



ções diferenciais ordinárias de primeira ordem e de equações algébricas. Visando a uma redução do tempo total de processamento e em consequência, os custos, algumas equações diferenciais foram transformadas em equações algébricas e o sistema resultante foi resolvido utilizando CSMP. Os resultados numéricos e experimentais concordaram satisfatoriamente.

REFERÊNCIAS

- {1} Donohue, D.A., "Heat transfer and pressure drop in heat exchangers", Ind. Engng. Chem. Vol. 41 (1949), pp. 1357-1362.
- {2} International Business Machines - IBM, System/360 Continuous System Modeling Program, White Plains, N.Y., sem data (User's Manual).
Program Number 360A - (x - 16x).

ANAI S	COBEM 81	PROCEEDINGS
	VI CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECANICA	
	RIO DE JANEIRO, 15 - 18 de dezembro de 1981	
TRABALHO PAPER	N.º D-28 P. P. 275 - 284	PUC/RJ

CÁLCULO DE TRANSIENTES TÉRMICOS BIDIMENSIONAIS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

JOSE LUIZ ALVES DA FONTOURA RODRIGUES
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA - UnB

CLOVIS SPERB DE BARCELLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA - U.F.S.C.

SUMÁRIO

O objetivo deste trabalho é a análise de problemas lineares de condução de calor em materiais anisotrópicos e ou heterogêneos, sob regime transiente, através de domínios bidimensionais com qualquer tipo de geometria ou domínios tridimensionais axisimétricos. São admitidas somente condições de contorno constantes com o tempo além da possibilidade de geração interna de calor no interior do domínio de solução. A resolução do problema é efetuada por análise modal e o método numérico utilizado é a técnica de elementos finitos segundo a formulação de Galerkin.

SUMMARY

The object of this paper is the unsteady linear heat conduction through anisotropic and/or heterogeneous matter, in either two-dimensional fields with any kind of geometry or three-dimensional fields with axial symmetry. It only accepts time-independent boundary conditions and it is possible to have internal heat generation. The solution is obtained by modal analysis employing the finite element method under Galerkin formulation.

1. Introdução

Sabe-se que em estruturas termicamente carregadas é possível μ_{ij} muitas vezes desacoplar as equações termo-elásticas daquelas que descrevem a distribuição de temperatura. Assim, é desejável resolver o problema de transmissão de calor e usar os valores das temperaturas resultantes para determinar os campos de tensão e deformação da estrutura. Desse modo, propõe-se aqui um programa numérico capaz de equacionar problemas lineares de condução de calor através de materiais anisotrópicos em domínios bidimensionais, sejam superfícies de contorno qualquer ou sólidos axisimétricos, em regime transiente ou permanente, submetidos a condições de carregamento térmico constantes com o tempo, admitindo ainda a existência de fontes internas de geração de calor. Tais condições se classificam em dois grupos básicos:

1 - Condições de contorno especificadas (condições de Dirichlet) - temperaturas especificadas no contorno.

2 - Condições de contorno naturais (condições de Cauchy) -

2.1. Fluxo de calor especificado no contorno e/ou condições adiabáticas especificadas através de isolamento térmico ou pela existência de planos de simetria (fluxo nulo):

2.2. convecção especificada no contorno.

Foi utilizado como técnica de resolução o método dos elementos finitos, a fim de manter a uniformidade do conjunto a que pertence este trabalho. Trata-se do sistema de cálculo estrutural desenvolvido pelo Grupo de Análise de Tensões do Departamento de Engenharia Mecânica da UFSC para o estudo do comportamento dos vasos de pressão de reatores nucleares, particularmente durante as operações de início e término de funcionamento. Este trabalho é uma de suas etapas preliminares e tem como objetivo central a análise dos longos transientes térmicos que se estabelecem nestas ocasiões.

2. Formulação por Elementos Finitos da Equação Matricial do Problema

A análise dos fenômenos de transferência de calor é toda desenvolvida a partir da equação da conservação da energia térmica que sob notação diferencial toma a forma

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} + \nabla \cdot \vec{q} = Q \quad (1)$$

Particularizando a equação básica (1) para o problema de condução térmica em sólidos heterogêneos e isotrópicos obtém-se

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + Q \quad (2)$$

A modelação matricial, por elementos finitos, de problemas físicos descritos por equações diferenciais parabólicas como é a equação (2), tem como principal meio de implementação a formulação de Galerkin, segundo a qual um domínio de solução bidimensional pode ser discretizado através da relação

$$T^{(e)}(x, y, t) = \sum_{i=1}^m N_i(x, y) T_i(t) \quad (3)$$

onde $T^{(e)}(x, y, t)$ é a solução aproximada sobre o elemento bidimensional, m é o número de nós do elemento, N_i são as funções interpoladoras usadas na definição do elemento e T_i é o valor da temperatura em cada um dos m nós do elemento.

Sob notação matricial tem-se

$$T^{(e)}(x, y, t) = |N|^{(e)} \{T\}^{(e)} \quad (4)$$

onde $|N|^{(e)}$ são as funções interpoladoras definidas sobre o elemento genérico (e) e $\{T\}^{(e)}$ são as temperaturas nodais do elemento (e) .

Neste trabalho foram empregados elementos triangulares com um nó em cada vértice, sendo em consequência lineares as funções interpoladoras N_i .

A solução para todo o domínio é obtida pelo somatório das soluções aproximadas para cada um dos elementos componentes da malha

$$T(x, y, t) = \sum_{e=1}^n T^{(e)}(x, y, t) \quad (5)$$

Como resultado da aplicação da formulação de Galerkin obtém-se a equação matricial do problema sob a forma

$$|A| \{\dot{T}\} + |B| \{T\} + \{C\} = \{0\} \quad (6)$$

onde $|A|$ representa a matriz condutância térmica, $|B|$ é a matriz condutividade térmica englobando fenômenos de condução e convecção, $\{C\}$ é o

vetor carga térmica, $\{T\}$ é o vetor temperatura e $\{T\}^t$ é o vetor derivada da primeira da temperatura em relação ao tempo.

A obtenção da equação correspondente à equação (6) para domínios tridimensionais assimétricos não apresenta dificuldades. Seu detalhamento é apresentado por Huebner [1].

3. Resolução por Análise Modal

Para solucionar um sistema de equações diferenciais lineares na forma matricial por análise modal, é desejável o desacoplamento do conjunto de equações do sistema de maneira a possibilitar seu manuseio individual.

A solução adotada foi a utilização do método proposto pelo Prof. Domingos Boechat Alves [2] capaz de desacoplar o sistema matricial de equações do problema e determinar seus autovalores e autovetores através do conjunto de subrotinas CLVT, DPCHOL e DEIGEN. O sistema é desacoplado sem que suas matrizes percam a simetria, através da decomposição da matriz condutiva térmica $|B|$ pela técnica conhecida como "redução de Cholesky", seguida de duas transformações de coordenadas

A redução de Cholesky [2] é uma técnica para o cálculo da matriz triangular inferior e não singular $|R|$, efetuada pela subrotina DPCHOL, tal que $|R|$ seja capaz de tornar verdadeira a igualdade

$$|B| = |R||R|^t \quad (7)$$

Substituindo a relação (7) na equação (6) chega-se a

$$|A| \{T\} + |R||R|^t \{T\} + \{C\} = \{0\} \quad (8)$$

A primeira transformação de coordenadas do sistema se baseia no fato de que sendo $|R|$ uma matriz não singular, existirá sempre um vetor $\{S\}$ que como o vetor temperatura $\{T\}$ será função do tempo e

$$|R|^t \{T\} = \{S\} \quad (9)$$

Explicitando o vetor temperatura e sua derivada em função do tempo obtém-se a transformação de coordenadas conveniente que, substituída na equação (8), resulta na forma

$$|A| (|R|^t)^{-1} \{S\} + |R|\{S\} + \{C\} = \{0\} \quad (10)$$

A nova configuração da equação matricial do sistema, se pré-multiplicada pela matriz $|R|^{-1}$, estará desacoplada a menos de seu termo em $\{S\}$

$$|R|^{-1} |A| (|R|^t)^{-1} \{S\} + |I| \{S\} + |R|^{-1} \{C\} = \{0\} \quad (11)$$

Fazendo

$$|R|^{-1} |A| (|R|^t)^{-1} = |D| \quad (12)$$

obtem-se a forma mais compacta

$$|D| \{S\} + |I| \{S\} + |R|^{-1} \{C\} = \{0\} \quad (13)$$

A segunda transformação de coordenadas do sistema, obtida através da análise modal, completa o desacoplamento e segue a sequência de operações descrita abaixo.

Supõe-se que o vetor $\{S\}$, representativo da temperatura do novo sistema de coordenadas, possa ser substituído pela combinação linear

$$\{S\} = |V| \{Z\} \quad (14)$$

onde a matriz $|V|$ representa o conjunto de autovetores da matriz $|D|$ e o vetor $\{Z\}$ é um multiplicador função do tempo.

A determinação dos autovetores $|V|$ e dos autovalores $\{\lambda\}$ da matriz $|D|$ é efetuada pelas subrotinas CLVT e DEIGEN, constituindo a parte mais extensa e importante de todo o processo de resolução por computador do sistema matricial de equações.

Substituindo o vetor $\{S\}$ na equação (13) e pré-multiplicando a igualdade assim formada pela matriz de autovetores invertida $|V|^{-1}$ chega-se à relação

$$|V|^{-1} |D| |V| \{Z\} + |I| \{Z\} + |V|^{-1} |R|^{-1} \{C\} = \{0\} \quad (15)$$

Os autovalores $\{\lambda\}$ e autovetores $|V|$ da matriz condutância térmica $|D|$ são por definição o vetor e a matriz capazes de satisfazer a igualdade

$$(\lambda I - |V|^{-1} |D| |V|) \{Z\} = \{0\} \quad (16)$$

onde

$$|\lambda| = |I| \{ \lambda \} \quad (17)$$

Evidentemente, a solução trivial para a equação (16) não tem valor prático, restando

$$|\lambda| = |V|^{-1} |D| |V| \quad (18)$$

A relação (18) substituída na equação (15) fornece o sistema matricial de equações diferenciais lineares desacoplado, já que $|\lambda|$ é uma matriz diagonal.

$$|\lambda| \{ \dot{Z} \} + |I| \{ Z \} + \{ F \} = \{ 0 \} \quad (19)$$

onde

$$\{ F \} = |V|^{-1} |R|^{-1} \{ C \} \quad (20)$$

O sistema matricial desacoplado de \bar{r} equações diferenciais lineares é representado pela equação (19), onde cada equação

$$\dot{z}_i + \left(-\frac{z_i}{\lambda_i} \right) + \left(-\frac{f_i}{\lambda_i} \right) = 0 \quad (21)$$

$$i = 1, 2, \dots, \bar{r}$$

será resolvida individualmente através de integração direta segundo a relação abaixo.

$$z_i = \left(CI + \int_0^t -\frac{f_i}{\lambda_i} \exp \left(\int_0^\tau \frac{d\lambda}{\lambda_i} \right) d\tau \right) \exp \left(-\int_0^t \frac{dt}{\lambda_i} \right) \quad (22)$$

sendo CI a constante de integração.

Admitindo-se apenas condições de contorno constantes com o tempo, os termos f_i do vetor carga térmica também serão constantes com o tempo. Este fato somado à não variação dos autovalores λ_i durante o transiente, torna possível a simplificação da relação (22)

$$z_i = CI \left(\exp \left(-\frac{t}{\lambda_i} \right) \right) + f_i \left(\exp \left(-\frac{t}{\lambda_i} \right) - 1 \right) \quad (23)$$

Uma vez obtidos todos os \bar{r} componentes do vetor solução $\{ Z \}$ são necessárias duas mudanças de coordenadas para que se retorne ao sistema original. Pela combinação das transformações (9) e (14) chega-se à relação que soluciona o problema

$$\{ T \} = \left(|R|^{-1} \right)^{-1} |V| \{ Z \} \quad (24)$$

4. Resultados

É analisado neste ítem o problema proposto por Livingood e Sams, apresentado por Schneider [3].

O objetivo da análise é a determinação do campo de temperaturas que se estabelece na seção reta da pá de turbina a gás esquematizada na figura (1). A pá é atravessada no sentido longitudinal por dois dutos de refrigeração por onde circula água a 200°F. Livingood e Sams estudam o problema da condução permanente de calor através de técnicas de relaxação.

Com o objetivo de testar o funcionamento do método em domínios de contorno irregular, foram feitas algumas alterações na proposta original, de forma a reconstituir o período que se inicia com a entrada da turbina em funcionamento e perdura até as lâminas entrarem em equilíbrio térmico, quando o campo de temperatura se estabelece de forma permanente.

Para a resolução do problema foram feitas as seguintes hipóteses simplificativas:

- 1 - Todas as propriedades físicas são constantes e correspondem ao campo permanente de temperatura.
- 2 - No início do transiente o campo de temperatura da pá é uniforme e igual a 200°F.
- 3 - O início do problema se dá quando a turbina é acionada, o que provoca o estabelecimento instantâneo de uma temperatura ambiente de 2000°F.
- 4 - A pá só troca calor com o meio por convecção, através dos dutos de refrigeração e pela superfície externa em contacto com o ambiente a 2000°F.

O coeficiente de película na superfície externa da pá é variável com a posição.

O domínio de solução foi discretizado através de 165 elementos definidos por 121 nós.

5. Conclusões

Comparando a figura (3) que representa o campo de temperatura permanente na pá calculado por elementos finitos com o resultado apresentado por Livingood e Sams na figura (2), observa-se que a distribuição e a forma das isotermais são semelhantes em ambos os casos. Porém nas regiões do contorno, em particular nos bordos de ataque e fuga, e na parte superior da pá, existem diferenças de até 100°F entre as duas soluções.

Esta pequena discrepância pode ser facilmente explicada, pois são exatamente nestas regiões onde a malha de relaxação empregada por Livingood e Sams não tem a flexibilidade suficiente para modelar com precisão equivalente à modelação por elementos finitos, o contorno da pá.

O grau de precisão dos resultados obtidos e a facilidade de discretização e montagem da malha, mesmo sobre domínios heterogêneos com contorno irregular e características anisotrópicas, confirmaram plenamente a versatilidade e segurança da técnica de elementos finitos aplicada à análise térmica.

A utilização do método dos elementos finitos é obtida com o sacrifício da simplicidade de programação e dos baixos custos de processamento, exigindo sempre um volume de dados de entrada superior a qualquer outro processo de cálculo numérico.

É evidente que, montado o sistema, sua aplicação fica facilitada. Ainda assim não é conveniente o uso indiscriminado desta técnica, principalmente pela diferença nos custos de processamento se comparada aos métodos convencionais de cálculo numérico.

O campo de aplicação dos elementos finitos surge à medida que o contorno do domínio toma formas mais complexas, impossibilitando o uso dos métodos numéricos tradicionais.

6. Referências

- [1] HUEBNER, Kenneth H. The finite element method for engineers. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1975.
- [2] ALVES, Domingos Boechat. Métodos Numéricos - Relatório preliminar de pesquisa. Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina, 1978.
- [3] SCHNEIDER, P.J. Conduction Heat Transfer. 2a. edição, Massachusetts Addison-Wesley Publishing Co., 1975.

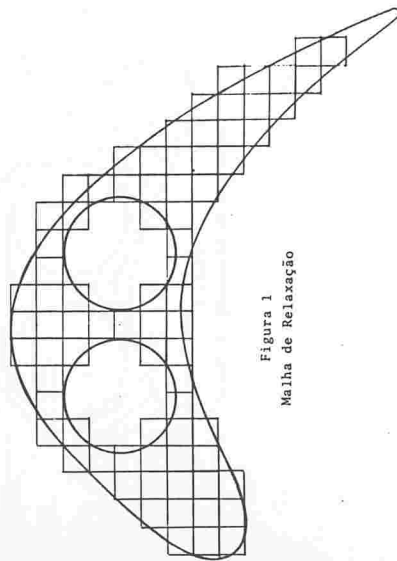


Figura 1
Malha de Relaxação

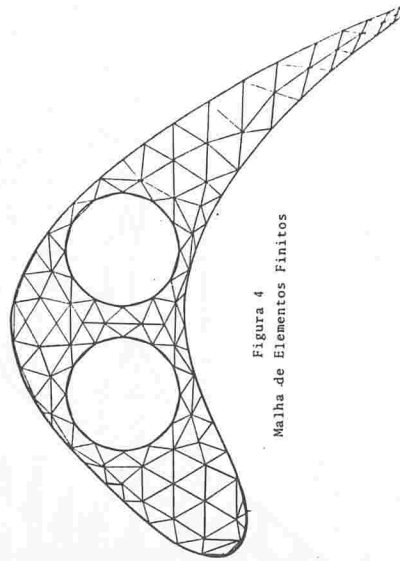


Figura 4
Malha de Elementos Finitos

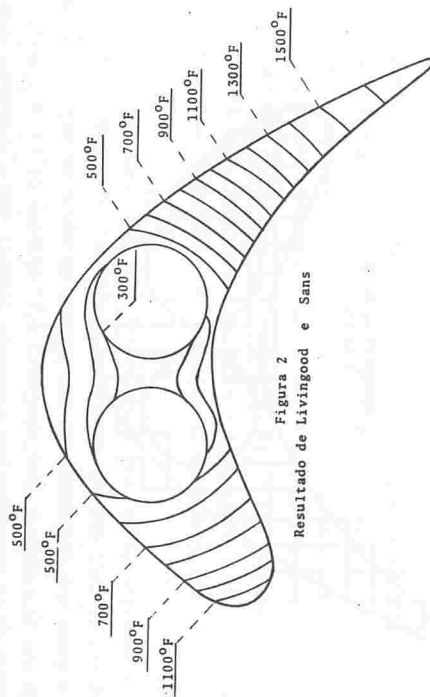


Figura 2
Resultado de Livingood e Sans

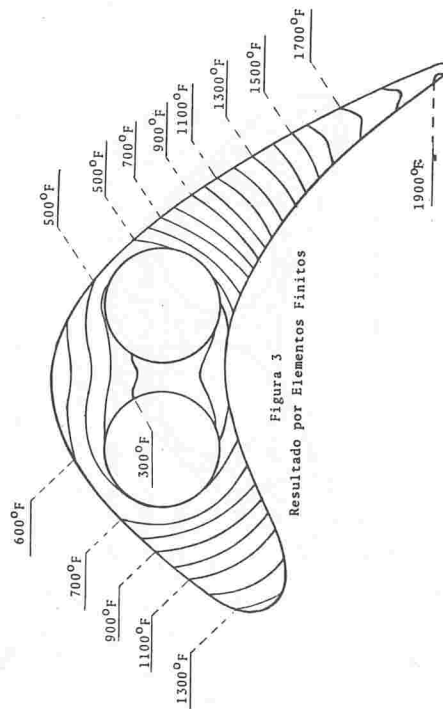


Figura 3
Resultado por Elementos Finitos



APLICAÇÃO DE "ALTERNATING DIRECTION METHODS" À SOLUÇÃO DA
EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR COM FONTE E EM REGIME TRANSITÓRIO

Antonio Carlos de Oliveira Barroso

Antonio Carlos Marques Alvim

COMISSÃO NACIONAL DE ENERGIA NUCLEAR

Anibal N. Gebrin

Dept.º de Engenharia Nuclear - COPPE - UFRJ

Rubens S. dos Santos

Seção de Engenharia Nuclear - IME

SUMÁRIO

Diversos tipos e variantes dos "alternating direction methods", (ADM) foram aplicados à solução da equação de condução de calor, com fonte, regime transitório, em regiões axissimétricas. Os resultados obtidos, mostram as vantagens de algumas variantes em relação ao método tradicional de Crank-Nicolson. O "alternating direction explicit", (ADE), foi entre os ADM básicos, o que mais se destacou. Entre todos, o ADE acoplado a uma transformação exponencial parece ser a variante com maior potencial, principalmente, quando usada com intervalo de tempo variável.

SUMMARY

Various types and variants of alternating direction methods, (ADM), were applied to the solution of the time-dependent heat conduction equation, with source, in regions with axial symmetry. Among the basic ADM's, the alternating direction explicit was the one which performed better. An exponential transformation coupled to the ADE seems to be the variant with greater potential, especially if used with a variable time step scheme.