ANAIS
DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. D - 17
PP. 1343 - 1353

ABCM/CNPq

PROCEEDINGS
OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS ATRAVÉS DE TÉCNICAS DA TEORIA DE CONTROLES E ANÁLISE DE ELEMENTOS FINITOS

Clovis Sperb de BARCELLOS, Prof. Titular
Depto. de Engenharia Mecânica
Univ. Federal de Santa Catarina
Florianópolis - Brasil

William H. WARNER, Professor, Chairman
Dept. of Aerospace Eng. & Mechanics
University of Minnesota
Minneapolis, M.N. USA.

1. Introdução

O presente trabalho apresenta um novo procedimento para otimização estrutural recentemente desenvolvido [1]. Esse método se baseia em técnicas de controles [2, 3, 4], e de análise de elementos finitos [5], através da diferenciação de elementos finitos físicos e matemáticos. Ele se destina a resolver uma classe de problemas de otimização em que os elementos estruturais são constituídos por um número de pedaços desses elementos (aqui denominados elementos finitos físicos) que tem contornos e tipos de variação de espessura pré-especificados pelo projetista. Por isso, a formulação proposta é geral no que se refere a tipos, tamanhos e distribuição da espessura de tais elementos finitos físicos, além de permitir o uso do método de elementos finitos facilmente. Para exemplificar seu emprego, é apresentado um exemplo de minimização da massa de uma viga sanduíche engastada em vibração livre sob a condição de que tenha uma dada frequência fundamental. O método é apresentado para elementos uni-dimensionais, embora tenha sido originalmente para elementos estruturais planos.

2. Elemento finito físico

Considere um fenômeno que possa ser descrito por uma equação diferencial linear $Lw = 0$ em um domínio D contido no espaço, R_1, dos números reais, juntamente com condições de contorno apropriadas nos extremos ∂D. Os coeficientes do operador L dependem de um conjunto de funções $u_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, $x \in D$ e de parâmetros constantes. As funções u_i podem ser consideradas como controles do fenômeno e pertencem a um conjunto pré-especificado U sobre D. Para exemplificação, suponha que exista apenas uma variável de controle restrita à forma $u = p(x, \underset{\sim}{d})$, onde $\underset{\sim}{d}$ é algum conjunto de parâmetros reais a serem determinados.

A equação original pode ser reescrita na forma de n equações de 1a. ordem

$$\underset{\sim}{z}_{,x} = \underset{\sim}{f}(x, \underset{\sim}{z}, u)$$

onde $\underset{\sim}{z}$ e $\underset{\sim}{f}$ são funções vetoriais pertencentes a um espaço n dimensional, reais e contínuas em D; u é mensurável em D. As variáveis z_i são denominadas de variáveis de estado e são supostas a pertencer ao espaço de Sobolev W_p^1.

Particione-se, a seguir, o domínio D em domínios D_i,

$i = 1, \ldots, N$, de modo que: $D_i \cap D_j \equiv \phi$ para $i \neq j$,

$$D = \bigcup_{i=1}^{N} D_i$$

e que U seja um conjunto de funções seccionalmente contínuas em D, contínuas em todo D_i além de terem a estrutura matemática especificada pelo projetista. Seja $\partial D_{i\,i+1}$ o contorno entre os domínios D_i e D_{i+1}. Assim, associa-se a cada elemento finito físico, isto é, a cada pedaço de elemento estrutural, um subdomínio D_i.

Por conveniência, seja $p_i(x, r_{ij}) = p(x, \underset{=}{d})$ para $x \in D_i$ e $p_i = 0$ para $x \notin D_i$. Denominando por Θ o número total de parâmetros "j" para um dado "i", seleciona-se um conjunto r_{ij} que tenha o menor Θ. Convém observar que p_i não necessita ter a mesma estrutura matemática para todos os elementos.

Definição: Elemento Finito Físico é a parte de um elemento estrutural associada a um sub-domínio D_i.

3. Método de otimização

Inicialmente, define-se o índice de desempenho, J_o, e a função, J, a ser minimizada como

$$J = J_o + \sum_{i=1}^{N} \int_{D_i} \{\underset{\sim}{\lambda} \cdot (\underset{\sim}{f} - \underset{\sim}{z}_{,x}) + \gamma(u - p_i)\} dx$$

onde $\underset{\sim}{\lambda}$ e γ são funções multiplicadoras de Lagrange. As funções λ_i são denominadas variáveis de co-estado e também supostas a pertencerem a W_p^1. O operador "." indica produto interno no seguinte sentido:

$$\underset{\sim}{\lambda} \cdot \underset{\sim}{f} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \, f_i$$

Definindo-se o Hamiltoniano por

$$H(x, \underset{\sim}{z}, \underset{\sim}{\lambda}, u, \gamma, \underset{=}{d}) = \underset{\sim}{\lambda} \cdot \underset{\sim}{f} + \gamma(u + p)$$

e realizando integração por partes, pode-se reescrever J como sendo:

$$J = J_o + \sum_{i=1}^{N} \{\underset{\sim}{\lambda} \cdot \underset{\sim}{z} \Big|_{x_i}^{x_i+1} + \int_{x_i}^{x_i+1} (\underset{\sim}{\lambda}_{,x} \cdot \underset{\sim}{z} + H) dx\}$$

Para que J seja mínimo é necessário que a primeira variação de J seja nula para toda e qualquer possível escolha de variações admissíveis de u, $\underline{\lambda}$, $\underline{z}$ e $\underline{d}$. Pode-se satisfazer este requisito através das condições necessárias de Pontryagin.

i- $J_{,\underline{\lambda}} = 0$; ii- $J_{,\gamma} = 0$ iii- $J_{,u} = 0$

iv- $J_{,d_{ij}} = 0$ $\forall$ par (i,j) definido ; v- $J_{,\underline{z}} = 0$.

As condições "i" e "ii" indicam que as restrições devem ser satisfeitas enquanto que as "iii" e "iv" conduzem às condições de ótimo de u e d_{ij}. Finalmente, "v" conduz a um sistema de equações Hamilton-Jacobi e suas respectivas condições de contorno:

$$\lambda_{i,x} = -H_{,z_i} \qquad x \in D_i, \quad i = 1, \ldots, N$$

$$\lambda_i \; z_i\big|_{\partial D^-_{i,i+1}} = \lambda_i \; z_i\big|_{\partial D^+_{i,i+1}}$$

O conjunto de equações que expressam as condições de ótimo, obtidas de "iii", "iv" e "v", devem ser resolvidas simultaneamente com a dada equação diferencial.

Esse sistema de equações diferenciais e integrais não lineares podem ser resolvidas por qualquer método matemático. Um destes é o método de elementos finitos que aqui será usado.

4. Aplicação do Método de Elementos Finitos

O método de elementos finitos [5] faz uso da partição do domínio juntamente com funções de interpolação apropriadas. Assim, o domínio D é subdividido em sub-domínios Ω_i, $i = 1, \ldots, M$ tais que

$$\bigcup_{i=1}^{M} \Omega_i = D \quad \text{e} \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \phi \text{ para } i \neq j$$

Seja $\partial\Omega_{ii+1}$ o contorno entre os elementos Ω_i e Ω_{i+1}. Sobre cada elemento é definido um conjunto de pontos nodais e de funções interpoladoras.

Definição: Elemento finito matemático é a parte de um elemento estrutural associada a um subdomínio Ω_i.

Obviamente, tais elementos finitos matemáticos devem ser definidos consistentemente com os elementos finitos físicos já definidos. A seguir, transforma-se a equação diferencial e as condições necessárias dadas para a forma de equações algébricas. A primeira pode ser transformada por qualquer um dos métodos convencionais e as equações resultantes são lineares nos parâmetros da variável dependente, mas, como os parâmetros d_{ij} são também incógnitas, tais equações são não-lineares no presente contexto. As condições necessárias são transformadas na forma requerida pela substituição da variável dependente e, em alguns casos, da variável de controle pelas suas expansões seccionalmente polinomiais seguidas das integrações indicadas. Essas equações são quadráticas na variável dependente e podem incluir parâmetros da variável de controle.

A solução do sistema de equações algébricas não lineares consistirá sempre de dois conjuntos de parâmetros. Um deles define a variável de controle ótima, u_o, e o outro especifica as variáveis de estado que evoluem sob o controle u_o.

5. Exemplo

Como exemplo de utilização do método proposto, é apresentado a seguir o problema da minimização da massa de uma viga sanduíche posicionada no intervalo $[0, L]$, engastada em $x = 0$ e em vibração livre, sendo dadas a frequência fundamental e a massa do núcleo.

Um elemento finito físico "i" é definido como sendo um pedaço da viga sanduíche com largura unitária, comprimento c_i, espessura do núcleo A_c e posicionado no intervalo $|x_i, x_{i+1}|$. As duas folhas estruturais iguais tem a espessura $t = A_i^2 + (B_i^2 - A_i^2)(x - x_i)/c_i$, onde A_i^2 e B_i^2 são, respectivamente, a espessura de cada folha deste elemento em x_i e x_{i+1}. A viga será então constituída de N elementos finitos físicos unidos de tal modo que haja continuidade de deslocamentos lineares e angulares, esforço cortante e momento fle tor.

A equação do movimento será

$$(E\ I\ w_{,xx})_{,xx} = (\rho_c\ A_c + 2\rho_s t(x))\Omega^2\ w \qquad x \in (x_i, x_{i+1})$$
$$i = 1, \ldots, N$$

onde: E, ρ_s, I(x) são o módulo de elasticidade, densidade, segundo momento de área das folhas; ρ_c e A_c são a densidade e a espessura do núcleo e Ω é a frequência fundamental. As condições de contorno são

$$w(0) = w_{,x}(0) = Q(L) = M(L) = 0$$

Neste problema se define como variável de controle a espessura, t(x), das folhas estruturais e como variáveis de estado os deslocamentos linear e angular, momento fletor e esforço cortante associados ao modo fundamental. Então temos as equações

$$z_1 = w$$

$$z_{1,x} = z_2$$

$$z_{2,x} = z_3/E\ I$$

$$z_{3,x} = z_4$$

$$z_{4,x} = (\rho_c\ A_c + 2\rho_s\ t)\Omega^2\ z_1 \qquad x \in D_i$$
$$i=1, \ldots, N$$

e as condições de contorno

$$z_1(0) = z_2(0) = z_3(L) = z_4(L) = 0$$

Definindo o índice de desempenho como sendo a massa estrutural e o Hamiltoniano por

$$H = t + \underset{\sim}{\lambda} \cdot \underset{\sim}{f} + \gamma\{t - [A_i^2 + (B_i^2 - A_i^2)(x - x_i)/c_i]\},$$

obtém-se a funcional J a ser otimizada como sendo

$$J = \sum_{i=1}^{N} \{\underset{\sim}{\lambda} \cdot \underset{\sim}{z}\Big|_{x_i}^{x_i+1} + \int_{x_i}^{x_i+1} [H + \underset{\sim}{\lambda}_{,x} \cdot \underset{\sim}{z}]\, dx\}$$

Seguindo o procedimento proposto, determina-se as equações de Hamilton-Jacobi

$$\lambda_{1,x} = -(\rho_c A_c + 2\rho_s t)\Omega^2 \lambda_4$$

$$\lambda_{2,x} = -\lambda_1$$

$$\lambda_{3,x} = -\lambda_2/E\ I$$

$$\lambda_{4,x} = -\lambda_3 \qquad x \subset D_i,\ i = 1,\dots,N$$

que podem ser reduzidas a

$$(E\ I\ \lambda_{4,xx})_{,xx} = (\rho_c A_c + 2\rho_s t)\Omega^2 \lambda_4$$

Conclui-se também que as variáveis de co-estado λ_i são contínuas em D e que

$$\lambda_1(L) = \lambda_2(L) = \lambda_3(0) = \lambda_4(0) = 0$$

Portanto λ_4 e z_1 satisfazem a mesma equação diferencial e com as mesmas condições de contorno. Logo, a unicidade de soluções dessa classe de problemas requer que $\lambda_4 = C\ z_1$.

Levando isso em consideração, conclui-se que as condições necessárias restantes requerem que a espessura, t, e os parâmetros de controle, A_i e B_i, sejam tais que

$$1 + C[-E\ A_c^2\ z_{1,xx}^2/2 + 2\rho_s\ \Omega^2\ z_1^2] + \gamma(x) = 0$$

$$-A_i \int_{x_i}^{x_i+1} \gamma(x)[1 - (x - x_i)/c_i]dx = 0$$

$$-B_i \int_{x_i}^{x_i+1} \gamma(x)[(x - x_i)/c_i]dx = 0$$

Estes requisitos indicam que os elementos com A_i e B_i não nulos e não necessariamente iguais devem ter as seguintes propriedades:

a- devem ter a mesma energia Lagrangeana média, como pode ser observado pela satisfação simultânea dos dois últimos requisitos já que $-(\gamma(x) - 1)$ é a distribuição de energia Lagrangeana;

b - o baricentro da distribuição da densidade de energia Lagrangeana deve se localizar na secção média de cada elemento.

Caso A_i e B_i sejam necessariamente iguais, somente a propriedade "a" ocorre.

Supondo que

$$D_i = \bigcup_{j=p}^{q} \Omega_j$$

para algum "i" e que todos os elementos finitos matemáticos "j" tem o mesmo comprimento "c_j", podemos escrever as condições necessárias como sendo

$$A_i\{1/C + \sum_{j=p}^{q} \underset{\sim}{W}^{(j)T}\left[(1 - (j - p)c_j)(E\, A_c^2\; {}^{o}\underset{\approx}{K}^{(j)} - 4\rho_s\Omega^2\; {}^{o}\underset{\approx}{M}^{(j)}) - E\, A_c^2\; {}^{1}\underset{\approx}{K}^{(j)} - 4\rho_s\, \Omega^2\; {}^{1}\underset{\approx}{M}^{(j)}\right]\underset{\sim}{W}^{(j)}\} = 0$$

$$B_i\{1/C + \sum_{j=p}^{q} \underset{\sim}{W}^{(j)}\left[(j - p)c_j(E\, A_c^2\; {}^{o}\underset{\approx}{K}^{(j)} - 4\rho_s\, \Omega^2\; {}^{o}\underset{\approx}{M}^{(j)}) + (E\, A_c^2\; {}^{1}\underset{\approx}{K}^{(j)} - 4\rho_s\, \Omega^2\; {}^{1}\underset{\approx}{M}^{(j)})\right]\underset{\sim}{W}^{(j)}\} = 0$$

$$i = 1,\ldots,N$$

onde

$${}^{j}\underset{\approx}{M}^{(i)} = \int_{x_i}^{x_i+1} \underset{\sim}{a}\; \underset{\sim}{a}^T\left[(x - x_i)/c_i\right]^j dx$$

$${}^{j}\underset{\approx}{K}^{(i)} = \int_{x_i}^{x_i+1} \underset{\sim}{a}_{,xx}\; \underset{\sim}{a}^T_{,xx}\left[(x - x_i)/c_i\right]^j dx$$

$\underset{\sim}{a}$ - vetor das funções de interpolação

$\underset{\sim}{W}^{(j)}$ - deslocamentos lineares e angulares nodais.

Como exemplo numérico, considere-se a seguinte viga:

Comprimento	100 cm
Espessura do núcleo	10 cm
Densidade: núcleo	0,0104 kg/cm^3
folhas	0,0078 kg/cm^3
Frequência	434 Hz
Módulo de Elasticidade	$2,06.10^6$ N/cm^2

A redução da massa total da estrutura, em percentagem em relação à viga uniforme de mesma frequência, é indicada na Tabela 1. Esses resultados indicam que elementos com distribuição de espessura linear acarretam redução da massa estrutural sensivelmente melhor que as uniformes, e, além disso, tais reduções são muito próximas das obtidas por Weisshaar [6] através de otimização contínua. As soluções para elementos finitos físicos uniformes comparam qualitativamente com os resultados encontrados por Venkayya [7] e os lineares com os resultados de Sippel e Warner [8]. Convém lembrar que a economia da massa estrutural depende da frequência adotada.

Elementos finitos físicos

Número usado	Tipo	
	Uniforme	Linear
1	0,00	6,67
2	4,78	7,74
3	6,58	7,95
4	7,22	8,02
6	7,68	8,05
8	7,84	8,05

Tabela 1.

6. Conclusões

Em síntese, o método utiliza-se de duas expressões seccionalmente polinomiais independentes, uma para a variável de controle e outra para a variável dependente, gerando assim os elementos finitos físicos e matemáticos, respectivamente. A diferença básica entre tais expansões, é que a primeira define a geometria (espessura) dos elementos físicos, enquanto que a segunda aproxima a solução da equação diferencial dada.

As vantagens do método proposto, em relação aos demais, que usam condições necessárias para a ocorrência de um ótimo, se baseiam na generalidade com que a distribuição de espessura dentro de cada elementos finito físico pode ser especificada, dos contornos arbitrários desses elementos, bem como do método numérico utilizado para resolver a equação do movimento juntamente com as condições necessárias. Os resultados obtidos através dessa formulação são bastante significativos e comparam-se muito bem com os resultados obtidos por outros métodos.

Bibliografia

[1] Barcellos, C.S., "A structural optimization method combining finite element and control theory techniques", Ph.D. Thesis at University of Minnesota - USA, 1977.

[2] Cesari, L., Optimization with partial differential equations in Dieudonné-Rashevsky form and conjugate problems., Arch. Rat. Mech. and Analysis, 33, 5, 1969.

[3] Egorov, A.I., Necessary optimality conditions for distributed parameter system. SIAM Journal of Control, 5, 3, 1967.

[4] Lur'e, K.A., The Mayer-Bolza problem for multiple integrals and the optimizations of the performance of systems with distributed parameter, P.M.M., 27, 1963.

[5] Aziz, A.K., The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations", Academic Press,1972

[6] Weisshaar, T.A., An application of control theory methods to the optimization of structures having dynamic or aerolastic constraints. Ph.D. Thesis at Stanford University, USA, 1970.

[7] Venkayya,V.B.,Khot,N.S. e Berke,L., Application of optimality criteria approaches to automated design of large practical structures. AGARD-CP-123.

[8] Sippel, D.L. e Warner, W.H., Minimum mass design of multi-element structures under a frequency constraint., AIAA Journal, 11, 4, 1973.

BARCELLOS, C.S. e WARNER, W.H.

OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS ATRAVÉS DE TÉCNICAS DA TEORIA DE CONTROLES E ANÁLISE DE ELEMENTOS FINITOS

Sumário

O presente artigo sugere uma formulação baseada em técnicas da teoria de controles e análise de elementos finitos para a obtenção das condições necessárias para projeto ótimo de estruturas. As condições necessárias são obtidas através dos conceitos de elementos finitos físicos e matemáticos. Como ilustração, o método é usado para otimizar uma viga engastada em vibração livre.

OPTIMAL DESIGN OF STRUCTURES BY CONTROL THEORY AND FINITE ELEMENT ANALYSIS TECHNIQUES

Summary

A formulation based on control theory and finite element analysis techniques is suggested for obtaining optimality conditions for optimal design of practical structures. The necessary conditions for optimality are derived using the concepts of physical and mathematical finite elements. By way of illustration, the method is used for optimization of a vibrating cantilever beam.