

functional representation.

7. Conclusions

A proposal for a finite element analysis applicable to thin shells has been made. Using large ring elements power series solutions are to be assumed for displacement with distance along the shell. A comparatively large number of terms is to be used in the series. The exact total number of terms used must match the requirements corresponding to the number of internal nodes, or internal collocation points, assumed for each element. A formula has been derived for these numbers.



As shell equations are satisfied within the high accuracy arising from an appropriately larger number of collocation points a high efficiency, of maximum accuracy of results versus minimum total calculation effort, is hoped for.

It seems difficult to establish general balance between numbers of elements and numbers of internal nodes but numerical experimentation could establish guide lines.

Although this procedure has been outlined for axi-symmetric loading conditions it can be readily extended to unsymmetrical loading. It is possible that these procedures of collocation application might be used in other areas than shell stress analysis, if based on similar differential equations and boundary conditions.

8. References

- [1] Sutcliffe, W. J. "A Collocation Method for Stress Analysis of Shells Using Finite Elements", from 'Developments in Stress Analysis for Pressurised Components', by R. W. Nichols (ed.), Chapter 4, pp. 99-117, Applied Science Publishers, London (1977).
- [2] Sutcliffe, W. J. "A Collocation Finite Element Method with Prior Matrix Condensation", Proc. of the 4th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, San Francisco, (1977).
- [3] Függe, W. "Stresses in Shells", Springer-Verlag, Berlin (1967).

ANAI S		COBEM 81 VI CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECANICA RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981		PROCEEDINGS
TRABALHO PAPER	N° D-24	p. p. 231 - 241	PUC/RJ	

UM MODELO DE SÓLIDO ESFÉRICO PARA O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

João Pedro Quirino

Depto. de Engenharia Mecânica
UNESP/FEIS, Ilha Solteira-SP

Ciôvis Sperb de Barcellos, Ph.D.

Depto. de Engenharia Mecânica
UFSC, Florianópolis-SC

SUMÁRIO

O presente trabalho apresenta um modelo de sólido esférico com formulação isoparamétrica de elementos finitos o qual foi desenvolvido com base no princípio da energia potencial mínima utilizando o procedimento conhecido como método dos deslocamentos.

SUMMARY

This work presents a solid spheric model within isoparametric formulation of finite elements which was developed within based in the minimum potential energy principles using the proceeding known as displacement methods.

1. Introdução

Devido ao fato de os elementos de geometria esférica serem bastante comuns em estruturas, formulou-se o presente modelo de cálculo visando explorar esta propriedade geométrica a fim de tornar a análise estrutural destes elementos mais prática e econômica pelo Método de Elementos Finitos.

2. Definição do Modelo

O modelo é definido por 20 pontos nodais sendo 8 nos vértices e os demais nos pontos intermediários das arestas (fig. 1). É um elemento quadrático que utiliza funções de interpolação do tipo "serendipity" de 2º grau. Elas interpolam tanto geometria como deslocamentos sobre o elemento [3].

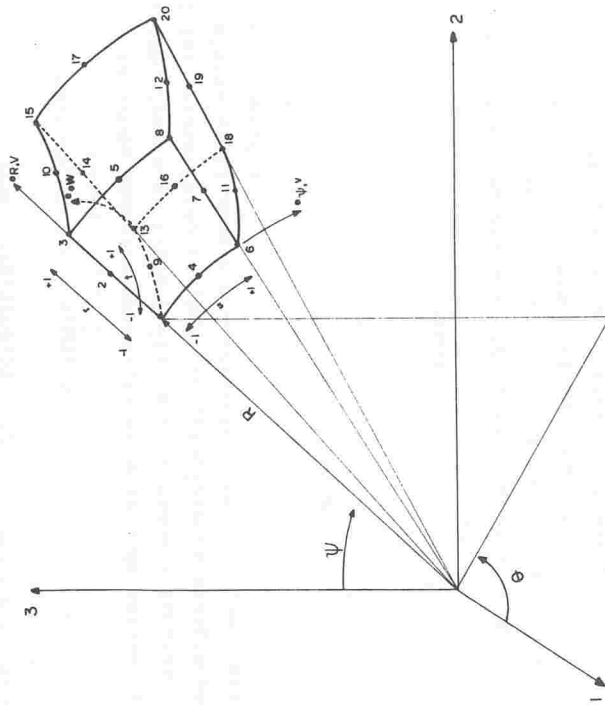


FIG. 1: O MODELO DE SÓLIDO ESFÉRICO COM A NUMERAÇÃO INTRÍNSECA DOS NÓS, COORDENADAS NATURAIS (r, s, t), COORDENADAS ESFÉRICAS (R, ψ, θ), COORDENADAS CARTESIANAS (1, 2, 3)

Satisfazem a continuidade entre elementos, são conformes e satisfazem também o critério de completividade. Estes requisitos são necessários para a convergência do modelo.

A especificação das funções de interpolação é feita como uma combinação das coordenadas intrínsecas (r, s, t) do elemento e das coordenadas dos pontos de integração considerados [1]. Nos pontos nodais sobre os vértices, as funções de interpolação são definidas como [3]:

$$FI(k) = (1/8) (1 + rr_k) (1 + ss_k) (1 + tt_k) (rr_k + ss_k + tt_k - 2) \quad (1)$$

onde $r_k, s_k, t_k = \pm 1$ e r, s, t variam entre -1 e +1. As funções de interpolação para os pontos intermediários das arestas são definidas por:

$$FI(k) = (1/4) (1 - r^2) (1 + ss_k) (1 + tt_k) \quad (2a)$$

para $r_k = 0, s_k = \pm 1, t_k = \pm 1$.

$$FI(k) = (1/4) (1 - s^2) (1 + rr_k) (1 + tt_k) \quad (2b)$$

para $s_k = 0, r_k = \pm 1, t_k = \pm 1$.

$$FI(k) = (1/4) (1 - t^2) (1 + rr_k) (1 + ss_k) \quad (2c)$$

para $t_k = 0, r_k = \pm 1, s_k = \pm 1$.

As coordenadas esféricas de um ponto qualquer do elemento são dadas por uma combinação linear das funções de interpolação e das coordenadas nodais:

$$R = \sum_{i=1}^n FI(i) R(i)$$

$$\psi = \sum_{i=1}^n FI(i) \psi(i) \quad (3a, b, c)$$

$$\theta = \sum_{i=1}^n FI(i) \theta(i)$$

onde $R(i)$, $\psi(i)$, $\theta(i)$ são coordenadas dos pontos nodais. Analogamente, para os deslocamentos temos:

$$U = \sum_{i=1}^n FI(i) U(i)$$

$$V = \sum_{i=1}^n FI(i) V(i) \quad (4a, b, c)$$

$$W = \sum_{i=1}^n FI(i) W(i)$$

Sendo $U(i)$, $V(i)$, $W(i)$ os deslocamentos nodais.

3. Formulação do Modelo

A formulação se baseia no Método dos Deslocamentos utilizando para tanto o Princípio da Mínima Energia Potencial. Este princípio requer que a 1.ª variação da energia potencial total Π seja nula, ou seja: $\delta\Pi = 0$.

São assumidos campos de deslocamento contínuos sobre cada elemento a fim de garantir a compatibilidade de deslocamento entre eles.

Seja Π a energia potencial total do corpo. Então, a 1.ª variação [3] é:

$$\delta\Pi = \int_V \delta \epsilon^T D \epsilon \, dv - \int_V (\delta \epsilon^T D \epsilon^0 + \delta u^T b) \, dv - \int_{sp} \delta u^T P \, ds = 0 \quad (5)$$

onde

$$u = \sum_j FI(j) U^j \quad (6)$$

Tendo em conta as relações deformações-deslocamentos [7, 8], podemos derivar (6) obtendo

$$\epsilon = B U^i \quad (7)$$

Substituindo as equações (6,7) em (5) e tendo em vis-

ta que os deslocamentos U^i e as variações δU^i não dependem da posição e tendo em vista também que os $\delta U^i, T$ são arbitrários tem-se que

$$K^i U^i = p^i \quad (8)$$

sendo

$$K^i = \int_{V_i} B^T D B \, dV \quad (9)$$

a matriz de rigidez do elemento;

$$p^i = \int_{V_i} (B^T D \epsilon^0 + F I^T b) \, dV + \int_{Sp} F I^T P \, ds \quad (10)$$

o vetor equivalente de carga nos pontos nodais; ϵ^0 , vetor de deformações iniciais; b , vetor de forças de corpo atuando no volume V_i do elemento; P , vetor forças de superfície atuando na superfície prescrita Sp do elemento.

Para uma estrutura dividida em n elementos escreve-se o sistema de equações como

$$\sum_{i=1}^n K^i U^i = \sum_{i=1}^n p^i \quad (11)$$

ou seja

$$K U = P \quad (12)$$

Antes de resolver o sistema de equações (12), o mesmo deve ser modificado com a introdução das condições de contorno do problema.

4. Montagem da Matriz B

A matriz B da equação (7) é montada a partir de uma combinação das funções de interpolação e das derivadas destas. Escrevendo as relações deformação-deslocamento [7, 8] em coordenadas esféricas tem-se:

$$\epsilon_r = \frac{\partial U}{\partial R}$$

$$\epsilon_\psi = \frac{1}{R \text{sen}(\theta)} \frac{\partial V}{\partial \psi} + \frac{U}{R} + \frac{W}{R} \cotan(\theta)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{U}{R} \quad (13a, b, \dots, f)$$

$$\gamma_{R\psi} = \frac{1}{R \text{sen}(\theta)} \frac{\partial U}{\partial \psi} - \frac{V}{R} + \frac{\partial V}{\partial R}$$

$$\gamma_{\psi\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{V}{R} \cotan(\theta) + \frac{1}{R \text{sen}(\theta)} \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$\gamma_{\theta R} = \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{W}{R} + \frac{\partial W}{\partial R}$$

Agora, as equações (7), tendo em vista as equações (13), tornam:

$$\begin{bmatrix} E_R \\ E_\psi \\ E_\theta \\ \gamma_{R\psi} \\ \gamma_{\psi\theta} \\ \gamma_{\theta R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B(1, K+1) & 0 & 0 \\ B(2, K+1) & B(2, K+2) & B(2, K+3) \\ B(3, K+1) & 0 & B(3, K+3) \\ B(4, K+1) & B(4, K+2) & 0 \\ 0 & B(5, K+2) & B(5, K+3) \\ B(6, K+1) & 0 & B(6, K+3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ W_2 \\ \dots \\ U_{20} \\ V_{20} \\ W_{20} \end{bmatrix} \quad (14)$$

1º Bloco 20º Bloco

onde: $B(1, k+1) = H(1)$
 $B(2, k+1) = FI(NB)/RPI$
 $B(3, k+1) = FI(NB)/RPI$
 $B(4, k+1) = H(2)/[RPI * \text{sen}(TPI)]$
 $B(6, k+1) = H(3)/RPI$
 $B(2, k+2) = H(2)/[RPI * \text{sen}(TPI)]$
 $B(4, k+2) = H(1) - FI(NB)/RPI$

$$\begin{aligned} B(5, k+2) &= H(3)/RPI - [FI(NB) * \cotan(TPI)]/RPI \\ B(2, k+3) &= [FI(NB) * \cotan(TPI)]/RPI \\ B(3, k+3) &= H(3)/RPI \\ B(5, k+3) &= H(3)/[RPI * \text{sen}(TPI)] \\ B(6, k+3) &= H(1) - FI(NB)/RPI \end{aligned}$$

sendo:

NB = número do bloco de B
 $k = 3(NB - 1)$

$H(i)$ = derivadas das funções de interpolação segundo as direções (R, ψ, θ) . Elas são calculadas com auxílio da matriz Jacobiano [3,4].

RPI, TPI são, respectivamente, o raio e o ângulo θ do ponto de integração considerado.

5. Cálculo da Matriz de Rigidez K^e

O cálculo da matriz de rigidez do elemento é feito no sistema de referência esférico sendo usado o processo de integração numérica de Gauss-legendre para avaliar a integral proposta em (9). No presente modelo foi suficiente utilizar dois pontos de integração em cada direção para avaliar o volume do elemento exatamente, sendo satisfeita a condição para a convergência do método de elementos finitos [3, 6].
 A integral $K^e = \int_V B^T DB \, dv$ é escrita na forma:

$$K^e = \int_V B^T DB \, \det [J] R^2 \text{sen}(\theta) \, A_{ijk} \quad (15)$$

onde: $A_{ijk} = (A_i) (A_j) (A_k)$ pesos de integração;
 $R = RPI$, raio do ponto de integração;
 $\theta = TPI$, ângulo θ do ponto de integração;
 $D =$ matriz de propriedades constitutivas do material [4].

6. Carregamento Distribuído

O carregamento distribuído pode ser devido a uma pressão

são normal à superfície ou devido a cargas cisalhantes agin do tangencialmente à superfície. Tal carregamento recebe um tratamento especial [1]. As forças nodais equivalentes são calculadas no sistema esférico e alguns cuidados são tomados a fim de que elas possam ser usadas corretamente pelo método de Elementos Finitos. A equivalência é estabelecida pela igualdade entre o trabalho realizado pela carga distribuída e o trabalho realizado pela força nodal equivalente.

O trabalho realizado pelo carregamento superficial atuando sobre um elemento de área dA é

$$dW_e = Q^T T dA \tag{16}$$

onde $Q^T = [q_1, q_2, q_3]$ é o vetor deslocamento e $T^T = [T_1, T_2, T_3]$ é o vetor força distribuída. Com $q_i = FI(i) U(ij)$; $T_i = FI(i) T(ij)$. Substituindo estes valores em (16) chega-se que

$$dW_e = U^T (FI)^T (FI) T dA \tag{17}$$

E o trabalho sobre toda a superfície carregada do elemento é

$$W_e = \int_A U^T (FI)^T (FI) T dA \tag{18}$$

Para obter as forças equivalentes ao carregamento externo distribuído deve ser feita a 1ª variação de W_e , ou seja,

$$\delta W_e = \sum_i W_{,ui} \delta u_i \tag{19}$$

onde $W_{,ui}$ é a força nodal equivalente que corresponde ao grau de liberdade U_i do elemento. Derivando a expressão (18) em relação a U_i tem-se

$$W_{e,ui} = \int_A \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} (FI)^T (FI) T dA$$

↑
posição de U_i

$$\tag{20}$$

A matriz $(FI)^T$ quando pré-multiplicada pelo vetor, f_i

ca na forma

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \theta \\ \vdots \\ \vdots \\ FI(i) \\ \vdots \\ \vdots \\ \theta \end{bmatrix}$$

↑
posição de U_i

que devido a natureza de FI , o vetor $FI(i)$ possui apenas um elemento não nulo, que depende da direção do grau de liberdade U_i no sistema de referência intrínseco.

O vetor T representa o carregamento distribuído no ponto de integração. É obtido pelos valores nodais e pelas funções de interpolação. Para obter a força equivalente, que corresponde a um dado grau de liberdade, faz-se a integração numérica onde o integrando é o produto do vetor $FI(i)$ pelo vetor T de carregamento distribuído. É calculado em cada ponto de integração. Deve ser levado em conta o peso de integração e o determinante do Jacobiano modificado [1] a fim de passar do sistema natural (r, s, t) para o esférico (R, ψ, θ) .

Cargas concentradas são somadas diretamente no vetor carga do ponto considerado.

Com essas considerações e na ausência de forças de corpo o vetor carga p^i da equação (10) pode ser calculado.

7. Condições de contorno

As condições de contorno são inerentes à solução de cada problema proposto em uma dada análise estrutural. Podem ser tomadas como, por exemplo, a restrição de deslocamentos nas direções ψ, θ quando se tem apenas carregamento na direção radial. Outras situações podem ser previstas quando necessário.

8. Procedimento Computacional

Para que o sistema computacional seja o mais geral possível levando em conta economia de tempo no processamento, este é feito por módulos com funções bem definidas. A referência [9] mostra uma descrição de cada fase do processamento, dos módulos e subrotinas utilizadas.

É levado em conta a simetria do modelo para calcular o Jacobiano e para realizar as integrações numéricas. Uma sequência lógica para o tratamento do problema é dada como:

- Leitura de dados definindo a topologia do elemento;
- Leitura das coordenadas dos nós;
- Leitura e definição da matriz de propriedades do material;
- Leitura de carregamentos térmicos e distribuídos;
- Rearranjo dos dados;
- Montagem das matrizes elementares em termos de valores nodais;
- Sobreposição das matrizes;
- Leitura das condições de contorno;
- Solução do sistema de equações para cada tipo de condições de contorno;
- Relatórios: balanços de energia global, externa e interna, componentes de tensão, tensões principais, valores dos graus de liberdade nodais, etc.

9. Aplicações

Solução de Problemas de Análise de Tensões. Outros problemas tais como Transmissão de Calor e Ondas podem ser resolvidos bastando que, para isto, sejam efetuadas adaptações apropriadas decorrentes da substituição das equações de transmissão de calor e ondas.

10. Conclusões

A implantação do modelo encontra-se atualmente em fase de testes tendo apresentado boa performance e aplicabilidade.

Resultados numéricos estão sendo gerados, utilizando-se um computador IBM 4341, os quais serão apresentados no congresso.

11. Referências

- [1] Barcellos, C.S., Rosa, E. "Expansão do Sistema Modular de Elementos Finitos - SIMELF", Grante, Publicação - 09/80 - CT - UFSC.
- [2] Barcellos, C.S., Rosa E. "Modelo de Transferência Dinâmica de Dados - Buffer - Arquivo - Versão II". UFSC - CNEN - 07/80.
- [3] Brebbia, C.A., Ferrante, A.J. "The Finite Element Technique". Editora da URS - Porto Alegre (1975).
- [4] Bathe, K.J., Wilson, E.L. "Numerical Methods in Finite Element Analysis". Prentice-Hall, Inc. (1976).
- [5] Huebner, K.H., "The Finite Element Method for Engineers", John Wiley, (1975).
- [6] Zienkiewicz, O.C. "The Finite Element Method in Engineering Science". McGraw-Hill, (1971).
- [7] Alves, D.B. "Elasticidade". UFSC, (1979).
- [8] Borei A.P., Lyn, P.P., "Elasticity in Engineering Mechanics". Prentice-Hall, (1974).
- [9] Barcellos, C.S., Rosa, E. "Arquitetura de um Sistema Modular de Elementos Finitos II - Aplicações". V COBEM, Campinas, nº DT-05, p.p. 181-190, dezembro 1979.