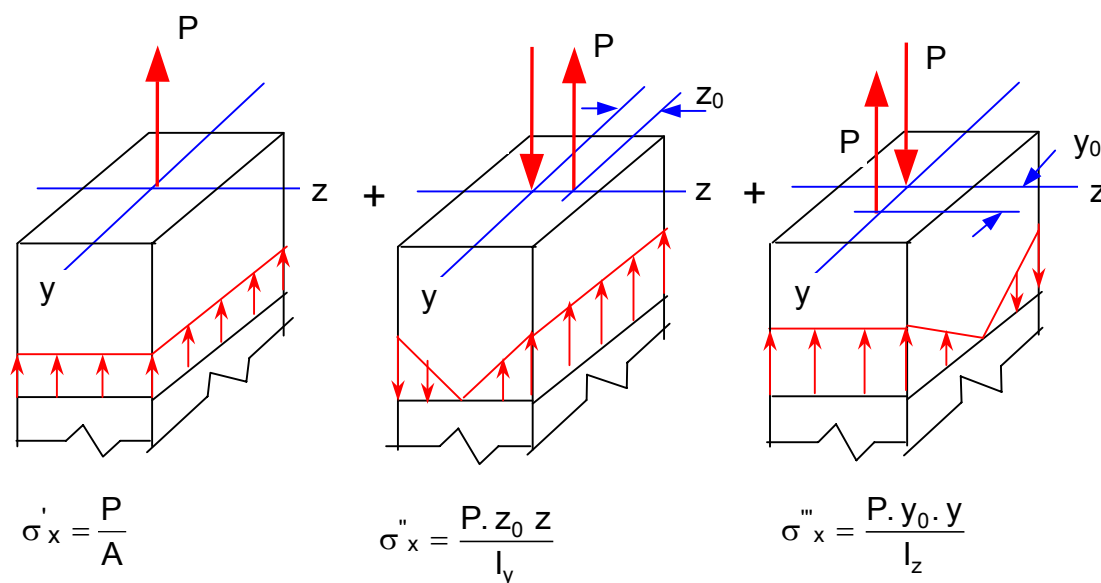
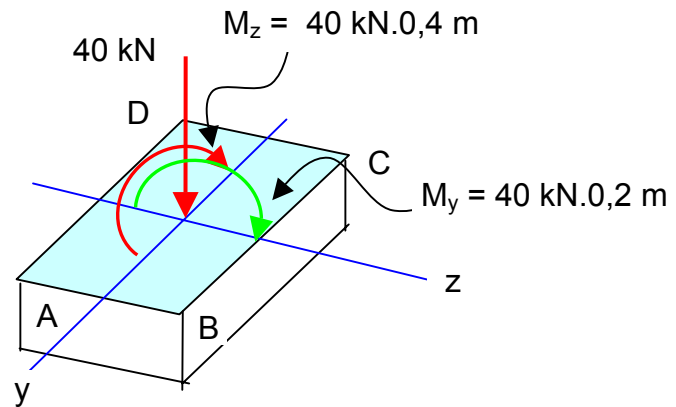
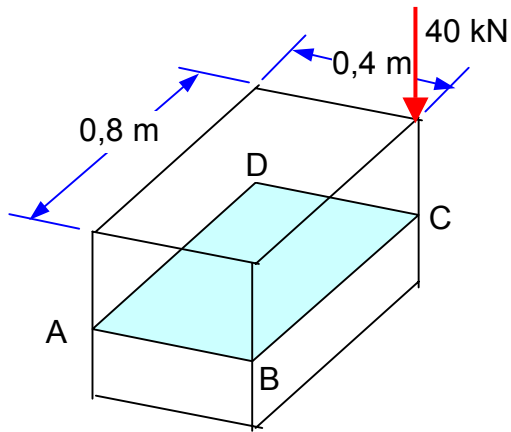


Figura 8.5 – Distribuição das tensões normais

A tensão resultante das tensões normais é da forma:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} + \frac{P \cdot z_0 \cdot z}{I_y} + \frac{P \cdot y_0 \cdot y}{I_z} \quad (8.6)$$

Exemplo 8.3: O bloco retangular de peso desprezível está sujeito a uma força vertical de 40 kN, a qual é aplicada em seus vértices. Determine a distribuição de tensão normal atuando sobre a seção ABCD.



$$\sigma = -\frac{P}{A} + \frac{M_z y}{I_z} - \frac{M_y z}{I_y}$$

Ponto A ($y = 400 \text{ mm}$, $z = -200 \text{ mm}$):

$$\sigma_A = -\frac{40000}{400 \cdot 800} + \frac{40000 \cdot 400 \cdot 400}{400 \cdot 800^3} - \frac{40000 \cdot 200 \cdot (-200)}{800 \cdot 400^3} = 0,625 \text{ MPa}$$

Ponto B ($y = 400 \text{ mm}$, $z = 200 \text{ mm}$):

$$\sigma_B = -\frac{40000}{400 \cdot 800} + \frac{40000 \cdot 400 \cdot 400}{400 \cdot 800^3} - \frac{40000 \cdot 200 \cdot 200}{800 \cdot 400^3} = -0,125 \text{ MPa}$$

Ponto C ($y = -400 \text{ mm}$, $z = 200 \text{ mm}$):

$$\sigma_C = -\frac{40000}{400 \cdot 800} + \frac{40000 \cdot 400 \cdot (-400)}{400 \cdot 800^3} - \frac{40000 \cdot 200 \cdot 200}{800 \cdot 400^3} = -0,8755 \text{ MPa}$$

Ponto D ($y = -400 \text{ mm}$, $z = -200 \text{ mm}$):

$$\sigma_D = -\frac{40000}{400 \cdot 800} + \frac{40000 \cdot 400 \cdot (-400)}{400 \cdot 800^3} - \frac{40000 \cdot 200 \cdot (-200)}{800 \cdot 400^3} = -0,125 \text{ MPa}$$

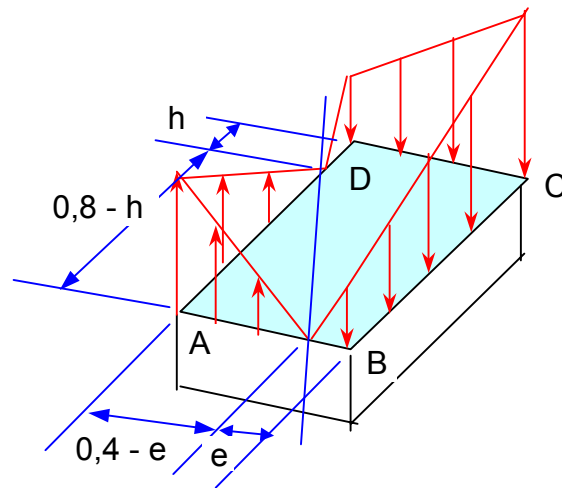
Posição do eixo neutro (tensão nula):

$$\frac{62500}{0,4 - e} = \frac{125000}{e}$$

$$e = 66,7 \text{ mm}$$

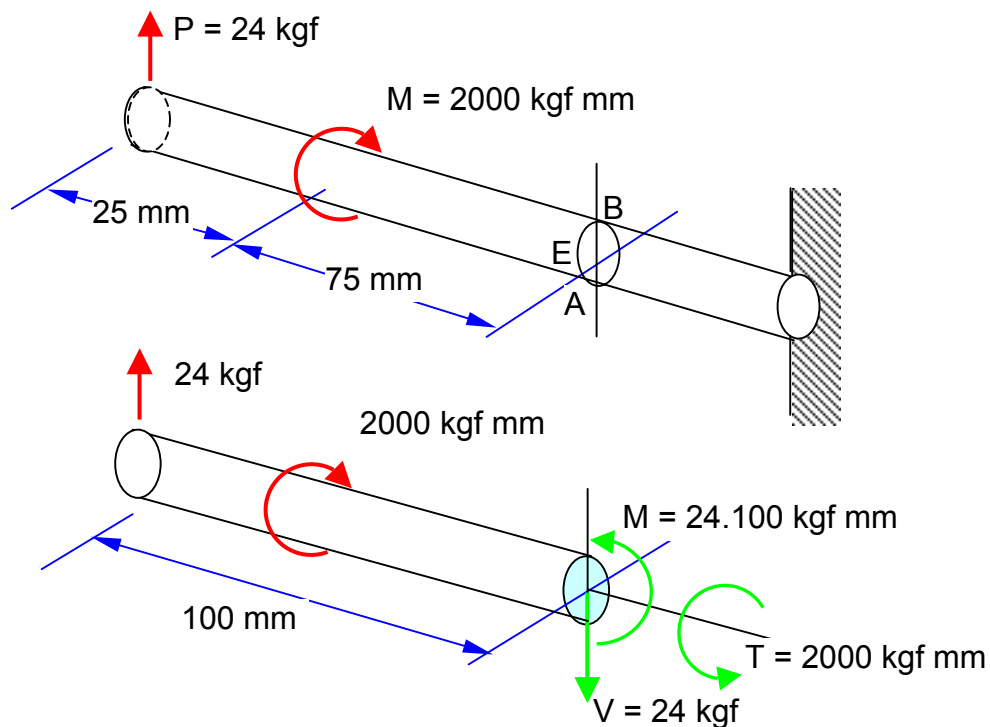
$$\frac{62500}{0,8 - h} = \frac{125000}{h}$$

$$h = 0,133 \text{ m}$$



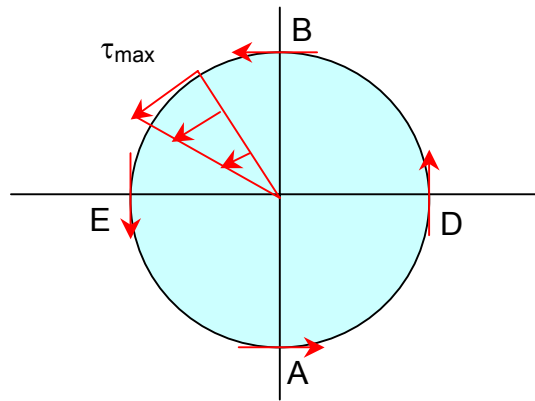
8.4 – Superposição de tensões de cisalhamento

Exemplo 8.3: Achar a máxima tensão de cisalhamento no plano ABDE do eixo de 12 mm de diâmetro, devido as esforços aplicados.



➤ Tensões devido ao momento de torção T:

$$\tau_{\max} = \frac{T c}{J} = \frac{2000 \cdot 6}{\frac{\pi \cdot 6^4}{2}} = 5,89 \text{ kgf/mm}^2$$



➤ Tensões devido ao cortante V:

$$\tau_{\max} = \frac{V Q}{I t}$$

$$Q = \bar{y}' A'$$

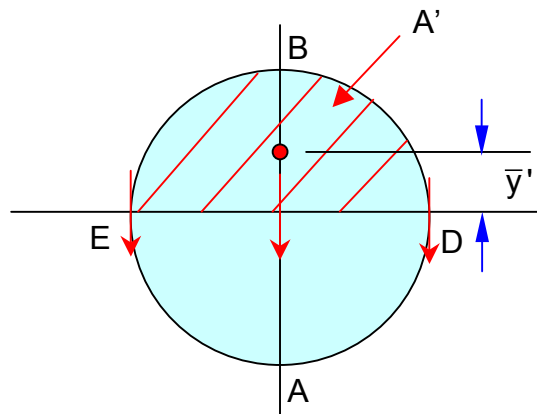
$$Q = \left(\frac{4 c}{3 \pi} \right) \left(\frac{\pi c^2}{2} \right)$$

$$Q = 144 \text{ mm}^3$$

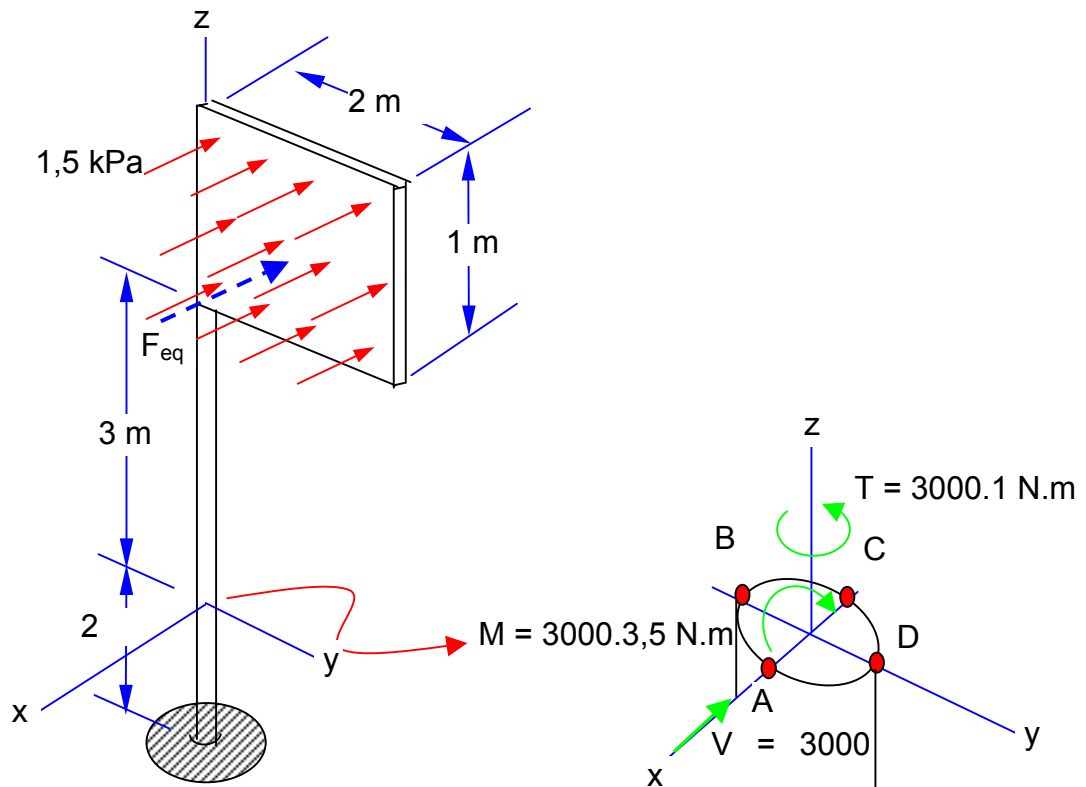
$$I = \frac{\pi c^4}{4} = 1018 \text{ cm}^4$$

$$\tau_{\max} = \frac{24 \cdot 144}{1018 \cdot 12} = 0,28 \text{ kgf / mm}^2$$

$$\tau_{\max} (\text{Ponto E}) = 5,89 + 0,28 = 6,17 \text{ kgf/mm}^2$$



Exemplo 8.4: Uma placa é sujeita à um carregamento uniforme devido ao vento conforme mostrado abaixo. Determine o estado de tensões nos pontos C e D situados na coluna de sustentação da placa de 100 mm de diâmetro.



$$F_{eq} = P \cdot A = 1,5 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 1, \quad F_{eq} = 3000 \text{ N}$$

➤ Tensões normais devido ao momento fletor M:

$$\sigma_z = \frac{M_y x}{I_y}$$

$$\sigma_C = \frac{3000 \cdot 3,5 \cdot 10^3 \cdot (-50)}{\frac{\pi \cdot 50^4}{4}} = -106,95 \text{ MPa}, \quad \sigma_C = -106,95 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = 0$$

➤ Tensões de cisalhamento devido ao momento torçor T:

$$\tau_c = \tau_D = \frac{T c}{J}$$

$$\tau_c = \tau_D = \frac{3000 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 50}{\frac{\pi \cdot 50^4}{2}} = 15,28 \text{ Mpa}$$

➤ Tensões de cisalhamento devido à força cortante V:

$$\tau = \frac{V Q}{I t}$$

Ponto D

$$Q = \bar{y}' \cdot A' = \left(\frac{4 \cdot c}{3 \cdot \pi} \right) \left(\frac{\pi \cdot c^2}{2} \right) = \left(\frac{4 \cdot 50}{3 \cdot \pi} \right) \left(\frac{\pi \cdot 50^2}{2} \right) = 83333,3 \text{ mm}^3$$

$$I = \frac{\pi \cdot c^4}{4} = \frac{\pi \cdot 50^4}{4} = 4908738,5 \text{ mm}^4$$

$$\tau_D = \frac{3000 \cdot 83333,3}{4908738,5 \cdot 100} = 0,51 \text{ MPa}$$

Ponto C

$$Q = 0 \Rightarrow \tau_C = 0$$

Ponto C:

$$\sigma_C = -106,95 \text{ Mpa}, \tau_C = 15,28 \text{ MPa}$$

Ponto D:

$$\sigma_D = 0 \text{ Mpa}, \tau_D = 15,28 + 0,51 = 15,79 \text{ Mpa}$$

9 – TRANSFORMAÇÃO DE TENSÕES

9.1 – Introdução

Considere o estado triaxial de tensões em um ponto obtido no sistema de eixos x , y e z , Figura 9.1. Estes eixos, por conveniência, são normalmente adotados sendo paralelos às cargas externas às quais estão submetidas as estruturas. No entanto, é necessário conhecer o estado de tensão deste ponto num sistema de eixos qualquer, de forma a se conhecer as máximas tensões atuantes, normal e cisalhante.

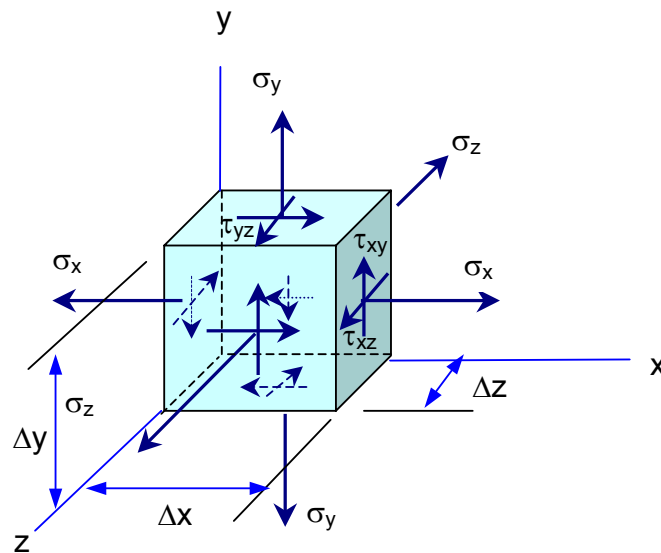


Figura 9.1 – Estado triaxial de tensões em um elemento infinitesimal

Por conveniência e para a facilidade do entendimento, será inicialmente tratado a transformação de tensão para o estado plano de tensões, para finalmente ser tratado o estado triaxial de tensões. Dessa forma, considere o estado plano de tensões obtido em dois sistema de eixos diferentes:

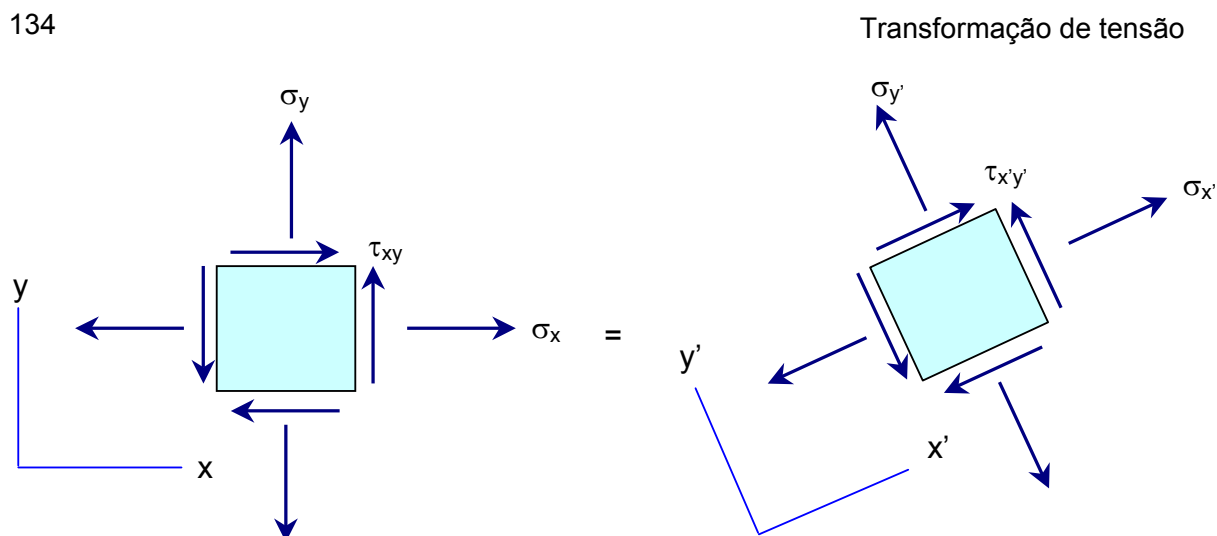


Figura 9.2 – Estado plano de tensões em dois sistema de eixos diferentes

Os estados de tensão mostrados na Figura 9.2 representam o mesmo estado de sollicitação em um ponto. O que é equivalente à dizer que, as forças F_x e F_y são as componentes de uma força resultante F nas direções x e y , enquanto que, as forças $F_{x'}$ e $F_{y'}$ são as componentes da mesma força resultante F nas direções x' e y' .

A relação entre as tensões medidas nos diferentes sistema de eixos é feita seccionando-se um elemento infinitesimal de forma que a face seccionada seja paralela aos eixos x' ou y' , Figura 9.3. Sobre o elemento resultante é imposto o equilíbrio de forças nas direções x' e y' .

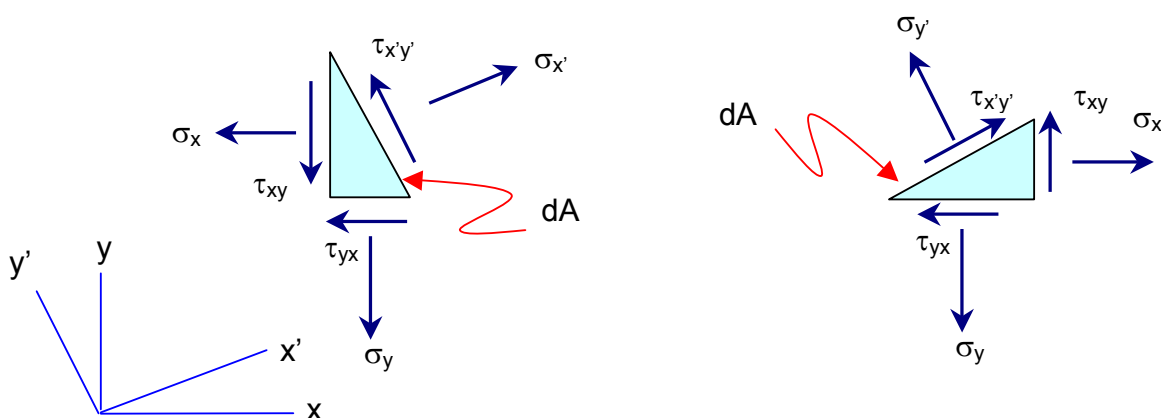
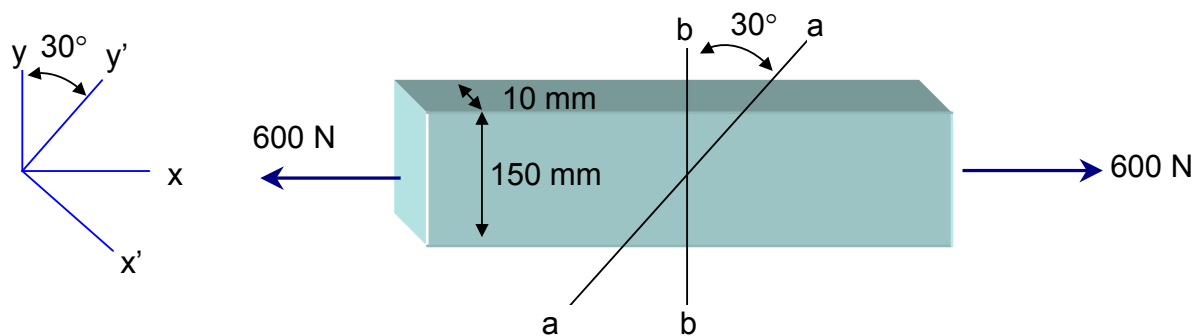


Figura 9.3 – Relação entre as tensões nos dois sistema de eixos diferentes

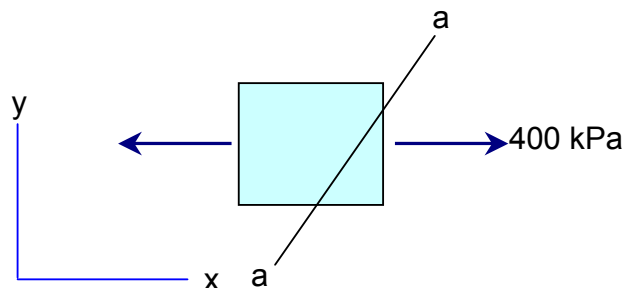
Através do exemplo numérico abaixo é possível identificar a relação entre as tensões obtidas em diferentes sistema de eixos.

Exemplo 9.1 – Considere uma barra de aço de 150 mm de largura e 10 mm de espessura sendo solicitada por uma força axial de 600 N. Determine as componentes das tensões atuantes sobre o plano definido pela seção a-a.

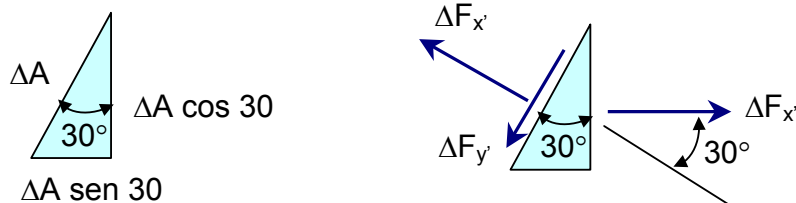


No sistema de eixos x-y, a única tensão atuante no plano definido pela seção b-b é a tensão normal na direção x:

$$\sigma_x = \frac{600 \text{ N}}{150 \text{ mm} \cdot 10 \text{ mm}} = 0,4 \text{ MPa} = 400 \text{ kPa}$$



Se considerarmos que a seção seccionada tem área de seção transversal ΔA , as seções paralelas aos eixos x e y são $\Delta A \sin 30$ e $\Delta A \cos 30$, respectivamente. Utilizando estas áreas, o diagrama de corpo livre do elemento infinitesimal seccionado é:



onde $\Delta F_x = 400 \text{ kPa} (\Delta A \cos 30) = 346,4 \Delta A \text{ kN}$.

Impondo o equilíbrio de forças nas direções x' e y' , as componentes $\Delta F_{x'}$ e $\Delta F_{y'}$ são:

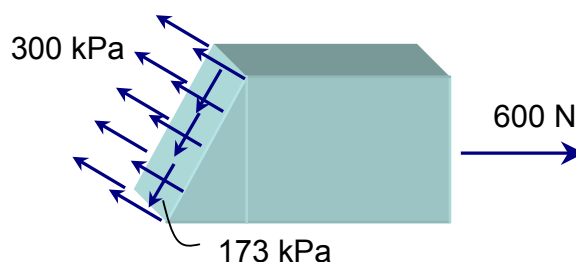
$$\Delta F_{x'} = 346,4 \Delta A \cos 30 = 300 \Delta A$$

$$\Delta F_{y'} = 346,4 \Delta A \sin 30 = 173 \Delta A$$

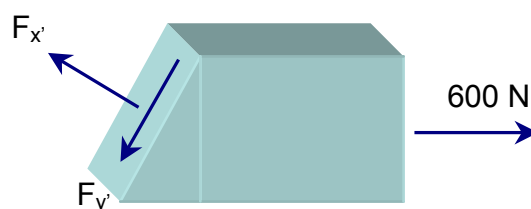
Assim, as tensões normal e de cisalhamento à seção a-a são:

$$\sigma_{x'} = \frac{\Delta F_{x'}}{\Delta A} = 300 \text{ kPa}$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{\Delta F_{y'}}{\Delta A} = 173 \text{ kPa}$$



Estas mesmas tensões podem ser obtidas de uma outra forma, considerando a barra seccionada da seguinte forma:



Impondo o equilíbrio de forças no diagrama de corpo livre acima, as forças atuantes na seção a-a são:

$$F_{x'} = 600 \cos 30 = 519,6 \text{ N}$$

$$F_{y'} = 600 \sin 30 = 300 \text{ N}$$

A área da seção a-a vale:

$$A_{a-a} = \frac{150 \text{ mm} \cdot 10 \text{ mm}}{\cos 30} = 1732,05 \text{ mm}^2$$

Assim, as tensões normal e de cisalhamento à seção a-a são:

$$\sigma_{x'} = \frac{F_{x'}}{A_{a-a}} = \frac{519,6 \text{ N}}{1732 \text{ mm}^2} = 300 \text{ kPa}$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{F_{y'}}{A_{a-a}} = \frac{300 \text{ N}}{1732 \text{ mm}^2} = 173 \text{ kPa}$$

9.2 – Equações gerais para transformação de tensão plana

Uma vez determinado as tensões normais σ_x e σ_y , e a tensão de cisalhamento τ_{xy} num ponto de um corpo solicitado no plano x-y, é possível determinar as tensões normais e de cisalhamento em qualquer plano inclinado $x'-y'$.

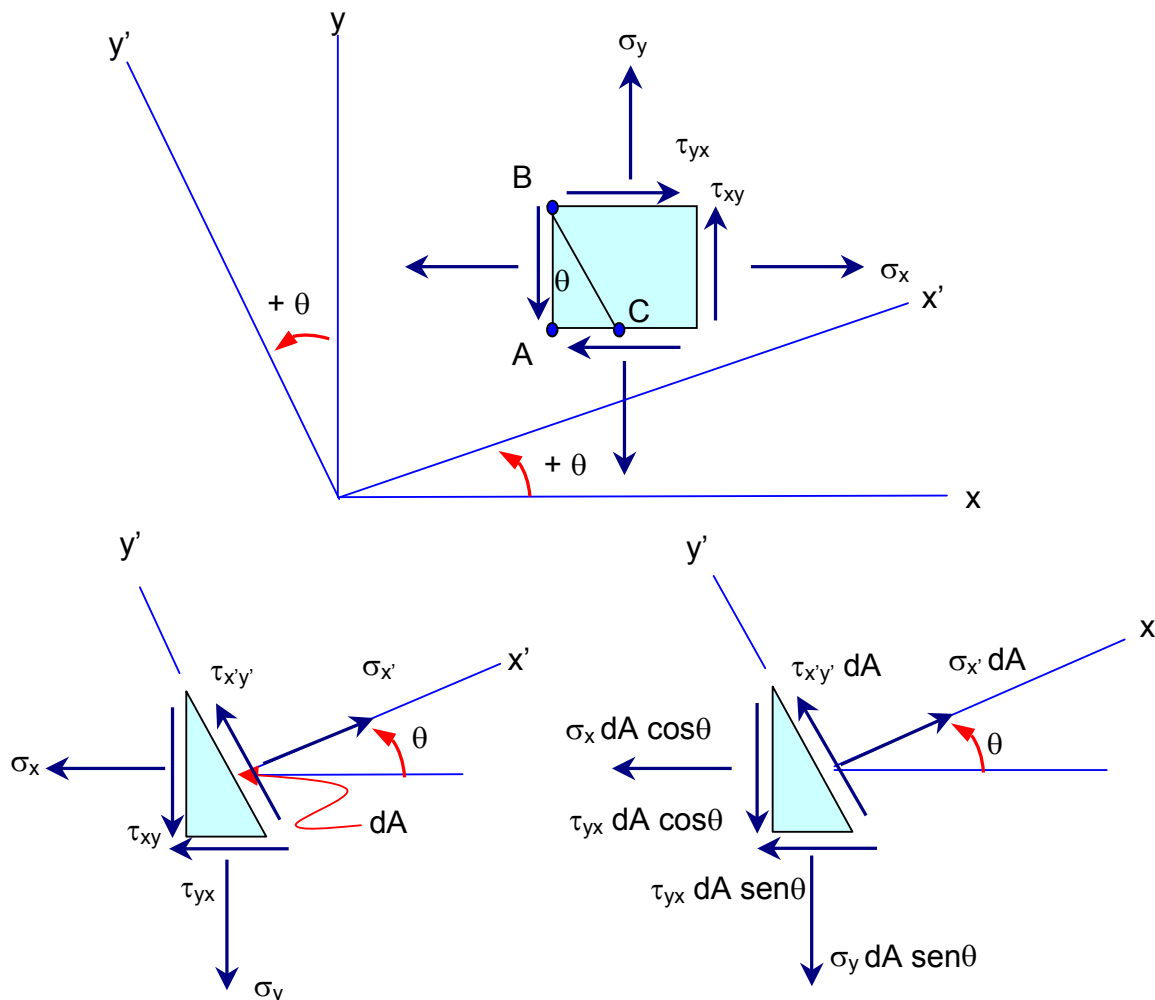


Figura 9.4 – Tensões e forças em diferentes eixos em um elemento seccionado

Impondo o equilíbrio de forças na direção x' , temos:

$$\rightarrow \sum F_{x'} = 0, \quad \begin{aligned} &\sigma_{x'} dA - \sigma_x dA \cos \theta \cos \theta - \tau_{xy} dA \cos \theta \sin \theta - \\ &\sigma_y dA \sin \theta \sin \theta - \tau_{xy} dA \sin \theta \cos \theta = 0 \end{aligned} \quad (9.1)$$

Simplificando a eq. (9.1):

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2 \tau_{xy} \cos \theta \sin \theta \quad (9.2)$$

Sabendo-se que:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad (9.3)$$

$$1 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$$

Trabalhando com as eqs. (9.3), tem-se:

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \\ \sin^2 \theta &= \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \end{aligned} \quad (9.4)$$

Substituindo a eqs. (9.4) e a expressão de $\sin 2\theta$ da eq. (9.3) na eq. (9.2), temos;

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \sigma_y \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (9.5)$$

Reagrupando a eq. (9.5):

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (9.6)$$

$$\uparrow \sum F_{y'} = 0, \quad \begin{aligned} &\tau_{x'y'} dA + \sigma_x dA \cos \theta \sin \theta - \tau_{xy} dA \cos \theta \cos \theta - \\ &\sigma_y dA \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} dA \sin \theta \sin \theta = 0 \end{aligned} \quad (9.7)$$

Simplificando a eq. (9.7):

$$\tau_{x'y'} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (9.8)$$

As eqs (9.6) e (9.8) são as equações de transformação de tensão de um sistema de coordenadas a outro.

9.3 – Círculo de tensões de Mohr

Sejam as equações de transformação de tensão (9.6) e (9.8) onde a eq. (9.6) é colocada da seguinte forma:

$$\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (9.9)$$

Elevando ao quadrado as eqs. (9.8) e (9.9) e somando-as, tem-se:

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (9.10)$$

A eq. (10) pode ser colocada de maneira mais compacta:

$$(\sigma_{x'} - \sigma_m)^2 + \tau_{xy}^2 = R^2 \quad (9.11)$$

A eq. (9.11) é a equação de um círculo de raio:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (9.12)$$

e centro:

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \\ \tau_m &= 0 \end{aligned} \quad (9.13)$$

O círculo construído desta maneira é chamado círculo de tensões de Mohr, onde a ordenada de um ponto sobre o círculo é a tensão de cisalhamento τ e a abcissa é a tensão normal σ .

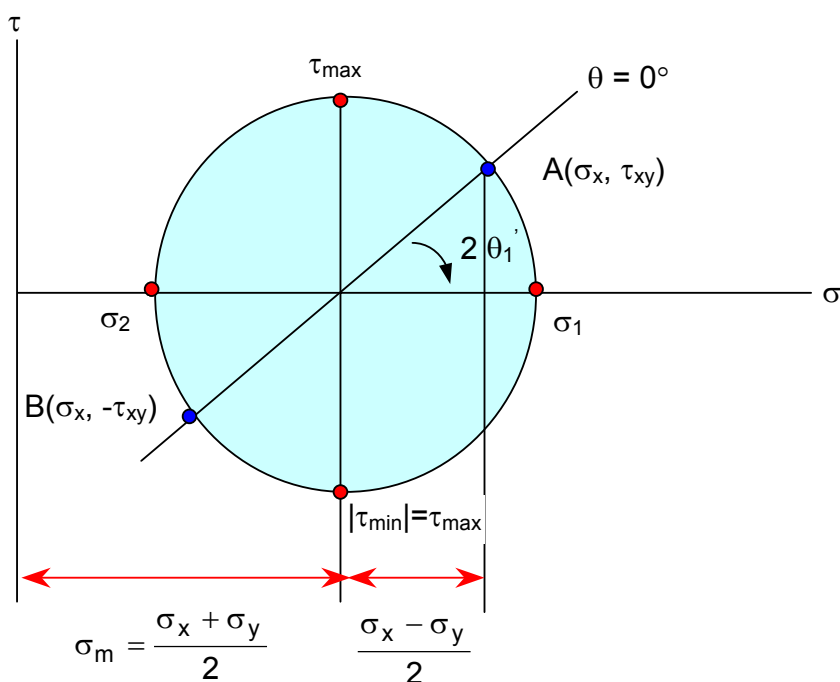


Figura 9.5 – Círculo de tensões de Mohr

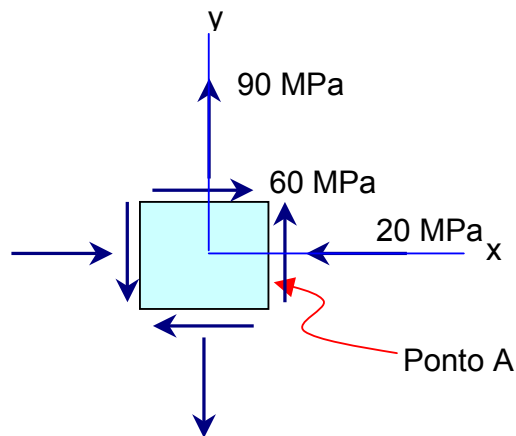
Conclusões importantes:

- A maior tensão normal possível é σ_1 e a menor é σ_2 . Nestes planos não existem tensões de cisalhamento.
- A maior tensão de cisalhamento $\tau_{\max}$ é igual ao raio do círculo e uma tensão normal de $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ atua em cada um dos planos de máxima e mínima tensão de cisalhamento.
- Se $\sigma_1 = \sigma_2$, o círculo de Mohr se degenera em um ponto, e não se desenvolvem tensões de cisalhamento no plano xy .
- Se $\sigma_x + \sigma_y = 0$, o centro do círculo de Mohr coincide com a origem das coordenadas $\sigma - \tau$, e existe o estado de cisalhamento puro.

- Se soma das tensões normais em quaisquer dos planos mutuamente perpendiculares é constante: $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \text{constante}$.
- Os planos de tensão máxima ou mínima formam ângulos de 45° com os planos das tensões principais.

9.3 – Construção do círculo de tensões de Mohr

Exemplo 9.2: Com o estado de tensão no ponto apresentado abaixo, determine as tensões principais e suas orientações e a máxima tensão de cisalhamento e sua orientação.



As tensões no sistema de eixos x-y são:

$$\sigma_x = -20 \text{ MPa} , \sigma_y = 90 \text{ MPa} , \tau_{xy} = 60 \text{ MPa}$$

Procedimento de análise:

a – Determinar o centro (σ_m, τ_m) do círculo de tensões de Mohr:

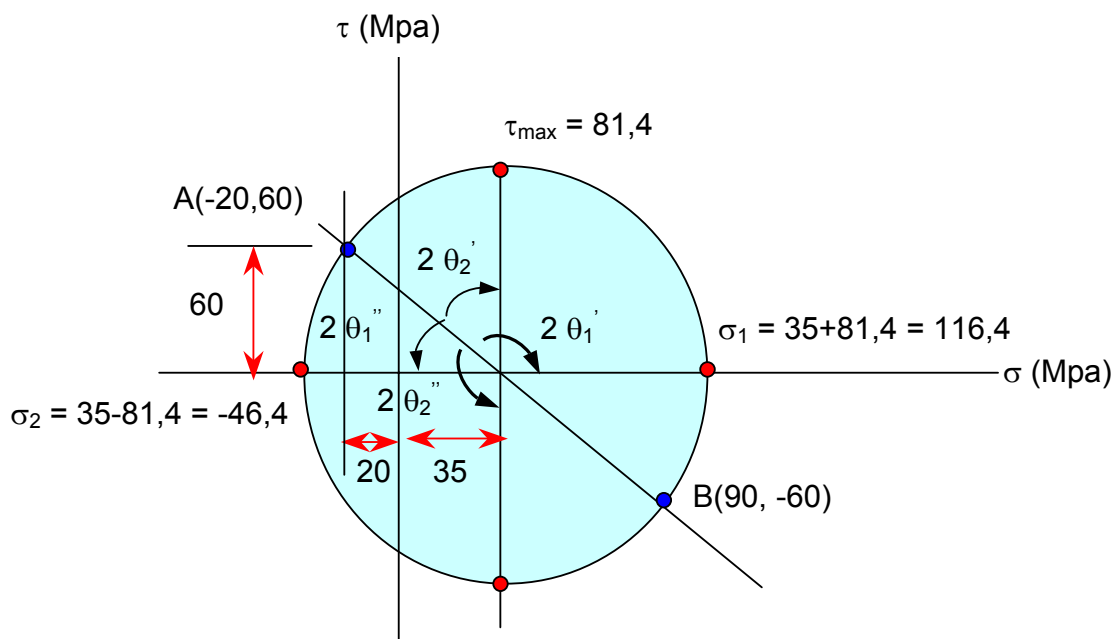
$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-20 + 90}{2} = 35 \text{ MPa}$$

$$\tau_m = 0$$

b – Determinar o raio R do círculo de tensões de Mohr:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{-20 - 90}{2}\right)^2 + 60^2} = 81,4 \text{ MPa}$$

c – Localizar o ponto A(-20,60) no círculo de tensões de Mohr:



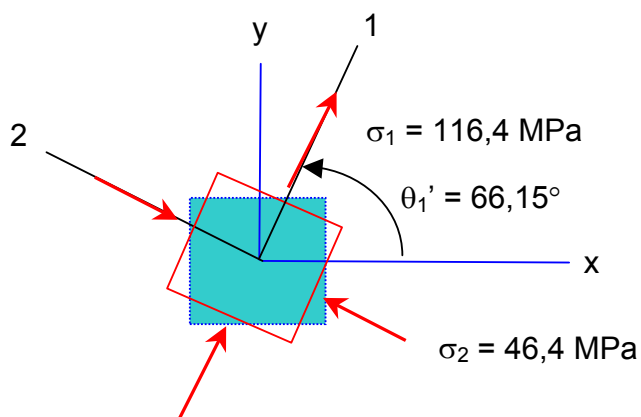
d – Calcular as tensões principais (maior e menor tensões normais):

$$\sigma_1 = 35 + 81,4 = 116,4 \text{ MPa} \quad , \quad \sigma_2 = 35 - 81,4 = -46,4 \text{ MPa}$$

e – Determinar a orientação das tensões principais.

$$2\theta_1'' = \arctan 2 \left(\frac{60}{20 + 35} \right) = 47,7^\circ \Rightarrow \theta_1'' = 23,85^\circ$$

$$2\theta_1'' + 2\theta_1' = 180^\circ \Rightarrow \theta_1' = 66,15^\circ$$

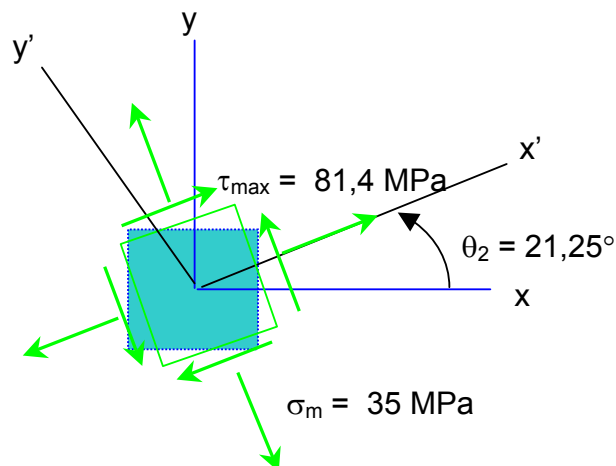


f – Tensão máxima de cisalhamento:

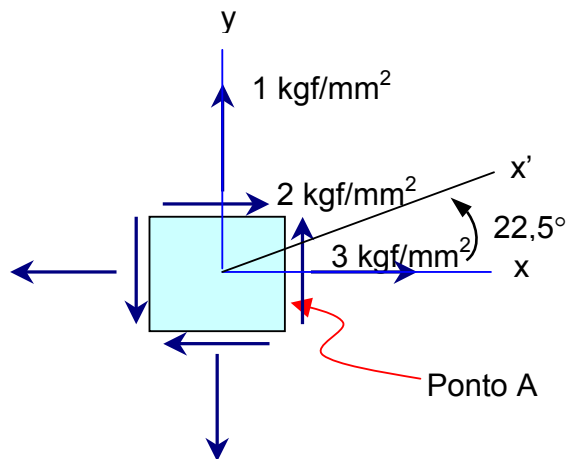
$$\tau_{\max} = R = 81,4 \text{ MPa}$$

g – Orientação da tensão máxima de cisalhamento:

$$2\theta_1'' + 2\theta_2' = 90^\circ \Rightarrow \theta_2' = 21,15^\circ$$



Exemplo 9.3: Para o estado de tensão abaixo, achar a) as tensões normais e de cisalhamento para $\theta = 22,5^\circ$, b) as tensões principais e suas orientações, c) as tensões máxima e mínima de cisalhamento com as tensões associadas e suas orientações.



As tensões no sistema de coordenadas x,y são:

$$\sigma_x = 3 \text{ kgf/mm}^2, \sigma_y = 1 \text{ kgf/mm}^2, \tau_{xy} = 2 \text{ kgf/mm}^2$$

Procedimento de análise:

a – Determinar o centro (σ_m , τ_m) do círculo de tensões de Mohr:

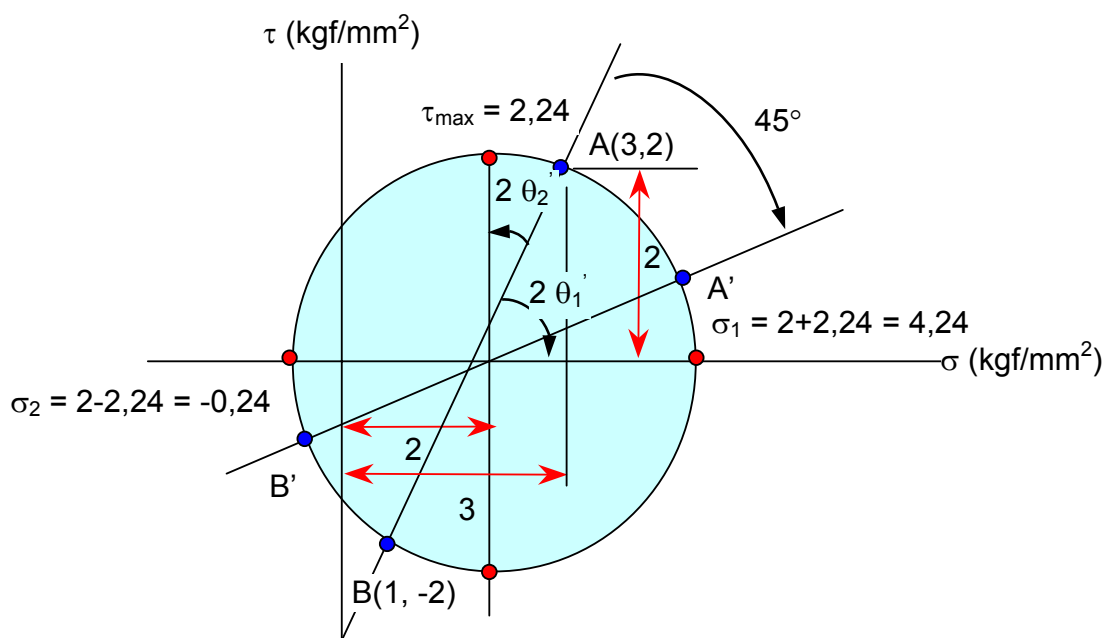
$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{3+1}{2} = 2 \text{ kgf/mm}^2$$

$$\tau_m = 0$$

b – Determinar o raio R do círculo de tensões de Mohr:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{3-1}{2}\right)^2 + 2^2} = 2,24 \text{ kgf/mm}^2$$

c – Localizar o ponto A de coordenadas (3,2) no círculo de tensões de Mohr:



No ponto A', representando o estado de tensão na face cuja normal é paralela ao eixo x', temos:

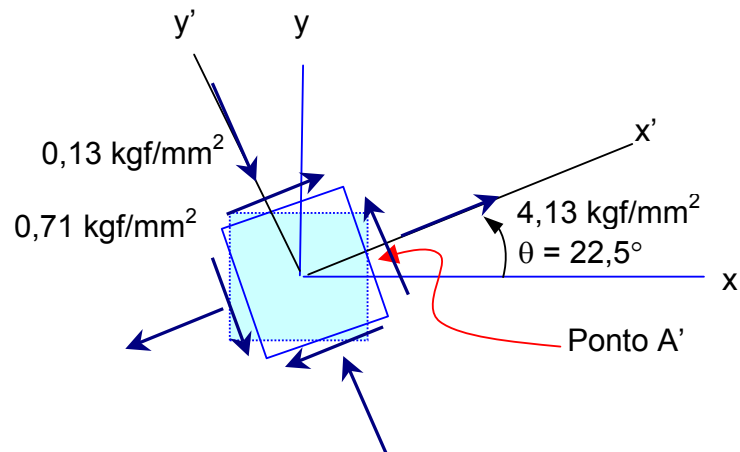
$$2\theta_1' = \arctan\left(\frac{2}{3-2}\right) = 63,4$$

$$\sigma_{x'} = 2 + 2,24 \cos(63,4 - 45) \quad , \quad \sigma_{x'} = 4,13 \text{ kgf/mm}^2$$

$$\tau_{x'y'} = 2,24 \sin(63,4 - 45) \quad , \quad \tau_{x'y'} = 0,71 \text{ kgf/mm}^2$$

e no ponto B', representando o estado de tensão na face cuja normal é paralela ao eixo y' , temos:

$$\sigma_{y'} = 2 - 2,24 \cos(63,4 - 45) \Rightarrow \sigma_{y'} = -0,13 \text{ kgf/mm}^2$$



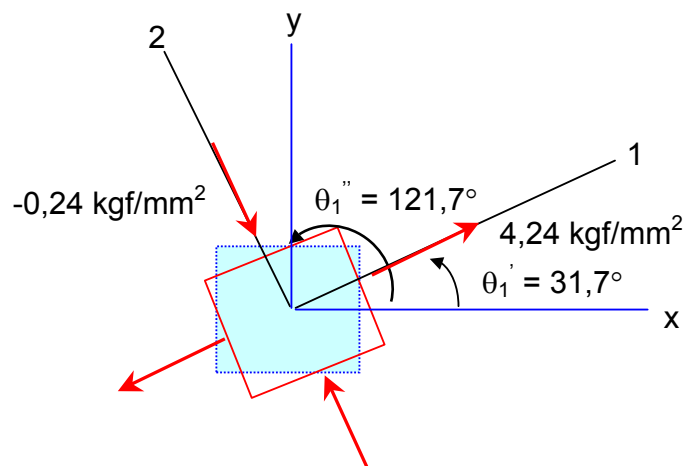
d – Tensões principais:

$$\sigma_1 = 4,24 \text{ kgf/mm}^2 \text{ (tração)} , \quad \sigma_2 = -0,24 \text{ kgf/mm}^2 \text{ (compressão)}$$

$$\operatorname{tg} 2\theta_1 = \frac{2}{1} = 2$$

$$2\theta_1' = 63,4^\circ \Rightarrow \theta_1' = 31,7^\circ$$

$$2\theta_1'' = 2\theta_1' + 180^\circ \Rightarrow \theta_1'' = 121,7^\circ$$

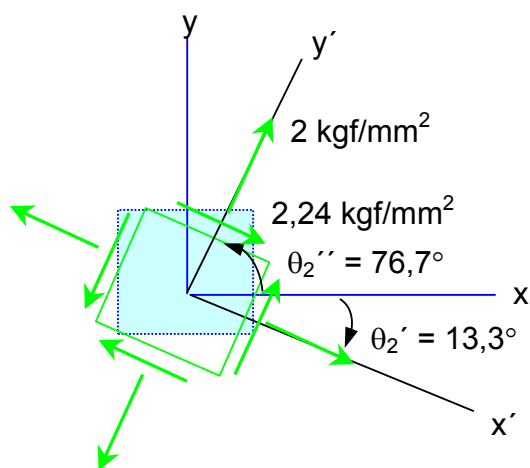


e – Máxima tensão de cisalhamento:

$$\tau_{\max} = R = 2,24 \text{ kgf/mm}^2$$

$$2\theta_2' + 2\theta_1' = 90^\circ \Rightarrow \theta_2' = 13,3^\circ$$

$$2\theta_2'' = 2\theta_2' + 180^\circ \Rightarrow \theta_2'' = 76,7^\circ$$



Observe que: $\theta_1' - \theta_2' = 31,7 - (-13,3) = 45^\circ$ e $\theta_1'' - \theta_2'' = 121,7 - 76,7 = 45^\circ$

9.4 – Importante transformação de tensão

Seja um elemento sujeito à um estado de tensão de cisalhamento puro (caso de um eixo em torção).

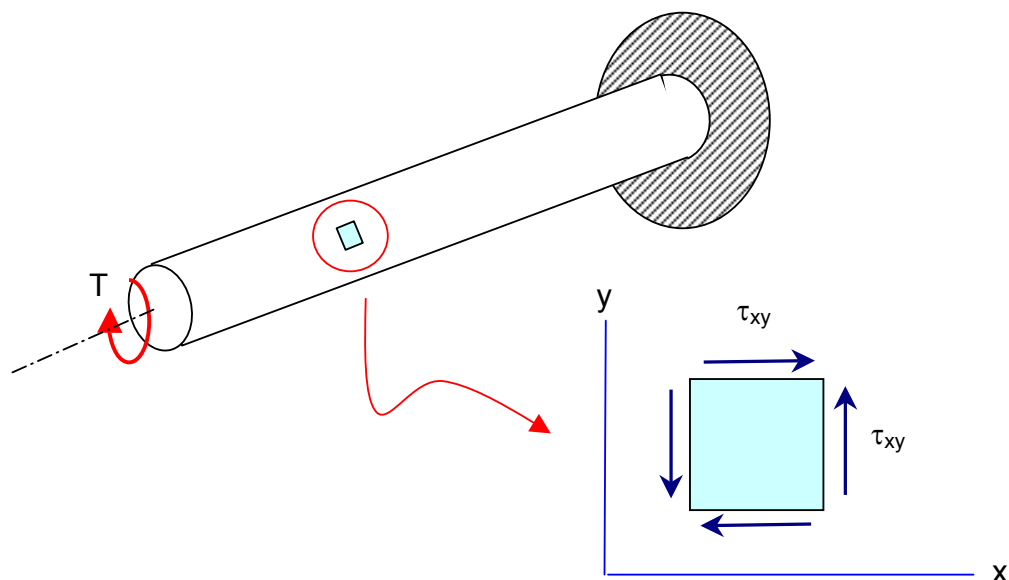


Figura 9.6 – Estado de tensões de um elemento infinitesimal num eixo em torção pura

Para este caso, tem-se que $\sigma_x = 0$ e $\sigma_y = 0$. Logo o centro do círculo de Mohr está na origem do sistema de coordenadas σ - τ , e o raio do círculo é $R = \tau_{xy}$.

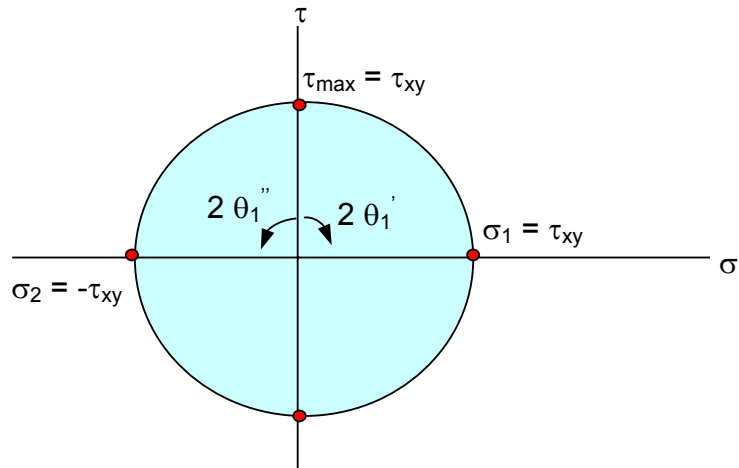


Figura 9.7 – Círculo de tensões de Mohr em um ponto de um eixo em torção pura

As tensões principais são neste caso:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= +\tau_{xy} \\ \sigma_2 &= -\tau_{xy}\end{aligned}\tag{9.14}$$

As orientações das tensões principais são:

$$\operatorname{tg} 2 \theta_1 = \infty \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \theta_1' = 45^\circ & (\text{tração}) \\ \theta_1'' = 135^\circ = -45^\circ & (\text{compressão}) \end{cases}\tag{9.15}$$

Assim, a representação gráfica das tensões principais e suas orientações é da seguinte forma, Fig. 9.8:

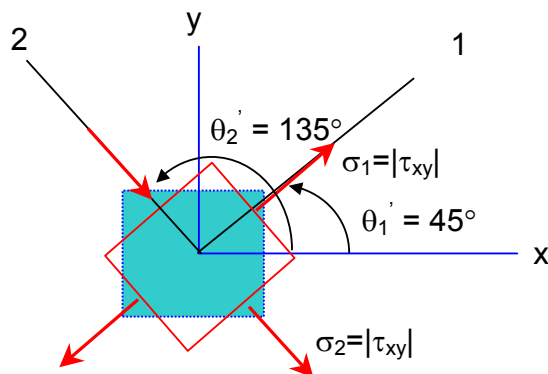


Figura 9.8 – Representação gráfica das tensões principais em um ponto de um eixo em torção pura

9.6 – Tensões principais para o estado geral de tensões

Considere um elemento infinitesimal sob um estado de tensão tridimensional e um elemento infinitesimal tetraédrico sobre o qual atua uma tensão principal σ_n no plano oblíquo ABC, paralela ao vetor normal unitário, Fig. 9.9.

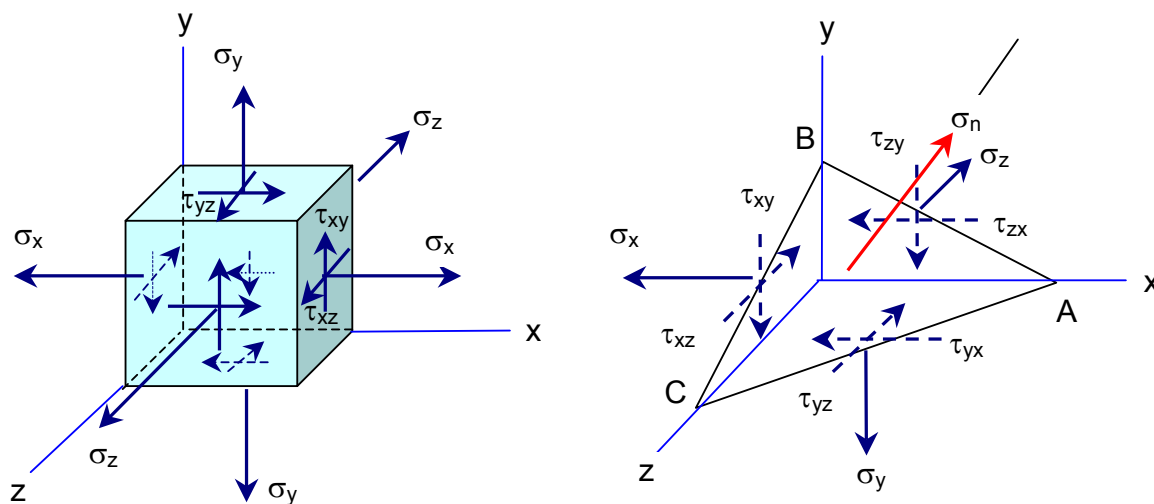


Figura 9.9 – Tensão principal σ_n num plano oblíquo de um elemento infinitesimal tetraédrico

O vetor normal unitário é identificado pelos seus cossenos diretores l , m e n , onde $\cos \alpha = l$, $\cos \beta = m$, $\cos \gamma = n$. Da Fig. 9.10, nota-se que:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (9.16)$$

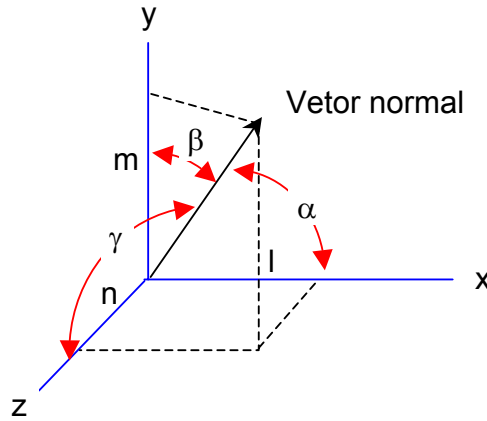


Figura 9.10 – Vetor normal e seus cossenos diretores

O plano oblíquo tem área dA e as projeções desta área nas direções x , y e z são $dA.l$, $dA.m$ e $dA.n$. Impondo o equilíbrio estático nas direções x , y e z , temos:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= (\sigma_n dA) l - \sigma_x dA l - \tau_{xy} dA m - \tau_{xz} dA n = 0 \\ \sum F_y &= (\sigma_n dA) m - \sigma_y dA m - \tau_{yz} dA n - \tau_{xy} dA l = 0 \\ \sum F_z &= (\sigma_n dA) n - \sigma_z dA n - \tau_{xz} dA l - \tau_{yz} dA m = 0 \end{aligned} \quad (9.17)$$

Simplificando e reagrupando a eq. (9.17) em forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9.18)$$

Como visto anteriormente, $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, os cossenos diretores são diferentes de zero. Logo, o sistema terá uma solução não trivial quando o determinante da matriz de coeficientes de l , m e n for nulo.

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n \end{vmatrix} = 0 \quad (9.19)$$

A expansão do determinante fornece um polinômio característico do tipo:

$$\sigma_n^3 - I_\sigma \sigma_n^2 + II_\sigma \sigma_n - III_\sigma = 0 \quad (9.20)$$

onde:

$$I_\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$II_\sigma = (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \quad (9.21)$$

$$III_\sigma = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{xz} - (\sigma_x \tau_{yz}^2 + \sigma_y \tau_{xz}^2 + \sigma_z \tau_{xy}^2)$$

As eqs (9.20) e (9.21) são invariantes, independentemente do plano oblíquo que é tomado no tetraedro. Logo, as raízes do polinômio característico já são as tensões principais.

9.7 – Círculo de Mohr para o estado geral de tensões

Qualquer estado de tensão tridimensional pode ser transformado em três tensões principais que atuam em três direções ortogonais, Fig. 9.11.

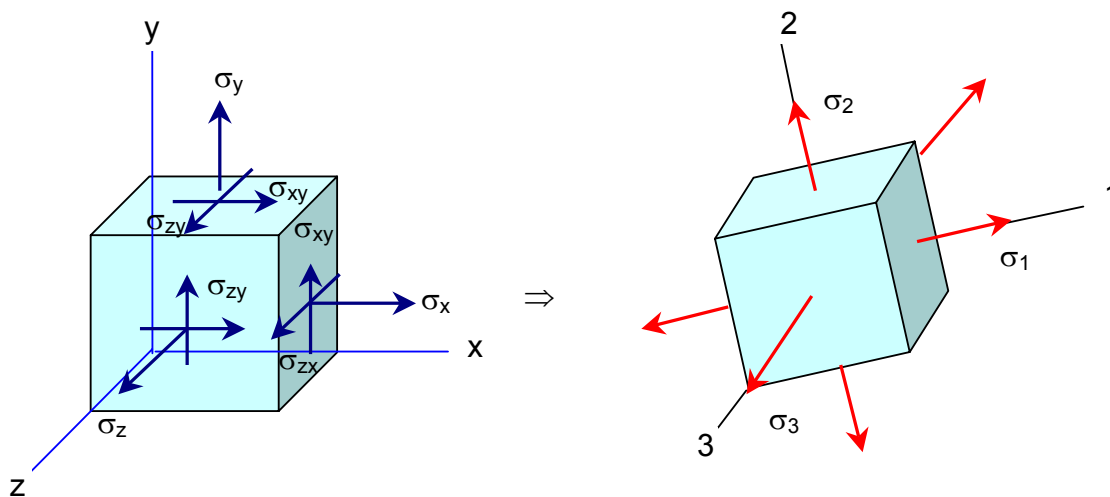


Figura 9.11 – Tensões principais num elemento solicitado triaxialmente

Admitindo que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$, temos:

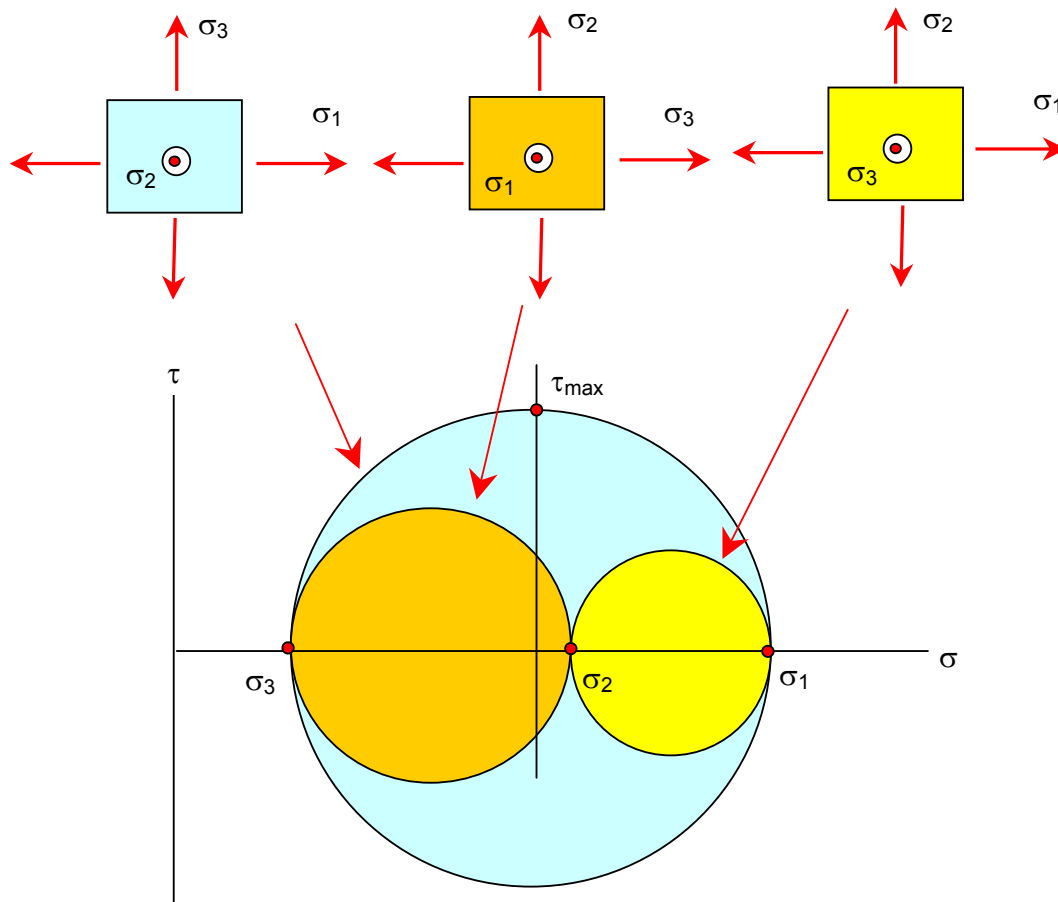


Figura 9.12 – Círculo de tensões de Mohr para num elemento solicitado triaxialmente

9.7 – Critérios de escoamento e de fratura

9.7.1 – Observações preliminares

A resposta de um material à tensão axial ou tensão de cisalhamento puro, pode ser convenientemente mostrada em diagramas de tensão-deformação. Tal aproximação direta não é possível, entretanto, para um estado complexo de tensões que é característico de muitos elementos de máquina e de estruturas. Desta forma, é importante estabelecer critérios para o comportamento dos materiais com estados de tensão combinados.

Nesta parte do estudo serão discutidos dois critérios para análise do comportamento das tensões combinadas em materiais dúcteis, e em seguida será apresentado um critério de fratura para materiais frágeis.

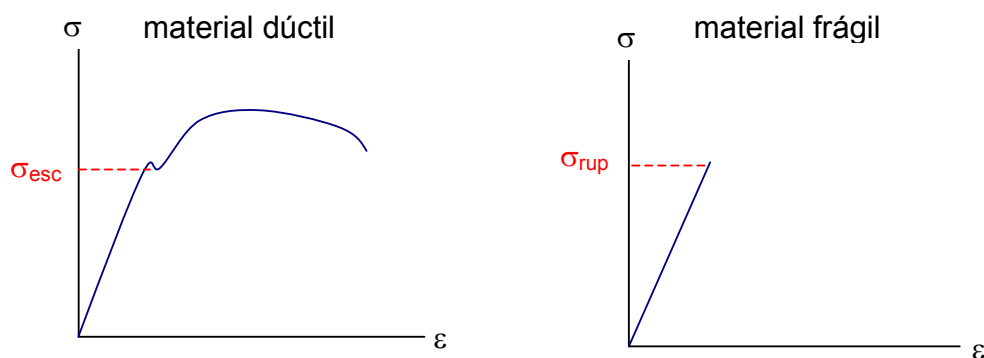


Figura 9.13 – Diagramas tensão/deformação para materiais dúcteis e frágeis

9.7.2 – Teoria da máxima tensão de cisalhamento (Tresca) (mat. dúcteis)

A teoria da máxima tensão de cisalhamento, resulta da observação de que, num material dúctil, ocorre deslizamento durante o escoamento ao longo dos planos criticamente orientados. Isso sugere que a tensão de cisalhamento máxima executa o papel principal no escoamento do material.

Para um teste simples de tração onde $\sigma_1 = \sigma_{esc}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, tem-se:

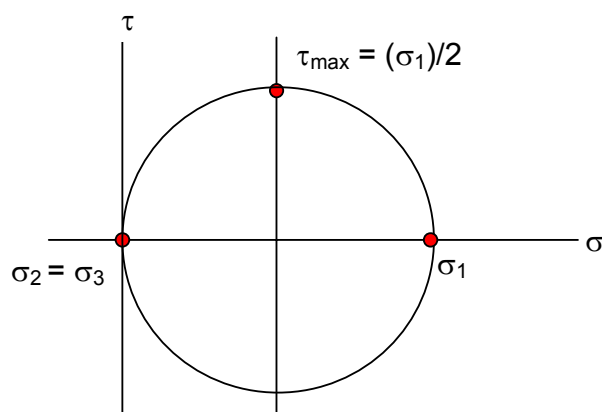


Figura 9.14 – Círculos Tensões de Mohr para um ensaio de tração simples

Observa-se que dois círculos são concêntricos, (σ_1, σ_2) e (σ_1, σ_3) e o terceiro resulta num ponto (σ_2, σ_3) .

Do Círculo de Tensões de Mohr neste caso, a tensão de cisalhamento máxima é:

$$\tau_{\max} \equiv \tau_{\text{crítico}} = \frac{\sigma_{\text{esc}}}{2} \quad (9.22)$$

Para aplicar o critério da máxima tensão de cisalhamento para um estado de tensão biaxial devem ser considerados dois casos:

Caso 1: Os sinais de σ_1 e σ_2 são iguais.

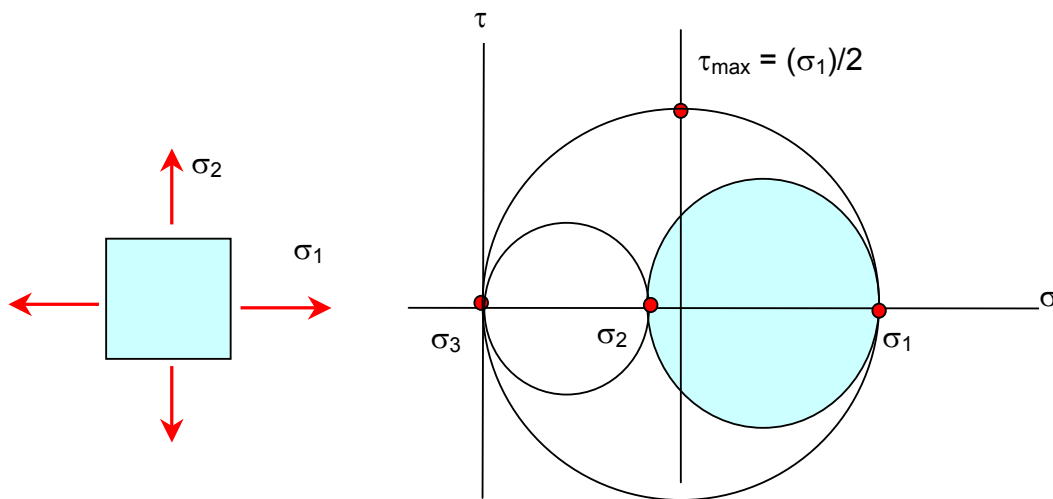


Figura 9.15 – Círculos tensões de Mohr para um estado de tensão biaxial - σ_1 e σ_2 têm sinais iguais

onde, para:

$$\begin{aligned} |\sigma_1| > |\sigma_2| &\Rightarrow |\sigma_1| \leq \sigma_{\text{esc}} \\ |\sigma_2| > |\sigma_1| &\Rightarrow |\sigma_2| \leq \sigma_{\text{esc}} \end{aligned} \quad (9.23)$$

Caso 2: Os sinais de σ_1 e σ_2 são diferentes.

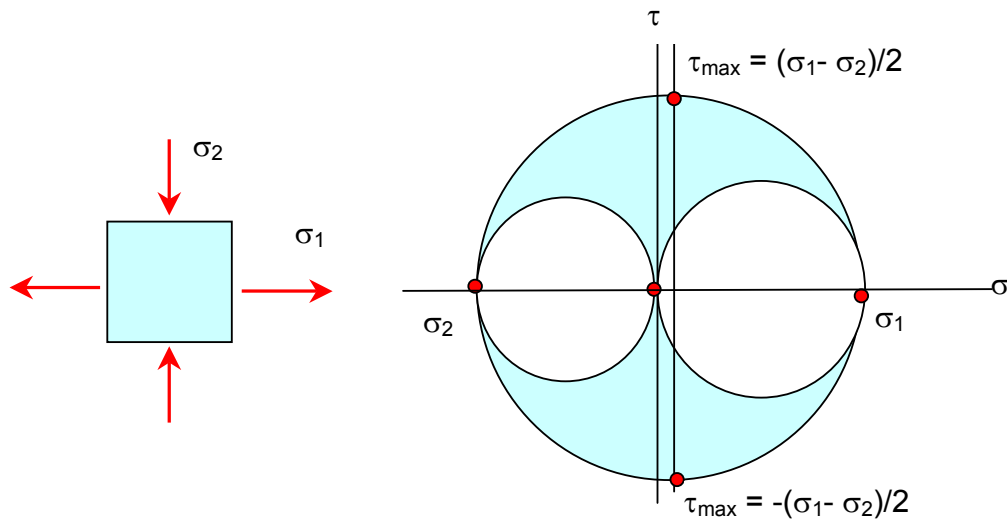


Figura 9.16 – Círculos Tensões de Mohr para um estado de tensão biaxial - σ_1 e σ_2 têm sinais diferentes

Para este caso, a tensão de cisalhamento máxima no ponto analisado não deve exceder a máxima tensão de cisalhamento do material (ver Fig. 9.17).

$$\left| \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right| \leq \frac{\sigma_{\text{esc}}}{2} \quad (9.24)$$

Na iminência de ocorrer o escoamento, tem-se:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{\text{esc}}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{\text{esc}}} = \pm 1 \quad (9.25)$$

A eq. (9.25) pode ser colocada de maneira gráfica da forma, Fig. 9.17:

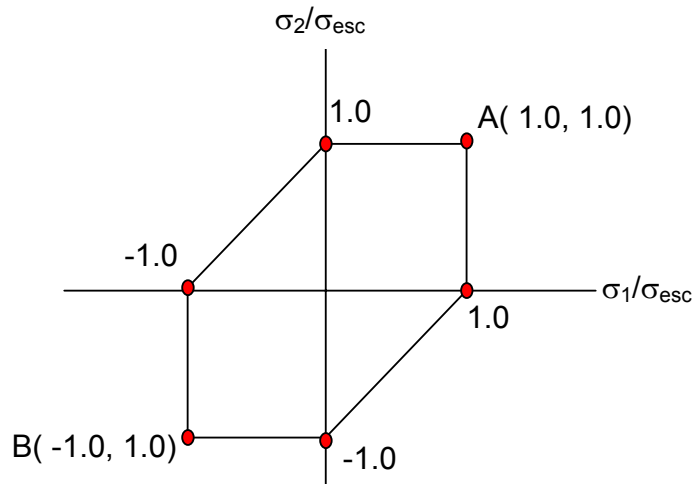


Figura 9.17 – Representação gráfica de um ponto na iminência de escoar - Tresca

9.7.3 – Teoria da máxima energia de distorção (von Mises) (mat. dúcteis)

A expressão de energia de deformação elástica total por unidade de volume (densidade de energia de deformação elástica) em um material isotrópico para um estado triaxial de tensões considerada num sistema de coordenadas arbitrário x , y e z é da seguinte forma:

$$U_{\text{total}} = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) \dots \quad (9.26)$$

$$\dots + \frac{1}{2G} (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

Esta energia de deformação elástica total, considerada nos eixos principais é da forma:

$$U_{\text{total}} = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \quad (9.27)$$

A energia de deformação elástica total acima, é dividida em duas partes: uma causando dilatação do material (mudanças volumétricas), e outra causando distorções

de cisalhamento. É interessante lembrar que em um material dúctil, admite-se que o escoamento do material depende apenas da máxima tensão de cisalhamento.

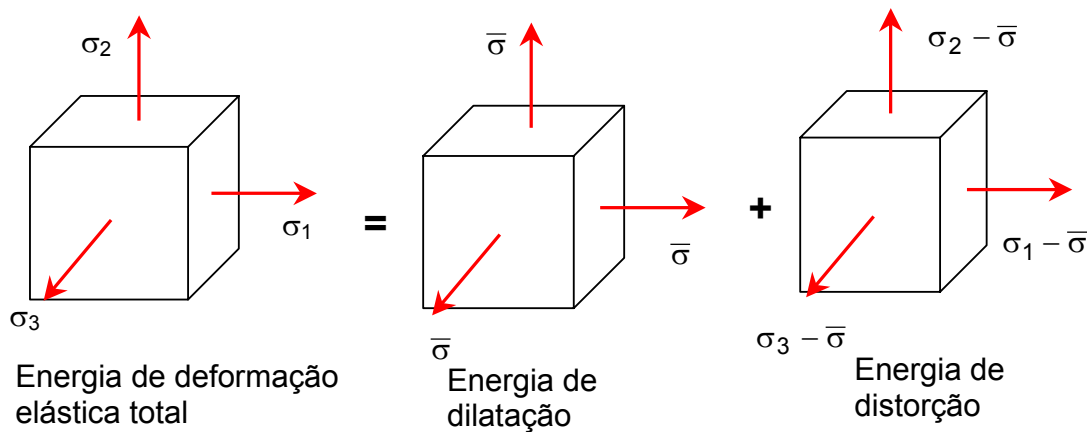


Figura 9.18 – Energias de dilatação e de distorção num elemento

A fim de facilitar a compreensão, somente o estado de tensão uniaxial será considerado. A passagem para um estado de tensão triaxial é automática. Desta forma, para um estado de tensão uniaxial, as energias de dilatação e de distorção são representadas da seguinte forma:

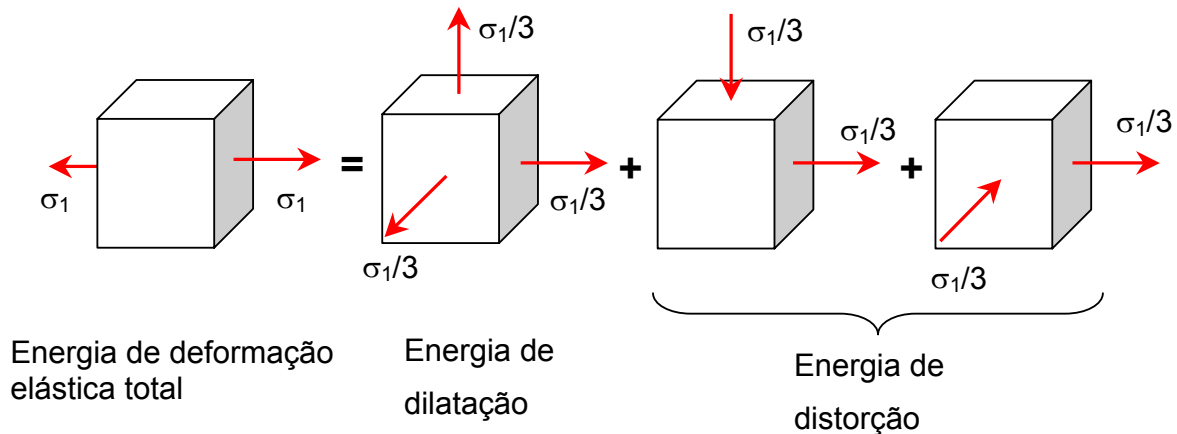


Figura 9.19 – Energias de dilatação e de distorção num elemento solicitado axialmente

Os Círculos de tensão de Mohr para os estados de tensão com somente energia de distorção são, Fig. 9.20.

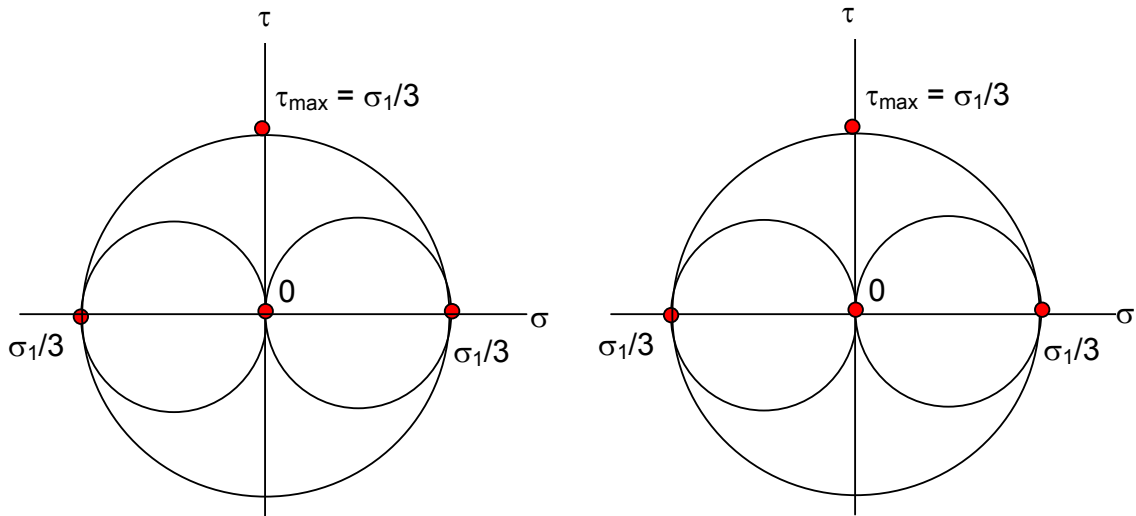


Figura 9.20 – Círculos de tensão de Mohr para o cisalhamento puro

No tensor correspondente a energia de dilatação, os componentes são definidos como sendo a tensão “hidrostática” média:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (9.28)$$

onde:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p = \bar{\sigma} \quad (9.29)$$

A energia de dilatação é obtida substituindo a eq.(9.29) na eq. (9.27), e em seguida substituindo a eq. (9.28) na equação resultante. Assim:

$$U_{\text{dilatação}} = \frac{1-2\nu}{6 E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (9.30)$$

A energia de distorção é obtida subtraindo da energia de deformação elástica total, eq. (9.27) a energia de dilatação, eq.(9.30):

$$U_{\text{distorção}} = \frac{1}{12 G} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (9.31)$$

A energia de distorção em um ensaio de tração simples, onde neste caso $\sigma_1 = \sigma_{\text{esc}}$ e $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ é da forma:

$$U_{\text{distorção}} = \frac{2 \sigma_{\text{esc}}^2}{12 G} \quad (9.32)$$

Igualando a energia de distorção do ponto em análise, eq. (9.31), com a energia de distorção num ensaio à tração simples, (9.32), estabelece-se o critério de escoamento para tensão combinada, eq. (9.33).

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 \sigma_{\text{esc}}^2 \quad (9.33)$$

Freqüentemente a eq. (9.33) pode ser rearranjada, sendo a expressão resultante chamada de tensão equivalente.

$$\sigma_{\text{equ}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (9.34)$$

A eq. (9.33) pode também ser apresentada da forma:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{\text{esc}}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{\text{esc}}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_{\text{esc}}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{\text{esc}}} \frac{\sigma_2}{\sigma_{\text{esc}}}\right) - \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{\text{esc}}} \frac{\sigma_3}{\sigma_{\text{esc}}}\right) - \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_{\text{esc}}} \frac{\sigma_1}{\sigma_{\text{esc}}}\right) = 1 \quad (9.35)$$

A eq. (9.36) é conhecida como sendo o critério de von Mises para um estado triaxial de tensões para materiais isotrópicos. Para um estado plano de tensão, $\sigma_3 = 0$, tem-se:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{\text{esc}}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{\text{esc}}} \frac{\sigma_2}{\sigma_{\text{esc}}}\right) + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{\text{esc}}}\right)^2 = 1 \quad (9.36)$$

A eq. (9.36) pode ser colocada de maneira gráfica da forma, Fig. 9.21:

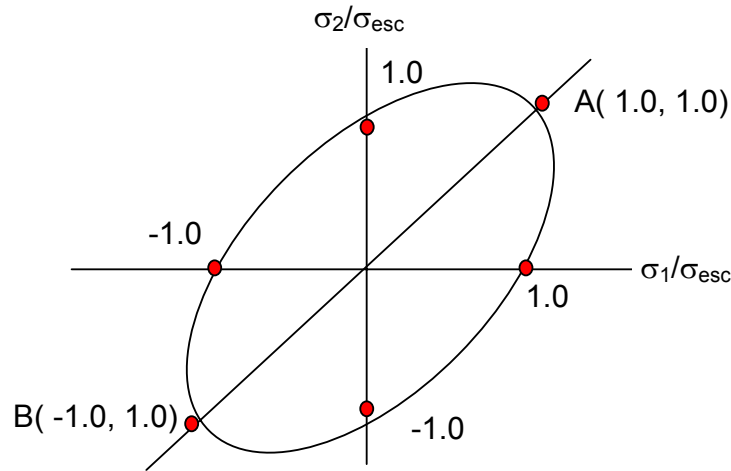


Figura 9.21 – Representação gráfica de um ponto na iminência de escoar – von Mises

9.7.4 – Teoria da máxima tensão normal (mat. frágeis)

A teoria da máxima tensão normal estabelece que a falha ou fratura de um material ocorre quando a máxima tensão normal em um ponto atinge um valor crítico, independentemente das outras tensões. Dessa forma, apenas a maior tensão principal deve ser considerada para aplicar esse critério.

$$|\sigma_1| \text{ ou } |\sigma_2| \text{ ou } |\sigma_3| \leq \sigma_{rup} \quad (9.37)$$

A eq. (9.36) também pode ser colocada de maneira gráfica da forma, Fig. 9.22.

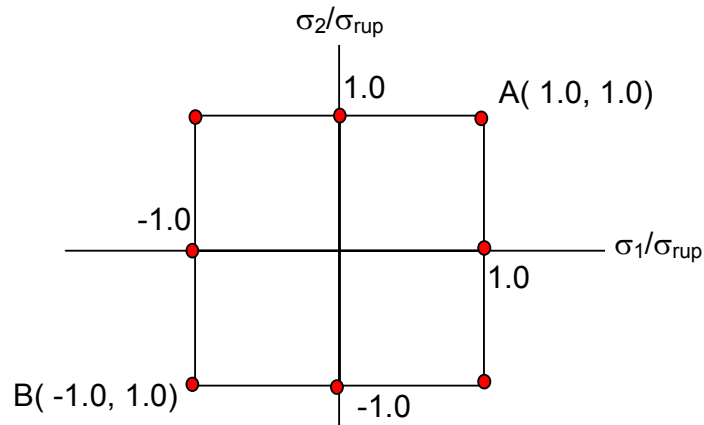
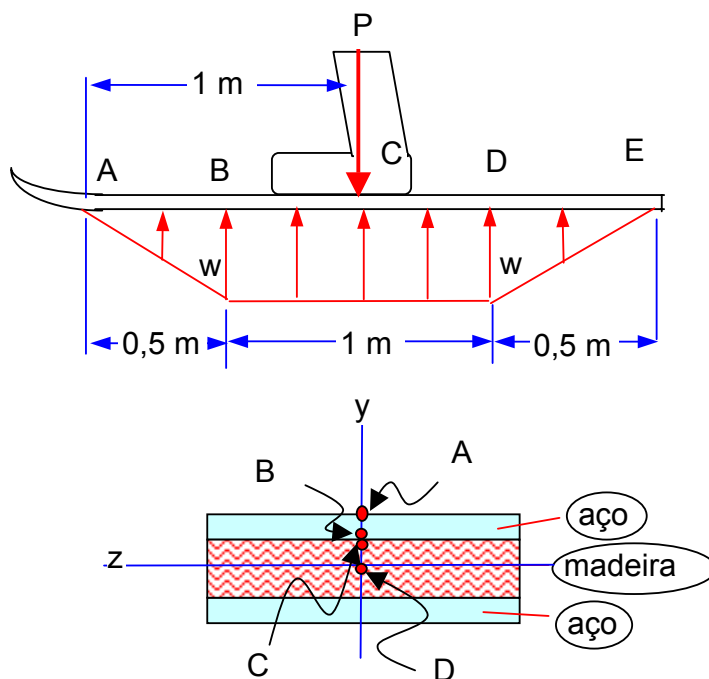


Figura 9.22 – Representação gráfica de um ponto na iminência de romper

Exemplo 9.6: As tensões calculadas sobre o ski são como mostrada na figura abaixo. Utilizando critérios de ruptura adequados, verifique se os pontos mostrados sobre a seção transversal do ski suportam o carregamento abaixo. Tome $\sigma_{esc\ aço} = 250\text{ Mpa}$, $\sigma_{rup\ mad} = 26\text{ MPa}$ e $\tau_{rup\ mad} = 6,2\text{ MPa}$ com um fator de segurança de 2.



Estado de tensão nos pontos da seção transversal:

Ponto A (aço):

$$\sigma_A = 24,05\text{ Mpa} \quad , \quad \tau_A = 0$$

Ponto B (aço):

$$\sigma_B = 18,99\text{ Mpa} \quad , \quad \tau_B = 0,11\text{ MPa}$$

Ponto C (madeira):

$$\sigma_C = 1,14\text{ Mpa} \quad , \quad \tau_C = 0,11\text{ Mpa}$$

Ponto D (madeira):

$$\sigma_D = 0 \quad , \quad \tau_D = 0,12\text{ MPa}$$

Ponto A (aço – material dútil):

$$\sigma_x = \sigma_A = 24,05\text{ Mpa} \quad , \quad \sigma_y = 0 \quad , \quad \tau_{xy} = 0$$

$$\sigma_1 = \sigma_x = 24,05\text{ Mpa}$$

Pelo critério de máxima tensão de cisalhamento:

$$\sigma_1 = 24,05 \text{ Mpa} < \sigma_{\text{esc}} = 250/2 \text{ Mpa} \quad (\text{ok})$$

Ponto B (aço – material dútil):

$$\sigma_x = \sigma_B = 18,99 \text{ Mpa} \quad , \quad \sigma_y = 0 \quad , \quad \tau_{xy} = \tau_B = 0,11 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = 18,99 \text{ Mpa}$$

Pelo critério de máxima tensão de cisalhamento:

$$\sigma_1 = 18,99 \text{ Mpa} < \sigma_{\text{esc}} = 250/2 \text{ Mpa} \quad (\text{ok})$$

Ponto C (madeira – material frágil):

$$\sigma_x = \sigma_C = 1,14 \text{ Mpa} \quad , \quad \sigma_y = 0 \quad , \quad \tau_{xy} = \tau_C = 0,11 \text{ MPa}$$

Pelo critério de máxima tensão normal:

$$\sigma_1 = 1,15 \text{ Mpa} < \sigma_{\text{rup}} = 26/2 \text{ Mpa} \quad (\text{ok})$$

$$\tau_{\text{max}} = 0,11 \text{ Mpa} < \tau_{\text{rup}} = 6,2/2 \text{ Mpa} \quad (\text{ok})$$

Ponto D (madeira – material frágil):

$$\sigma_x = \sigma_D = 0 \quad , \quad \sigma_y = 0 \quad , \quad \tau_{xy} = \tau_D = 0,12 \text{ MPa}$$

Pelo critério de máxima tensão normal:

$$\tau_{\text{max}} = 0,12 \text{ Mpa} < \tau_{\text{rup}} = 6,2/2 \text{ Mpa} \quad (\text{ok})$$