COBEM 87 — IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, SC (Dezembro, 1987)
9th Brazilian Congress of Mechanical Engineering

Análise de Ondas Elásticas P, com Amortecimento, em Interfaces com Atrito Linear

MARCÍLIO ALVES e CLÓVIS SPERB DE BARCELLOS

Depto. Engenharia Mecânica — UFSC
Cx. Postal 476 - 88049 - Florianópolis - SC

SUMÁRIO

É abordado neste artigo a propagação de ondas elásticas do tipo P ao atingirem a interface de separação de dois sólidos. A consideração do número de onda como um número complexo faz com que, as ondas, seja introduzido o amortecimento. Isto torna a freqüência uma variável que influi fortemente no fenômeno. A reflexão total não é considerada.

INTRODUÇÃO

O problema de estimar os coeficientes de reflexão e transmissão de ondas elásticas incidindo na interface de separação de sólidos tem-se mostrado fundamental em várias áreas da engenharia |1|, |2|. Geralmente os sólidos são considerados rigidamente conectados |3| embora, mais recentemente, Murty |4| tenha apresentado uma metodologia que resolve o problema de ondas P sem amortecimento atingindo interface sujeita a atrito linear função do deslizamento.

É objetivo deste artigo ampliar a investigação feita por Murty com a consideração do amortecimento das ondas elásticas ao se tornar o número de onda como um número complexo. Isto faz com que as ondas decaiam exponencialmente com as coordenadas espaciais e também com que a freqüência da onda influa fortemente no fenômeno.

Considera-se os sólidos semi-infinitos, lineares, homogêneos, isotrópicos, livres de pré-tensões e sem possibilidade de separação por ação da onda P incidente. As propriedades do sólido superior estão referenciadas por '.

FORMULAÇÃO

Considere os dois sólidos como acima descritos e apresentados na Figura 1. A onda P, representada pelo potencial ϕ, ao atingir a interface, origina ondas P e SV refletidas e transmitidas.

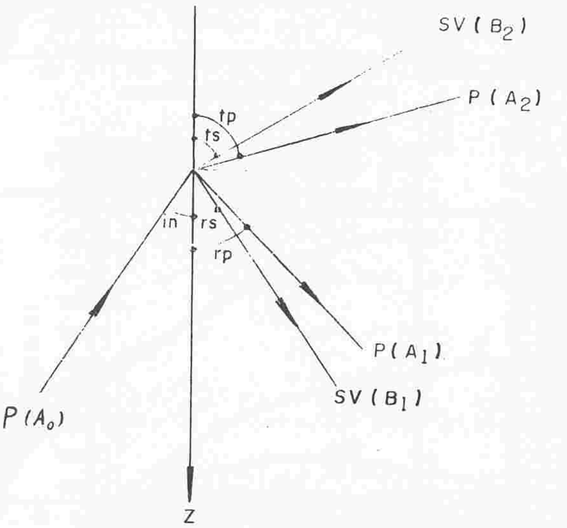

Fig. 1- Dois sólidos cuja interface de separação é atingida por uma onda P.

Os vários potenciais podem ser representados por:

$$\phi = A_0\, e^{-m \,\mathrm{sen}\, in\, (az-x)}\, e^{ik(az-x+ct)} + A_1\, e^{-m\,\mathrm{sen}\, rp\, (-az-x)}\, e^{ik(-az-x+ct)} \quad (1)$$

$$\chi = B_1\, e^{-m\,\mathrm{sen}\, rs\, (-bz-x)}\, e^{ik(-bz-x+ct)} \quad (2)$$

$$\phi' = A_2\, e^{-m'\,\mathrm{sen}\, tp\, (a'z-x)}\, e^{ik(a'z-x+ct)} \quad (3)$$

$$\chi' = B_2\, e^{-m'\,\mathrm{sen}\, ts\, (b'z-x)}\, e^{ik(b'z-x+ct)} \quad (4)$$

onde A_0, A_1 e A_2 são as amplitudes das ondas P; B_1 e B_2 as da onda SV. m e m' são os coeficientes de amortecimento. $k \equiv \omega/c$ é o número de onda na direção x, ω é a freqüência e c a velocidade de fase da onda, também na direção x. Além disso $a = \mathrm{cotg}\, in$, $b = \mathrm{cotg}\, rs$, $a' = \mathrm{cotg}\, tp$ e $b' = \mathrm{cotg}\, ts$.

Para se obter as várias amplitudes a partir de A_0 (A_0 é a amplitude da onda P em x = z = 0) é necessário aplicar as seguintes condições de contorno em z = 0 e x, t quaisquer |5|.

a) Continuidade de Tensões Normais -- $\sigma_{zz} = \sigma'_{zz}$ --

$$\lambda(\phi,_{xx}+\phi,_{zz}) + 2\mu(\phi,_{zz}+\chi,_{xz}) = \lambda'(\phi',_{xx}+\phi',_{zz}) + 2\mu'(\phi',_{zz}+\chi',_{xz}) \quad (5)$$

onde λ e μ são as constantes de Lamé.

b) Continuidade de Tensões Cisalhantes -- $\sigma_{xz} = \sigma'_{xz}$ --

$$\mu(2\phi,_{xz}-\chi,_{zz}+\chi,_{xx}) = \mu'(2\phi',_{xz}-\chi',_{zz}+\chi',_{xx}) \quad (6)$$

c) Continuidade de Deslocamentos Normais -- w = w' --

$$\phi,_z + \chi,_x = \phi',_z + \chi',_x \quad (7)$$

d) Modelo de Atrito na Interface -- $\sigma_{xz} = \tau$ --

É considerado que o atrito é do tipo viscoso linear |4|, |6| onde se destaca a constante de adesão ψ que é um número adimensional que varia de 0 (sólidos sem atrito na interface) a 1 (sólidos rigidamente conectados). tem-se então:

$$\mu(2\phi,_{xz}-\chi,_{zz}+\chi,_{xx}) = i\,\mu\, k\, \frac{\psi}{1-\psi}\, \frac{\phi,_x-\chi,_z-\phi',_x+\chi',_z}{\mathrm{sen}\, rs} \quad (8)$$

onde i é a unidade imaginária.

A partir destas condições de contorno o sistema a ser resolvido será:

$$\sum_{j=1}^{4} M_{ij}\, X_j = V_i \qquad i = 1, 2, 3 \text{ e } 4 \quad (9)$$

onde $(\mu/\mu' = \gamma)$:

$M_{11} = \gamma(b^2-1)(m \text{ sen } rp - ik)^2 \, e^{m \text{ sen } rp} \; x$

$M_{12} = 2\gamma \, b(m \text{ sen } rs - ik)^2 \, e^{m \text{ sen } rs} \; x$

$M_{13} = -(b'^2-1)(m' \text{ sen } tp - ik)^2 \, e^{m' \text{ sen } tp} \; x$

$M_{14} = 2b' \, (m' \text{ sen } ts - ik)^2 \, e^{m' \text{ sen } ts} \; x$

$M_{21} = 2\gamma \, a(m \text{ sen } rp - ik)^2 \, e^{m \text{ sen } rp} \; x$

$M_{22} = -\gamma \, (b^2-1)(m \text{ sen } rs - ik)^2 \, e^{m \text{ sen } rs} \; x$

$M_{23} = 2a' \, (m' \text{sen } tp - ik)^2 \, e^{m' \text{sen } tp} \; x$

$M_{24} = (b'^2-1)(m' \text{ sen } ts - ik)^2 \, e^{m' \text{ sen } ts} \; x$

$M_{31} = a(m \text{ sen } rp - ik) \, e^{m \text{ sen } rp} \; x$

$M_{32} = (m \text{ sen } rs - ik) \, e^{m \text{ sen } rs} \; x$

$M_{33} = a' \, (m' \text{sen } tp - ik) \, e^{m' \text{ sen } tp} \; x$

$M_{34} = -(m' \text{ sen } ts - ik) \, e^{m' \text{ sen } ts} \; x$

$M_{41} = \{2a(1-\psi)(m \text{ sen } rp - ik) - ik\psi/\text{sen } rs\} \, .$

$\quad . \, (m \text{ sen } rp - ik) \, e^{m \text{ sen } rp} \; x$

$M_{42} = \{-(b^2-1)(1-\psi)(m \text{ sen } rs - ik) + ik\psi b/\text{sen } rs\} \, .$

$\quad . \, (m \text{ sen } rs - ik) \, e^{m \text{ sen } rs} \; x$

$M_{43} = ik\psi \, (m' \text{ sen } tp - ik) \, e^{m' \text{ sen } tp} \; x/_{\text{sen } rs}$

$M_{44} = ik\psi b' \, (m' \text{ sen } ts - ik) \, e^{m' \text{ sen } ts} \; x/_{\text{sen } rs}$

$V_1 = -\gamma \, (b^2-1)(m \text{ sen } in - ik)^2 \, e^{m \text{ sen } in} \; x$

$V_2 = 2\gamma \, a \, (m \text{ sen } in - ik)^2 \, e^{m \text{ sen } in} \; x$

$V_3 = a(m \text{ sen } in - ik) \, e^{m \text{ sen } in} \; x$

$V_4 = \{2a(1-\psi)(m \text{ sen } in - ik) + ik\psi/\text{sen } rs\} \, .$

$\quad . \, (m \text{ sen } in - ik) \, e^{m \text{ sen } in} \; x$

$X_1 = A_1/A_0 \, , \; X_2 = B_1/A_0, \; X_3 = A_2/A_0 \text{ e } X_4 = B_2/A_0$

RESULTADOS

O sistema de equações acima foi resolvido admitindo-se as seguintes constantes: $m = 0{,}01$ Np/m, $m' = 0{,}1$ Np/m, $\gamma = 1$, $\sigma = \sigma' = 0{,}3$ (σ é o coeficiente de Poisson) e $c_1/c_1' = 1{,}1$ (c_1 é a velocidade da onda P). A reflexão total não é considerada. Quando $m = m' = 0$ o sistema independe da freqüência.

Em vez de serem plotadas as amplitudes optou-se por apresentar a raiz quadrada das energias das várias ondas em relação à incidente. Estas expressões são dadas por |3|, |5|.

$$E_j = \sqrt{K_j} \, X_j \quad , \quad j = 1, 2, 3 \text{ e } 4 \qquad (10)$$

onde $K_1 = 1$, $K_2 = b/a$, $K_3 = \rho' a'/\rho a$ e $K_4 = \rho' b'/\rho a$.

As Figuras 2 e 3 apresentam o compartimento das várias ondas em função do ângulo de incidência quando $\omega = 10^3$ Hz.

Para esta freqüência as energias das ondas transmitidas são muito pequenas e os gráficos não serão apresentados. As Figuras 4 e 5 mostram as tensões que ocorrem no contorno.

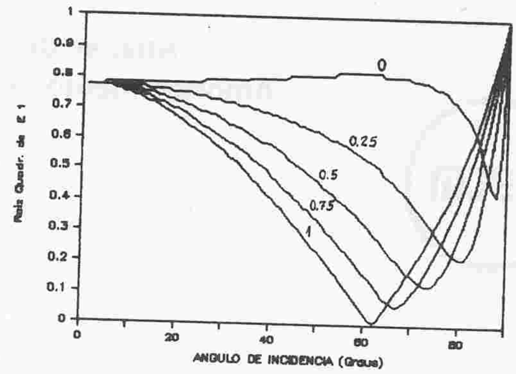

Fig. 2- Onda P refletida em função do ângulo de incidência $c/c' = 1{,}1$, $\gamma = 1$, $\sigma = \sigma' = 0{,}3$, $m = 0{,}01$ Np/m, $m' = 0{,}1$ Np/m, $\omega = 10^3$ Hz.

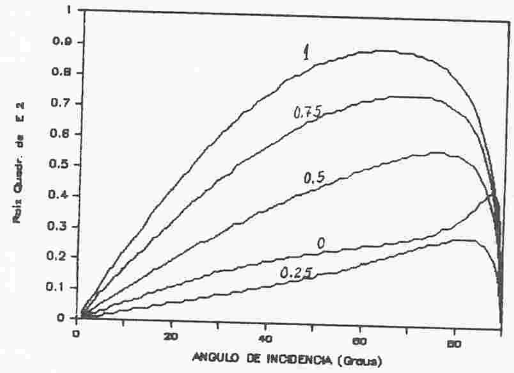

Fig. 3- Onda SV refletida para $\omega = 10^3$ Hz.

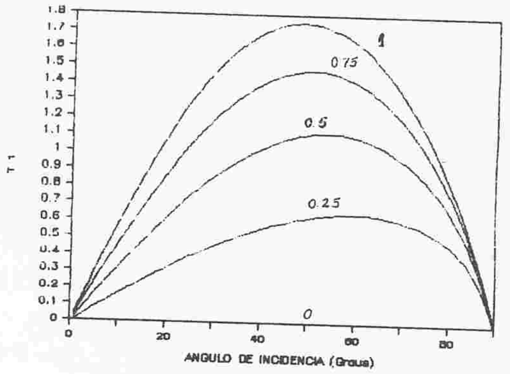

Fig. 4- Tensão Cizalhante no contorno para $\omega = 10^3$ Hz.

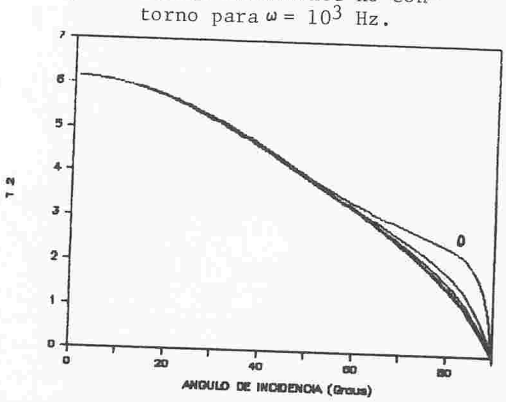

Fig. 5-Tensão Normal no contorno para $\omega = 10^3$ Hz.

As Figuras 6, 7, 8 e 9 mostram o comportamento das várias ondas agora para $\omega = 10^6$ Hz. Em especial nota-se um sensível aumento no poder de penetração das ondas.

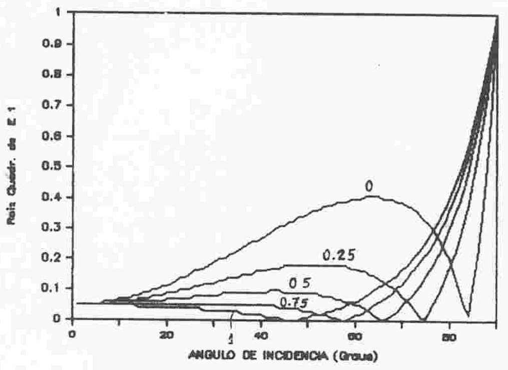

Fig. 6- Onda P refletida para $\omega = 10^6$ Hz.

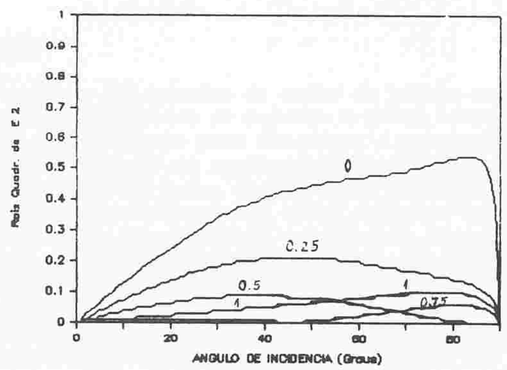

Fig. 7- Onda SV refletida para $\omega = 10^6$ Hz.

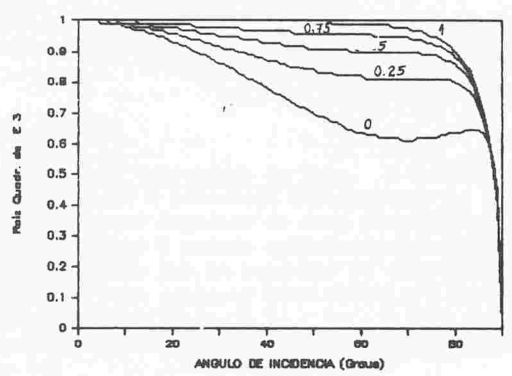

Fig. 8- Onda P transmitida para $\omega = 10^6$ Hz.

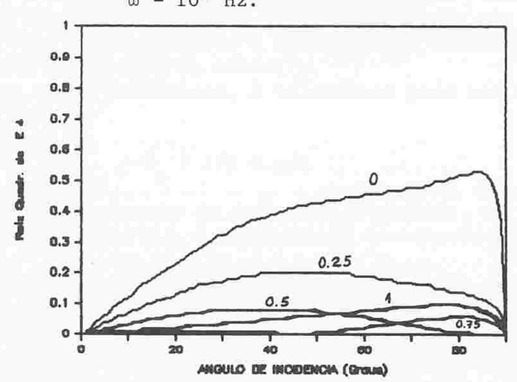

Fig. 9- Onda SV transmitida para $\omega = 10^6$ Hz.

As Figuras 10 e 11 mostram o deslizamento na interface, que diminui com o aumento da freqüência. Este diminui também com o aumento de ψ. Nas figuras o deslizamento é apresentado dividido por A_0 $(m - k_t)$ onde k_t é o número de onda da onda P incidente.

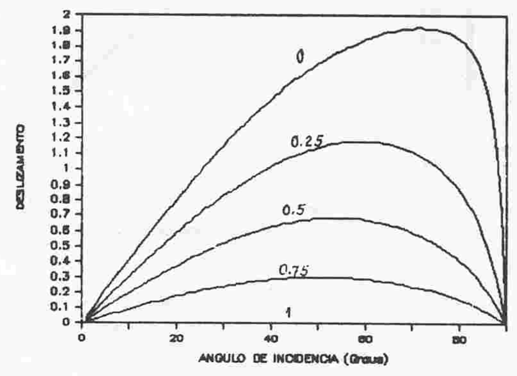

Fig. 10- Deslizamento localizado na interface de contato dos sólidos $\omega = 10^3$ Hz.

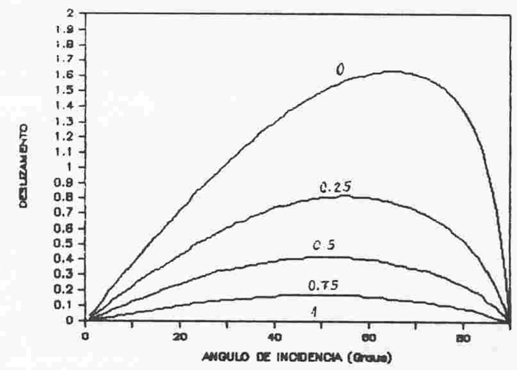

Fig. 11- Com o aumento da freqüência d diminui. Pode-se mostrar que a partir de uma certa freqüência seu valor estabiliza-se |5|.

As próximas duas figuras mostram o deslocamento w normal à superfície de contato, em função do ângulo de incidência e dividido por $(m - ik_t)$. Pode-se imaginar, a princípio, que o grau de aderência dos sólidos não influi no deslocamento mas isso ocorre devido ao efeito do coeficiente de Poisson.

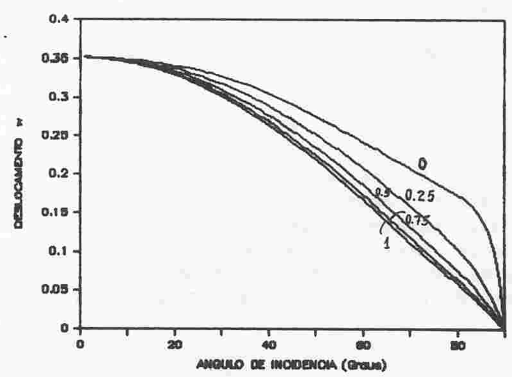

Fig. 12- O deslocamento w em função do ângulo de incidência $\omega = 10^3$ Hz.

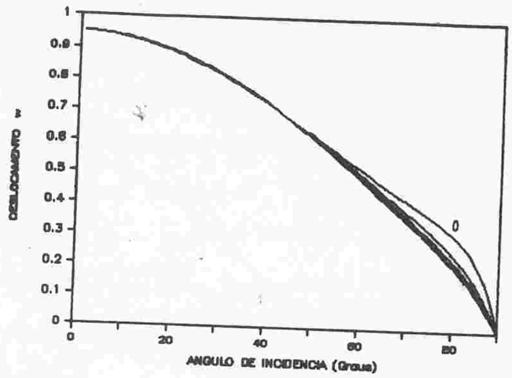

Fig. 13- Deslocamento w para $\omega = 10^6$ Hz. A constante de adesão influi menos que no caso anterior.

CONCLUSÕES

Pelo que foi apresentado é possível concluir que a consideração do amortecimento das ondas elásticas é fundamental para descrever mais precisamente o fenômeno. A freqüência surge como uma variável do problema e o seu aumento faz com que aumente o poder de penetração das ondas transmitidas ao meio II. Ela também influi no deslizamento localizado dos sólidos na interface como foi mostrado nas Figuras 10 e 11.

O efeito de Poisson faz com que o grau de aderência dos sólidos influa no deslocamento normal à superfície de contato. Quanto mais levemente os sólidos estão conectados maior é o deslocamento normal. Isto é mais evidente para ondas de baixa freqüência.

REFERÊNCIAS

|1| Brekhovskikh, L.M., Waves Layered Media, 2ª ed, Academic Press, pp. v-503, 1980.

|2| Graff, K.F., Wave Motion in Elastic Solids, 1ª ed, Ohio State University Press, pp. viii - 649, 1973.

|3| Ewing, W.M., Jardetzky, W.S. e Press, F., Elastic Waves in Layered Media, 1ª ed, McGraw-Hill Book Company, pp. viii - 380, 1957.

|4| Murty, G.S., Reflection, Transmission and Attenuation of Elastic Waves at a Loosely - Bonded Interface of Two Half Spaces, Geophys. J.R. astr. Soc., Vol. 44, pp. 389-404, 1976.

|5| Alves, M., O Método da Linearização Equivalente Aplicado às Ondas Elásticas com Amortecimento, Dissertação de Mestrado, UFSC, Brasil, 1987.

|6| Alves, M., Barcellos, C.S., Análise de Ondas Elásticas SH, com e sem Amortecimento, em Interfaces com Atrito Linear, Anais do IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis - SC, 1987.

ABSTRACT

In this paper we present the study of P wave when it reaches the interface of separation of two solids. The consideration of wave number as a complex number introduces damping in the waves. In this case the frequency becomes a variable that strongly affects the phenomenon , the total reflection is not considered.