ANAIS
DO
IV CONGRESSO BRASILEIRO
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. D - 32
PP. 1533 - 1542

PROCEEDINGS

OF THE FOURTH
BRAZILIAN CONGRESS
OF
MECHANICAL ENGINEERING

ABCM/CNPq

APLICAÇÃO DA TEORIA DA INTERFERÊNCIA DE DUAS POPULAÇÕES NA PREVISÃO DA CONFIABILIDADE

Edison da ROSA
Depto. de Engenharia Mecânica
Univ. Federal de Santa Catarina
Florianópolis - Brasil

1. Introdução

O cálculo exato da confiabilidade, para um dado sistema, em um ambiente aleatório, é algo que ainda não está resolvido no caso geral. Alguns modelos simplificados foram analisados [1; 2; 4; 8] e existem soluções nestes casos. No entanto, estas são aproximações, que fornecem apenas uma indicação do nível de confiabilidade. O presente artigo visa usar os dados da teoria da interferência entre duas populações para avaliar a confiabilidade, para solicitações estáticas e dinâmicas.

2. Uso da teoria da interferência

A confiabilidade é normalmente referida como uma função não crescente do tempo, pois quanto maior o período transcorrido, maior a chance de falha do sistema considerado. Por outro lado, é relativamente simples a confiabilidade, ou o que é equivalente, a probabilidade de falha P_f, para o chamado caso fundamental. Este se baseia em uma população de sistemas, cuja resistência R possui uma dada função densidade de probabilidade, submetida a uma solicitação estática S, também aleatória. A aleatoriedade de S provém do fato de que cada vez que o sistema é ativado, a solicitação possui um valor diverso do anterior. Este caso fundamental é referido como teoria da interferência, interferência esta que ocorre entre as populações da solicitação e da resistência. Assim, neste caso particular, de forma a evitar confusões com outros modos de falha, a probabilidade de falha é denominada de probabilidade de interferência, P_I,

$$P_I = P(R < S) \tag{1}$$

As referências [1; 5; 9] fornecem métodos de obter a probabilidade de interferência para diversas funções densidade de probabilidade.

O conceito da probabilidade de interferência é importante pelo fato de ser facilmente calculado, e pode ser usado para obter uma estimativa de confiabilidade para outros casos de solicitação, diversos do caso fundamental. Nestes outros modos de falha, a probabilidade de interferência é uma ferramenta excelente na estimativa da confiabilidade.

No caso geral da confiabilidade ser variável com o tempo, esta é dada em termos da taxa de falhas, $h(t)$, que representa de uma população de sistemas, a fração destes que falham, por unidade de tempo. Matematicamente a taxa de falhas é definida sendo a probabilidade condicional, de que o sistema falhe no tempo $t; t + dt$, sabendo-se que não falhou no intervalo de 0 a t. A expressão da confiabilidade é

$$C(t) = \exp\left[-\int_0^t h(t)\, dt\right] \tag{2}$$

Quando a solicitação que age no sistema é discreta,ou seja, o sistema é ativado e desativado diversas vezes durante a sua vida, a taxa de falhas é função do número de aplicações da solicitação. Para este caso Freudenthal [3] fornece para a taxa de falhas,

$$h(N) = -\ln\ (1 - P_I) \tag{3}$$

sendo P_I a probabilidade de interferência, suposta constante para as sucessivas aplicações. Para P_I inferior a 0,05 é válido assumir $h(N) \approx P_I$. Por outro lado, Ang e Amin[1] mostraram que (3) é na realidade um limite superior para h(N), ou seja, usando $h(N) = P_I$, é obtido o valor máximo que pode atingir a probabilidade de falha do sistema. Isto se baseia no fato, que foi demonstrado por Ang e Amin, de que a taxa de falhas é uma função monotonicamente decrescente do número de aplicações da solicitação, ou seja,

$$h(N) < h(N - 1) \tag{4}$$

para $N > 1$ e no caso de $N = 1$,

$$h(1) = P_I \tag{5}$$

Desta forma, para N aplicações da solicitação, a confiabilidade pode ser estimada por

$$C(N) = \exp\ [-N\ P_I] \tag{6}$$

sendo na realidade o limite inferior. A figura 1 ilustra o comportamento de h(N), quando ambas as distribuições do problema são log normal.

Um outro enfoque que permite o uso da probabilidade de interferência é sugerido por Mittenbergs [6]. Neste caso a resistência é considerada como uma função do tempo, ou seja, os parâmetros da função densidade de probabilidade não são constantes. Este efeito ocorre devido à possibilidade de deterioração da resistência do sistema, com o passar do tempo. Deste modo, a probabilidade de interferência é em si uma função do tempo, crescente no caso. Usando a aproximação $h(N) = P_I$, então a confiabilidade pode ser calculada para pontos discretos do tempo e assim a dependência $C(t)$ é obtida.

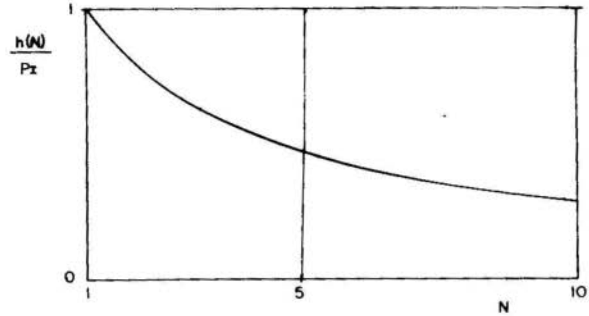

Fig. 1 - Taxa de falha específica, para solicitação e resistência log normal. $P_I = 0{,}076$ e fator de projeto $n = 1{,}5$ [1]

Quando a resistência é estacionária, o fato de que $h(N)$ é máximo para $N = 1$, significa que a probabilidade de falha é maior quando o sistema é solicitado pela primeira vez. Isto se baseia no fato de que as incertezas são máximas quando da primeira solicitação. Se o sistema resiste à primeira aplicação de carga sem dano, o mesmo sistema provavelmente não irá falhar se for aplicada uma carga menor ou igual a esta. Apenas com alguma solicitação superior a esta primeira é que poderá falhar. Assumindo então que $h(N) = P_I$ a expressão

$$C(N) = (1 - P_I)^N \tag{6}$$

é a estimativa conservativa (a favor da segurança) da confiabilidade. Para $N\ P_I$ relativamente pequeno é válido ainda

$$C(N) = 1 - N\ P_I \tag{8}$$

Para uma solicitação dinâmica, um caso que pode ser estudado com o auxílio da teoria da interferência é quando o sistema falha à primeira sobrecarga. Isto quer dizer que o sistema deixa de cumprir a sua função quando pela primeira vez a solicitação atinge um dado nível, definido este pela resistência. Neste caso, é necessário trabalhor com a distribuição dos máximos da solicitação e não a distribuição da solicitação propriamente dita. Esta distribuição dos picos, se interferir com a distribuição da resistência, indica a possibilidade de falha. A probabilidade de falha está assim relacionada com a probabilidade de interferência entre a distribuição de máximos da solicitação e a distribuição da resistência. A chance de falha por unidade de tempo em uma solicitação dinâmica, será P_I vezes o valor médio da frequência da solicitação. Deste modo, a taxa de falhas fica dada por

$$h(t) = f_o(t)\ P_I(t) \tag{9}$$

sento $f_o(t)$ a frequência esperada. A figura 2 mostra a situação das distribuições envolvidas no problema.

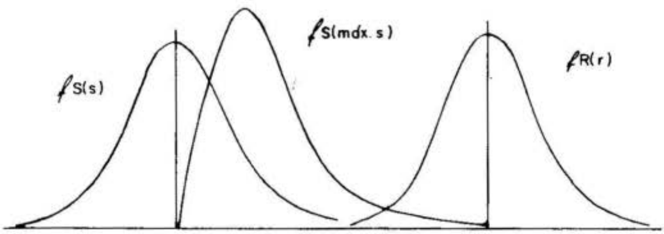

Fig. 2 - Distribuições da solicitação, máximos desta e da resistência.

Desta forma a confiabilidade é dada por

$$C(t) = \exp - \left[\int_0^t f_o(t)\ P_I(t)\ dt \right] \tag{10}$$

Com a solicitação seguindo uma normal, de média μ e desvio padrão σ, os máximos seguem uma distribuição de Rayleigh generalizada [9], de parâmetros, $x_o = \mu$ e $\alpha = \mu + \sigma$. Se a solicitação for um processo estocástico estacionário, então a taxa média de falhas é

$$\lambda = f_o \, P_I \tag{11}$$

Das equações (9) e (11), é fácil verificar que a taxa de falhas depende não só do projeto do sistema, supondo um caso estático (que é usado no cálculo de P_I), como também das características dinâmicas do sinal da solicitação, aqui representadas de um modo aproximado pela frequência esperada da solicitação. No caso particular do espectro de frequências da solicitação for do tipo de banda estreita, então segundo Rice [7], a frequência esperada vale

$$f_o = f_b \left[\frac{1}{3}\,\frac{1 - \beta^3}{1 - \beta}\right]^{1/2} \tag{12}$$

onde f_b é o limite superior do espectro de frequências e β a largura relativa, $\beta = f_a/f_b$.

3. Exemplo

Será considerada a falha devido ao escorregamento, em uma montagem por interferência entre o cubo e o eixo em uma engrenagem. A falha ocorre quando pela primeira vez a solicitação ultrapassar o valor da resistência. A probabilidade de falha deve ficar limitada a 10^{-2}, para uma vida de 10^3 horas de operação. Os dados necessários são:

Diâmetro do eixo	- 20 mm (aço)
Diâmetro externo do cubo, equivalente	- 28 mm (aço)
Força de atrito solicitante	- (μ = 4695; σ = 709)N
Coeficiente de atrito	- (μ = 0,168; σ = 0,027)
Coeficiente de dispersão da interferência	- V_U = 0,12
Largura da faixa do espectro de frequência	-β = 0,511
Frequência superior de corte	- f_b = 0,0195Hz

Para a geometria do ajuste prensado, a dependência entre a pressão de contato e a interferência radial U é

$$p = \frac{U}{d}\, E \; 0{,}3297$$

A força de atrito resistente, para um comprimento útil do ajuste de 30 mm, será

$$F_R = 31{,}073\ U\ E/\mu_s$$

onde μ_s é o coeficiente de atrito entre as superfícies.

O primeiro passo para realizar o dimensionamento é fazer uso da confiabilidade especificada e a partir desta, obter P_I. Para C = 0,99, usando (9) e (10), vem

$$0{,}99 = \exp\left[-f_o\ P_I\ t\right]$$

e a partir de (12) vem $f_o = 0{,}015$ Hz, logo

$$P_I = 1{,}86\ 10^{-7}$$

Uma distribuição log normal foi considerada adequada para caracterizar a resistência e a solicitação, e o critério de dimensionamento, dado pelo fator de projeto n, definido como [1; 3; 8; 9]

$$n = \mu_R/\mu_S$$

é dado neste caso específico por

$$n = \sqrt{\frac{1 + V_R^2}{1 + V_S^2}}\ \exp\left[Z\ \sqrt{\ln(1 + V_R^2)(1 + V_S^2)}\ \right]$$

com Z a abscissa da curva normal padrão para $1 - P_I$ desejada, no caso Z = 5,083. As outras variáveis são

V_R - coeficiente de dispersão da função que caracteriza a resistência

V_S - coeficiente de dispersão da solicitação.

A resistência da montagem é dada por F_R e a solicitação, pela força de atrito que está atuando, F_S. O coeficiente de dispersão da solicitação é obtido de imediato, usando a definição

$$V_S = \sigma_S/\mu_S$$

$$V_S = 0,151$$

Quanto ao coeficiente de dispersão da resistência deve ser obtido dos valores do coeficiente de dispersão das variáveis que influem na resistência, no caso U, E e μ_s. O coeficiente de dispersão para uma função genérica, na forma

$$f = C \, \Pi_i \, x_i^{\alpha i}$$

é dado com boa aproximação por

$$V_f^2 = \Sigma_i (\alpha_i \, V_{xi})^2$$

No caso específico,

$$V_U = 0,12$$

$$V_E = 0,03$$

$$V_{\mu s} = 0,161$$

resultanto

$$V_R = 0,203$$

e o fator de projeto vale

$$n = 3,611$$

Esta é a relação entre a média da resistência e a média da solicitação. Esta última é de 4695 N, logo a média da resistência deve ser de 16954 N. Assim, usando a expressão de F_R e substituindo os valores médios de E e μ_s, resulta uma interferência média

$$\mu_U = 15,5 \ \mu m$$

Desta forma, as tolerâncias de usinagem devem ser escolhidas de tal modo a proporcionar esta interferência média, respeitando o desvio padrão de 1,86 µm, decorrência do valor do coeficiente de dispersão assumido.

4. Conclusões

Uma estimativa da confiabilidade, quando o sistema está na sua fase de projeto, é de valor, pois permite prever o desempenho do sistema quando em operação. Neste caso, a teoria da interferência permite uma avaliação aproximada do nível de confiabilidade, fornecendo uma maneira rápida de obter o fator de projeto necessário ao dimensionamento. Uma vez definido o fator de projeto que deve ser usado, o processo de cálculo é análogo ao clássico, apenas que com a diferença que são empregados os valores médios das variáveis envolvidas.

Bibliografia

[1] Ang, A., Amin, M., Reliability of Structures and Structural Systems. Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings ASCE, Vol. nº 94, EM2, April 1968, pp. 559-583.

[2] Crandall, S.H., Mark, W.D., Random Vibration in Mechanical Systems. Academic Press, New York, 1963.

[3] Freudenthal, A.M., Critical Appraisal of safety Criteria and their Basic Concepts. 8th. Congress, International Association for Bridge and Structural Engineers. New York, 1968.

[4] Lin, Y.K., Probabilistic theory of Structural Dynamics, McGraw-Hill, New York, 1967.

[5] Lipson, C., Sheth, N., Statistical Design and Analysis of Engineering Experiments, McGraw-Hill, New York, 1973

[6] Mittenbergs, A.A., The Materials Problem in Structural Reliability. Annals of Reliability and Mantainability, 1966, pp. 148-158.

[7] Rice, S.O., Mathematical Analysis of Random Noise. Selected Papers on Noise and Stochastic Processes., Dover, 1954.

[8] Rosa, E. da, Confiabilidade em Sistemas Mecânicos,

FEESC, Universidade Federal de Santa Catarina, 1976.

[9] Rosa, E. da, Generalização no Cálculo da Probabilidade de Interferência entre a Solicitação e a Resistência, em Sistemas. Tese de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 1976.

ROSA, E. da

APLICAÇÃO DA TEORIA DA INTERFERÊNCIA DE DUAS POPULAÇÕES NA PREVISÃO DA CONFIABILIDADE

Sumário

A probabilidade de interferência representa a probabilidade de falha, para um sistema solicitado estaticamente. No entanto, é possível obter um limite inferior para a confiabilidade, para solicitações dinâmicas, ergódicas, a partir da probabilidade de interferência e da frequência esperada no processo da solicitação. A partir da probabilidade de interferência necessária para atingir o nível de confiabilidade especificado, um critério de projeto pode ser usado, como a relação entre a média da resistência e a média da solicitação. É desenvolvido um exemplo de aplicação.

APPLICATION OF THE INTERFERENCE THEORY IN THE PREDICTION OF THE RELIABILITY

Summary

The interference probability is the failure probability for a statically stressed system. It is possible to obtain a lower bound for the reliability of the system, for a dynamic stress history, from the interference probability and the expected frequency of the process. Based in the interference probability that is necessary to obtain the specified reliability level, a design criterion can be used, as the relation between the strength mean and the stress mean. As an illustration, an application example is developed.