

## Capítulo 11

# Formulação do problema de placas laminadas

Observa-se que nos capítulos anteriores nos limitamos a trabalhar os casos nos quais podíamos obter os esforços por equilíbrio global do componente, de forma que a solução dos deslocamentos e tensões se obtinha pelo uso das relações constitutivas e cinemáticas. Raramente se fez uso das equações diferenciais de equilíbrio. Neste capítulo apresentamos as equações do movimento e cinemática não-lineares para placas anisotrópicas. A formulação é desenvolvida tanto em forma diferencial quanto integral através do princípio dos trabalhos virtuais, de forma a permitir o subsequente tratamento de problemas de flexão estática, de dinâmica e de estabilidade. Nos capítulos seguintes, buscaremos a solução analítica para alguns problemas clássicos de placa laminada, de forma a identificar alguns efeitos importantes. Uma coletânea mais completa dos casos com solução analítica conhecida, geralmente flexão, flambagem e vibrações livres de placas laminadas retangulares, encontra-se compilada, por exemplo, em [183], [168] e [169].

### 11.1 Equações de movimento e cinemáticas

As equações desenvolvidas no Capítulo 2 são as equações de equilíbrio em termos das componentes de tensão de Cauchy. Quando há problemas de grandes deslocamentos, ou mesmo deslocamentos apenas moderadamente grandes, como no caso das análises clássicas de estabilidade, aquelas equações de equilíbrio são exatas, desde que aplicadas à configuração deformada do corpo. Em corpos sólidos, porém, é geralmente incômodo o trabalho desta forma, sendo usual o trabalho com equações adaptadas à configuração original indeformada do corpo. Usa-se então uma descrição material, lagrangeana, em vez da descrição espacial, euleriana. Apenas nesta seção se fará referência mais direta a diversos itens da teoria de mecânica do contínuo. Isto geralmente é assunto de um curso próprio e pode ser visto em livros clássicos como [113]. Leitores não familiarizados com o assunto podem passar diretamente à eq.(11.38), página 393.

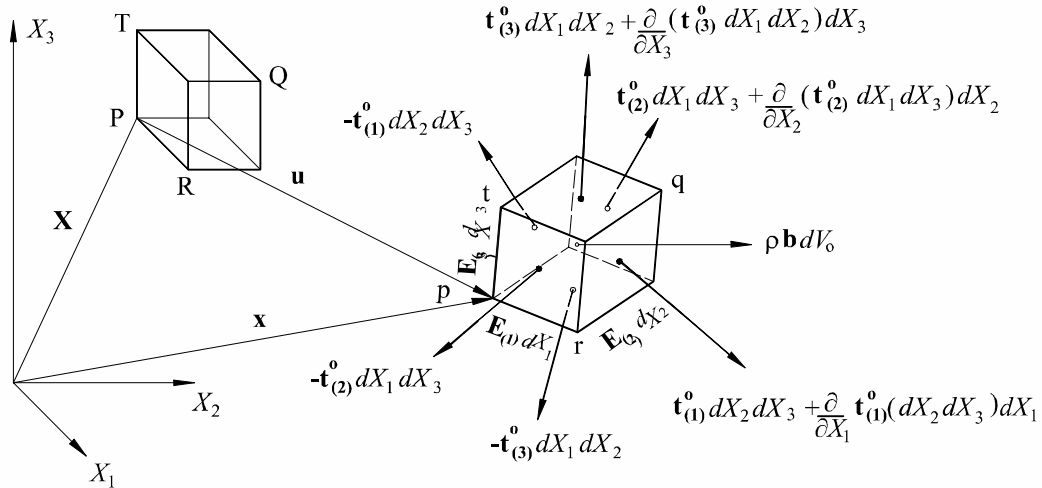
Consideremos inicialmente a Figura 11.1, onde identificamos um corpo em sua configuração de referência, inicial, e o mesmo corpo em uma configuração deformada num instante  $t$ . Consideramos um elemento de massa genérico, inicialmente na posição  $P$  definida pelo vetor posição  $\mathbf{X} = X_i \hat{\mathbf{i}}_i$ .<sup>1</sup> Esse elemento material, no instante  $t$ , ocupa a posição  $p$  definida pelo vetor  $\mathbf{x} = x_i \hat{\mathbf{i}}_i$ , com componentes

---

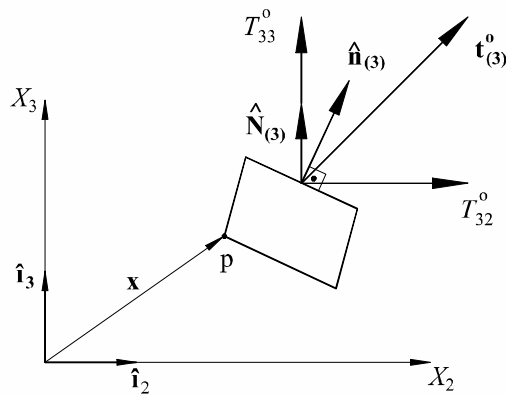
<sup>1</sup>Note que, excepcionalmente nesta seção, estaremos fazendo uso de uma notação especial para vetores e tensores, através de símbolos em negrito, como  $\mathbf{X}$ . Distinguimos este símbolo de  $\{X\}$ , que representa o arranjo formado pelas componentes nas direções dos vetores unitários  $\hat{\mathbf{i}}_1, \hat{\mathbf{i}}_2, \hat{\mathbf{i}}_3$ , isto é,  $\{X\} = \{X_1; X_2; X_3\}^t$ . Os subscritos numéricos, apenas nesta seção, serão usados para referir os eixos ordenados em vez das direções principais de ortotropia de material. Assim, 1, 2 e 3 indicam  $x, y$  e  $z$ , respectivamente. Também nesta seção usaremos a chamada regra do somatório, que diz que

onde o índice superior “t” indica transposto como usual. Como de (11.12)  $N_{k(j)} = \delta_{kj}$ , as trações nas faces  $j = 1, 2, 3$  têm componentes cartesianas  $T_{ji}^o$ , isto é,

$$\mathbf{t}_{(j)}^o = T_{ji}^o \hat{\mathbf{i}}_i, \quad \text{com componentes cartesianas } \{T_{j1}^o; T_{j2}^o; T_{j3}^o\}^t. \quad (11.18)$$



**Figura 11.3:** Diagrama de corpo livre de um elemento diferencial deformado.  $\mathbf{t}_{(j)}^o$  são vetores de tração por unidade de área inicial.



**Figura 11.4:** Elemento diferencial deformado. (Ilustrado apenas o plano 2-3 para simplificar a visualização). Também o vetor tração  $\mathbf{t}_{(3)}^o$  na face 3 e componentes  $T_{3i}^o$  de pseudotensões nesta face nas direções  $\hat{\mathbf{i}}_1 - \hat{\mathbf{i}}_2 - \hat{\mathbf{i}}_3$ .  $\hat{\mathbf{N}}_{(3)}$  é o vetor normal à face indeformada, que se deforma numa superfície de normal  $\hat{\mathbf{n}}_{(3)}$ .

A Figura 11.4 ilustra num caso bidimensional as componentes do vetor de trações no ponto  $\mathbf{x}$ , na face deformada 3, em suas componentes nas direções 1-2-3.

De forma geral, dada uma superfície cuja normal era inicialmente orientada por um  $\hat{\mathbf{N}}$  qualquer,  $\mathbf{T}^o$  produz o vetor de tensão da seguinte forma:

O terceiro termo pode ser integrado por partes:

$$\int_{-H/2}^{H/2} z \frac{\partial \tau_{xz}^{l_k}}{\partial z} dz = \int_{-H/2}^{H/2} \left[ \frac{\partial}{\partial z} (z \tau_{xz}^{l_k}) - \tau_{xz}^{l_k} \right] dz,$$

$$= z \tau_{xz} \Big|_{-H/2}^{H/2} - Q_x$$

Para o lado direito de (11.49) definimos o **segundo momento de massa** como

$$\rho_2(x, y) = \int_{-H/2}^{H/2} \rho^k z^2 dz \quad (11.50)$$

Para uma **placa homogênea** obtém-se que  $\rho_2(x, y) = \rho^k H^3/12$ . A quinta equação de placa é obtida de forma análoga, integrando a segunda equação de movimento (11.38) multiplicada por  $z$ .

O conjunto completo de equações diferenciais de movimento de uma placa sob deslocamentos moderadamente grandes pode ser coletado como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \tau_{xz} \Big|_{-H/2}^{H/2} &= \rho_0 \frac{d^2 u^0}{dt^2} + \rho_1 \frac{d^2 \psi_x}{dt^2}, \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \tau_{yz} \Big|_{-H/2}^{H/2} &= \rho_0 \frac{d^2 v^0}{dt^2} + \rho_1 \frac{d^2 \psi_y}{dt^2}, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \left[ N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + q(x, y) \\ &= \rho_0 \frac{d^2 w}{dt^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \left[ \rho_0 \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} + \rho_1 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} - \tau_{xz} \Big|_{-H/2}^{H/2} \right] - \frac{\partial w}{\partial y} \left[ \rho_0 \frac{d^2 v^0}{dt^2} + \rho_1 \frac{d^2 \psi_y}{dt^2} - \tau_{yz} \Big|_{-H/2}^{H/2} \right], \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x + z \tau_{xz} \Big|_{-H/2}^{H/2} &= \rho_1 \frac{d^2 u^0}{dt^2} + \rho_2 \frac{d^2 \psi_x}{dt^2}, \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y + z \tau_{yz} \Big|_{-H/2}^{H/2} &= \rho_1 \frac{d^2 v^0}{dt^2} + \rho_2 \frac{d^2 \psi_y}{dt^2} \end{aligned} \quad (11.51)$$

Estas equações de movimento são apresentadas em termos dos deslocamentos para laminados simétricos nas eqs.(13.17), página 453. As eqs.(11.51) correspondem à teoria de primeira ordem de Mindlin. Para a teoria de Kirchhoff, as equações de movimento são mostradas na Seção (11.3.1).

Os esforços cortantes podem ser eliminados da terceira equação com o uso das duas últimas, resultando num sistema de três equações em termos dos seis esforços coplanares  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{xy}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= \rho_0 \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} + \rho_1 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= \rho_0 \frac{\partial^2 v^0}{\partial t^2} + \rho_1 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \left[ N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + q(x, y) &= \\ &= \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho_1 \left( \frac{\partial^3 u^0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v^0}{\partial y \partial t^2} \right) + \rho_2 \left( \frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \psi_y}{\partial y \partial t^2} \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V \equiv & - \int_{\Omega} \left\{ \left[ \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - F_x \right] \hat{u} + \left[ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - F_y \right] \hat{v} \right. \\
& + \left[ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - F_z + q \right] \hat{w} \\
& + \left. \left[ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x - F_{mx} \right] \hat{\psi}_x + \left[ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y - F_{my} \right] \hat{\psi}_y \right\} d\Omega \\
& + \int_{\Gamma_f} \left\{ [X - \bar{X}] \hat{u} + [Y - \bar{Y}] \hat{v} + [Q_n^* - \bar{Q}_n^*] \hat{w} + [X_m - \bar{X}_m] \hat{\psi}_x + [Y_m - \bar{Y}_m] \hat{\psi}_y \right\} d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma_u} \left[ X \hat{u} + Y \hat{v} + Q_n^* \hat{w} + X_m \hat{\psi}_x + Y_m \hat{\psi}_y \right] d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{11.83}$$

Os termos  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ ,  $F_{mx}$  e  $F_{my}$  são forças e momentos de inércia e correspondem ao lado direito das equações do movimento (11.51) e são explicitados em (11.63).

Como a soma dos termos é nula, multiplicamos todos os termos por  $-1$ . Como  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$ , etc. são arbitrários,  $V = 0$  implica que  $X = \bar{X}$ ,  $Y = \bar{Y}$ , etc., em  $\Gamma_f$ , isto é, as condições de contorno de força são satisfeitas com a primeira integral no contorno. Na segunda integral do contorno, os pontos em  $\Gamma_u$  têm deslocamentos impostos e os esforços  $X$ ,  $Y$ , etc. são incógnitas desejadas. Nesta parte do contorno as funções peso foram escolhidas como nulas, isto é,  $\hat{u} = \hat{v} = \hat{w} = \hat{\psi}_x = \hat{\psi}_y = 0$  em qualquer  $(x, y) \in \Gamma_u$ . Assim, a última integral em (11.83) é identicamente nula, e foi adicionada apenas para levar a uma simplificação nas operações mostradas a seguir.

A partir da expressão (11.83) realizamos as mesmas operações vistas em (11.62), basicamente integrações por partes com o uso do teorema da divergência, o que resultará em (11.72), com sinais trocados, mais as duas integrais de contorno de (11.83). Simplificando os termos, obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left\{ \left\{ \begin{matrix} N \\ M \end{matrix} \right\}^t \left\{ \begin{matrix} \varepsilon^o \\ \hat{\kappa} \end{matrix} \right\} + \{Q\}^t \{\hat{\gamma}_c\} \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \left\{ \left( N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \right. \\
& + \left. \left( N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} + \left( \frac{\partial w}{\partial x} F_x + \frac{\partial w}{\partial y} F_y \right) \hat{w} \right\} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left\{ -q \hat{w} + F_x \hat{u} + F_y \hat{v} + F_z \hat{w} + F_{mx} \hat{\psi}_x + F_{my} \hat{\psi}_y \right\} d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_f} \left\{ \bar{X} \hat{u} + \bar{Y} \hat{v} + \bar{Q}_n^* \hat{w} + \bar{X}_m \hat{\psi}_x + \bar{Y}_m \hat{\psi}_y \right\} d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{11.84}$$

Esta equação é conhecida como **equação da forma fraca**, ou do **princípio dos trabalhos virtuais** associado ao problema de placas laminadas. Os esforços  $\{N\}$ ,  $\{M\}$  e  $\{Q\}$  podem ser postos em termos dos deslocamentos  $u^o$ ,  $v^o$ ,  $w$ ,  $\psi_x$  e  $\psi_y$  usando as relações constitutivas (11.56) a (11.61) e cinemáticas (11.54) e (11.55). As funções peso  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$ ,  $\hat{w}$ ,  $\hat{\psi}_x$  e  $\hat{\psi}_y$  são freqüentemente conhecidas por variações ou **deslocamentos virtuais**.  $\{\varepsilon^o\}$ ,  $\{\hat{\kappa}\}$  e  $\{\hat{\gamma}_c\}$  são chamadas **deformações virtuais** e se relacionam aos deslocamentos virtuais por (11.67)-(11.68). Sem dúvida, estes não são deslocamentos ou deformações físicas, apenas funções derivadas a partir das funções peso.

A expressão (11.84) é bastante geral, podendo ser aplicada a problemas estáticos ou dinâmicos, lineares ou não-lineares, dependendo de quais termos sejam retidos ou eliminados.

### 11.6.1 Energia potencial elástica

Consideramos o problema **elástico, linear, estático** de um laminado **semi-espesso**. Então, a energia potencial elástica é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa \end{Bmatrix}^t [C] \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa \end{Bmatrix} + \{\gamma_c\}^t [E] \{\gamma_c\} \right\} d\Omega, \quad (11.134)$$

onde  $\{\gamma_c\} = \{\gamma_{yz}; \gamma_{xz}\}^t$  e  $[E]$  é a matriz de rigidez de cisalhamento transversal, (11.84). Para um **laminado delgado, simétrico**,

$$U = U_m + U_f,$$

onde  $U_m$  e  $U_f$  são as parcelas da membrana e flexão de (11.134), dadas pelas duas integrais em:

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} & \left[ A_{11} \left( \frac{\partial u^o}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u^o}{\partial x} \frac{\partial v^o}{\partial y} + A_{22} \left( \frac{\partial v^o}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ & \left. 2 \left( A_{16} \frac{\partial u^o}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v^o}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u^o}{\partial y} + \frac{\partial v^o}{\partial x} \right) + A_{66} \left( \frac{\partial u^o}{\partial y} + \frac{\partial v^o}{\partial x} \right)^2 \right] d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. 4 \left( D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (11.135)$$

Neste caso, o comportamento de membrana, na primeira integral, é desacoplado da flexão, na segunda integral.

Para o laminado **delgado, isotrópico, homogêneo**, submetido apenas a **cargas transversais**, a energia de flexão é

$$U_f = \frac{1}{2} \int_{\Omega} D \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1 - \nu) \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} d\Omega. \quad (11.136)$$

### 11.6.2 Energia cinética de uma placa

A energia cinética de uma placa é obtida adicionando a energia cinética de cada um dos seus pontos materiais, donde resulta:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{z=-H/2}^{H/2} \rho(x, y, z) \left[ \left( \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial t} \right)^2 \right] dz d\Omega. \quad (11.137)$$

Para uma placa laminada, a densidade de cada lâmina pode ser considerada uniforme ao longo de sua espessura, isto é,  $\rho^k = \rho^k(x, y)$ . Além disso, para placas semi-espessas os deslocamentos são dados em (11.41). Substituindo em (11.137) e efetuando as integrais ao longo da espessura, temos

## Capítulo 12

# Flexão de placas delgadas laminadas

Consideramos aqui soluções para alguns problemas clássicos de placas delgadas laminadas sob carga transversal. São problemas de placa retangular, espessura constante, com algum tipo de regularidade no empilhamento das lâminas. Uma lista mais completa de problemas com solução disponível encontra-se em Reddy [143], Whitney [183] e Lekhnitskii [107], [108]. A síntese e a apresentação de alguns problemas usando teoria de primeira ordem para laminados semi-espessos pode ser vista no Capítulo 13. Observe que as soluções são apresentadas aqui com dupla finalidade: demonstrar o uso de alguns métodos clássicos de solução de problemas diferenciais e mostrar que as soluções podem efetivamente fornecer valores indicativos, úteis em etapas preliminares de projeto de componentes reais, de geometria não-simples. Adicionalmente, esses valores são úteis na verificação de resultados obtidos por métodos numéricos de uso geral, durante a qualificação de programas computacionais. Este tipo de uso é comum em atividades de pesquisa e desenvolvimento. Formulações de elementos finitos, que permitem o tratamento mais preciso de problemas reais complexos, são vistas em capítulos subsequentes.

### 12.1 Placas delgadas ortotrópicas

Considera-se primeiramente o caso do laminado delgado simétrico, com  $[B] = [0]$ , e  $A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$ , sob carga distribuída transversal. Este é um dos casos de análise mais simples. Embora a maioria dos laminados usados não se encaixe neste tipo, essas soluções são ainda assim usadas de forma aproximativa. Por sua vez, aplicações tradicionais como placas e cascas com reforços constituídos por nervuras, metálicas ou não, e placas corrugadas, como vistas na Seção 6.6, freqüentemente se encaixam perfeitamente nesta categoria.

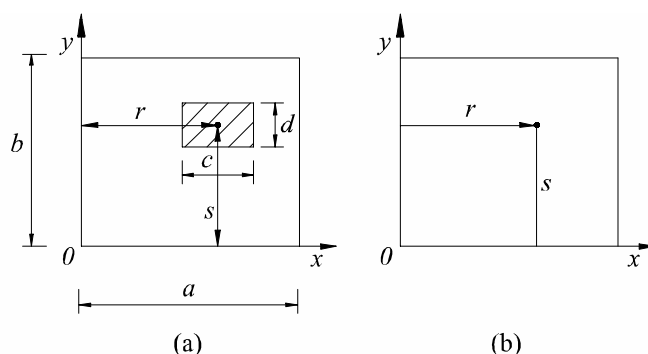
Na ausência de forças coplanares, o problema é regido pela equação (11.89), alterada para o caso estático:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y), \quad (12.1)$$

com condições de contorno como aquelas mostradas em (11.103).

#### 12.1.1 Placas retangulares simplesmente apoiadas

A placa tem dimensões  $a \times b$  nas direções  $x \times y$ , como ilustrado na Figura 12.1. As condições de contorno são



**Figura 12.2:** (a) Carga distribuída sobre uma região de dimensões  $c \times d$  da placa e (b) carga concentrada no ponto  $(r, s)$ .

**Carga composta por um harmônico  $mn$**  Neste caso, a carga é apenas uma das componentes de (12.3):

$$q(x, y) = q_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}. \quad (12.17)$$

De (12.5) a solução torna-se

$$w(x, y) = W_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \quad \text{com} \\ W_{mn} = q_{mn} \left(\frac{a}{\pi}\right)^4 \left[ D_{11}m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{mna}{b}\right)^2 + D_{22}\left(\frac{na}{b}\right)^4 \right]^{-1} \quad (12.18)$$

### 12.1.2 Solução de Levy – Placa com dois lados apoiados

Considera-se aqui a placa delgada retangular laminada ortotrópica com dois lados opostos simplesmente apoiados. A solução do mesmo problema para placas isotrópicas foi apresentada por Maurice Levy [168], mas seu procedimento também se aplica ao laminado ortotrópico. Alguns casos são detalhados em [107].

A placa tem lados de comprimentos  $a \times b$ , com os eixos posicionados como na Figura 12.1. Os lados  $y = 0$  e  $y = b$  são simplesmente apoiados, isto é,

$$w(x, 0) = w(x, b) = 0, \quad M_y(x, 0) = M_y(x, b) = 0. \quad (12.19)$$

As condições nos dois outros lados são deixadas ainda em aberto. Como ao longo da linha  $y = 0$  (ou  $y = b$ ) temos  $w = w_{,x} = w_{,xx} = 0$ , e como das relações constitutivas,  $M_y = -D_{12} w_{,xx} - D_{22} w_{,yy}$ , segue-se que a segunda das condições (12.19) pode ser posta na forma

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, 0) = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, b) = 0. \quad (12.20)$$

**Tabela 12.1:** Resultados numéricos para placa retangular com lados  $a/b = 2$ , simplesmente apoiada, cruzada, com  $b/H = 50$ .

$E_1/E_2$	$N$	$\frac{w_{\max} E_2}{q_{11} b}$	$\frac{u_{\max}^o}{w_{\max}}$	$\frac{N_x \max}{q_{11} b}$	$\frac{N_{xy} \max}{q_{11} b}$
40	2	1.749	0,00720	0,06383	0,02724
40	6	676	0,00207	0,00797	0,00345
40	10	630	0,00111	0,00263	0,00194
40	$\infty$	627	0	0	0
30	2	1.791	0,00469	0,36336	0,15507
30	6	1.562	0,00134	0,10562	0,05074
30	10	1.546	0,00091	0,06273	0,02409
30	$\infty$	1.540	0	0	0

## 12.4 Laminado delgado angular anti-simétrico

Consideramos aqui uma placa laminada delgada angular anti-simétrica regular simplesmente apoiada. Esse tipo de laminado tem  $A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$ , e a matriz  $[B]$  populada apenas por  $B_{16}$  e  $B_{26}$ . Esse laminado tem então um tipo de acoplamento diferente do laminado anti-simétrico cruzado visto na seção anterior. As equações de equilíbrio (11.87), página 408, permanecem acopladas, mas simplificam-se para:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11} \frac{\partial^2 u^o}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u^o}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v^o}{\partial x \partial y} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0, \\ (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u^o}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v^o}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v^o}{\partial y^2} - B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0, \\ D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \\ \quad B_{16} \left( 3 \frac{\partial^3 u^o}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v^o}{\partial x^3} \right) - B_{26} \left( \frac{\partial^3 u^o}{\partial y^3} + 3 \frac{\partial^3 v^o}{\partial x \partial y^2} \right) = q(x, y). \end{array} \right. \quad (12.75)$$



## Capítulo 13

# Tensões interlaminares e teoria de primeira ordem

Em razão das hipóteses de Kirchhoff, a teoria clássica de laminação apresenta uma série de limitações em seus resultados, como os seguintes:

1. Por definição, as tensões transversais  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  são consideradas nulas na TCL (Teoria Clássica de Laminação). De fato essas tensões não são nulas, e assumem valores importantes nas interfaces das lâminas nos compostos. Essas componentes de tensão são responsáveis por um dos modos de falha mais importantes e freqüentes em laminados, a **delaminação**. Fisicamente, uma das causas dessas tensões consiste na diferença abrupta de propriedades elásticas entre lâminas contíguas. O efeito dessas tensões sobre laminados é, então, muito mais importante que sobre placas e cascas homogêneo-isotrópicas. Nos compostos, o módulo de elasticidade das resinas poliméricas tem um valor muito inferior ao módulo da fibra e mesmo do laminado como um todo. Uma vez que é a resina que transmite os esforços internos, o efeito do cisalhamento no laminado é o efeito somado das contribuições de cada região interlaminar ao longo da espessura.
2. A TCL também supõe uma distribuição linear de deslocamentos coplanares ao longo da espessura, contrariamente aos resultados analíticos obtidos por teorias mais sofisticadas.
3. A equação diferencial do problema para TCL,  $\nabla^4 w = q/D$  para placas isotrópicas, permite a satisfação de apenas duas condições de contorno em cada ponto do contorno, o que impede completamente uma determinação precisa dos **efeitos de borda**, também chamada **camada limite** ou ainda *boundary layer*.
4. Também a TCL supõe um estado plano de tensões nas relações constitutivas, o que impede um cálculo preciso das tensões interlaminares.

Neste capítulo examinaremos a presença e o comportamento de dois problemas: (a) uma barra laminada sob tração e (b) o problema de flexão cilíndrica. Para ambos os problemas apresentaremos as soluções fornecidas pela TCL e pela teoria tridimensional de elasticidade. Adicionalmente, se desenvolverão as soluções fornecidas pela teoria de Mindlin para laminados semi-espessos. Esta é a teoria mais simples disponível, capaz de aproximar, até certo ponto, os efeitos de cisalhamento transversal num laminado sob flexão. Conforme se observará, embora essa teoria apresente melhores resultados que a TCL, para muitas aplicações ainda não é satisfatória. No Capítulo 19, apresentaremos as chamadas *teorias de ordem superior*, capazes de aproximar melhor os resultados.

Uma explicação plausível para o balanço deste binário é a fornecida por Pipes e Pagano [139], de que se deve desenvolver uma distribuição de tensões cisalhantes interlaminares  $\tau_{xz}$ , atuando conforme indicado na Figura 12.4, em toda a superfície de contato  $ABCD$  que desenvolva um binário igual e oposto a (13.4). Esse binário é

$$\int_{y=-b}^b y\tau_{xz} \Delta x dy. \quad (13.5)$$

A TCL não prevê a existência de  $\tau_{xz}$  neste problema, mas sua existência é confirmada pela solução da formulação de elasticidade linear mostrada a seguir. De (13.3) notamos que  $\tau_{xy}^k = 0$  para laminados de lâminas ortotrópicas alinhadas aos eixos  $xy$ . É de esperar então ausência de cisalhamento transversal nesse tipo de problema.

### 13.1.2 Solução pela teoria de elasticidade linear

Pipes e Pagano [139] analisaram o problema da barra tracionada tratando-o como um estado triaxial de tensões em vez de tensões planas. A relação tensão-deformação para uma lâmina ortotrópica em relação aos eixos principais é dada pela eq.(4.3), página 84, enquanto nas direções  $xyz$  obtidas por uma rotação em torno do eixo  $z$  é dada por (4.71):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^x & C_{12}^x & C_{13}^x & 0 & 0 & C_{16}^x \\ & C_{22}^x & C_{23}^x & 0 & 0 & C_{26}^x \\ & & C_{33}^x & 0 & 0 & C_{36}^x \\ & & & C_{44}^x & C_{45}^x & 0 \\ & & & & C_{55}^x & 0 \\ \text{sim.} & & & & & C_{66}^x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (13.6)$$

As relações deformação-deslocamento usadas são as lineares tridimensionais dadas em (11.37). Considera-se que o laminado esteja submetido a um estado de extensão uniforme nas extremidades, de forma que se consideram todas as tensões independentes de  $x$ . O campo de deslocamentos é tomado como

$$u(x, y, z) = Kx + U(y, z), \quad v(x, y, z) = V(y, z), \quad w(x, y, z) = W(y, z). \quad (13.7)$$

Note que, exceto pelo termo  $Kx$ , todo o problema é plano, em termos apenas de  $y$  e  $z$ . Desta forma, as relações deformação-deslocamento tornam-se

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= K, & \varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial W}{\partial z}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial U}{\partial z}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y}, \end{aligned} \quad (13.8)$$

e, como  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(y, z)$ , as equações de equilíbrio provenientes de (11.38) se reduzem a

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \quad (13.9)$$

Substituindo (13.7) em (13.8) e estas em (13.6) e finalmente estas últimas em (13.9), obtêm-se as três equações de equilíbrio em termos das três funções incógnitas  $U$ ,  $V$  e  $W$  para uma lâmina  $k$  genérica:

Essa expressão para as tensões pode ser posta numa outra forma. Tomemos o momento  $M_x$  da relação constitutiva:

$$\begin{aligned} M_x(x) &= B_{11}\varepsilon_x^o + D_{11}\kappa_x, \\ &= B_{11}u_{,x}^o - D_{11}w_{,xx}. \end{aligned} \quad (13.43)$$

Denotamos os coeficientes em (13.38) por  $U_m$  e  $W_m$ , como em (13.23). Desta forma, temos o momento para um harmônico  $m$  como:

$$M_x(x) = (D_{11}W_m p_m^2 - B_{11}U_m p_m) \text{sen } p_m x. \quad (13.44)$$

Se eliminamos  $\text{sen } p_m x$  entre (13.42) e (13.44), obtemos:

$$\sigma_x^k(x, z) = (A_{11}z - B_{11}) \frac{\overline{Q}_{11}^k M_x}{\Delta} \left[ \frac{q_m}{p_m^3 (D_{11}W_m p_m - B_{11}U_m)} \right]. \quad (13.45)$$

Verifica-se facilmente que o termo entre chaves é igual a 1, de forma que:

$$\boxed{\sigma_x^k(x, z) = (A_{11}z - B_{11}) \frac{\overline{Q}_{11}^k M_x}{\Delta}, \quad \text{com } \Delta = (A_{11}D_{11} - B_{11}^2)} \quad (13.46)$$

Observamos então que essa distribuição de tensões é a mesma obtida pela teoria de primeira ordem, como pode ser visto na eq.(13.33), qualquer que seja o carregamento aplicado.

### 13.2.4 Flexão cilíndrica de laminados ortotrópicos – Solução de elasticidade

Consideramos o problema da Figura 13.6, cuja solução foi mostrada nas seções 13.2.2 e 13.2.3 para as teorias de primeira ordem e a TCL, respectivamente. Pagano [129] desenvolveu a solução exata desse problema a partir das equações tridimensionais da elasticidade linear, de forma a avaliar a precisão das teorias simplificadas. A solução de Pagano para laminados ortotrópicos é sumarizada aqui, e a sua extensão para o caso de laminados angulares pode ser vista em Pagano [132]. (O leitor pode passar diretamente à seção seguinte, onde se comparam os resultados numéricos obtidos pelas diferentes teorias, sem prejuízo de continuidade do texto.)

Pagano considera que o corpo esteja num *estado plano de deformação* em relação ao plano  $x$ - $z$ . O carregamento  $q(x)$  consiste numa tração aplicada na face superior. Assim, em lugar de se trabalhar no plano  $x$ - $z$ , trabalha-se no plano  $x$ - $y$ , pois as funções independem de  $y$ . Podemos tomar a relação constitutiva (4.6), página 84, para um material ortotrópico, e aplicá-la a uma lâmina, com a restrição de que

$$\varepsilon_y = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0. \quad (13.47)$$

Disto resulta

$$\left\| \begin{aligned} \varepsilon_x &= S_{11}\sigma_x + S_{12}\sigma_y + S_{13}\sigma_z, \\ 0 &= S_{12}\sigma_x + S_{22}\sigma_y + S_{23}\sigma_z, \\ \varepsilon_z &= S_{13}\sigma_x + S_{23}\sigma_y + S_{33}\sigma_z, \\ \gamma_{xz} &= S_{55}\tau_{xz}. \end{aligned} \right. \quad (13.48)$$

O resultado da integral em  $z$  é  $8H/15$ , de forma que

$$U_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5H} \int_{\Omega} \left[ \frac{Q_x^2}{C_{55}} + \frac{Q_y^2}{C_{44}} \right] d\Omega. \quad (13.89)$$

Comparando (13.87) e (13.89), observa-se que

$$\boxed{k = \frac{5}{6} = 0,8333} \quad (13.90)$$

### 13.5 Fator $k$ para placas ortotrópicas laminadas

Quando a placa é laminada, em geral não é possível obter um fator de correção preciso. A correção passa a depender do número de lâminas, das propriedades e da orientação de cada lâmina. Para o caso especial de placa laminada ortotrópica, simétrica ou não, Whitney [186] apresenta um procedimento eficiente para estimar dois fatores,  $k_1$  e  $k_2$ , nas direções principais da placa, conforme veremos a seguir.

Considera-se um laminado ortotrópico sob carga estática de flexão cilíndrica, como na Seção 13.2.2. A tensão normal numa lâmina  $k$  é então dada por (13.33). Diferenciando aquela equação em  $x$  e usando uma das equações de equilíbrio (11.85), neste caso reduzida a  $M_{x,x} = Q_{,x}$ , obtém-se

$$\sigma_{x,x}^{l_k}(x, y, z) = -\frac{\bar{Q}_{11}^k}{\Delta} (B_{11} - A_{11}z) Q_x, \quad \text{com } \Delta = A_{11}D_{11} - B_{11}^2. \quad (13.91)$$

Tomamos a primeira das equações de equilíbrio (2.16) aplicada a essa lâmina,  $\sigma_{x,x}^k + \tau_{x,z}^k = 0$ , e a integramos na espessura:

$$\tau_{x,z}^{l_k}(x, y, z) = - \int_{z=-H/2}^z \frac{d\sigma_x^{l_k}}{dx} dz \quad (13.92)$$

Usando (13.91) e efetuando a integração, temos

$$\tau_{x,z}^{l_k} = \left[ a^k + \frac{Q_{11}^k z}{2\Delta} (2B_{11} - A_{11}z) \right] Q_x. \quad (13.93)$$

$a^k$  forma um conjunto de  $N$  constantes de integração, uma para cada lâmina, que deve ser determinado pelas condições de continuidade de tensões nas  $N - 1$  interfaces, mais a condição de cisalhamento nulo nas faces.

Seguimos a convenção adotada, pela qual a primeira lâmina é a inferior, com face em  $z = -H/2$ . A condição  $\tau_{x,z}^{l_1}(x, y, -H/2)$  aplicada a (13.93) resulta em

$$\boxed{a^{l_1} = \frac{Q_{11}^{l_1} H}{4\Delta} \left( 2B_{11} + A_{11} \frac{H}{2} \right)}. \quad (13.94)$$

No caso de uma placa isotrópica ou de uma única lâmina, claramente esta é a única constante existente. Para mais de uma lâmina, pode-se obter facilmente uma fórmula de recorrência, para  $k = 2, 3, \dots, N$ . Por exemplo, na primeira interface,  $z = z_1$ ,  $\tau^{l_1}(z_1) = \tau^{l_2}(z_1)$ , tal que

## Capítulo 14

# Vibrações de placas laminadas

Em todos os capítulos precedentes consideramos o laminado sob condições estáticas, isto é, buscamos sua deflexão e o estado de tensões sob carregamentos ditos estáticos. Frequentemente torna-se importante considerar os efeitos da inércia e do amortecimento da estrutura. Esses efeitos se tornam importantes, por exemplo, nas situações em que o carregamento varia acima de certa velocidade ao longo do tempo. Aqui se incluem os casos de impacto, de carregamentos harmônicos, de excitação pela base de fixação de máquinas, edificações e outros. Frequentemente as características dinâmicas de um componente ou estrutura são determinadas pela sua resposta à situação de vibrações livres não-amortecidas.

Neste capítulo apresentamos algumas soluções analíticas clássicas de problemas de determinação de frequências e modos naturais de vibrações.<sup>1</sup> Assim como nos Capítulos 12 e 13, as soluções são apresentadas aqui com duplo objetivo. Primeiro, demonstrar o uso de alguns métodos clássicos de solução de problemas diferenciais; segundo, mostrar que as soluções podem efetivamente fornecer valores indicativos, úteis em projeto preliminar de componentes reais, de geometria não-simples. Adicionalmente esses valores são úteis na verificação de resultados obtidos por métodos numéricos de uso geral, durante a qualificação de programas computacionais. Esse tipo de uso é comum em atividades de pesquisa e desenvolvimento. Formulações de elementos finitos, que permitem o tratamento mais preciso de problemas reais, complexos, são vistas em capítulos subsequentes.

### 14.1 Placa delgada simétrica ortotrópica

As equações do movimento, em termos dos deslocamentos, para um laminado simétrico delgado são as eqs.(11.88) para membrana e (11.89) para flexão, vistas na página 408. O problema de vibrações livres é caracterizado por  $q(x, y, t) = 0$ , para  $\forall (x, y) \in \Omega$ ,  $t > 0$ . Considera-se nesta seção que o laminado seja ortotrópico,  $D_{16} = D_{26} = 0$ , de forma que a equação de movimento para a flexão, eq.(11.89), torne-se:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_o \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (14.1)$$

onde  $\rho_o$  é a densidade por unidade de área da placa, definida em (11.44). A solução  $w(x, y, t)$  do problema deve satisfazer a equação diferencial (14.1), para  $\forall (x, y) \in \Omega$  e  $t > 0$ , e também as condições

---

<sup>1</sup>Aqui apresentamos apenas soluções baseadas na teoria clássica de laminação. Isto é suficiente para os objetivos do texto. Entretanto, soluções mais precisas existem, com as de Srinivas e Rao, [163], [164]; estes apresentam soluções analíticas em séries obtidas pela teoria da elasticidade para os problemas de flexão estática, para vibrações livres e flambagem de placas ortotrópicas laminadas simplesmente apoiadas.

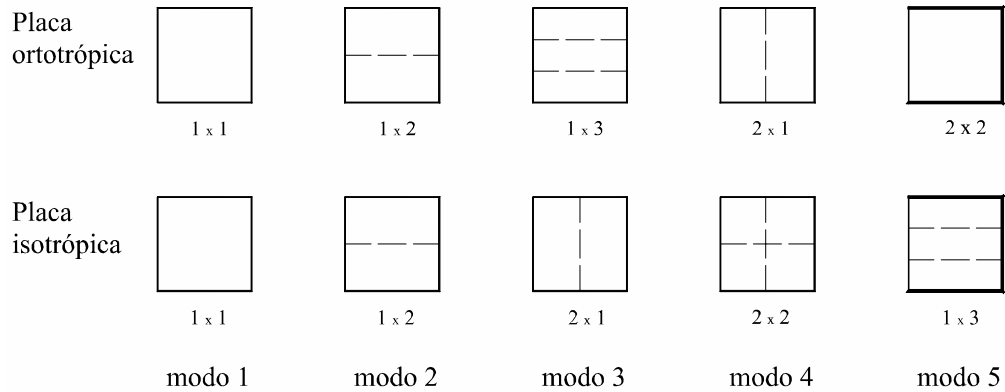
Usando as definições de  $[Q]$  e de  $[D]$  em (4.24) e (6.20), pode-se mostrar que

$$\alpha = \frac{D_{11}}{D_{22}} = \frac{E_1}{E_2}, \quad \beta = \frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{22}} = \nu_{12} + 2\frac{G_{12}}{E_2} \left(1 - \frac{\nu_{12}^2}{\alpha}\right). \quad (14.12)$$

Daí, pode-se definir  $\gamma$  como  $G_{12}/E_2$  e representá-lo em termos de  $\alpha$  e  $\beta$  como:

$$\gamma = \frac{G_{12}}{E_2} = \frac{(\beta - \nu_{12})}{2(1 - \nu_{12}^2/\alpha)}. \quad (14.13)$$

Dados  $\alpha$  e  $\beta$ , o valor de  $\gamma$  pode ser calculado para o caso de uma lâmina. Os valores na Tabela 14.1 para  $\gamma$  foram obtidos usando  $\nu_{12} = 0,25$ , um valor bastante típico.



**Figura 14.2:** Esboços das linhas nodais dos primeiros modos de vibração de placas quadradas simplesmente apoiadas.

## 14.2 Placa delgada anti-simétrica cruzada

A solução deste problema é semelhante ao caso estático visto na Seção 12.3. Como naquele caso, a solução do problema dinâmico foi apresentada por Whitney e Leissa [189] e também desenvolvida por Jones [93], [94]. Este tipo de laminado tem os termos de rigidez com (16) e (26) nulos em todas as matrizes. Além disso,  $A_{22} = A_{11}$  e  $D_{22} = D_{11}$ . A matriz  $[B]$  é nula, exceto os termos  $B_{22} = -B_{11}$ .

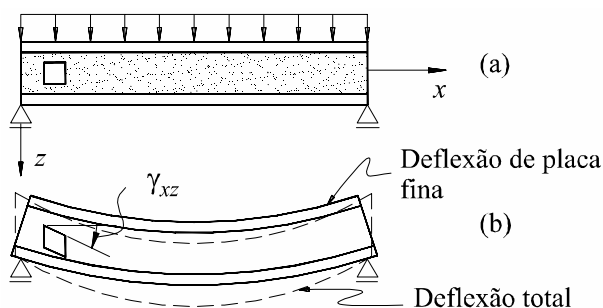
As equações de movimento vêm de (11.87), que são tomadas com  $q(x, y) = 0$ . Também, os termos de inércia coplanares  $\rho_o \ddot{u}^o$  e  $\rho_o \ddot{v}^o$  são ignorados nas duas primeiras equações. Esses termos são relativamente menores que os demais das mesmas equações e sua eliminação simplifica o processo de solução. As equações do movimento para vibrações livres de um laminado delgado anti-simétrico cruzado são, portanto,

$$\begin{aligned} \Rightarrow A_{11} \frac{\partial^2 u^o}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u^o}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v^o}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} &= 0, \\ \Rightarrow (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u^o}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v^o}{\partial x^2} + A_{11} \frac{\partial^2 v^o}{\partial y^2} + B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} &= 0, \\ \Rightarrow D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - B_{11} \left( \frac{\partial^3 u^o}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v^o}{\partial y^3} \right) + \rho_o \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (14.14)$$

## Capítulo 15

# Análise de placas-sanduíche

Uma primeira característica importante sobre o comportamento mecânico das placas-sanduíche é que elas não podem, em geral, ser consideradas placas finas. Em vez disso, elas são classificadas como placas semi-espessas ou espessas dependendo da relação  $l/H$ , onde  $l$  é um comprimento característico medido sobre a superfície, e  $H$ , sua espessura. Da mesma forma que em vigas, o efeito de grandes espessuras é que as distribuições de tensões cisalhantes transversais  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  não podem ser simplesmente ignoradas na análise. Um dos efeitos do cisalhamento transversal pode ser visto quando se considera qualitativamente a deflexão transversal de uma placa-sanduíche, como visto na Figura 15.1. Ali nota-se que, se a placa for analisada como se fosse delgada usando a teoria clássica de laminação, TCL, isto é, considerando  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  nulos, a curva de deflexão obtida seria diferente daquela obtida quando se considera o cisalhamento transversal. Esse cisalhamento tem o efeito de aumentar as deflexões provenientes do momento. Quanto menor for a relação  $l/H$ , mais pronunciado será esse efeito.



**Figura 15.1:** Comparação qualitativa entre as deflexões obtidas em placas-sanduíche usando teorias de placa fina e semi-espessa.

O fato de que em geral as placas-sanduíche têm aspectos  $l/H$  baixos é um dos fatores que tornam necessária a inclusão do cisalhamento na análise. Existe, porém, ao menos um outro fator, igualmente importante: os materiais usados como núcleo são selecionados para ser os mais leves possíveis e, como consequência, têm resistências ao cisalhamento muito menores que os materiais usados nas faces, tornando importante a correta determinação das tensões cisalhantes transversais. A análise do laminado deve então garantir a integridade do núcleo quanto ao cisalhamento.

Na próxima seção apresentaremos a teoria de primeira ordem adaptada ao uso em painéis-sanduíche. Em seções subseqüentes, apresentaremos uma solução analítica clássica obtida para um caso particular usando a teoria de elasticidade tridimensional.

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \frac{\partial^2 u^o}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u^o}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u^o}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v^o}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v^o}{\partial x \partial y} \\
 & \quad + A_{26} \frac{\partial^2 v^o}{\partial y^2} + B_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} \\
 & \quad + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} = 0, \\
 & A_{16} \frac{\partial^2 u^o}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u^o}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u^o}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v^o}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v^o}{\partial x \partial y} \\
 & \quad + A_{22} \frac{\partial^2 v^o}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} \\
 & \quad + B_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} = 0
 \end{aligned} \tag{15.19}$$

$$\begin{aligned}
 & k_1 G_{13} H_n \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + k_1 G_{23} H_n \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \\
 & \quad \left[ N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + q(x, y) = \rho_o \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\
 & F_{11} \frac{\partial^2 u^o}{\partial x^2} + 2F_{16} \frac{\partial^2 u^o}{\partial x \partial y} + F_{66} \frac{\partial^2 u^o}{\partial y^2} + F_{16} \frac{\partial^2 v^o}{\partial x^2} + (F_{12} + F_{66}) \frac{\partial^2 v^o}{\partial x \partial y} \\
 & \quad + F_{26} \frac{\partial^2 v^o}{\partial y^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} \\
 & \quad + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} - k_1 G_{13} H_n \left( \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \\
 & F_{16} \frac{\partial^2 u^o}{\partial x^2} + (F_{12} + F_{66}) \frac{\partial^2 u^o}{\partial x \partial y} + F_{26} \frac{\partial^2 u^o}{\partial y^2} + F_{66} \frac{\partial^2 v^o}{\partial x^2} + 2F_{26} \frac{\partial^2 v^o}{\partial x \partial y} \\
 & \quad + F_{22} \frac{\partial^2 v^o}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} \\
 & \quad + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} - k_2 G_{23} H_n \left( \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{15.20}$$

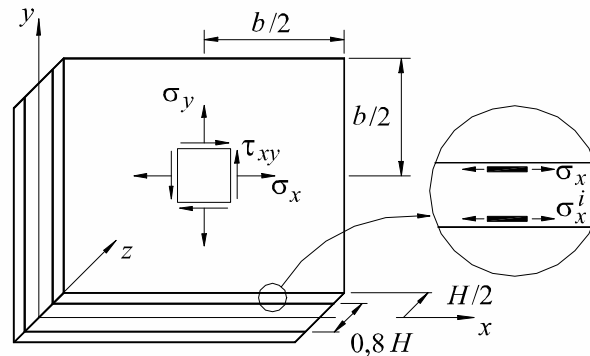
As duas equações (15.19) são as mesmas de um laminado semi-espesso de primeira ordem, com  $[A]$  e  $[B]$  definidos por (15.13). Para o conjunto completo, (15.19)–(15.20), as possíveis condições de contorno são também as mesmas dos laminados semi-espessos, as eqs.(11.53), página 397.

Apresentamos na próxima seção a solução analítica para dois casos particulares usando esta teoria aproximada. Subseqüentemente apresentamos a solução obtida pela teoria da elasticidade tridimensional, de forma a estimar a qualidade dos resultados obtidos.

## 15.2 Flexão cilíndrica de sanduíche – 1ª ordem

Consideramos a flexão cilíndrica de um laminado de faces delgadas, simplesmente apoiado, sob carga uniformemente distribuída, com largura e eixos como indicado na Figura 15.4. Este problema é análogo





**Figura 15.8:** Localização dos pontos das tensões obtidas na Tabela 15.2.

isto é, os valores máximos não ocorrem no centro,  $z = 0$ , mas em algum lugar ao longo da espessura da face. Quando isto ocorre aparecem na tabela dois valores para  $\tau_{xz}$  ou  $\tau_{yz}$ , sendo o primeiro o valor em  $z = 0$  e o segundo o valor máximo que ocorre na coordenada  $z$  indicada entre parênteses.

## 15.4 Solução de primeira ordem para sanduiche retangular

O problema de flexão de uma placa-sanduiche retangular de faces delgadas sob carga distribuída tem sua solução analítica pela teoria da elasticidade tridimensional descrita na Seção 15.3. Aqui apresentaremos a solução deste problema pela teoria de primeira ordem descrita na Seção 15.2 e em seguida compararemos as soluções com os valores obtidos pela TCL e pela solução exata.

Considere uma placa-sanduiche retangular submetida a um carregamento transversal definido por

$$q = q_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}. \quad (15.81)$$

Adotando a solução apresentada por Whitney [183], em que as faces são idênticas e ortotrópicas,  $D_{16} = D_{26} = 0$  e  $F_{ij} = 0$ , as equações de movimento (15.20) se reduzem, no caso estático, ao seguinte:

$$\begin{aligned} \Rightarrow D_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} - k_1 G_{13} H_n \left( \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0, \\ \Rightarrow (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} - k_2 G_{23} H_n \left( \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) &= 0, \\ \Rightarrow k_1 G_{13} H_n \frac{\partial}{\partial x} \left( \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + k_2 G_{23} H_n \frac{\partial}{\partial y} \left( \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + q(x, y) &= 0. \end{aligned} \quad (15.82)$$

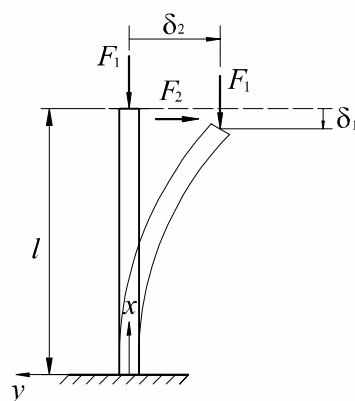
As bordas da placa são simplesmente apoiadas do seguinte tipo:

$$\text{para } x = 0 \text{ ou } x = a, \text{ com } \forall y \quad \rightarrow \quad \begin{cases} w(x, y) = 0, \\ \psi_y(x, y) = 0, \\ M_x(x, y) = D_{11} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

## Capítulo 16

# Estabilidade e carga crítica de flambagem

Uma forma simples de descrever sucintamente o conceito de estabilidade, e por extensão de instabilidade estrutural, consiste em considerar o caso elementar de uma barra idealmente reta, de seção e material uniformes, sujeita a um carregamento compressivo perfeitamente centrado e axial como mostrado na Figura 16.1.



**Figura 16.1:** Barra sob cargas compressiva e transversal.

Considere a barra sob a ação de uma força axial  $F_1$  “suficientemente pequena” que provoca um deslocamento axial  $\delta_1$ . Se, simultaneamente aplicamos uma outra força, transversal, de valor  $F_2$ , obtemos um deslocamento transversal na extremidade de valor  $\delta_2$ . O sistema é dito **estável** se, com a remoção de  $F_2$ , o deslocamento  $\delta_2$  retorna a zero. Por outro lado, o sistema é dito **instável** se, com a remoção de  $F_2$ , a barra não volta à posição vertical. Um outro comportamento também caracteriza o sistema instável. Mesmo que  $F_2$  seja bastante pequeno,  $\delta_2$  torna-se bastante grande, isto é, ordens de grandeza maior que o valor de  $\delta_2$  provocado por  $F_2$  se  $F_1$  fosse nulo.

Sem dúvida, a instabilidade do sistema dependerá do nível da força axial agindo, isto é, para  $F_1$  grande, bastaria uma pequena força transversal  $F_2$  para levar o sistema a uma resposta instável. Na realidade, existe um valor de  $F_1$  abaixo do qual o sistema será sempre estável, a chamada **carga crítica de flambagem**  $F_{cr}$ . Observe que a determinação desse valor é importante para estruturas esbeltas como barras, placas e cascas, mesmo que seu carregamento previsto seja apenas coplanar ou axial, com ausência de forças transversais como o  $F_2$  da Figura 16.1. Isto pelo seguinte motivo: se as

grandes deslocamentos não é mais uma placa, mas uma casca, de forma que, freqüentemente, o uso de uma formulação não-linear de cascas se torna mais adequada.

## 16.1 Estabilidade de placas – Método do equilíbrio adjacente

Consideramos aqui o problema de estabilidade inicial de placas laminadas semi-espessas. Usaremos nesta seção o método conhecido como **método do equilíbrio adjacente** para o tratamento de flambagem linear de placas ([168], [169]). Pelo menos dois outros métodos são também bastante usados, o da energia potencial mínima, que usa o critério de Trefftz, e o da energia cinética, que podem ser vistos em [43], [105] ou [61] por exemplo.

Consideramos o laminado inicialmente submetido a um conjunto de cargas coplanares  $\bar{X}_o$  e  $\bar{Y}_o$  em cada ponto do contorno pertencente a  $\Gamma_f$ , e o fixamos nos pontos do contorno pertencentes a  $\Gamma_u$ . ( $\Gamma_f$  e  $\Gamma_u$  são as regiões do contorno submetidas a condições de contorno de força e deslocamentos, respectivamente, como descrito no Capítulo 11.) O carregamento transversal é considerado nulo. Desprezamos também todos os efeitos de inércia. Para valores suficientemente pequenos de carregamento, a solução deste problema consiste na parte linear e estática das equações do movimento (11.51), que tomam a forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_{xo}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xyo}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial N_{xyo}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yo}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial Q_{xo}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yo}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial M_{xo}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xyo}}{\partial y} - Q_{xo} = 0, \\ \frac{\partial M_{xyo}}{\partial y} + \frac{\partial M_{yo}}{\partial x} - Q_{yo} = 0, \end{array} \right. \quad \forall (x, y) \in \Omega. \quad (16.1)$$

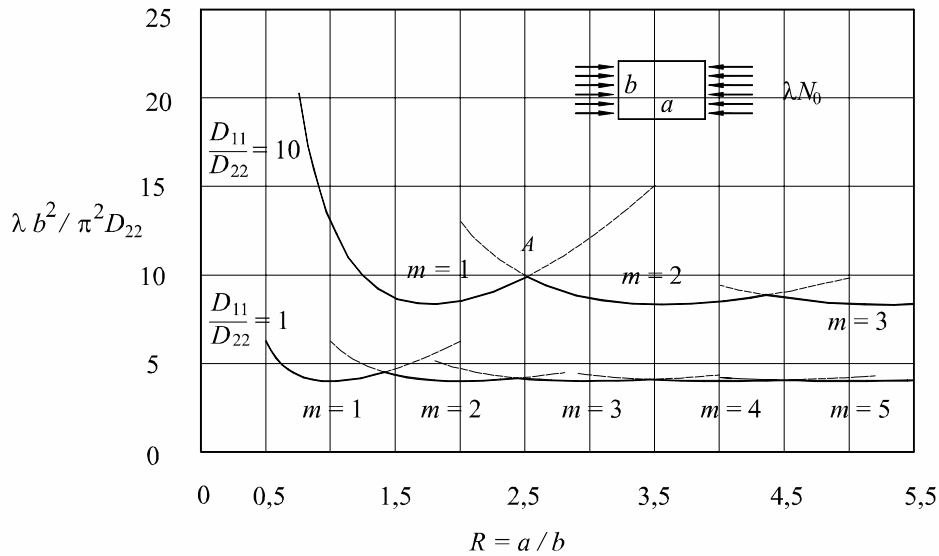
Observe ainda que, embora as duas primeiras equações sejam aparentemente desacopladas das demais, caso o laminado seja não-simétrico, com  $[B] \neq [0]$ , essas cinco equações são na realidade acopladas pelos deslocamentos. Os esforços se relacionam aos deslocamentos através das equações constitutivas e cinemáticas (11.55)–(11.61) vistas na página 398:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_o \\ M_o \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_o^o \\ \kappa_o \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_{yo} \\ Q_{xo} \end{array} \right\} = [E] \{\gamma_{co}\}, \quad (16.2)$$

com as deformações relacionadas linearmente com os deslocamentos por:

$$\{\varepsilon_o^o\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_o^o}{\partial x} \\ \frac{\partial v_o^o}{\partial y} \\ \frac{\partial u_o^o}{\partial y} + \frac{\partial v_o^o}{\partial x} \end{array} \right\}, \quad \{\kappa_o\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi_{xo}}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_{yo}}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_{xo}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{yo}}{\partial x} \end{array} \right\}, \quad \{\gamma_{co}\} = \left\{ \begin{array}{l} \psi_{yo} + \frac{\partial w_o}{\partial y} \\ \psi_{xo} + \frac{\partial w_o}{\partial x} \end{array} \right\}. \quad (16.3)$$

Observe que, como o carregamento é apenas coplanar, no caso de placas homogêneo-isotrópicas ou laminados simétricos, as eqs.(16.1) se reduzem à forma clássica mostrada em livros como [43] e [168], que consiste apenas nas duas primeiras equações, no plano. As funções  $w_o$ ,  $M_{xo}$ ,  $M_{yo}$ ,  $M_{xyo}$ ,  $Q_{xo}$  e



**Figura 16.5:** Variação da carga crítica com o aspecto da placa  $a/b$ , para  $D_{11}/D_{22} = 1$  e  $10$ , para placa ortotrópica simplesmente apoiada.

O caso  $D_{11}/D_{22} = 1$  corresponde a uma placa isotrópica e as curvas correspondentes na Figura 16.5 são clássicas, que podem ser vistas em [169], por exemplo. Para um dado aspecto  $a/b$ ,  $\lambda_{cr}$  corresponde ao valor obtido pela curva mais inferior, o que define o modo  $m$  de flambagem. Observa-se que  $\lambda_{cr}$  não difere muito do valor mínimo de cada curva. Diferenciando (16.55) em  $(a/b)$ , temos que em cada curva  $m$  o mínimo de  $\lambda$  ocorre para aspecto de placa

$$\left(\frac{a}{b}\right) = m \left(\frac{D_{11}}{D_{22}}\right)^{1/4}, \quad (16.56)$$

de forma que o mínimo de  $\lambda$  é

$$\lambda_{\min} = \frac{\pi^2 D_{22}}{b^2} \left[ \left(\frac{D_{11}}{D_{22}}\right)^{1/2} + \frac{(D_{12} + 2D_{66})}{D_{22}} \right] \quad (16.57)$$

Observe que o mínimo é o mesmo em qualquer curva  $m$ , como ilustrado na Figura 16.5. Como a variação de  $\lambda_{cr}$  com  $a/b$  é relativamente pequena para aspectos  $a/b > 1,5$ , o valor  $\lambda_{\min}$  pode ser usado como aproximação de  $\lambda_{cr}$ .

Para certos aspectos de placa  $a/b$ , é possível a ocorrência simultânea de dois modos de flambagem para uma mesma carga crítica, como ilustrado no ponto A da figura. A determinação desse aspecto de placa pode ser obtida aplicando (16.55) para  $m$  e  $(m+1)$  e igualando os resultados. Com isso, se obtém a localização dos pontos de transição entre modos subsequentes:

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{D_{11}}{D_{22}}\right)^{1/4} \sqrt{m(m+1)} \quad (16.58)$$