COBEM 87 — IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, SC (Dezembro, 1987)
9th Brazilian Congress of Mechanical Engineering

Análise Modal no Domínio do Tempo

M.A.V. DUARTE, E.B. TEODORO e J.C. PEREIRA

Depto. Engenharia Mecânica — UFU
38400 - Uberlândia - MG

SUMÁRIO

A identificação dos parâmetros de vibração em sistemas com amortecimento elevado, ou com modos de vibrar em frequências muito próximas é bastante complexo, sendo que as técnicas de análise do domínio da frequência podem levar a erros expressivos nos resultados. Neste trabalho é apresentada uma técnica, desenvolvida por SAMIR R. IBRAHIM, para identificaçao dos parâmetros de vibração no domínio a tempo. Esta técnica é utilizada na identificação de sistema com dois graus de liberdade, cujas frequências naturais sejam próximas. Os resultados obtidos são comparados com valores teóricos.

INTRODUÇÃO

A determinação experimental das frequências naturais, amortecimento e informações sobre o comportamento dinâmico de sistemas mecânicos, são obtidos geralmente através do uso de técnicas baseadas na resposta do sistema no Domínio da Frequência. A utilização destas técnicas em sistemas com frequências naturais próximas e amortecimento elevado poderão conduzir a sérios erros nos resultados, devido a hipóteses simplificadoras assumidas [1,2,3].

A técnica envolvendo a análise no Domínio do Tempo, vem sendo estudada já há algum tempo [4,5,6], sendo que esta técnica apresenta bons resultados, mesmo quando os outros métodos já conhecidos falham [4].

Neste trabalho foi utilizada a técnica do Domínio do Tempo para a análise dinâmica de uma mesa vibratória com dois graus de liberdade. Durante os experimentos procurou-se manter as frequências naturais do sistema o mais próximo possível, com a finalidade de se observar a precisão do método nestes casos.

Também procurou-se analisar a influência de alguns fatores julgados importantes quando do uso da técnica, tais como:
- frequência de amostragem na aquisição digital dos sinais;
- espaçamento no tempo entre os pontos utilizados para análise;
- região do sinal a ser analisada.

APRESENTAÇÃO DA TEORIA

Um dos métodos da análise no Domínio do Tempo [4] é baseado na reformulação das equações diferenciais do movimento para resposta livre, de um sistema linear de vários graus de liberdade com amortecimento, ou seja:

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = 0 \qquad (1)$$

onde M = Matriz de inércia;
C = Matriz de amortecimento;
K = Matriz de rigidez;
y = Vetor deslocamento.

A equação (1) pode ser colocada na forma,

$$\begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \dot{y} \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

ou seja

$$\dot{x} = A\,x \qquad (3)$$

onde

$$x = \begin{Bmatrix} y \\ \dot{y} \end{Bmatrix} \qquad (4)$$

Se o deslocamento, velocidade e aceleração são conhecidos para todas coordenadas generalizadas do sistema, então a matriz A pode ser determinada. Para uma matriz A de ordem 2n x 2n (onde n é o número de graus de liberdade do sistema) tem-se

$$\dot{X} = A\,X \qquad (5)$$

assim

$$A = \dot{X} \,.\, X^{-1} \qquad (6)$$

onde

$$X = [x(t_1)\ x(t_2)\ \ldots\ x(t_{2n})] \qquad (7)$$

$x(t_i)$ e $\dot{x}(t_i)$ $(i = 1,2,\ldots 2n)$ são vetores cujos elementos são obtidos medindo-se a resposta do sistema para 2n instantes de tempo diferentes.

Embora esta formulação seja para sistemas discretos a técnica á aplicável também em sistemas contínuos [4].

RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Foram realizados experimentos em duas mesas vibratórias (fig. 1), empregando o método aqui descrito para identificação dinâmica do sistema.

Na faixa de 0 a 100 Hz, os movimentos de translação das mesas podem ser modelados como um sistema discreto de dois graus de liberdade, sendo que os movimentos de rotação são desacoplados, devido as caractersíticas de construção das mesas.

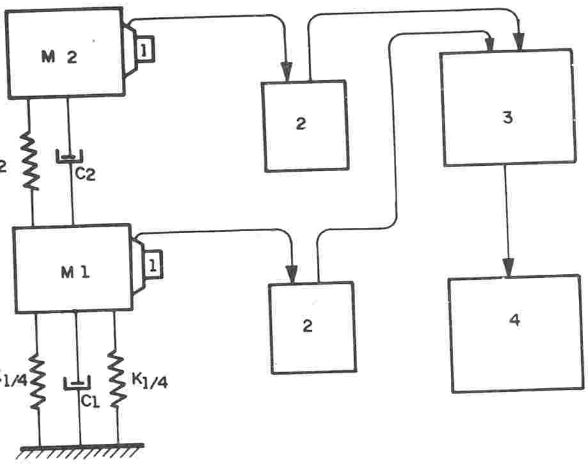
A mudança nas frequências naturais das mesas é obtida pela variação do comprimento das réguas de sustentação.

A resposta do sistema foi medida afixando-se acelerômetros em cada mesa. Os sinais proporcionais à aceleração antes de serem adquiridos digitalmente, foram filtrados em um filtro passa baixa centrado na frequência de 100 Hz.

A excitação do sistema foi feita mediante a imposição de uma translação inicial da mesa 1, o que garantia a excitação dos dois modos de vibrar, sem contudo, exci

*Membro da ABCM

tar os modos de torção da mesa 1.



1 - Acelerômetros, tipo 4367 da B&K
2 - Pré-amplificadores, tipo 2365 da B&K
3 - Automatic Data Aquisition, tipo 3054 da HP
4 - Microcomputador HP-86

Fig. 1 - Montagem esquemática do sistema e da cadeia de medição.

Uma vez obtidos os sinais de aceleração torna-se necessário obter a velocidade e deslocamento em 2n instantes diferente de tempo para utilização da equação (6), valores estes que foram obtidos via integração numérica.

as características dinâmicas de uma estrutura e portanto a matriz A, não dependem das condições iniciais, então conclui-se que a teoria pode ser modificada para se eliminar a condição de conhecimento prévio da velocidade e deslocamento inicial.

Esta modificação é baseada na hipótese de que a resposta da aceleração medida para as n diferentes estações da a estrutura é a soma de duas componentes.

$$\ddot{y}\ (t) = \ddot{y}(t_0) + \hat{\ddot{y}}\ (t) \qquad (8)$$

onde $\ddot{y}\ (t_0)$ é a resposta da aceleração para um tempo arbitrário (designado com $t_0 = 0$), e $\hat{\ddot{y}}\ (t)$ é a mudança da resposta da aceleração a partir do tempo t_0 até o tempo t.

A integração da resposta da aceleração fornece a resposta de velocidade

$$\dot{y}\ (t) = \int_0^t \ddot{y}(t)\ dt + \dot{y}(t_0) \qquad (9)$$

ou

$$\dot{y}(t) = \hat{\dot{y}}(t) + \dot{y}(t_0) \qquad (10)$$

onde $\dot{y}(t_0)$ é o vetor velocidade para um tempo $t = t_0$

A integração da velocidade, equação (9), resulta na resposta do deslocamento.

$$y\ (t) = \int_0^t \int_0^t \ddot{y}(t)\ dt\ d\varepsilon + t\ \dot{y}(t_0) + y(t_0) \qquad (11)$$

$$y(t) = \hat{y}(t) + y(t_0) \qquad (12)$$

$$\hat{y}(t) = \int_0^t \int_0^t \ddot{y}(t)\ dt\ d\varepsilon + t\ \dot{y}(t_0) \qquad (13)$$

Como a equação de estado deve ser satisfeita para todo valor de t, tais como $t = \bar{t}$ e $t = t_1 = \alpha t_1$, inclusive $t = t_0$, pode-se demonstrar que

$$\begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} z \\ \dot{z} \end{Bmatrix} \qquad (14)$$

Na equação (14) z, z e z assumem as novas definições [5]:

$$z = \alpha \int_{t_o}^{\bar{t}} \int_{t_o}^{\varepsilon} \ddot{y}(t)\ dt\ d\varepsilon - \int_{t_o}^{\alpha\bar{t}} \int_{t_o}^{\varepsilon} \ddot{y}(t)\ dt\ d\varepsilon \qquad (15)$$

$$\dot{z} = \alpha \int_{t_o}^{\bar{t}} \ddot{y}(t)\ dt - \int_{t_o}^{\alpha\bar{t}} \ddot{y}(t)\ dt \qquad (16)$$

$$\ddot{z} = \alpha\ \ddot{y}(\bar{t}) - \ddot{y}(\alpha\bar{t}) - (\alpha - 1)\ \ddot{y}(t_o) \qquad (17)$$

Na figura 2 é apresentado o sinal da aceleração, o correspondente sinal da velocidade obtido via integração numérica [7], para um sistema de um grau de liberdade.

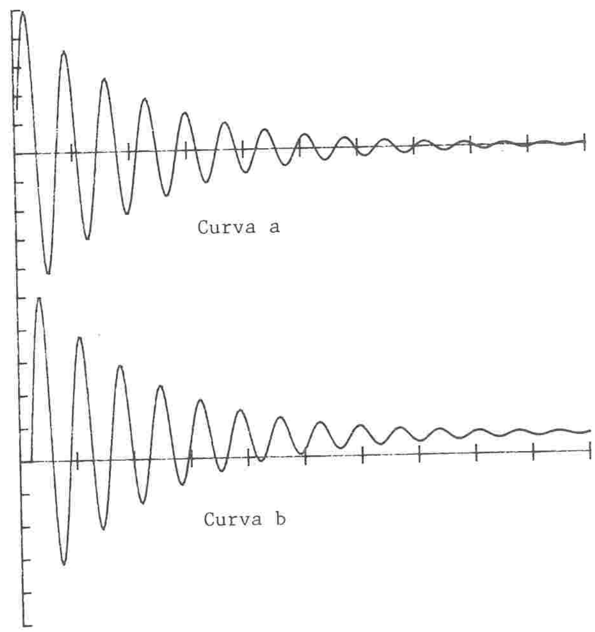


Fig. 2 - a) Curva de aceleração
b) Curva de velocidade

Nota-se que, com a variação do tempo, a curva velocidade se afasta do eixo dos tempos, o que não responde à realidade; fato este devido a diferença e as áreas sob a curva a cada meio período do sinal, vocado pelo amortecimento.Portanto, é desaconselhav integração numérica para um longo intervalo de te Neste trabalho uma defasagem de aproximadamente um to do período, entre t_0, $\bar{t}$ e t_1 para os sinais anal dos tem conduzido a bons resultados.

O sistema com dois graus de liberdade mostrado Figura 1, foi decomposto em dois subsistemas de um de liberdade. Medindo-se as características dinâmic cada um destes subsistemas, equacionou-se um modelo dois graus de liberdade , equivalente ao sistema sc lise. As frequencias naturais (f_1 e f_2) e os fatore amortecimento (η_1 e η_2), foram obtidos resolvendo-se o problema de autovalor para o modelo acima descrito, para uma comparação com os resultados obtidos pelo método de Análise no Domínio do Tempo.

Da Tabela 1 pode-se verificar a influência da relação (R) entre o espaçamento dos pontos a serem utilizados em (07) e o período (T) do sinal analisado. Na montagem da Tabela 1, os valores experimentais de f_1, f_2, η_1, η_2 e do determinante da matriz X, são obtidos para uma média de 10 sinais adiquiridos com uma frequência de amostragem de 1000 Hz, com 512 pontos por canal. Os valores de f_1, f_2, η_1 e η_2, obtidos utilizando o procedimento descrito anteriormente (teóricos) são apresentados para fins de comparação.

Tabela 1 - Influência da relação R na determinação das características dinâmicas do sistema.

Teóricos	11.20	16.04	0.0444	0.0522	-
R	f_1(Hz)	f_2(Hz)	η_1	η_2	$\|X\|$
0,1	-	-	-	-	$1,90\times10^{-20}$
0,2	4,10	8,64	0,2205	0,1753	$2,40\times10^{-18}$
0,3	11,94	16,83	0,0685	0,0308	$1,32\times10^{-15}$
0,4	11,17	16,15	0,0451	0,0472	$8,91\times10^{-15}$
0,5	11,13	16,05	0,0456	0,0495	$1,24\times10^{-14}$
0,6	9,98	14,48	0,0751	0,0552	$3,08\times10^{-15}$
0,7	7,60	10,49	0,1732	0,2015	$1,35\times10^{-14}$
0,8	8,40	13,62	1,0859	1,5636	$1,50\times10^{-15}$

Observa-se que os resultados mais próximos dos teóricos, foram obtidos para uma relação R entre 0,3 e 0,6; para relações menores nota-se que o sistema torna-se indeterminado, o que é indicado pelo determinante de X, enquanto que para relações superiores a 0,5, acredita-se que o erro seja devido a influência do erro advindo da integração numérica que é acumulado ao longo do intervalo de tempo a ser integrado.

A Tabela 2 mostra a influência da frequência de amostragem (f_a) na precisão dos resultados obtidos pelo método da Análise no Domínio do Tempo. Nota-se, que para se alcançar resultados mais precisos é necessário que a frequência de amostragem seja da ordem de 10 vezes a frequência natural mais alta que se deseje analisar no sistema, que no caso é o mesmo da Tabela 1.

Tabela 2 - Influência da frequência de Amostragem (f_a) na determinação das características dinâmicas do sistema.

f_a(Hz)	f_1(Hz)	f_2(Hz)	η_1	η_2
50	0,467	3,28	0,4538	0,1690
100	10,89	15,95	0,0754	0,050
200	10,79	15,78	0,0461	0,0487
500	10,94	16,01	0,0441	0,0521
1000	11,13	16,05	0,0456	0,0495

Para uma avaliação do método aqui apresentado, na separação de frequências naturais próximas, são mostrados na Tabela 3 os valores médios das frequências naturais e fatores de amortecimento obtidos pelo método teórico já descrito e o método da Análise no Domínio do Tempo, para três diferentes montagens da mesa vibratória, utilizando uma relação R = 0,4 e frequência de amostragem de 500 Hz.

Observa-se da Tabela 3, que a precisão do método no Domínio do Tempo não foi influenciada pelo fato do sistema sob análise possuir frequências naturais próximas.

Tabela 3 - Influência da proximidade entre as frequências naturais do sistema.

Montagem		I	II	III
f_1	Teórico	14,66	12,95	15,88
	Exp.	14,54	13,43	15,98
η_1	Teórico	0,0651	0,0912	0,0813
	Exp.	0,0528	0,0497	0,0672
f_2	Teórico	20,27	17,97	17,39
	Exp.	20,17	18,38	17,51
η_2	Teórico	0,1005	0,1675	0,0986
	Exp.	0,0827	0,1200	0,1008

Nota-se que o método fornece bons resultados para os coeficientes de amortecimento do sistema.

CONCLUSÃO

O método do Domínio do Tempo (MDT) analisado neste trabalho, apresenta como vantagens a facilidade de implementação e utilização, além de gerar bons resultados na identificação das características dinâmicas mesmo quando as frequências naturais do sistema são próximas, caso em que os métodos alternativos de análise, no Domínio da Frequência, costumam falhar.

O principal problema encontrado, quando da utilização do MDT, foi a falta de critérios que garantissem que a região sob análise continha informações significativas sobre o comportamento dinâmico do sistema. O critério adotado neste trabalho foi o valor médio dos resultados obtidos em várias regiões dos sinais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Pendered, J.W., "Theorectical Investigation into the Effects of Close Natural Frequencies in Resonance Testing", Journal Mechanical Engineering Science, 1965, Vol 7, Nº 4, pp 372.

[2] Pendered, J.W. and R. E. D. Bishop, "A Critical Introduction to Some Industrial Resonance Testing Techniques", Journal Mechanical Engineering Science, 1963, Vol 5, Nº 4, pp 345.

[3] Young, Joseph P. and Frank J. On, "Mathematical Modeling via Direct Use of Vibration Data", Society of Automative Engineers, Paper Nº 690615, National Aeronautic and Space Engineering and Manufacturing Meeting, Los Angeles, California, October 1969.

[4] Ibrahim, S. R. and Mikulcik, E.C., "A Time Domain Modal Vibration Test Technique", Shock and Vibration Bulletin, Nº 43, Part 4, 1973.

[5] Ibrahim, S. R. and Mikulcik, E. C., "The Experimental Determination of Vibration Parameters from Time Responses", Shock and Vibration Bolletin, Nº 46, Part 5, August 1976, pp 187-196.

[6] Ibrahim, S. R. and Mikulcik, E. C., "A Method for the Direct Identification of Vibration Parameters from the Free Response", Shock and Vibration Bulletin, Nº 47, Part 4, Sept. 1977, pp 183-198.

[7] Kelly, Louis G., "Handbook of Numerical Methods and Apllications", Addison - Wesley Publishing Company 1967, Massachusetts, - USA.

ABSTRACT

In identification of the vibration parameters the application of frequency domain methods to structures with closely spaced natural frequencies and high damping may lead to serious errors in the test results. This paper describes the theory of a technique in time domain for identification of the vibration parameters developed by SAMIR R. IBRAHIM. This technique was used in identification of a sistem with two degree of freedon andclosely spaced natural frequencies. The experimental