

Edison da Rosa  
GRANTE - Grupo de Análise de Tensões  
Departamento de Engenharia Mecânica - UFSC  
CP 476 - 88049 - Florianópolis - SC

## RESUMO

O trabalho apresenta um review dos conceitos de confiabilidade visando a aplicação a vários modos de falha. Inicialmente tem-se a conceituação de confiabilidade, com o desenvolvimento de um modelo para a análise de falha por sobrecarga, detalhando dois casos particulares. O primeiro destes é quando a solicitação que atua sobre o componente é caracterizada por uma distribuição normal e o segundo caso quando a solicitação é representada por uma distribuição de Rayleigh. Estes dois casos são as situações extremas para um sinal aleatório, caracterizados pelo fator de irregularidade de 0 e 1. Um terceiro caso é detalhado, que corresponde a um valor intermediário para o fator de irregularidade. Para uma falha por desgaste são apresentados dois modelos, um para desgaste no conceito amplo e outro para uma falha por fadiga. No caso específico do modelo para análise de fadiga são apresentados dois enfoques. O primeiro é um enfoque discreto, onde as diferentes flutuações de solicitação são analisadas individualmente. No segundo, é adotado um enfoque integral, com a informação colocada de uma forma probabilística. O trabalho conclui com um exemplo de aplicação dos diferentes aspectos discutidos, para uma situação típica de componentes de suspensão.

## 1. INTRODUÇÃO

O projeto de sistemas e componentes estruturais da indústria automotiva possui algumas características peculiares, quanto ao tipo de solicitação atuante, tipicamente dinâmica e imprevisível, e quanto aos requisitos da segurança em operação. Esta segurança em operação deve ser traduzida em parâmetros de projeto, tradicionalmente na forma de um coeficiente de segurança. Com a crescente exigência de competitividade, em termos de desempenho de produto, redução de custos, bem como menores prazos de desenvolvimento do produto, aplicações em casos diferentes do habitual e o uso de ferramentas modernas de projeto, como os sistemas CAE/CAD/CAM, o procedimento tradicional de projeto deve sofrer significativas reformulações, para fazer frente a estas novas situações. O presente trabalho procura focar um dos pontos que é, ainda hoje, tratado de uma forma muito subjetiva, para não dizer empírica, que é a de caracterização dos níveis de segurança adequados a um dado projeto. O enfoque proposto para a análise de segurança faz um intensivo uso dos conceitos probabilísticos, de forma a fornecer uma ferramenta suficientemente potente para resolver situações onde a solicitação é aleatória, excitando dinamicamente a estrutura, permitindo uma criteriosa avaliação do nível de segurança existente, ao longo da vida do produto. A metodologia desenvolvida pode ser aplicada de uma forma bastante simples, quando no desenvolvimento do projeto preliminar, pelo uso de um fator de projeto calculado adequadamente, ou então em uma etapa de avaliação do projeto, onde pode ser acoplada diretamente com os modernos métodos numéricos de

análise de tensões, como o método dos elementos finitos ou dos elementos de contorno. O trabalho inicia por uma apresentação dos conceitos de confiabilidade, evoluindo em seguida para o estudo dos modelos para uma falha por sobrecarga. Após são discutidos os modelos para uma falha por acúmulo de dano. Com estes modelos apresentados, é indicado o procedimento necessário para avaliar o nível de solicitação nos pontos críticos do produto, a partir da excitação que age na estrutura e de um modelo numérico desta. Finalmente são discutidas algumas aplicações da metodologia apresentada.

## 2. CONFIABILIDADE

A teoria clássica de projeto ignora o fato de que muitas variáveis em Engenharia não são valores perfeitamente definidos, mas que variam dentro de um certo intervalo. O processo clássico de projeto, com o uso de um coeficiente de segurança, é simples e fácil de empregar, mas peca pela falta de um maior rigor no tratamento quantitativo das variáveis de projeto. A necessidade de estabelecer uma base mais racional, com métodos precisos na determinação da performance estrutural, tornou-se clara com o uso cada vez mais difundido de sistemas com requisitos de alta performance, com custos bastante elevados, o que implica em uma grande responsabilidade por parte do projetista.

Nestes tipos de aplicações, em que um mínimo de peso, extrema segurança e confiança no desempenho são exigências primordiais, o caminho mais aceitável para trabalhar com as variáveis de projeto é adotar um procedimento probabilístico. A diferença fundamental entre o método clássico do projeto mecânico e o enfoque probabilístico consiste no fato de se admitir uma probabilidade de falha. No método clássico a probabilidade de falha do projeto fica oculta por um coeficiente de segurança. Por outro lado, o enfoque probabilístico, de uma maneira mais condizente com a realidade, admite a existência de uma chance de falha.

O termo confiabilidade está intimamente ligado à confiança em algo. No caso do projeto em Engenharia, está relacionado com a confiança sobre um projeto executado. Tal pode ser traduzido pela segurança do projeto quando em uso. A segurança de um sistema estrutural é habitualmente obtida através de um coeficiente de segurança, de escolha um tanto arbitrária. O uso de uma margem de segurança se faz necessário, pois apenas em raras ocasiões o projetista conhece com exatidão o valor de todas as variáveis de projeto. Por outro lado, uma análise feita com todo o cuidado e rigor pode ficar desprovida de valor, se a precisão de seus resultados for diluída pelo uso de fatores empíricos, escolhidos arbitrariamente, com base em considerações as vezes pouco relevantes. Assim, um dos objetivos da análise de confiabilidade é justamente definir a margem de segurança a usar, através de um fator de projeto, definido como a relação entre os valores médios da resistência e da solicitação. O coeficiente de segurança real que existe é tratado como uma variável aleatória, podendo assumir qualquer valor. O fator de projeto é determinado a partir das dispersões das variáveis de projeto e do grau de segurança necessário.

É conveniente neste ponto definir com precisão o termo confiabilidade, o qual pode ser então colocado como "a probabilidade de que um componente, ou sistema, operando dentro dos limites de projeto, não falha durante o período de tempo previsto para a sua vida, dentro das condições de agressividade do meio". Desta definição vê-se que três fatores são relacionados com a confiabilidade, que são, em primeiro lugar a definição

do que é a falha do sistema. Em segundo lugar tem-se o período de vida e em terceiro lugar, o meio ambiente onde o produto foi posto a operar.

Da teoria da confiabilidade, esta pode ser expressa, aproximadamente, para um conjunto de produtos idênticos postos a operar, como sendo a fração de produtos ainda operacionais, no instante de tempo considerado. Desenvolvendo este conceito chega-se a expressar a confiabilidade a partir da taxa de falhas  $h(t)$  como

$$C(t) = \exp - \int_0^t h(t) dt$$

A taxa de falhas pode ser pensada como a fração de produtos idênticos que falham, por unidade de tempo.

A avaliação da confiabilidade para um dado produto pode ser feita considerando que, para uma dada vida correspondente ao instante de tempo  $t$ , ela é a probabilidade de que não ocorra uma falha. Considerando os modos de falha mais usuais para peças e componentes mecânicos, vem

$$C(t) = P [\text{não ocorra falha para vida} < t]$$

onde a não ocorrência de falha implica, por exemplo, que o sistema não falha

- por escoamento
- por plastificação
- por ruptura frágil
- por ruptura dútil
- por instabilidade
- por desgaste
- por fadiga
- por corrosão
- por fluência
- por fretting
- etc.

Todos os modos de falha citados, bem como qualquer outro que venha a manifestar-se, enquadram-se em duas grandes classes, a dos modos de falha por sobrecarga e os modos de falha por acúmulo de dano. Os modos de falha por sobrecarga, também designados de modos de falha independentes do tempo, ou ainda de modos de falha por chance, são os modos que caracterizam-se por terem igual probabilidade de ocorrerem nos primeiros cinco minutos de operação do produto, como nos últimos cinco minutos da vida deste produto. Estes modos atuam em geral quando a demanda que é exigida do sistema, ou seja, a solicitação atuante, ultrapassa pela primeira vez a capacidade deste mesmo sistema, ou seja, a sua resistência, levando-o ao calapso. Esta categoria engloba os modos de falha por ruptura, plastificação, flambagem, etc. Os modos de falha por acúmulo de dano, ou seja, dependentes do tempo de uso do produto, são também chamados de modos de falha por desgaste ou por envelhecimento. Estes modos caracterizam-se por necessitar um certo tempo de operação do sistema, em serviço ou não, para que iniciem a atuar, sendo portanto mais prováveis de ocorrerem conforme a vida vai aumentando. Estes modos atuam na forma de uma redução gradativa das propriedades do sistema, que influem diretamente sobre sua capacidade. Esta categoria engloba as falhas por desgaste, por corrosão, por fadiga, por corrosão sob tensão, por fluência, etc.

Esta divisão entre os modos de falha é fundamental, pois a análise de

resistência mecânica bem como a análise de confiabilidade, para cada uma das duas categorias, são feitas de forma independente, considerando as características específicas de cada uma, envolvendo diferentes modelos para caracterizar tanto o carregamento que atua, como a resistência do componente à cada modo de falha. Uma cuidadosa definição do que consiste a falha do produto deve ser realizada, bem como o relacionamento desta com os modos de falha, para permitir uma análise de resistência e de confiabilidade consistentes.

De uma forma geral é possível dizer que a confiabilidade é dada por

$$C(t) = C(t)_{\text{sobrecarga}} \cdot C(t)_{\text{desgaste}}$$

O objetivo passa a ser agora o de detalhar os modelos de falha por sobrecarga, que vão permitir o cálculo da confiabilidade do sistema para os modos de falha que se enquadram neste caso e após, apresentar os modelos de falha por desgaste ou acúmulo de dano, para permitir o cálculo da confiabilidade correspondente.

### 3. MODELOS PARA FALHA POR SOBRECARGA

Quando um sistema solicitado dinamicamente, para um carregamento aleatório, possui como possibilidade de falha mais provável um modo onde a falha caracteriza-se pelo evento  $S(t) \geq R(t)$ , onde  $S(t)$  é a variável aleatória da solicitação e  $R(t)$  é a variável aleatória correspondente à resistência do sistema no instante considerado, diz-se que trata-se de uma falha por sobrecarga. A figura 1 a seguir ilustra o comportamento que pode-se esperar para  $S(t)$  e  $R(t)$ . A variável  $R(t)$  vai sofrendo o efeito do tempo de uso do equipamento, com uma degradação crescente nas propriedades dos materiais empregados na fabricação do sistema. Esta degradação é traduzida por uma redução dos níveis de  $R(t)$  com o tempo, bem como por um aumento na faixa de dispersão dos valores da resistência.

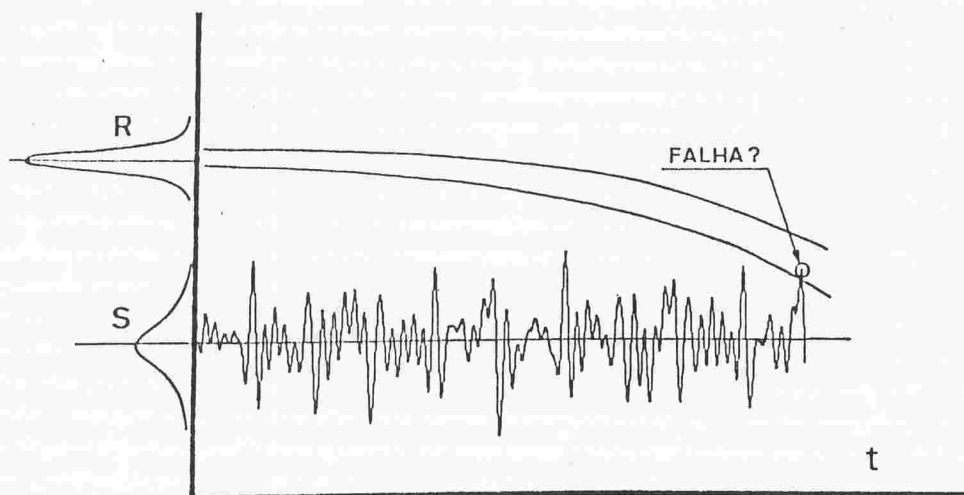


Fig. 1. Solicitação aleatória em um sistema com degradação da resistência.

#### 3.1. CONFIABILIDADE PARA FALHA POR SOBRECARGA

Para a falha por sobrecarga passa a ser relevante, como solicitação

que atua no componente, os pontos de máximo do carregamento. Isto é decorrência do fato de que a falha ocorre não porque o carregamento, num dado instante, atingiu o valor da resistência, mas sim porque um pico da solicitação ultrapassou a resistência. Desta forma, para os modos de falha por sobrecarga, é relevante a distribuição estatística dos máximos do carregamento. Estes máximos é que serão considerados como a solicitação que atua sobre o carregamento mecânico. Analisando um único ponto de máximo, a probabilidade de que este valor atingiu o nível da resistência, e portanto leve à falha, é denominada de probabilidade de interferência,  $P_I$ , calculada como

$$P_I = P [S_{\max} \geq R]$$

e usando as distribuições estatísticas dos máximos da solicitação e da resistência, pode ser calculada, seja analiticamente ou numericamente, dependendo do caso.

Deste modo, a probabilidade de interferência corresponde ao que se denomina na teoria da confiabilidade de caso fundamental, onde é estudado o efeito de uma única aplicação de carga. Para este caso a probabilidade de falha do sistema, por sobrecarga, é a própria probabilidade de interferência. Para outras situações, é necessário agora considerar as peculiaridades de cada caso. Como o interesse é para uma solicitação dinâmica, além da distribuição dos máximos desta solicitação, as informações relativa a frequência com que estes máximos ocorrem passam a ser também fundamentais. Com a caracterização dada pela figura 1 a probabilidade de interferência é função do tempo, já que a resistência do material sofre uma degradação.

De modo a desacoplar os efeitos de uma falha por sobrecarga com os efeitos de degradação da resistência, que são decorrentes da ação dos modos de falha por envelhecimento, será considerado que  $R(t)$  não é afetado pela vida, sendo portanto constante no tempo.

Para uma solicitação dinâmica, já raciocinando em termos de máximos do carregamento, que atua várias vezes ao longo do tempo, com a resistência não degradando-se com a vida, a probabilidade de falha para cada sobrecarga será  $P_I$  (caso fundamental) e assim, para cada aplicação de carga vem:

Probabilidade de que ocorra a falha	$P_I$
Probabilidade de que não ocorra a falha	$1-P_I$

Esta situação é caracterizada estatisticamente como uma distribuição de Bernoulli e se a ocorrência dos picos for repetida um número  $n$  de vezes, desde que em cada novo pico a probabilidade de falha permaneça igual, então existe uma sequência de eventos de Bernoulli, o que leva a uma distribuição binomial. Considerando agora a função como variável no tempo, se o interesse é sobre o número de eventos de Bernoulli, sobre um intervalo de tempo e se este intervalo de tempo for levado ao limite, para zero, chega-se assim a uma distribuição de Poisson que fornece a probabilidade de ocorrer um certo número de falhas para uma dada vida. Como o interesse é em geral sobre o tempo de vida até a primeira falha, este tempo passa a seguir uma distribuição exponencial, o que leva para a confiabilidade uma expressão simplificada, já que a taxa de falhas passam a ser constante.

Tal é válido quando se considera, portanto, que as probabilidade estatísticas de  $S(t)$  não variem no tempo, ou seja, que a solicitação seja



um processo estocástico estacionário, e ergódico, então a equação da confiabilidade fica sensivelmente simplificada, pois a taxa de falhas  $h(t)$  passa a ter um valor constante  $\lambda$ , denominado de taxa média de falhas e portanto

$$C(t) = \exp [-\lambda t]$$

A taxa média de falhas é dada pela probabilidade de ocorrência dos eventos de Bernoulli, ou seja, a probabilidade de interferência do caso fundamental, e pela frequência com que os pontos de máximo ocorrem,  $f_p$ , ou

$$\lambda = f_p \cdot P_I$$

e assim finalmente a confiabilidade é calculada por

$$C(t) = \exp [- P_I f_p t]$$

O ponto agora passa a ser o cálculo da probabilidade de interferência, onde para alguns casos particulares é possível uma solução analítica.

### 3.2. A PROBABILIDADE DE INTERFERÊNCIA

Considerando que a sollicitação que atua sobre o ponto crítico seja um processo estocástico ergódico, uma hipótese bastante viável, e geralmente feita, é de que esta sollicitação tenha uma distribuição gaussiana, ou seja, a sua distribuição estatística seja normal. Para a resistência que o sistema apresenta é possível também adotar, na maioria dos casos, uma distribuição normal. Com estas hipóteses, então tanto a sollicitação atuante como a resistência seguem distribuições normais, o que permite que se chegue a soluções analíticas para o cálculo da probabilidade de interferência. A figura 2 ilustra a situação em discussão.

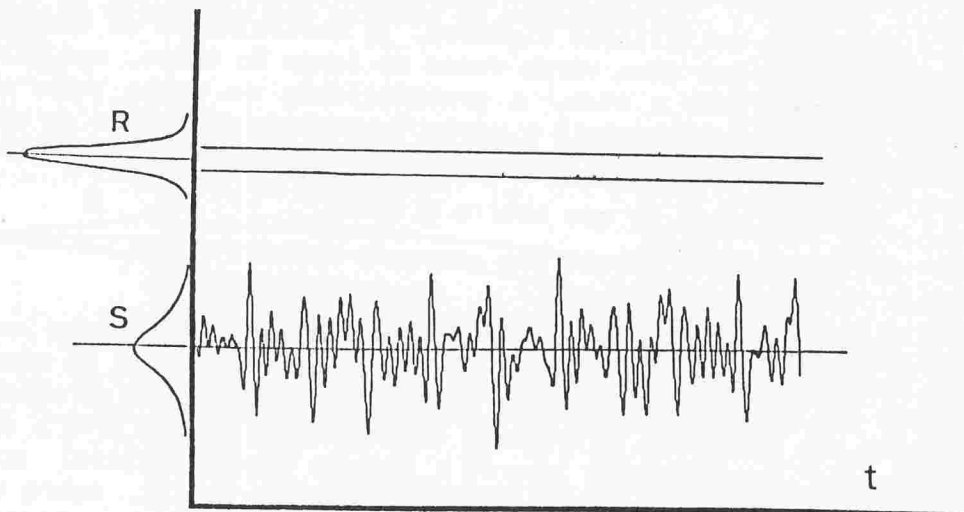


Fig. 2. Sollicitação segundo um processo estocástico ergódico gaussiano e a resistência também seguindo uma distribuição normal.

Para o cálculo da probabilidade da interferência é necessário no entanto trabalhar com a distribuição dos máximos de  $S$  e não com a distribuição de  $S$ , conforme já comentado. A distribuição de máximos de  $S$ ,

pode ser deduzida a partir do conteúdo de frequência de S e dois casos extremos são básicos.

O caso da solicitação ser um processo de banda estreita fica caracterizado por uma pequena faixa no conteúdo de frequência de S(f), ou seja, a sua densidade espectral é definida em um pequeno intervalo, conforme mostra a figura 3.

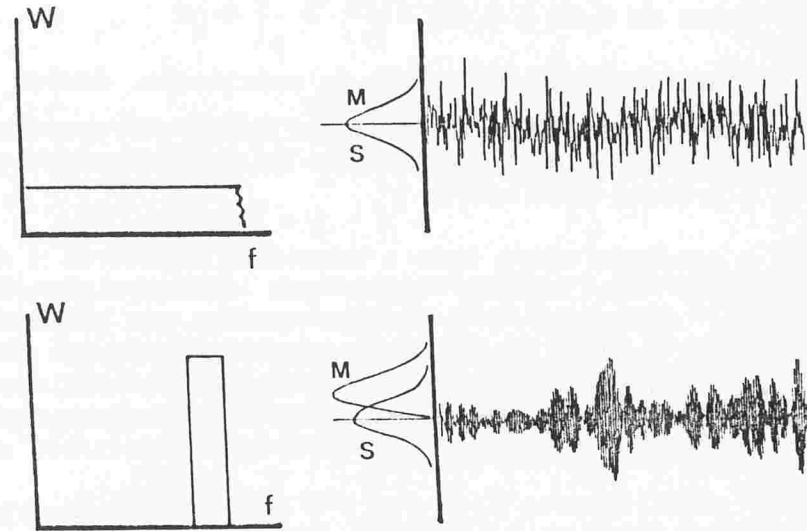


Fig. 3. Solicitação gaussiana de banda estreita e de banda larga.

Para a condição onde a densidade espectral é de banda larga, a distribuição de máximos coincide com a distribuição do sinal, ou seja, os máximos seguem também uma distribuição normal. Desta forma, a probabilidade de interferência é calculada diretamente pela expressão abaixo, onde  $\phi(z)$  é a função de probabilidade acumulada da distribuição normal, em geral tabelada.

$$P_I = 1 - \phi(z)$$

$$z = \frac{\mu_R - \mu_S}{[\sigma_R^2 + \sigma_S^2]^{1/2}}$$

As variáveis  $\mu_R$  e  $\sigma_R$  são respectivamente a média e o desvio padrão da resistência e  $\mu_S$  e  $\sigma_S$  são os correspondentes valores para a solicitação. Em uma condição de projeto, onde não se tem o dimensionamento da peça e procura-se determinar qual o coeficiente de projeto a adotar, definindo este como a relação entre a média da resistência e a média da solicitação, tem-se

$$n = [1 + \sqrt{1 - \delta_R \delta_S}] / \delta_R$$

onde

$$n = \mu_R / \mu_S$$

$$\delta_i = 1 - [Z V_i]^2$$

$$V_R = \sigma_R / \mu_R$$

$$V_s = \sigma_s / \mu_s$$

sendo

$n$  - fator de projeto, análogo ao usual coeficiente de segurança;

$V_R$  - Coeficiente de dispersão da resistência, um índice da maior ou menor aleatoriedade das propriedades do material. Pode ser pensado como um índice de homogeneidade do material. Em geral na faixa de 0,02 a 0,05;

$V_s$  - Coeficiente de dispersão da solcitação. Indica o grau de aleatoriedade da excitação dinâmica que é sobreposta ao valor de carga estática. É muito dependente da aplicação e do meio ambiente onde o produto deve operar.

Para a condição agora onde a densidade espectral é de banda estreita, a distribuição dos máximos segue uma distribuição de Rayleigh, cujo parâmetro de definição é o desvio padrão da distribuição normal da solcitação. A probabilidade de interferência deve ser agora calculada entre a distribuição de Rayleigh dos máximos e a distribuição normal da resistência. O desenvolvimento analítico leva à expressão

$$P_I = \frac{V_s}{\sqrt{E}} \exp \left[ - \frac{(n-1)^2}{2E} \right]$$

onde

$$E = V_s^2 + (n V_R)^2$$

$$n = \mu_R / \mu_s$$

$$V_R = \sigma_R / \mu_R$$

$$V_s = \sigma_s / \mu_s$$

Pela estrutura da expressão de  $P_I$  não é possível neste caso explicitar o fator de projeto como uma função de  $P_I$ , sendo neste caso necessária uma solução iterativa, ou gráfica, para determinar qual  $n$  deve ser usado em um dado projeto, para atingir uma probabilidade de interferência compatível com o nível de segurança desejado para o produto, dentro da vida especificada.

As duas condições limites, de uma densidade espectral da solcitação de banda estreita, que leva a uma distribuição de Rayleigh para os máximos e a de uma densidade espectral de banda longa, que leva a uma distribuição normal, podem não ser adequadas a um caso real, onde tem-se que a densidade espectral da solcitação não enquadra-se nos casos extremos. Uma maneira de avaliar o tipo de densidade espectral do sinal é através do chamado fator de irregularidade  $\alpha$ , definido por

$$\alpha = f_o / f_p$$

onde  $f_o$  é a frequência esperada do sinal e  $f_p$  é a frequência dos máximos, que podem ser obtidas por



$$f_0^2 = m_2/m_0$$

$$f_p^2 = m_4/m_2$$

onde  $m_m$  é o momento de ordem  $m$  da densidade espectral unilateral  $W(f)$  do sinal da solicitação,

$$m_m = \int_0^{\infty} f^m W(f) df$$

Uma outra maneira de avaliar a função densidade espectral é pela chamada largura de banda espectral  $\epsilon$ , dado por

$$\epsilon^2 = 1 - \alpha^2$$

Para uma densidade espectral de banda estreita, a frequência de picos praticamente coincidente com a frequência do sinal e logo  $\alpha = 1$  ( $\epsilon = 0$ ). Para um sinal agora com uma densidade espectral da banda larga, idealmente o número de picos é muito maior do que as passagens pelo valor médio do sinal. Isto leva que para um processo ideal de banda larga,  $\alpha = 0$  ( $\epsilon = 1$ ), caracterizando uma distribuição gaussiana para os máximos, [15].

Para a situação geral onde  $0 < \alpha < 1$ , a probabilidade de interferência passa a ter um valor intermediário entre a situação com  $\alpha = 0$  (menor  $P_I$ ) e com  $\alpha = 1$  (maior  $P_I$ ). Um extenso trabalho analítico de integração permite calcular, para o caso geral, a probabilidade de interferência  $P_I$  como sendo

$$P_I = [1 - \phi(z_1)] + \alpha P_{IR} [1 - \phi(z_3)]$$

onde  $P_{IR}$  é dado para o caso onde  $\alpha = 1$ , como já visto, e  $z_1$  e  $z_3$  são funções de  $\alpha$ ,  $n$ ,  $V_R$  e  $V_S$ , [10]. Esta expressão converge para a solução de banda larga quando  $\alpha = 0$ , bem como para a solução estreita quando  $\alpha = 1$ .

#### 4. MODELOS PARA FALHA POR DESGASTE

Uma falha por desgaste fica caracterizada por uma perda gradativa das propriedades que tornam o material usado na fabricação do equipamento adequado. Esta perda gradativa de propriedades está em geral relacionada com fenômenos químicos, físicos ou metalúrgicos, sobre o material. De uma forma geral pode-se dizer que o material vai sofrendo um acúmulo de dano, dano este que aumenta com o tempo, até atingir um valor crítico, que leva o material ao colapso. É possível dizer que o valor crítico de dano, que indica o colapso do material, é uma característica do material, e como tal possui uma dispersão em torno de um valor médio. Desta forma, tanto o dano solicitante, que vai se acumulando conforme a vida aumenta, como o dano crítico, que o material suporta, são variáveis aleatórias, com um comportamento similar ao esquematizado na figura 4.

Se for possível caracterizar a distribuição estatística da vida de desgaste, seja experimentalmente, seja analiticamente, é possível então calcular a confiabilidade devido ao desgaste, como sendo

$$C(t)_{\text{desgaste}} = 1 - F_D(t)$$

onde  $F_D(t)$  é a função de probabilidade acumulada, para a vida considerada, para a falha por desgaste.

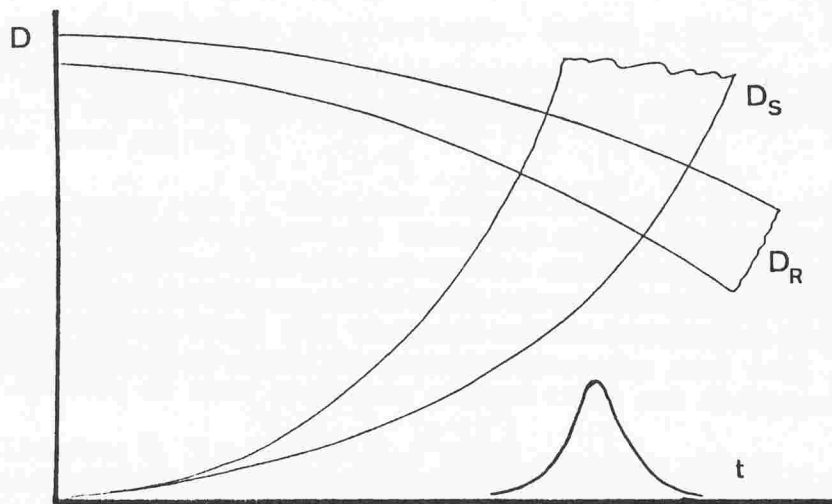


Fig. 4. Dano acumulado, que solicita o material, e dano crítico, que o material consegue suportar.

Dentre os vários modelos de falha que são classificados como dependentes do tempo, uma falha por fadiga é a que se apresenta como de maior importância, pela complexidade dos fenômenos envolvidos e pela frequência com que ocorre nos problemas de projeto mecânico do dia a dia. A caracterização da resistência à fadiga do material deve considerar de uma forma explícita o período sob estudo, se o período de nucleação das trincas, ou se o período de propagação, pois os fenômenos envolvidos em um e outro período são totalmente diferentes, sendo analisados por modelos também diferentes. Para o período de nucleação os modelos mais usados estão divididos em modelos com base nas tensões atuantes e em modelos com base nas deformações que agem. O mecanismo que atua no período de nucleação está ligado às deformações plásticas cíclicas que se desenvolvem localizadamente, que levam a um dano, microscópico mas irreversível, em especial em meios ambientes não inócuos. Com a continuidade das solicitações cíclicas o dano provocado no material vai se acumulando, o que leva finalmente à formação de uma trinca. Quando o comportamento do material é caracterizado pelo nível de deformação cíclica que atua, a resistência à fadiga fica definida pelas equações de Coffin-Manson, que relacionam a flutuação de deformação com a vida que o material suporta, na forma

$$\Delta \epsilon = MN^c + BN^b$$

sendo  $N$  a vida em ciclos e os demais são constantes específicas do material. Outra possibilidade é adotar a solicitação cíclica em termos da tensão atuante, quando então a resistência do material à fadiga fica caracterizada pela curva de Woehler, na forma

$$\sigma = C_w N^{mw}$$

A aplicação destes modelos de fadiga para o caso de solicitações aleatórias exige que considera-se o conceito de dano, que no contexto da fadiga é dado por

$$D_i = n_i / N_i$$

ou seja, a relação entre o número de ciclos que um dado nível de tensão e o número de ciclos que o material resistiria sob este mesmo nível de tensão. Para a atuação de vários níveis de tensão, a regra linear de acúmulo de dano é trazida por

$$D = \sum D_i$$

Considerando que o carregamento é um processo gaussiano de banda estreita, é possível determinar o dano médio esperado após uma vida específica como

$$D = f_0 t [\sqrt{2} \sigma_s / C_w]^m \Gamma(1 + m/2)$$

onde  $\sigma_s$  é o desvio padrão da solicitação,  $f_0$  é a frequência média e  $\Gamma$  é a função gama e finalmente,

$$m = -1/m_w$$

Tipicamente considera-se como valor limite para o dano que o material pode resistir, sem romper, o valor unitário. Assim, para haver segurança é necessário que  $D < 1$ .

É possível ainda obter o coeficiente de dispersão do dano,  $V_D$ , desde que o sistema sob análise possa ser considerado de baixo amortecimento. Assim, sendo  $\xi$  o coeficiente de amortecimento, e para um número elevado de ciclos para a ruptura, vem

$$V_D^2 = f_1(m) / [\xi f_0 t]$$

onde  $f_1(m)$  é função que pode ser aproximada por [4]

$$f_1(m) \approx 0,075 \exp [0,553 m]$$

Este modelo integral para a análise de dano é bastante útil, pois fornece uma estimativa do comprometimento que o produto apresenta quanto à fadiga, de uma forma explícita e simples. Por outro lado, o modelo está baseado em um sinal gaussiano de banda estreita, o que para aplicações práticas pode não corresponder exatamente à realidade. Torna-se assim necessário validar certas hipóteses, o que deve ser feito com a comparação com outros resultados. Pela dificuldade de uma obtenção experimental dos dados, foi feita a opção de utilizar uma simulação numérica do sinal da tensão solicitante, segundo várias formas para a função densidade espectral, [9], [10].

O sinal gerado parte de uma função densidade espectral especificada, bem como da distribuição do ângulo de fase dos harmônicos e tem as suas propriedades estatísticas analisadas, em especial quanto a

- Valor médio
- Desvio padrão
- Coeficiente de simetria
- Coeficiente de planicidade
- Histograma

Tipicamente foram gerados 10000 pontos em cada simulação, número suficiente para garantir propriedades estatísticas estáveis. Após a análise estatística do sinal gerado, este é submetido à análise de ciclos, o que no caso de carregamentos aleatórios é não trivial. Esta análise de ciclos visa determinar o que é um ciclo, incluindo a detecção do instante em que foi fechado, bem como os parâmetros deste ciclo, ou seja, o valor médio e alternante da variável que forma o sinal, sejam forças, tensões, deformações, etc. Dentre os vários métodos de análise de ciclos que estão disponíveis na literatura, [1], [3], o método "rainflow" é consagrado como o mais exato e adequado para a análise de solicitações aleatórias. Este método detecta todos os ciclos que definem um laço de histerese  $\sigma$ - $\epsilon$ , quando é fechado. O algoritmo usado para implementar o método "rainflow" para a análise de ciclos emprega uma matriz de acréscimos de carga (ou tensão), onde, dependendo do nível de solicitação, alguns elementos da coluna, correspondente à inversão de solicitação sob análise, são utilizados para atingir o nível, [3], [9], [12], [13], [14]. Cada ciclo detectado fica caracterizado pela flutuação de tensão,  $\Delta\sigma$ , e pela correspondente tensão média,  $\sigma_m$ .

Na simulação do sinal solicitante, cada ciclo que é detectado tem calculado o dano que provoca no material, usando a curva de Woehler do material e o critério de Goodmann modificado para considerar os efeitos de tensões médias. Adicionalmente, os valores de  $\Delta\sigma$  e  $\sigma_m$  são também submetidos à análise estatística, com o objetivo de obter-se o máximo de informações sobre o sinal sob análise.

Os resultados foram obtidos usando, em todas as funções densidade espectral, um valor médio quadrático, de  $8000 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ , ou seja, um desvio padrão do sinal com valor teórico de  $89,44 \text{ MPa}$ . O material usado na simulação de dano apresenta uma curva de Woehler dada por

$$\sigma = 558,9 \cdot N^{-0,085}$$

com uma tensão limite de resistência de  $345 \text{ MPa}$  e tensão limite de escoamento de  $262 \text{ MPa}$ .

Dos resultados obtidos, chega-se a algumas conclusões importantes. Tipicamente ocorre que o dano calculado pela fórmula integral situa-se dentro de uma faixa de 2 vezes o valor calculado pela análise ciclo a ciclo, usando o método "rainflow". O desvio padrão da faixa de flutuação da tensão solicitante, de cada ciclo detectado, é pouco sensível ao tipo de densidade espectral, bem como da distribuição do ângulo de fase das harmônicas. Já para o desvio padrão da tensão média, de cada ciclo detectado, o efeito do coeficiente de irregularidade é significativo, com uma sensível redução conforme o processo tende a um processo de banda estreita.

## 5. MODELO PARA A ANÁLISE DE TENSÕES

Conforme discutido nas secções anteriores, para tornar possível o cálculo da confiabilidade do sistema, tanto para os modos de falha por sobrecarga como para os modos de falha por envelhecimento, é fundamental o conhecimento da função densidade espectral da tensão solicitante, no ponto onde está sendo realizada a avaliação do nível de segurança, a partir do modelamento do sistema estrutural e da densidade espectral que está excitando-o. O problema que se coloca agora é como obter a densidade espectral da solicitação que atua nos pontos críticos a partir da densidade espectral do carregamento aplicado.

Considerando um caso geral onde o sistema estrutural sob análise é considerado como um sistema discreto, com  $n$  graus de liberdade, é possível colocar em uma notação matricial tradicional as equações de movimento,

$$M [\dot{x}'] + C [\dot{x}] + K [x] = [f]$$

sendo  $[x] = [x_i(t)]$  e  $[f] = [f_i(t)]$ , para  $i = 1, n$ .

Considerando o sistema não amortecido, com uso da determinação dos autovalores e autovetores, pode-se escrever um conjunto de  $n$  equações diferenciais desacopladas, na forma

$$\ddot{q}_i(t) + 2 \xi_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = P_i(t)$$

sendo

- $q_i(t)$  = coordenada generalizada,
- $\xi_i$  = coeficiente de amortecimento de modo  $i$ ,
- $\omega_i$  = frequência natural do modo,
- $P_i(t)$  = força generalizada.

$$P_i(t) = \left\{ U^i \right\} f(t)$$

$\left\{ U^i \right\}$  = autovetor correspondente ao modo  $i$ .

Por outro lado, aplicando a transformada de Fourier ao deslocamento e à carga generalizada, vem

$$Q_i(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} q_i(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$P_i(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P_i(t) e^{-j\omega t} dt$$

Considerando agora que o carregamento é definido em termos da função espectral do carregamento atuante, conhece-se no início do problema

$$F_i(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) e^{-j\omega t} dt$$

Deste modo, a partir de  $F(\omega)$  é possível calcular diretamente  $P_i(\omega)$  como

$$P_i(\omega) = \left\{ U^i \right\}^T F(\omega)$$

Cada uma das equações em  $q_i$  pode ser solucionada no domínio frequência como

$$Q_i(\omega) = \frac{H_i(\omega) P_i(\omega)}{\omega_i^2}$$

onde  $H_i(\omega)$  é a função de transferência do modo  $i$ , dada por

$$H_i(\omega) = [1 - (\omega/\omega_i)^2 + i(2\xi_i/\omega_i)]^{-1}$$

e o deslocamento correspondente ao grau de liberdade de ordem  $i$ , no domínio frequência, é dado por

$$X_i(\omega) = \left\{ U^i \right\}^T Q(\omega)$$

Uma vez definida a função densidade espectral do campo de deslocamento, com o conhecimento do vetor  $X(\omega)$ , deseja-se conhecer, para as várias localizações considerada críticas para a estrutura, a função densidade espectral do estado de tensões, que para a componente  $\sigma_i$  gera  $\Sigma_i(\omega)$ , definida por

$$\Sigma_i(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_i(t) e^{-j\omega t} dt$$

Da teoria de elementos finitos, considerando o vetor  $\{x\}^e$  como o vetor deslocamento nodal de um dado elemento, portanto subconjunto do vetor  $x(t)$ , de deslocamento nodal da estrutura, pode-se calcular o vetor de tensões em um ponto qualquer no interior do elemento como

$$\{\sigma\} = CB \{x\}^e$$

onde  $B$  é a matriz de derivadas das funções de interpolação, gerando o vetor deformação no ponto de interesse e  $C$  é a matriz constitutiva do material, que permite obter o vetor de tensões.

O vetor da função densidade espectral do estado de tensões  $\{\Sigma(\omega)\}$  será assim

$$\{\Sigma(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{\sigma(t)\} e^{-j\omega t} dt$$

e substituindo  $\{\sigma(t)\}$ , obtém-se finalmente que



$$\{\Sigma(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} C B \{x(t)\} e^{-j\omega t} dt$$

ou seja,

$$\{\Sigma(\omega)\} = C B \{X(\omega)\}^e$$

onde  $\{X(\omega)\}^e$  é o vetor das funções densidade espectral dos graus de liberdade do elemento sob consideração.

## 6. APLICAÇÃO

Nesta secção é apresentada uma aplicação das formulações e procedimentos discutidos, com o objetivo de ilustrar de forma clara como devem ser usadas em uma situação de projeto.

Um dado componente estrutural deve ser dimensionado para suportar uma solicitação que apresenta um valor estático (médio) de 25 kN e uma parcela dinâmica com um desvio padrão de 21 kN. A frequência média do sinal é de 0,38 Hz, tendo um fator de irregularidade de 0,85. Deseja-se uma confiabilidade, quando à falha por sobrecarga, de 50% para uma vida de 18000 horas de operação. O material a ser usado apresenta as propriedades abaixo

$$\sigma_R = 620 \text{ MPa}$$

$$\sigma_E = 345 \text{ MPa}$$

$$\sigma_N = 2103 N^{-0,1921}$$

$$V_R = 0,05$$

O primeiro passo é calcular qual a probabilidade de interferência que deve ser usada de modo a garantir a confiabilidade de 50%. Da expressão da confiabilidade, vem

$$\lambda = -\ln(1 - C)/t$$

e como  $\lambda = P_I f_p$ , resulta

$$P_I = -\ln(1 - C)/(t f_p)$$

Como a solicitação possui  $f_o = 0,38$  Hz e  $\alpha = 0,85$ , resulta  $f_p = 0,45$  Hz. Assim,

$$P_I = 2,38 \cdot 10^{-8}$$

Para calcular o fator de projeto que leva à esta probabilidade de interferência, é necessário um processo iterativo, como indica a tabela abaixo, onde  $V_s$  foi calculado em 0,84.

n	3	4	5	6	6,3	6,31
$P_I$	6,31E-2	2,33E-2	2,87E-5	1,41E-7	2,47E-8	2,33E-8

Desta forma, o fator de projeto à usar deve ser de 6,31, que corresponde à relação entre a média da resistência e a média da solicitação. Assumindo que o critério de falha seja quanto ao colapso plástico, a tensão resistente que é relevante é a tensão limite de escoamento do material, o que fornece portanto uma tensão admissível de 54,7 MPa. Esta tensão deve ser usada com o valor médio do carregamento, no caso a força de 25 kN, o que leva a uma secção transversal de 457 mm<sup>2</sup>, e a um diâmetro de 24,1 mm. Adotando 25 mm, o fator de projeto passa a ser de 6,77, o que leva a uma probabilidade de interferência de 1,39E-9 e a uma confiabilidade de 96% para a vida prevista.

Para este dimensionamento, a análise de dano é imediata, necessitando apenas calcular o desvio padrão da solicitação em termos de tensões, a partir do desvio padrão da força atuante, de 21 kN, o que leva a um valor de 42,78 MPa.

Usando estes valores, bem como  $m = 5,205$ , vem

$$D = 0,38 \cdot 6,48E7 [\sqrt{2} \cdot 42,78/2103]^{5,205} \cdot 3,52$$

$$D = 0,825$$

o que indica uma vida de fadiga adequada para o projeto.

## 7. CONCLUSÕES

Este trabalho procura apresentar um conjunto integrado de técnicas e procedimentos para permitir o desenvolvimento de um processo de projeto mecânico, em ambientes aleatórios, que usa direta e explicitamente as características estatísticas da solicitação, seja a solicitação imposta ao sistema mecânico, como a solicitação que atua no material, nos pontos críticos. Como critério para o projeto preliminar é definido o conceito de fator de projeto, com base nos modelos de falha por sobrecarga, o que torna o processo de dimensionamento análogo ao processo usual, que usa o conceito do coeficiente de segurança. Quanto aos modelos para o cálculo da probabilidade de interferência, o caso extremo de banda estreita, que leva à uma distribuição de Rayleigh para os máximos, é a situação mais conservativa, já que fornece a maior probabilidade de interferência, para um dado desvio padrão da solicitação. No caso extremo de uma solicitação de banda larga, os máximos tem uma distribuição normal e no caso geral, para um coeficiente de irregularidade qualquer, é possível usar a expressão deduzida. No exemplo de aplicação, embora  $\alpha = 0,85, < 1$ , foi usada a expressão de um processo de banda estreita, por ser mais simples o cálculo e por ser conservativo.

Quanto à falha por fadiga, um processo de análise de ciclos ponto a ponto, usando um método como o "rainflow", é útil, já que permite prever com exatidão o efeito das tensões médias, o desenvolvimento de tensões residuais, o efeito de deformações plásticas, etc. Para uma etapa de projeto preliminar tem, no entanto, a desvantagem de exigir um considerável tempo de processamento, em especial para registros longos da solicitação. Uma alternativa viável é o uso da expressão integral do dano, conforme

usado no exemplo de aplicação, o que permite, de uma forma rápida, fazer uma avaliação do grau de comprometimento quanto a uma falha para fadiga. Neste caso o efeito de tensão média ou de tensões residuais deve ser usado diretamente nas constantes que definem a curva de fadiga do material.

Finalmente, quanto à determinação dos esforços que atuam no material, em casos simples estes estão diretamente relacionados com as forças e solicitações atuantes no sistema. Em outras situações, a determinação não é imediata, exigindo, ou uma análise dinâmica com integração no tempo, ou uma análise com o uso do método de elementos finitos, com excitação via a função densidade espectral. No primeiro caso o resultado é o histórico de solicitações, o qual pode ser usado para uma análise de dano ponto a ponto, ou sofrer uma análise estatística. No segundo caso obtém-se diretamente a densidade espectral dos esforços nos pontos de interesse, o que permite a aplicação direta dos modelos descritos para a análise de falha por sobrecarga, como para a análise de acúmulo de dano, porém na forma integral.

Deste modo, é possível dizer que, embora muitas vezes o uso das ferramentas probabilísticas no projeto mecânico seja visto com reservas, o desenvolvimento de modelos adequados para uma análise expedita, conforme visto no exemplo de aplicação, permite um ganho de conhecimento sobre o real comportamento do produto em operação, levando a critérios de projeto mais objetivos e versáteis.

#### 8. BIBLIOGRAFIA

- [1] DOWLING, N.E., Fatigue Failure Predictions for Complicated Stress - Strain Histories. JMLSA, Vol. 7, pp. 71-87.
- [2] GONZALES, L.A.O., ROSA, E, da, CAVALCANTI, W.L., Software para a Análise de Fadiga e Resistência Mecânica em Peças. 8<sup>o</sup> CBECIMAT, pp. 53-56, UNICAMP, 1988.
- [3] NELSON, D.V., Review of Fatigue Crack Growth. Prediction Methods, SESA proc. 1977, pp. 41-49.
- [4] ROSA, E. da, Confiabilidade em Sistemas Mecânicos. FEESC, abril, 1976.
- [5] ROSA, E. da, Generalização no Cálculo da Probabilidade de Interferência entre a Solicitação e a Resistência, em Sistemas. Tese, UFSC, dezembro de 1987.
- [6] ROSA, E. da, ALVES, D.B, Generalização no Cálculo da Probabilidade de Interferência. IV COBEM, pp. 1519-1531, ABCM, 1977.
- [7] ROSA, E. da, Aplicação da Teoria da Interferência de Duas Populações na Previsão da Confiabilidade. IV COBEM, pp. 1533-1542, ABCM, 1977.
- [8] ROSA, E. da, Modelos para Estimativa da Confiabilidade usando a Teoria da Interferência. V COBEM, pp. 267-276, ABCM, 1979.
- [9] ROSA, E. da, CAVALCANTI, W.L., Acúmulo de Dano por Fadiga Devido a Solicitações Aleatórias. Resultados de uma Simulação Numérica. 7<sup>o</sup> CBECIMAT, pp. 27-30, 1986.
- [10] ROSA, E. da, SANDIN, G.R., Modelos para a Análise de Confiabilidade sob Cargas Aleatórias. 6<sup>o</sup> SIBRAT, pp. 223-246, ABCM, 1990

- [11] ROSA, E. da, Análise de Sistemas Lineares à Excitações Aleatórias, com Vistas ao Cálculo da Confiabilidade Estrutural. Publicação GRANTE 02/89, UFSC, 1989.
- [12] SADOWSKI, N., Cálculo da Perda de Vida em Eixos de Turbo-Alternadores Devido a Chaveamentos no Sistema Elétrico. Dissertação de Mestrado, UFSC, 1985.
- [13] SANTANA, J.L., ROSA, E. da. Um Algoritmo Computacional para a Contagem de Ciclos de Fadiga em Carregamento Aleatório, 4<sup>o</sup> CBECIMAT, pp. 365-374.
- [14] SANTANA, J.L., Simulação do Crescimento de Trincas de Fadiga. Tese de Mestrado, UFSC, 1980.
- [15] THOMSON, W. T., Vibration Theory and Applications, Prentice Hall 1965.