

DESENVOLVIMENTO DE UM ELEMENTO MISTO DE CASCA DE DUPLA
CURVATURA PARA ANÁLISE DE MATERIAIS MULTILAMINADOS

ANDRÉ T. NOEL E CLOVIS S. DE BARCELLOS
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
Departamento de Engenharia Mecânica
Caixa Postal 476 - 88049 Florianópolis - SC

RESUMO

Um elemento finito foi desenvolvido para análise estática de cascas de material composto multilaminado. A formulação usada é baseada no princípio de Hellinger-Reissner modificado. Nesta, usou-se o conceito de casca sólida degenerada, e campos de deformações supostas e deslocamentos independentes. O modelo trata o laminado como um meio homogêneo equivalente. Portanto o número de graus de liberdade do elemento finito independe do número de lâminas. Resultados de tensões e deslocamentos são apresentados e comparados com a literatura.

INTRODUÇÃO

Materiais compostos multilaminados têm substituído ligas metálicas em um número cada vez maior de aplicações. O uso de materiais compostos multilaminados em componentes estruturais tem incentivado o estudo do comportamento de cascas compostas.

A teoria clássica de laminação (CLT) tem o seu uso restrito a cascas de material composto multilaminado muito finas. Esta teoria é baseada nas hipóteses de Kirchhoff-Love, nas quais a normal à superfície média permanece reta e normal após a deformação, desprezando os efeitos do cisalhamento transversal. Cascas laminadas feitas de materiais compostos filamentosos, tais como grafite-epoxi, apresentam uma razão entre o seu módulo de elasticidade e módulo de cisalhamento transversal muito alto. Em função disso, a deformação cisalhante transversal tem uma importância muito maior na redução da rigidez efetiva de flexão em cascas compostas do que nas correspondentes cascas isotrópicas. Uma teoria adequada deve prever uma deformação cisalhante transversal do material.

Várias teorias que levam em conta o cisalhamento transversal estão disponíveis na literatura. Dentre elas, a teoria de Mindlin baseia-se em hipóteses cinemáticas nas quais é suposta uma distribuição linear dos deslocamentos, ao longo da normal na direção da espessura. Nesta teoria as normais à superfície média antes da deformação, permanecem retas mas não necessariamente normais depois da deformação. A deformação cisalhante é aproximada por um valor constante ao longo da espessura. Não se consegue, portanto, satisfazer as condições de tensões cisalhantes transversais nulas nas superfícies superior e inferior de uma casca.

Se for usada uma distribuição não linear dos deslocamentos ao longo da espessura obtém-se uma teoria de ordem superior. Pode-se, assim, satisfazer as condições de contorno de tensão nas superfícies da casca e tem-se uma descrição mais realista da deformação cisalhante ao longo da espessura.

Os modelos para analisar laminados podem ser classificados em dois grupos distintos; (1) modelos tridimensionais e (2) modelos bidimensionais (Noor & Burton, 1989). Em modelos tridimensionais cada lâmina é tratada distintamente. Nestes modelos cada lâmina possui uma identidade própria. Modelos 3-D, em certos casos, podem tratar cada lâmina como sendo um elemento. Um laminado é então descrito por vários elementos sobrepostos, cada um representando uma lâmina. Em modelos bidimensionais o laminado não é considerado como uma série de lâminas individuais, mas sim, como um meio homogêneo equivalente. Note-se que nos modelos 3-D as expansões na direção da espessura são feitas para cada lâmina, enquanto que nos modelos 2-D as

expansões são feitas para o laminado como um todo.

Este trabalho apresenta os resultados obtidos com o desenvolvimento de um elemento misto de casca de dupla curvatura para análise de materiais multilaminados. O desenvolvimento deste último baseou-se na extensão, para cascas laminadas anisotrópicas elásticas, da formulação isotrópica apresentada por Chang et al. (1989).

O elemento é baseado no funcional de Hellinger-Reissner para o qual são supostos independentemente um campo de deformações e um campo de deslocamentos. As deformações supostas representam o laminado inteiro, sendo assim, este é um elemento 2-D. Baseado em hipóteses cinemáticas de Mindlin, é um elemento de deformação cisalhante de 1^a ordem. No elemento desenvolvido, pretende-se posteriormente incluir efeitos não lineares devido a uma estimativa de dano do material. Daí ter-se optado por uma formulação mista baseada em deformações supostas ao invés de tensões supostas. Numa análise de dano, as tensões no laminado variam não linearmente ao passo que, para as deformações, uma variação linear é aceitável.

O elemento desenvolvido apresentou bons resultados, de deslocamentos e tensões, na análise de cascas laminadas simétricas finas e semi-espessas.

DESENVOLVIMENTO

Considere-se as seguintes hipóteses:

(i) A normal à superfície média antes da deformação permanece reta mas não obrigatoriamente normal à superfície média.

(ii) A energia associada às tensões perpendiculares à superfície de referência são desconsideradas, isto é, a componente normal da tensão é zero e é eliminada das relações constitutivas.

Sistemas de coordenadas. A descrição do elemento exige quatro sistemas de coordenadas (fig. 1).

(1) Sistema Global (X,Y,Z). É um sistema cartesiano de referência em relação ao qual estão definidos as coordenadas e os graus de liberdade de translação, u,v,w, de cada nó.

(2) Sistema nodal (e1,e2,e3). É construído em cada nó do elemento e usado para definir os graus de liberdade locais de rotação $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ é normal à superfície do elemento.

(3) Sistema natural (ξ, η, ζ). As funções de interpolação são definidas em termos do sistema natural.

(4) Sistema local (x,y,z). É definido sobre a superfície de referência de elemento para cada ponto de integração usado.

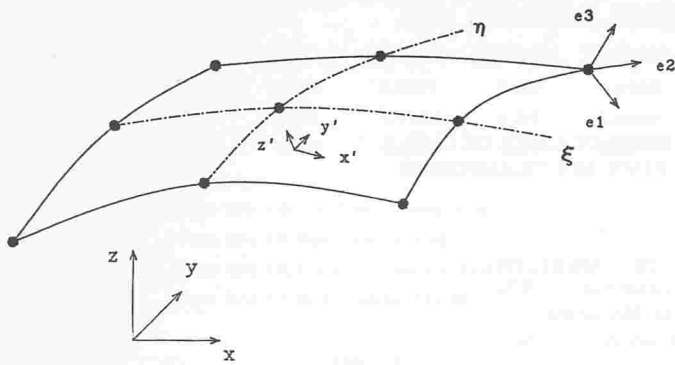


Fig 1. Sistemas de coordenadas usados.

Geometria do elemento. O elemento é definido pela superfície média através das coordenadas dos seus nós. Na formulação isoparamétrica as coordenadas globais (X,Y,Z) de um ponto dentro do elemento podem ser expressas em função das coordenadas naturais (ξ, η, ζ),

$$X = \sum_{k=1}^9 N_k X_k + \frac{\zeta}{2} \sum_{k=1}^9 N_k h_k e_3^k \quad (1)$$

onde $N(\xi, \eta)$ são as funções de interpolação correspondentes a uma superfície $\zeta = \text{constante}$ e h é a espessura da casca em cada nó.

Representação dos deslocamentos. O campo dos deslocamentos pode ser expresso como

$$u = \sum_{k=1}^9 N_k u_k + \frac{\zeta}{2} \sum_{k=1}^9 N_k h_k [\theta_{21} e_1 - \theta_{12} e_2]_k \quad (2)$$

ou simbolicamente

$$u = \bar{N} q \quad (3)$$

onde q é o vetor dos graus de liberdade do elemento

$$q^T = [u_1 v_1 w_1 \theta_1^{(1)} \theta_2^{(1)} u_2 v_2 \dots \theta_2^{(9)}] \quad (4)$$

Relações constitutivas. Para um laminado de espessura constante, feito de material ortotrópico, as equações constitutivas para cada lâmina, escritas na direção principal do laminado, são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{12} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} = K \begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{45} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

onde os termos de rigidez reduzida são dados por

$$Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3} C_{j3}}{C_{33}} \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (7)$$

sendo C_{ij} os coeficientes de rigidez elástica na direção do laminado (Whitney, 1987), e K um fator de correção do cisalhamento transversal, $K = 5/6$.

Princípio variacional. O funcional Π_R para o princípio de Hellinger-Reissner é dado num sistema de coordenadas locais por:

$$\Pi_R = \sum_{\Omega} (E^T C E - \frac{1}{2} E^T C E) dV - W \quad (8)$$

onde para cascas

$$E^T = \{ E_{xx} \ E_{yy} \ E_{xy} \ E_{yz} \ E_{xz} \} \quad (9)$$

\hat{E} - vetor deformação proveniente dos deslocamentos.
 E - vetor deformação suposta.
 C - relação constitutiva.
 W - forças externas.
 V - volume do elemento.

As deformações supostas são separadas em três parcelas; membrana, flexão e cisalhamento.

$$E = [\epsilon \ \kappa \ \gamma] = P \beta \quad (10)$$

onde

$$\begin{aligned} \epsilon^T &= \{ \epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \gamma_{xy} \} \\ \kappa^T &= \{ \kappa_{xx} \ \kappa_{yy} \ \kappa_{xy} \} \\ \gamma^T &= \{ \gamma_{yz} \ \gamma_{xz} \} \end{aligned} \quad (11)$$

P é a matriz de interpolação de deformações assumidas e β o vetor de deformações generalizadas do elemento.

As deformações providas dos deslocamentos E são obtidas a partir de:

$$\hat{E} = B q \quad ; \quad B = T E B^e \quad (12)$$

sendo B^e a matriz relação deformação-deslocamento no sistema global e $T E$ a matriz transformação de deformações do sistema global para o sistema local de integração (Cook, 1981).

Usando uma condição estacionária de Π_R em relação a β a nível de elemento, obtém-se:

$$\beta = H^{-1} G q \quad (13)$$

A matriz rigidez é obtida pela soma das parcelas de rigidez de membrana, flexão e cisalhamento

$$\begin{aligned} (K)_1 &= (G^T H^{-1} G)_1 \\ (G)_1 &= \left(\int P^T C B da \right)_1 \\ (H)_1 &= \left(\int P^T C P da \right)_1 \quad (i = m, b, \gamma) \end{aligned} \quad (14)$$

onde C é a matriz rigidez do material. Para membrana e flexão, C é representado respectivamente por A e D , e para cisalhamento por DS

$$(A, D) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, Z^2) Q_{ij} dZ \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (15)$$

$$DS = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} dZ \quad (i, j = 4, 5) \quad (16)$$

Deformações supostas. As deformações supostas são obtidas a partir da interpolação das deformações generalizadas. Os polinômios de interpolação utilizados foram apresentados por Chang et al. (1989).

A matriz de deformações P é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} P & 0 & P \\ 0^m & P_\gamma & 0^b \end{bmatrix} \quad (17)$$

onde

$$P_m = \begin{bmatrix} 1 & r & s & rs & s^2 & rs^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r^2 & 0 & 1 & r & s & rs & sr^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r & s & rs & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$P_b = t P_m \quad (19)$$

$$P_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & r & s & rs & sr^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & rs^2 & 1 & r & s & rs \end{bmatrix} \quad (20)$$

Cálculo de tensões. A partir dos deslocamentos, as deformações são obtidas através das equações (13) e (10), e as tensões, via equações constitutivas em (5) e (6). Tensões cisalhantes transversais determinadas deste modo são essencialmente valores médios, isto é, não há variação ao longo da espessura. Esta aproximação é válida para deslocamentos no plano e rotações totais. Para tensões cisalhantes, obtêm-se resultados mais precisos se estas forem provenientes das equações de equilíbrio (Pryor & Barker, 1971), (Engblom & Ochoa, 1986).

$$\begin{aligned} \tau_{xz, z} &= -(\tau_{xx, x} + \tau_{xy, y}) \\ \tau_{yz, z} &= -(\tau_{yy, y} + \tau_{xy, x}) \end{aligned} \quad (21)$$

As tensões cisalhantes são obtidas integrando as equações de equilíbrio ao longo da espessura Z . Note que as forças de corpo são desprezadas.

RESULTADOS

Para se avaliar as características do elemento apresentam-se, para duas geometrias, os resultados obtidos pelo elemento e alguns resultados, disponíveis na literatura.

As propriedades das lâminas de material ortotrópico usadas neste trabalho são:

$$\begin{aligned} E1 &= 25.0 E2 \\ G12 &= G13 = 0.5 E2 \\ G23 &= 0.2 E2 \\ \nu12 &= 0.25 \end{aligned} \quad (22)$$

Usou-se a seguinte adimensionalização para apresentar os resultados.

$$\begin{aligned} \bar{w} &= (w E2 h^3 / q_0 a^4) \times 10^3 \\ \bar{\sigma}_i &= (\sigma_i h^2 / q_0 a^2) \quad (i = 1, 2, 6) \\ \bar{\sigma}_i &= (\sigma_i h / q_0 a) \quad (i = 4, 5) \end{aligned} \quad (23)$$

Problema 1. Casca esférica de dupla curvatura.

Para geometrias curvas, o elemento foi avaliado analisando-se uma casca esférica de dupla curvatura (fig. 2). A casca está simplesmente apoiada e sujeita a um carregamento

uniformemente distribuído normal à superfície. Dado que o problema é simétrico somente um quarto da casca foi modelada.

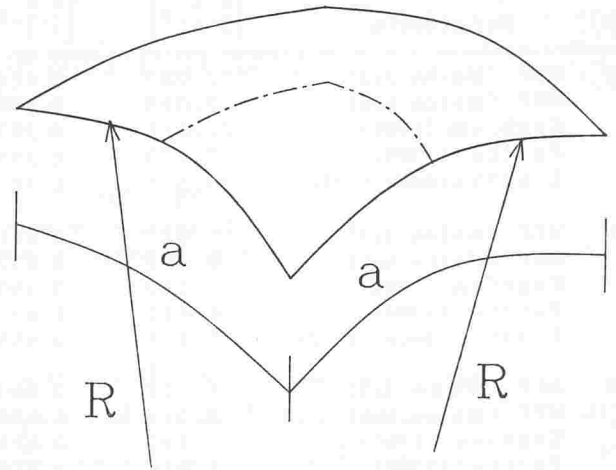


Fig. 2. Casca esférica de dupla curvatura

São apresentados, na tabela 1, para um laminado 0/90/0 resultados de deslocamentos para várias razões Raio-lado (R/a) e para duas razões lado-espessura (a/h). Os resultados são comparados com uma solução obtida por Reddy (1984). Dos resultados da tabela 1, verifica-se que a medida em que a casca vai-se tornando funda (R/a pequeno) existe uma variação mais acentuada do deslocamento central para uma casca fina (a/h grande) do que para uma casca espessa (a/h pequeno). O elemento finito desenvolvido mostrou-se mais flexível para cascas fundas (R/a pequeno) comparativamente à solução por séries usada por Reddy (1984).

Tabela 1. Deslocamento central adimensionalizado de uma casca esférica 0/90/0 sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.

R/a	Referência	a/h = 100		a/h = 10	
		\bar{w}	\bar{w}/CFS	\bar{w}	\bar{w}/CFS
1	CFS	0.0718	-	4.8173	-
	MEF (3x3)	0.0755	1.052	5.0230	1.043
	MEF (6x6)	0.0758	1.056	5.0325	1.045
2	CFS	0.2858	-	8.0210	-
	MEF (3x3)	0.2898	1.014	8.1550	1.017
	MEF (6x6)	0.2900	1.015	8.1556	1.017
3	CFS	0.6224	-	9.1148	-
	MEF (3x3)	0.6265	1.007	9.1880	1.008
	MEF (6x6)	0.6268	1.007	9.1878	1.008
4	CFS	1.0443	-	9.5686	-
	MEF (3x3)	1.0482	1.004	9.6129	1.005
	MEF (6x6)	1.0487	1.004	9.6125	1.005
5	CFS	1.5118	-	9.7937	-
	MEF (3x3)	1.5154	1.002	9.8230	1.003
	MEF (6x6)	1.5161	1.003	9.8225	1.003
10	CFS	3.6445	-	10.110	-
	MEF (3x3)	3.6471	1.001	10.118	1.001
	MEF (6x6)	3.6474	1.001	10.117	1.001

Problema 2. Placa quadrada simplesmente apoiada.

Uma placa 0/90/90/0 simplesmente apoiada sujeita a um carregamento senoidal é analisada. Dado que o laminado é simétrico, somente um quarto da placa é modelada. São apresentados resultados de deslocamentos e tensões para várias razões a/h .

Tabela 2. Placa 0/90/90/0 simplesmente apoiada sujeita a um carregamento distribuído senoidal.

a/h	Referência	\bar{w} $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right)$	$\bar{\sigma}_x$ $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \pm \frac{h}{2}\right)$	$\bar{\sigma}_y$ $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \pm \frac{h}{4}\right)$	$\bar{\sigma}_{xy}$ $\left(0, 0, \pm \frac{h}{2}\right)$	$\bar{\sigma}_{yz}$ $\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$	$\bar{\sigma}_{xz}$ $\left(0, \frac{a}{2}, 0\right)$
4	MEF (Malha 3x3)	17.087	0.414	0.597	0.0321	0.271	0.256
	MEF (Malha 6x6)	17.095	0.408	0.582	0.0311	0.278	0.265
	Engblom (1986)	22.816	0.387	0.615	0.0341	0.336	0.300
	Putcha (1984)	17.170	0.399	0.568	0.0303	-	-
	Elasticidade (1972)	19.536	0.720	0.666	0.0467	0.292	0.270
10	MEF (Malha 3x3)	6.627	0.511	0.372	0.0251	0.174	0.304
	MEF (Malha 6x6)	6.627	0.502	0.364	0.0244	0.179	0.314
	Engblom (1986)	7.787	0.490	0.382	0.0257	0.209	0.325
	Putcha (1984)	6.642	0.491	0.356	0.0237	-	-
	Elasticidade (1972)	7.434	0.559	0.403	0.0276	0.196	0.301
20	MEF (Malha 3x3)	4.912	0.540	0.304	0.0229	0.144	0.319
	MEF (Malha 6x6)	4.911	0.530	0.298	0.0223	0.149	0.329
	Engblom (1986)	5.290	0.528	0.298	0.0228	0.167	0.339
	Putcha (1984)	4.916	0.519	0.291	0.0217	-	-
	Elasticidade (1972)	5.172	0.543	0.309	0.0230	0.156	0.328
50	MEF (Malha 3x3)	4.410	0.549	0.280	0.0223	0.135	0.324
	MEF (Malha 6x6)	4.409	0.540	0.275	0.0216	0.139	0.334
	Engblom (1986)	4.546	0.542	0.264	0.0217	0.152	0.345
	Putcha (1984)	4.410	0.528	0.269	0.0211	-	-
	Elasticidade (1972)	4.485	0.539	0.276	0.0216	0.141	0.337
100	MEF (Malha 3x3)	4.338	0.550	0.277	0.0222	0.133	0.324
	MEF (Malha 6x6)	4.337	0.541	0.272	0.0215	0.137	0.335
	Engblom (1986)	4.441	0.544	0.259	0.0216	0.146	0.346
	Putcha (1984)	4.337	0.530	0.266	0.0210	-	-
	Elasticidade (1972)	4.385	0.539	0.271	0.0214	0.139	0.339
	CPT	4.350	0.539	0.269	0.0213	0.138	0.339

O carregamento senoidal é descrito por

$$q(x,y) = q_0 \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} y \quad (24)$$

sendo que a é a dimensão do lado do quadrado. Os resultados são apresentados na tabela 2.

CONCLUSÕES

Foi aqui proposto uma formulação mista para um elemento finito de casca anisotrópica multilaminar. Foram obtidos bons resultados para os vários problemas propostos. Futuramente serão apresentados resultados com novas condições de contorno e geometria para problemas de placas e cascas incluindo os cálculos de tensões laminares.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- .NOOR, Ahmed K. & BURTON, Scott W. "Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates", *Applied Mechanical Reviews*, vol 42, no 1, pp. 1-13, 1989.
- .CHANG, T.Y., SALEEB, A.F. & GRAF, W. "On the mixed formulation of a 9-node lagrange shell element", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73, pp 259-281, 1989
- .WHITNEY, James M. "Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates", Technomic Publishing Co., Inc, 1987.
- .COOK, Robert, D., "Concepts And Applications of Finite Element Analysis", Sec.Ed., John Wiley & Sons, New York, 1981.

- .PRYOR Jr., C. W. & BARKER, R. M., "A Finite-Element Analysis Including Transverse Shear Effects for Applications to Laminated Plates", *AIAA Journal*, vol 9, no 5, pp. 912-917, 1971.
- .PUTCHA N., S., and REDDY, J. N., "A mixed shear flexible finite element for the analysis of laminated plates", *Comp. Meth. App. Mech. Engng.*, vol.44, pp. 213-227, 1984.
- .ENGBLOM, John, J. & OCHOA, Ozden, O., "Finite element formulation including interlaminar stress calculations", *Computers & Structures*, vol 23, No. 2, pp.241-249, 1986.
- .PAGANO, N., J. & HATFIELD, S.J., "Elastic behaviour of multilayered bidirectional composites", *AIAA Journal*, 10, pp. 931-933, 1972.
- .REDDY, J., N., "Exact Solutions of Moderately Thick Laminated Shells", *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 110, No 5, pp. 794-809, 1984.

ABSTRACT

A finite element was developed for static analysis of laminated anisotropic composite shells. The formulation used is based on a modified Hellinger-Reissner principle. The formulation used the concept of degenerate solid shell element and independently assumed strain fields and displacement fields. Results of stress and displacement are presented and they are compared with literature.

TIME DOMAIN NUMERICAL SOLUTION OF SHELL-FLUID COUPLED EQUATIONS

JOAO CARLOS MENEZES
 CTA-ITA-IEMP
 12225 Sao Jose dos Campos, SP, Brazil

JAYANTILAL MISTRY
 University of Liverpool, Dept. of
 Mechanical Engineering, Liverpool, U.K.

SUMMARY

An iterative solution based on finite element method has been presented for the transient response of fluid-filled containers. An algorithm has been developed for the computer program, which can solve the coupled problem of an axisymmetric shell container partially filled with viscid, incompressible Newtonian liquid. Tests with the program on cylindrical vessels show that the presence of fluid has a major influence on the damping of the shell wall response and its natural frequency.

INTRODUCTION

The problem of solid-fluid interactions is important in many fields of engineering particularly in cases where presence of fluid in or around the solid structure is expected to influence its stresses and dynamic response. One factor that has a major influence is the added mass effect of the surrounding fluid. If these effects can be assessed or modelled in the general dynamic behaviour of the solid structures, reliable estimates of their strength and natural frequencies can be made.

In the present investigation details of the computer analysis of the transient motion of an axisymmetric fluid-filled container is presented. The fluid medium is assumed to be viscid, incompressible and laminar and its governing equations are Navier-Stokes momentum and continuity equations expressed in cylindrical co-ordinates according to Panton (1984). The axisymmetric vessel is assumed to be thin and its kinematic behaviour is based on the Novozhilov's theory of shells (Novozhilov, 1964). For the computer solution, the coupled shell-fluid interaction problem is solved with the aid of Finite Element discretisation of both the shell wall and the fluid medium. The shell element is regarded to have a constant radius of curvature of the meridian and its deformation is described in terms of the assumed displacement components (u , v , w) in meridional, circumferential and normal directions, together with the rotation (β) about a circumferential vector. The displacement components and the pressure loading of the shell are expressed in terms of the Fourier series made up of different circumferential waves.

Two-dimensional eight noded isoparametric elements, revolved around the main axis of the shell have been employed for the fluid medium. The fluid dynamic equations use the natural variables, radial, circumferential and axial velocity components (v_r , v_θ , v_z) at all the nodes and dynamic pressure at the corner nodes of the element.

SHELL EQUATIONS

The assumed displacements of the shell wall corresponding to the circumferential wave number n are given by

$$u = \frac{(1 - \xi)}{2} u_i \cos(n\theta) + \frac{(1 + \xi)}{2} u_j \cos(n\theta) \quad (1)$$

$$v = \frac{(1 - \xi)}{2} v_i \sin(n\theta) + \frac{(1 + \xi)}{2} v_j \sin(n\theta) \quad (2)$$

$$w = \frac{(2-3\xi+\xi^3)}{4} w_i \cos(n\theta) + \frac{(1+\xi)(1-\xi)^2}{4} \beta_i \cos(n\theta) + \frac{(2+3\xi-\xi^3)}{4} w_j \cos(n\theta) - \frac{(1-\xi)(1+\xi)^2}{4} \beta_j \cos(n\theta) \quad (3)$$

where ξ is a linear meridional co-ordinate which varies from -1 at node i to +1 at node j . θ is the circumferential co-ordinate. The finite element degrees of freedom $[r_e]$ are (u_i v_i w_i β_i u_j v_j w_j β_j), which are the displacements at nodes i and j respectively. From equations (1) to (3), the local displacements $[r]$ can be written as

$$[r] = [u \ v \ w] = ([N]\{r_e\})^T \quad (4)$$

where $[N] = [N(\xi)]$ are the shape functions as given in the equations (1) to (3) (Ross, 1984). From the usual dynamic analysis of the solid structures, it can be shown that the finite element equations are

$$[M]\{\ddot{r}_e\} + [K]\{r_e\} = \{R_e\} \quad (5)$$

in which

$$[M] = \int_V \rho_s [N]^T [N] dV \quad (6)$$

= mass matrix of the shell element.