

---

I SIMPÓSIO BRASILEIRO  
SOBRE TUBULAÇÕES E VASOS DE PRESSÃO  
-ANAIS-

TRABALHO Nº26

PP.455 - 474

Salvador -BA, Brasil

19-21 Novembro 1980

---

VIBRAÇÕES NATURAIS DE UM "CORE BARREL" DE UM REATOR PWR  
POR ELEMENTOS DE CASCA DE REVOLUÇÃO

Clovis Sperb de Barcellos  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Centro Tecnológico -UFSC- Florianópolis, SC

SUMÁRIO

O tambor do núcleo ("core barrel") de reatores nucleares tipo PWR pode ser submetido a elevados carregamentos dinâmicos como no caso de ruptura no bocal de entrada de água, bem como a vibrações em condições de serviços que podem levar a fratura por fadiga. A fim de estimar o comportamento do tambor sob condições diversas de carregamento é de interesse determinar seus comportamentos dinâmicos característicos.

Para obter os modos e frequências naturais do tambor foi desenvolvido um programa de computador baseado no método de elementos finitos. Os elementos utilizados são elementos de casca fina com carregamentos não axi-simétricos, onde a dependência circunferencial foi descrita através de expansão em série de Fourier. Para descrever as relações entre tensões resultantes e deslocamentos foram utilizadas as formulações de Flügge e Timoshenko. Comparações entre os resultados obtidos através das formulações acima são apresentados juntamente com os resultados obtidos por outros sistemas de programas de elementos finitos, como SAP, ASKA e STRUDL/DYNAL e por métodos analíticos.

## 1 - Introdução

Em usinas termonucleares o núcleo do reator é posicionado no interior de uma casca cilíndrica, denominada aqui por tambor do núcleo ("Core barrel"), que em geral é considerada engastada na extremidade superior e reforçada por um anel na outra extremidade. O comportamento desse elemento estrutural sob diversas condições de carregamento tem sido investigado teórica e experimentalmente por vários autores, e.g [1] a [5], nos últimos anos. Esse elemento estrutural deve, por normas de segurança, suportar elevadas cargas locais transientes, como na eventualidade de ocorrer um acidente tipo LOCA, bem como a vibrações em condições operacionais que poderiam levar a fratura por fadiga. Em tais condições, o comportamento real da estrutura é acoplada à do fluido. Convém observar que outros componentes de usinas nucleares, como o gerador de vapor e tanques de acumulação, contêm elementos constituídos de cascas cilíndricas sob condições de contorno similares. Logo, o comportamento dinâmico de tais elementos estruturais se torna importante para a análise de segurança dos respectivos componentes. Um enfoque para estimar o referido comportamento dinâmico faz uso dos seus modos e frequências naturais de vibração.

Um dos procedimentos disponíveis para a determinação dos modos e frequências naturais de uma estrutura se baseia no uso do método de elementos finitos. Contudo, vários autores, e.g [6], tentaram modelar o contorno do núcleo de um reator de teste (HDR) na Alemanha e os resultados não se comparam bem com os fornecidos por outros métodos. Ludwig, [6], [7], [8], apresentou soluções "quase-exatas" onde as equações diferenciais de Flügge são transformadas em equações algébricas por expansões das variáveis dependentes em séries triplas. Contudo, os programas CYLDY2 e CYLDY3 desenvolvidos para essas formulações são restritos a cascas de espessura uniforme, contrariamente à geometria real, bem como tem apresentado problemas na determinação de raízes de polinômios [9].

Descreve-se, no presente artigo, um programa baseado no método de elementos finitos, CYLDYFE, desenvolvido pelo autor [10] para a determinação dos modos e frequências naturais do referido elemento estrutural, bem como são apresentados alguns resultados comparativos. Apesar de o programa permitir análise de cascas de

de espessura variável, são apresentados resultados apenas para uma geometria de espessura constante afim de os tornar comparáveis aos obtidos por Ludwig [6] e [8]. Nesse programa são utilizados elementos finitos de casca fina de revolução sob condições não axi-simétricas e o anel de reforço é considerado infinitamente rígido. Assim, a massa do anel contribui apenas para os modos circunferenciais de ordem 0 e 1, já que são os únicos compatíveis com os movimentos de corpo rígido da extremidade inferior da casca.

A descrição circunferencial das variáveis é realizada através de expansão em série de Fourier. Assim é obtida uma sucessão de problemas de autovalores: uma para cada ordem circunferencial. Os elementos são bastante simples e se baseiam na formulação apresentada por Percy, Pian e outros [11], tendo os deslocamentos axial e circunferencial descritos por funções de interpolação lineares e o normal à casca por cúbicas.

Por outro lado, deve-se ter sempre em mente as diferentes fontes de aproximações envolvidas no método. As mais significativas são: as premissas usadas na teoria de casca escolhida ou desenvolvida, as ordens das funções de interpolação selecionadas e finalmente os algoritmos numéricos e erros de truncamento.

## 2. Equações de Casca

Para determinar as propriedades dinâmicas de uma casca, seleciona-se inicialmente dentre as várias formulações matemáticas de cascas a mais simples e que seja aplicável à geometria em estudo e aos tipos de formas modais de interesse. Considerando que o tambor do núcleo é uma casca fina e restringindo a análise a pequenos deslocamentos e deformações, pode-se supor que as normais à superfície média permanecem retas e de mesmo comprimento. Por outro lado, no presente estudo se está interessado apenas nos modos de ordem inferiores e nestas condições se pode desprezar a inércia rotacional e o cisalhamento transversal. A seguir são comentadas algumas formulações de cascas.

### 2.1 - Equações de Flügge

Sob as hipóteses acima, pode-se usar as equações de

Flügge [12] para descrever as relações deformação-deslocamento e tensões resultantes-deslocamentos. Apesar da inconsistência de considerar estados planos de tensão e deformação como a maioria das teorias de cascas finas, tais relações são obtidas de modo consistente após ter sido definido o campo de deslocamento. Inclusive, as relações de tensões resultantes são obtidas considerando que os elementos de área na seção transversal tem forma trapezoidal e que as "fibras" internas são mais curtas que as externas.

O sistema de coordenadas adotado tem o eixo  $x$  na direção axial, o eixo  $z$  segundo a normal externa à superfície da casca e o eixo  $y$  ao longo da tangente à superfície média de modo a formar um sistema dextrógiro. A coordenada angular  $\theta$  está orientada ao longo da direção positiva  $y$ . Seja  $u, v$  e  $w$  os deslocamentos da superfície média ao longo das direções  $x, y$  e  $z$ , respectivamente e "a" o raio da casca cilíndrica.

Os deslocamentos  $u, v$  e  $w$  de um ponto genérico  $P$  da casca pode ser escrito, conforme Figura 1, como

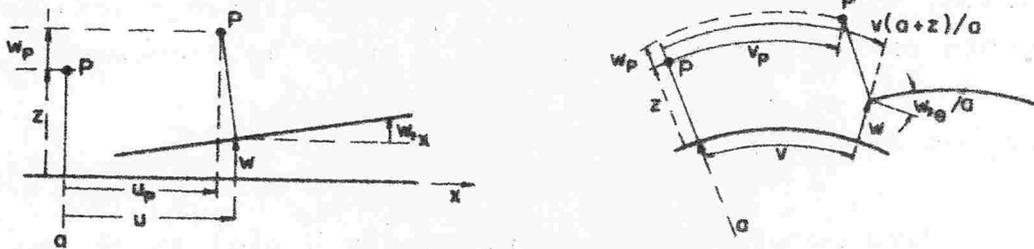


Figura 1 - Deslocamento de um ponto genérico  $P$ .

$$u_p = u - z w_{,x} \quad (1.a)$$

$$v_p = \frac{a+z}{a} v - \frac{z}{a} w_{,\theta} \quad (1.b)$$

$$w_p = w \quad (1.c)$$

As deformações da superfície média podem então ser expressas por

$$\epsilon_x = u_{,x} \quad (2.a)$$

$$\epsilon_{\theta} = (v_{,\theta} + w)/a \quad (2.b)$$

$$\gamma_{x\theta} = u_{,\theta}/a + v_{,x} \quad (2.c)$$

$$\chi_x = w_{,xx} \quad (2.d)$$

$$\chi_{\theta} = (w + w_{,\theta\theta})/a^2 \quad (2.e)$$

$$\chi_{x\theta} = w_{,x\theta}/a - v_{,x}/2a + u_{,\theta}/2a^2 \quad (2.f)$$

Das relações 1, pode-se determinar as deformações e, usando a lei de Hooke, as tensões em qualquer ponto da casca. Integrando-se as expressões dos momentos de ordens zero e um se obtém as relações entre tensões resultantes e os deslocamentos da superfície média. Sejam

$N_i$  - tensão normal resultante ao longo da direção  $i$ ;

$N_{ij}$  - tensão cisalhante resultante normal ao eixo  $i$  ao longo do eixo  $j$ ;

$M_i$  - momento fletor resultante normal ao eixo  $i$ ;

$M_{ij}$  - momento torçor resultante ao longo do eixo  $i$ ;

$h$  - espessura da casca;

$E$  - módulo de Young;

$\nu$  - coeficiente de Poisson;

$$D = E h / (1 - \nu^2);$$

$$K = D h^2 / 12.$$

Expressando as tensões resultantes em termos das compo-

mentos de deformação da superfície média, equações 2a - f, tem-se

$$(3.a) \quad N_x = D (\epsilon_x + \nu \epsilon_\theta) - K \chi_x/a \quad (3.a)$$

$$(3.b) \quad N_\theta = D (\nu \epsilon_x + \epsilon_\theta) + K \chi_\theta/a \quad (3.b)$$

$$(3.c) \quad N_{\theta x} = D(1-\nu) \gamma_{x\theta}/2 + K(1-\nu) (\chi_{x\theta} + \gamma_{x\theta}/2a)/2a \quad (3.c)$$

$$(3.d) \quad N_{x\theta} = D(1-\nu) \gamma_{x\theta}/2 - K(1-\nu) (\chi_{x\theta} - \gamma_{x\theta}/2a)/2a \quad (3.d)$$

$$(3.e) \quad M_x = K(\chi_x + \nu \chi_\theta - (\epsilon_x + \nu \epsilon_\theta)/a) \quad (3.e)$$

$$(3.f) \quad M_\theta = K(\nu \chi_x + \chi_\theta) \quad (3.f)$$

$$(3.g) \quad M_{\theta x} = K (1-\nu) \chi_{x\theta} \quad (3.g)$$

$$(3.h) \quad M_{x\theta} = K(1-\nu) (\chi_{x\theta} - \gamma_{x\theta}/2a) \quad (3.h)$$

Por outro lado, se "z/a" for bastante menor que a unidade, poder-se-á desconsiderar que os elementos de área de seção transversal possuem formato trapezoidal e que as "fibras" circunferenciais tem comprimentos diferentes para valores diferentes da coordenada "z". Neste caso, as relações (3.a - h) se resumem a

$$(4.a) \quad N_x = D (\epsilon_x + \nu \epsilon_\theta) \quad (4.a)$$

$$(4.b) \quad N_\theta = D (\nu \epsilon_x + \epsilon_\theta) \quad (4.b)$$

$$(4.c) \quad N_{x\theta} = N_{\theta x} = D(1-\nu) \gamma_{x\theta}/2 \quad (4.c)$$

$$(4.d) \quad M_x = K(\chi_x + \nu \chi_\theta^*) \quad (4.d)$$

$$(4.e) \quad M_\theta = K(\nu \chi_x + \chi_\theta^*) \quad (4.e)$$

$$M_{x\theta} = M_{\theta x} = K(1-\nu)X_{x\theta}^* \quad (4.f)$$

$$\text{onde } X_{\theta\theta}^* = w_{,\theta\theta}/a^2$$

$$X_{x\theta}^* = w_{,x\theta}/a^2$$

Note-se que  $D/\frac{K}{a^2} = 1/\frac{h^2}{12a^2}$  e que para as dimen-

sões do tambor do núcleo considerado ( $h = 2,3$  cm e  $a = 1,3185$  m)  $h^2/12a^2 < 2,61 \times 10^{-5}$ . Portanto, comparando as relações 3 e 4, conclue-se que as forças resultantes por unidade de comprimento são bem aproximadas pelas equações 4, exceto para os modos de elevada ordem onde  $w_{,\theta\theta}$ ,  $w_{,xx}$  e  $w_{,x\theta}$  podem superar o quociente  $D/K$ . Porém, para os momentos por unidades de comprimento, as simplificações podem se tornar questionáveis dependendo da configuração modal de interesse.

$$\text{Sejam } \underline{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_\theta, \gamma_{x\theta}, X_x, X_\theta^*, X_{x\theta}^*)^T$$

$$\underline{N} = (N_x, N_\theta, N_{x\theta}, M_x, M_\theta, M_{x\theta})^T$$

onde  $(.)^T$  significa transposto. Então, pode-se re-escrever as relações 4 por

$$\underline{N} = \underline{Z} \underline{\varepsilon}$$

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu D & D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D(1-\nu)/2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K & \nu K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu K & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (5)$$

A energia de deformação elástica é pois

$$U = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T \underline{Z} \underline{\varepsilon}$$

Finalmente, convém observar que a formulação completa, relações 3, não supõe que a superfície média seja inextensível quando expressa as mudanças de curvatura. Por outro lado, os valores de tensão na superfície média não são sempre os valores médios das tensões através de espessura. A versão simplificada, equações 4, contudo, despreza os efeitos dos deslocamentos tangenciais nas mudanças de curvaturas e momentos, bem como os efeitos da mudança de curvatura sobre as tensões resultantes  $N_x$ ,  $N_\theta$  e  $N_{x\theta}$ .

## 2.2 - Equações de Timoshenko

Outra maneira para obter as equações apropriadas para descrever o comportamento da casca em questão é apresentada por Timoshenko [13]. O sistema de referência usado nesta referência considera o sentido positivo do deslocamento radial para fora. Então as relações deformação - deslocamento da superfície média tomam a forma

$$\bar{\epsilon}_{,x} = u_{,x} \quad (6.a)$$

$$\bar{\epsilon}_{,\theta} = (v_{,\theta} - w)/a \quad (6.2)$$

$$\bar{\gamma}_{x\theta} = u_{,\theta}/a + v_{,x} \quad (6.c)$$

As mudanças de curvatura são obtidas por considerações geométricas como sendo

$$\bar{\chi}_x = w_{,xx} \quad (6.d)$$

$$\bar{\chi}_\theta = (w + w_{,\theta\theta})/a^2 \quad (6.e)$$

$$\bar{\chi}_{x\theta} = (v_{,x} + w_{,x\theta})/a \quad (6.f)$$

Observe-se que o aumento do raio de curvatura,  $w$ , é considerado na mudança de curvatura  $\bar{\chi}_\theta$ , assim como também o é o efeito de  $v_{,x}$  na de  $\bar{\chi}_{x\theta}$ . Esses termos são desprezados nas equa-

ções simplificadas de Flügge. A seguir, Timoshenko supõe, no cálculo das mudanças de curvatura, que a superfície média sofre uma deformação inextensível.

Isto é,  $\bar{\epsilon}_x = \bar{\epsilon}_\theta = \bar{\gamma}_{x\theta} = 0$  para  $z = 0$ . Então

$$\bar{\chi}_\theta = (v_{,\theta} + w_{,\theta\theta})/a^2$$

Portanto, o efeito das deformações de superfície média na mudança de curvatura são desprezadas e os efeitos das deformações e mudanças de curvatura são simplesmente superpostos.

Supondo-se que o sentido positivo de  $w$  está orientado para fora, as relações deformação-deslocamento se tornam

$$\epsilon_x = u_{,x} \quad (7.a)$$

$$\epsilon_\theta = (w + v_{,\theta})/a \quad (7.b)$$

$$\gamma_{x\theta} = u_{,\theta}/a + v_{,x} \quad (7.c)$$

$$\chi_x = -w'_{,xx} \quad (7.d)$$

$$\chi_\theta = (-w_{,\theta\theta} + v_{,\theta})/a^2 \quad (7.e)$$

$$\chi_{x\theta} = -w_{,x\theta}/a + v_{,x}/a \quad (7.f)$$

Tais relações poderiam ter sido obtidas das equações completas de Flügge, equações 3, se as deformações da superfície média fossem consideradas inextensíveis na determinação das mudanças de curvatura e alterado a convenção de sinais dos momentos.

As relações deformações-tensões resultantes são as mesmas que na versão simplificada de Flügge, isto é,

$$\underline{N} = \underline{Z} \underline{\epsilon} \quad (8)$$

onde  $Z$  é dada pela relação (5).

Essas equações foram usadas por Percy, Pian e outros para formular elementos finitos para análise elástica de cascas de revolução. Porém, esses autores definiram

$$\gamma_{x\theta} = (u_{,\theta}/a + v_{,x})/2$$

$$N_{x\theta} = E h \gamma_{x\theta} / (1 + \nu)$$

Observe-se, porém, que o fator 0,5 foi colocado erroneamente na primeira equação, ao invés da segunda. Isto acarreta que a parcela da energia de deformação devida a  $\gamma_{x\theta}$  seja a metade do valor correto.

### 3 - Matriz Massa do Anel Rígido

A extremidade inferior do tambor do núcleo está conectada a um anel de baixíssima flexibilidade, de massa,  $m$ , e momentos de inércia axial,  $I_a$ , e tangencial,  $I_t$ . Com tais valores, a matriz de massa do anel pode ser determinada para qualquer modo circunferencial em termos das variáveis da última linha nodal. Ou seja, o anel é substituído por um elemento circunferencial com as mesmas propriedades de rigidez e de massa e situado sobre a última linha nodal ou rigidamente acoplado a esta a uma distância  $\rho_c$ .

Inicialmente, considera-se os ângulos de Euler  $\theta$  e  $\phi$  segundo a Figura 2. O terceiro ângulo não é necessário porque somente serão considerados os modos simétricos. A origem do sistema de coordenadas  $(X, Y, Z)$  está localizada no baricentro do anel. Para esse sistema de coordenadas, a energia cinética pode ser expressa por

$$T = 0,5 m \dot{q} \cdot \dot{q} + 0,5 \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}$$

(9)

onde:  $\underline{\underline{I}}$  - tensor de inércia do anel,

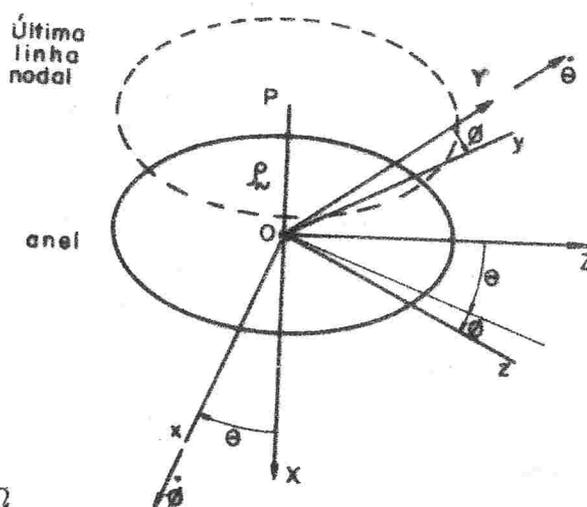


Figura 2 - Anel rígido

$\dot{\underline{q}}$  - velocidade linear no centro da massa e

$\underline{\Omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$  - velocidade angular do anel

Seja  $\rho_c$  a distância axial da última linha nodal de casca ao plano OYZ e  $\underline{\rho} = \rho_c \hat{i}$  o vetor correspondente. Logo, sendo  $\dot{\underline{p}}$  a velocidade linear do ponto P, tem-se

$$\dot{\underline{q}} = \dot{\underline{p}} + \underline{\Omega} \times \underline{\rho}$$

A expressão da energia cinética torna-se então

$$T = 0,5 m [\dot{\underline{p}} \cdot \dot{\underline{p}} + 2 \dot{\underline{p}} \cdot (\underline{\Omega} \times \underline{\rho}) + (\underline{\Omega} \times \underline{\rho}) \times (\underline{\Omega} \times \underline{\rho})] + 0,5 [I_a \omega_x^2 + I_t(\omega_y^2 + \omega_z^2)] \quad (10)$$

Os vetores  $\dot{\underline{p}}$  e  $\underline{\Omega}$  tem componentes que podem ser expressas em termos dos graus de liberdade da linha nodal de conexão da casca com o anel. Isto é,

$$\dot{\underline{p}} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1^0 \\ 0 \\ \dot{q}_3^1 \end{Bmatrix} \quad (11.a)$$

$$w_x = -\dot{q}_2^0/a \quad (11.b)$$

$$w_y = \dot{q}_1^1/a \quad (11.c)$$

$$w_z = 0 \quad (11.d)$$

onde  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$  são os deslocamentos da linha nodal associados aos deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  da casca, respectivamente. O índice superior indica a ordem do modo circunferencial correspondente. Então, a energia cinética do anel pode ser escrita como sendo

$$T = 0,5 \{ m [ \dot{q}_1^0{}^2 + \dot{q}_3^1{}^2 - 2 \rho_C \dot{q}_1^1 \dot{q}_3^1 ] + [ I_a \dot{q}_2^0{}^2 / a^2 + ( I_t + m \rho_C^2 ) \dot{q}_1^1{}^2 / a^2 ] \} \quad (12)$$

Portanto, a matriz massa do anel,  $\underline{M}_R$ , não é a matriz zero somente para os modos circunferenciais de ordem zero e um. Isto é, modo zero

$$\underline{M}_R^0 = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_a/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

modo um

$$\underline{M}_R^1 = \begin{bmatrix} (I_t + m \rho_C^2)/a^2 & 0 & -m \rho_C/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m \rho_C/a & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

As matrizes  $\underline{M}_R^0$  e  $\underline{M}_R^1$  devem ser devidamente superpostas às matrizes de massa globais para os modos 0 e 1, respectivamente. Para os modos circunferenciais de maior ordem, as propriedades inerciais do anel não entram em questão devido a sua elevada rigidez.

#### 4 - Programa CYLDYFE

A seguir são apresentados alguns detalhes de relevância do programa CYLDYFE. Os conceitos básicos para a determinação do sistema de equações pelo método de elementos finitos são os mesmos que os apresentados na referência [11] e na literatura especializada em geral.

Para descrever os campos de deslocamentos, tirou-se vantagem de que as configurações modais são ortogonais. Com isto, os campos de deslocamentos ficam desacoplados em termos dos modos circunferenciais. Assim, todas as variáveis dependentes foram expandidas em séries de Fourier e as equações resultantes para cada

ordem circunferencial foram analisadas ao longo da coordenada axial. Os campos de deslocamentos "u" e "v" são interpolados no interior de cada elemento em termos de coordenadas naturais lineares e o "w" por polinômios de Hermite.

As matrizes massa de cada elemento,  $M^e$ , de casca são obtidas consistentemente pela integração da densidade de energia cinética através das funções de integração selecionadas e método de Gauss-Legendre. As matrizes de rigidez,  $K^e$ , são calculadas pela integração da densidade de energia de deformação elástica sobre o elemento de casca. Somente aqui é considerada a influência da formulação de cascas adotada. O programa CYLDYFE coloca à disposição do usuário três formulações: a de Timoshenko, e que foi adotada por Percy, Pian e outros; a simplificada de Flügge, bem como a de Timoshenko modificada de modo a permitir  $w \neq -v, \theta$ . Uma descrição detalhada do programa é apresentada em [10].

#### 5 - Exemplo Numérico

Foi considerado um tambor de núcleo com as seguintes características

tambor: raio	1,3185 m
espessura	0,023 m
densidade	7.800,0 Kg/m <sup>3</sup>
módulo de elasticidade	0,17 x10 <sup>12</sup> N/m <sup>2</sup>
anel: massa	12 054,0 Kg.
momento de inércia axial	12190,0 Kg m <sup>2</sup>
momento de inércia transversal	6096,0 Kg m <sup>2</sup> .

Com tais valores foram calculadas algumas frequências naturais e formas modais. Os resultados estão relacionados na Tabela 1. Na coluna 7 estão os valores obtidos para a formulação simplificada de Flügge e nas colunas 8 e 9 estão as formulações de Timoshenko considerando e desconsiderando, respectivamente,  $w = -v, \theta$ .

Nas colunas 9 e 10 estão os valores obtidos através da formulação de Timoshenko em malhas de 35 e 70 elementos para verificação do refino de malha.

code n m	CYLDY2 [6]	CYLDY3 [6]	CYLDY3 [8]	STRUDL [1,6]	SAP [6]	ASKA [6]	CYLDYFE [10](1)	CYLDYFE [10](2)	CYLDYFE [10](3)	CYLDYFE [10](4)
0 1	-	82,4	61,4(T)	84,7	85,4	-	61,4	61,4	61,4	61,4
2	-	328,6	87,8	-	-	-	82,3	82,3	82,3	82,3
3	-	-	217,0(T)	-	-	-	217,1	217,1	217,1	217,0
4	-	-	332,0	-	-	-	328,8	328,8	328,8	328,6
5	-	-	397,1(T)	-	-	-	398,0	398,0	398,0	397,3
1 1	18,9	16,2	16,2	16,4	17,1	17,3	16,2	16,2	16,2	16,2
2	160,8	104,2	103,7	101,2	101,9	-	103,2	103,1	103,1	103,0
3	394,8	220,7	223,4	208,5	191,9	-	211,7	211,7	211,7	211,4
4	-	-	275,9	-	-	-	253,5	253,5	253,5	253,1
5	-	-	363,3	-	-	-	358,5	358,4	358,4	357,2
2 1	65,8	62,0	62,0	62,9	67,5	57,0	62,4	62,0	62,0	61,8
2	147,2	135,8	135,8	-	145,5	-	135,1	134,8	134,9	134,3
3	229,3	218,7	218,7	-	-	-	216,0	215,8	215,8	214,6
4	-	-	294,6	-	-	-	291,8	291,6	291,6	289,4
5	-	-	355,9	-	-	-	355,3	355,1	355,1	352,0
3 1	42,8	41,4	41,4	44,7	72,8	44,8	43,0	41,3	41,3	41,2
2	90,7	85,2	85,2	93,5	115,0	-	86,2	85,3	85,3	84,8
3	149,2	141,3	141,3	-	184,5	-	142,0	141,4	141,4	140,1
4	-	-	200,9	-	-	-	201,4	200,9	200,9	198,6
5	-	-	258,1	-	-	-	259,0	258,5	258,6	254,9
4 1	49,4	49,0	49,0	50,7	127,7	55,1	51,4	48,8	48,7	48,7
2	72,8	70,5	70,5	78,8	149,8	57,8	72,2	70,2	70,2	69,8
3	110,7	106,3	106,3	120,9	206,3	-	107,8	106,4	106,4	105,2
4	-	-	149,6	-	-	-	151,5	150,4	150,4	148,1
5	-	-	195,9	-	-	-	198,4	197,5	197,5	193,8

code n m	CYLDY2 [6]	CYLDY3 [6]	CYLDY3 [8]	STRUDL [1,6]	SAP [6]	ASKA [6]	CYLDYFE1 [10](1)	CYLDYFE2 [10](2)	CYLDYFE3 [10](3)	CYLDYFE3* [10](4)
5 1	72,6	72,4	72,4	72,5	-	-	74,9	72,0	72,0	72,0
2	83,1	82,2	82,2	87,6	-	57,8	84,1	81,4	81,4	81,1
3	104,5	102,4	102,4	116,0	-	-	103,7	101,5	101,5	100,6
4	-	-	131,4	-	-	-	132,9	131,0	131,0	129,1
5	-	-	166,1	-	-	-	168,2	166,6	166,6	163,3
6 1	104,3	104,1	104,1	102,8	-	-	106,7	103,8	103,8	103,8
2	110,2	109,7	109,7	112,2	-	57,2	111,5	108,6	108,6	108,5
3	-	-	121,3	-	-	-	122,2	119,5	119,5	118,9
4	-	-	139,7	-	-	-	140,2	137,7	137,6	136,3
5	-	-	164,2	-	-	-	164,7	162,5	162,5	159,8
7 1	-	-	142,4	-	-	-	145,1	142,2	142,2	142,1
2	-	-	146,4	-	-	-	148,2	145,3	145,3	145,2
3	-	-	154,3	-	-	-	154,9	152,0	152,0	151,7
4	-	-	166,8	-	-	-	166,3	163,5	163,5	162,6
5	-	-	184,2	-	-	-	183,0	180,4	180,3	178,4

Tabela 1 - Auto-valores de um Tambor de Núcleo de Acordo com Vários Programas.  
 Formulações do programa CYLDYFE para modelo de 35 elementos: (1) Flugge  
 simplificado (2) Timoshenko (w ≠ v,e) (3) Timoshenko e (4) Timoshenko  
 (modelo de 70 elementos).

## 6 - Conclusão

A seguir são apresentados alguns comentários a respeito dos resultados obtidos com esse elemento de casca muito simples, que inclusive não satisfaz a condição de apresentar energia de deformação nula sob deslocamentos de corpo rígido.

Para comparar os resultados, deve-se ter em mente que as três formulações analisadas descrevem as deformações da superfície média do mesmo modo. As diferenças entre tais formulações consistem nas diferentes maneiras de aproximar as mudanças de curvatura. As relações simplificadas de Flügge apresentam mais restrições que a de Timoshenko, pois desprezam o efeito de  $w$  e  $v_x$  nas relações para  $\chi_\theta$  e  $\chi_{x\theta}$ , respectivamente. Por outro lado, a formulação de Timoshenko supõe a casca inextensível quando calcula as mudanças de curvatura.

Comparando os resultados das colunas 7 e 8, pode-se visualizar o efeito enrijecedor de desprezar os termos em  $\chi_\theta$ ,  $\chi_{x\theta}$  na formulação de Flügge simplificada.

Comparando as colunas 8 e 9, verifica-se que para esta casca fina e modos considerados a deformação,  $\epsilon_\theta$ , da superfície média não é importante no cálculo da mudança de curvatura  $\chi_\theta$ . Tomando por referência os valores obtidos para o modelo de 70 elementos baseado na formulação de Timoshenko, verifica-se que o erro máximo dos resultados para o modelo de 35 elementos com a mesma formulação é de 2,1%, enquanto o erro máximo para a formulação de Flügge é de 5,42%.

Comparando os resultados obtidos com as formulações usadas pelo CYLDYFE com os fornecidos pelos sistemas STRUDL (coluna 4), SAP (coluna 5) e ASKA (coluna 6), verifica-se que os resultados obtidos pelo programa CYLDYFE são bastante mais precisos além de não perder modo algum como aconteceu com aqueles sistemas.

Por outro lado, os valores obtidos pelo programa CYLDY3 (coluna 3 e 4) são superiores aos fornecidos pelo CYLDY2 (coluna 1), embora este tenha usado o método de Rayleigh-Ritz e aquela solução analítica das equações de Flügge não simplificadas.

Uma desvantagem desses dois programas é a de que supõe a espessura constante ao longo do comprimento, o que não é a realidade. Outra desvantagem do programa CYLDY3 é a de que os re

sultados dependem da solução de equações algébricas cujas raízes, por vezes, são de difícil determinação. Contudo, verifica-se que os resultados fornecidos pelo CYLDYFE se comparam bem com os fornecidos pelo CYLDY3. Logo, verifica-se que apesar de o elemento ter uma estrutura bastante simplificada, pode-se obter bons resultados se for usado um refino adequado, além de poder incluir a variação de espessura ao contrário dos programas CYLDY3.

#### 7 - Agradecimento

O autor agradece à Comissão Nacional de Energia Nuclear-CNEN pelo suporte financeiro para a realização deste trabalho.