ANAIS

3º SIMPÓSIO BRASILEIRO
SOBRE TUBULAÇÕES E VASOS DE PRESSÃO

PROCEEDINGS

SIBRAT

SALVADOR, 29 – 31 de outubro de 1984

ABCM

TRABALHO Nº 41

PP. 633-648

UMA FORMULAÇÃO DE ELEMENTO FINITO PARA CASCAS DELGADAS MULTILAMINADAS

Paulo de Tarso Rocha de Mendonça
Departamento de Engenharia Mecânica
Univ. Federal de Santa Catarina - Florianópolis - SC.

Clovis Sperb de Barcellos
Departamento de Engenharia Mecânica
Univ. Federal de Santa Catarina - Florianópolis - SC.

SUMÁRIO

É implementado um elemento finito para cascas delgadas de materiais compostos multilaminados. Este elemento é triangular plano, tri-nodal, com os deslocamentos de membrana interpoladas linearmente, as rotações normais quadraticamente e os deslocamentos transversais interpolados cubicamente e as hipóteses de Kirchhoff são satisfeitas em pontos discretos. A formulação admite variações no número, espessura, propriedades elásticas e orientação das lâminas em cada elemento, tal como no carregamento. Estes parâmetros devem ser especificados para cada elemento quando um problema particular é definido. Alguns exemplos são apresentados e eles mostram boa convergência com resultados dados na literatura |3| |9|.

SUMMARY

A finite element formulation for multi-layered thin shells is implemented. The element is plane triangular shaped, tri-noded, with in plane displacements linearly interpolated, normal rotations quadraticaly and transversal displacements cubically interpolated and the Kirchhoff hipothesis satisfied at discrete points. The formulation admits changes in the number, thickness, elastic properties and orientation of the laminae within each element, as well as in the loading. These parameters are specified at each element for a particular problem. Some examples are presented and they show a good agreement with results given in the literature |3| |9|.

1. Introdução

Os materiais compostos são ideais para aplicações estruturais onde altas razões resistência/peso e rigidez/peso são requeridas |4|. As peças assim produzidas são particularmente convenientes para aplicações aeroespaciais e militares, bem como, mais modernamente, em grande número de componentes estruturais de uso comercial e industrial tais como: tubos motores de foguetes, ogivas, vasos de alta pressão, tubos de lançamento para torpedos e mísseis, tubulações para alta pressão, tanques de armazenamento, oleodutos, tanques de combustíveis para aviões, estruturas de satélites, e mais recentemente fuselagem e superestruturas de aviões.

A medida que as técnicas de fabricação e controle de qualidade se aprimoram permitindo a produção de peças com geometrias otimizadas, e consequentemente mais irregulares e complexas, maior é a necessidade do uso de métodos genéricos para o cálculo estrutural, tais como os métodos de elementos finitos.

Devido ao crescente uso e importância dos materiais compostos, e à carência de pesquisas realizadas na área de análise de tensões destes materiais, resolveu-se implementar e testar um elemento finito adequado a cascas compostas. Especificou-se o uso de um elemento do tipo triangular plano e a implementação de um programa computacional que permita variações graduais e bruscas na quantidade das lâminas, propriedades elásticas e orientação, bem como nos carregamentos e na espessura total do laminado. O programa permite ainda a leitura independente destes valores em cada elemento da malha.

A seguir, mostrar-se-á a terminologia principal dos materiais compostos, as relações tensão-deformação para materiais laminados, a formulação do elemento finito desenvolvida, o DKT-ML, e serão apresentados alguns dos resultados obtidos.

2. Elementos de Materiais Compostos

Os materiais compostos são a combinação de dois ou mais materiais numa escala macroscópica formando um material útil na construção de componentes mecânicos.

A casca mais tipicamente considerada neste trabalho é aquela constituida por lâminas sobrepostas, perfeitamente aderidas. Cada lâmina é constituida por fibras contínuas imersas e perfeitamente

material nobre, de alta resistência, e são mantidas paralelas pela matriz. A matriz é em geral um material mais barato, usado em maior porcentagem no composto, de baixa resistência e baixo módulo de elasticidade. Cada lâmina, macroscópicamente, exibe uma ortotropia com as duas direções principais 1 e 2 paralela e perpendicular à fibra [4].

Um laminado é uma casca ou placa constituida por lâminas e pode ter suas propriedades manipuladas pela alteração do número, propriedades e orientações e espessuras das lâminas.

Em geral, num laminado são necessários 7 valores para caracterizar uma lâmina: E_1, E_2, ν_{12}, G_{12}, θ, t e ordem, onde: E_1 e E_2 são os Módulos de Young nas direções principais ($E_1 > E_2$); ν_{12} é o coeficiente de Poisson; G_{12} é o módulo de Elasticidade Transversal; θ é a orientação das fibras em relação a um sistema de coordenadas arbitrariamente escolhido x-y-z, com z normal a superfície média do laminado; t é a espessura da lâmina; a ordem é a posição da lâmina no laminado. Pode ainda serem necessárias outras propriedades tais como α_1 e α_2, que são os coeficientes de dilatação térmicas nas direções principais da lâmina.

A relação tensão-deformação de uma lâmina ortotrópica em estado plano de tensões, segundo o sistema principal de coordenadas 1-2 é:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Esta relação no sistema 1-2 mostra ausência de acoplamento extenção-cisalhamento e requer apenas 4 constantes elásticas independentes. É conveniente exprimir os termos da matriz Q em termos de "constantes de engenharia", que podem ser obtidos experimentalmente com mais facilidade, e possuem melhor interpretação física. Assim tem-se:

$$Q_{11} = \frac{E_1^2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \qquad Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}$$
$$Q_{22} = \frac{E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \qquad Q_{33} = G_{12} \qquad (2)$$

Onde $\nu_{12} = e_2/e_1$ é o coeficiente de Poisson obtido quando se aplica uma tensão σ na direção 1. Note-se que $\nu_{12} \neq \nu_{21}$.

Frequentemente torna-se necessário o uso da relação tensão-deformação num sistema x-y de coordenadas diferente do principal. Define-se θ como a rotação do sistema x-y-z em torno do eixo z, no sentido anti-horário, definindo o sistema de coordenadas 1-2-3. Facilmente, usando as propriedades tensoriais na rotação do tensor tensão, e rearranjando suas componentes em forma de vetores obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \mathrm{sen}^2\theta & -2\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta \\ \mathrm{sen}^2\theta & \cos^2\theta & 2\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta \\ \mathrm{sen}\theta & -\mathrm{sen}\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\mathrm{sen}^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

ou,

$$\underset{\sim}{\sigma}^x = \underset{\approx}{T}^{-1} \underset{\sim}{\sigma}^1$$

Analogamente, para as deformações,

$$[e_x \; e_y \; \frac{\gamma_{xy}}{2}]^* = \underset{\approx}{T}^{-1} \; [e_1 \; e_2 \; \frac{\gamma_{12}}{2}]^* \qquad (4)$$

Onde "*" significa transposição de vetor. Definindo-se

$$\underset{\sim}{e}^x = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \qquad \underset{\approx}{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

e com o auxílio das equações (1), (3) e (4) obtém-se:

$$\underset{\approx}{\sigma}^x = \left[\underset{\approx}{T}^{-1} \underset{\approx}{Q} \underset{\approx}{R} \underset{\approx}{T} \underset{\approx}{R}^{-1}\right] \underset{\sim}{e}^x = \overline{\underset{\approx}{Q}} \, \underset{\sim}{e}^x \qquad (6)$$

A matriz $\overline{Q}$ na equação (6) é a matriz transformada. Se a lâmina tiver $E_1 \neq E_2$, e $\theta \neq 0$, a matriz $\overline{Q}$ será cheia, embora possua apenas 4 constantes independentes além de θ, cfe. referência [4].

As várias combinações de orientações, espessuras, materiais, etc, de cada lâmina fazem com que o comportamento macromecânico do laminado possua características diferentes da lâmina simples. A dedução das equações que descrevem o comportamento do laminado, a partir das características das lâminas unitárias foram obtidas diretamente da "Teoria Clássica de Laminação", (CLT), para placas delgadas [4]. Nesta teoria são tomadas, além das conhecidas hipóteses de Kirchhoff para placas delgadas, outras hipóteses próprias:

- o laminado consiste de lâminas perfeitamente coladas; (sem deslisamento ou deslocamento);
- a cola é suposta ter espessura infinitesimal; (não se deforma por cisalhamento, o que significa que os deslocamentos são contínuos através das lâminas);

Estas hipóteses permitem que se possa escrever para o laminado:

$$\underset{\sim}{e}^x = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_o}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_o}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_o}{\partial y} + \dfrac{\partial v_o}{\partial x} \end{bmatrix} - z \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \\ \dfrac{2\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \underset{\sim}{e}_o^x + z\,\underset{\sim}{\overline{k}} \qquad (7)$$

onde u, v, w são deslocamento segundo as direções x, y, z; $\overline{k}$ é o vetor de curvatura da superfície média, e o subíndice "o" indica a superfície média.

Substituindo a equação (7) na (6) obtém-se a relação tensão-deslocamento,

$$\underset{\sim}{\sigma}_k^x = \overline{\underset{\approx}{Q}}_k \, (\underset{\sim}{e}_o^x + z\,\overline{\underset{\sim}{k}}) \qquad (8)$$

onde o índice k representa a k-ésima lâmina. Pode-se então integrar as tensões ao longo da espessura do laminado obtendo-se:

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{N} \\ \underset{\sim}{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\approx}{A} & \underset{\approx}{B} \\ \underset{\approx}{B} & \underset{\approx}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{e}_o^x \\ \overline{\underset{\sim}{k}} \end{bmatrix} = \underset{\approx}{C} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{e}_o^x \\ \overline{\underset{\sim}{k}} \end{bmatrix} \qquad (9)$$

onde $[\underset{\sim}{N} \; \underset{\sim}{M}] = [N_x \; N_y \; N_{xy} \; M_x \; M_y \; M_{xy}]$ são as forças e momentos resultantes agindo no laminado, $\underset{\approx}{A}$, $\underset{\approx}{D}$, $\underset{\approx}{B}$ são as matrizes simétricas de rigidez extencional, de flexão e de acoplamento entre extensão e flexão respectivamente, e são dados por:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N} (\bar{Q}_{ij})_k \, t_k \quad , \quad B_{ij} = \sum_{k=1}^{N} (\bar{Q}_{ij})_k \, t_k \, \bar{z}_k$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{N} (\bar{Q}_{ij})_k \left(t_k \bar{z}_k^2 + \frac{t_k^3}{12}\right) \tag{10}$$

onde t_k e $\bar{z}_k$ são a espessura e a cota da superfície média da k-ésima lâmina à superficie média do laminado.

2.1 Tensões Térmicas

As tensões mecânicas numa lâmina ortotrópica, no sistema principal de coordenadas podem ser obtidas através de uma alteração na equação (1):

$$\underset{\sim}{\sigma}^1 = \underset{\approx}{Q} \, [e_1 - \alpha_1 T \; , \; e_2 - \alpha_2 T \; , \; \gamma_{12}]^* \tag{11}$$

onde α_1, α_2 são os coeficientes de dilatação térmica da lâmina nas direções principais; T refere-se geralmente em laminados a diferença entre a temperatura de trabalho e a temperatura de cura da cola; "*" significa transposição de vetor. As tensões nas direções principais 1-2 numa lâmina podem ser transformadas a um sistema x-y-z conforme a equação (6), resultando:

$$\underset{\sim}{\sigma}_k^x = \underset{\approx}{\bar{Q}}_k \, [e_x - \alpha_x T \; , \; e_y - \alpha_y T \; , \; \gamma_{xy} - \alpha_{xy} T]_k^* \tag{12}$$

A obtenção $\underset{\sim}{\alpha}^x = [\alpha_x, \alpha_y, \alpha_{xy}]^*$ a partir $\underset{\sim}{\alpha}^1 = [\alpha_1, \alpha_2, o]^*$ é feita considerando-se que:

$$[e_1 \;\; e_2 \;\; \gamma_{12}]^{*,T} = [\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; o]^* \, T = \underset{\sim}{\alpha}^1 \, T \tag{13}$$

onde o indice T indica "térmico". Considerando-se as equações (5), (4), (13),

$$\underset{\sim}{e}^{*,T} = \underset{\sim}{\alpha}^x \, T = \underset{\approx}{R} \, \underset{\approx}{T}^{-1} \, \underset{\approx}{R}^{-1} \, \underset{\sim}{\alpha}^1 \, T \tag{14}$$

Da segunda igualdade da equação (14) obtém-se a relação [11]:

$$\underset{\sim}{\alpha}^x = \underset{\approx}{R} \, \underset{\approx}{T}^{-1} \, \underset{\approx}{R}^{-1} \, \underset{\sim}{\alpha}^1 \tag{15}$$

ou ainda,

$$\underset{\sim}{\alpha}^x = [\alpha_1 \cos^2\theta + \alpha_2 \operatorname{sen}^2\theta \; , \; \alpha_1 \operatorname{sen}^2\theta + \alpha_2 \cos^2\theta \; , \; 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \, (\alpha_1 - \alpha_2)]^* \tag{16}$$

Uma vez obtidos os coeficientes, as tensões na equação (12) podem ser integradas ao longo da espessura, resultando as seguintes forças e momentos térmicos resultantes:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{N}^T &= \sum_{k=1}^{N} \underset{\approx}{\bar{Q}}_k \, \underset{\sim}{\alpha}_k^x \, T_k \, t_k \\ \underset{\sim}{M}^T &= \sum_{k=1}^{N} \underset{\approx}{\bar{Q}}_k \, \underset{\sim}{\alpha}_k^x \, T_k \, \bar{z}_k \, t_k \end{aligned} \tag{17}$$

A equação (9) torna-se então:

$$\begin{vmatrix} \underset{\sim}{N} \\ \underset{\sim}{M} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underset{\sim}{N} \\ \underset{\sim}{M} \end{vmatrix}^T = \underset{\sim}{C} \begin{vmatrix} \underset{\sim}{e}_o^x \\ \underset{\sim}{k} \end{vmatrix} \tag{18}$$

Sendo ΔT a variação de temperatura ao longo da espessura H do laminado e Tm a temperatura na superfície média, a temperatura T_k na superfície média da k-ésima lâmina, de cota $\bar{z}_k$ é:

$$T_k = \frac{\Delta T \, \bar{z}_k}{H} + Tm \tag{19}$$

3. <u>Formulação do Elemento DKT-ML</u>

3.1 Formulação do Elemento de Flexão DKT

A teoria de placas com a inclusão da deformação cisalhante transversal é obtida usando a generalização das hipóteses de Kirchhoff devida a Reissner e Mindlin: "segmentos de reta originalmente normais à superfície média indeformada permanecem retas mas não necessariamente normais à superfície média deformada". Desta forma as componentes de deslocamento na teoria linear de flexão tornam-se:

$$u = z b_x(x,y) \, , \; v = z b_y(x,y) \, , \; w = w(x,y) \tag{20}$$

onde os b's são as rotações da normal [1].

Das relações deformação-deslocamento da elasticidade linear obtém-se [10]:

$$\underset{\sim}{e}_f^* = z(b_{x,x} \quad b_{y,y} \quad (b_{x,y} + b_{y,x})) = z\underset{\sim}{\bar{k}} \tag{21}$$

onde $\underset{\sim}{e}_f$ são as componentes de flexão na deformação e $\underset{\sim}{\bar{k}}$ é o vetor de curvaturas.

São definidas então funções de interpolação quadráticas para b_x e b_y sobre o elemento triangular plano de 6 nós, tal que:

$$b_x = \sum_{i=1}^{6} N_i b_{xi} \quad ; \quad b_y = \sum_{i=1}^{6} N_i b_{yi} \tag{22}$$

onde: b_{xi} e b_{yi} são os valores nodais nos vértices e nos nós intermediarios aos lados; N_i são as 6 funções de interpolação quadráticas dadas em coordenadas naturais de triângulo, [6] [7].

Considera-se então que as hipóteses de Kirchhoff são efetivas no contorno do elemento. Então tem-se que nos 3 nós dos vértices $b_x = -w_{,x}$ e $b_y = -w_{,y}$; e nos 3 nós intermediários $b_{s,k} + w_{,sk} = 0$, onde 's' indica direção tangencial ao contorno (anti-horário).

Uma vez que as funções interpoladoras de b_x e b_y são quadráticas, supõe-se que no contorno a variação de w seja cúbica, logo,

$$w_{,sk} = \frac{-3}{2l_{ij}} w_i - \frac{1}{2} w_{,si} + \frac{3}{2l_{ij}} w_j - \frac{1}{4} w_{,sj} \tag{23}$$

onde para k = 4,5,6 i-j = 2-3, 3-1, 1-2 respectivamente, isto é, k representa o nó intermediário ao lado ij, e l é o comprimento do lado.

Toma-se ainda a variação de b_n como sendo linear ao longo do contorno, logo:

$$b_{nk} = \frac{1}{2}(b_{ni} + b_{nj}) \tag{24}$$

As considerações acima permitem que se trabalhe não com os 12 valores nodais de 'b' mostrados na equação (22) e as funções de interpolação N_i, mas com:

$$b_x = \underset{\sim}{H}_x^*(L_2, L_3)\underset{\sim}{U}_f$$
$$b_y = \underset{\sim}{H}_y^*(L_2, L_3)\underset{\sim}{U}_f \tag{25}$$

onde: $\underset{\sim}{H}_x$ e $\underset{\sim}{H}_y$ são vetores de 9 componentes de novas funções de interpolação dadas em termos de N_i, e das coordenadas dos três nós do elemento. $\underset{\sim}{H}_x$ e $\underset{\sim}{H}_y$ são dados na referência [1]; e

$$\underset{\sim}{U}_f^* = (w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3}) \tag{26}$$

é o vetor de deslocamentos nodais de flexão do elemento.

Derivando a equação (25) conforme (21) obtém-se:

$$\underset{\sim}{\bar{k}} = \underset{\approx}{B}_f \underset{\sim}{U}_f \tag{27}$$

onde $\underset{\approx}{B}_f$ é dado por:

$$B_f(L_2,L_3) = \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} y_{31}\underset{\sim}{H}^*_{x,L_2} + y_{12}\underset{\sim}{H}^*_{x,L_3} \\ -x_{31}\underset{\sim}{H}^*_{y,L_2} - x_{12}\underset{\sim}{H}^*_{y,L_3} \\ -x_{31}\underset{\sim}{H}^*_{x,L_2} - x_{12}\underset{\sim}{H}^*_{x,L_3} + y_{31}\underset{\sim}{H}^*_{y,L_2} + y_{12}\underset{\sim}{H}^*_{y,L_3} \end{vmatrix} \tag{28}$$

onde as diferenças de coordenadas dos nós são: $x_{ij} = x_i - x_j$; $y_{ij} = y_i - y_j$; para i,j = 1,3, e A representa a área da superfície média do elemento.

A matriz de rigidez do elemento DKT para flexão torna-se [1]:

$$\underset{\approx}{K}_{DKT} = 2A \int_A \underset{\approx}{B}_f^* \underset{\approx}{D} \underset{\approx}{B}_f \, dA \tag{29}$$

3.2 Formulação do Elemento DKT-TL

Dadas as matrizes $\underset{\approx}{B}_f$ de flexão, dadas por (27) e (28), da formulação do elemento DKT e $\underset{\approx}{B}_m$ de membrana do elemento CST, (constant Strain Triangle Element) [6] [7], isto é,

$$\underset{\sim}{e}^o = \underset{\approx}{B}_m \underset{\sim}{U}_m \tag{30}$$

onde:

$$\underset{\sim}{U}_m^* = (u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3) \tag{31}$$

pode-se rearranjar $\underset{\approx}{B}_f$ e $\underset{\approx}{B}_m$ numa única matriz $\underset{\approx}{B}$ tal que:

$$[\underset{\sim}{e}^o \quad \underset{\sim}{k}]^* = \underset{\approx}{B}\,\underset{\sim}{U} \tag{32}$$

e,

$$\underset{\sim}{U}^* = (u_1\; v_1\; w_1\; \theta_{x1}\; \theta_{y1}\; u_2\; v_2\; w_2\; \theta_{x2}\; \theta_{y2}\; u_3\; v_3\; w_3\; \theta_{x3}\; \theta_{y3}) \tag{33}$$

onde u, v, são os deslocamentos de membrana nas direções x e y.

A energia de deformação é:

$$U = \frac{1}{2}\int_A \begin{bmatrix} \underset{\sim}{e}^o \\ \underset{\sim}{k} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \underset{\sim}{N} \\ \underset{\sim}{M} \end{bmatrix} dA \tag{34}$$

Usando a relação (9),

$$U = \frac{1}{2}\int_A \begin{bmatrix} \underset{\sim}{e}^o \\ \underset{\sim}{k} \end{bmatrix}^* \underset{\approx}{C} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{e}^o \\ \underset{\sim}{k} \end{bmatrix} d\,A \tag{35}$$

e substituindo as deformações através da relação (32) obtém-se:

$$U = \frac{1}{2}\int_A \underset{\sim}{U}^* \left[\underset{\approx}{B}^* \underset{\approx}{C}\underset{\approx}{B}\right] \underset{\sim}{U}\, dA \tag{36}$$

Efetuando-se a variação de U em relação a $\underset{\sim}{U}$ obtém-se a matriz de rigidez $\underset{\approx}{K}$ do elemento DKT-ML - DISKRETE KIRCHHOFF TRIANGLE ELEMENT - para MATERIAIS LAMINADOS:

$$\underset{\approx}{K} = \frac{1}{2}\int_A \underset{\approx}{B}^* \underset{\approx}{C}\underset{\approx}{B}\, dA \tag{37}$$

A matriz de rigidez do elemento é então modificada de forma a

incluir o deslocamento θ_z, antes de serem efetuadas as transformações de coordenadas do sistema local, equação (19), para o sistema global [2].

Uma vez que os deslocamentos w não são interpolados explicitamente na formulação do elemento, a derivação do vetor de forças nodais equivalentes devido ao carregamento normal distribuido é feito supondo um campo de deslocamentos linear sobre o elemento. Carregamentos distribuidos coplanares e carregamentos devido ao peso próprio, etc, são manipulados também de forma simples. O vetor de forças devido ao gradiente linear de temperatura ao longo da espessura do elemento pode ser obtido pela aplicação da variação da energia potencial E_T em relação a $\underset{\sim}{U}$,

$$\delta E_T = \frac{1}{2}\int_A \delta\underset{\sim}{U}^T \underset{\approx}{B}^* \begin{bmatrix} \underset{\sim}{N} \\ \underset{\sim}{M} \end{bmatrix}^T dA \tag{38}$$

que resulta:

$$\underset{\sim}{P}_T = \frac{1}{2}\int_A \underset{\approx}{B}^* \begin{bmatrix} \underset{\sim}{N} \\ \underset{\sim}{M} \end{bmatrix}^T dA \tag{39}$$

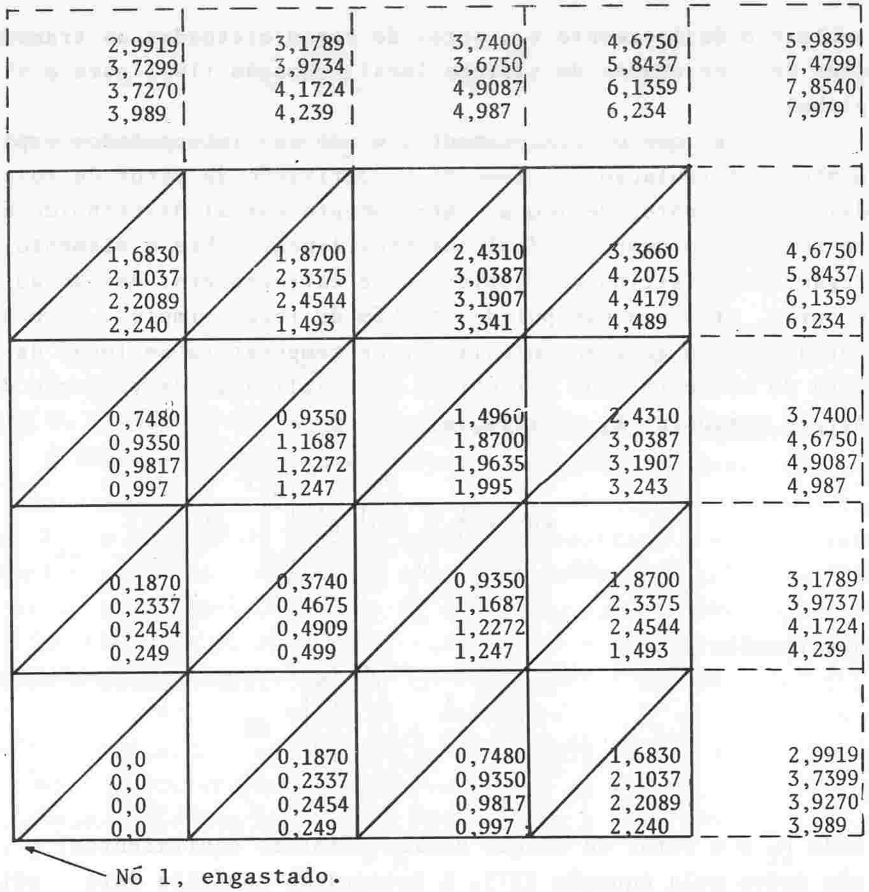
onde $\underset{\sim}{P}_T$ é o vetor de forças nodais térmicas equivalentes, $\underset{\sim}{N}^T$, $\underset{\sim}{M}^T$, são dados pela equação (17). A integração numérica deve utilizar três pontos para um elemento isotrópico e quatro pontos para um laminado, tendo em vista não apenas o grau quadrático das funções de interpolação mas também a possível variação linear em $\underset{\approx}{C}$.

4. Resultados

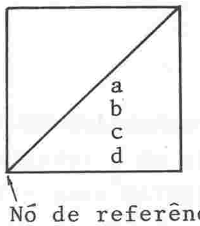
São mostrados a seguir dois modelos resolvidos utilizando-se o elemento DKT-ML.

4.1 Análise de uma Placa Isotrópica sob um Gradiente Linear de Temperatura

Foi modelada uma placa completa isotrópica [11] com uma malha conforme a Figura 1, submetida a uma diferença ΔT de temperatura



LEGENDA - DEFLEXÃO NORMAL w.



a - Solução obtida com o elemento DKT-ML, com 2 lâminas;

b - ídem, 4 lâminas;

c - ídem, 8 lâminas;

d - Solução Analítica.

unidades de w em metro vezes 10^3

igura 1. Malha utilizada e Deflexão de uma placa isotrópica sob um gradiente linear de temperatura ao longo da espessura.

ao longo de sua espessura de 20ºC, e engastada em um de seus nós. Para ter bem representado o efeito de acoplamento extensão-flexão foi idealizada a placa com uma superposição de lâminas iguais e isotrópicas. Na Figura 1 tem-se as configurações finais para a placa quando se consideram 2, 4, e 8 lâminas. Comparando-se com a solução analítica em cada ponto nota-se boa convergência com o aumento do número de lâminas. Nota-se também o alto grau de simetria obtidos em todas as soluções. A solução teórica foi obtida da Referência [9]. Os dados do modelo analizado são:

$E_1 = E_2 = 0{,}106.10^{12}Pa$	$\Delta T = 20ºC$
$\nu_{12} = 0{,}324$	Placa: 32 elementos
$\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}187.10^{-4}/ºC$	Espessura = $1{,}2.10^{-3}m$
$G_{12} = 0{,}401.10^{11}Pa$	Lado = $32{,}0.10^{-2}m$
	Engaste no nó 1.

4.2 Análise de uma Placa Anisotrópica

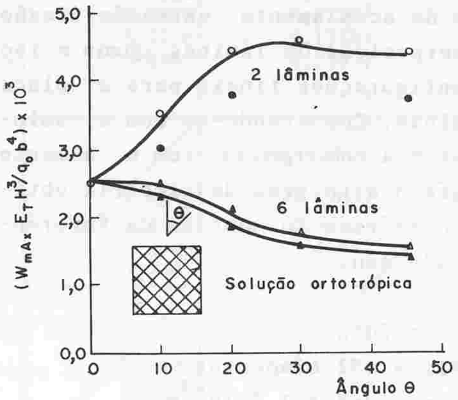
Foi modelada uma placa regular antisimétrica com lâminas orientadas angularmente, simplesmente apoiada, com malhas N = 2 e N=4 em placa completa [11]. As malhas 2 e 4 são regulares e possuem 32 e 128 elementos. Os valores das propriedades usadas estão mostradas na Figura 2, e são proporções típicas para compostos de grafite-epoxi de alto módulo de elasticidade. Os resultados estão mostrados e comparados à solução teórica, (obtidas nas referências [3] e [4]) na Figura 2. Foram solucionados os problemas de placa com 2 e 6 lâminas, com as orientações $(-\theta/\theta)$ e $(-\theta/\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta)$ respectivamente.

Observando-se os resultados nota-se que:

a) a convergência do elemento não é monotônica como se nota na Figura 3, embora para materiais isotrópicos saiba-se que o elemento DKT apresente convergência monotônica [1];

b) o erro varia com a malha utilizada, com o ângulo de orientação das lâminas e com o número de lâminas, diferentemente também dos materiais isotrópicos;

c) uma malha menos refinada como a N = 2 é mais sensível à variação no número de lâminas; numa malha mais refinada, a curva de erro versus θ é particularmente a mesma quando é variado o número de lâminas. Figura 3.



SOLUÇÃO ANALÍTICA

• 2 lâminas, malha 32 elementos

∘ 2 lâminas, malha 128 elementos

▲ 6 lâminas, malha 32 elementos

△ 6 lâminas, malha 128 elementos

$E_1/E_2 = 40$

$a/h = 50$

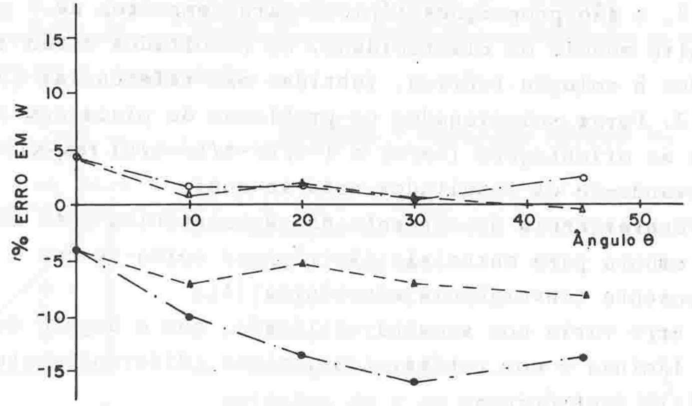
$G_{12}/E_2 = 1$

$q = q_o \operatorname{sen}\frac{x}{a} \operatorname{sen}\frac{y}{b}$

a,b = comprimento dos lados da placa nas direções x,y.

Figura 2. Deflexão máxima de uma placa anisotrópica quadrada com lâminas oblíquas sob carga normal senoidal.

d) quanto à variação do erro com θ, Figura 3, de forma geral, próximo de θ = 0 se situam os melhores resultados, entre 15° e 35° os piores, próximo a 45° apresenta uma leve melhoria.



• 2 lâm. malha 32, ∘ 2 lâm. malha 128,

▲ 6 lâm. malha 32, △ 6 lâm. malha 128.

Figura 3. Erro na deflexão no centro da placa da Figura 2.

A explicação exata à observação a) seria bastante complexa porém pode-se supor que o comportamento seja devido a presença de elemento CST que possui uma convergência inferior. A maior parte do comportamento do elemento DKT-ML neste exemplo, porém é relacionada ao tipo de apoio utilizado na placa, que restringe deslocamentos normais nos bordos, mas permite deslocamentos tangênciais. Este tipo de apoio permite que o acoplamento membrana-flexão tenha liberdade de condicionar a configuração final da placa mais livremente: os pontos dos bordos correm tangencialmente e as linhas de derivada zero de w inclinam-se em relação as linhas de simetria da placa. Estes fatos explicam o pico atingido por w na Figura 2 para 2 lâminas, onde o acoplamento é máximo. Isto também impede que se modele apenas um quarto de placa em problemas deste tipo, uma vez que não se pode usar nos bordos internos a condição de contorno de $w_{,n}$ nula. Para uma malha N = 2, o fato de que os resultados são sensivelmente melhores para 6 lâminas que para 2 é compreensível uma vez que para 2 lâminas o acoplamento é maior e é exigido um melhor desempenho do elemento de membrana, o CST. Este elemento porém tem o campo de deformação linear e com uma malha pequena como N = 2 o modelo se torna mais rígido, aumentando o erro de 6 para 2 lâminas. Com o uso de uma malha mais refinada a limitação do elemento CST perde importância e o comportamento do elemento DKT-ML passa a se tornar mais indiferente ao número de lâminas.

5. Conclusão

Observando os resultados mostrados pode-se admitir que são razoavelmente bons, levando-se em consideração o tipo de elemento usado, o triangular plano, e os problemas inerentes a um material como o laminado.

Outros elementos podem ser implementados e testados em cascas de materiais compostos, sempre se levando em conta a eficiência computacional em termos de tempo de CPU, memória, facilidade de entrada de dados e precisão. Estes fatores se tornam mais críticos num programa de elementos finitos quando aplicados a materiais compostos devido à carga extra de cálculos e valores a armazenar que estes acarretam.

REFERÊNCIAS

1. BATHOZ, J. L.; BATHE, K. J.; HO, L. W. A study of three-node triangular plate bending elements. Journal for Numerical Methods en Engeneering. 15:1771-1812, 1980.

2. BATHE, K. J. & HO, L. W. Non linear finite element ànalysis in structural Mechanics. Berlim, Wunderlich-Stein-Bathe, 1980, p. 122-150.

3. WHITNEY, J. M. & LEISSA, A. W. Analysis of heterogeneous anisotropic plates. Journal of Applied Mechanics. New York, 36(2):261-266, Jun, 1969.

4. JONES, R. M. Mechanics of composite materials.2. ed. Washington, McGraw-Hill, 1975. p. 355.

5. CHRISTENSEN, R. M. Mechanics of composite materials. New York, J. Wiley, 1979. 388p.

6. BREBBIA, C. A. & FERRANTE, S. The finite element technique. Porto Alegre, edições URGS, 1975. 410p.

7. ZIENKIEWICZ, O. C. The finite element method in engineering science. 2. ed. London, McGraw-Hill, 1971. 566p.

8. TIMOSHENKO, S. & WOINOWSKY-KRIEGER, S. Theory of plates and shells. New York, McGraw-Hill, 1959. p.180-218.

9. BOYLEY, B. A. & WEINER, J. H. Theory of thermal stresses. 4.ed. New York, J. Wiley, 1967. p.137.

10. BORESI, A. P. & LYNN, P. P. Elasticity in Engineering Mechanics. New Jersey, Prentice-Hall, 1974. 277p.

11. MENDONÇA, P. T. R. Uma formulação de elemento finito para cascas delgadas multilaminadas, Tese de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 1983.