VIII COBEM – S. J. Campos, SP (Dez. 1985)

OTIMIZAÇÃO DE TENSÕES TÉRMICAS EM JUNTAS CÔNICAS

LUIZ HENRY MONKEN E SILVA
DME-U.E. MARINGÁ-PARANÁ
CLÓVIS SPERB DE BARCELLOS
DEPTO. ENG. MEC.-UFSC

SUMÁRIO

As características térmicas numa região de transição que une dois tubos cilíndricos longos de diâmetros diferentes, podendo ter coeficiente de expansão térmica e temperatura distintas, são otimizadas com a finalidade de minimizar as tensões térmicas. O emprego do critério da Máxima Tensão Cisalhante, permite o uso de Programação Linear na otimização do carregamento que é de natureza térmica.

INTRODUÇÃO

A união de tubos cilíndricos de diâmetros diferentes, é freqüente em estruturas dos setores aeroespacial nuclear, petroquímico, entre outros. Muitas vezes os tubos apresentam também, características térmicas diversas. Nessas uniões a junta mais utilizada é a cônica circular reta com junções soldadas. Em tal situação a região de transição estará sendo submetida à fadiga térmica por flutuações de temperatura [1].

Nas imediações de variações bruscas de diâmetro, obtidas através de junções soldadas, se desenvolvem tensões muito elevadas que podem ultrapassar as tensões admissíveis de trabalho do material, causando, em decorrência falhas no mesmo. Para se ter idéia da ordem de grandeza das tensões, dois tubos cilíndricos de diâmetros e espessuras iguais, que tenham coeficientes de expansão térmica diversos cuja diferença seja de $6x10^{-6}/°C$ sujeitos a um desnível de temperatura de 540°C, resulta uma tensão térmica de aproximadamente $190MN/m^2$ [2].

Desta forma, as propriedades mecânicas e térmicas das transições soldadas podem desempenhar importantes funções, a fim de reduzirem as tensões térmicas introduzidas pelas flutuações da temperatura. Sabe-se que as técnicas de fabricação possibilitam certo controle sobre aquelas propriedades. Em vista disso, é razoável indagar: a) em uma união soldada de tubos com coeficientes de expansão térmica diversos, qual é a máxima diferença que os mesmos podem ter, para que as tensões ao longo da estrutura estejam dentro de limites admissíveis? b) Qual é a sua distribuição para que isto seja possível? Perguntas análogas podem ser feitas com relação às temperaturas.

Este trabalho apresenta a metodologia desenvolvida em [3], para abordar os problemas referidos acima, considerando uniões de tubos cilíndricos de diâmetros diferentes por meio de juntas cônicas retas. A abordagem permite também maximizar o gradiente de temperatura entre as extremidades da junta, fornecendo sua distribuição.

Na segunda seção, descreve-se a modelagem realizada, apresenta-se o modelo matemático para o problema e indica-se o método de solução adotado. Os resultados obtidos são apresentados e discutidos na terceira seção, que é seguida pelas conclusões.

MODELO MATEMÁTICO, MÉTODO DE SOLUÇÃO

Modelo Matemático. Considere-se o material da estrutura, ilustrada na figura 1, elástico homogêneo e isotrópico. Supõe-se que seus elementos estruturais possam ser considerados como cascas elásticas finas. Os tubos são modelados como cascas cilíndricas semi-infinitas enquanto que a junta cônica é considerada curta, isto é, há interação de efeito entre as bordas.

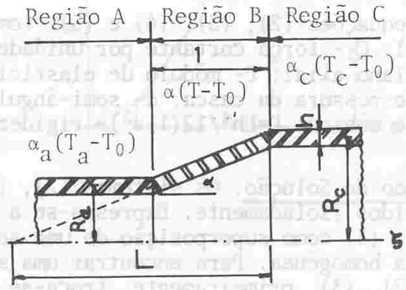

Fig. 1- Def. da geometria. Características térmicas

O carregamento é somente de natureza térmica. As tensões e deformações são provenientes de variações da temperatura, ou do coeficiente de expansão térmica ou ainda de ambos, porém, restritos à direção axial da estrutura. Como exemplos desse carregamento tem-se: a) o caso em que as junções acabaram de ser soldadas, resultando, então, uma distribuição axial de temperatura na região de transição; b) o caso da realização de um resfriamento.

Usa-se a teoria de cascas de Kirchhoff-Love e as equações empregadas são as apresentadas em [4]. Assim, o parâmetro controlador da distribuição de tensões na região cônica é dado por $\zeta.d\psi/d\zeta$, onde ζ é a coordenada axial e

$$\psi(\zeta)=\alpha(\zeta)\left[T(\zeta)-T_0\right], \tag{1}$$

sendo $\alpha(\zeta)$- coeficiente de expansão térmica; $T(\zeta)$- distribuição de temperatura; T_0- temperatura de referência. Por sua vez, das equações de equilíbrio das partes cilíndricas, tem-se que as tensões ali, são controladas por $d\psi/d\zeta$, como adiante se poderá observar. Por conveniência foi suposta uma distribuição arbitrária para a derivada de $\psi(\zeta)$. A determinação desta distribuição é feita com a finalidade de minimizar os danos causados pela fadiga térmica. Os danos, considera-se minimizados quando as tensões térmicas são minimizadas. Isto não é uma conseqüência necessária, já que podem existir certos tipos de juntas que envolvam a formação de regiões de material com baixa resistência à fadiga [1]. Contudo, devido a falta de informações experimentais, supõe-se que as propriedades de fadiga na junta sejam uniformes e que, reduzindo o campo de variação das tensões, pode-se aumentar a sua vida.

O coeficiente de expansão térmica é suposto variar de α_a à α_c e a temperatura desde T_a à T_c que são os coeficientes e temperaturas das partes cilíndricas. A variação da temperatura ocorrerá gradativamente desde T_0 até a atual, de tal modo que os efeitos transitórios possam ser desprezados.

Isto posto, o problema pode ser colocado matematicamente como o de: determinar a distribuição do parâmetro $d\psi/d\zeta$, que maximiza a diferença $|\psi_c-\psi_a|$, mantendo as tensões axial e circunferencial, σ_1 e σ_2, restritas a uma hipersuperfície admissível no espaço de tensões.

As equações de equilíbrio da parte cônica são encontradas através de procedimento análogo ao desenvolvido em [4] e são expressas na forma:

$$\zeta\frac{d^2\chi_1}{d\zeta^2} + \frac{d\chi_1}{d\zeta} - \frac{\chi_1}{\zeta} = \frac{L^2}{D\cos^2\alpha}(Q_1\zeta), \tag{2}$$

$$\zeta\frac{d^2}{d\zeta^2}(Q_1\zeta) + \frac{d}{d\zeta}(Q_1\zeta) - \frac{(Q_1\zeta)}{\zeta} = -\frac{Eh}{tg^2\alpha}\chi_1 - \frac{Eh}{tg\alpha}\zeta\frac{d}{d\zeta}\left[\alpha(\zeta)T(\zeta)\right]. \tag{3}$$

As das partes cilíndricas são:

$$\frac{d^2\chi_1}{d\zeta^2} = \frac{L^2 Q_1}{D}, \tag{4}$$

$$\frac{d^2(Q\,a)}{d\zeta^2} = -\frac{L^2 Eh\chi_1}{a} - \frac{LEhd}{d\zeta}\left[\alpha(\zeta)T(\zeta)\right]. \tag{5}$$

Nas equações (2), (3), (4) e (5), tem-se: χ_1- rotação axial; Q_1- força cortante por unidade de comprimento no plano axial; E- módulo de elasticidade longitudinal; h- espessura da casca; α- semi-ângulo de abertura da parte cônica; $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$- rigidez flexional da casca.

Método de Solução. Os sistemas (2), (3) e (4), (5) são resolvidos isoladamente. Expressa-se a solução geral de (2), (3) como superposição de uma solução particular com a homogênea. Para encontrar uma solução particular de (2), (3), primeiramente, troca-se a variável ζ por $y=\sqrt{\zeta}$. Depois, expande-se (Q_1y^2), χ_1 e $\zeta d\psi/d\zeta$ em séries de funções de Bessel, na forma:

$$Q_1^p y^2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_2(\lambda_n y); \tag{7}$$

$$\chi_1^p = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_2(\lambda_n y); \tag{8}$$

$$\zeta\frac{d\psi}{d\zeta} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_2(\lambda_n y); \tag{9}$$

onde: J_2- função de Bessel de primeira espécie e segunda ordem; λ_n- zeros positivos de J_2. Em (9), a_n é definido por [5]:

$$a_n = \{2/[J_3(\lambda_n)]^2\}\int_0^1 \zeta\frac{d\psi}{d\zeta}J_2(\lambda_n y)\,y\,dy. \tag{10}$$

Substituindo (7), (8) e (9) em (2), (3) transformadas, rearranjando termos e usando o fato de que a função de Bessel $J_2(\lambda_n y)$ satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{d^2V}{dy^2} + \frac{1}{y}\frac{dV}{dy} + \left(\lambda_n^2 - \frac{4}{y^2}\right)V = 0, \tag{11}$$

obtém-se:

$$B_n = -\frac{\mu_b^4 a_n tg\alpha}{\lambda_n^4+\mu_b^4} \quad e \quad A_n = \frac{4Eha_n}{\lambda_n^2 tg\alpha}\left(1 - \frac{\mu_b^4}{\lambda_n^4+\mu_b^4}\right), \tag{12}$$

onde se define: $\mu_b^4=192(1-\nu^2)(L/h)^2/(sen\alpha)^2$- que é um parâmetro da casca. Tem-se a determinar ainda, os coeficientes a_n. Para tanto, expande-se $\zeta d\psi/d\zeta$ em série de Heaviside [6], substitui-se o resultado em (10) e efetua-se as integrais, obtendo-se:

$$a_n = \frac{2}{\lambda_n J_3(\lambda_n)^2}\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k\left[J_3(\lambda_n) - (\sqrt{\zeta_k})^3 J_3(\lambda_n\sqrt{\zeta_k})\right], \tag{13}$$

onde: J_3- função de Bessel de primeira espécie e 3ª ordem [7]; β_k- k-ésimo termo da série de Heaviside do termo de carga; N- número de termos retidos na série de Heaviside. Com isto, a solução particular de (2), (3) ficou determinada na forma:

$$Q_1^p\zeta = \frac{8Eh}{tg\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{N-1}\left[\lambda_n^4 D_n C_{n,k}\beta_k J_2(\lambda_n y)\right], \tag{14}$$

$$\chi_1^p = -2\mu_b^4 tg\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{N-1}\left[\lambda_n^2 D_n C_{n,k}\beta_k J_2(\lambda_n y)\right], \tag{15}$$

onde se define:

$$D_n = 1/\{\lambda_n^3[J_3(\lambda_n)]^2(\lambda_n^4+\mu_b^4)\}, \tag{16}$$

$$C_{n,k} = J_3(\lambda_n) - (\sqrt{\zeta_k})^3 J_3(\lambda_n\sqrt{\zeta_k}). \tag{17}$$

Para ambos os sistemas, a solução homogênea pode ser encontrada sem dificuldades [3], [4], [5] e [7]. Desta forma a solução geral para a parte cônica ficou sendo:

$$\chi_1 = A_1 ber_2(\mu_b y) + A_2 bei_2(\mu_b y) + A_3 Ker_2(\mu_b y) + A_4 Kei_2(\mu_b y) - 2\mu_b^4 tg\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{N-1}\lambda_n^2 D_n C_{n,k}\beta_k J_2(\lambda_n y), \tag{18}$$

$$\frac{Q_1}{Eh} = \frac{\mu_b^2\cos^2\alpha}{48(1-\nu^2)}\left[A_2 ber_2(\mu_b y) - A_1 bei_2(\mu_b y) + A_4 Ker_2(\mu_b y) - A_3 Kei_2(\mu_b y)\right] + \frac{8}{tg\alpha}\frac{1}{y^4}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{N-1}\lambda_n^4 D_n C_{n,k}\beta_k J_2(\lambda_n y). \tag{19}$$

Para as partes cilíndricas, como $\psi(\zeta)$ é constante nestas partes, então o sistema (4), (5) é homogêneo. Levando em consideração que estas regiões são semi-infinitas, a solução

$$\chi_1 = e^{\mu_a\zeta}(B_1\cos\mu_a\zeta + B_2\mu_a\zeta), \quad \zeta<R_a/R_c; \tag{20}$$

$$Q_1 = 2\mu_a^2(D/L^2)e^{\mu_a\zeta}(B_2\cos\mu_a\zeta - B_1 sen\mu_a\zeta), \quad \zeta<R_a/R_c; \tag{21}$$

$$\chi_1 = e^{-\mu_c\zeta}(D_3\cos\mu_c\zeta - D_4 sen\mu_c\zeta), \quad \zeta>1, \tag{22}$$

$$Q_1 = 2\mu_c^2(D/L^2)e^{-\mu_c\zeta}(D_4\cos\mu_c\zeta + D_3 sen\mu_c\zeta), \quad \zeta>1. \tag{23}$$

Em (20), (21), (22) e (23), A_i, D_i, i=1,4 são constantes de integração.

A análise da estrutura envolve, então, dez constantes arbitrárias (duas são provenientes das equações de equilíbrio para forças normais). Para determiná-las, separa-se a estrutura nas junções entre as cascas, deixando-as se deformarem livremente sob ação da carga térmica. A fim de restaurar a continuidade da estrutura, introduz-se reações internas, que são as solicitações que cada região transmite à adjacente através da junta. Impondo-se a condição de equilíbrio da estrutura às junções, encontra-se as constantes em termos das reações de descontinuidade. Em seguida, usa-se a condição de compatibilidade de deslocamentos e rotações através das junções, para determinar as reações de descontinuidade em função dos termos do carregamento. O procedimento completo apesar de ser direto é longo e está apresentado em [3]. Desta forma, todos os parâmetros da estrutura: deformações, deslocamentos, rotações e tensões, ficam expressos em função dos coeficientes β_k da série de Heaviside do termo de carregamento.

Otimização. Emprega-se a técnica de programação linear para realizar a otimização das tensões térmicas. Deseja-se maximizar a diferença do parâmetro $\psi(\zeta)$ entre as extremidades da junta cônica, mantendo as tensões restritas a uma determinada hiper-superfície do espaço de tensões da estrutura.

A diferença $\Delta\psi=\psi_c-\psi_a$, é relacionada com os coeficientes β_k através de:

$$\psi_c - \psi_a = \sum_{k=1}^{N-1}\beta_k(1-\zeta_k), \tag{24}$$

que é a função objetivo [9] a ser maximizada. A hiper-superfície de restrição das tensões é fornecida pelo critério de projeto a ser adotado. As falhas que ocorrem em estruturas do tipo em estudo são ocasionadas principalmente por fadiga térmica e escoamento do material, uma vez que o carregamento é de natureza térmica. Sendo assim, seria apropriado o emprego do critério da Máxima Energia de Distorção [11]. Todavia, como a superfície de tensão limite ao escoamento deste critério é não linear usa-se o critério da Máxima Tensão Cisalhante, que tem uma superfície seccionalmente linear. O seu uso é justificável, ainda, pelo fato de ser um critério conservativo e fornecer valores de tensões limites que diferem no máximo em 15% em relação aos dados pelo da Máxima Energia de Deformação [10]. Como a variação das tensões meridionais e circunferenciais σ_1, σ_2, respectivamente, através da espessura das cascas é linear, basta que as restrições sejam satisfeitas nas faces internas e externas da estrutura. A hiper-superfície de restrição passa a ser dada então, por:

$$\left|\frac{\sigma_2^e}{E} - \frac{\sigma_1^e}{E}\right| < \frac{\sigma_W}{E}; \quad \left|\frac{\sigma_2^e}{E}\right| < \frac{\sigma_W}{E}; \quad \left|\frac{\sigma_1^e}{E}\right| < \frac{\sigma_W}{E}, \tag{25}$$

$$\left|\frac{\sigma_2^i}{E} - \frac{\sigma_1^i}{E}\right| < \frac{\sigma_W}{E}; \quad \left|\frac{\sigma_2^i}{E}\right| < \frac{\sigma_W}{E}; \quad \left|\frac{\sigma_1^i}{E}\right| < \frac{\sigma_W}{E}, \tag{26}$$

onde os sobre índices "e", "i", indicam face externa e interna, respectivamente e σ_W é uma tensão admissível efetiva. Admitindo-se uma expansão em série de Heaviside para o termo de carregamento e aplicando-se as restrições em um número suficiente de pontos da estrutura, obtém-se as equações do problema de programação linear.

RESULTADOS OBTIDOS

Exemplos. Resolve-se dois exemplos, considerando-se duas geometrias de juntas. O primeiro exemplo tem as seguintes características: $R_C/h=200$, $R_a/h=80$, $L/h=100$, $\nu=0,3$. O segundo tem: $R_C/h=200$, $R_a/h=60$, $L/h=100$, $\nu=0,3$ Estes exemplos são resolvidos em duas etapas: primeiro, obtém-se os coeficientes das variáveis β_k, que aparecem nas equações (25) e (26); segundo, otimiza-se $\Delta\psi$ por meio de programação linear. A obtenção dos coeficientes das equações de restrições é realizada através de um programa elaborado para este fim. Na etapa de otimização usa-se o programa IBM LP-MOSS. O sistema computacional empregado foi o IBM 1130, configuração 16K.

Os dois exemplos foram resolvidos, retendo-se um número muito pequeno de termos na série de Heaviside do carregamento e aplicando as restrições em um número reduzido de pontos da estrutura. Estas limitações, indesejáveis, foram impostas, por um lado, pelo elevado tempo de processamento dispendido para cálculo dos coeficientes que entram nas restrições. Por outro lado, pelo proibitivo tempo de computação do LP-MOSS para problemas de porte médio.

Alguns resultados são mostrados a seguir. Na figura 2, apresenta-se a distribuição $\psi(\zeta)$ obtida para o primeiro exemplo, admitindo-se:

$$\frac{d\psi}{d\zeta} = \sum_{k=1}^{10} \beta_k H(\zeta-\zeta_k), \tag{27}$$

onde $H(\zeta-\zeta_k)$ é a função de Heaviside e os pontos ζ_k são igualmente espaçados ao longo da região de transição. As restrições foram aplicadas também em 10 pontos da estrutura, com ζ_k coincidente com as separações das funções de Heaviside.

Na figura 3, apresenta-se os resultados obtidos para o primeiro exemplo porém, agora, retendo-se 5 termos na série de Heaviside e aplicando-se as restrições nos mesmos cinco pontos, colocados igualmente espaçados na junta. Nas figuras 4 e 5, mostra-se os resultados obtidos para o segundo exemplo retendo-se respectivamente 10 e 5 termos na série de Heaviside e aplicando-se as restrições, em ambos os casos, em cinco pontos igualmente espaçados da junta.

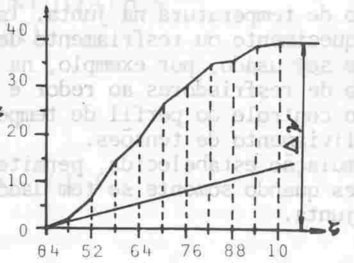

Fig. 2- Distribuição de $\psi(\zeta)$
Primeiro exemplo

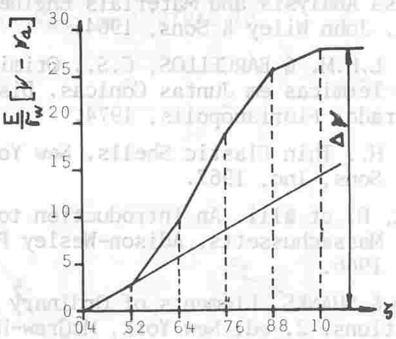

Fig. 3- Distribuição de $\psi(\zeta)$
Primeiro exemplo

Discussão. Várias aproximações foram feitas na implementação computacional realizada. As funções de Kelvin e suas derivadas foram calculadas através de desenvolvimentos assintóticos. As cinco primeiras raizes de $J_2(x)=0$ foram tiradas de tabela. Da sexta em diante elas foram geradas adicionando-se, à anterior, o valor π [7]. As funções de Bessel para argumentos pequenos (<10) foram calculadas pela subroutina IBM, BESJ, e para grandes, >10, usa-se desenvolvimento assintótico [7].

As tensões se apresentam expandidas em séries de Bessel e a convergência é sempre lenta, requerendo a retenção de muitos termos. Dai o tempo de processamento para obtenção das restrições ser elevado.

Quanto a precisão dos resultados, não se tem como compará-los. Entretanto as distribuições conseguidas tem a forma adequada e dos quadros de resultados gerados pelo LP-MOSS, observa-se que quase todos os pontos da junta estão no limite de solicitação. Por outro lado, é conveniente referir-se à aspectos de erros computacionais. Superpondo-se aos erros de truncamentos que decorrem da retenção de um número finito de termos nas séries usadas, tem-se os erros de arredontamentos. Quanto aos primeiros, para uma boa aproximação da distribuição $\psi(\zeta)$, a separação das funções de Heaviside deveriam ser da ordem de 0,001 (para seguir a orientação de [1]) sendo as restrições aplicadas em incrementos da mesma ordem. Só assim, obter-se-ia a distribuição detalhadamente e ter-se-ia certeza que as tensões estariam dentro da hiper-superfície de tensões admissíveis. Quanto aos segundos, além do extenso tratamento numérico tem-se a considerar o comportamento das quantidades manipuladas. Nos exemplos resolvidos as funções de Kelvin ber_2, bei_2 estão na faixa entre 10^5 e 10^{11} enquanto que as funções Ker_2 e Kei_2, estão entre 10^{-5} e 10^{11}. Partindo destes valores, chega-se a coeficientes que são da ordem de centésimos, com os cálculos retendo apenas 10 dígitos significativos.

CONCLUSÃO

O método de programação linear é aplicado para determinar uma distribuição para a função $\psi(\zeta)=\alpha(\zeta)T(\zeta)$ em uma junta cônica soldada, tal que as tensões térmicas sejam minimizadas. Caso a temperatura seja conhecida obtém-se o coeficiente de expansão térmica $\alpha(\zeta)$, através da junta. Caso $\alpha(\zeta)$ seja conhecido, obtém-se a distribuição de temperatura na junta. Isto tem aplicabilidade em aquecimento ou resfriamento de tubulações cônicas e pode ser usado, por exemplo, na otimização da distribuição de resfriadores ao redor e ao longo da tubulação e no controle do perfil de temperatura em processos de aliviamento de tensões.

A formulação estabelecida, permite também a análise de tensões quando somente se tem dados experimentais de $\psi(\zeta)$ na junta.

REFERÊNCIAS

[1] GOODALL, I.W. & WHITWAN, C.M.. On Optimizing Thermal Stress in Cilindricall Shells. Int. J. Mech. Sci. Great Britain, 15, 1973.

[2] FAUPEL, J.H.. Engineering Design. A Synthesis of Stress Analysis and Materials Engineering. New York, John Wiley & Sons, 1964.

[3] SILVA, L.H.M. & BARCELLOS, C.S.. Otimização de Tensões Térmicas em Juntas Cônicas. Dissertação de Mestrado, Florianópolis, 1974.

[4] KRAUS, H.. Thin Elastic Shells. New York, John Willy & Sons, Inc, 1967.

[5] KRIDER, D. et alii. An Introduction to Linear Analysis. Massachussetts, Adison-Wesley Publishing Co. Inc, 1966.

[6] GOLONB & SHANKS. Elements of Ordinary Differential Equations. 2. ed. New York, McGraw-Hill Book Co., 1965.

[7] ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I.A.. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. New York, Dover Publications, Inc 1965.

[8] BALTRUKONIS, J,H.. Influence Coefficients for Edge-Loaded Short, Thin, Conical Frustums. J. Appl. Mech., 26: 241-246, 1959.

[9] DANTZIG, G.B.. Linear Programming and Extensions. Princeton, Princeton University, 1963.

[10] NADAI, A.. Theory of Flow and Fracture Solids. 2. ed. New York, McGraw-Hill Book Co., Inc, 1950. v. 1.

[11] JUVINAL, R.C.. Stress Strain, and Strength. New York, McGraw-Hill Book Co., 1967.

SUMMARY

Conditions within a transition region that connects two long circular cilindrical shells of diferents dimensions and coefficent of thermal expansion, or temperature, are optimized. Using the Maximum Shear Stress theory as design criterion, the restricted surface in stress space, is piecewise linear. This linearity permit the use of the Linear Programming in the optimization of the load therms.

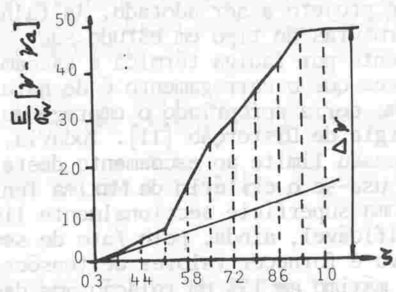

Fig. 4- Distribuição de $\psi(\zeta)$
Segundo exemplo

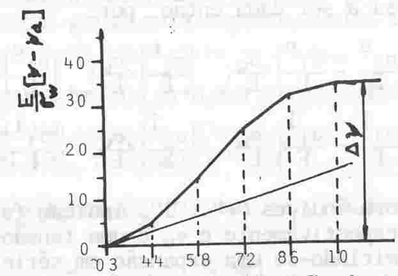

Fig. 5- Distribuição de $\psi(\zeta)$.
Segundo exemplo