

Capítulo 5

Placa delgada isotrópica

Neste capítulo, são apresentadas as diversas definições e relações diferenciais aplicáveis às placas elásticas. Consideram-se apenas as placas isotrópico-homogêneas, de forma a estabelecer as bases conceituais ao estudo de flexão de placas laminadas, vistas a partir do Capítulo 6.

Uma vez que as definições e equações diferenciais que regem o problema de placa podem ser vistas como uma generalização do problema de vigas, inicia-se com a derivação dessas equações. Esta seção, entretanto, pode ser considerada como uma revisão de conteúdo, de tal forma que, sentindo-se seguro, o leitor pode ir diretamente para a Seção 5.3, sem prejuízo na continuidade do assunto.

Os aspectos gerais da teoria de placas delgadas isotrópicas apresentados tem como base estudos clássicos, desenvolvidos principalmente entre os anos de 1870 e 1920 por pesquisadores como Poisson, Kirchhoff, Thompson, Tait e Kelvin. O assunto é bastante bem resumido e discutido em textos clássicos como os de Timoshenko [168] e Marguerre [114], por exemplo, os quais o leitor é estimulado a consultar. Da mesma forma, aquele que contar com uma base consistente de teoria clássica de flexão de placas pode prescindir deste capítulo.

5.1 Flexão de viga

Considere uma viga de comprimento l e seção transversal $b \times H$, como vista na Figura 5.1. As equações que serão desenvolvidas terão por base uma série de hipóteses, como se segue:

- a) **Hipótese 1:** o carregamento é tal que há apenas cargas concentradas ou distribuídas na direção z e/ou momentos na direção y .
- b) **Hipótese 2:** as deflexões são pequenas quando comparadas com a espessura H .
- c) **Hipótese 3:** as condições de contorno da viga, isto é, a forma como as vigas estão vinculadas é tal que não ocorrem reações axiais (na direção x), nos apoios.

Considere um ponto genérico P na viga, nas coordenadas (x, y, z) , para o qual os deslocamentos nas direções x , y e z são designados, respectivamente, por u , v e w . Em geral, u será uma função de ponto e pode ser representado por uma função $u(x, y, z)$. Da mesma forma temos $v(x, y, z)$ e $w(x, y, z)$. Num problema qualquer esses três campos são incógnitos e representam a solução do problema, ou parte dela à mão. No problema particular da viga mencionada, as três hipóteses permitem considerar que cada ponto desloca-se apenas no plano x - z , isto é, $v(x, y, z) \equiv 0$ para qualquer $(x, y, z) \in \Omega$, onde Ω representa o domínio sob consideração, isto é, o conjunto de pontos $P(x, y, z)$ que define a viga. Além disso, as hipóteses permitem aproximar os deslocamentos w como uniformes na seção, ou seja, independentemente de z .

solução de problemas de vigas e de alguns tipos de placas de material composto, depois de as constantes envolvidas terem sido reinterpretadas.

Considere, por exemplo, o problema ilustrado na Figura 5.5. O problema de valor no contorno associado a ser resolvido é composto pela equação diferencial de equilíbrio (5.34) e pelas condições de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p(x)}{EI_{yy}}, & \forall 0 < x < l, \\ w(x) = 0 & \text{em } x = 0, l, \\ M_v(x) = 0 & \text{em } x = 0, l. \end{array} \right. \quad (5.35)$$

Nesse problema, a distribuição de momentos pode ser facilmente determinada, uma vez que o problema é isostático. A distribuição de momentos é dada por:

$$M_v(x) = \frac{p_0 x}{2} (l - x). \quad (5.36)$$

Isso permite usar diretamente a relação constitutiva (5.27) com $\psi_{,x} = -w_{,xx}$, em vez da equação de equilíbrio em (5.35):

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_v}{EI_{yy}} = -\frac{p_0 x}{2EI_{yy}} (l - x). \quad (5.37)$$

Assim, é preciso fazer apenas duas integrações, em lugar das quatro necessárias em (5.35). Isto resulta em:

$$w(x) = -\frac{p_0 x}{2EI_{yy}} \left[\frac{l x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2 \right]. \quad (5.38)$$

Aplicando as condições de contorno $w(x) = 0$ para $x = 0$ e l obtém-se a solução:

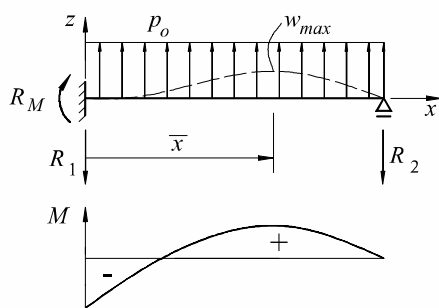
$$\boxed{w(x) = \frac{p_0}{24EI_{yy}} (x^4 - 2lx^3 + l^3x)} \quad (5.39)$$

Essa solução é listada como $w_f(x)$ no caso 14 da Seção 5.2. Na Seção 8.8 e na eq.(8.165), página 319, é apresentada a solução do mesmo problema pela **teoria de Timoshenko**, que considera o efeito do cisalhamento transversal. Esse efeito resulta num acréscimo nas deflexões em relação aos valores obtidos em (5.39) pela teoria de Euler-Bernoulli.

5.2 Fórmulas para vigas

A seguir há uma pequena coletânea de casos de vigas, resolvidos pela teoria de Euler-Bernoulli, denotados por $w_f(x)$. Em alguns casos, são apresentados também os resultados obtidos pela teoria de Timoshenko, resultando nas parcelas de deflexão denotadas por $w_c(x)$. A deflexão total é então dada por $w(x) = w_f(x) + w_c(x)$. Note que, embora as soluções apresentadas sejam para vigas homogêneo-isotrópicas, elas **são também usadas para vigas não-homogêneas e anisotrópicas de diversos tipos**. Essa aplicação é possível pelo uso dos valores equivalentes dos módulos de elasticidade da viga composta, determinados pelas formulações mostradas no Capítulo 8.

16.



Solução de Bernoulli.

$$Q_{\max} = R_A = 5p_0l/8, \quad R_B = 3p_0l/8, \quad R_M = p_0l^2/8,$$

$$M_{\max} = \frac{9p_0l^2}{16} \text{ em } x = \frac{5l}{8}. \quad M(x) = \frac{p_0(5lx - 4x^2 - l^2)}{8},$$

$$w_f(x) = \frac{p_0x^2}{48E_{xf}I}(x-l)(2x-3l). \quad \theta_{f \max} = \frac{-p_0l^3}{48E_{xf}I}.$$

$$w_{f \max} = \frac{p_0l^4}{185E_{xf}I} \text{ em } \bar{x} = \frac{1}{16}(15 - \sqrt{33})l.$$

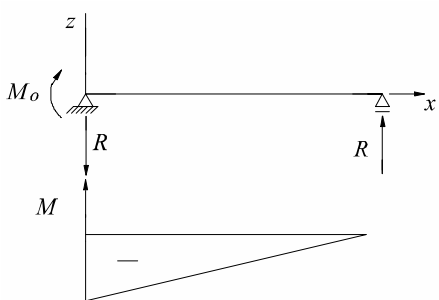
17.



$$Q(x) = R_1 = R_2 = 0, \quad M(x) = -M_0, \quad w_c(x) = 0,$$

$$w_f(x) = \frac{M_0x}{2E_{xf}I}(x-l), \quad w_{\max} = -\frac{M_0l^2}{8E_{xf}I}. \quad \theta_{\max} = \frac{\pm M_0l}{2E_{xf}I}.$$

18.



$$R = Q(x) = \frac{M_0}{l}, \quad M(x) = \frac{M_0(x-l)}{l}, \quad w_c(x) = 0,$$

$$w(x) = \frac{M_0x}{6E_{xf}Il}(3lx - x^2 - 2l^2), \quad \theta_{\max} = \theta(0) = \frac{-M_0l}{3E_{xf}I}.$$

$$\psi(x) = \frac{M_0}{6E_{xf}Il}(3x^2 - 6lx + 2l^2) + \frac{M_0}{\alpha_c l},$$

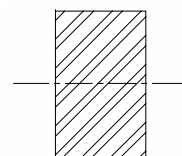
$$w_{\max} = \frac{-M_0l^2}{9\sqrt{3}E_{xf}I} \text{ em } \bar{x} = (1 - \frac{\sqrt{3}}{3})l \cong 0,4226l.$$

5.2.1 Fatores de cisalhamento k para vigas isotrópicas

Como será visto em detalhes na Seção 8.8, uma das formas de inclusão do efeito do cisalhamento transversal no cálculo da deflexão de vigas sob flexão se faz pela teoria de Timoshenko, através do uso do fator de cisalhamento. As equações de deflexão já apresentadas são decompostas na forma $w = w_f + w_c$, onde w_f é a parcela da teoria de Bernoulli, e w_c a parcela do cisalhamento transversal. Esta última é dependente do fator k , que, para vigas de material homogêneo-isotrópico, tem sido estimado por diversos métodos. Mindlin [119] obteve $k = \pi^2/12 = 0,82247$ para a seção retangular e $k = 0,847$ para a seção circular, enquanto Timoshenko [166] obteve $k = 2/3 = 0,6667$ para retângulo e $k = 3/4 = 0,750$ para o círculo. (Algumas dessas soluções são apresentadas na Seção 13.4.) Cowper [56], [61] apresenta um modelo que permite a estimativa de k para diversas outras formas de seção transversal. Algumas das soluções são sumarizadas a seguir. A flexão é tal que a linha neutra é horizontal em relação às figuras mostradas.

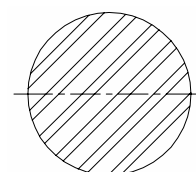
1. Retângulo sólido:

$$k = \frac{10(1 + \nu)}{12 + 11\nu}, \quad \text{para } \nu = 0,3 \text{ e } k = 0,8497.$$



2. Círculo sólido:

$$k = \frac{6(1 + \nu)}{7 + 6\nu}, \quad \text{para } \nu = 0,3 \text{ e } k = 0,8864.$$



3. Seção caixão retangular de paredes finas:

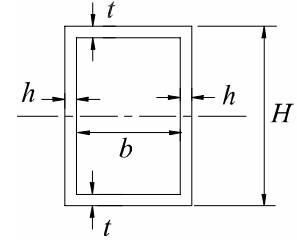
$$k = \frac{10(1 + \nu)(1 + 3p)^2}{c_1 + \nu c_2 + 10n^2 c_3}, \quad \text{onde } n = \frac{b}{H}, p = \frac{nt}{h},$$

$$c_1 = 12 + 72p + 150p^2 + 90p^3, \quad c_3 = (3 + \nu)p + 3p^2,$$

$$c_2 = 12 + 66p + 135p^2 + 90p^3.$$

Caso de tubo quadrado de espessura uniforme ($H = b, t = h$),

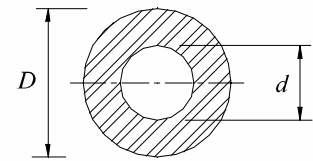
$$k = \frac{20(1 + \nu)}{48 + 39\nu}, \quad \text{para } \nu = 0,3 \text{ e } k = 0,4355.$$



4. Tubo circular de parede espessa:

$$k = \frac{6(1 + \nu)(1 + p^2)^2}{(7 + 6\nu)(1 + p^2)^2 + (20 + 12\nu)p^2}, \quad \text{onde } p = \frac{d}{D}.$$

$$\text{Para parede fina, } k = \frac{2(1 + \nu)}{4 + 3\nu}, \quad \text{onde } \nu = 0,3 \text{ e } k = 0,5306.$$



5.3 Placas isotrópicas

O termo *placa* se refere a um elemento estrutural que pode ser caracterizado, sem demasiada precisão, como um corpo que ocupa uma região no espaço, delimitada da seguinte forma:

- um conjunto de pontos $P(x, y)$, formando uma superfície plana Ω , chamada de *superfície de referência*;
- essa superfície de referência é delimitada por um contorno Γ ;
- a cada ponto $P \in \Omega$ há uma espessura associada $H = H(P)$.

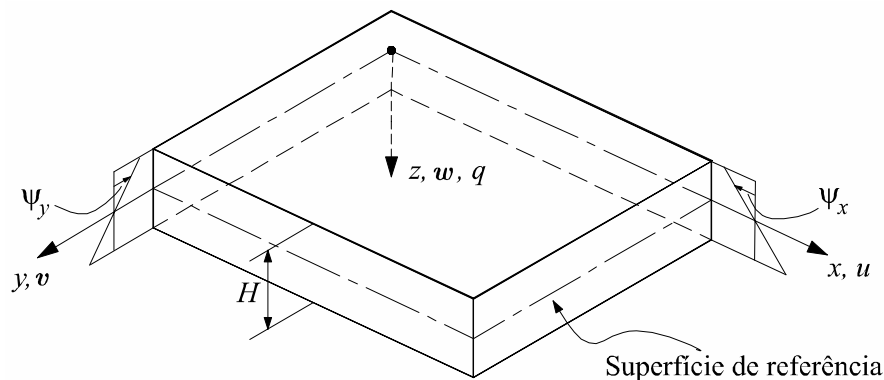


Figura 5.6: Coordenadas e deslocamentos numa placa.

A Figura 5.6 ilustra os parâmetros principais, as coordenadas e deslocamentos numa placa: as componentes de deslocamento $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ e $w(x, y, z)$ nas direções x - y - z , a espessura H , a carga distribuída transversal $q(x, y)$ por unidade de área aplicada na superfície de referência e as rotações do segmento normais à superfície de referência, ψ_x e ψ_y em torno dos eixos x e y , respectivamente, como indicadas na figura. Frequentemente, a superfície de referência é posicionada na superfície média da placa, embora esse procedimento não seja necessário. A deformação transversal da placa é identificada com a deflexão da superfície de referência. Além disso, todo o carregamento se supõe de alguma forma

aplicado sobre ela. Isto significa que a expressão matemática da resposta da placa depende da posição escolhida para a superfície de referência.

O termo placa implica também um significado no que se refere ao carregamento: a placa tipicamente suporta carregamento transversal, desenvolvendo, portanto, deformações de flexão. Frequentemente, em adição à flexão, as **placas também suportam carregamentos coplanares**, denominados **comportamentos de membrana**. Em **problemas lineares com materiais isotrópicos**, os comportamentos de flexão e membrana são ditos desacoplados. Isso significa que, embora uma dada placa esteja sujeita à ação simultânea de cargas transversais e coplanares, a resolução do problema pode ser feita separadamente, como se as cargas agissem de forma isolada. Posteriormente, ambas as soluções são sobrepostas, resultando na solução completa do problema. Este capítulo trata de placas isotrópicas; assim, por motivos didáticos apresentamos primeiramente o comportamento de flexão deixando a membrana para a última seção. No Capítulo 6, ao tratar de laminados anisotrópicos, os dois comportamentos serão considerados simultaneamente, como é necessário para esse tipo de material.

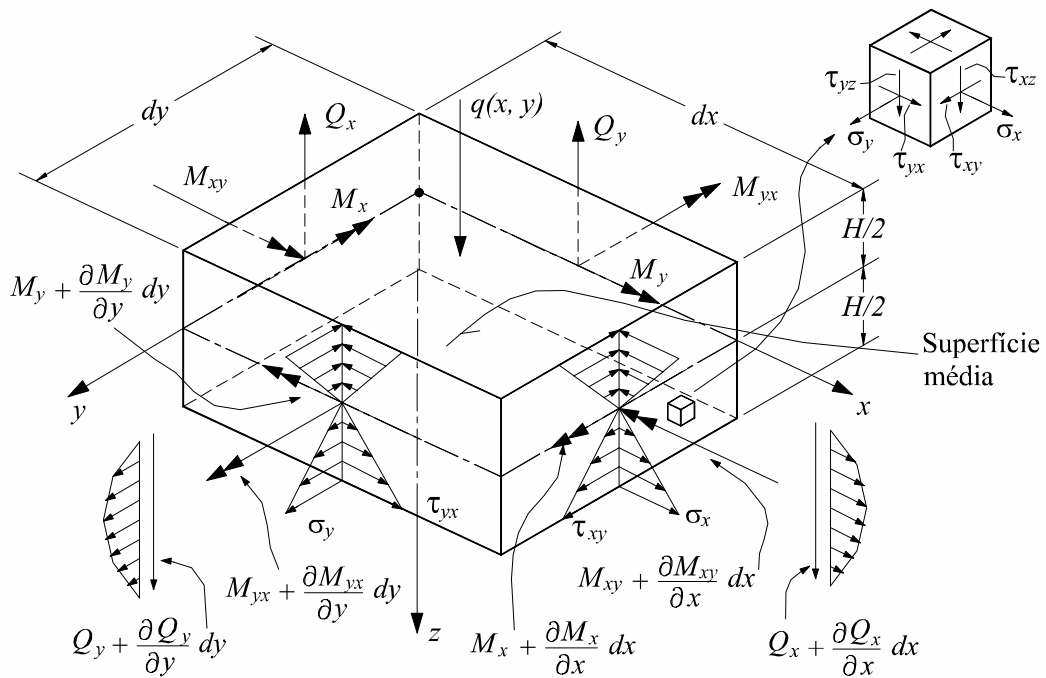


Figura 5.7: Tensões resultantes num elemento diferencial de placa.

5.3.1 Estática

A Figura 5.7 mostra um elemento diferencial de placa com as tensões distribuídas ao longo da espessura definida pela coordenada z . De forma análoga ao que foi descrito com a viga, definem-se **forças resultantes** ou **esforços** da seguinte forma. Numa superfície interna definida por $x = constante$, os esforços são definidos por:

$$(M_x; M_{xy}; Q_x) = \int_{-H/2}^{H/2} (\sigma_x z; \tau_{xy} z; \tau_{xz}) dz \tag{5.40}$$

5.8 Placa retangular sob carga senoidal

Considere uma placa retangular simplesmente apoiada, de dimensões $a \times b$, com os eixos coordenados, como na Figura 5.6. Considere-se aqui o importante caso em que o carregamento é na forma:

$$q(x, y) = q_{11} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi y}{b} \right), \quad (5.101)$$

onde q_{11} representa a intensidade da carga no centro da placa. Todo o contorno é simplesmente apoiado, isto é, $w = 0$ e $M_n = 0$. Mais explicitamente, temos:

$$\left\| \begin{array}{l} w = 0 \text{ e } M_x = 0, \quad \text{em } x = 0 \text{ e } x = a, \\ w = 0 \text{ e } M_y = 0, \quad \text{em } y = 0 \text{ e } y = b. \end{array} \right. \quad (5.102)$$

Observe que, a partir da solução desse problema, pode-se obter também a solução da placa simplesmente apoiada, submetida a um carregamento qualquer. Basta que se decomponha o carregamento em série de Fourier em termos das funções $\operatorname{sen}(m\pi x/a)$ e $\operatorname{cos}(n\pi y/b)$.

Da teoria de equações diferenciais parciais, obtém-se a solução do problema na forma:

$$w(x, y) = W_{11} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi y}{b} \right). \quad (5.103)$$

Usando as relações constitutivas (5.54), observamos que essa função satisfaz a todas as condições de contorno. A constante W_{11} deve ser escolhida de forma a satisfazer, se possível, a equação diferencial da placa delgada, $\nabla^4 w = q/D$. Por substituição direta, verificamos que (5.103) realmente satisfaz a equação diferencial se W_{11} for tal que:

$$\pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 W_{11} = \frac{q_{11}}{D}.$$

Logo, a solução do problema é:

$$w(x, y) = \frac{q_{11}}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi y}{b} \right). \quad (5.104)$$

Esse exemplo inicia-se com a solução já em sua forma quase completa. Entretanto, a seqüência natural do processo de solução de problemas de valor no contorno em geral envolve o uso de técnicas que podem ser obtidas em cursos de equações diferenciais parciais.

Os esforços de momento são obtidos substituindo (5.104) nas relações constitutivas (5.54). Entretanto, os esforços cortantes não podem ser obtidos a partir das relações constitutivas por causa das inconsistências da teoria de Kirchhoff de placas finas, como comentado no texto que segue a eq.(5.34). Assim, depois de obtidas as expressões para os momentos, esses são substituídos nas equações de equilíbrio, (5.43), de forma que se obtenham os esforços cortantes. Os esforços são, portanto:

$$\Rightarrow M_x(x, y) = \frac{q_{11}}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi y}{b} \right)$$

Caso $a > b$, tem-se que $M_y > M_x$ e $\sigma_y > \sigma_x$ no centro. A determinação das tensões em um ponto qualquer pode ser resumida de forma matricial:

$$\begin{aligned} \{\kappa\} &= [D'] \{M\}, & \text{eq.(5.56),} \\ \{\varepsilon\} &= z \{\kappa\}, & \text{eq.(5.50),} \\ \{\sigma\} &= [Q] \{\varepsilon\} = z [Q] \{\kappa\}, & \text{eq.(5.52).} \end{aligned} \quad (5.112)$$

Isso significa que, conhecendo os momentos $\{M\}$, pela seqüência mostrada, chega-se às tensões. Em vez de usar (5.56), pode ser mais simples diferenciar diretamente a solução $w(x, y)$ e obter as curvaturas diretamente das definições. No centro da placa, por exemplo,

$$\{\kappa\} = \begin{Bmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{Bmatrix} = \frac{q_{11}}{\pi^2 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \begin{Bmatrix} \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{b^2} \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ em } (x, y) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right), \quad (5.113)$$

enquanto as **tensões máximas**, que ocorrem nas faces, em $z = \pm H/2$, são:

$$\{\sigma\}_{\max} = \frac{\pm q_{11}}{\pi^2 H^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \begin{Bmatrix} \frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \\ \frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ em } (x, y, z) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm \frac{H}{2} \right). \quad (5.114)$$

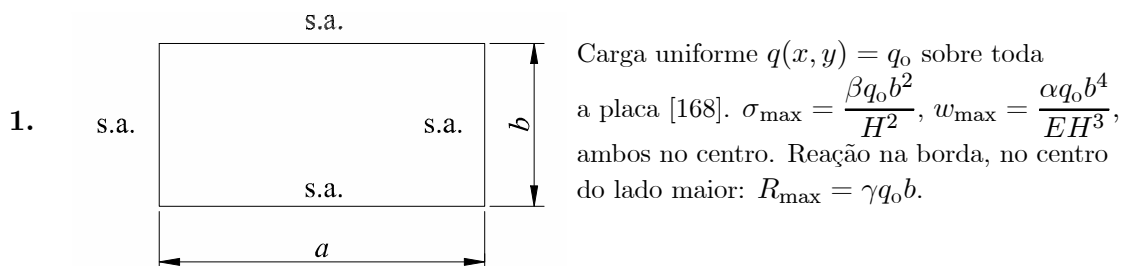
Conhecidas as tensões máximas, pode-se finalmente aplicar um dos critérios de falha para o material, como o da máxima tensão cisalhante ou o de von Mises, para verificar a segurança quanto ao início do escoamento, por exemplo.

5.9 Fórmulas para placas retangulares isotrópicas

Apresentamos aqui uma pequena coletânea de casos de placas retangulares isotrópicas com soluções obtidas pela teoria de Kirchhoff. Coletâneas quase exaustivas podem ser obtidas em textos como [168] e [148].

Nas fórmulas apresentadas a seguir, usa-se a mesma notação-padrão usada no resto do texto, mas, para facilidade de uso, reproduzimos aqui as variáveis usadas:

- a, b ▷ lados da placa;
- H ▷ espessura da placa;
- s.a.* ▷ simplesmente apoiado;
- ν ▷ coeficiente de Poisson. Os valores numéricos são obtidos usando $\nu = 0,3$;
- R ▷ reação no apoio, N/m.



Essa é uma equação diferencial ordinária, de quarta ordem, cuja solução geral tem a forma:

$$w = \frac{q_0}{k_{oa}} + \text{sen } \bar{x} (C_1 \text{senh } \bar{x} + C_2 \text{cosh } \bar{x}) + \cos \frac{2\beta x}{L} (C_3 \text{senh } \bar{x} + C_4 \text{cosh } \bar{x}) \quad (5.119)$$

onde $\bar{x} = 2\beta x/L$ e $\beta = \sqrt[4]{k_{oa}/(16D)}$. Uma vez que os coeficientes de C_2 e C_3 trocam de sinal quando x é substituído por $-x$, deve-se ter $C_2 = C_3 = 0$, uma vez que a solução deve ser simétrica em relação ao eixo y . As constantes C_1 e C_4 são determinadas aplicando as condições de contorno $w(x = L/2) = 0$ e $M_x(x = L/2) = 0$ (isto é, $w''(x = L/2) = 0$). Assim, a deflexão da placa é:

$$w = \frac{q_0 L^4}{64D\beta^4} \left(1 - \frac{\text{sen } \beta \text{senh } \beta}{d} \text{sen } \frac{2\beta x}{L} \text{senh } \frac{2\beta x}{L} - \frac{\cos \beta \text{cosh } \beta}{d} \cos \frac{2\beta x}{L} \text{cosh } \frac{2\beta x}{L} \right) \quad (5.120)$$

onde $d = (\cos 2\beta + \cosh 2\beta)/2$.

5.10.2 Vigas sobre apoio elástico

As equações diferenciais para flexão de vigas sobre apoio elástico podem ser obtidas das equações de placa, (5.116) e (5.117), substituindo D por EI/b , onde b é a largura da seção da viga, de forma que as equações ficam:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = p - k_a w \quad (5.121)$$

onde $k_a = b k_{oa}$, de forma que k_a tem unidades N/m^2 e p é a força por unidade de comprimento. Para uma carga uniforme p_0 , a solução geral dessa equação é:

$$w = \frac{p_0}{k_a} + (C_1 \cos \beta x + C_2 \text{sen } \beta x) e^{\beta x} + (C_3 \cos \beta x + C_4 \text{sen } \beta x) e^{-\beta x} \quad (5.122)$$

onde:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k_a}{4EI}} \quad (5.123)$$

Soluções para alguns casos são sumarizadas a seguir. Hetenyi [80] apresenta a solução do problema de uma viga sem apoios nas extremidades, submetida a uma carga concentrada, como ilustrado na Figura 5.21. A solução para a região $x < a$ é:

$$\left\{ \begin{aligned} w &= \frac{F\beta}{k_a(shl^2 - sl^2)} \{2 \text{chx cx } S_1 + S_2[S_3 + S_4]\}, \\ M &= \frac{F}{2\beta(shl^2 - sl^2)} \{2 \text{shx sx } S_1 + (\text{chx sx} - \text{shx cx})[S_3 + S_4]\}, \\ Q &= \frac{F}{shl^2 - sl^2} \{S_1 S_2 + \text{shx sx}[S_3 + S_4]\}. \end{aligned} \right. \quad (5.124)$$

A seguinte notação simplificativa foi usada de forma a compactar as expressões: $S_1 = (shl \text{ ca } chc - sl \text{ cha } cc)$, $S_2 = (\text{chx sx} + \text{shx cx})$, $S_3 = shl(\text{sa } chc - \text{ca } she)$ e $S_4 = sl(\text{sha } cc - \text{cha } sc)$, onde $c \equiv \text{cosseno}$, $s \equiv \text{seno}$, $h \equiv \text{hiperbólico}$, $a \equiv \beta a$, $c \equiv \beta c$, $l \equiv \beta l$, $x \equiv \beta x$. Assim, por exemplo, chx e

Capítulo 6

Análise de um laminado

As várias combinações de orientações, espessuras e materiais de cada lâmina que compõe um laminado fazem com que o comportamento deste possua características diferentes das observadas em cada lâmina individual. A análise macromecânica de um laminado é a modelagem do comportamento do laminado supondo conhecidas as propriedades mecânicas e o comportamento individual de cada lâmina. Este capítulo primeiramente descreve as relações tensão-deformação elásticas de um laminado por meio da chamada teoria clássica de laminação. Em seguida, é considerada a resistência do laminado, buscando-se estimativas de cargas limites de ruptura. Adicionalmente, a Seção 6.5 apresenta uma aplicação da teoria clássica para a determinação aproximada das propriedades elásticas equivalentes homogêneas de lâminas com reforço de fibras curtas aleatórias. A Seção 6.6 apresenta um tratamento para placas e grelhas metálicas com enrijecedores, em que é feita a determinação dos parâmetros elásticos de rigidez ortotrópicos aplicáveis à teoria clássica de laminação.

6.1 Teoria clássica de laminação – TCL

Inicialmente, adotamos para o laminado o conjunto de pressupostos que são comumente conhecidos como **hipóteses de Kirchhoff** nos estudos de placas, e **hipóteses de Kirchhoff-Love** nos estudos de cascas. Essas hipóteses gerais de placas e cascas isotrópicas, juntamente com outras próprias a materiais compostos laminados, são:

1. O laminado consiste de lâminas perfeitamente coladas, isto é, sem deslizamento ou descolamento.
2. A camada de resina que é usada para unir as lâminas é infinitesimalmente fina e não deformável por cisalhamento. Isso significa que os deslocamentos são contínuos através das lâminas.
3. O laminado é considerado delgado, ou seja, é uma placa ou casca de parede relativamente fina em relação a uma das dimensões da superfície. Normalmente isso é quantificado, de forma bastante arbitrária, considerando que o erro na resposta estará na faixa de até 5% em deslocamentos usando a teoria de placa delgada se a relação comprimento/espessura for maior que 100.
4. Como consequência dessa hipótese, pode-se utilizar a chamada hipótese das seções planas. Ela diz que uma linha originalmente reta e perpendicular à superfície que define a geometria da estrutura (a chamada **superfície de referência**) permanece reta e perpendicular a essa superfície quando o laminado for estendido e flexionado. Como consequência $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, onde os eixos $0xyz$ estão como na Figura 6.1.
5. Os segmentos normais à superfície de referência são considerados inextensíveis, isto é, têm comprimentos constantes. Isso significa que $\varepsilon_z = 0$ em qualquer ponto.

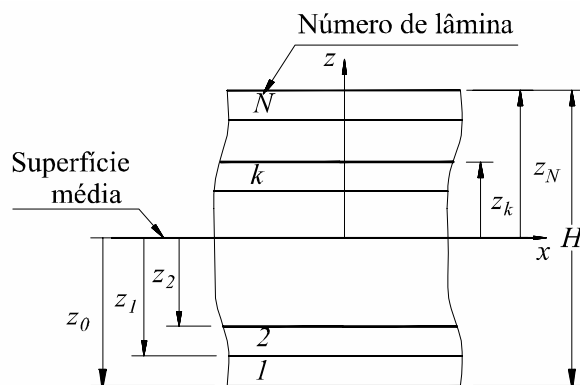


Figura 6.4: Notações para as lâminas de um laminado.

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \left[\int_{z_{k-1}}^{z_k} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} z + \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} z^2 \right) dz \right]. \quad (6.17)$$

Nota-se que $\{\varepsilon_x^o\}$ e $\{\kappa\}$ não são função de z . Realizando as interações e os somatórios, obtemos:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{31} & B_{32} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (6.18)$$

onde:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_k - z_{k-1}), \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right], \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \left[\sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \right]. \quad (6.19)$$

Definindo h_k como a espessura da lâmina k , pode-se demonstrar que (6.19) é equivalente a:

$$\boxed{A_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k h_k, \quad B_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k h_k \bar{z}_k, \quad D_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k \left(h_k \bar{z}_k^2 + \frac{h_k^3}{12} \right)} \quad (6.20)$$

onde \bar{z}_k é a cota da superfície média da lâmina k , dada por $\bar{z}_k = (z_{k-1} + z_k)/2$. As eqs.(6.18) podem ser reescritas em notação compacta como:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa \end{Bmatrix} = [C]_{6 \times 6} \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa \end{Bmatrix}} \quad (6.21)$$

As tensões na lâmina 1 nas superfícies inferior e superior são dadas por

$$\begin{aligned} \{\sigma^{1l_1i}\} &= [Q^1] \{\varepsilon^{1l_1i}\} = \begin{Bmatrix} 7,692 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-2} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \\ \{\sigma^{1l_1s}\} &= [Q^1] \{\varepsilon^{1l_1s}\} = \begin{Bmatrix} 0,3077 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \end{aligned} \quad (6.52)$$

enquanto na lâmina 2 as tensões são:

$$\begin{aligned} \{\sigma^{1l_2i}\} &= [Q^2] \{\varepsilon^{1l_2i}\} = \begin{Bmatrix} 0,1026 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \\ \{\sigma^{1l_2s}\} &= [Q^2] \{\varepsilon^{1l_2s}\} = \begin{Bmatrix} 0,1795 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \end{aligned} \quad (6.53)$$

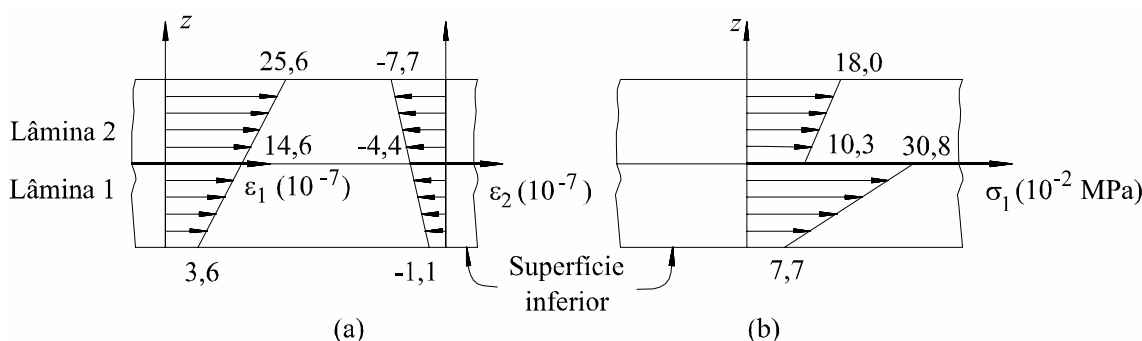


Figura 6.11: Distribuição de deformações e tensões no bimetal do Exemplo 3.

A distribuição das deformações e tensões ao longo da espessura, dada por (6.51), é representada na Figura 6.11, juntamente com as tensões. Observa-se que as deformações são contínuas, mas as tensões são descontínuas, em virtude da diferença dos módulos de elasticidade entre os dois metais.

A deflexão da barra foi obtida analiticamente no Exemplo 2, eq.(6.50). No presente caso, $C_{61}^* = 0$, de forma que a placa se flexiona nas duas direções como ilustrado na Figura 6.12 (mas sem a torção vista na Figura 6.9 do Exemplo 2). Aqui, a curvatura na direção y não é visível em virtude da pequena largura da barra. Relembremos que a placa foi tracionada, porém mesmo assim desenvolve flexão, além da extensão. Este é o chamado efeito do acoplamento membrana-flexão, representado numericamente pelo fato de que $[B] \neq [0]$.

Exemplo 4 – Laminado simétrico com 3 lâminas ortotrópicas

Considere o laminado de três lâminas mostrado na Figura 6.13. As lâminas externas, 1 e 3, são idênticas, com $h_1 = h_3 = 3,0 \text{ mm}$ e $\theta_1 = \theta_3 = 45^\circ$. A lâmina central 2 tem $h_2 = 6,0 \text{ mm}$ e $\theta_2 = 0^\circ$. Cada lâmina tem as mesmas propriedades do Exemplo 1, página 194. Obtenha as matrizes de rigidez $[A]$, $[B]$ e $[D]$.

onde $[I]$ é a matriz identidade. Usando a eq.(4.46), temos as deformações nas direções principais das lâminas:

$$\{\varepsilon^{1l_1}\} = [T_{l_1}]^{-t} \{\varepsilon^{xl_1}\} = \begin{Bmatrix} 3,38 \\ 7,34 \\ -9,24 \end{Bmatrix} 10^{-4}, \quad \text{e} \quad \{\varepsilon^{1l_2}\} = \begin{Bmatrix} 997,9 \\ 73,91 \\ -396,2 \end{Bmatrix} 10^{-6}.$$

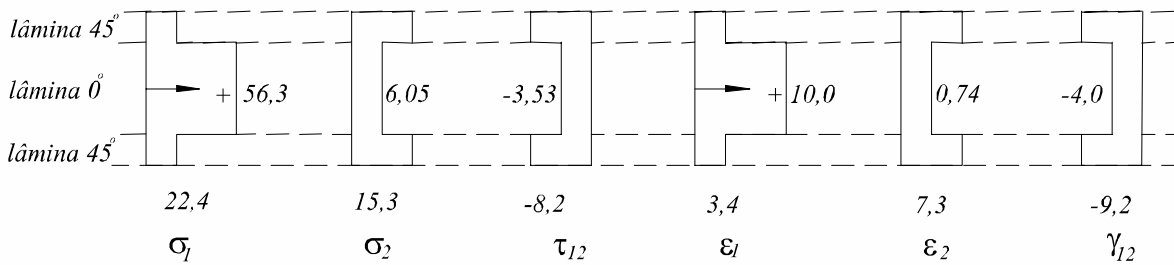


Figura 6.15: Tensões (em MPa) e deformações principais ($\times 10^{-4}$) nas lâminas.

As tensões principais são dadas por $\{\sigma^{1l_k}\} = [Q^k] \{\varepsilon^{1l_k}\}$. As matrizes de rigidez são tomadas do Exemplo 2, logo,

$$\{\sigma^{1l_1}\} = \begin{bmatrix} 56,04 & 4,68 & 0 \\ 4,68 & 18,71 & 0 \\ 0 & 0 & 8,9 \end{bmatrix} \text{GPa} \begin{Bmatrix} 3,38 \\ 7,34 \\ -9,24 \end{Bmatrix} 10^{-4} = \begin{Bmatrix} 22,37 \\ 15,31 \\ -8,22 \end{Bmatrix} \text{MPa},$$

$$\{\sigma^{1l_2}\} = \begin{bmatrix} 56,04 & 4,68 & 0 \\ 4,68 & 18,71 & 0 \\ 0 & 0 & 8,9 \end{bmatrix} \text{GPa} \begin{Bmatrix} 9,979 \\ 0,7391 \\ -3,962 \end{Bmatrix} 10^{-4} = \begin{Bmatrix} 56,27 \\ 6,05 \\ -3,53 \end{Bmatrix} \text{MPa}.$$

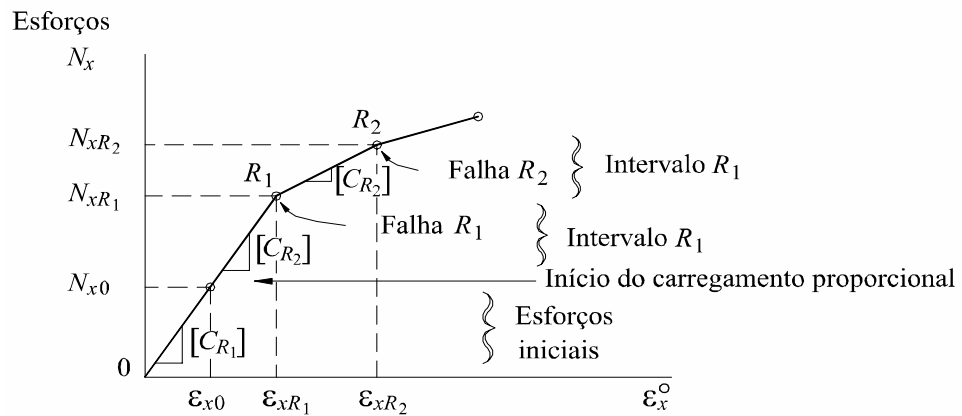
As deformações e tensões principais são representadas graficamente na Figura 6.15. Estes valores podem ser comparados com as tensões ou deformações admissíveis em cada lâmina e a análise de resistência pode ser feita, conforme o procedimento descrito na próxima seção. Observa-se que, embora as deformações nas direções x - y sejam contínuas ao longo da espessura, nas direções principais elas não o são, graças à variação brusca de orientação entre uma lâmina e outra. A Figura 6.16 mostra a orientação relativa dos diversos eixos e a representação das tensões principais em elementos diferenciais de cada lâmina.

6.4 Análise de resistência do laminado

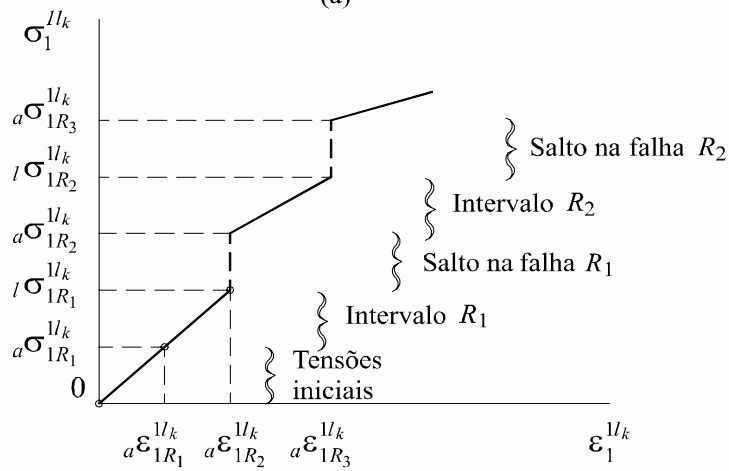
6.4.1 Análise de falha inicial

A verificação da segurança do laminado pode ser feita aplicando as componentes de tensão em cada lâmina a um dos critérios de falhas mostrados no Capítulo 4. As deformações variam linearmente ao longo da espessura do laminado e, conseqüentemente, de cada lâmina k . Desta forma, também as tensões principais terão variação linear. Isto pode ser visto substituindo (6.10) em (4.46) e esta em (4.23):

$$\{\sigma^{1l_k}\} = [Q^k] [T]^{-t} \{\{\varepsilon^o\} + z \{\kappa\}\}. \quad (6.54)$$



(a)



(b)

Figura 6.21: Diagramas esforços-deformação média e tensão-deformação numa lâmina, ilustrando esforços e tensões iniciais e saltos nas tensões. Na notação $a\sigma_{1R_i}^{lk}$ e $l\sigma_{1R_i}^{lk}$, o índice inferior 1 indica a componente de tensão na direção principal 1. Os índices à esquerda a e l indicam valores de tensão tomados no início e no final do intervalo de falha R_i . Como definido previamente, os índices superiores 1 e l_k indicam o sistema de eixos e o número da lâmina.

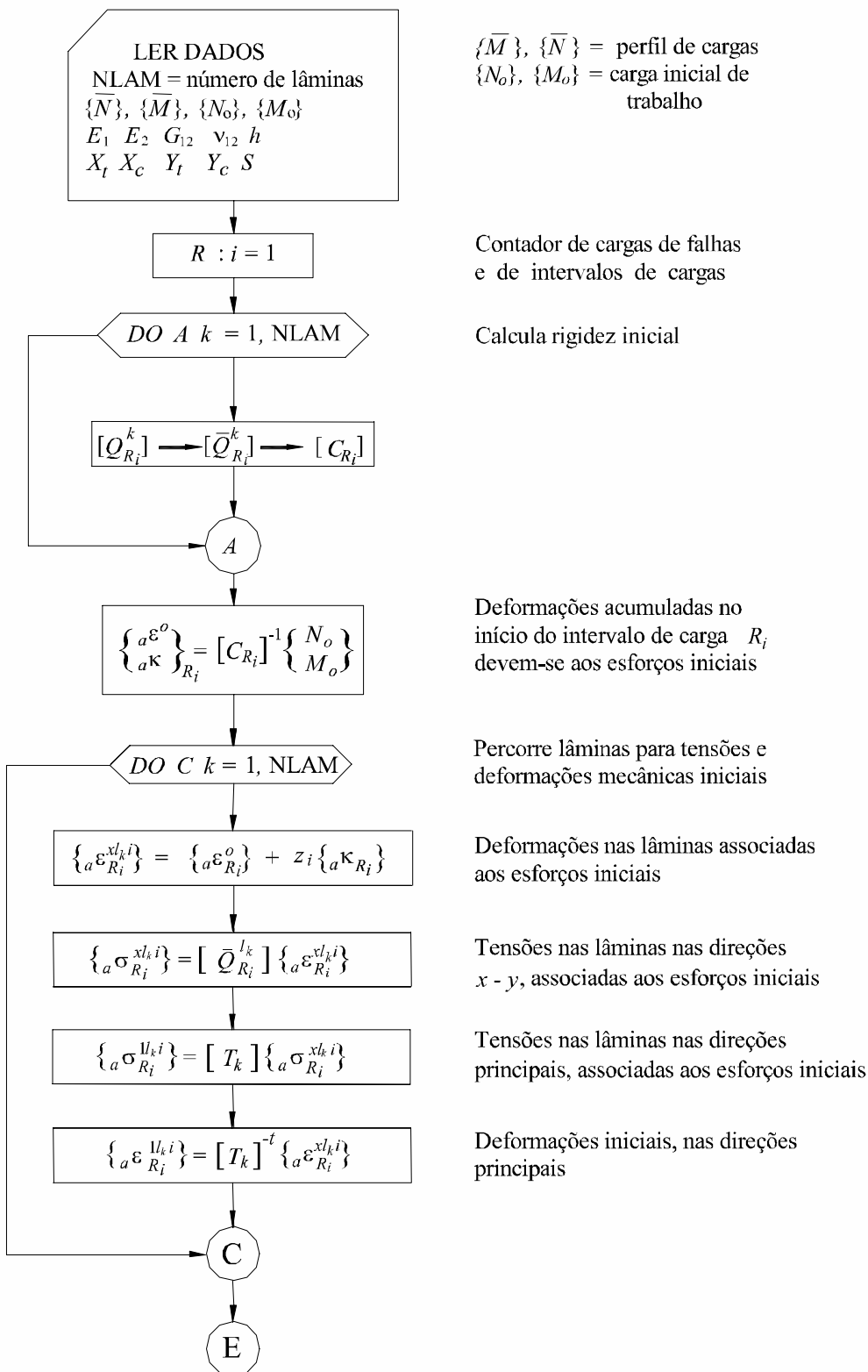


Figura 6.22: Fluxograma de análise de resistência de um laminado.

- b) Em seguida, considere que o laminado é constituído por $N = 7$ lâminas unidirecionais de iguais espessuras, orientadas em $[0^\circ/30^\circ/60^\circ/90^\circ/120^\circ/150^\circ/180^\circ]$, ou seja, com ângulos defasados de 30° .
- c) Calcule A_{11} e A_{12} e use (6.92) para estimar E_{mat} e ν_{mat} .
- d) Use as aproximações (6.96).

Solução:

a) De (6.88) obtemos $A_{11} = 13,19H10^3$ N/mm e $A_{12} = 3,967H10^3$ N/mm. De (6.90) obtemos as propriedades de uma lâmina de espessura diferencial:

$$\begin{aligned} E_1 &= 23,45 \text{ GPa}, & G_{12} &= 2,443 \text{ GPa}, \\ E_2 &= 7,172 \text{ GPa}, & \nu_{12} &= 0,25. \end{aligned} \quad (6.97)$$

Usando (6.88) e (6.92), temos as estimativas $\nu_{mat} = 0,327$ e $E_{mat} = 11,74$ GPa. Os valores obtidos pelas expressões aproximadas (6.94) são: $E_{mat} = 12,3$ GPa e $\nu_{mat} = 0,30$. Estes valores podem também ser diretamente obtidos da Figura 3.19, página 82.

b) Calculando o laminado como se fosse constituído por apenas 7 e não por infinitas lâminas, chegamos aos valores: $A_{11} = 14,89H10^3$ N/mm e $A_{12} = 3,736H10^3$ N/mm, de forma que (6.92) resulta $\nu_{mat} = 0,2509$ e $E_{mat} = 13,2$ GPa.

A tabela a seguir resume os valores obtidos e também as estimativas para o módulo cisalhante G .

	Aproximação, 7 lâminas eq.(6.94)	Expressão Completa	Aproximação, eq.(6.96)
E_{mat} (GPa)	12,13	13,2	11,74
ν_{mat}	0,30	0,2509	0,327
G_{mat} (GPa)	4,88	-	4,42

Observe que é prática corrente usar o procedimento mostrado no item (b) deste exemplo, mas usando um laminado simétrico quase-isotrópico como $[0^\circ/\pm 30^\circ/\pm 60^\circ/90^\circ]$ ou $[90^\circ/0^\circ/\pm 30^\circ/\pm 60^\circ/90^\circ/0^\circ]$, embora as fórmulas aproximativas sejam de uso muito mais simples.

6.6 Placas metálicas com *stiffeners* e grelhas metálicas

Até a década de 1940, antes, portanto, das fibras de alto desempenho, uma quantidade razoável de pesquisas em placas e cascas já era feita para os casos ortotrópicos, simétricos ou não. Na época, diversas motivações já existiam: estruturas em madeira e compensados, concreto reforçado e laminação de chapas de aço, entre outros. Um tipo bastante importante de painel metálico, desde o século XIX, é aquele constituído por placas metálicas (ou de qualquer outro material homogêneo-isotrópico), reforçadas em uma ou duas direções ortogonais com os chamados *stiffeners* ou nervuras. Dois tipos de reforços são considerados aqui, os ilustrados nas Figuras 6.31 e 6.32. Os conjuntos podem ser compostos por uma chapa, com uma série de barras soldadas longitudinalmente numa certa direção, ou ainda com um segundo conjunto de barras soldadas transversalmente formando uma grelha de malha retangular. As barras longitudinais, na direção x , e as transversais, na direção y , podem ter seções transversais idênticas ou diferentes. Em muitas aplicações prescinde-se da chapa e a placa é composta apenas pela grelha metálica. O processo de construção não necessita ser necessariamente por solda. Dependendo do material, os processos são diversos: a peça pode ser construída em uma

única operação por fundição ou forjamento para os painéis metálicos. Os painéis plásticos podem ser injetados ou moldados também em uma única operação. Painéis de madeira ou outros materiais podem ter os reforços colados. De fato, mesmo estruturas metálicas podem ser construídas por cola, resultando num processo muito mais eficiente de transmissão de esforços que com o uso de pinos, parafusos ou outras formas puntuais de união.

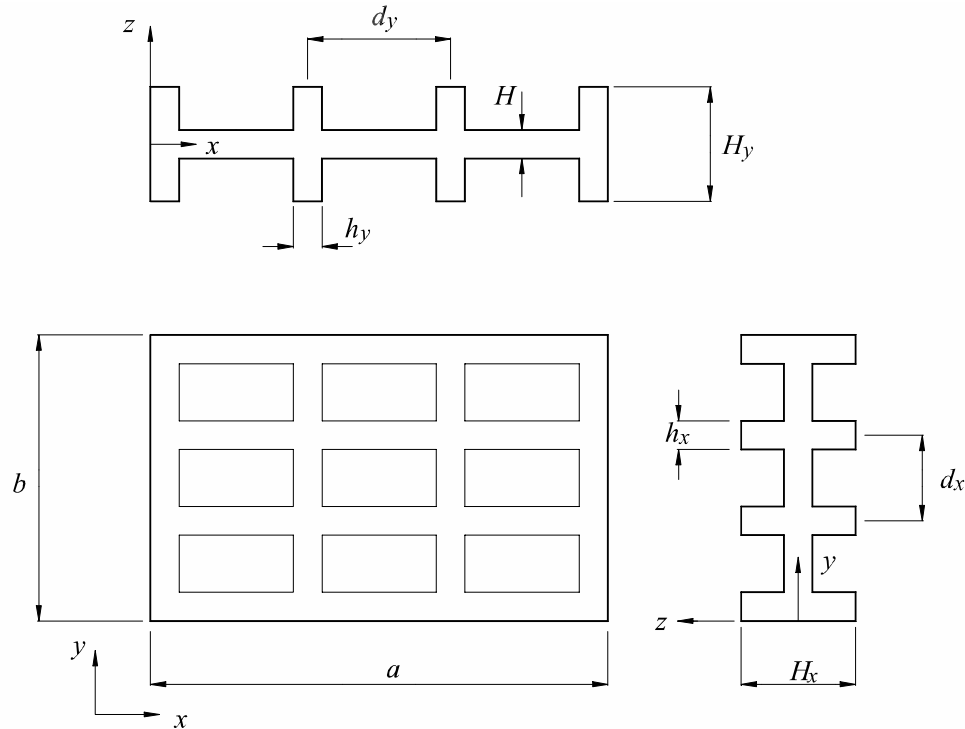


Figura 6.31: Placa metálica reforçada com *stiffeners* em duas direções ortogonais. Configuração simétrica.

Dois tipos de painéis são considerados. O da Figura 6.31 é simétrico e o da Figura 6.32, assimétrico. Em ambos os casos, porém, eles são ortotrópicos. **O objetivo aqui consiste em definir procedimentos para a estimativa dos termos das matrizes constitutivas $[A]$, $[B]$ e $[D]$ para o painel.** Conhecidas essas matrizes, a princípio podem-se usar todas as formulações e soluções desenvolvidas para placas ortotrópicas, apresentadas na Parte II do livro.

6.6.1 Grelha simétrica

Este é o caso da Figura 6.31. A matriz $[B] = [0]$ e as matrizes $[A]$ e $[D]$ têm os termos (16) e (26) nulos. O procedimento para obter os demais termos é aproximativo. Consiste em primeiro calcular as matrizes $[A]$ e $[D]$ da chapa, dados na eq.(6.23) para o caso isotrópico, e então adicionar termos para os reforços. Os reforços são considerados simplesmente como vigas de seção retangular sob flexão e torção, igualmente espaçados, do mesmo material da chapa, isotrópicos. Assim, os termos de rigidez são [34]: