

ANAIIS**PROCEEDINGS****DO
III CONGRESSO
BRASILEIRO****DE ENGENHARIA
MECÂNICA**

COPPE/CAPEB

NOTA TECN.**PAPER NO. TD-2**MATRIZES INTRÍNSECAS DE RIGIDEZ E DE TENSÕESPARA PLACAS ANISOTROPICAS QUADRANGULARES

Domingos Boechat **ALVES**, Professor Titular
Departamento de Engenharia Mecânica,
Universidade Federal de Santa Catarina

1. Introdução

Este trabalho descreve o método usado na obtenção de matrizes intrínsecas de rigidez e de tensões de placas quadrangulares anisotrópicas Hookeanas.

Para a determinação da configuração de tensões auto-equilibradas e deslocamentos compatíveis, a função deslocamento do plano médio é considerada em termos de um número arbitrário de coordenadas generalizadas as quais são determinadas em termos das coordenadas nodais pelo princípio da energia complementar mínima | 1, 2, 3 |.

Resultados obtidos com esta formulação foram comparados com soluções exatas de problemas existentes na literatura e com outras formulações. Um estudo comparativo de vários tipos de malha é apresentado.

Estas matrizes intrínsecas são utilizadas pelo Programa Analisador de Sistemas Estruturais (PROASE), um programa geral de elementos finitos desenvolvido no centro tecnológico da UFSC.

2. Placa Anisotrópica Quadrangular

Seja R a região constituída pelos pontos do plano médio da placa, limitada pelo polígono fechado $ABCD$ e situada no plano $(1,2)$ do sistema intrínseco de referência $(1, 2, 3)$, que é considerado rigidamente ligado ao nodo A e com o eixo 1 coincidente com o lado AB da placa antes da deformação (Fig. 1).

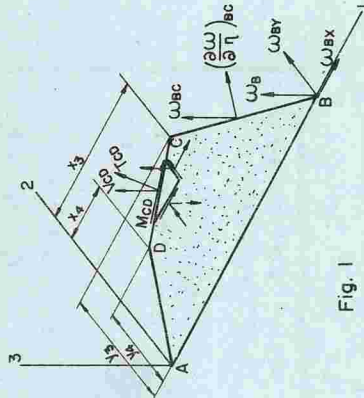


Fig. 1

A configuração deslocamento do plano médio da placa é considerada como a polinomial em (x,y) de coeficientes β_i

$$W(x,y) = -1/28_1 x^2 - 1/28_2 y^2 + 1/28_3 xy - 1/68_4 x^3 - 1/68_5 y^3 - 1/28_6 x^2 y - 1/28_7 xy^2 - \beta_8 (x^2 y^2 / 2 + \gamma_1 x^4 / 12) - \beta_9 (xy^3 / 6 + \gamma_2 x^4 / 12) - \beta_{10} (x^3 y / 6 + \gamma_3 x^4 / 12) - \beta_{11} (y^4 / 12 + \gamma_4 x^4 / 12) \quad (1)$$

onde γ_i são funções dos elementos da matriz $C = [c_{ij}]$ de constantes elásticas do material, determinados de tal forma que o equilíbrio seja automaticamente satisfeito.

O vetor momento é relacionado ao vetor $\beta^t = [\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{11}]$ através da equação (2), onde P é uma matriz 3×11 cujos elementos são funções das coordenadas dos pontos do plano médio da placa.

$$M = C P \beta \quad (2)$$

A energia de deformação específica da placa é

$$U = 1/2 \iint \beta^t C P \beta \, dA = 1/2 \beta^t H \beta \quad (3)$$

Se D e S são respectivamente o vetor deslocamento e o vetor força de contorno, então a energia complementar é

$$\bar{U} = U - \oint S^t D \, ds \quad (4)$$

Para a determinação de D compatível com o deslocamento dos elementos adjacentes considera-se, ao longo de um lado genérico l , o deslocamento transversal dado por:

$$w(s) = p_1(s)w(s_1) + p_2(s)w(s_2) + p_3(s)(\partial w / \partial s)_{s_1} + p_4(s)(\partial w / \partial s)_{s_2} \quad (5)$$

onde P_i são polinômios do terceiro grau determinados pelos deslocamentos e rotações normais aos termos do lado l . O vetor deslocamentos nodais $Q^t = [w_B \ w_{Bx} \ w_{By} \ w_{Cx} \ w_{Cy} \ w_D \ w_{Dx} \ w_{Dy}]$ é então relacionado ao vetor deslocamento D do lado l através da matriz L cujos elementos são funções dos polinômios P_i e das coordenadas dos pontos do contorno

$$D = L Q \quad (6)$$

Os momentos fletores, torsores e forças cisalhantes efetivas tem a forma (7), onde i^t representa um lado genérico da placa e θ o ângulo que este lado faz com o eixo 1 .

$$M_{i^t} = -M_1 \text{sen}^2 \theta - 2M_3 \text{sen} \theta \cos \theta - M_2 \cos^2 \theta$$

$$T_{i^t} = M_3 (\cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta) + (M_2 - M_1) \cos \theta \text{sen} \theta \quad (7)$$

$$V_{i^t} = (\partial M_2 / \partial y - 2\partial M_3 / \partial x) \cos \theta - (\partial M_1 / \partial x - 2\partial M_3 / \partial y) \text{sen} \theta$$

Usando (2) em (7) expressa-se o vetor forças de contorno S em termos do vetor β pela relação

$$S = R \beta \quad (8)$$

onde R é uma matriz 8×11 cujos elementos são funções das coordenadas dos pontos de contorno e

$$S^t = [V_{AB} \ M_{AB} \ V_{BC} \ M_{BC} \ V_{CD} \ M_{CD} \ V_{DA} \ M_{DA}] \quad (9)$$

Levando (6) e (8) em (4) resulta em

$$\bar{U} = 1/2 \beta^t H \beta - \oint \beta^t R^t L Q \, ds = 1/2 \beta^t H \beta - \beta^t T Q \quad (10)$$

Do teorema da energia complementar mínima ($\delta U = 0$) obtém-se

$$\beta = H^{-1} T Q \quad (11)$$

que levada em (3) resulta em

$$U = 1/2 Q^t T^t H^{-1} T Q \quad (12)$$

da qual se obtém a matriz de rigidez intrínseca do elemento

$$K = T^t H^{-1} T \quad (13)$$

O PROASE usa a matriz de rigidez intrínseca e determina a configuração deslocamento dos nós do sistema estrutural. O vetor deslocamento intrínseco ϕ é obtido para cada elemento e o vetor coordenadas generalizadas é então determinado por (11). A seguir as tensões de contorno são obtidas através de (8).

3. Resultados e Comparações

Resultados da análise de uma placa quadrada modelada por diversos tipos e dimensões de elementos são mostrados na figura 2. O elemento trinodal do modelo (h), baseado em formulação apresentada por Zienkiewicz [4], é aqui colocado para termo de comparação.

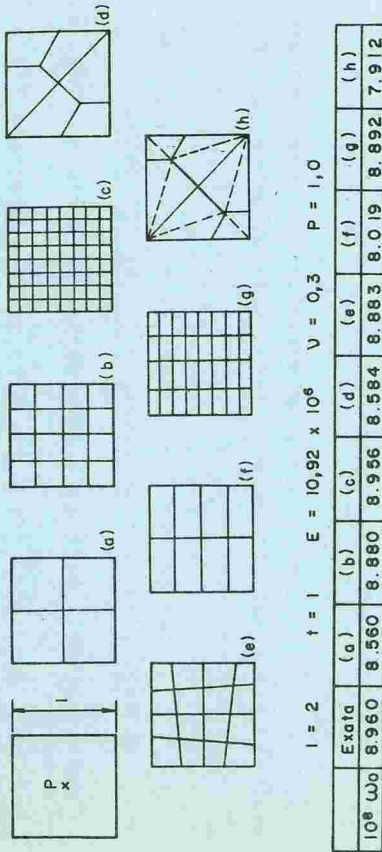


Fig. 2 - Placa quadrada de contorno fixo com carga central

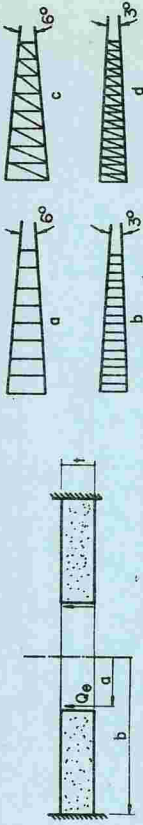
Na figura 3 uma placa anular com força cisalhante uniforme ao longo do contorno interno e rigidamente fixa ao longo do contorno externo, é modelada por elementos quadrinodais e trinodais.

4. Conclusões

O elemento quadrangular apresenta melhor convergência à solução exata do que o elemento triangular baseado na energia total de deformação mínima. Este apresenta menor

cuidade de resultados e é também extremamente sensível à variação das dimensões relativas do elemento.

Ambos apresentam alguma descontinuidade de tensões ao longo do contorno, particularmente o elemento triangular, onde estas descontinuidades são um tanto excessivas.



$a = 1,0 \quad b = 2,0 \quad t = 1,0 \quad E = 10 \quad \nu = 0,3 \quad Q_0 = 1$

r	Quant.	Exata	(a)	(b)	(c)	(d)
1,0	$10^8 \omega$	5,962	5,958	5,962	6,004	6,003
	10 M	4,242	5,180	4,226	3,728	3,649
	10 M_0	1,273	1,292	1,280	1,500	1,140
1,5	$10^8 \omega$	2,752	2,720	2,730	2,759	2,752
	10 M	-0,192	-0,206	-0,195	-0,187	-0,165
	10 M_0	0,435	0,451	0,438	0,524	0,498
2,0	$10^8 \omega$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	10 M	-2,690	-2,691	-2,689	-2,864	-2,519
	10 M_0	-0,807	-0,798	-0,804	-0,852	-0,843
		-0,500	-0,532	-0,515	-0,660	-0,638

Fig. 3 - Placa anular de contorno externo fixo

Bibliografia

[1] Argyris J, and S. Kelsey, Energy Theorems and Structural Analysis, Butterworth Scientific Publications, London, 1960.

[2] Zienkiewicz O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London, 1971.

[3] Pian, T. H. H., " Derivation of Element Stiffness Matrix by Assumed Stress Distribution " AIAA J.2, pp 1333-1336, 1964.

[4] Bazeley G. P., Y. K. Cheung, R. M. Irons, and O. C. Zienkiewicz, " Triangular Elements in Plates Bending-Conforming and Non-Conforming Solution ", Proc. of Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL TR 66-80, pp.547-576, 1965.

ALVES D.B.

MATRIZES INTRÍNSECAS DE RIGIDEZ E TENSÃO PARA

PLACAS ANISOTRÓPICAS QUADRANGULARES

Sumário

A matriz de rigidez e a matriz de tensão intrínsecas para placas anisotrópicas quadrangulares são obtidas usando-se o princípio da energia complementar, partindo de uma configuração deslocamento em termos de doze coordenadas generalizadas que permitem a obtenção de deslocamentos compatíveis no contorno e de estados de tensões auto-equilibrados. Resultados obtidos com esta formulação são comparados com outras formulações e soluções exatas existentes usando vários tipos de malhas.

INTRINSIC STIFFNESS AND STRESS MATRICES

FOR ANISOTROPIC QUADRANGULAR PLATES

Summary

Intrinsic stiffness and stress matrices for anisotropic quadrangular plates are obtained by the use of the complementary energy principle. The displacement field in terms of twelve generalized coordinates result in a compatible boundary displacement and self-equilibrated stress field. This formulation results are compared with other formulations, and with exact solutions using several mesh types and sizes.