ANAIS

PROCEEDINGS

UNICAMP

COBEM 79
V CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECANICA
CAMPINAS, 12-13-14 e 15 DEZEMBRO 1979

ABCM

TRABALHO DE PESQUISA
RESEARCH PAPER
N.° D-09
P.P. 130 - 143

TEORIA NÃO LINEAR DE CASCAS ELÁSTICAS

Jesus Adjalma da Costa Junior
Aluno de Pós-Graduação, Eng. Mecânica
CT/UFSC - Florianópolis - SC - Brasil

Domingos Boechat Alves
Prof. Titular - Depto. Eng. Mecânica
CT/UFSC - Florianópolis - SC - Brasil

Sumário

Neste trabalho são apresentadas as relações deformação-deslocamento, as equações de equilíbrio, de compatibilidade e constitutivas para uma teoria não linear de cascas elásticas, na qual não é usada a hipótese de Kirchhoff-Love.

Summary

This work presents the strain-displacement relations and the equilibrium, the compatibility and constitutive equations for a nonlinear elastic shell theory in which the Kirchhoff-Love assumption was not used.

1. Introdução

Neste trabalho é descrita uma teoria não linear para cascas elásticas, isotrópicas, na qual não é usada a hipótese de Kirchhoff-Love. Os tensores, em termos das componentes do vetor deslocamento, são obtidos através das relações cinemáticas entre as superfícies deformada e indeformada. As equações de equilíbrio, em relação à superfície deformada, são obtidas pelo princípio dos trabalhos virtuais.

2. Propriedades métricas das cascas

Uma casca é definida como sendo um corpo elástico tridimensional de volume V, delimitado por duas superfícies externas, uma superior (S^+) e outra inferior (S^-), distantes de uma superfície de referência S^o, de h^+ e h^-, respectivamente, com a condição de que $h^+ - h^-$, denominada espessura da casca, seja menor do que o raio de curvatura no ponto considerado. A posição do ponto P na superfície de referência indeformada é denotado por $\overline{r}_o$; do ponto P*, na deformada, por $\overline{r}^*_o$, como ilustra a figura 2.1.

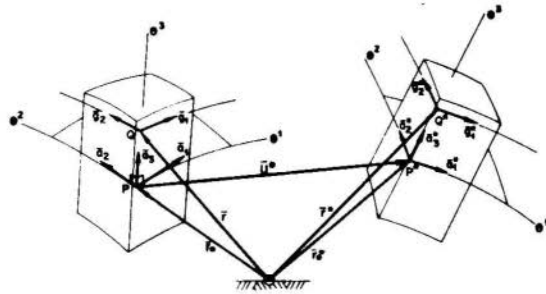

Fig. 2.1

O vetor posição de um ponto Q numa superfície arbitrária é dado por:

$$\overline{r}(\theta^1,\theta^2,\theta^3) = \overline{r}_o(\theta^1,\theta^2) + \theta^3\ \overline{a}_3(\theta^1,\theta^2) \qquad (2.1)$$

onde (θ^i) $(i = 1,2,3)$ são coordenadas curvilíneas, e $\overline{a}_3$ é o vetor unitário normal à superfície de referência indeformada, cujos vetores tangentes são:

$$\bar{a}_\alpha = \partial \bar{r}_o / \partial \Theta^\alpha = \bar{r}_{o,\alpha} \tag{2.2}$$

e o tensor métrico

$$a_{\alpha\beta} = \bar{a}_\alpha \cdot \bar{a}_\beta, \quad a^{\alpha\lambda}\, a_{\beta\lambda} = \delta^\alpha_\beta, \quad \bar{a}^\alpha = a^{\alpha\lambda}\, \bar{a}_\lambda \tag{2.3}$$

onde δ^α_β é o tensor de Kronecker. Os vetores tangentes e as componentes do tensor métrico para o ponto Q, são

$$\bar{g}_\alpha = \bar{a}_\alpha - \Theta^3\, b^\beta_\alpha\, \bar{a}_\beta \tag{2.4}$$

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2\Theta^3 b_{\alpha\beta} + (\Theta^3)^2\, b_{\alpha\beta}\, b^\alpha_\beta \tag{2.5}$$

$$\bar{g}_3 = \bar{g}^3 = \bar{a}_3 = \bar{a}^3, \quad g_{33} = g^{33} = a_{33} = a^{33} = 1 \tag{2.6}$$

$$g_{\alpha 3} = g^{\alpha 3} = a_{\alpha 3} = a^{\alpha 3} = 0 \tag{2.7}$$

onde b^α_β são as componentes mistas do tensor da segunda forma fundamental da superfície de referência definidos por:

$$b^\alpha_\beta = b_{\beta\lambda}\, a^{\alpha\lambda}, \quad b_{\alpha\beta} = -\bar{a}_{3,\alpha} \cdot \bar{a}_\beta = \bar{a}_3 \cdot \bar{a}_{\alpha,\beta}$$

O elemento de volume, em termos das coordenadas curvilíneas da superfície de referência S^o, e da coordenada Θ^3 é

$$dv = \mu\, d\Theta^3\, ds^o, \quad ds^o = \sqrt{a}\;\, d\Theta^1\, d\Theta^2 \tag{2.8}$$

$$\mu = \sqrt{g/a} = 1 - 2\Theta^3\, H + (\Theta^3)^2 K \tag{2.9}$$

onde

$$K = \frac{1}{2}\, b^\alpha_\alpha, \quad H = \frac{1}{2}\, \delta^{\alpha\beta}_{\lambda\mu}\, b^\lambda_\alpha\, b^\mu_\beta, \quad g = \det\,(g_{ij}), \quad a = \det\,(a_{\alpha\beta}) \qquad \ldots(2.10)$$

Sendo H e K as curvaturas média e gaussiana, respectivamente, e ds^o elemento de área da superfície de referência indeformada.

Da figura 2.1, o vetor posição do ponto Q* na superfí cie arbitrária é dado por:

$$\bar{r}^* = \bar{r}_o^*(\theta^1,\theta^2) + \theta^3\ \bar{a}_3^*(\theta^1,\theta^2) \tag{2.11}$$

Para as componentes do tensor métrico da superfície deformada são válidas as equações (2.3) com asteriscos e (2.4) a (2.7) se transformam em

$$\bar{g}_\alpha^* = \bar{a}_\alpha^* + \theta^3\ \bar{a}_{3,\alpha}^* \tag{2.12}$$

$$g_{\alpha\beta}^* = a_{\alpha\beta}^* + \theta^3(\bar{a}_{3,\alpha}^* . \bar{a}_\beta^* + \bar{a}_{3,\beta}^* . \bar{a}_\alpha^*) + (\theta^3)^2(\bar{a}_{3,\alpha}^* . \bar{a}_{3,\beta}^*) \tag{2.13}$$

$$g_{\alpha 3}^* = a_{\alpha 3}^* + \theta^3(\bar{a}_{3,\alpha}^* . \bar{a}_3^*);\ \bar{g}_{33}^* = a_{33}^* \tag{2.14}$$

3. <u>Relações deformação-deslocamento</u>

Definindo-se dois vetores deslocamento que determinam o vetor posição $\bar{r}^*$ dado por, $\bar{U}^o = \bar{r}_o^* - \bar{r}_o$ e $\bar{U}^1 = \bar{a}_3^* - \bar{a}_3$, o que resulta

$$\bar{g}_\alpha^* = \bar{a}_\alpha^* + \theta^3\ \bar{a}_{3,\alpha}^* = (\bar{a}_\alpha + \bar{U}^o_{,\alpha}) + \theta^3(\bar{U}^1_{,\alpha} - b_\alpha^\mu\ \bar{a}_\mu) \tag{3.1}$$

$$\bar{g}_3^* = \bar{a}_3^* = \bar{a}_3 + \bar{U}^1 \tag{3.2}$$

O tensor deformação tridimensional é:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\ (g_{ij}^* - g_{ij}) \tag{3.3}$$

no qual, usando as aproximações (3.1) e (3.2),resulta em:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}^o + e_{\alpha\beta}^1\ (\theta^3) + e_{\alpha\beta}^2\ (\theta^3)^2 \tag{3.4}$$

$$\varepsilon_{\alpha 3} = e_{\alpha 3}^o + e_{\alpha 3}^1\ (\theta^3) \tag{3.5}$$

$$\varepsilon_{33} = e_{33}^o \tag{3.6}$$

onde

$$e_{\alpha\beta}^o = \frac{1}{2}\ (a_{\alpha\beta}^* - a_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}\ (\bar{a}_\alpha . \bar{U}^o_{,\beta} + \bar{a}_\beta . \bar{U}^o_{,\alpha} + \bar{U}^o_{,\alpha} . \bar{U}^o_{,\beta}) \tag{3.7}$$

$$e^o_{\alpha 3} = \frac{1}{2} (\bar{a}_3 . \bar{U}^o_{,\alpha} + \bar{a}_\alpha . \bar{U}^1 + \bar{U}^1 . \bar{U}^o_{,\alpha}) \tag{3.8}$$

$$e^o_{33} = \bar{a}_3 . \bar{U}^1 + \frac{1}{2} \bar{U}^1 . \bar{U}^1 \tag{3.9}$$

$$e^1_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\bar{a}_\alpha . \bar{U}^1_{,\beta} + \bar{a}_\beta . \bar{U}^1_{,\alpha} - b^\mu_\alpha \bar{a}_\mu . \bar{U}^o_{,\beta} - b^\mu_\beta \bar{a}_\mu . \bar{U}^o_{,\alpha} + \\ + \bar{U}^o_{,\alpha} . \bar{U}^1_{,\beta} + \bar{U}^o_{,\beta} . \bar{U}^1_{,\alpha}) \tag{3.10}$$

$$e^1_{\alpha 3} = \frac{1}{2} (\bar{a}_3 . \bar{U}^1_{,\alpha} - b^\mu_\alpha \bar{a}_\mu . \bar{U}^1 + \bar{U}^1 . \bar{U}^1_{,\alpha}) \tag{3.11}$$

$$e^2_{\alpha\beta} = - \frac{1}{2} (b^\mu_\alpha \bar{a}_\mu . \bar{U}^1_{,\beta} + b^\mu_\beta \bar{a}_\mu . \bar{U}^1_{,\alpha} - \bar{U}^1_{,\alpha} . \bar{U}^1_{,\beta}) \tag{3.12}$$

4. Equações de equilíbrio

O trabalho virtual das forças internas para um corpo tridimensional é expresso por:

$$TVI = \int_{V^*} \sigma^{ij} \, \delta\varepsilon_{ij} \, dV^* \quad (i,j = 1,2,3) \tag{4.1}$$

onde σ^{ij} é o tensor tensão simétrico, ε_{ij} é o tensor deformação e V^* denota o volume do corpo deformado. A equação (4.1) pode ser reescrita como

$$TVI = \int_{V^*} (\sigma^{\alpha\beta} \, \delta\varepsilon_{\alpha\beta} + 2\sigma^{\alpha 3} \, \delta\varepsilon_{\alpha 3} + \sigma^{33} \, \delta\varepsilon_{33}) \, dV^* \tag{4.2}$$

Introduzindo as equações (3.4) a (3.6) em (4.2) levando-se em conta as relações de $\bar{U}^o$ e $\bar{U}^1$, obtém-se

$$TVI = \int_{S^{o*}} \{N^{\alpha\beta}(\bar{a}_\alpha + \bar{U}^o_{,\alpha}) . \delta\bar{U}^o_{,\beta} + M^{\alpha\beta}((\bar{a}_\alpha + \bar{U}^o_{,\alpha}) . \delta \, \bar{a}^*_{3,\beta} + \\ + \bar{a}^*_{3,\beta} . \delta \, \bar{U}^o_{,\alpha}) + B^{\alpha\beta} \, \bar{a}^*_{3,\alpha} . \delta \, \bar{a}^*_{3,\beta} + S^\alpha(\bar{a}_\alpha + \bar{U}^o_{,\alpha}) . \delta \, \bar{a}^*_3 + \\ + \bar{a}^*_3 . \delta \, \bar{U}^o_{,\alpha}) + Q^\alpha(\bar{a}^*_3 . \delta \, \bar{a}^*_{3,\alpha} + \bar{a}^*_{3,\alpha} . \delta \, \bar{a}^*_3 + \bar{P}^3 . \delta\bar{a}^*_3\} dS^{o*} \quad \ldots(4.3)$$

onde S^{o*} é a área da superfície de referência deformada e a seguinte notação é usada

$$N^{\alpha\beta} = \int_{-h^-}^{h^+} \mu^* \, \sigma^{\alpha\beta} \, d\Theta^3, \qquad M^{\alpha\beta} = \int_{-h^-}^{h^+} \mu^* \, \sigma^{\alpha\beta} \, \Theta^3 \, d\Theta^3,$$

$$B^{\alpha\beta} = \int_{-h^-}^{h^+} \mu^* \, \sigma^{\alpha\beta} \, (\Theta^3)^2 \, d\Theta^3, \qquad S^{\alpha} = \int_{-h^-}^{h^+} \mu^* \, \sigma^{\alpha 3} \, d\Theta^3$$

$$Q^{\alpha} = \int_{-h^-}^{h^+} \mu^* \, \sigma^{\alpha 3} \, \Theta^3 \, d\Theta^3, \quad \overline{P}^3 = \overline{a}_3^* \int_{-h^-}^{h^+} \mu^* \, \sigma^{33} \, d\Theta^3 \qquad (4.4)$$

O trabalho virtual das cargas atuantes nas superfícies externas, $\overline{T}_e$, e o das forças associadas às condições de contorno, $\overline{T}_c$, (fig. 4.1), são respectivamente:

$$TVE_e = \int_{S^*} \overline{T}_e (\delta \, \overline{U}^o + \Theta^3 \, \delta \, \overline{a}_3^*)_e \, dS^* \qquad (4.5)$$

$$TVE_c = \int_{S^*} \overline{T}_c (\delta \, \overline{U}^o + \Theta^3 \, \delta \, \overline{a}_3^*)_c \, dS^* \qquad (4.6)$$

onde o subscrito (e) e (c) refere-se à superfície exterior e ao contorno,respectivamente.

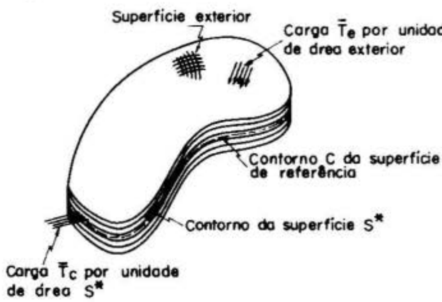

Fig. 4.1

A expressão (4.5) pode ser transformada para superfície de referência:

$$TVE_e = \int_{S^{o*}} \sqrt{\frac{g_e^*}{a^*}} \; \overline{T}_e (\delta \, \overline{U}^o + \Theta^3 \, \delta \, \overline{a}_3^*) \, dS^{o*} \qquad (4.7)$$

Denotando por $\overline{n}$ o vetor unitário normal a S^* e por C o con torno da superfície de referência, a equação (4.6) é reescrita:

$$TVE_c = \int_{S^*}\int_{\Theta^3} \overline{T}_c(\delta\ \overline{U}^o + \Theta^3\ \delta\ \overline{a}_3^*)(\overline{n}.(\overline{a}_\alpha^* \times \overline{a}_3^*))\ \frac{d\Theta^\alpha}{dC}\ d\Theta^3\ dC \quad \ldots(4.8)$$

Pelo princípio dos trabalhos virtuais tem-se

$$TVI = TVE = TVE_e + TVE_c \quad (4.9)$$

no qual, como não foi imposta nenhuma condição de vínculo, todas as variações estaticamente admissíveis que aparecem nesta expressão são independentes.

Das equações (4.3) a (4.9), obtém-se as equações de equilíbrio

$$[N^{\beta\alpha}(\overline{a}_\beta + \overline{U}^o_{,\beta}) + M^{\alpha\beta}\ \overline{a}^*_{3,\beta} + S^\alpha\ \overline{a}_3^*]_{;\alpha} + \sqrt{g_e^*/a^*}\ \overline{T}_e = 0 \quad (4.10)$$

$$[M^{\alpha\beta}(\overline{a}_\alpha + \overline{U}^o_{,\alpha}) + B^{\alpha\beta}\ \overline{a}^*_{3,\alpha} + Q^\beta\ \overline{a}_3^*]_{;\beta} - S^\alpha(\overline{a}_\alpha + \overline{U}^o_{,\alpha}) +$$
$$+ Q^\alpha\ \overline{a}^*_{3,\alpha} - \overline{P}^3 + \sqrt{g_e^*/a^*}\ \ \Theta^3\ \overline{T}_e = 0 \quad (4.11)$$

onde (;) denota diferenciação covariante no estado deformado e ambas as equações possuem somente 3 componentes não nulas.

As condições de contorno associadas com as equações (4.10) e (4.11) são, respectivamente,

$$(N^{\beta\alpha}(\overline{a}_\beta + \overline{U}^o_{,\beta}) + M^{\alpha\beta}\ \overline{a}^*_{3,\beta} + S^\alpha\ \overline{a}_3^*)\nu_\alpha =$$
$$= \int_{\Theta^3} \cdot \overline{T}_e[\overline{n}.(\overline{a}_\alpha^* \times \overline{a}_3^*)]\frac{d\Theta^\alpha}{dC}\ d\Theta^3 \quad \text{ou } \overline{U}^o \text{ prescrito} \quad (4.12)$$

$$(M^{\alpha\beta}(\overline{a}_\alpha + \overline{U}^o_{,\alpha}) + B^{\alpha\beta}\ \overline{a}^*_{3,\alpha} + Q^\beta\ \overline{a}_3^*)\nu_\beta =$$
$$= \int_{\Theta^3} \overline{T}_c\ \Theta^3[\overline{n}.(\overline{a}_\alpha^* \times \overline{a}_3^*)]\frac{d\Theta^\alpha}{dC}\ d\Theta^3 \quad \text{ou } \overline{a}_3^* \text{ prescrito} \quad (4.13)$$

onde ν_α é o vetor unitário normal à curva de contorno da superfície de referência S^{o*}.

5. Equações de compatibilidade

Para a obtenção das equações de compatibilidade pode-se utilizar o teorema de Riemann para o qual, desde que o espaço seja plano, os tensores g_{ij} e g^*_{ij} são funções não arbitrárias das coordenadas e deverão satisfazer as seguintes equações:

$$R_{ijk\ell} = 0 \qquad e \qquad R^*_{ijk\ell} = 0 \tag{5.1}$$

onde (5.1) são os tensores de Riemam Christoffel cujas expressões são, respectivamente,

$$R_{ijk\ell} = \Gamma_{j\ell i,k} - \Gamma_{jki,\ell} + \Gamma_{jkm}\,\Gamma^m_{i\ell} - \Gamma_{j\ell m}\,\Gamma^m_{ik} \tag{5.2}$$

$$R^*_{ijk\ell} = {}^*\Gamma_{\ell i,k} - {}^*\Gamma_{jki,\ell} + {}^*\Gamma_{jkm}\,{}^*\Gamma^m_{i\ell} - {}^*\Gamma_{j\ell m}\,{}^*\Gamma^m_{ik} \tag{5.3}$$

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\,(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{i\ell,k}) \quad \Gamma^k_{ij} = g^{k\ell}\,\Gamma_{ij\ell} \tag{5.4}$$

O tensor métrico do sistema deformado é expresso em termos do tensor deformação e do tensor métrico do estado indeformado por

$$g^{*ij} = -2\,g^{i\ell}\,g^{jk}\,\varepsilon_{\ell k} + g^{ij} \tag{5.5}$$

Utilizando as equações (5.4) e (3.2) para calcular símbolos de Christoffel deformado, tem-se:

$${}^*\Gamma_{j\ell i} = \Gamma_{j\ell i} + \varepsilon_{ji,\ell} + \varepsilon_{\ell i,j} - \varepsilon_{j\ell,i} \tag{5.6}$$

$${}^*\Gamma_{jki} = \Gamma_{jki} + \varepsilon_{ji,k} + \varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{jk,i} \tag{5.7}$$

Os símbolos de Christoffel de segunda espécie são calculados a partir de (5.4) e (5.5) resultando:

$${}^*\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - 2\,g^{ks}\,g^{\ell r}(\Gamma_{ij\ell} + \varepsilon_{i\ell,j} + \varepsilon_{j\ell,i} - \varepsilon_{ij,\ell})(\varepsilon_{sr}) + $$
$$+ g^{k\ell}(\varepsilon_{i\ell,j} + \varepsilon_{j\ell,i} - \varepsilon_{ij,\ell}) \tag{5.8}$$

Multiplicando (5.6) por (5.8) e fazendo troca de índices, tem-se:

$$
\begin{aligned}
{}^{*}\Gamma_{jkm}\, {}^{*}\Gamma^{m}_{i\ell} = {} & \Gamma^{m}_{i\ell}\, \Gamma_{jkm} + \Gamma^{m}_{i\ell}(\varepsilon_{jm,k} + \varepsilon_{km,j} - \varepsilon_{jk,m}) - \\
& - 2g^{ms}\, g^{pr}\, \varepsilon_{sr}(\Gamma_{i\ell p} + \varepsilon_{ip,\ell} + \varepsilon_{\ell p,i} - \varepsilon_{i\ell,p})(\Gamma_{jkm} + \varepsilon_{jm,k} + \\
& + \varepsilon_{km,j} - \varepsilon_{jk,m}) + g^{mp}(\varepsilon_{ip,} + \varepsilon_{\ell p,i} - \varepsilon_{i\ell,p})(\Gamma_{jkm} + \varepsilon_{jm,k} + \\
& + \varepsilon_{km,j} - \varepsilon_{jk,m})
\end{aligned}
\qquad (5.9)
$$

Substituindo a equação (5.9) e as derivadas de (5.6) e (5.7) com relação a k e ℓ, respectivamente, na equação (5.3) e fazendo uso das relações (5.1), obtém-se:

$$
\begin{aligned}
& (\varepsilon_{jk,i\ell} + \varepsilon_{\ell i,jk} - \varepsilon_{j\ell,ik} - \varepsilon_{ki,j\ell}) + \Gamma^{m}_{i\ell}(\varepsilon_{jm,k} + \varepsilon_{km,j} - \\
& - \varepsilon_{jk,m}) - \Gamma^{m}_{ik}(\varepsilon_{jm,\ell} + \varepsilon_{\ell m,j} - \varepsilon_{j\ell,m}) + 2g^{ms}\, g^{pr}\, \varepsilon_{sr}\, \cdot \\
& \cdot\, ((\Gamma_{ikp})(\Gamma_{j\ell m} + \varepsilon_{jm,\ell} + \varepsilon_{\ell m,j} - \varepsilon_{j\ell,m})) + (\Gamma_{j\ell m})(\varepsilon_{ip,\ell} + \\
& + \varepsilon_{\ell p,i} - \varepsilon_{i\ell,p}) - 2g^{ms}\, g^{pr}\, \varepsilon_{sr}\, ((\Gamma_{i\ell p})(\Gamma_{jkm} + \varepsilon_{jm,k} + \\
& + \varepsilon_{km,j} - \varepsilon_{jk,m}) - (\Gamma_{jkm})(\varepsilon_{ip,\ell} + \varepsilon_{\ell p,i} - \varepsilon_{i\ell,p}) + \\
& + g^{mp}(\varepsilon_{ip,\ell} + \varepsilon_{\ell p,i} - \varepsilon_{i\ell,p})(\Gamma_{jkm} - \varepsilon_{jm,k} + \varepsilon_{km,j} - \varepsilon_{jk,m}) - \\
& - g^{mp}(\varepsilon_{ip,k} + \varepsilon_{kp,i} - \varepsilon_{ik,p})(\Gamma_{j\ell m} + \varepsilon_{jm,\ell} + \varepsilon_{\ell m,j} - \varepsilon_{j\ell,m}) = 0
\end{aligned}
\qquad \ldots(5.10)
$$

A equação (5.10) juntamente com a identidade de Bianchi |3|

$$R^{*}_{k\ell mn;p} + R^{*}_{k\ell np;m} + R^{*}_{k\ell pm;n} = 0 \qquad (5.11)$$

constituem as equações de compatibilidade em termos das componentes do tensor deformação da superfície de referência.

6. Equações constitutivas de um sólido elástico isotrópico

De acordo com a teoria do estado natural, um corpo perfeitamente elástico e isotrópico, possui uma função densidade de energia Φ da seguinte forma |3|

$$\Phi = \Phi(\Theta^i, I_1, I_2, I_3) \tag{6.1}$$

onde $\Theta^i (i = 1,2,3)$ são coordenadas referidas a um certo estado de referência e $I_i (i = 1,2,3)$ são os variantes de deformação definidos por:

$$I_1 = K_1;\ I_2 = \frac{1}{2}(K_1^2 - K_2);\ I_3 = \frac{1}{6}(K_1^3 - 3K_1\ K_2 + 2K_3) \tag{6.2}$$

onde

$$K_1 = g^{ij}\varepsilon_{ij};\ K_2 = g^{ip}g^{jq}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{pq};\ K_3 = g^{ip}g^{jq}g^{kr}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{pk}\varepsilon_{qr} \tag{6.3}$$

A relação entre o tensor tensão σ^{ij} e o tensor deformação ε_{ij} é obtida da seguinte forma:

$$\sigma^{ij} = \frac{\rho}{\rho_o}\ \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}} \qquad \text{onde } \rho_o = \rho\sqrt{g^*},\ \ \rho = \text{densidade} \tag{6.4}$$

A equação (6.4) foi introduzida por Boussinesq (1870-1872). Derivando parcialmente a relação (6.1), resulta

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}} = \frac{\partial\Phi}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial\varepsilon_{ij}} + \frac{\partial\Phi}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial\varepsilon_{ij}} + \frac{\partial\Phi}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial\varepsilon_{ij}} \tag{6.5}$$

Usando as expressões (6.2) para os invariantes, tem-se

$$\frac{\partial I_1}{\partial\varepsilon_{ij}} = g^{ij} \tag{6.6}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial\varepsilon_{ij}} = I_1\ g^{ij} - g^{ip}\ g^{jq}\ \varepsilon_{pq} \tag{6.7}$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial\varepsilon_{ij}} = I_2\ g^{ij} - I_1(g^{ip}\ g^{jq}\ \varepsilon_{pq}) + \\ + (g^{ip}\ g^{jq}\ g^{kr}\ \varepsilon_{pk}\ \varepsilon_{qr}) \tag{6.8}$$

consequentemente

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}} = C_1\, g^{ij} + C_2[(I_1\, g^{ij} - g^{ip}\, g^{jq}\, \varepsilon_{pq})] +$$
$$+ C_3[(I_2\, g^{ij} - I_1(g^{ip}\, g^{jq}\, \varepsilon_{pq}) +$$
$$+ (g^{ip}\, g^{jq}\, g^{kr}\, \varepsilon_{pk}\, \varepsilon_{qr})] \qquad (6.9)$$

onde

$$C_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial I_1} \qquad C_2 = \frac{\partial\Phi}{\partial I_2} \qquad C_3 = \frac{\partial\Phi}{\partial I_3} \qquad (6.10)$$

A expressão (6.4) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\sigma^{ij} = \frac{\rho}{\rho_o}\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}} = \frac{\rho}{\rho_o}\,[C_1\, g^{ij} + C_2(I_1\, g^{ij}) -$$
$$- \; - g^{ip}\, g^{jq}\, \varepsilon_{pq}) + C_3(I_2\, g^{ij} - I_1(g^{ip}\, g^{jq}\, \varepsilon_{pq}) +$$
$$+ \; + (g^{ip}\, g^{jq}\, g^{kr}\, \varepsilon_{pk}\, \varepsilon_{qr}))] \qquad (6.11)$$

Considerando Φ como uma função analítica das deformações, ela pode ser expressa como uma série de potência dos invariantes de deformação e portanto

$$C_3 = \frac{\partial\Phi}{\partial I_3} = C_{TWY}\; I_1^T\; I_2^W\; I_3^Y \qquad (6.12)$$

onde $T,W,Y = 0,1,2,\ldots$, e a soma dos índices fica subentendida como sendo aquela que não aparece repetida.

Com C_3 dado por (6.12), tem-se

$$\frac{\partial C_3}{\partial I_2} = \frac{\partial C_2}{\partial I_3} = WC_{TWY} I_1^T\; I_2^{W-1}\; I_3^Y \qquad (6.13)$$

e integrando resulta em

$$C_2 = \frac{W}{Y+1}\, C_{TWY}\; I_1^T\; I_2^{W-1}\; I_3^{Y+1} + D_{TW}\; I_1^T\; I_2^W \qquad (6.14)$$

onde o segundo termo do lado direito da equação representa uma função arbitrária de integração. Similarmente, com o re sultado (6.14) obtém-se

$$\frac{\partial C_2}{\partial I_1} = \frac{\partial C_1}{\partial I_2} = \frac{TW}{Y+1} C_{TWY} I_1^{T-1} I_2^{W-1} I_3^{Y+1} + T D_{TW} I_1^{T-1} I_2^{W} \quad (6.15)$$

e integrando obtém-se

$$C_1 = \frac{T}{Y+1} C_{TWY} I_1^{T-1} I_2^{W} I_3^{Y+1} + \frac{T}{W+1} D_{TW} I_1^{T-1} I_2^{W+1} + E_T I_1^{T} \quad (6.16)$$

onde o terceiro termo do lado direito representa uma função arbitrária de integração.

Com base em (6.13), (6.14) e (6.16) o tensor tensão (6.14) é novamente reescrito como:

$$\sigma^{ij} = \frac{\rho}{\rho_o} [(\frac{T}{Y+1} C_{TWY} I_1^{T-1} I_2^{W} I_3^{Y+1} + \frac{T}{W+1} D_{TW} I_1^{T-1} I_2^{W+1} +$$
$$+ E_T I_1^{T}(g^{ij} \qquad + (\frac{W}{Y+1} C_{TWY} I_1^{T} I_2^{W-1} I_3^{Y+1} +$$
$$+ D_{TW} I_1^{T} I_2^{W})(I_1 g^{ij} - g^{ij} g^{jq} \varepsilon_{pq}) +$$
$$+ C_{TWY} I_1^{T} I_2^{W} I_3^{Y}(I_2 g^{ij} - I_1(g^{ip} g^{jq} \varepsilon_{pq}) +$$
$$+ \qquad g^{ip} g^{jq} g^{kr} \varepsilon_{pk} \varepsilon_{qr})] \quad (6.17)$$

As equações constitutivas em termos das tensões são obtidas substituindo a equação (6.17) em (4.4).

7. Conclusões

As equações obtidas se reduzem às apresentadas por vários autores quando são introduzidas as respectivas hipóteses simplificativas.

Assim, as relações tensões-deformações (3.8) a (3.12) quando utilizada a hipótese de Kirchhoff-Love se reduzem às equações apresentadas na ref. |5|. Além disso, quando é tomado no sistema de referência para o estado deformado a terceira componente $\bar{a}_3^*$ como produto vetorial das componentes tangentes à superfície de referência deformada, estas relações se reduzem às apresentadas na ref. |6|.

Utilizando as equações de equilíbrio de Naghdi |4|, ob tidas por processo diferente do aqui apresentado, Birickoglu e Kal ins |1| chegaram às equações, que a menos de notações são idênticas às relações (4.10) e (4.11).

Linearizando as deformações na relação (5.12) obtém-se, a menos de notação, a equação (4.13) da ref. |2|.

Desenvolvendo as relações (4.1) da ref. |5| em termos dos invariantes do tensor deformação chega-se às equações constitutivas (6.17) apresentadas neste trabalho. Supondo a hipótese de Kirchhoff-Love e adotando as seguintes hipóteses linearizadoras

$$C_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial I_1} = \lambda + 2G - \alpha(3\lambda + 2G)(T - T_o)$$

$$C_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial I_2} = -2G \qquad \text{e} \qquad C_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial I_3} = 0$$

nas quais λ e G são, respectivamente, o coeficiente de Lamé e módulo de cisalhamento, e α o coeficiente de expansão térmica, as equações (6.11) se reduzem às apresentadas na ref. |4|.

8. Agradecimento

Os autores agradecem à Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP) e à Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN) que apoiaram a realização desta pesquisa.

Bibliografia

|1| Birickoglu, V. and Kalnins, A., Large elastic deformations of shells with the inclusion of transverse normal strain., Int. J. Solids Strucr., 7, 431-444 (1971).

|2| Chien Wei-Zang, Intrinsic theory of shells and plates, Part I - General Theory, Q. Appl. Math. 1 297-327 (1944).

|3| Erigen, A.C., Nonlinear theory of continuous média McGraw-Hill (1962).

|4| Naghdi, P.M., Foundations of elastic shell theory, Progress in Solid Mechanics, Vol. 4, North-Holland (1963).

|5| Naghdi, P.M. and Nordgreen, R.P., On the nonlinear theory of elastic shells under the Kirchhoff Hypothesis, Q. Appl. Math. 21, 49-59 (1963).

|6| Sanders, J.L., Nonlinear theories for thin shells, Q. Appl. Math 21, 21-36 (1963).