VIII COBEM – S. J. Campos, SP (Dez. 1985)

"REVIEW" SOBRE O MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PLACAS ELÁSTICA

LUIZ HENRY MONKEN E SILVA
DME — U.E. MARINGÁ
CLÓVIS SPERB DE BARCELLOS
DEPARTAMENTO DE ENG. MECÂNICA — U.F.S.C.

SUMÁRIO

Neste trabalho, apresenta-se uma revisão sobre aplicações de métodos integrais para problemas de placas elásticas. Descreve-se as metodologias usadas para obtenção das formulações integrais mais empregadas, suas estruturas, propriedades e implementações numéricas. Sintetiza-se os principais resultados em forma tabular, o que possibilita uma avaliação qualitativa entre os métodos revistos.

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por objetivo rever a pesquisa realizada a partir da década de sessenta sobre métodos integrais para solução numérica de problemas de placas elásticas. Neste período houve acentuado desenvolvimento computacional de tais métodos e diversas formulações integrais surgiram para o referido problema. Suas características são aqui analisadas.

Na segunda seção, apresenta-se os conceitos básicos dos métodos integrais e o problema de placas na forma diferencial. As formulações, suas estruturas, vantagens, desvantagens e propriedades bem como suas implementações, são tratadas na terceira seção. Na quarta seção, comenta-se alguns resultados obtidos e a eficiência dos métodos.

CONCEITOS BÁSICOS

Os métodos integrais se fundamentam em relações funcionais entre quantidades no domínio, Ω, e no contorno, $\partial\Omega$. Através de limites estas relações ficam definidas apenas no contorno $\partial\Omega$. Quando a relação funcional é obtida por meio de distribuições singulares em $\partial\Omega$, cujas intensidades são determinadas a fim de satisfazer as condições de contorno, o método é denominado indireto. Quando a representação integral emprega uma relação de reciprocidade ou de energia, o método é direto [1], [2].

Agora, considere-se uma placa elástica, fina, de espessura constante, construida de material isotrópico homogêneo, ocupando uma região $\Omega \subset R^2$ com contorno $\partial\Omega$, sujeita a carga transversal por unidade de área, f, modelada pela teoria de Kirchhoff [3]. O deslocamento transversal, w, satisfaz a equação [3], [4], [5]:

$$D\nabla^4 w+\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(P,t),\ P\in\Omega; \tag{1}$$

onde: $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$- rigidez a flexão; ρ- massa específica; ν- módulo de Poisson; E- módulo de elasticidade; h- espessura da placa e $\nabla^4=\nabla^2\nabla^2$- operador biharmônico.

As condições de contorno são:

$$\begin{aligned} &Tr(w)=\overline{w},\ \forall p\in\partial\Omega^{w};\quad Tr\,\partial w/\partial m=\overline{\theta},\ \forall p\in\partial\Omega^{\theta};\quad \partial\Omega^{w}\cap\Omega^{V}=\phi \\ &Tr[M(w)]=\overline{M},\ \forall p\in\partial\Omega^{M};\ Tr[V(w)]=\overline{V},\ \forall p\in\partial\Omega^{V};\ \partial\Omega^{\theta}\cap\partial\Omega^{M}=\phi \end{aligned} \tag{2}$$

onde: $M(.)$; $V(.)$; $\theta=\partial n(.)$; $T(.)$; $Q(.)$-são os operadores momento normal, força cortante equivalente, rotação normal, momento torsor e força cortante, respectivamente, definidos em $\partial\Omega$: $Tr[g(p)]=\ell img(P)$, quando $P\to p$.

O problema estático ((1) com $\partial^2w/\partial t^2=0$, se reduz a uma equação biharmônica não homogênea) foi o que mais recebeu atenção dos pesquisadores. A aplicação de formulação integral em problemas de placas, parece se iniciar com os trabalhos de Jaswon et alii [6] e Jaswon & Maiti [7]. Nestes trabalhos, representa-se uma função biharmônica por meio de duas funções potenciais. Entretanto o método indireto mais empregado [8], [9], [10], [11], consiste em escrever o deslocamento, w, como superposição do deslocamento w_0- devido ao carregamento externo e dos deslocamentos w_F, w_M- devido distribuição, em $\partial\Omega$, de linhas de forças e momentos concentrados, de intensidades desconhecidas. Estas, são determinadas a fim de que as condições de contorno sejam satisfeitas.

O teorema de Betti-Rayleigh [12] para placas [9],

$$\iint_{\Omega}[f_A w_B-f_B w_A]dS+\int_{\partial\Omega}[V_A w_B-M_A\theta_B-V_B w_A+M_B\theta_A]ds=0, \tag{3}$$

serve de partida para o estabelecimento de formulações integrais diretas. Em (3) os sub-índices A, B indicam dois estados elásticos e os demais parâmetros possuem o mesmo significado anterior. Idenficando um dos estados com o atual e o outro com o decorrente da solução fundamental biharmônica, obtém-se uma representação integral para w em Ω. Como se pode notar, em (3) as quantidades são as de interesse para o problema.

FORMULAÇÕES INTEGRAIS

As formulações são apresentadas, exceto algumas complementares, na ordem em que foram publicadas. Jaswon et alii em [6] trataram do problema biharmônico. Todavia a mesma formulação foi empregada em problemas de placas [7], [13]. O deslocamento w foi expresso como superposição de w_0, proveniente do carregamento externo, com W, que satisfaz a equação biharmônica. O problema diferencial é transformado para a forma integral ao adotar, para W, a representação:

$$W=r^2\phi + \psi,\quad \nabla^2\psi = 0 \tag{4}$$

No processo de solução (dos problemas harmônicos), expressa-se ϕ e ψ por meio de potenciais simples:

$$\phi(p)=\int_{\partial\Omega}\sigma(q)\,\ell grds_q;\quad \psi(p)=\int_{\partial\Omega}\zeta(q)\,\ell grds_q,\quad p\in\overline{\Omega}; \tag{5}$$

onde: $r=|p-q|$. Em seguida, substitui-se (5) em (4) e determina-se as densidades σ e ζ para satisfazer as condições de contorno. No limite ao contorno, se deve levar em consideração as descontinuidades em $\partial\phi/\partial n$ e $\partial\psi/\partial n$. Com ϕ e ψ determinadas, todos os parâmetros podem ser calculados. A representação (5) necessita modificações para atender a completividade, existência e unicidade da solução, em problemas de domínio infinito ou multi-conexos [6], [13].

A implementação numérica particiona o contorno em arcos. Em cada arco, supõe-se σ e ζ constantes e as socia-se seus valores a um ponto, geralmente central. denominado nodal. Este é o elemento constante. Aproxima-se o contorno por segmentos de retas. Usa-se o processo de colocação [14] para transformar o sistema integral em um algébrico linear. Usa-se a regra de Simpson ou a retangular para aproximar as integrais não singulares de núcleos logarítmicos ou de suas derivadas, respectivamente. Nestas regras emprega-se os comprimentos dos arcos e não os das cordas, no contorno. Arredonda-se os cantos, para evitar o problema de mal condicionamento do sistema provocado pelo comportamento irregular de potenciais duplos, perto deles.

Maiti & Chakrabarty em [15], desenvolveram formulação integral para o problema estático de placas que além de remover o mal condicionamento perto dos cantos, justifica matematicamente a presença de dois potenciais em (4). Entretanto, a formulação é específica para placas poligonais simplesmente apoiadas. Maiti & Chakrabarty, usaram a identidade de Rayleigh-Green [16] para domínio interior e depois para o exterior. Adotando técnica usual [2] de somar as representações obtidas para os dois problemas, encontra-se:

$$\phi(P)=\int_{\partial\Omega}\sigma(q)r^2(\ell gr-1)ds_q + \int_{\partial\Omega}\mu(q)\ell grds_q,\ P\in\Omega; \quad (6)$$

onde σ e μ são densidades de fontes, determinadas para satisfazer as condições de contorno. Calculando-se $\nabla^2\phi$ de (6), obtém-se a segunda equação que completa a formulação. Fazendo $P\to p\in\partial\Omega$, obtém-se as equações em $\partial\Omega$. Adotaram procedimento numérico análogo ao descrito em [6] e referido anteriormente.

Erik B. Hansen em [17] desenvolveu duas formulações específicas, para placas infinitas, contendo furos com arestas supostas livres, sob um sistema de forças e momentos em equilíbrio, no infinito. Novamente, a identidade de Rayleigh-Green aplicada à região interior e exterior à dos furos serviu para estabelecer as duas formulações. Uma delas se estrutura nas representações integrais no contorno de w e $\partial w/\partial n$; a outra nas de $\partial w/\partial n$, $\partial w/\partial t$ (derivada normal e tangencial ao contorno, respectivamente). O procedimento numérico, difere dos anteriores por aproximar as funções incógnitas através de "spline" [17], [18]. As integrais envolvidas sempre foram desmembradas em uma parte limitada e outra singular. As primeiras foram avaliadas por Romberg [19]. As últimas, tomadas na forma mais simples possível, foram calculadas analiticamente. O sistema discretizado apresenta bom condicionamento e foi resolvido por uma sub-routina convencional de eliminação.

Nicholas J..Altiero & David L. Sikarskie em [8] apresentaram formulação aplicável a geometrias quaisquer porém, devido a complexidade das equações, as aplicações só consideraram condições de engastamento. Fazendo-se a imersão da placa real em uma placa fictícia que se conheça a função de Green, distribuindo-se em $\partial\Omega$ linhas de força $\overline{P}(q)$ e momentos $\overline{M}(q)$, o deslocamento pode ser expresso por

$$w(P)=\iint_{\Omega}G(P,Q)f(Q)dS_Q+\int_{\partial\Omega}[G(P,q)\overline{P}(q)+H(P,q)\overline{M}(q)]ds_q \quad (7)$$

onde: $G(P,Q)$, é a função de Green da placa fictícia e $H(P,Q)=-\partial G(P,Q)/\partial n_Q$. As intensidades $\overline{P}$ e $\overline{M}$ são determinadas para satisfazer as condições de contorno. No esquema numérico, usaram elementos constantes. Calcularam as integrais não singulares pela regra trapezoidal simples [19], e as singulares analiticamente.

Uma abordagem diferente das anteriores foi desenvolvida simultâneamente por Bézine & Gambi em [20] e Stern em [21]. Em [20], consideraram a forma bilinear simétrica.

$$U(v,w)=\iint_{\Omega}(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{2\partial^2 v}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dS. \quad (8)$$

Integraram (8) duas vezes por partes em v e obtiveram (3) na forma mais geral:

$$\iint_{\Omega}(v\Delta\Delta w-w\Delta\Delta v)dS=-\frac{1}{D}\int_{\partial\Omega}[vV(w)-\theta(v)M(w)+\theta(w)M(v)-wV(v)]ds+\frac{1}{D}\sum_{i=1}^{N}\{[\![wT(v)]\!]-[\![vT(w)]\!]\}A_i, \quad (9)$$

onde: $[\![\cdot]\!]=(\cdot)_{A_i^+}-(\cdot)_{A_i^-}$. Em (9) escolhendo v como a solução fundamental biharmônica e w como o deslocamento real, obtém-se uma representação integral para w(P), $P\in\Omega$. Completando a formulação, derivou-se w(P) numa direção pré-fixada para obter uma segunda equação. As equações integrais no contorno, são obtidas através de limite, fazendo-se $P\in\Omega\to p\in\partial\Omega$. Foi usado elementos constantes no procedimento numérico. Empregou-se a regra trapezoidal composta para vinte pontos para calcular as integrais não singulares. O núcleo $\partial V(v)/\partial n$ exibe singularidade $1/r^2$ e apresenta dificuldade para ser integrado. Bézine & Gambi fizeram estes termos passarem a se comportar como $1/r$, procedendo a uma integração por partes [20]. As integrais singulares com este tipo de singularidade são entendidas como valor principal de Cauchy e são calculadas por meio de soluções de corpo rígido.

Stern em [21] obteve a representação integral para w(P), $P\in\Omega$ de modo análogo ao desenvolvido em [20]. Todavia a segunda equação foi obtida de (9), usando-se uma nova solução fundamental apropriadamente escolhida. Stern mostrou que as integrais singulares presentes em w(P) $P\in\Omega$ são convergentes. Por outro lado na segunda equação algumas integrais são divergentes. Contorna-se estes problemas colocando $\hat{w}=w-w(p)$ no lugar de w na segunda equação [21], isto é, faz-se uma regularização [22]. A implementação de Sternm usa aproximação linear para as incógnitas. As contribuições das singularidades foram calculadas analiticamente e as integrais entendidas como valores principais de Cauchy, foram estimadas pela regra de Gauss de 5ª ordem. Nos cantos, onde θ; M e V possuem dois valores limites, completa-se o sistema de equações considerando a natureza assintótica da solução, numa vizinhança do canto. Aqui o trabalho de Stern restringe-se a placas retangulares.

Tottenham em [9] apresentou várias formulações. As indiretas são análogas as de [8], porém usam solução fundamental ao invés de função de Green. As distribuições de forças e momentos concentrados foram feitas no contorno ∂A da placa fictícia. Se ∂A não coincidir com $\partial\Omega$ as integrais são não singulares. Fazendo-se $\partial A\to\partial\Omega$, obtém-se o método indireto convencional. As integrais singulares foram investigadas através do equilíbrio de uma placa semi-circular com centro e sob carga concentrada na origem. A formulação direta de Tottenham [9] emprega (3) para obter quatro equações integrais usando estados elásticos distintos. Mas em cada ponto do contorno apenas duas delas devem ser usadas. Empregou-se uma equação de cada par: {w, V} e {θ, M}.

O problema de vibrações de placas foi estudado por J. Vivoli em [23], por J. Vivoli & Filippi em [14], empregando-se potenciais. A equação de vibrações harmônicas de placas pode ser obtida diretamente de (1) em vista de se ter: $f(P,t)=F(P)e^{-iwt}$ e então $w(P,t)=u(P)e^{-iwt}$. A solução foi expressa na forma:

$$u(P)=u_0(P)+\sum_{i=1}^{2}(-1)^{q_i}\int_{\partial\Omega}\mu_{q_i}(m)\frac{\partial^{q_i}}{\partial n_m}G(P,m)ds_m; \quad (10)$$

sendo $u_0=\iint_{\Omega}f(Q)G(P,Q)dS_Q$ e $0<q_1<q_2<3$. As densidades μ_{q_i} são determinadas para satisfazer as condições de contorno. Em [24], mostra-se que a formulação integral é equivalente à diferencial. O procedimento numérico usa elementos constantes. Estimou-se as integrais não singulares por meio da regra retangular. As singulares foram calculadas analiticamente tomando-se as séries ascendentes das funções de Bessel [25]. Alternativamente, expandiu-se os integrandos em ondas cilíndricas [25] e todas as integrais foram calculadas analiticamente.

Formulações diretas e indiretas para os problemas de vibrações e de estabilidade de placas foram desenvolvidas em [10] por Y. Niwa et alii. As indiretas são análogas às desenvolvidas em [23], [24]. As diretas usam o teorema de Betti-Rayleigh como em [9] para obter uma representação integral para u. Completando a formulação obteve-se a segunda equação, calculando-se: $\partial u(P)/\partial n_p$. A implementação numérica usou desde elementos constantes até cúbicos. Aproximou-se as integrais não singulares por quadratura de Gauss. Calculou-se analiticamente as singulares. O problema de autovalores, resultante, é não algébrico. Fez-se a minimização do valor absoluto do determinante do sistema, para determiná-los.

Q. H. Du & Z. H. Yao em [26] ponderaram os resíduos de domínio e contorno, encontrando a relação (9) sem os termos de salto. Em [27], obtém-se as mesmas equações de [26], através de abordagem variacional. O esquema numérico usou funções de interpolação hermitianas de primeira ordem para interpolar w e de ordem zero para θ, M e V. A estrutura da formulação consiste de duas ou três equações conforme w seja ou não especificado, respectivamente. Nos pontos de cantos, suplementou-se o sistema de equações por meio das relações que existem entre as derivadas dos dois lados dos cantos [27]. Aplicou-se: regra de Gauss usual para as integrais não singulares; regra de Gauss com peso logarítmico [2], para as com singularidades logarítmicas; soluções de corpo rígido para as com singularidades mais forte.

F. V. Weeën em [28] desenvolveu uma formulação direta para placas modeladas pela teoria de Reissner [29]. Ponderando as equações de equilíbrio e integrando o resultado por partes, encontrou uma relação de reciprocidade. As equações integrais são então obtidas como nos outros métodos diretos. Foi adotado, na implementação do método, várias melhorias: a) particionamento do domínio, que conduz à matrizes de banda; b) elementos isoparamétricos para aproximar a geometria e as incógnitas; c) transformação da integral do termo de carga para o contorno; d) uso de soluções de corpo rígido para calcular as contribuições das integrais singulares; e) integração numérica com ordens escolhidas como em [30]; entre outras.

Recentemente J. A. Costa Jr. & C. A. Brebbia apresentaram em [31], nova formulação direta para o problema estático. As equações que a estruturam são obtidas como em [21]. As integrais divergentes que aparecem na formulação foram regularizadas [22]. O procedimento numérico usa elementos de contorno isoparamétricos: contínuos e descontínuos (os pontos nodais são internos). Transforma-se as integrais de domínio para o contorno, nos casos de cargas: concentradas, uniformes e hidrostática. Avalia-se as integrais não singulares por regra de Gauss e as singulares através de regras de quadraturas de valores principais e de soluções de corpo rígido.

Além dos problemas testes, outros também foram investigados por métodos integrais. O problema de placas com condições dentro do domínio, foi estudado por Bézine em [32]. O método se estrutura nas equações desenvolvidas em [20]. Elimina-se as incógnitas no contorno entre as representações de w(P), P∈Ω; ∂w(p)/∂n, p∈∂Ω, w(p) p∈∂Ω. Obtém-se o problema somente em função de quantidades no domínio. Este método foi empregado na solução do problema de contato entre placas, apresentado por Bézine & Fortune em [33]. Os problemas de vibrações e estabilidade de placas retangulares foram abordados por Gospodimov & Ljutskanov em [34]. As formulações foram análogas às de Tottenham em [9]. J. T. Katsikadelis & Armenàkas apresentaram em [35], [36], formulações integrais diretas para os problemas de placas sob apoio elástico com condições de apoio simples e de engastamento, respectivamente. O esquema numérico usou elementos constantes.

O problema de placa ortotrópica [3], foi investigado por H. Irschik em [37]. Primeiramente, por meio de uma transformação linear a equação de placa ortotrópica foi reduzida a uma equação biharmônica não homogênea. Depois, a formulação segue as técnicas apresentadas em [8]. Placas tipo "sandwich", com faces e enchimento de materiais isotrópicos foram estudadas por N. Kamiya et alii em [38]. A formulação resultante é do tipo direta, mas envolve um esquema iterativo.

O reduzido espaço não possibilita apresentação de outras aplicações.

RESULTADOS E EFICIÊNCIA DOS MÉTODOS

Na tabela 1, sintetiza-se os resultados mais significativos obtidos pelas formulações integrais revistas. Nela, denota-se condições de contorno por: s.a. - apoio simples, e.-engastamento, s.a.e., s.a.l.-dois lados opostos sob apoio simples e os outros dois engastados ou livres; asteriscos indicam quantidades adimensionais, e nem sempre os fatores de adimencionalização foram os mesmos: ε erro relativo máximo; FEM, DIF - método de elementos finitos e diferenças finitas, respectivamente.

Poucos trabalhos trataram da eficiência dos métodos integrais. Em [20], resolveu-se os mesmos problemas (ver tabela 1) por FEM(elemento com 12 graus de liberdade de O. C. Zienckiewicz) com malha 6x6 e os erros fica

Tabela 1. Resultados obtidos

Ref.	Geom. Placa	Cond. Cont.	Carga	w^* ε%	M^*_{11} ε%	M^*_{22} ε%	V^* ε%	R^* ε%	λ ε%	Comparação	Tipo do elemento	Pontos nodais
[6],[13]	quad.	s.a.	unif.	2.5	3.3	1.5				[3]	cte.	64
[8]	ret.	e.	unif.	1.9	4.4	7.6				DIF	cte.	48
[8]	triang.	e.	unif.		8.7	5.8				DIF	cte.	60
[8]	s.circ.	e.	unif.	0.8	1.3	1.8				DIF	cte.	40
[9]	ret.	s.a.e.	unif.	2.0						[3]	cte.	48
[9]	q./furo	s.a.e.	unif.	0.4						FEM	cte.	48
[20]	quad.	e.	conc.c.	0.1						[3]	cte.	48
[20]	quad.	s.a.	conc.c.	0.1						[3]	cte.	48
[21]	quad.	s.a.	unif.					0.3		[3]	linear	64
[21]	quad.	e.	unif.		1.0	1.0	1.0			[3]	linear	64
[23]	circ.	e.							0.8	[5]	cte.	35
[23]	arbit.	e.							1.0	Exp.	cte.	30
[10]	circ.	e.							0.8	NASA	cte.	28
[33]	quad.	s.a.	unif.					0.2		[3]	linear	36
[33]	quad.	s.a.	unif.					0.6		[3]	quadr.	20
[33]	triang.	s.a.	unif.	0.2	0.15	0.15				[3]	cte.	27
[33]	triang.	s.a.	unif.	0.1	0.12	0.12				[3]	cte.	24
[36]	quad.	e.	unif.	0.3		0.8				[3]	cte.	60
[36]	quad.	s.a.	unif.	1.8	14.5					[3]	cte.	36
[36]	quad.	e.							0.4	[5]	cte.	20
[37]	circ.	s.a.	conc.c.	1.0			3.0			[3]	cte.	44
[39]	ret.	s.a.l.	unif.	0.6	0.75	0.75				[3]	cte.	40

s.circ. - semi-circular; q./furo - quad. com furo; conc.c. - concentrada central ram em torno de 5%. Em malhas finas, FEM é mais econômico, mas deve-se considerar que através do método integral resultados precisos foram obtidos mesmo com malhas grossas. Em [28], os resultados obtidos pelo método de elementos de contorno (BEM), para placa infinita com furo e sob ação de momento no infinito, foram mais precisos que os de FEM. Todavia, o tempo de execução pelo BEM excedeu o de pelo FEM em 100% ou 30%, dependendo se foram ou não calculadas quantidades no interior. Depois, para placa curva engastada com carga uniforme, foi necessária malha fina não uniforme para o FEM fornecer resultados comparáveis aos de BEM obtidos com malha grossa. Aqui, o tempo de execução pelo BEM foi menor que pelo FEM. Então, com as informações disponíveis, não é possível assegurar vantagens dos métodos integrais sobre outros métodos em particular sobre o de elementos finitos, ou vice-versa. Seus comportamentos dependem de muitos fatores.

REFERÊNCIAS

[1] BREBBIA, C.A.. The Boundary Element Method for Engineers. London, Pentech Press, 1978.

[2] BREBBIA, C.A. & WALKER, S.. Boundary Element Techniques in Engineering. London, Butterworth, 1980.

[3] TIMOSHENKO, S.P. & WOINOWSKY-KRIEGER, S.. Theory of Plates and Shells. 2. ed. Tokyo, McGraw-Hill, 1959

[4] LOVE, A.E.H.. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. 4 ed. Dover Publications, 1944.

[5] MEIROVITCH, L.. Analytical Methods in Vibrations. New York, The Macmillan Company, 1967.

[6] JASWON, M.A. et alii. Numerical Biharmonic Analysis and Some Applications. Int. J. Solids Structures, Great Britain, 3, 1967.

[7] JASWON, M.A. & MAITI, A.. An Integral Formulation of Plate Bending Problems. J. Engng. Math., 2, 1968.

[8] ALTIERO, N.J. & SIKARSKIE, D.L.. A Boundary Integral Method Applied to Plates of Arbitrary Plan Form. Computers & Structures, 9: 163-168, 1978.

[9] TOTTENHAM, H.. The Boundary Element Method for plates and Shells. In: Banerjee, P.K., . Developments in Boundary Element Methods-1. London, 1979.

[10] NIWA, Y. et alii. Determination of Eingenvalues by Boundary Element Method. In: Banerjee, P.K., Developments in B.E.M.-2. London, 1979.

[11] IRSCHIK, H.. A Boundary-Integral Equation Method for Bending of Orthotropic Plates. Int. J. Solids Structures, Great Britain, 20 (3), 1984.

[12] SOKOLNIKOFF, I.S.. Mathematical Theory of Elasticity. New York, McGraw-Hill Book Company, 1946.

[13] JASWON, M.A. & SYMM, G.T.. Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics. London, Academic Press, 1977.

[14] FINLAYSON, B.A.. The Method of Weighted Residuals and Variational Principles. New York, 1972.

[15] MAITI, M. & CHAKRABARTY, S.K.. Integral Equation Solutions for Simply Supported Polygonal Plates. Int. J. Engng. Sci., 12: 793-806, 1974.

[16] STAKGOLD, I.. Green's Functions and Boundary Value Problems. New York, John Wiley & Sons, 1979.

[17] HANSEN, E.B.. Numerical Solution of Integro-Differential and Singular Integral Equations For Plate Bending Problems. J. of Elasticity, 6, 1976.

[18] GREVILLE, T.N.W.. Theory and Applications of Spline Functions. New York, Academic Press, 1969.

[19] CARNAHAN, B. et alii. Applied Numerical Methods. New York, John Wiley & Sons, Inc, 1969.

[20] BÉZINE, G.P. & GAMBI, D.A.. A New Integral Equation Formulation for Plate Bending Problems. In: Brebbia, C.A., Recent Advances in Boundary Element Methods, London Pentech Press, 1978.

[21] STERN, M.. A General Boundary Integral Formulation for the Numerical Solution of Plate Bending Problems. I.J. Solids Structures, 15: 769-782, 1979.

[22] GEL'FAND, I.M. & SHILOV, G.E.. Generalized Functions. New York, Academic Press, 1964, V. 1.

[23] VIVOLI, J.. Vibrations de Plaques et Potentiels de Couches. Acustica 26: 305-314, 1972.

[24] VIVOLI, J. & FILIPPI, P.. Eigenfrequencies of Thin Plates and Layer Potentials. J.Acoust. 55, 1974.

[25] ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I.A.. Handbook of Mathematical Functions. New York, Dover Publications, 1965.

[26] DU, Q.H. & YAO, Z.H.. Applications of the Boundary Element Method to Two and three Dimensional Stress Analysis and Plate Bending Problems in Elasticity. In: Brebbia, C.A., Boundary Element Methods in Engineering. Berlin, Springer-Verlag, 1982.

[27] DU, Q.H. et alii. Solutions of Some Plate Bending Problems Using Boundary element Method. Appl. Math Modelling, 8: 15-22, 1984.

[28] WEEEN. F.V.. Application of the Boundary Integral Equation Method to Reissner's Plate Model. Int. J. Num. Meth, Engng., 18: 1-10, 1982.

[29] REISSNER, E.. On Bending of Elastic Plates. Quarterly of Appl. Math., 5 (1): 55-68, 1947.

[30] LACHAT, J.C. & WATSON, J.O.. Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations: A Formulation for Three-Dimensional Elastostatics. Int. J. Num. Meth. Engng., 10: 991-1005, 1976.

[31] COSTA Jr., J.A. & BREBBIA, C.A.. Plate Bending Problems Using B.E.M.. In: Boundary Elements VI. Berlin, Springer-Verlag, 1984.

[32] BÉZINE, G.. A Boundary Integral Equation Method for Plate Flexure With Conditions Inside the domain. Int.J. Num. Meth. Engng., 20: 1647-1657, 1981.

[33] BÉZINE G. & FORTUNE, D.. Contact Between Plates by a New Direct Boundary Integral Equation Formulation. Int. J. Solids Structures, 20: 739-746, 1984.

[34] GOSPODINOV, G. & LJUTSKANOV, D.. The B.E.M. Applied to Plates. Appl. Math. Modelling, 6, 1982.

[35] KATSIKADELIS, J.T. & ARMENÀKAS, A.E.. Plates on Elastic Foundation by BIE Method. J. of Engng. Mechanics, 110 (7): 1086-1105, 1984.

[36] KATSIKADELIS, J.T. & ARMENÀKAS, A.E.. Analysis of Clamped Plates on Elastic Foundation by BIE Method. J. of Appl. Mechanics, 51 (3): 574-580, 1984.

[37] IRSCHIK, H.. A BIE Method for Bending of Orthotropic Plates. Int. J. Solids Structures, 20 (3), 1984.

[38] KAMIYA, N. et alii. Boundary Element Nonlinear Bending Analysis of Clamped Sandwich Plates and Shells. In: Brebbia, C.A., BEM in Engineering, Berlin, 1982.

SUMMARY

In this work, Boundary integral methods applied to elastic plates problems are here revived. The methodologies to obtain the integral formulations, its structures, properties and numerical implementations are presented. The main results are synthetized in tabular form, which make possible qualitative comparison between the revived methods.