

Solução de Problemas de Hastes e Vigas pelo Método da Função de Green Local



LUIZ HENRY MONKEN E SILVA*

Depto. Engenharia Mecânica - Universidade Estadual de Maringá
87.000 - Maringá - PR

CLÓVIS SPERB DE BARCELLOS*

Depto. Engenharia Mecânica — UFSC
Cx. Postal 476 - 88.049 - Florianópolis - SC



SUMÁRIO

Neste trabalho é apresentada uma formulação integral para problemas de hastes delgadas e vigas-Bernoulli, baseada no Método da Função de Green Local. A representação funcional estabelecida, conduz a sistemas de equações integrais com estrutura operacional análoga a dos métodos indiretos mas agora as variáveis são relacionadas com as variáveis físicas. Os resultados numéricos obtidos sempre concordaram muito bem com os analíticos disponíveis para os problemas.

INTRODUÇÃO

O emprego da formulação integral para solução de problemas de hastes delgadas e vigas-Bernoulli, não é freqüente. Apesar disto, as técnicas mais recentes de elementos de contorno, evidenciam que a formulação integral pode se constituir em alternativa eficiente para abordagem destes problemas devido a qualidade dos resultados, a facilidade de preparação dos dados e a portabilidade computacional a que os problemas se reduzem.

Neste trabalho, uma formulação modificada baseada no Método da Função de Green Local, LGFM, [1], [2], [3], é desenvolvida para os problemas de hastes delgadas e vigas-Bernoulli. Esta metodologia conduz a equações integrais com a mesma estrutura que a formulação integral indireta, [4], porém agora as variáveis são diretamente relacionadas com as variáveis físicas. A representação funcional da formulação, obtida por meio das técnicas convencionais de reciprocidade, relaciona deslocamentos generalizados com funções que incorporam as forças generalizadas. Os operadores integrais da formulação, são simétricos. Em consequência as matrizes resultantes da discretização, realizada pelo método de colocação, são simétricas. Nos problemas de hastes delgadas e vigas-Bernoulli, tem-se semi-bandas de larguras 1 e 3 respectivamente. A técnica de sub-domínio, [5], com funções de Green Locais, torna mais geral o LGFM que desta forma pode ser aplicado a problemas que possuem características geométricas e propriedades de materiais com variações arbitrárias. Os exemplos apresentados mostram que os resultados numéricos têm boa concordância com os das soluções analíticas. Basicamente se conclue que a metodologia aqui proposta melhora os aspectos computacionais relacionados à estrutura matricial que fica simétrica e de banda ao contrário da técnica convencional que fornece matrizes cheias e não simétricas [4], [5], [6].

FORMULAÇÃO PARA HASTES

Seja $I = (0, L)$ um intervalo aberto. Considere uma

haste delgada, elástica ocupando $I = [0, L]$, sujeita a um carregamento distribuído. As equações que o deslocamento longitudinal da haste satisfaz são:

$$-\frac{d}{dx} [EA(x) \frac{du(x)}{dx}] = q(x), \quad 0 < x < L, \quad (1)$$

$$l_1[u(x)] = \alpha_1, \quad x=0; \quad l_2[u(x)] = \alpha_2, \quad x=L, \quad (2)$$

onde: $EA(x)$ é a rigidez da haste; $q(x)$ é carga distri-

buída por unidade de comprimento, no sentido longitudinal da haste; $l_1[.]$, $l_2[.]$ são combinações lineares dos operadores: $\text{Tr}[.]$ e $\text{Tr}[EA dx]$; sendo:

$$\text{Tr}[g(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x). \quad (3)$$

Agora, considere o particionamento de I em n sub-intervalos, $I^k = (x_{k-1}, x_k)$ tal que $\bigcup_{k=1}^n I^k = I$ e $I^m \cap I^k = \emptyset$, para $m \neq k$, sendo $x_0 = 0$ e $x_n = L$. A restrição da equação (1) ao sub-intervalo I^k é:

$$-\frac{d}{dx} [E^k A^k(x) \frac{du^k(x)}{dx}] = q^k(x), \quad x \in I^k; \quad (4)$$

onde: $u^k(x) = u(x)$ e $q^k(x) = q(x)$, para $x \in I^k$. Para obter uma formulação integral do problema, introduz-se a função de Green relativa ao operador diferencial adjunto do operador que aparece na equação (4):

$$-\frac{d}{dx} [E^k A^k(x) \frac{dG^k(x, \xi)}{dx}] = \delta(x, \xi), \quad x, \xi \in I^k, \quad (5)$$

onde $G^k(x, \xi)$ é o deslocamento no ponto x devido a carga unitária pontual, $\delta(x, \xi)$, aplicada no ponto ξ . Multiplicando (4) por $G^k(x, \xi)$ e a equação (5) por $u^k(x)$, subtraindo os resultados, integrando em I^k e depois integrando por partes os termos de domínio que não vêm do carregamento, resulta:

$$u^k(\xi) = \int_{I^k} G^k(x, \xi) q^k(x) dx - [E^k A^k(x) u^k(x) \frac{dG^k(x, \xi)}{dx}] \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} + [E^k A^k G^k(x, \xi) \frac{du^k(x)}{dx}] \Big|_{x_{k-1}}^{x_k}, \quad \xi \in I^k. \quad (6)$$

Em seguida, para obter uma formulação integral com uma estrutura análoga ao LGFM, introduz-se na equação (6) um novo termo:

$$k_0 G^k(x, \xi) u^k(x), \quad x \in \partial I^k, \quad \xi \in I^k, \quad (7)$$

para reescrevê-la na forma:

$$u^k(\xi) = \int_{I^k} G^k(x, \xi) q^k(x) dx + \{G^k(x, \xi) [k_0 u^k(x) + E^k A^k(x) \frac{du^k(x)}{dx}]\} \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \{u^k(x) [k_0 G^k(x, \xi) + E^k A^k(x) \frac{dG^k(x, \xi)}{dx}]\} \Big|_{x_{k-1}}^{x_k}, \quad \xi \in I^k. \quad (8)$$

O parâmetro k_0 é arbitrário, porém pré-especificado e sua dimensão é tal que o produto $k_0 u^k(x)$, possa ser interpretado como uma força elástica que atua no contorno do elemento I^k . A escolha das condições de contorno para a função de Green é feita para anular o último termo que aparece na equação (8). Os termos do primeiro colchete em (8) são denotados por $F^k(x)$ e a equação (8) pode então ser escrita como:

$$u^k(\xi) = \int_{I^k} G^k(x, \xi) q^k(x) dx + [G^k(x, \xi) F^k(x)] \Big|_{x_{k-1}}^{x_k}, \quad (9)$$

com $\xi \in I^k$. O traço de $u^k(\xi)$ sobre o contorno de I^k $u^k(\xi^S)$, formula o problema como uma técnica de contorno e fornece:

$$u^k(\xi^S) = \int_{I^k} G^k(x, \xi^S) q^k(x) dx + [G^k(x, \xi^S) F^k(x)] \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} \quad (10)$$

com $\xi^S \in \partial I^k$.

Desta forma o problema de haste delgada é completamente formulado pelas equações integrais (9) e (10). Para solução, as condições de contorno são introduzidas diretamente através dos traços dos deslocamentos ou das quantidades $F^k(x)$. Em pontos sobre a interface de subdomínios, impõe-se compatibilidade de deslocamentos e equilíbrio de forças. Resolvendo a equação (10), os deslocamentos u^k ou as quantidades F^k são determinados no contorno. Com F^k se calcula, sem integrações adicionais, as forças no contorno de I^k . Em pontos do domínio I^k , deslocamentos e forças podem ser calculadas diretamente com o emprego da equação (9) ou de sua derivada em relação à variável ξ .

FORMULAÇÃO PARA VIGA

As equações que o deslocamento transversal de uma viga-Bernoulli satisfaz são:

$$\frac{d^2}{dx^2} [EJ(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2}] = q(x), \quad 0 < x < L, \quad (11)$$

$$l_1[w] = \alpha_1 \quad \text{e} \quad l_2[w] = \alpha_2, \quad \text{em } x = 0, \quad (12)$$

$$l_3[w] = \alpha_3 \quad \text{e} \quad l_4[w] = \alpha_4, \quad \text{em } x = L,$$

onde: E é módulo de elasticidade longitudinal do material da viga; $J(x)$ é o momento de inércia da seção transversal da viga; $q(x)$ é carga transversal por unidade de comprimento e $l_1[.]$, $l_2[.]$, $l_3[.]$, $l_4[.]$ são combinações lineares de operadores de contorno, adequadamente escolhidos dentre os seguintes:

$$\text{Tr}[.], \quad \text{Tr}\left[\frac{d}{dx}\right], \quad \text{Tr}\left[EJ \frac{d^2}{dx^2}\right], \quad \text{Tr}\left[\frac{d}{dx} \left(EJ \frac{d^2}{dx^2}\right)\right], \quad (13)$$

sendo que o operador $\text{Tr}[.]$ foi definido em (3). O procedimento para formular o problema (11), (12) numa for-

ma integral que tenha a estrutura de um Método Modificado da Função de Green Local, é análogo ao adotado para os problemas de hastes e fornece a equação integral:

$$w^k(\xi) = \int_{I^k} G^k(x, \xi) q^k(x) dx + [G^k(x, \xi) F^k(x)] \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} + \left[\frac{dG^k(x, \xi)}{dx} M^k(x)\right] \Big|_{x_{k-1}}^{x_k}, \quad \xi \in I^k, \quad (14)$$

sendo as quantidades $F^k(x)$ e $M^k(x)$, definidas por:

$$F^k(x) = k_0 w^k(x) - \frac{d}{dx} [E^k J^k(x) \frac{d^2 w^k(x)}{dx^2}], \quad x \in \partial I^k, \quad (15)$$

$$M^k(x) = k_1 \frac{dw^k(x)}{dx} + E^k J^k(x) \frac{d^2 w^k(x)}{dx^2}, \quad x \in \partial I^k. \quad (16)$$

Nas equações (14), (15) e (16) o sobre-índice k nas variáveis indicam que são restritas ao k -ésimo sub-domínio. Os parâmetros k_0 e k_1 são, como em hastes, arbitrários porém pré-especificados. Devido o operador diferencial do problema ser de 4ª ordem, em cada ponto do contorno duas condições de contorno são especificadas e as quantidades duais devem ser calculadas. Assim para completar a formulação é necessária mais uma equação integral. Frequentemente a equação adicional é obtida calculando o deslocamento angular $\theta^k(\xi)$, que é dado pela derivada da equação (14) em relação à variável ξ , que fornece:

$$\theta^k(\xi) = \int_{I^k} \frac{dG^k(x, \xi)}{d\xi} q^k(x) dx + \left[\frac{dG^k(x, \xi)}{d\xi} F^k(x)\right] \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} + \left[\frac{d^2 G^k(x, \xi)}{d\xi dx} M^k(x)\right] \Big|_{x_{k-1}}^{x_k}, \quad \xi \in I^k. \quad (17)$$

O traço de $w^k(\xi)$ e $\theta^k(\xi)$ sobre o contorno de I^k , fornece a formulação de contorno desejada:

$$w^k(\xi^S) = \int_{I^k} G^k(x, \xi^S) q^k(x) dx + [G^k(x, \xi^S) F^k(x)] \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} + \left[\frac{dG^k(x, \xi^S)}{dx} M^k(x)\right] \Big|_{x_{k-1}}^{x_k}, \quad \xi^S \in \partial I^k, \quad (18)$$

$$\theta^k(\xi^S) = \int_{I^k} \frac{dG^k(x, \xi^S)}{d\xi} q^k(x) dx + \left[\frac{dG^k(x, \xi^S)}{d\xi} F^k(x)\right] \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} + \left[\frac{d^2 G^k(x, \xi^S)}{d\xi dx} M^k(x)\right] \Big|_{x_{k-1}}^{x_k}, \quad \xi^S \in \partial I^k. \quad (19)$$

A maneira de solucionar o problema e calcular os parâmetros de interesse: deslocamentos e forças generalizadas, é análoga à empregada para hastes: primeiro o sistema formado pelas equações (18) e (19) é resolvido, fornecendo os deslocamentos e as quantidades F^k e M^k no contorno de I^k . Depois, os parâmetros no domínio podem ser calculados através das equações (14) e (17) e derivadas destas em relação à variável ξ . No caso de haver sub-domínio, a justaposição é obtida impondo-se nos pontos de interface: compatibilidade dos deslocamentos w^k e θ^k e equilíbrio dos esforços Q^k e M^k (força cortante e momento fletor, respectivamente).

SOLUÇÃO NUMÉRICA

Discretização. Considere o intervalo de definição da haste ou viga, subdividido em n sub-intervalos. O fecho de um sub-domínio típico, k , é representado por: $I^k \equiv [x_{k-1}, x_k]$. Daqui para frente I^k passará a ser denominado de elemento k . O particionamento do domínio é realizado tendo em consideração os mesmos aspectos que ocorrem em elementos finitos [7] e em particular a existência de carga concentrada que deverá estar aplicada em um ponto nodal de contorno do elemento. Tanto os problemas de hastes como os de vigas são unidimensionais. Em consequência, os contornos se reduzem a pontos. O método de colocação é naturalmente escolhido para transformar as equações integrais de contorno em um sistema de equações lineares.

Nos problemas de hastes, a colocação da equação (10) nos pontos nodais: x_{k-1}, x_k do elemento k , fornece a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} G_{k-1,k-1}^k & -G_{k,k-1}^k & 1 & 0 \\ -G_{k-1,k}^k & G_{k,k}^k & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{k-1}^k \\ F_k^k \\ u_{k-1}^k \\ u_k^k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{k-1}^k \\ B_{k-1}^k \\ S_k^k \\ B_k^k \end{Bmatrix} \quad (20)$$

onde foram adotadas as seguintes notações:

$$\begin{aligned} u^k(x_p) &= u_p^k; & G^k(x_p, \xi_q) &= G_{p,q}^k; \\ F^k(x_p) &= F_p^k; \\ S^k(\xi_p) &= \int_{I^k} G^k(x, \xi_p) q^k(x) dx = S_p^k. \end{aligned} \quad (21)$$

A matriz de Green global da haste, é obtida juntapondo as matrizes locais dos elementos. A compatibilidade dos deslocamentos e o equilíbrio de forças nas interfaces de dois elementos: k e m , fornecem:

$$\begin{aligned} u^k(x_k) &= u^m(x_k), \\ F^k(x_k) &= F^m(x_k), \end{aligned} \quad (22)$$

sendo x_k o ponto de interface. As equações (22) possibilitam a compactação de todos os graus de liberdade de deslocamentos dos pontos que não coincidem com pontos do contorno da haste. Nos elementos 1 e n se a condição de contorno for de Dirichlet, o valor especificado vai para o lado direito da (20) com sinal trocado. Caso a condição for de Neuman, expressa-se o deslocamento no ponto de contorno em função da força especificada, com o auxílio das quantidades F^k . Desta forma, o sistema resultante é simétrico e tridiagonal.

Nos problemas de vigas a colocação das equações (18) e (19) nos pontos nodais do elemento I^k , resulta:

$$\begin{bmatrix} G_{k-1,k-1}^k & \frac{dG_{k-1,k-1}^k}{dx} & -G_{k,k-1}^k & -\frac{dG_{k,k-1}^k}{dx} \\ \frac{dG_{k-1,k-1}^k}{d\xi} & \frac{d^2 G_{k-1,k-1}^k}{d\xi dx} & \frac{dG_{k,k-1}^k}{d\xi} & \frac{d^2 G_{k,k-1}^k}{d\xi dx} \\ -G_{k-1,k}^k & -\frac{dG_{k-1,k}^k}{dx} & G_{k,k}^k & \frac{dG_{k,k}^k}{dx} \\ -\frac{dG_{k-1,k}^k}{d\xi} & -\frac{d^2 G_{k-1,k}^k}{d\xi dx} & \frac{dG_{k,k}^k}{d\xi} & \frac{d^2 G_{k,k}^k}{d\xi dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{k-1}^k \\ M_{k-1}^k \\ F_k^k \\ M_k^k \\ w_{k-1}^k \\ \theta_{k-1}^k \\ w_k^k \\ \theta_k^k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{k-1}^k \\ B_{k-1}^k \\ S_k^k \\ B_k^k \end{Bmatrix} \quad (23)$$

onde as derivadas foram tomadas no sentido do traço e se adotou a mesma notação que em (21), acrescida de:

$$B^k(\xi_p) = \int_{I^k} \frac{dG^k(x, \xi_p)}{d\xi} q^k(x) dx = B_p^k \quad (24)$$

Novamente, a compatibilidade dos deslocamentos lineares e angulares e o equilíbrio de forças cortantes e momentos fletores tornam possível a compactação dos graus de liberdade de deslocamentos nos pontos nodais que não estão no contorno da viga. A introdução das condições de contorno no elemento 1 e no elemento n é feita diretamente com a passagem dos valores nodais especificados com sinal trocado, para o lado direito da (23) caso as condições forem de Dirichlet. Caso for condição do tipo Neuman, os deslocamentos nodais correspondentes são expressos em função das quantidades F^k e M^k , com o auxílio das equações (15) e (16). Procedendo assim o sistema de equações lineares resultante é simétrico e com semi-banda de largura 3.

APLICAÇÕES

Exemplo 1. Considere uma haste delgada, engastada em suas extremidades sujeita a uma carga axial distribuída, com as características dadas de acordo com a figura 1, sendo: $L = 30$ cm, $b = 2$ cm, $h = 10$ cm, $E = 2 \times 10^6$ kgf/cm², $q = 2$ kgf/cm.

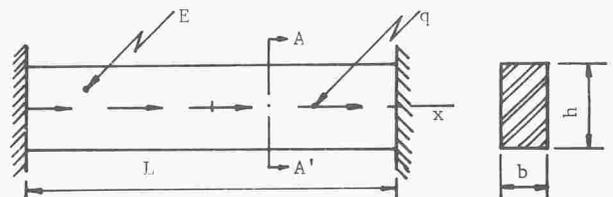


Fig. 1 Haste bi-engastada

Para solução deste problema, a haste não foi particionada, resultando um elemento. A colocação foi feita apenas nos pontos nodais das extremidades. Os resultados numéricos são sintetizados na tabela 1, onde também são mostrados os resultados exatos para efeito de comparação. Mesmo os valores especificados são recalculados após a determinação das incógnitas. Os valores recalculados estão assinalados com um asterisco na tabela 1.

Exemplo 2. Uma haste delgada, engastada em uma extremidade e livre na outra, é sujeita a um

Tabela 1. Resultados comparados

Ponto	x (cm)	$u \times 10^5$ cm		N kgf
		Resultados Exatos		
		Resultados Numéricos		
1	0.	0.	30.	
		0.(*)	30.	
2	15.	0.5625	0.	
		0.53857	0.2710×10^{-16}	
3	30.	0.	- 30.	
		0.(*)	- 30.	

carregamento distribuído e a uma força concentrada com as características da Fig. 2, sendo: $L_1=400$ mm, $b_1=100$ mm, $h_1=100$ mm, $E_1=7000$ kgf/mm², $L_2=300$ mm, $b_2=50$ mm, $h_2=50$ mm, $E_2=21000$ kgf/mm², $q_1=20$ kgf/m, $q_2=10$ kgf/mm, $P=10000$ kgf.

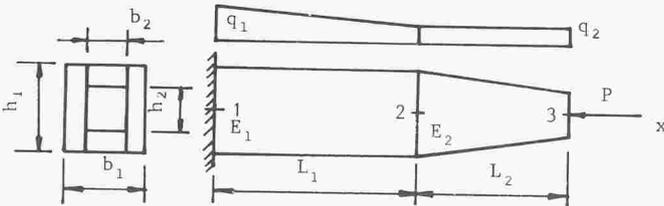


Fig. 2 Haste engastada x livre

Neste exemplo a discretização foi realizada através de dois elementos e os resultados obtidos são mostrados na Tabela 2.

Tabela 2. Resultados comparados

Ponto	x (mm)	$u \times 10$ mm		N x 10 ⁻³ kgf
		Resultados Exatos		
		Resultados Numéricos		
1	0.	0.	- 1.	
		$- 0.5684 \times 10^{-12}$	- 0.999999	
2	400.	- 0.24761	- 7.	
		- 0.24761	- 6.99999	
3	700.	- 0.5911	- 10.	
		- 0.5920	- 10.00000	

Exemplo 3. Considere uma viga em balanço, com seção retangular sujeita a carga concentrada conforme Fig. 3, sendo: $L_1=150$ mm, $L_2=150$ mm, $L_3=100$ mm, $E=7000$ kgf/mm², $P=500$ kgf, $I_1=1953125$ mm⁴ e $I_2=390625$ mm⁴.

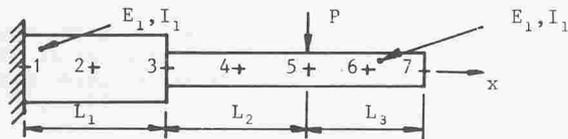


Fig. 3 Viga em balanço

Neste exemplo, a viga foi particionada em 3 elementos. Os resultados obtidos são mostrados comparativamente com os exatos na Tabela 3.

CONCLUSÕES

O emprego do Método Modificado da Função de Green

Tabela 3. Resultados comparativos

Ponto	x (mm)	w mm	$\theta \times 10^2$ rd	$M \times 10^{-5}$ (kgf.mm)	V kgf
		(Resultados Exatos)			
		(Resultados Numéricos)			
1	0.	0.	0.	-1.5	500.
		0.(*)	0.(*)	-1.500	500.
2	75.	0.0283	0.0720	-1.125	500.
		0.02829	0.0720	-1.125	500.
3	150.	0.1029	0.1233	-0.750	500.
		0.1029	0.1234	-0.750	500.0
4	225.	0.2597	0.2778	-0.375	500.
		0.2597	0.2777	-0.3751	500.0
5	300.	0.4937	0.3291	0.	500.0
		0.4937	0.3291	0.(*)	500.0
6	350.	0.6582	0.3291	0.(*)	0.
		0.6583	0.3291	0.(*)	0.(*)
7	400.	0.8229	0.3291	0.	0.
		0.8229	0.3291	0.(*)	0.(*)

Local (MLGFM) para os problemas de hastes e vigas possibilita que a estrutura matricial resultante da discretização seja simétrica e de banda, análoga a que resulta em elementos finitos. Isto favorece o tratamento numérico do problema. Os exemplos resolvidos, mostram que os resultados numéricos concordam muito bem com os exatos disponíveis. Em particular os valores das incógnitas nos pontos nodais de colocação coincidem com os exatos, mesmo quando a discretização foi grosseira.

REFERÊNCIAS

- [1] Horak, W.C., Local Green's Function Techniques for the Solution of Heat Conduction and Incompressible Fluid Flow Problems, Ph. D. Thesis University of Illinois, at Urbana-Champaign, 1980.
- [2] Silva, L.H.M. e Barcellos, C.S., Método Modificado da Função de Green Local, Relatório Interno-UFSC, 1985.
- [3] Burns, T.J., The Partial Current Balance Method: A Local Green's Function Technique for the Numerical Solution of Multidimensional Neutron Diffusion Problems, Ph. D. Thesis, University of Illinois, at Urbana-Champaign, 1975.
- [4] Brebbia, C.A., The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, London, 1978.
- [5] Banerjee, P.K. and Butterfield, Boundary Element Methods in Engineering Science, McGraw-Hill Book Company (UK) Limited, London, 1981.
- [6] Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. and Wrobel, L.C., Boundary Element Techniques, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [7] Bathe, K.J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, New Jersey, 1982.

ABSTRACT

This work presents a integral formulation based upon the Local Green Function Method, for rods and beams problems. This methodology leads to boundary integral equations with the same structure as the indirect formulation, but now the variables are directly related to the physical ones. The numerical results obtained are in good accordance with the analytical ones.