

VII CONGRESSO LATINO-AMERICANO
SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA
SÃO CARLOS - SP - BRASIL 4 A 7 DE NOVEMBRO DE 1986

UM MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO DE LAMINADOS
COMPOSTOS SIMÉTRICOS E ANTI-SIMÉTRICOS.

Paulo de Tarso Rocha de Mendonça
Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Santa Catarina.
Florianópolis - SC - Brasil

RESUMO

É apresentado um método de projeto para cascas laminadas compostas, pela determinação do número mínimo de lâminas e suas orientações ótimas, para carregamentos e propriedades de lâminas arbitrárias. O método é baseado em um procedimento iterativo. As tensões obtidas por um programa de elementos finitos, para um conjunto inicial de dados, são usadas para a determinação da configuração ótima do laminado no ponto crítico. Esta configuração é usada para recalcular as tensões. As iterações sucedem-se até a convergência desejada.

ABSTRACT

A design method for composite laminate shells determining the minimum number of laminae and its optimum orientation has been implemented for given arbitrary data of laminae properties. The method is based on an iterative procedure. The stresses evaluated through a finite element program for a given initial data are used to determine the optimum laminate configuration in the critical point. This configuration is used to re-evaluate the stresses for re-designing purposes until a convergence is obtained.

OTIMIZAÇÃO NO PONTO

Dada uma certa configuração de forças e momentos resultantes ($\underline{N}, \underline{M}$) agindo num certo ponto de um laminado delgado, composto por lâminas ortotrópicas; dadas as propriedades ($E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, X_t, X_c, Y_t, Y_c, S$); dada a espessura de uma lâmina; e dado um fator mínimo de segurança, o problema consiste na determinação do número mínimo destas lâminas e suas orientações que produzam um laminado que resista às solicitações com o máximo fator de segurança possível para aquele número de lâminas.

Uma primeira aproximação mais simples, base para outros desenvolvimentos, consiste no uso do método de otimização de procura simples efetuado sobre o equacionamento da Teoria Clássica de Laminados Delgados (TCLD) aplicada sobre laminados simétricos e anti-simétricos [1] [2] [3].

De forma geral, o equacionamento provido pela TCLD resume-se a:

$$Q_{ij} = Q_{ij}(E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}), \quad ij = 1, 3 \quad (1)$$

que define a matriz de rigidez da lâmina ortotrópica nas direções principais 1, 2, 3 em termos das propriedades elásticas do material.

$$U_i = U_i(Q_{jk}) \quad i = 1, 4 ; \quad i, j = 1, 3 \quad (2)$$

definem os quatro invariantes independentes, da lâmina, função dos termos da matriz de rigidez da lâmina ortotrópica.

$$\bar{Q}_{ij} = \bar{Q}_{ij}(U_k, \theta) \quad i, j = 1, 3 ; \quad k = 1, 4 \quad (3)$$

é a matriz de rigidez da lâmina em relação a um sistema x-y rotacionado de um ângulo θ em torno do eixo 3 normal à placa. A matriz \bar{Q} é tal que

$$\underline{\sigma}^x = \bar{Q}^x \underline{\epsilon} \quad (4)$$

onde $\underline{\sigma}^x = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})$ são as tensões na lâmina segundo o sistema x-y, e $\underline{\epsilon}^x$ são as deformações correspondentes. Da mesma forma, para o sistema principal de coordenadas, $\underline{\sigma}^1 = \underline{Q}^1 \underline{\epsilon}^1$. A integração das tensões da eq. (4) levam as forças e momentos resultantes ($\underline{N}, \underline{M}$) que são selecionadas as deformações e curvaturas ($\underline{\epsilon}^0, \underline{k}$) por

$$(\underline{N}, \underline{M})^T = \underline{C}(\underline{\epsilon}^0, \underline{k})^T \quad (5)$$

onde a matriz de rigidez do laminado \underline{C} é particionada por

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{B} & \underline{D} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Nos casos particulares de laminados simétricos ou anti-simétricos de lâminas de espessura constante as sub-matrizes da eq. (6) assumem as formas simplificadas:

$$\begin{aligned} A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{33} &= t S_1 \\ D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{33} &= t^3/12 S_1 \\ A_{16}, A_{26} &= k_1 S_2 \\ B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{33} &= k_2 S_1 \\ B_{16}, B_{26} &= k_3 S_2 \\ D_{16}, D_{26} &= k_4 S_2 \end{aligned} \quad (7)$$

onde

$$\begin{aligned} \underline{S}_1 &= (\bar{Q}_{11}, \bar{Q}_{12}, \bar{Q}_{22}, \bar{Q}_{33}) \\ \underline{S}_2 &= (\bar{Q}_{13}, \bar{Q}_{23}) \end{aligned} \quad (8)$$

para laminados simétricos com N lâminas de espessura t, $k_1 = t/N$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$, $k_4 = t^3(3N^2 - 2)/12N^2$. Para laminados anti-simétricos, $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = -t^2/2N$, $k_4 = 0$.

Além da TCLD, torna-se necessário o uso de um ou vários critérios de falha [1] [2]. Os dois critérios mais bem aceitos para falha de lâminas são as de Tsai-Hill e de Tsai-Wu, res-

pectivamente expressos por:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_1\sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} = \frac{1}{FT} \quad (9)$$

e

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\tau_{12}^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 = \frac{1}{FW} \quad (10)$$

Onde o que chamamos FT e FW (fator de Tsai-Hill e fator de Tsai-Wu) fazem a vez de fatores de segurança ao quadrado. O critério de Tsai-Hill exige sua multiplicação em vários critérios para o caso de materiais com diferentes resitências à tração e a compressão. Este problema não é sofrido pelo segundo critério, porém uma de suas constantes é de difícil obtenção experimental ou deve ser obtido via equação empírica ($F_{12} = -\sqrt{(F_{11}F_{22})}/2$). As outras constantes são conhecidas em termos de X_t , X_c , etc. Neste trabalho utilizou-se o critério de Tsai-Hill.

A especificação do laminado simétrico ou anti-simétrico ótimo, constituído por lâminas de iguais propriedades mecânicas e espessuras, significa a definição do número mínimo de lâminas NMIN e do ângulo $\bar{\theta}$ que maximiza o menor dos fatores FT's dentre as lâminas. Ainda dentro desta série de restrições, a otimização do processo envolvendo os vários grupos de equações é razoavelmente intrincado, considerando-se principalmente a descontinuidade do número N de lâminas e a necessária inversão da matriz \underline{C} durante os cálculos. Para lâminas genéricas, a quantidade de variáveis a serem manipuladas durante a otimização crescerá enormemente, pois cada lâmina possuiria uma espessura e uma orientação a serem determinadas.

OTIMIZAÇÃO DA ESTRUTURA

Em um laminado com geometria qualquer, com apoios e sob carregamentos quaisquer forças e momentos resultantes num certo ponto só poderão ser calculadas com certa precisão por métodos genéricos como o de elementos finitos especialmente criados para este fim. Este cálculo é feito baseado

numa dada configuração do laminado (número de lâminas, espessuras, propriedades e orientações). Qualquer processo de otimização do laminado que envolva iterações deve ser tal que a massa maior e mais efetiva de cálculos e iterações seja realizada à parte do processo de elementos finitos mesmo, claramente devido a seu custo elevado em tempo de CPU.

Um método possível consiste na construção de um módulo que utilize apenas as equações da TCLD e de um critério de falhas, e obtenha a configuração ótima para uma dada equação de $[N, M]$ num certo ponto. Isto foi implementado seguindo o método da procura simples, isto é, obtendo o FT para um certo número inicial de lâminas (NLI) e para um certo ângulo inicial TETAI de orientação. Depois aplicando incrementos $\Delta\theta$ ao ângulo até um ângulo final TETAF. Sendo obtidas para cada orientação o menor FT dentre todas as lâminas (FTM), procura-se o ângulo onde o FTM é o máximo (FTMM). Caso FTMM seja inferior a um certo fator mínimo (FMTH) exigido, realiza-se um incremento ao número de lâminas e repete-se o cálculo. Os cálculos são feitos opcionalmente para laminados simétricos e anti-simétricos, conforme as equações (7).

Embora as equações (7) funcionem apenas para laminados simétricos ou anti-simétricos, isto é, onde as lâminas estão a $+\theta$ ou $-\theta$ em relação ao eixo x, pode-se aumentar sua generalidade para uso em laminados onde as lâminas se orientem segundo $(\theta_R + \theta)$ e $(\theta_R - \theta)$ em relação ao eixo x. Isto é conseguido pela transformação de $[N, M]$ para o sistema de coordenadas definido pela rotação do eixo x em torno do eixo z, do ângulo θ_R [5][6]. θ_R será chamado ângulo de referência.

Infelizmente o aumento de generalidade devido a θ_R significa que este deve também ser variado, desde um valor inicial θ_{RI} até um valor final θ_{RF} com certo incremento $\Delta\theta_R$.

Uma vez este módulo disponível, o laminado deve ser definido em uma certa configuração inicial, que possivelmente será obtido por métodos simplificados de cálculo, para resistir ao dado carregamento. Este laminado é então modelado por elementos finitos capazes de levar em consideração tanto os acoplamentos membrana-flexão quanto os extensão-ciralhamento.

Do ponto que apresentar em uma das lâminas o menor FT de todo o laminado se obtêm a configuração de $[N, M]$ crítica. Esta configuração de forças é então base para que o módulo de otimização defina a configuração ótima do laminado para resistirem a estas forças. Esta configuração ótima é usada novamente no programa de elementos finitos até a convergência, conforme Figura 1.

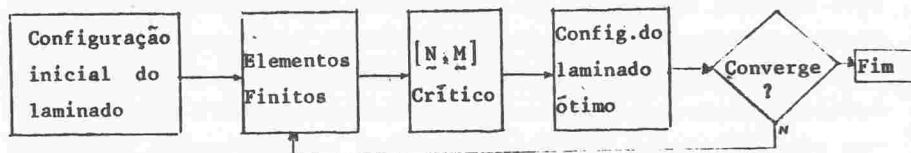


Figura 1 - Esquema do processo de otimização.

CONVERGÊNCIA

Sem dúvida, nenhuma garantia é dada quanto à convergência, e também, como inúmeros processos iterativos, o número de iterações é dependente da configuração inicial. Uma indicação de que a convergência será pelo menos frequente e rápida, é que a configuração de forças e momentos será mais dependente do equilíbrio estático global da estrutura e menos dependente de sua configuração laminar, o que significa que, qualquer que seja a configuração inicial usada no laminado, $[N, M]$ críticos guardarão certas semelhanças e proporções com as forças finais do laminado otimizado.

TESTES

Caso 1.

Foi considerado um cilindro de raio $r = 0,125m$, sob pressão interna P , composto por lâminas de espessura $t=0,5mm$ de grafite/epoxi com propriedades elásticas $E_1 = 207 GPa$, $E_2 = 5 GPa$, $G_{12} = 2,6 GPa$, $\nu_{12} = 0,26$, e resistências a tração e compressão $X_T = X_C = 1500MPa$, $Y_T = 40 MPa$, $Y_C = 246 MPa$, $S = 68 MPa$. Foi feita a restrição ideal de que, tanto

para laminados simétricos quanto anti-simétricos, as forças e momentos resultantes resumiam-se a $N_y = 2N_x = Pr$. A Figura 2 mostra os resultados obtidos. Nota-se que os ângulos ótimos pouco variaram em todas as faixas de pressão e número de lâminas.

Embora os cilindros reais se comportem de maneira distinta do caso simples mostrado devido aos acompanhamentos, gráficos como este podem ser construídos facilmente para configurações usuais de forças em que estas mantenham relação constante entre si, e serem usados como guias de projetos específicos.

A linha contínua mostrada na Figura 2 indica as mínimas quantidades de lâminas quando é especificado um FT mínimo de 4.

Caso 2.

Foi otimizado uma casca cilíndrica de raio $R = 2,0mm$ com comprimento de $2,0m$ e abertura de 60° , simplesmente apoiada. A modelagem por elementos finitos foi feita sobre $1/4$ da casca, conforme mostra a Figura 3. Foram consideradas lâminas de grafite/epoxi com as mesmas propriedades e espessura do caso 1. O elemento finito utilizado foi o triangular DKT-ML [3] [4]. Como configuração inicial definiu-se um número de 5 lâminas e pretendeu-se apenas chegar as orientações ótimas que maximizassem o FT crítico. Foi usado inicialmente $\theta = 54^\circ$ e $\theta_R = 0^\circ$, à semelhança dos cilindros sob pressão interna. O carregamento consistiu de uma carga distribuída, uniforme, para baixo, de $0,2MPa$.

A sequência dos resultados é mostrada na Tabela 1. Nota-se que obteve-se um laminado com um fator de segurança cerca de duas vezes maior, $(\sqrt{6/1,27})$ sem nenhum aumento de espessura.

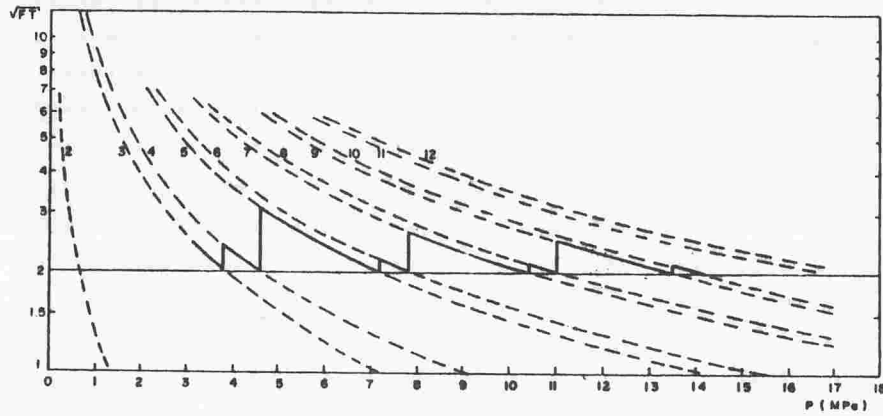


Figura 2 - Fatores de Tsai para caso 1 estão indicados os números de lâminas. Os ângulos ótimos são 52° para 2 lâminas, 54° para 3 e 4 lâminas, A partir de 5 lâminas, $\theta = 53,8^\circ$ para laminados simétricos e $\theta = 54^\circ$ para anti-simétricos. Precisão $\pm 0,2^\circ$. Ângulo de referência 0°.

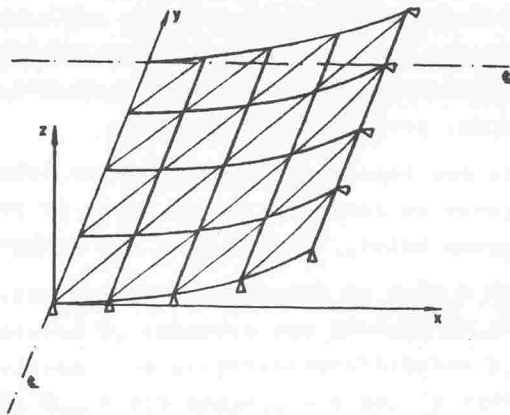


Figura 3 - Modelagem de 1/4 de casca cilíndrica.

ELEMENTOS FINITOS			OTIMIZAÇÃO		
θ_1/θ_2 Usado	\bar{N}, \bar{M} no ponto crítico	FT	FT	θ/θ_R	$\Delta\theta$ Usado
+54/-54	4,144E5 1,705E1 5,910E5 1,710E1 2,660E5 1,158E1	1,27			
			5,7	48/15	3
63/-33	4,115E5 3,634E1 4,217E5 1,947E1 -3,29E3 -8,500E0	1,9			
			5,4	45/14	1
59/-31	4,177E5 3,490E1 3,580E5 1,730E1 2,310E3 -5,150E0	2,9			
			6,8	42,5/0,0	0,5
42,5/-42,5	4,320E5 3,448E1 3,138E5 2,123E1 1,485E4 2,243E1	6,0			

Tabela 1 - Resultados do caso 2. Os ângulos de orientação e referência θ e θ_R em graus. As forças e momentos em N/m e N. Os incrementos foram idênticos para θ e θ_R .

CONCLUSÕES

O método apresentado, apesar de bastante simplificado e não elaborado mostra uma possível base pra futuros aperfeiçoamentos em direção à meta de obtenção de um processo eficiente e rápido de determinação de combinados ótimos por critérios de falha semelhantes.

BIBLIOGRAFIA

- [1] JONES, R.M. Mechanics of composite materials. Washington, 2ed. McGraw-Hill, 1975.
- [2] AL-QURESHI, H.A. Composite materials: fabrication and analysis. São Paulo, ITA, 1984.
- [3] MENDONÇA, P.T.R. Uma formulação de elemento finito para cascas delgadas multilaminadas. Dissertação de mestrado, Univ. Federal de Santa Catarina, 1983.
- [4] MENDONÇA, P.T.R. & BARCELLOS, C.S. Uma formulação de elemento finito para cascas delgadas multilaminadas. 3º SIBRAT, 633-648, 1984.
- [5] TIMOSHENKO, S.P. & WOINOWSKY-KRUEGER, S. Theory of plates and shells. Tokyo, McGraw-Hill, 1959.
- [6] TIMOSHENKO, S.P. & GOODIER, J.N. Theory of elasticity. Tokyo, McGraw-Hill, 1970.

UTILIZAÇÃO DE MICROCOMPUTADORES NA DETERMINAÇÃO
 DE PROPRIEDADES DINÂMICAS DE ELASTÔMEROS

Alvaro Costa Neto
 Departamento de Engenharia Mecânica - Escola de Engenharia
 Universidade de São Paulo
 São Carlos - SP - Brasil

Luiz Sérgio V. Dutra
 Maria da Graça B. Rocha
 Departamento de Computação
 Universidade Federal de São Carlos
 São Carlos - SP - Brasil

RESUMO

Este trabalho descreve uma técnica e apresenta os resultados de um programa, para microcomputadores pessoais de 16 Bits, para a determinação de parâmetros dinâmicos de materiais viscoelásticos através da utilização do método do balanço harmônico e do algoritmo da Transformada Rápida de Fourier (FFT).

ABSTRACT

This paper presents a method and the results obtained through the use of a software to determine dynamic properties of viscoelastic materials developed for 16 Bits personal computers. It's used the harmonic balance method and the Fast Fourier Transform Algorithm (FFT).