

A N A I S

DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. D - 31

PP. 1519 - 1531



ABCM/CNPq

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

GENERALIZAÇÃO NO CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE INTERFERÊNCIA

Edison da ROSA
Depto. de Engenharia Mecânica
Univ. Federal de Santa Catarina
Florianópolis - Brasil

Domingos Boechat ALVES
Depto. de Engenharia Mecânica
Univ. Federal de Santa Catarina
Florianópolis - Brasil

1. Introdução

De acordo com os conceitos da teoria da confiabilidade, o denominado caso fundamental e sua probabilidade de falha, definida como probabilidade de interferência, fornece uma ótima ferramenta para o estudo da confiabilidade, mesmo nos casos que se afastam bastante do caso fundamental, [3;

6; 9]. Desta forma, a probabilidade de interferência entre duas populações apresenta muita aplicação. É desenvolvido um processo que permite uma solução imediata, não iterativa em um problema de projeto, pelo uso do conceito de dois fatores assintóticos e da equação de compatibilidade destes fatores com o problema físico.

2. Teoria da confiabilidade

Um sistema, não importando o seu tipo, deve ser projetado com uma capacidade própria, que o tornará apto a atender uma demanda exigida pelo seu uso em serviço. A amplitude da demanda que solicita o sistema depende em geral apenas da aplicação do sistema. A solicitação exige uma contrapartida, que é dada pela capacidade do sistema de suportar a demanda, ou seja, pela sua resistência. Esta resistência é algo que está ligado estritamente ao projeto do sistema, bem como à qualidade de sua construção, sendo portanto inerente ao próprio. Para o projeto ser eficiente deve se basear em dados, referentes à solicitação e à resistência, perfeitamente definidos. Tal no entanto é difícil de ocorrer na prática, uma vez que sempre existem imprecisões e tolerâncias, que levam a uma dispersão nos dados. Assim, em sistemas caracterizados por grandes dispersões, como alguns relacionados à engenharia, ou em sistemas que exigem grande segurança com alto rendimento, o melhor modo de tratar eficientemente o problema é sob um enfoque probabilístico. É necessário pois raciocinar em termos de probabilidades, seja de falha como de desempenho satisfatório do sistema. A confiabilidade é a probabilidade de sucesso do projeto, ou o que é equivalente, de que não falhe em operação. Este sucesso é obtido por uma certa margem de segurança, uma resistência suplementar, para compensar as dispersões que ocorrem.

Como é possível dizer que todas as variáveis em maior ou menor grau, que influem na capacidade do sistema são aleatórias, resulta que a resistência do sistema também o é. Assim a resistência fica definida pela sua função densidade de probabilidade (FDP), $f_R(r)$. Por outro lado, a deman

da sollicita o sistema e esta é na maioria das aplicações ir regular e imprevisível, dentro de certos limites, a sollicitação é tratada também como variável aleatória, sendo perfeitamente definida pela FDP correspondente, $f_S(s)$.

A análise da confiabilidade usualmente inicia com um modelo simples, referido como caso fundamental [2; 8; 11], que consiste de uma população de sistemas, cuja resistência R é caracterizada pela sua FDP, submetida a uma sollicitação S , também aleatória. Esta sollicitação é considerada estática, constante no tempo, mas aleatória no sentido de que cada vez que o sistema é ativado, a sollicitação possui um valor imprevisível. Para este caso a confiabilidade é constan te no tempo e pode ser obtida por

$$C = P(R > S) \quad (1)$$

que é a probabilidade de que a resistência seja maior do que a sollicitação. Analogamente a probabilidade de interferência é fornecida como

$$P_I = P(R \leq S) \quad (2)$$

e em função das FDP, no caso da resistência e da sollicitação serem estatisticamente independentes,

$$P_I = \int_A f_R(r) f_S(s) dA \quad (3)$$

sendo A a área definida pelo conjunto $\{(r;s): r < s\}$.

Em alguns casos particulares, é possível obter uma ex pressão analítica para P_I , embora de um modo geral a expres são (3) deva ser resolvida numericamente. No caso particular em que ambas as FDP são normais, então P_I é dada por

$$P_I = 1 - \phi(z) \quad (4)$$

onde

$$z = \frac{\mu_R - \mu_S}{[\sigma_R^2 + \sigma_S^2]^{1/2}} \quad (5)$$

sendo μ_R e μ_S as médias para a resistência e a sollicitação,

respectivamente e σ_R e σ_S os correspondentes desvios padrão.

3. Generalização no cálculo de P_I

O processo usual para a resolução de (3) é usando um método de integração numérica. Para tornar possível esta integração, os parâmetros de $f_R(r)$ e $f_S(s)$ devem ser especificados, para que seja possível calcular o valor da função integrada nos vários pontos do intervalo. De um modo geral, as distribuições ficam com seus parâmetros caracterizados pela média e desvio padrão da população correspondente. Assim, P_I será uma função de ao menos quatro parâmetros, com o que torna-se difícil fazer uma representação adequada dos resultados. Como a integração numérica exige valores específicos, o resultado obtido fica válido apenas para este conjunto de valores usados.

Para contornar estes problemas, foi idealizada uma apresentação de P_I em função da duas variáveis, K_0 e K_1 , definidas como funções adequadas dos parâmetros de $f_R(r)$ e $f_S(s)$, de tal modo que para valores fixos destas variáveis a probabilidade de interferência não dependa dos valores de cada um dos parâmetros, com K_0 e K_1 constantes. A idéia é de partindo de um espaço R^n , de dimensão igual ao número de parâmetros envolvidos no cálculo de P_I , através das variáveis K_0 e K_1 , denominados de fatores assintóticos, definir um espaço R^2 . Este espaço, de componentes $(K_0; K_1)$, deve ser tal que cada ponto corresponda a um único valor de P_I . A figura 1 ilustra a correspondência.

O percurso $R^n \rightarrow R^1$ é o modo de calcular P_I , ou seja, é obtido o valor da função

$$P_I = h(X) \quad (6)$$

onde $X = \{x_i\}$ para $i = 1, n$ e $X \in S_{01} \subset R^n$. O conjunto S_{01} é formado pelos pontos de R^n que reproduzam um específico ponto $(K_0; K_1)$ em R^2 . A expressão (6) é calculada pela integração de (3), que representa a função h , para valores específicos de cada x_i . O enfoque dado é definir o espaço R^2 de tal forma que

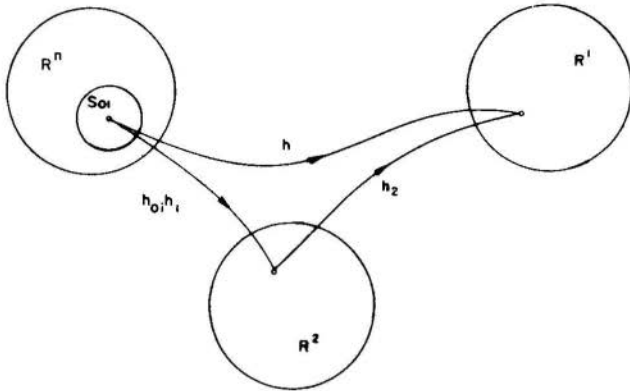


Fig. 1 - Possibilidades para o cálculo de uma função a n variáveis.

$$P_I = h_2(K_0; K_1) \quad (7)$$

seja unívoca e também ocorra

$$h(X) = h_2(K_0; K_1) \quad (8)$$

O espaço R^2 é obtido de R^n fazendo

$$K_0 = h_0(Y_0) \quad \text{e} \quad K_1 = h_1(Y_1) \quad (9)$$

com a condição de que o conjunto dos componentes de Y_0 e Y_1 , $\{y_0^i\}$ e $\{y_1^i\}$ respectivamente, sejam diferentes, estejam contidos em $\{x_i\}$ e não sejam vazios. As equações (9) devem ser tais que (8) se verifique incondicionalmente. Uma vez obtido o espaço R^2 , a probabilidade de interferência é calculada para pontos $(K_0; K_1)$ pré-determinados, com o uso de (3), com os resultados apresentados em gráficos de P_I contra K_0 e K_1 , que é a representação gráfica da relação (7).

Como exemplo de aplicação é interessante considerar o caso em que tanto a resistência como a solicitação possuem para a FDP a distribuição normal. Definindo os fatores assintóticos como

$$K_0 = (\mu_R - \mu_S)/\sigma_R \quad \text{e} \quad K_1 = (\mu_R - \mu_S)/\sigma_S \quad (10)$$

é possível isolar σ_R e σ_S , que substituídos em (5) resulta

$$z = \frac{1}{[K_0^{-2} + K_1^{-2}]^{1/2}} \quad (11)$$

Definindo K_0 e K_1 por (10), P_I passa a ser função exclusiva dos fatores assintóticos, não importando os valores particulares de μ_R , μ_S , σ_R e σ_S , desde que quando substituídos em (10), K_0 e K_1 fiquem constantes. Desta forma as definições usadas para os fatores assintóticos são convenientes.

Em um caso prático, é conhecida a priori apenas a função $P_I = h(X)$, dada por (3). Tanto as funções que definem K_0 e K_1 , como a função $h_2(K_0; K_1)$ não são conhecidas, tornando o problema um tanto abstrato. O único modo de resolver quanto à definição de R^2 , é por tentativas, ou seja, as funções h_0 e h_1 são arbitradas e após é verificado se (8) se verifica.

Para ser possível a integração numérica, cada componente de X deve ser conhecida, mas apenas dois valores estão especificados, os que fixam o ponto em R^2 . Como P_I deve depender apenas das coordenadas deste ponto, o vetor X é de importância secundária, desde que $X \in S_{01}$. Assim, algumas componentes x_i podem ser arbitradas no cálculo de (3), desde que as definições de K_0 e K_1 estejam corretas. Este fato parece lógico se for lembrado que no caso normal-normal, P_I depende apenas de z e que para K_0 e K_1 dados por (9) resulta a expressão (11). Assim, P_I depende apenas de K_0 e K_1 , sendo os valores de μ_R , μ_S , σ_R e σ_S apenas um passo intermediário para se chegar a P_I .

Detalhando mais o exemplo considerado, o processo fica mais claro. Assumindo valores numéricos para os fatores assintóticos, $K_0 = 5$ e $K_1 = 3$, foram obtidas as curvas de f_R e f_S , para três situações, para diferentes valores da relação μ_R/μ_S . A média da solicitação foi considerada unitária e em qualquer situação ocorre $z = 2,572$ e logo $P_I \approx 5 \cdot 10^{-3}$. As curvas de f_R e f_S estão na figura 2.

A figura ilustra, para K_0 e K_1 , fixos, o comportamento das FDPs, conforme o valor de μ_R e μ_S . Pela comparação

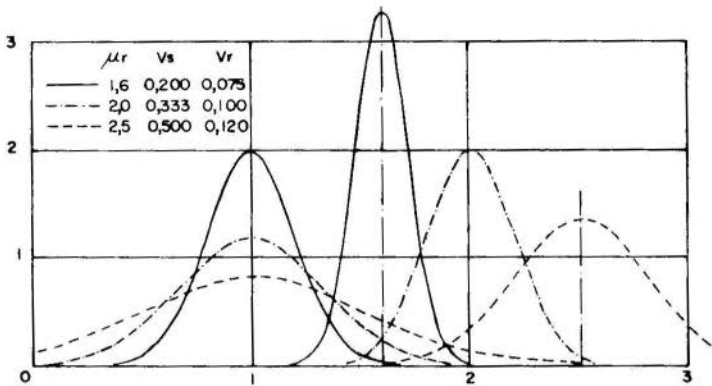


Fig. 2 - Distribuições para a resistência e a solicitação.

das curvas, torna-se flagrante que aumentando o afastamento relativo entre as médias, aumenta a dispersão de valores em torno da média. Isto fica bem caracterizado pelos valores do coeficiente de dispersão, definido como $V = \sigma/\mu$, conforme mostrado na figura. Assim, o coeficiente de dispersão da solicitação passa de 0,20 para 0,33 e após 0,50. O que ocorre é que aumentando a distância entre as médias, as dispersões, tanto da resistência como da solicitação aumentam, de modo que a probabilidade de interferência permaneça constante.

4. Equações de compatibilidade

Em uma situação de projeto, a partir de P_I e dos dados referentes às distribuições que representam a solicitação e a resistência, o ideal é obter uma maneira simples para sintetizar o sistema: Neste estágio, a maneira que melhor se adapta como um critério de projeto, é usar um fator de projeto, definido como

$$n = \mu_R / \mu_S \quad (12)$$

Este fator fornece uma medida do afastamento relativo entre as médias, sendo que um valor superior à unidade, representa uma margem de resistência suplementar. Esta margem

vai compensar, em maior ou menor grau as dispersões que ocorrem, fornecendo assim uma chance de falha adequada, representada pelo valor de P_I . Em sistemas estruturais, este fator de projeto é semelhante ao coeficiente de segurança comumente empregado, apenas que o fator de projeto é definido em termos precisos. O coeficiente de segurança é poucas vezes definido com exatidão, ficando um conceito vago e impreciso.

Retornando ao exemplo normal-normal, os fatores assintóticos podem ser escritos, usando (12), como

$$K_0 = (n - 1)/n V_R \text{ e } K_1 = (n - 1)/V_S \quad (13)$$

Por outro lado, o valor de z é obtido de K_0 e K_1 , por (11) e assim foi possível obter a expressão analítica que fornece P_I . A representação gráfica desta função, tomando P_I como um parâmetro, está na figura 3. Pela análise do gráfico, nota-se que as curvas são hipérbolas, com assíntotas $K_0 = z$ e $K_1 = z$, sendo z a correspondente à probabilidade P_I da curva. Assim, $K_0 \rightarrow \infty$, então $K_1 \rightarrow z$ e vice-versa, ou seja, para $V_R \rightarrow 0$ então P_I depende praticamente apenas de K_1 . Este fato significa que a resistência passando a ser determinística, apenas a dispersão da sollicitação é representativa, que é o dado fornecido por K_1 . A denominação de K_0 e K_1 de fatores assintóticos vem justamente do fato de que a probabilidade de interferência é dada assintoticamente por K_1 .

Das equações (13) é possível isolar o fator de projeto e representando por n_0 o obtido em função de K_0 e n_1 o obtido por K_1 ,

$$n_0 = \frac{1}{1 - K_0 V_R} \text{ e } n_1 = 1 + K_1 V_S \quad (14)$$

Na resolução de um problema prático, é especificado um valor para P_I e são conhecidos V_R e V_S , que podem ser estimados usualmente a partir de amostras. O objetivo final, é chegar ao fator de projeto que forneça P_I , para V_R e V_S do problema. No gráfico $K_0 \times K_1$, a solução estará em um pon

to particular sobre a curva de P_I , desde que as coordenadas do ponto, substituídas em (14), forneçam $n_o = n_1$, ou seja, o ponto $(K_o; K_1)$ deve ser compatível com o problema físico. Fazendo então $n_o = n_1$, resulta

$$K_1 = \frac{K_o V_R}{V_S(1 - K_o V_R)} \quad (15)$$

$$\text{e} \quad K_o = \frac{K_1 V_S}{V_R(1 + K_1 V_S)} \quad (16)$$

As equações (15) e (16) são denominadas de equações de compatibilidade para o problema da interferência, válidas quando ambas as distribuições são normais. Quando as FDPs empregadas forem diversas da normal, então as equações de compatibilidade podem ser obtidas de modo análogo, usando as equações de definição dos fatores assintóticos, concernentes à combinação de distribuições usadas. Assim, as equações de compatibilidade asseguram que seja respeitado o aspecto físico do problema.

A figura 3 apresenta também a curva de compatibilidade para o caso em que $V_R = 0,1$ e $V_S = 0,2$. O ponto de intersecção da curva de compatibilidade com a de P_I que é desejado, fornece assim as coordenadas do ponto $(K_o; K_1)$ que satisfaz ao problema.

Considerando um caso onde ocorram os valores de V_R e V_S citados e sendo desejada uma probabilidade de interferência de 10^{-2} , é resolvido como segue. A partir da figura 3, o ponto de intersecção entre a curva de $P_I = 10^{-2}$ e a curva de compatibilidade é aproximadamente $(3,80; 2,95)$ e substituindo em (14) resulta $n_o = 1,613$ e $n_1 = 1,590$, com média $n = 1,601$. Comparando com a solução exata que existe neste caso normal-normal,

$$n = \{1 + \sqrt{1 - \delta_R \delta_S}\} / \delta_R \quad (17)$$

onde

$$\delta_i = 1 - (z V_i)^2 \quad (18)$$

substituindo os valores, com $z = 2,326$, vem $n = 1,595$, ou seja, uma diferença inferior a 0,5%.

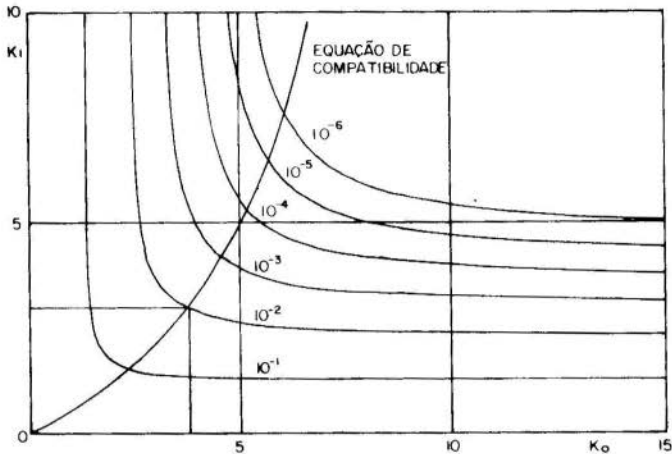


Fig. 3 - Curvas de P_I , para o caso normal-normal, juntamente com a curva de compatibilidade.

5. Conclusões

O uso do processo no caso normal-normal é apenas ilustrativo, pois existe uma solução exata. No entanto, quando uma solução numérica de (3) se faz necessária, o método desenvolvido é de grande valia, pois permite o cálculo de P_I ser estendido para quaisquer valores dos parâmetros, pois P_I é invariante em relação a K_0 e K_1 . Este estudo foi aplicado para as distribuições de Weibull, exponencial generalizada, Rayleigh generalizada bem como normal, [11], que resultam em uma representação sistemática e racional dos resultados. Em um estudo mais detalhado, verificou-se uma limitação no método, em relação à distribuição de Weibull, possivelmente pelo fato de possuir três parâmetros. Este aspecto está ainda em aberto.

A verificação da invariância de P_I com $X \in S_{01}$ é feita na prática comparando P_I calculado para diversos valores das componentes de X que foram arbitradas. Pela comparação dos valores de P_I , é verificada então a definição dos fatores assintóticos, se adequada ou não.

Finalmente, um aspecto que pode comprometer o sucesso do processo, é a falta de um maior número de dados de grande parte das variáveis que influem em um projeto, no que se refere aos parâmetros e mesmo ao tipo de distribuição a usar. Assim, é essencial uma pesquisa cuidadosa para levantar os dados necessários, a um nível de confiança adequado.

Bibliografia

- [1] Ang, A., Amin, M., Reliability of structures and structural systems. Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. of the ASCE, Vol. 94, nº EM2, April 1968, pp. 559-583.
- [2] Benjamin, J.R., Cornell, C.A., Probability, statistics and decision for civil engineers. McGraw-Hill, 1970.
- [3] Crandall, S.H., Mark, W.D., Random vibration in Mechanical systems. Academic Press, 1963.
- [4] Davenport, W.B.Jr., Probability and random processes. McGraw-Hill, Kogakusha, 1970.
- [5] Ferryborges, J., Castanheta, S., Structural safety, National Laboratory of civil engineering, Lisboa, 1971.
- [6] Freudenthal, A.M., Critical appraisal of safety criteria and their basic concepts. 8th. Congress, International Association for Bridge and Structural Engineers, New York, 1968.
- [7] Lin, Y.K., Probabilistic theory of structural dynamics, McGraw-Hill, 1967.
- [8] Lipson, C., Sheth, N., Statistical design and analysis of engineering experiments, McGraw-Hill 1973.
- [9] Pieruschka, Erich, Principles of Reliability, Prentice Hall, 1963.

- [10] Rosa, E.da., Confiabilidade em sistemas mecânicos, FEESC-UFSC, 1976.
- [11] Rosa, E.da., Generalização no cálculo da probabilidade de interferência entre a sollicitação e a resistência. Tese de Mestrado, UFSC, 1976.
- [12] Swanson, S.R., Random loading fatigue testings: A state of the art survey. Materials, Research and Standards, ASTM, April 1968, pp. 10-44.

ROSA, E.da e ALVES, D.B.

GENERALIZAÇÃO NO CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE INTERFERÊNCIASumário

Neste estudo, o principal aspecto investigado é a probabilidade de interferência entre as populações, da solicitação que age no sistema, e da resistência deste. Através de um enfoque formal é proposta uma representação bidimensional da probabilidade de interferência. Esta representação é feita por dois fatores, K_0 e K_1 , respectivamente o fator assintótico da distribuição da resistência e da solicitação. A probabilidade de interferência é plotada em um sistema de coordenadas $K_0 \times K_1$, assumida a invariância de P_I para um ponto $(K_0; K_1)$. É introduzido o conceito de compatibilidade, que permite sintetizar o sistema pelo uso de um fator de projeto.

GENERALIZATION IN THE DETERMINATION
OF THE INTERFERENCE PROBABILITY

Summary

In this study, the fundamental aspect investigated is the interference probability, between the populations of the stress acting on a system, and the strength of the system. A two dimensional representation of the probability of interference is proposed. This representation is based on two factors, named K_0 and K_1 , respectively the assyntotic factor of the strength and of the stress distribution. The interference probability, P_I , is plotted as a parameter in a $K_0 \times K_1$ plane, under a assumed invariance of P_I . The concept of compatibility are introduced and allows to obtain a design factor which make possible the system synthesis.