



COBEM 81

VI CONGRESSO BRASILEIRO DE
ENGENHARIA MECANICA

RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981

TRABALHO
PAPER

N.º D-21

P. P. 205 - 214

PUC/RJ

DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO DE ELEMENTOS DE HASTE CURVA PA
RA O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Antônio Bento Filho

Professor Assistente - Deptº Eng. Mecânica
CT/UFSC - Florianópolis - SC - Brasil

Clovis Sperb de Barcellos

Professor Titular - Deptº Eng. Mecânica
CT/UFSC - Florianópolis - SC - Brasil

Sumário

No presente trabalho é desenvolvido um procedimento para determinar a matriz de rigidez de um elemento finito de viga curva espessa, através do princípio da energia potencial mínima. O campo de deslocamento é interpolado por polinômios de Hermite de 3º grau. São apresentados resultados da análise de vigas curvas com uma relação entre o raio de curvatura e a largura da base igual a 10.

Summary

A procedure to evaluate the stiffness matrix for a thick curved beam element is developed by means of the minimum potential energy principle, applied to finite elements. The displacement field is prescribed through 3rd degree Hermite polynomial expansions. A curved beam with radii to thickness relation equal to is analysed.

1 - Introdução

Elementos finitos sólidos, do tipo isoparamétrico, fornecem soluções bastante precisas para problemas envolvendo vigas curvas. Entretanto, devido às suas características de interpolação, tais elementos requerem malhas bastante refinadas nesses casos. Esse fato os torna antieconômicos para aplicações práticas e tem motivado o desenvolvimento de elementos com características de viga que apresentem razoável precisão na análise desses problemas, sem necessitar de malhas muito refinadas.

Com o presente trabalho, pretende-se desenvolver um elemento finito de viga curva com boa sensibilidade às solicitações de flexão, torção e cisalhamento, através do método dos deslocamentos.

2 - Relações Deformações Deslocamentos

O elemento tem sua fórmula baseada na geometria de um segmento de haste circular plana, cujos sistemas de coordenadas e parâmetros dimensionais são apresentados na figura 1.

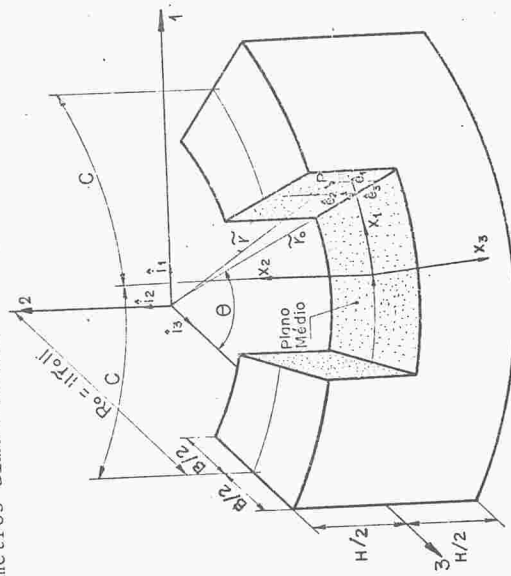


Figura 1 - Segmento de haste circular plana; sistemas de referência e dimensões.

Para essa geometria, as relações deformações-deslocamentos assumem a forma [2].

$$\epsilon_{11} = \frac{R_0}{R_0 + x_3} u_{,1} + \frac{1}{R_0 + x_3} w + \frac{1}{R_0^2} (w^2 + u^2) + \frac{2R_0}{R_0 + x_3} u_{,1} \quad (1a)$$

$$\left[\frac{1}{R_0} (w - u) + v_{,1} + w_{,1} \right] - \frac{2}{R_0} u w_{,1} + \frac{1}{2} [(u_{,1})^2 + (v_{,1})^2 + (w_{,1})^2] \quad (1b)$$

$$\epsilon_{22} = v_{,2} + \frac{1}{2} [(u_{,2})^2 + (v_{,2})^2 + (w_{,2})^2] \quad (1c)$$

$$\epsilon_{33} = w_{,3} + \frac{1}{(R_0 + x_3)} u u_{,3} + \frac{1}{2} [(u_{,3})^2 + (v_{,3})^2 + (w_{,3})^2] \quad (1d)$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2A} [u_{,2} A + v_{,1} + \frac{u}{R_0} (w - w_{,2}) - \frac{u}{R_0 + x_3} (u + w) + A(u_{,1} u_{,2} + v_{,1} v_{,2} + w_{,1} w_{,2})] \quad (1e)$$

$$\epsilon_{13} = \frac{1}{2A} [u_{,3} A + w_{,1} - \frac{1}{R_0 + x_3} u - \frac{u_{,3} w}{R_0 + x_3} - \frac{u}{R_0 + x_3} (u_{,1} + \frac{w}{R_0}) + A(u_{,1} u_{,3} + v_{,1} v_{,3} + w_{,1} w_{,3})] \quad (1f)$$

$$\epsilon_{23} = \frac{1}{2} [v_{,3} + w_{,2} - \frac{u u_{,2}}{(R_0 + x_3)} + u_{,2} u_{,3} + v_{,2} v_{,3} + w_{,2} w_{,3}]$$

sendo: $A = (1+x_3/R_0)$
 u, v, w - deslocamentos nas direções 1, 2 e 3, respectivamente, e

$$(\)_{,i} = \frac{\partial (\)}{\partial x_i}$$

Admitindo-se que as deformações são pequenas, pode-se desprezar as tensões cisalhantes resultantes das distorções no plano da seção, em presença das tensões cisalhantes devidas ao empenamento [4,6]. Se os deslocamentos são também pequenos, existe uma relação linear entre deformação e deslocamento. Então, as equações (1) assumem a forma:

$$\epsilon_{11} = \frac{R_0}{R_0 + x_3} u_{,1} + \frac{1}{R_0 + x_3} w \quad (2a)$$

$$\epsilon_{22} = v_{,2} \quad (2b)$$

$$\epsilon_{33} = w_{,3} \quad (2c)$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(u_{,2} + \frac{R_0}{R_0 + x_3} v_{,1} \right) \quad (2d)$$

$$\epsilon_{13} = \frac{1}{3} \left(u_{,3} + \frac{R_0}{R_0 + x_3} w_{,1} \right) - \frac{u}{R_0 + x_3} \quad (2e)$$

$$\epsilon_{23} = \frac{1}{2} (v_{,3} + w_{,2}) = 0 \quad (2f)$$

As equações (2) podem ser organizadas na forma de um operador diferencial e apresentadas matricialmente como:

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ \epsilon_{33} \ \epsilon_{12} \ \epsilon_{13}\}^t = [B^*] \{\delta\} \quad (3a,b)$$

onde

$\{\epsilon\}$ - Campo de deformações

$[B^*]$ - Operador diferencial obtido a partir de (1a,...,f).

$\{\delta\}$ - Campo de deslocamentos no elemento.

3 - Formulação do elemento finito

Os deslocamentos no elemento são interpolados a partir dos deslocamentos nodais, na forma:

$$\{\delta\} = [N] \{\delta\} \quad (4)$$

onde $[N]$ - Matriz das funções de interpolação

$\{\delta\}$ - Vetor deslocamentos nodais.

e os elementos da matriz $[N]$ são funções polinômiais do tipo:

$$N_{ij}^k = a_{ij}^k \psi_i^k(x_2, x_3) \phi_j(x_1), \quad i=1, m; \quad j=1, n \quad (5a,b)$$

$$H_{ij}^k = b_{ij}^k \psi_i^k(x_2, x_3) \xi(x_1), \quad i=1, m; \quad j=1, n$$

sendo:

a_{ij}^k, b_{ij}^k - Componentes constantes das funções de interpolação.

$\psi_i^k(x_2, x_3)$ - i -ésima componente polinomial no plano da secção.

$\phi_j(x_1)$ - j -ésima componente de interpolação na direção axial.

$\xi(x_1)$ - função de interpolação que satisfaz condições de contorno homogêneas nos nós.

$k=1,2,3$ - indica função de interpolação de u, v, w respectivamente.

m, n - nº de funções ψ e ϕ respectivamente.

Da maneira como foram interpolados os deslocamentos observa-se que o vetor deslocamentos nodais terá $(m \cdot n)$ componentes. Considerando-se o elemento com 6 graus de liberdade por nó, torna-se necessária a condensação de $(m \cdot n - 1 \cdot 2)$ parâmetros não nodais do vetor deslocamento. Para facilitar essa operação, reorganiza-se o vetor deslocamentos $\{\delta\}$ na forma

$$\{\delta\} = \left\{ \begin{array}{c} \delta \\ \delta \end{array} \right\} \quad (b)$$

onde:

$\{\delta\}$ - vetor dos deslocamentos e rotações nodais do elemento

$\{\delta\}$ - vetor dos parâmetros não nodais do elemento.

Para um material homogêneo, isotrópico e com comportamento elástico linear, tem-se:

$$\{\sigma\} = [C] \{\epsilon\} \quad (7)$$

onde:

$\{\sigma\}$ - vetor tensões no elemento

$[C]$ - matriz das propriedades elásticas [1, 3, 5]
Substituindo-se (3b) e (4) em (7) resulta:

$$\{\sigma\} = [C] [B^*] [N] \{\delta\} = [C] [B] \{\delta\} \quad (8a, b)$$

onde:

$[B]$ - matriz das relações deformações - deslocamentos nodais, resultantes da aplicação das relações deformações deslocamentos ao campo de deslocamentos, expresso na equação (4).

Na ausência de forças de corpo e estados de deformação inicial, a energia potencial total de um corpo elástico linear é dada por: [1, 3; 5].

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^t \{\sigma\} dv - \int_S \{T\}^T \{\delta\} ds \quad (9)$$

onde:

$\{\epsilon\}$ - campo de deformações

$\{\sigma\}$ - campo de tensões

$\{T\}$ - forças de superfície na região do contorno

$\{\delta\}$ - campo de deslocamentos.

Substituindo-se (3b), (4) e (8b) em (9) e realizando o processo variacional para obtenção da primeira variação, tem-se:

$$[K] \{\delta\} = \{\bar{F}\} \quad (10a)$$

$$[\bar{K}] = \int_V [B]^T [C] [B] dv \quad (10b)$$

a matriz de rigidez intrínseca do elemento

$\{\bar{F}\}$ - Vetor força resultante

$\{\delta\}$ - Vetor deslocamentos nodais.

Realizando-se o processo de condensação estática, de acordo com (6), resulta:

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ \dots & \dots \\ [K_{12}]^t & [K_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \dots \\ \delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F} \\ \dots \\ \bar{F} \end{Bmatrix} \quad (11a)$$

que pode ser reescrita como

$$[[K_{11}] - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{12}]^t] \{\delta\} = \{\bar{F}\} - [K_{12}][K_{22}]^{-1} \{\bar{F}\} \quad (11b)$$

$$\text{onde: } [K] = [[K_{11}] - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{12}]^t] \quad (11c)$$

é a matriz de rigidez intrínseca do elemento em termos dos deslocamentos nodais e,

$$\{\bar{F}\} = \{\bar{F}\} - [K_{12}][K_{22}]^{-1} \{\bar{F}\} \quad (11d)$$

é o vetor força resultante reduzido do elemento.

4 - Análise de resultados

O campo de deslocamentos utilizado, foi obtido a partir da análise de vários campos de deslocamentos, para os

quais se verificou a convergência e precisão na interpolação dos deslocamentos no elemento |2|.

$$\phi_1(x_1) = 0,25(x_1^3 - 3x_1 + 2)$$

$$\phi_2(x_1) = 0,25(-x_1^3 + 3x_1 + 2)$$

$$\phi_3(x_1) = 0,25(x_1^3 - x_1^2 - x_1 + 1) \quad (12a, a, c, d, e, f, g, h)$$

$$\phi_4(x_1) = 0,25(x_1^3 + x_1^2 - x_1 - 1)$$

$$\xi(x_1) = (1-x_1^2)^2$$

$$\{\psi^1\} = \{1, x_2, x_3, x_2^2, x_2x_3, x_3^2, x_2^2x_3, x_2x_3^2, x_2^2x_3^2, x_2^3, x_3^3, x_2^4, x_2^2x_3^2, x_2^2x_3^3, x_2^3x_3^2, x_2^4x_3^2, x_2^4x_3^3\}$$

$$\{\psi^2\} = \{1, x_2, x_3, x_2^2, x_2^3\}$$

$$\{\psi^3\} = \{1, x_2, x_3, x_3^2, x_3^3\}$$

Os resultados obtidos são comparados com os da referência |10|, tomados como exatos.

Todas solicitações que ocorrem numa carga genérica perpendicular ao plano de curvatura da viga, podem ser testadas por uma carga concentrada na extremidade, já que ocorrerão torção, flexão e cisalhamento ao longo da viga como num caso de carga mais complexa.

A tabela 3 apresenta os resultados da flexão, ângulo de torção e ângulo de giro da seção na extremidade livre de uma viga curva mostrada na Figura 5.

Observa-se, nos dados abaixo um enrijecimento da estrutura quando a relação L/H < 2,62 para o elemento.

Por outro lado, os valores de solicitações internas mostram-se bastante bons, o que permite afirmar que os modos de deformação constante não são plenamente satisfatórios com a formulação proposta.

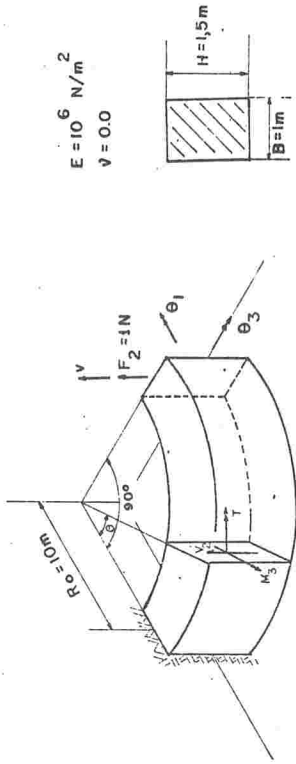


Figura 3 - Viga curva engastada.

Tabela 1 - Ângulo de tração θ₁, ângulo de tração θ₃ e deflexão v na extremidade livre.

Nº El.	Ângulo de torção		Ângulo de giro		Deslocamento v	
	Modelo	Erro%	Modelo	Erro%	Modelo	Erro%
1	1,1599x10 ⁻⁴	12,69	4,4382x10 ⁻⁴	14,41	4,5676x10 ⁻³	12,50
2	1,4279x10 ⁻⁴	2,41	4,8903x10 ⁻⁴	5,69	5,0093x10 ⁻³	4,04
4	1,4780x10 ⁻⁴	1,06	4,9822x10 ⁻⁴	3,92	5,0835x10 ⁻³	2,62
8	1,4109x10 ⁻⁴	5,53	4,7577x10 ⁻⁴	8,25	4,9348x10 ⁻³	5,47
Exato: 1,4625x10 ⁻⁴			Exato: 5,1854x10 ⁻⁴		Exato: 5,2202x10 ⁻³	

Tabela 2 - Distribuição do esforço cortante V, torque I e momento fletor M₃ na viga.

θ (°)	V ₂ (N)	ERRO (%)	T (Nm)	ERRO (%)	Mf ₃ (Nm)	ERRO (%)
0	1,0000	0,0	9,9999	0,001	9,9992	0,018
11,25	1,0000	0,0	8,0490	0,001	9,8072	0,007
22,5	1,0000	0,0	6,1730	0,003	9,2384	0,004
33,75	1,0000	0,0	4,4442	0,002	8,3145	0,002
45,0	1,0003	0,030	2,9290	0,003	7,0715	0,006
56,25	1,0005	0,050	1,6854	0,006	5,5557	0,0
67,5	1,0005	0,050	0,7613	0,011	3,8269	0,003
78,75	1,0000	0,0	0,1922	0,026	1,9509	0,0
90,0	1,0000	0,0	0,0	-	0,0	-



5 - Conclusões

Os resultados apresentados mostram que a formulação apresentada oferece resultado bastante bom na determinação de deslocamentos e solicitações internas em vigas curvas de grande curvatura.

Para complementar a formulação proposta, pode-se desenvolver um processo para determinação de tensões, já que o princípio variacional usado, bem como o campo de deslocamentos, não permitiram boa convergência no cálculo direto das tensões.

6 - Referências

- 1 - Bethe, K.J e Wilson, E.L., "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice Hall, 1976.
- 2 - Bento, F., e Barcellos, C.S., "Desenvolvimento de um modelo de elemento de haste curva para o método de elementos finitos", Tese de Mestrado, UFSC.
- 3 - Cook, R.D., "Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Wiley, 1974.
- 4 - Ferguson, G.H., e Clark, R.D., "A variable thickness, curved beam and shell stiffening element with shear deformations", International Journal of Numerical Methods in Engineering, 4, pp. 581-592, 1979.
- 5 - Huebner, K. H., "The Finite Element Method for Engineers", Wiley, 1975.
- 6 - Langhaar, H. L., "Torsion of curved beams of rectangular cross section", Journal of the Applied Mechanics - Transactions of the ASME, March, pp. 49-53, 1952.

ANAI S		COBEM 81	PROCEEDINGS
VI CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECANICA			
RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981		PUC/RJ	
TRABALHO PAPER	Nº D-22	P. P. 215 - 224	

ANÁLISE DE DEFORMAÇÕES DE UNIÕES PARAFUSADAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Adyles Arato Junior, M. Sc.

FEIS/UNESP, Ilha Solteira, SP.

Nelson Back, Ph. D.

Departamento de Engenharia Mecânica da UFSC

SUMÁRIO

O presente trabalho apresenta um método de cálculo das deformações em uniões parafusadas, adotando o método de elementos finitos como ferramenta de cálculo. O procedimento desenvolvido também permite o cálculo da pressão nas superfícies de contato das peças unidas por parafusos. Para mostrar a validade do método, foram analisados dois tipos de uniões parafusadas e os resultados teóricos são comparados com dados medidos em modelos experimentais.

SUMMARY

This work presents a method, developed to calculate the deformations in bolted joints, using the finite element method as a tool. The procedure, also permits the calculation of the pressure distribution at the contacting surfaces of the clamped components. To show the precision of the theoretical results, these are compared with the measured results from test rigs.