

**A N A I S**

DO  
IV CONGRESSO BRASILEIRO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA

FLORIANÓPOLIS, DEZ. 1977

PAPER NO. A - 4

PP. 41 - 51



ABCM/CNPq

**PROCEEDINGS**

OF THE FOURTH  
BRAZILIAN CONGRESS  
OF  
MECHANICAL ENGINEERING

DETERMINAÇÃO DO CENTRO DE CISALHAMENTO, CONSTANTE

TORCIONAL E DE DESEMPENHO EM SECÇÕES DE PAREDES DELGADAS

Domingos Boechat ALVES, Ph.D.  
Depto. de Engenharia Mecânica, UFSC

Volnei ANDERSSON, Eng. Mec.  
Depto. de Engenharia Mecânica, FURG

1. Introdução

Este trabalho descreve a formulação básica do processo numérico computacional e programa codificado em FORTRAN utilizados para determinar centro de cisalhamento, constante torcional, constante de empenamento e constantes para expressões da função empenamento, momento setorial de primeira espécie e fluxo de tensões cisalhantes devido à flexão em secções fechadas ou abertas, de paredes delgadas.

As secções abertas são modeladas por um número arbitrário de pontos interconectados por elementos retilíneos e/ou circulares individualizados pela ordem de seus pontos origem e término. Os pontos origem e término de cada elemento são tomados sobre a linha média da secção transversal.

Alguns resultados obtidos foram comparados com o que se encontra nas referências [3, 5, 6].

## 2. Configuração geométrica do iésimo elemento

A configuração geométrica do iésimo elemento é esquematizada na figura 1 onde  $A_i$  e  $B_i$  são os pontos origem e término, respectivamente;  $C'_i$  centróide do elemento;  $M_i$  ponto médio entre  $A_i$  e  $B_i$ ;  $D_i$  centro de curvatura do elemento;  $C$  centróide da secção e  $S$  centro de cisalhamento. Os eixos principais de inércia são representados por  $\eta_p$ ,  $\xi_p$ .

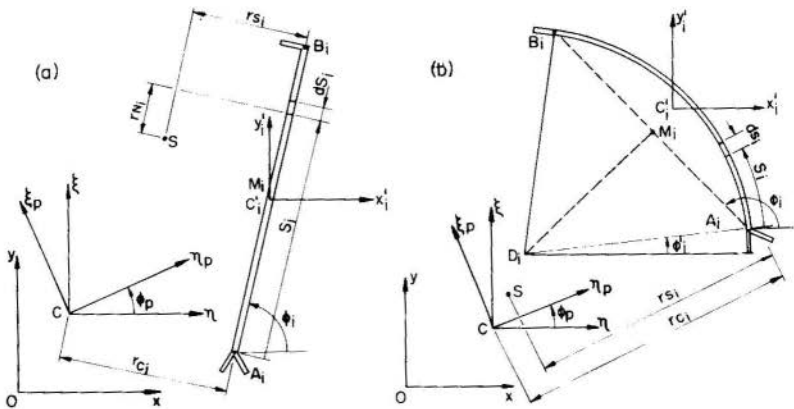


Fig. 1 - elementos: (a) retilíneo, (b) circular.

Os dados para o programa são as coordenadas de  $A_i$  e  $B_i$  e, adicionalmente,  $R_i$  em elementos circulares. O sinal de  $R_i$  é adotado de acordo com a rotação em torno de  $D_i$  como polo.

### 3. Secções abertas

O fluxo de cisalhamento [1] devido à flexão (sem torção) no iésimo elemento é

$$q_{o_i} = q_{a_i} + k t_i (-V_{\xi} (I_{\xi} \int_0^{s_i} ds_i - I_{\eta\xi} \int_0^{s_i} ds_i) - V_{\eta} (I_{\eta} \int_0^{s_i} ds_i - I_{\eta\xi} \int_0^{s_i} ds_i)) \quad (1)$$

onde  $q_{a_i} = q_{a_{\xi i}} V_{\xi} + q_{a_{\eta i}} V_{\eta}$  é o fluxo de cisalhamento na origem  $A_i$  do iésimo elemento,  $k = (I_{\eta} I_{\xi} - I_{\eta\xi}^2)^{-1}$ ,  $V_{\eta}$  e  $V_{\xi}$  componentes cisalhantes resultantes e  $I_{\eta}$ ,  $I_{\xi}$ ,  $I_{\eta\xi}$  momentos de inércia de área.

Considerando a configuração geométrica utilizada, a equação (1) pode ser escrita na forma

$$q_{o_i} = V_{\xi} (q_{a_{\xi i}} + Q1_{\xi i} s_i + Q2_{\xi i} s_i^2 + Q3_{\xi i} \text{sen} (s_i/|R_i|) + Q4_{\xi i} (1 - \cos (s_i/|R_i|))) + V_{\eta} (q_{a_{\eta i}} + Q1_{\eta i} s_i + Q2_{\eta i} s_i^2 + Q3_{\eta i} \text{sen} (s_i/|R_i|) + Q4_{\eta i} (1 - \cos (s_i/|R_i|))) \quad \dots (2)$$

As constantes em (2) estão indicadas no apêndice e são determinadas para cada elemento e listadas pelo computador.

O centro de cisalhamento  $S(x_{sa}, y_{sa})$  é determinado somando os momentos das forças cisalhantes nos  $n$  elementos, em relação a  $C$ .

A constante torcional [2] pode ser calculada, aproximadamente por

$$J = (\Sigma b_i t_i^3) / 3 \quad i = 1, n \quad (3)$$

A constante de empenamento (warping constant), usualmente, é definida como [1, 3, 4]

$$\Gamma = \Sigma \left( \int_0^{b_i} (D_t - W s_i)^2 t_i ds_i \right) \quad i = 1, n \quad (4)$$

$$D_t = (\Sigma \int_0^{b_i} Ws_i t_i ds_i) / Ar \quad i = 1, n \quad (5)$$

$$Ws_i = Wa_i + \int_0^{s_i} rs_i ds_i \quad i = 1, n \quad (6)$$

$Wa_i$  é o valor de  $Ws_i$  na origem do i-ésimo elemento e  $Ar$  a área da secção transversal. A equação (6), em função da configuração da fig. 1, pode ser escrita como

$$Ws_i = Wa_i + W1_i s_i + W2_i \text{sen}(s_i / |R_i|) + W3_i (1 - \cos(s_i / |R_i|)) \dots (7)$$

$Ws_i$  é denominado por alguns autores [4, 5] de "função empenamento", entretanto, a função empenamento adotada neste trabalho está indicada no apêndice e é importante no cálculo de tensões normais [1, 3].

Para secções constituídas de elementos retilíneos que têm um ponto em comum (fig. 2), a constante de empenamento vale [3, 5]

$$\Gamma = (\Sigma \int_0^{b_i} t_i^3 r_{Ni}^2 ds_i) / 12 \quad i = 1, n \quad (8)$$

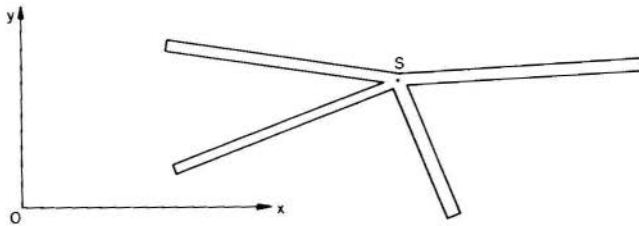


Fig. 2

O cálculo do fluxo de cisalhamento, na torção não uniforme, envolve o conhecimento de

$$Qws_i = Qwsa_i + \int_0^{s_i} (D_i - Ws_i) t_i ds_i \quad (9)$$

denominado "momento setorial de primeira espécie" em relação à origem  $s = 0$  (origem do primeiro elemento) [3, 4]. Novamente, de acordo com a configuração geométrica, esta equação pode ser escrita como segue

$$Qws_i = Qwsa_i + Qws1_i s_i + Qws2_i s_i^2 + Qws3_i (1 - \cos(s_i/|R_i|)) + Qws4_i \text{sen}(s_i/|R_i|) \quad (10)$$

cujos coeficientes (V. apêndice) são listados pelo computador.

Para estabelecer o sentido origem-término de cada elemento, sabe-se que o fluxo de tensões cisalhantes é zero nas faces livres. Assim, a utilização de (2,10) requer que se considere faces livres como origem dos elementos que a possuem e o sentido origem-término deve ser tal que cada nó (ponto de incidência dos elementos) possa ser designado como origem de um só elemento (fig. 3a). Para os outros elementos a ele ligados, será um término.

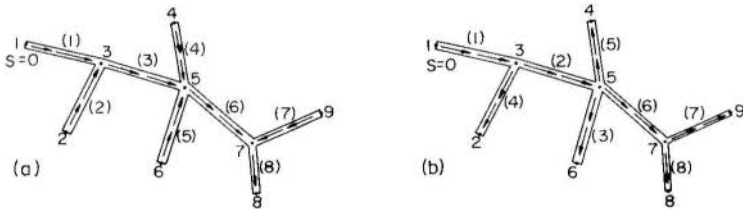


Fig. 3 - (a) orientação dos elementos para o cálculo de grandezas ligadas a  $q_{0_i}$  e (b) ao empenamento.

A quantidade  $Ws_i$  aumenta à medida que  $s$  aumenta e, somente, na extremidade livre escolhida como origem das coordenadas  $s$ , é nula. Logo, a orientação da figura 3a não se aplica. Para usar a equação (7) é necessário que os sentidos origem-término dos elementos sejam estabelecidos de tal forma que cada nó seja término de somente um elemento. Em todos os outros elementos a ele ligados, será uma origem (fig. 3b).

#### 4. Secções fechadas

O fluxo de tensões cisalhantes num elemento  $i$  de uma secção fechada (ausência de torção) é

$$q_i = q_{0i} + \bar{q}r_i \quad (11)$$

onde  $q_{0i}$  é dado por (2), considerando a secção aberta e  $\bar{q}r_i$  é a soma algébrica dos fluxos de tensões cisalhantes redundantes requeridos. Os fluxos de tensões cisalhantes redundantes  $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_{nct}$  são obtidos da relação

$$\oint_j q_0 ds/Gt + \bar{q}_j \oint_j ds/Gt - \sum_k \bar{q}_k \int_{j,k} ds/Gt = 0 \quad (12)$$

onde  $j = 1, nct$ ;  $k = 1, ncc_j$ ;  $nct$  é o número de cavidades tubulares da secção e  $ncc_j$  o número de cavidades adjacentes à cavidade  $j$ .

Somando momentos em relação a  $C$ , obtém-se as coordenadas do centro de cisalhamento na forma

$$x_{sf} = x_{sa} + 2\sum_j \Omega_j \bar{q}_{\xi j} \quad j = 1, nct \quad (13)$$

$$y_{sf} = y_{sa} - 2\sum_j \Omega_j \bar{q}_{\eta j} \quad j = k, nct \quad (14)$$

onde  $\bar{q}_j = \bar{q}_{\eta j} V_{\eta} + \bar{q}_{\xi j} V_{\xi}$  e  $\Omega_j$  é a área encerrada pela linha média das paredes de cada cavidade tubular  $j$ .

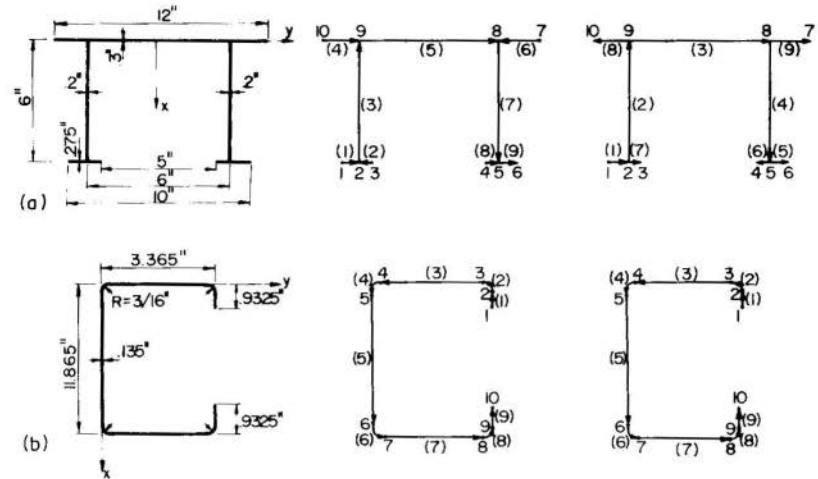
As constantes torcional e de empenamento e as constantes das expressões da função empenamento, momento setorial de primeira espécie e fluxo de cisalhamento devido à flexão [1, 3, 7], são determinadas modelando a secção de modo análogo às secções abertas.

#### 5. Resultados e comparações

Nas figuras 4 e 5 são mostrados alguns exemplos de secções modeladas por nós e elementos de espessura constante. Os resultados da figura 4 podem ser comparados com as referências [5, 6] e os da figura 5 com a referência [3].

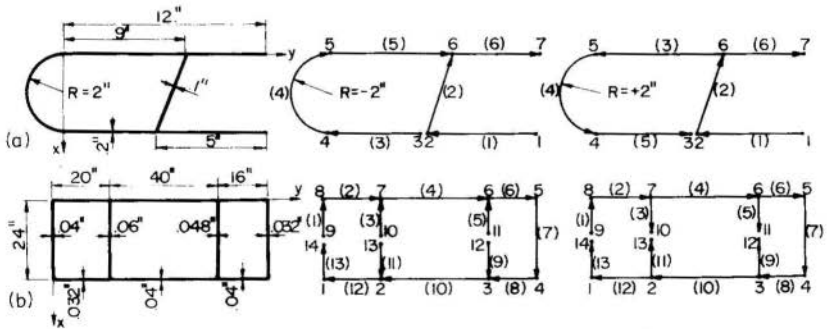
#### 6. Conclusões

Utilizou-se um programa codificado em FORTRAN com a



	$A_r$	$x_c$	$y_c$	$I_{\eta}$	$I_{\xi}$	$I_{\eta\xi}$	$x_s$	$y_s$	J	$\Gamma$
(a)	7.37499	2.09491	0.0000	84.86	45.97	0.00	-1.53306	0.0000	0.17466	336.06
(b)	2.70299	5.93249	0.84218	4.02	56.20	0.00	5.93249	-1.41730	0.01642	111.76

Fig. 4 - Exemplos de secções abertas.



	$A_r$	$x_c$	$y_c$	$I_{\eta}$	$I_{\xi}$	$I_{\eta\xi}$	$x_s$	$y_s$	$J_{tub}$
(a)	6.50385	2.0000	4.73222	116.04	22.33	-0.30	2.18585	1.16245	37.55
(b)	10.07999	12.0000	38.10786	6184.22	1036.80	0.00	12.0000	38.22936	2614.30

Fig. 5 - Exemplos de secções fechadas.

formulação apresentada e os valores obtidos para as coordenadas do centro de cisalhamento, centróide, momentos de inércia, assim como constantes torcionais e de empenamento, apresentaram excelente acuidade com os valores encontrados na literatura. O programa, sendo geral, possibilita a obtenção dessas constantes para qualquer tipo de secção transversal de paredes delgadas, fechada ou aberta, e é de grande valia em análise de estruturas aeroespaciais e navais.

### Bibliografia

- [1] Kollbrunner, C.F. and Basler, K., Torsion in Structures, An Engineering Approach, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, (1969).
- [2] Timoshenko, S.P. and Goodier, J.M., Theory of Elasticity, third edition.
- [3] Oden, J.T., Mechanics of Elastic Structures, McGraw-Hill Book Company, (1967).
- [4] Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., Theory of Elastic Stability, second edition.
- [5] Bleich, F., Buckling Strength of Metal Structures McGraw-Hill Book Company, (1952).
- [6] Light Gage Cold-formed Steel Design Manual, AISI (1961).
- [7] Bencotter, S.U., A Theory of Torsion Bending for Multicell Beams, J. Appl. Mech. , vol 21, n° 1 (1954).

### Apêndice

A1 - Constantes da equação (2)

1º) Em elementos retilíneos

$$Q1_{\xi i} = -kt_i(I_{\xi}(y_{Ai} - y_C) - I_{n\xi}(x_{Ai} - x_C))$$

$$Q2_{\xi i} = -kt_i(I_{\xi} \text{ sen } \phi_i - I_{n\xi} \text{ cos } \phi_i)/2$$



$$Q1_{ni} = -Kt_i (I_{\eta} (x_{Ai} - x_C) - I_{\eta\xi} (y_{Ai} - y_C))$$

$$Q2_{ni} = -Kt_i (I_{\eta} \cos \phi_i - I_{\eta\xi} \operatorname{sen} \phi_i) / 2$$

$$Q3_{\xi i} = Q4_{\xi i} = Q3_{ni} = Q4_{ni} = 0$$

2º) Em elementos circulares

$$Q1_{\xi i} = -Kt_i (I_{\xi} (y_{Di} - y_C) - I_{\eta\xi} (x_{Di} - x_C))$$

$$Q3_{\xi i} = -Kt_i |R_i|^2 (I_{\xi} \operatorname{sen} \phi'_i - I_{\eta\xi} \cos \phi'_i)$$

$$Q4_{\xi i} = -Kt_i R_i |R_i| (I_{\xi} \cos \phi'_i + I_{\eta\xi} \operatorname{sen} \phi'_i)$$

$$Q1_{ni} = -Kt_i (I_{\eta} (x_{Di} - x_C) - I_{\eta\xi} (y_{Di} - y_C))$$

$$Q3_{ni} = -Kt_i |R_i|^2 (I_{\eta} \cos \phi'_i - I_{\eta\xi} \operatorname{sen} \phi'_i)$$

$$Q4_{ni} = Kt_i R_i |R_i| (I_{\eta} \operatorname{sen} \phi'_i + I_{\eta\xi} \cos \phi'_i); \quad Q2_{\xi i} = Q2_{ni} = 0$$

Para determinar  $qa_{ni}$  e  $qa_{\xi i}$ , sabe-se que, nas extremidades livres,  $qa_i$  é zero e no iésimo elemento, é a soma dos fluxos cisalhantes dos elementos que precedem o iésimo elemento.

A2 - Função empenamento

$$WF_i = WFa_i + WF1_i s_i + WF2_i \operatorname{sen}(s_i / |R_i|) + WF3_i (1 - \cos(s_i / |R_i|))$$

$$WFa_i = D_t - Wa_i; \quad WF1_i = -W1_i; \quad WF2_i = -W2_i; \quad WF3_i = -W3_i$$

1º) Em elemento retilíneo

$$W1_i = (x_{Ai} - x_s) \operatorname{sen} \phi_i - (y_{Ai} - y_s) \cos \phi_i; \quad W2_i = W3_i = 0$$

2º) Em elementos circulares

$$W1_i = R_i; \quad W2_i = R_i ((x_{Di} - x_s) \cos \phi'_i + (y_{Di} - y_s) \operatorname{sen} \phi'_i)$$

$$W3_i = |R_i| (-(x_{Di} - x_s) \operatorname{sen} \phi'_i + (y_{Di} - y_s) \cos \phi'_i)$$

A3 - Constantes da equação (10)

$$Qws1_i = t_i (D_t - Wa_i - W3_i); \quad Qws2_i = -W1_i t_i / 2$$

$$Qws3_i = -W2_i |R_i| t_i; \quad Qws4_i = W3_i |R_i| t_i$$

Para determinar  $Wa_i$  sabe-se que o empenamento da o rigem do iésimo elemento é o mesmo do término do elemento que o precede.

ALVES, D.B. e ANDERSSON, V.

DETERMINAÇÃO DO CENTRO DE CISALHAMENTO, CONSTANTE

TORCIONAL E DE EMPENAMENTO EM SECÇÕES DE PAREDES DELGADAS

Sumário

Foi descrita a formulação básica do processo numérico computacional e programa codificado em FORTRAN, a fim de determinar momentos de inércia de área, centróide, centro de cisalhamento, constantes torcionais uniformes e não uniformes, constante de empenamento, constantes para expressões da função empenamento, momento setorial de primeira espécie e fluxo de tensões cisalhantes devido à flexão em secções de paredes delgadas, abertas ou fechadas. Alguns resultados obtidos foram comparados com a formulação existente na literatura.

---

DETERMINATION OF SHEAR CENTER, TORSIONAL  
AND WARPING CONSTANT IN THIN WALLED SECTIONS

Summary

A basic formulation for a numerical computational process and a FORTRAN program was developed to determinate areas moments of inertia, centroidal coordinates, shear center, uniform and nonuniform torsional constants, warping constant, and constants for warping function, first sectorial moment, and bending shear flow in open or closed thin walled cross sections. Some results obtained was compared with the existing formulations in the literature.