ANAIS PROCEEDINGS

COBEM 79
V CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECANICA
CAMPINAS, 12-13-14 e 15 DEZEMBRO 1979

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
UNICAMP

ABCM

TRABALHO DE PESQUISA
RESEARCH PAPER
N.º D-14 P.P. 217 - 229

ANÁLISE DE TENSÕES TÉRMICAS EM CASCAS DE REVOLUÇÃO

Raul Guenther
Prof. Aux. de Ensino - Depto. Eng. Mecânica
CT/UFSC - Florianópolis - SC - Brasil

Domingos Boechat Alves
Prof. Titular - Depto. Eng. Mecânica
CT/UFSC - Florianópolis - SC - Brasil

Sumário

Neste trabalho apresenta-se um modelo analítico-numérico para a determinação de tensões resultantes, deslocamentos e deformações em cascas finas de revolução, submetidas a uma distribuição de temperatura $T = T(s,\theta,z)$. O desenvolvimento analítico é realizado utilizando-se a primeira aproximação de Love, e a formulação numérica é feita através de diferenças finitas, sendo os resultados apresentados obtidos através de um programa digital.

Summary

This work describes an analitic-numerical process to analise stress resultants, strains and displacements in thin shells of revolution, subjected to an arbitrary temperature distribution $T = T(s,\theta,z)$. The analitical development is based on Love's first aproximation, and the numerical formulation is made by finite difference equations. The results presented are obtained by a digital program.

1. Introdução

Este trabalho apresenta um modelo analítico para o cálculo de tensões resultantes, deslocamentos e deformações em cascas finas de revolução, quando submetidas a uma dada distribuição de temperaturas $T = T(s,\Theta,z)$. O material da casca é considerado elasto-termicamente ortotrópico, podendo ter propriedades variáveis ao longo do meridiano. A distribuição de temperatura no sentido circunferencial, deve ser suficientemente suave para que possa ser expandida em série de Fourier, e o módulo de elasticidade nesta direção, por ser considerado constante, é tomado para a temperatura média. A formulação numérica do modelo é baseada em diferenças finitas, e os resultados obtidos através de um programa digital desenvolvido em FORTRAN IV.

2. Equações fundamentais

A figura 1 mostra um elemento genérico com o sistema de referência da casca, as tensões resultantes, os deslocamentos e os parâmetros geométricos adimensionalizados através de a_o e h_o, respectivamente o comprimento e a espessura de referência.

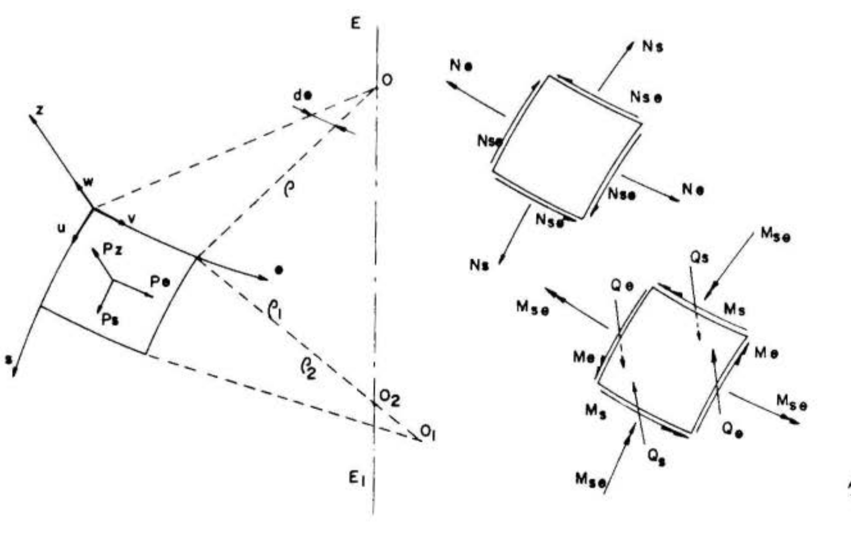

Fig. 1 - Elemento de casca e tensões resultantes

Integrando as equações de equilíbrio, determinadas na teoria da elasticidade [4], ao longo da espessura da casca, obtém-se as equações diferenciais de equilíbrio de um elemento genérico de cascas de revolução:

$$
\begin{aligned}
&(\rho\ N_s)' + \dot{N}_{s\Theta} - \rho'\ N_\Theta + \frac{\rho}{\rho_1}\ Q_s = -\rho\ p_s \\
&(\rho\ N_{s\Theta})' + \dot{N}_\Theta + \rho'\ N_{s\Theta} - \rho_1\ \rho''\ Q_\Theta = -\rho\ p_\Theta \\
&(\rho\ Q_s)' + \dot{Q}_\Theta - \frac{\rho}{\rho_1}\ N_s + \rho_1\ \rho''\ N_\Theta = -\rho\ p_z \qquad (1) \\
&(\rho\ M_s)' + \dot{M}_{s\Theta} - \rho'\ M_\Theta - \rho . Q_s = 0 \\
&(\rho\ M_{s\Theta})' + \dot{M}_\Theta + \rho'\ M_{s\Theta} - \rho\ Q_\Theta = 0
\end{aligned}
$$

onde $(\ )' = \partial/\partial s(\ )$ e $(\dot{\ }) = \partial/\partial\Theta(\ )$.

Se a superfície média da casca for tomada como a superfície de referência, e se as propriedades elásticas do material forem simétricas em relação à superfície média, a relação entre os vetores tensões resultantes $N = (N_s, N_\Theta, N_{s\Theta})$, $M = (M_s, M_\Theta, M_{s\Theta})$ e os vetores deformação $\varepsilon = (\varepsilon_s, \varepsilon_\Theta, \varepsilon_{s\Theta})$, e mudança de curvatura $k = (k_s, k_\Theta, k_{s\Theta})$ na superfície média é:

$$
\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \Theta \\ \Theta & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P_T \\ M_T \end{Bmatrix} \qquad (2)
$$

onde $a_{ij} = a_{ji}$ são as constantes de rigidez extensionais, $d_{ij} = d_{ji}$ são as constantes de rigidez flexionais, $P_T = (P_{Ts}, P_{T\Theta}, 0)$ e $M_T = (M_{Ts}, M_{T\Theta}, 0)$ são respectivamente a força e o momento térmico [2].

As relações entre os vetores deformação e deslocamento, e mudança de curvatura e deslocamento utilizadas neste trabalho, foram desenvolvidas a partir das mesmas relações estabelecidas na teoria da elasticidade [4], observando-se as hipóteses e particularidades geométricas do problema de cascas delgadas de revolução [2].

$$\varepsilon_s = u' + \rho_1^{-1} w$$

$$\varepsilon_\Theta = \rho^{-1}(\rho' u + \dot{v} - \rho_1 \rho'' w) \qquad (3)$$

$$\varepsilon_{s\Theta} = \rho^{-1} \dot{u} - \rho' \rho^{-1} v + v'$$

$$k_s = -\rho_1' \rho_1^{-2} u + \rho_1^{-1} u' - w''$$

$$k_\Theta = \rho'(\rho \rho_1)^{-1} u - \rho_1 \rho'' \rho^{-2} \dot{v} - \rho^{-2} \ddot{w} - \rho' \rho^{-1} w' \qquad (4)$$

$$k_{s\Theta} = (\rho \rho_1)^{-1} \dot{u} + [2\rho_1 \rho' \rho'' \rho^{-2} - (\rho_1 \rho'')'\rho^{-1}]v -$$
$$- \rho_1 \rho'' \rho^{-1} v' + 2\rho' \rho^{-2} \dot{w} - 2\rho^{-1} \dot{w}'$$

Eliminando todas as incógnitas exceto u, v, w e M_s, obtêm-se um sistema de quatro equações diferenciais parciais. Expandindo as variáveis que são funções de Θ em série de Fourier de maneira compatível [5], resulta um sistema de quatro equações diferenciais ordinárias na variável s, para cada harmônico n. Adimensionalizando todas as variáveis usando a_o, h_o, E_o (módulo de elasticidade de referência), σ_o (tensão de referência), T_o (temperatura de referência) e considerando $X = (u,v,w,M_s)$, resulta:

$$PX'' + QX' + RX = C \qquad (5)$$

onde os elementos das matrizes P, Q e R são funções dos parâmetros geométricos e das constantes de rigidez da casca, o vetor C é função dos parâmetros geométricos, dos carregamentos e da distribuição de temperaturas, e se encontram indicados no Apêndice.

O sistema de equações diferenciais (5) é de oitava ordem, exigindo portanto a prescrição de quatro condições de contorno em cada borda. Se

$$\hat{N}_{s\Theta} = N_{s\Theta} - \rho_1 \rho'' \rho^{-1} \beta M_{s\Theta}, \quad \hat{Q}_s = Q_s + n \rho^{-1} \beta M_{s\Theta} \qquad (6)$$

são as tensões resultantes efetivas nas bordas, as condições de contorno em cada borda podem ser dadas [1]:

$$
\begin{aligned}
g_1 \, N_s + h_1 \, u &= e_1 \\
g_2 \, \hat{N}_{s\Theta} + h_2 \, v &= e_2 \\
g_3 \, \hat{Q}_s + h_3 \, w &= e_3 \\
g_4 \, \phi_s + h_4 \, M_s &= e_4
\end{aligned}
\tag{7}
$$

onde $\phi_s = \rho_1^{-1} u - w'$ é a rotação da tangente à linha de coordenadas s.

Como N_s, $\hat{N}_{s\Theta}$, $\hat{Q}_s$ e ϕ_s podem ser escritas em função de X e X', a equação diferencial que governa os contornos é:

$$EX' + FX = Y \tag{8}$$

onde os elementos das matrizes E, F e do vetor Y encc itramse indicados no Apêndice.

Resolvida a equação diferencial (5) com as condições de contorno (8), as tensões resultantes, deformações e mudanças de curvatura da superfície de referência, são determinadas respectivamente pelas equações (2), (3) e (4).

3. Formulação numérica

A formulação numérica das equações (5) e (8) é feita por diferenças finitas usando:

$$
\begin{aligned}
X_1' &= (2h)^{-1}(-3X_1 + 4X_2 - X_3) + \Theta h^2 \\
X_i' &= (2h)^{-1}(X_{i+1} - X_{i-1}) + \Theta h^2 \qquad i = 2,\ n-1 \\
X_n' &= (2h)^{-1}(X_{n-2} - 4X_{n-1} + 3X_n) + \Theta h^2 \\
X_i'' &= h^{-2}(X_{i-1} - 2X_i + X_{i+1}) + \Theta h^2 \qquad i = 2,\ n-1
\end{aligned}
\tag{9}
$$

onde h é o espaçamento pivotal e h é o número de pontos pivotais.

Aplicando as equações (9) na equação (5), obtém-se:

$$A_{1i}\, X_{i-1} + A_{2i}\, X_i + A_{3i}\, X_{i+1} = C_i \quad i = 2,\ n-1 \quad (10)$$

com $A_{1i} = h^{-2}P_i - (2h)^{-1}Q_i$, $A_{2i} = R_i - 2h^{-2}\, P_i$ e

$$A_{3i} = h^{-2}\, P_i + (2h)^{-1}Q_i$$

Aplicando as equações (9) na equação (8), obtém-se pa ra as bordas:

$$\begin{aligned} A_{11}\, X_1 + A_{21}\, X_2 + A_{31}\, X_3 &= Y_1 \\ A_{1n}\, X_{n-2} + A_{2n}\, X_{n-1} + A_{3n}\, X_n &= Y_n \end{aligned} \quad (11)$$

onde $A_{11} = F_1 - 1{,}5h^{-1}\, E_1$, $A_{21} = 2h^{-1}E_1$, $A_{31} = -(2h)^{-1}E_1$

$$A_{1n} = (2h)^{-1}E_n,\ A_{2n} = -2h^{-1}E_n,\quad A_{3n} = 1{,}5\ h^{-1}E_n + F_n$$

Como as matrizes A_{11} e A_{3n} podem ser singulares,o sis tema deve ser modificado antes de se proceder sua solução. Essa modificação consiste na obtenção de duas equações pela aplicação de (10) nos pontos i = 2 e i = n-1, com as quais elimina-se respectivamente A_{11} e A_{3n}, obtendo-se:

$$\begin{aligned} \overline{A}_{21}\, X_2 + \overline{A}_{31}\, X_3 &= \overline{C}_2 \\ \overline{A}_{1,n-1}\, X_{n-2} + \overline{A}_{2,n-1}\, X_{n-1} &= \overline{C}_{n-1} \end{aligned} \quad (12)$$

onde $\overline{A}_{21} = A_{11}(A_{12})^{-1}A_{22} - A_{21}$, $\overline{A}_{31} = A_{11}(A_{12})^{-1}A_{32} - A_{31}$

$\overline{C}_2 = A_{11}(A_{12})^{-1}C_2 - Y_1$, $\overline{A}_{1,n-1} = A_{3n}(A_{3,n-1})^{-1}A_{1,n-1} - A_{1n}$

$\overline{A}_{2,n-1} = A_{3n}(A_{3,n-1})^{-1}A_{2,n-1} - A_{2n}$,

$\overline{B}_{n-1} = A_{3n}(A_{3,n-1})^{-1}C_{n-1} - Y_n$

Utilizando as equações (10) e (12) constroi-se um si tema linear com uma forma característica, cuja solução através de um esquema numérico simples, que utiliza pouca memória de computador, encontra-se apresentada na referência [5] . Obtém-se, desta forma, as soluções para X_i, i = 2, n-1, sendo então X_1 e X_n determinados por

$$X_1 = (A_{12})^{-1}(C_2 - A_{22} X_2 - A_{32} X_3)$$

$$X_n = (A_{3,n-1})^{-1}(C_{n-1} - A_{1,n-1} X_{n-2} - A_{2,n-1} X_{n-1}) \qquad (13)$$

4. Resultados

Utilizando o programa desenvolvido, resolveu-se problemas com solução analítica conhecida, com o objetivo de verificar o modelo.

A figura 3 mostra o comportamento do deslocamento e das tensões resultantes próximas a uma extremidade livre de uma casca cilíndrica (figura 2), com temperatura interna constante positiva ($\Delta T/2$) e uma temperatura externa constante negativa ($-\Delta T/2$) de igual valor à temperatura interna, (ou seja, cujo carregamento é apenas um "momento térmico"). A solução analítica foi obtida a partir da referência [6] , podendo-se observar que os resultados numéricos são bastante próximos a ela.

A figura 4 apresenta os resultados obtidos para uma casca cilíndrica uniformemente aquecida até uma temperatura T, engastada nos extremos. A solução analítica deste problema, é obtida nas referências [2, 3], considerando que a "força térmica" na direção axial é nula ($P_{Ts} = 0$), ao longo da casca e nos contornos. Introduzindo esta simplificação no programa, a solução numérica aproxima-se bastante da solução analítica, como pode ser observado. Para mostrar a implicação desta simplificação nos resultados, apresenta-se, também, a solução numérica sem considerá-la.

Soluções numéricas para outros harmônicos ($n \neq 0$), mostram a convergência dos coeficientes de Fourier para este problema.

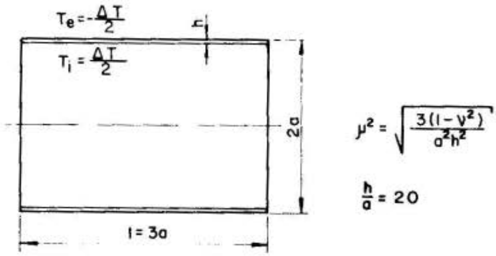

Fig.2 Casca cilíndrica com "momento térmico"

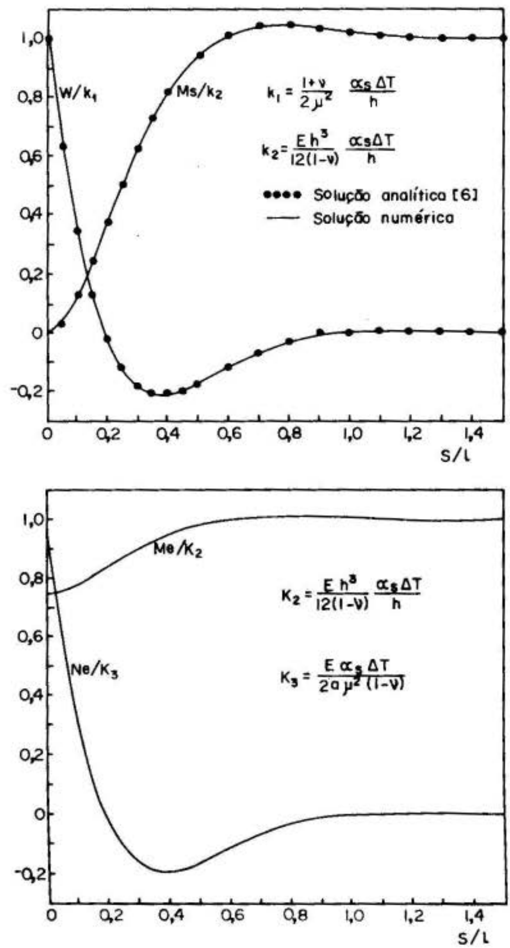

Fig.3 Deslocamento e tensões resultantes

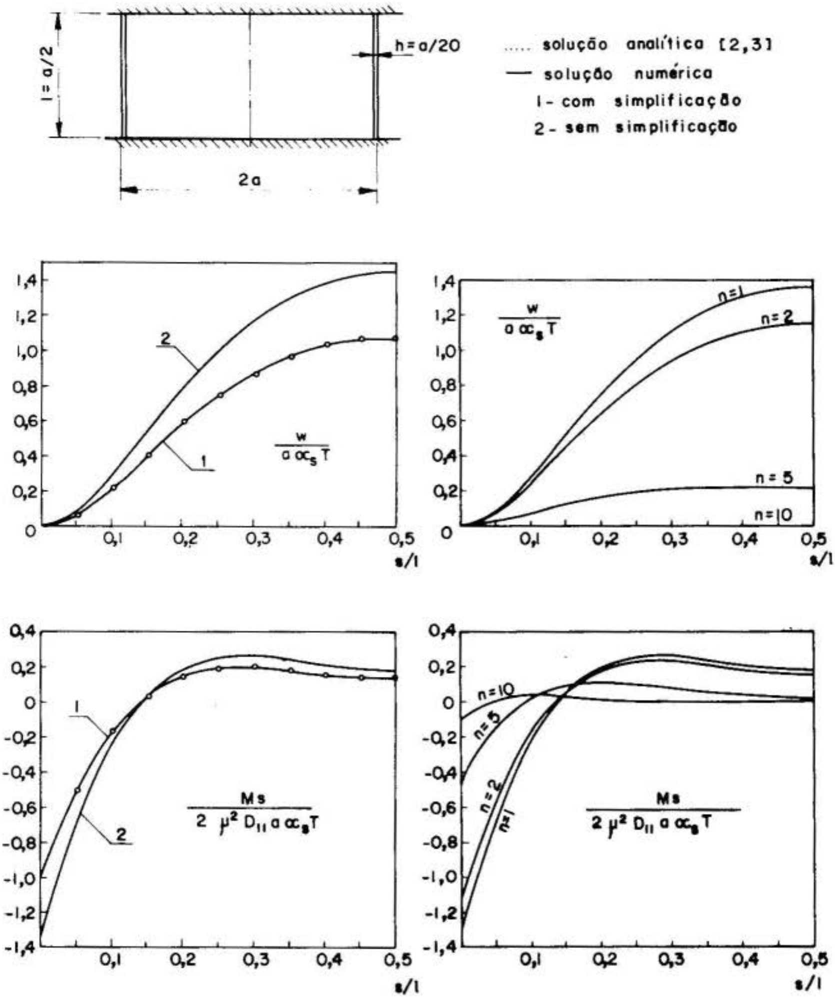

Fig.4 Casca cilíndrica uniformemente aquecida

5. Agradecimento

Os autores agradecem à Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP) e à Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN) que apoiaram a realização desta pesquisa.

Bibliografia

[1] Alves, D.B., "Análise numérica de cascas ortotrópicas", Anais do IV COBEM, Paper nº A-11, pp. 131-142 (1977).

[2] Kraus, H., "Thin elastic shells", John Wiley and Sons, Inc., New York (1967).

[3] Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger, "Theory of plates and shells", 2nd. Ed., McGraw-Hill, Kogakusha, Tokyo, (1959).

[4] Alves, D.B., "Teoria da elasticidade" - Centro Tecnológico/UFSC (1977).

[5] Guenther, R., "Análise de tensões térmicas em cascas de revolução", Dissertação de Mestrado - UFSC (1979).

[6] Kent, C.H., "Thermal stresses in thin-walled cylinders". Transactions of ASME - Applied Mechanics - APM - 53-13, pp. 167-180, (1953).

Apêndice

Elementos não nulos das matrizes P, Q, R e do vetor C:

$$p_{11} = \rho a_{11},\ p_{22} = \rho a_{33} + (\rho_1\rho'')^2(2\rho)^{-1}\beta d_{33},$$

$$p_{23} = -\rho^{-1}\rho_1\rho''\ \beta d_{33}n,\ p_{32} = -\rho^{-1}\rho_1\rho''\ \beta d_{33}n,$$

$$p_{33} = \rho^{-1}(\rho')^2\ \beta d\Theta + 2\rho^{-1}\ \beta d_{33}n^2,\quad p_{34} = \rho\beta,\ p_{43} = d_{11},$$

$$q_{11} = \rho' a_{11} + \rho a'_{11},\quad q_{12} = [a_{12} + a_{33} - (2\rho)^{-1}\rho''\ \beta d_{33}]n$$

$$q_{13} = \rho_1^{-1}\rho a_{11} - \rho_1\rho'' a_{12} + (\rho\rho_1)^{-1}(\rho')^2\ \beta d\Theta + (\rho\rho_1)^{-1}\beta d_{33}n^2$$

$q_{14} = \rho_1^{-1}\rho\beta$, $q_{21} = -[a_{12} + a_{33} - (2\rho)^{-1}\rho''\beta d_{33}]n$

$q_{22} = \rho' a_{33} + \rho a_{33}' + \rho^{-1}\rho_1\rho''\beta\{[(\rho_1\rho'')' - (2\rho)^{-1}\rho_1\rho''\rho']d_{33} +$

$+\rho_1\rho'' d_{33}'/2\}$, $q_{23} = -(\rho^{-1}\rho_1\rho'' d_{33}' + \rho^{-2}\rho_1\rho''\rho' d\Theta)\beta n$

$q_{31} = \rho_1\rho'' a_{12} - \rho_1^{-1}\rho a_{11} - (\rho\rho_1)^{-1}(\rho')^2\ \beta d\Theta - (\rho\rho_1)^{-1}\beta d_{33}\ n^2$

$q_{32} = \{2[\rho^{-2}\rho_1\rho''\rho' - \rho^{-1}(\rho_1\rho'')']d_{33} - \rho^{-1}\rho_1\rho'' d_{33}' +$

$+ \rho^{-2}\rho_1\rho''\rho' d\Theta\}\beta n$, $q_{33} = \{[2\rho^{-1}\rho'\rho'' - \rho^{-2}(\rho')^3]\ d\Theta +$

$+ \rho^{-1}(\rho')^2\ d\Theta'\}\beta - 2(\rho^{-2}\rho' d_{33} - \rho^{-1}d_{33}')\beta n^2$

$q_{34} = \rho'(2-ds)\beta$, $q_{41} = -\rho_1^{-1}d_{11}$, $q_{43} = \rho^{-1}\rho' d_{12}$

$r_{11} = \rho'' a_{12} + \rho' a_{12}' - \rho^{-1}(\rho')^2 a_{22} - (\rho\rho_1^2)^{-1}(\rho')^2\ \beta d\Theta -$

$- [\rho^{-1}a_{33} + (2\rho\rho_1^2)^{-1}\ \beta d_{33}]\ n^2$

$r_{12} = \{a_{12}' - \rho^{-1}\rho'(a_{22} + a_{33}) + \beta[\rho^{-2}\rho'\rho''(d_{33} + d\Theta) -$

$- (2\rho\rho_1)^{-1}(\rho_1\rho'')' d_{33}]\}n$

$r_{13} = (\rho_1^{-1}\rho' - \rho_1^{-2}\rho\rho_1')a_{11} + \rho_1^{-1}\rho a_{11}' - [(\rho_1\rho'')' + \rho_1^{-1}\rho']a_{12} -$

$- \rho_1\rho'' a_{12}' + \rho^{-1}\rho_1\rho''\rho' a_{22} - (\rho_1\rho^2)^{-1}\rho'\beta(d_{33} + d\Theta)n^2$

$r_{14} = \rho_1^{-1}\rho'\beta(1-ds)$, $r_{21} = -[\rho^{-1}\rho'(a_{22} + a_{33}) + a_{33}' -$

$- \rho^{-2}\rho'\rho''\beta(d_{33}/2 + d\Theta) - (2\rho)^{-1}\rho''\beta d_{33}' + (2\rho\rho_1)^{-1}\rho_1'\rho''\beta d_{33}]\ n$

$r_{22} = -[\rho^{-1}(\rho')^2 + \rho'']a_{33} - \rho' a_{33}' + \rho^{-1}\rho_1\rho''\beta\{[(\rho_1\rho'')''/2 -$

$-(2\rho)^{-1}(\rho_1\rho'')'\rho' - \rho^{-1}\rho_1(\rho'')^2]d_{33} + [(\rho_1\rho'')'/2 -$

$- \rho^{-1}\rho_1\rho''\rho']d_{33}'\} - [\rho^{-1}a_{22} + \rho^{-3}(\rho_1\rho'')^2\ \beta d\Theta]\ n^2$

$r_{23} = \rho^{-3}\rho_1\rho''\beta d\Theta n^3 - [\rho_1^{-1}a_{12} - \rho^{-1}\rho_1\rho''a_{22} - \rho^{-2}\rho_1(\rho'')^2\beta d_{33} -$

$- \rho^{-2}\rho_1\rho''\rho'\ \beta d_{33}']\ n, \quad r_{24} = \rho^{-1}\rho_1\rho''\beta ds\ n$

$r_{31} = \rho^{-1}\rho_1\rho''\rho' a_{22} - \rho_1^{-1}\rho' a_{12} + [(\rho^2\rho_1)^{-1}(\rho')^3 -$

$- 2(\rho\rho_1)^{-1}\rho'\rho'' + (\rho\rho_1^2)^{-1}(\rho')^2\rho_1']\beta d\Theta - (\rho\rho_1)^{-1}(\rho')^2\ \beta d\Theta' -$

$- [(\rho\rho_1)^{-1}d_{33}' - (\rho\rho_1^2)^{-1}\rho_1' d_{33} + (\rho^2\rho_1)^{-1}\rho' d\Theta]\beta n^2$

$r_{32} = \{-\rho_1^{-1}a_{12} + \rho^{-1}\rho_1\rho''a_{22} + [2\rho^{-2}(\rho_1\rho'')'\rho' + 2\rho^{-2}(\rho_1\rho'')\rho'' -$

$- 2\rho^{-3}\rho_1\rho''(\rho')^2 - \rho^{-1}(\rho_1\rho'')'']\beta d_{33} + [2\rho^{-2}\rho_1\rho''\rho' -$

$- \rho^{-1}(\rho_1\rho'')']\beta d_{33}' + [\rho^{-2}(\rho_1\rho'')'\rho' - 2\rho^{-3}\rho_1\rho''(\rho')^2 +$

$+ \rho^{-2}\rho_1(\rho'')^2]\beta d\Theta + \rho^{-2}\rho_1\rho''\rho'\beta d\Theta'\}n + \rho^{-3}\rho_1\rho''\beta\ d\Theta\ n^3$

$r_{33} = 2\rho'' a_{12} - \rho_1^{-2}\rho a_{11} - \rho^{-1}(\rho_1\rho'')^2 a_{22} - \{2[\rho^{-2}\rho'' -$

$- \rho^{-3}(\rho')^2]d_{33} + 2\rho^{-2}\rho' d_{33}' + [\rho^{-2}\rho'' - 2\rho^{-3}(\rho')^2]d\Theta +$

$+ \rho^{-2}\rho' d\Theta'\}\ \beta n^2 - \rho^{-3}\ \beta d\Theta\ n^4$

$r_{34} = [\rho''(1 - ds) - \rho' ds']\beta - \rho^{-1}\beta\ ds\ n^2$

$r_{41} = \rho_1^{-2}\rho_1' d_{11} - (\rho\rho_1)^{-1}\rho' d_{12}, \quad r_{42} = \rho^{-2}\rho_1\rho''\ d_{12}n$

$r_{43} = -\rho^{-2}\ d_{12}\ n^2, \qquad r_{44} = 1$

$c_1 = -\rho p_s + \rho p_{Ts}' + \rho'(p_{Ts} - p_{T\Theta}) + \rho_1^{-1}\rho'\beta(ds\ M_{Ts} - M_{T\Theta})$

$c_2 = -\rho p_\Theta - np_{T\Theta} - \rho^{-1}\rho_1\rho''\ \beta n(ds\ M_{Ts} - M_{T\Theta})$

$c_3 = -\rho p_z + \rho_1\rho'' p_{T\Theta} - \rho_1^{-1}\rho p_{Ts} + \beta[\rho' ds'\ M_{Ts} + \rho''(ds\ M_{Ts} -$

$- M_{T\Theta}) + \rho^{-1}(ds\ M_{Ts} - M_{T\Theta})n^2 + \rho'(ds\ M_{Ts}' - M_{T\Theta}')]$

$c_4 = -M_{Ts}$

Elementos não nulos das matrizes E, F e do vetor Y:

$e_{11} = g_1 a_{11}$, $e_{22} = g_2 \left[(2\rho^2)^{-1}(\rho_1\rho'')^2\beta d_{33} + a_{33}\right]$

$e_{23} = -g_2\rho^{-2}\rho_1\rho''\beta d_{33}n$, $e_{32} = -g_3\rho^{-2}\rho_1\rho''\beta d_{33}n$

$e_{33} = g_3[\rho^{-2}(\rho')^2\beta d\Theta + 2\rho^{-2}\beta d_{33}n^2]$, $e_{34} = g_3\beta$, $e_{43} = -g_4$

$f_{11} = g_1\rho^{-1}\rho' a_{12} + h_1$, $f_{12} = g_1\rho^{-1}a_{12}n$, $f_{13} = g_1(\rho_1^{-1}a_{11} -$

$- \rho^{-1}\rho_1\rho'' a_{12})$, $f_{12} = g_2\left[(2\rho^2)^{-1}\rho''\beta d_{33} - \rho^{-1}a_{33}\right]n$

$f_{22} = -g_2\{\rho^{-1}\rho' a_{33} + \rho^{-1}\rho_1\rho''[\rho^{-2}\rho_1\rho''\rho' - (2\rho)^{-1}(\rho_1\rho'')']\beta d_{33}\}$

$+ h_2$, $f_{23} = g_2\,\rho^{-3}\rho_1\rho''\rho'\beta d_{33}\,n$, $f_{31} = -g_3[(\rho_1\rho^2)^{-1}(\rho')^2 .$

$.\beta d\Theta + (\rho_1\rho^2)^{-1}\beta d_{33}\,n^2]$, $f_{32} = g_3[\rho^{-3}\rho_1\rho''\rho'(2d_{33} + d\Theta) -$

$- \rho^{-2}(\rho_1\rho'')' d_{33}]\beta n$, $f_{33} = -g_3\rho^{-3}\rho'(2d_{33} + d\Theta)\beta n^2 + h_3$

$f_{34} = g_3\rho^{-1}\rho'(1 - ds)\beta$, $f_{41} = g_4\rho_1^{-1}$, $f_{44} = h_4$

$y_1 = e_1 + g_1\,p_{Ts}$, $y_2 = e_2$, $y_3 = e_3 + g_3\rho^{-1}\rho'\beta(ds\,M_{Ts} - M_{T\Theta})$

$y_4 = e_4$

onde

$$ds = \frac{d_{12}}{d_{11}} \qquad d\Theta = \frac{d_{11}\,d_{22} - d_{12}^2}{d_{11}} \qquad \beta = h_o/a_o$$