

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

CARLOS A. M. DUARTE E CLOVIS S. DE BARCELLOS
 Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC.
 Departamento de Engenharia Mecânica
 Caixa Postal 476 – 88049 Florianópolis – SC

RESUMO

As versões h e p do Método dos Elementos Finitos são usadas para resolver dois problemas da elastoestática. A sensibilidade da taxa de convergência do método é analisada quando extensões h e p são usadas para aumentar a dimensão do espaço solução. O comportamento da versão p é verificado numericamente para o caso de materiais quase incompressíveis. O uso de malhas geométricas é também examinado.

INTRODUÇÃO

Classicamente no Método dos Elementos Finitos (MEF) são utilizados polinômios de baixa ordem e o espaço de elementos finitos $V(h,p)$ é construído a partir de combinações lineares das funções de interpolação. A precisão desejada para a aproximação é então alcançada através do refinamento da malha, ou seja, o diâmetro do maior elemento, denotado por h_{max} , é feito tender a zero. Esta metodologia de aumento do número de graus de liberdade $N(h,p)$ é denominada versão h do método.

Uma outra estratégia para se diminuir o erro de discretização é aumentar a ordem polinomial dos elementos, ou seja, a malha é mantida fixa e o menor grau polinomial associado a elementos da malha, denotado por p_{min} , é escolhido suficientemente grande, de modo que o erro de discretização seja pequeno. Tem-se então a versão p do MEF.

Na versão $h-p$ os erros da aproximação são controlados através da combinação de refinamentos da malha e aumento da ordem polinomial dos elementos.

As diversas versões do Método dos Elementos Finitos são geralmente comparadas através da análise do comportamento das curvas erro versus custo para cada uma das estratégias. O erro é medido na norma da energia, definida por $\|e\|_E^2 = U(e)$, onde $U(e)$ é a energia de deformação do erro $e = u_0 - u_{EF}$. Esta medida de erro está relacionada com

a raiz da média quadrática (RMS) do erro nas tensões sobre todo o domínio (Szabó, 1990). A relação erro-custo é simplificada fazendo-se a hipótese de que o custo é uma função simples de $N(h,p)$. Então, é de interesse a taxa de mudança do erro, na norma da energia, em relação ao número de graus de liberdade.

Nas seções seguintes são apresentados os teoremas relativos ao comportamento assintótico das versões h , p e $h-p$ do Método dos Elementos Finitos. Dois problemas da elasticidade bidimensional são resolvidos utilizando-se as versões p e h . Os problemas foram selecionados de modo a se ter soluções com diferentes ordens de singularidade.

ESTIMATIVAS DE ERRO A-PRIORI PARA O MEF

Os problemas de valor no contorno, tratados neste trabalho, na sua forma variacional são genericamente dados por

Encontre $u_0 \in X(\Omega)$ tal que

$$B(u_0, v) = L(v) \quad \forall v \in X(\Omega) \quad (1)$$

onde $L(\cdot) \in (X(\Omega))'$ e $B(\cdot, \cdot)$ é uma forma bilinear sobre $X(\Omega) \times X(\Omega)$. A definição do espaço $X(\Omega)$ depende do problema em questão.

A aproximação por elementos finitos do problema (1) consiste em buscar no espaço $V(h,p) \subset X(\Omega)$ a solução de elementos finitos u_{EF} tal que

$$B(u_{EF}, v) = L(v) \quad \forall v \in V(h,p) \quad (2)$$

Uma questão de grande interesse é a estimativa a-priori do erro $\|e\|_E = \|u_0 - u_{EF}\|_E$. O teorema a seguir fornece esta estimativa tanto para a convergência h como p .

TEOREMA 1 (Babuška & Suri, 1990) Seja $u_0 \in H^k(\Omega)$, $k > 1$. Então, se os espaços de elementos finitos $V = V(h,p)$ são construídos a partir de uma família de malhas uniformes (ou quase-uniformes),

$$\|u_0 - u_{EF}\|_E \leq C h^{\beta_h} p^{-\beta_p} \|u_0\|_{H^k}, \quad (3)$$

onde $\beta_h = \min(p, k-1)$, $\beta_p = (k-1)$ e C é independente de u_0 , h e p .

No caso em que a solução u_0 possui um comportamento singular do tipo $u_0 \approx r^\alpha F(\theta)$, $\alpha > 0$ ((r, θ) sendo coordenadas polares), e os vértices dos elementos estão localizados na singularidade, a taxa de convergência da versão p é duplicada. β_p é então pelo menos o dobro de β_h (Babuška & Suri, 1990).

Segundo Szabó (1990), se a solução exata u_0 for analítica em cada elemento, incluindo os respectivos contornos, o erro na norma da energia decresce exponencialmente quando a versão p é utilizada. Ou seja,

$$\|u_0 - u_{EF}\|_E^{ER} \leq C \exp(\gamma N^\theta) \quad (4)$$

onde $\theta \geq 1/3$ (Szabó, 1986a) e o erro relativo é dado por $\|e\|_E^{ER} = \|e\|_E / \|u_0\|_E$.

Quando a solução exata é analítica em cada elemento incluindo os respectivos contornos, com a exceção de alguns dos vértices, ainda se pode obter taxas de convergência exponenciais com a versão p , desde que a malha consiga isolar os pontos singulares. No Problema 2 da seção

seguinte este procedimento será utilizado.

PROBLEMAS MODELO

Nesta seção são analisados dois problemas da elastoestática bidimensional, com o intuito de verificar o comportamento assintótico das versões h e p do MEF previsto na seção anterior.

Problema 1. O domínio Ω é o quadrado $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ni -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1\}$ submetido a um estado plano de deformação e sujeito às seguintes condições de contorno

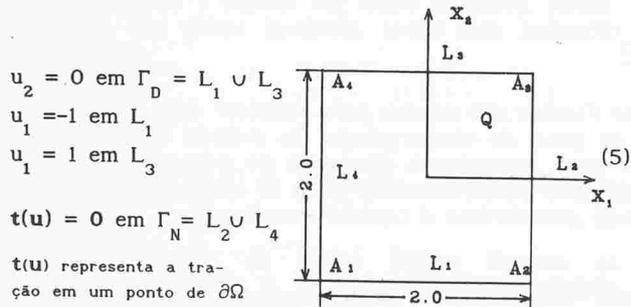


Fig.1 Condições de contorno e domínio do Problema 1.

Devido a x_1 e x_2 serem eixos de anti-simetria, foi modelado apenas o quadrante $Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ni 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$. Para $E = 1$, foram analisados os casos em que $\nu = 0.3$ e $\nu = 0.4999$. Os valores exatos das energias de deformação para o quadrante Q foram estimados em $U(u_0) = 0.130680$ para $\nu = 0.3$ e $U(u_0) = 0.127035$ para $\nu = 0.4999$ (Babuška & Szabó, 1982).

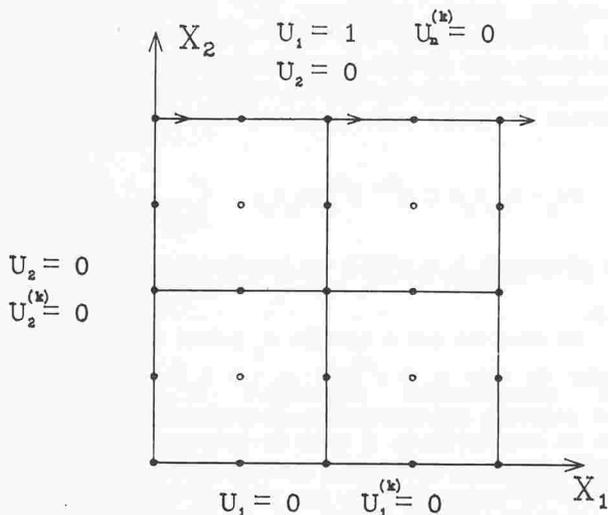


Fig.2. Condições de contorno para a modelagem do Problema 1. $u_n^{(k)}$ são graus de liberdade associados aos elementos hierárquicos (Szabó & Sahrman, 1988).

A solução u_0 possui um comportamento singular nas vizinhanças dos vértices A_1 do tipo $u_0 \approx r^\alpha F(\theta)$, $\alpha > 0$ e segundo Babuška & Szabó (1982) $u_0 \in H^k(\Omega)$, $k < 1.76$ para $\nu = 0.3$ e $k < 1.69$ quando $\nu = 0.4999$.

A partir do teorema 1 e do tipo de singularidade presente na solução exata tem-se

$$\|e\|_E^{ER} \leq C_1 h^{\beta_h} p^{-\beta_p} \quad (6)$$

onde: $\beta_h = \min(p, 0.76)$ para $\nu = 0.3$ e $\beta_h = \min(p, 0.69)$ quando $\nu = 0.4999$; $\beta_p = 1.52$ para $\nu = 0.3$ e $\beta_p = 1.38$ quando $\nu = 0.4999$. Portanto, para este problema, o teorema 1 prevê uma taxa de convergência para a versão p duas vezes maior do que para a versão h .

O logaritmo do erro relativo na norma da energia versus o logaritmo de p foi traçado na figura 3 para $\nu = 0.3$ e $\nu = 0.4999$. O valor absoluto da inclinação da curva na faixa assintótica ($p \geq 4$) é a taxa de convergência assintótica β_p . Os valores obtidos ($\beta_p = 1.31$ e $\beta_p = 1.28$) são um pouco menores do que os previstos pelo teorema 1. A figura 3 demonstra também que a versão p é insensível ao travamento ("locking") de Poisson (Szabó et al., 1989) e que o ponto de entrada na faixa assintótica não é sensível ao valor do coeficiente de Poisson.

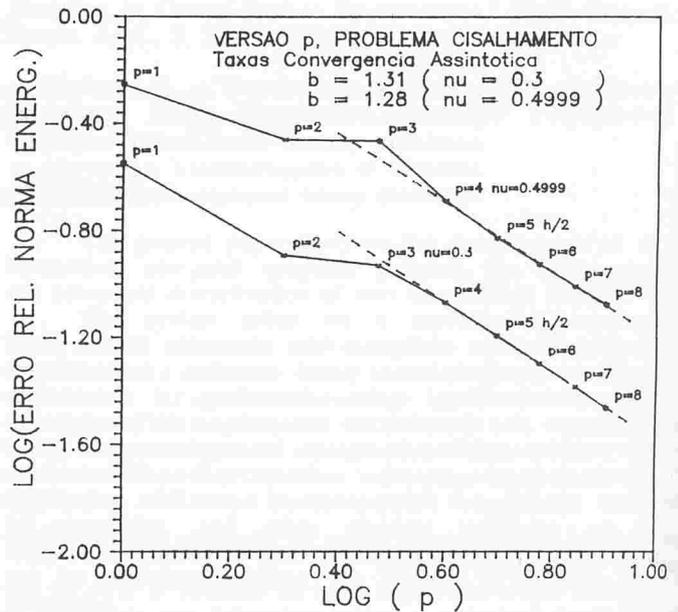


Fig. 3. Taxas de convergência para a versão p do MEF. Problema 1.

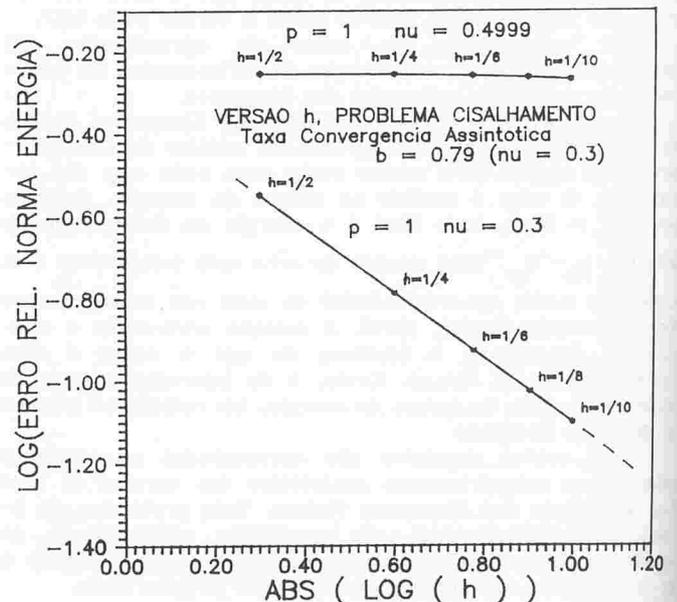


Fig. 4. Taxas de convergência para a versão h do MEF. Problema 1.

Na figura 4 foi traçado o logaritmo de $\|e\|_E^{ER}$ correspondente a diversas discretizações do quadrante Q utilizando elementos lineares. No caso em que o coeficiente de Poisson é $\nu = 0.3$, observa-se uma taxa de convergência $\beta_h = 0.79$ um pouco superior a prevista pelo teorema 1 ($\beta_h = 0.76$). A figura 4 mostra também que o refinamento da

malha não reduz o erro quando $\nu = 0.4999$ e $p = 1$. O efeito do travamento de Poisson na versão h só pode ser eliminado se forem utilizados elementos de ordem maior ou igual a quatro (Babuška & Suri, 1990).

Para se poder comparar as versões h e p em termos de custos foi traçado na figura 5 em escala log-log, $\|e\|_E^{ER} \cdot 100\%$ versus N . Onde N é o número de graus de liberdade após a imposição das condições de contorno de Dirichlet. Observa-se que, no caso de refinamento uniforme, a taxa de convergência da versão h é independente da ordem polinomial dos elementos. Nota-se ainda que a taxa de convergência da versão p é nitidamente superior a da versão h ($\beta_p = 1.7 \beta_h$) e que, qualquer que seja o nível de erro desejável para a solução aproximada, a versão p é sempre mais econômica em termos de número de graus de liberdade. O desempenho da versão p poderia ser ainda melhor se o efeito da singularidade presente no vértice A_3 fosse eliminado utilizando-se uma malha adequada.

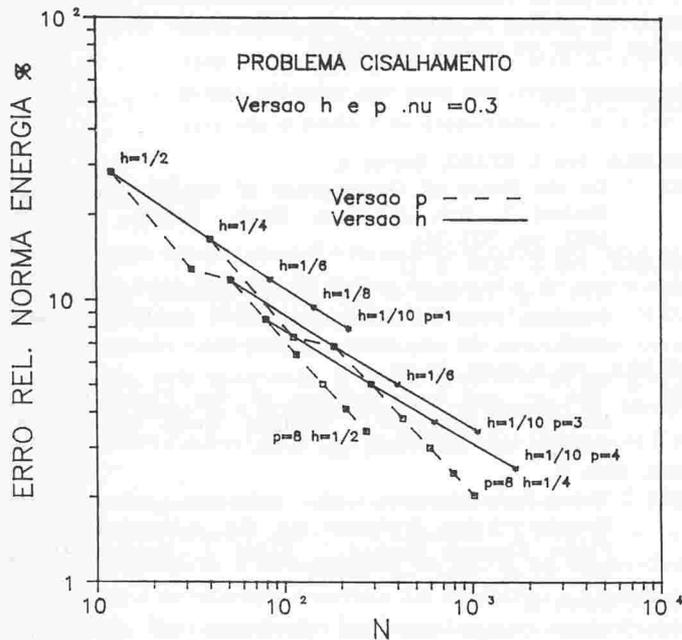


Fig. 5. Comparação das versões h e p do MEF. Problema 1.

Problema 2. Analisa-se agora o comportamento da versão p quando existe uma singularidade na solução exata devido a presença de uma fratura ("crack") no domínio (fig.6). Supõe-se que exista um estado plano de deformação, coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$, módulo de elasticidade $E = 1$ e espessura unitária.

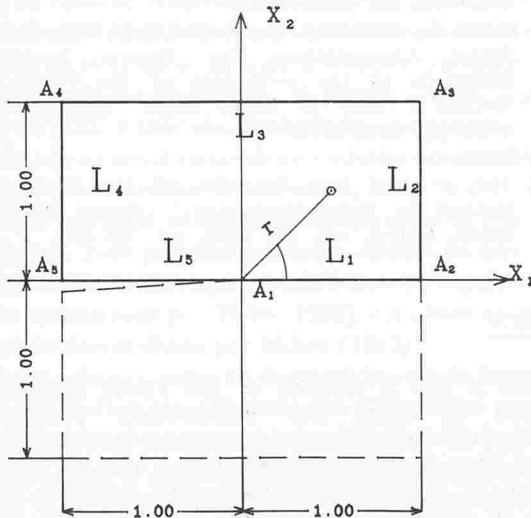


Fig. 6. Domínio para o Problema 2.

Foram aplicadas condições de contorno de Neumann tal forma que as trações correspondam ao primeiro termo simétrico da expansão assintótica da solução analítica. trações foram calculadas a partir das componentes tensor tensão correspondente a este termo da expansão por (Babuška & Guo, 1988)

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta)$$

$$f_{11} = \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$f_{22} = \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$f_{12} = \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

onde K_I é o primeiro fator de intensidade de tensão (r, θ referem-se ao sistema polar mostrado na figura 6).

A solução é simétrica em relação ao eixo x_1 , portanto foi modelado apenas a metade superior do domínio e postas condições de contorno de simetria em L_1 ($u_2 = 0$, L_1 e $u_1 = 0$ em A_1). O valor exato da energia de deformação para o domínio modelado é de $0.23706469 (K_I)^2 / E$ (Sz 1986b).

A solução exata u_0 para este problema pertence ao espaço $H^k(\Omega)$, $k < 3/2$ (Dorr, 1986) e sendo, também no caso, a singularidade presente no vértice A_1 do $u_0 \approx r^\alpha F(\theta)$, o teorema 1 prevê, para a versão p , uma taxa de convergência assintótica de apenas 1.0. Porém, como comentado anteriormente, pode-se obter taxas de convergência exponenciais para este tipo de problema se forem utilizadas malhas não-uniformes que consigam isolar a singularidade presente no vértice A_1 . São utilizadas as malhas ditas "geométricas", nas quais os tamanhos dos elementos decrescem em progressão geométrica na direção da singularidade com um fator de geralmente $s = 0.15$ (Sz 1986a). Na figura 7 tem-se uma malha geométrica com n camadas e 18 elementos.

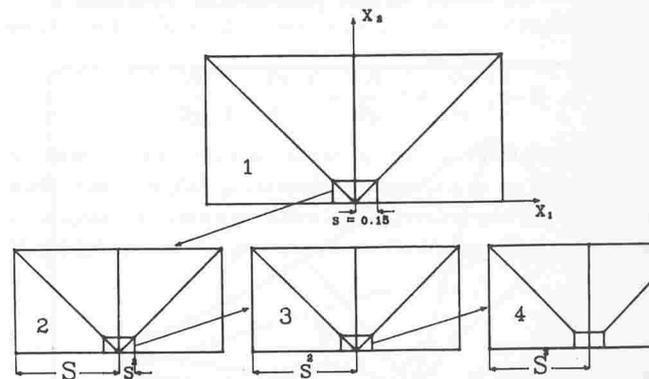


Fig. 7. Malha geométrica com $n = 5$ camadas direção a singularidade ($s = 0.15$).

Mais uma vez o logaritmo de $\|e\|_E^{ER}$ versus o logaritmo de p foi traçado na figura 8a para as três discretizações utilizadas. No caso da malha uniforme (8×4) foi obtida uma taxa de convergência pré-assintótica quase nula e uma taxa assintótica $\beta_p = 0.83$ que é um pouco menor do que a prevista pelo teorema 1. O uso de uma malha geométrica com $n = 3$ camadas e apenas 10 elementos aumenta consideravelmente a taxa de convergência pré-assintótica ($1 \leq p \leq 3$), porém, a partir de $p = 4$, a taxa de convergência cai

o valor previsto pelo teorema 1. Observa-se, no caso da malha geométrica com $n = 5$ camadas, um aumento na inclinação da curva a medida que cresce a ordem dos elementos, o que caracteriza uma taxa de convergência exponencial do tipo descrito pela equação (4) (Szabó, 1986a).

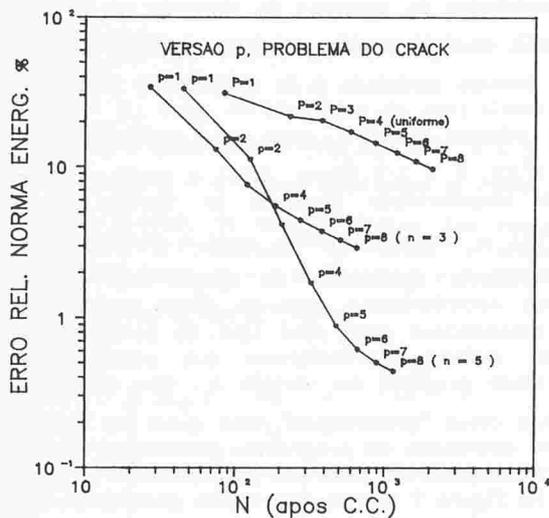
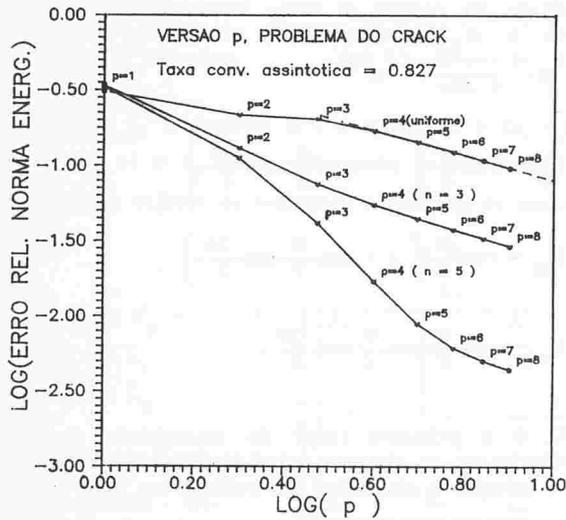


Fig. 8a e 8b. Comportamento da versão p quando se utiliza malhas geométricas. Problema 2.

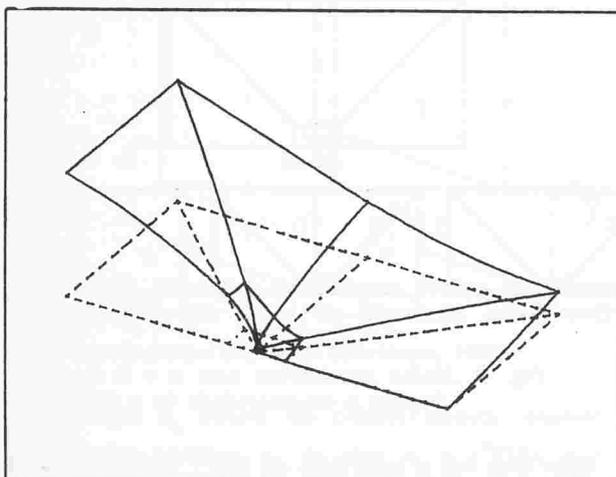


Fig. 9. Componente X_2 do vetor deslocamento para o Problema 2.

Na figura 8b foi traçado em escala log-log $\|e\|_E^{ER} \cdot 100\%$ versus o número de graus de liberdade N . Nota-se que é possível atingir níveis de erro na norma da ener-

gia extremamente baixos, dependendo do número de camadas de elementos utilizadas. Para $p = 8$ e $n = 5$ se obteve $\|e\|_E^{ER} = 0.439\%$. Observa-se também que a combinação (n, p) ótima, em termos do número de graus de liberdade, vai depender do nível de precisão que se deseja da solução aproximada.

Na figura 9 foi traçada a componente X_2 do vetor deslocamento para o Problema 2.

CONCLUSÃO

As versões h e p de MEF foram comparadas, através da análise do comportamento das curvas erro versus $N(h, p)$, para problemas da elastoestática cujas soluções analíticas apresentam comportamento singular. As taxas de convergência obtidas com a versão p , além de bastante superiores as da versão h , mostraram-se ser insensíveis ao valor do coeficiente de Poisson.

Taxas de convergência exponenciais podem ser obtidas quando se utiliza a versão p do MEF, desde que a malha consiga isolar os pontos singulares.

REFERÊNCIAS

- BABUŠKA, Ivo & SZABÓ, Barna A.
1982 "On the Rates of Convergence of the Finite Element Method". *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, vol. 18, 1982, pp. 323-341.
- BABUŠKA, Ivo & GUO, B. Q.
1988 "The h - p Version of the Finite Element Method for Domains with Curved Boundaries". *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 25 n4, 1988, pp. 837-861.
- BABUŠKA, Ivo & SURI, Manil
1990 "The p - and h - p Versions of the Finite Element Method, an Overview". *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 80, 1990, pp. 5-26.
- DORR, Milo R.
1986 "The Approximation of Solutions of Elliptic Boundary-Value Problems via the p -Version of the Finite Element Method". *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 23 n1, 1986, pp. 58-77.
- SZABÓ, Barna A.
1986a "Mesh Design for the p -Version of the Finite Element Method". *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 55, 1986, pp. 181-197.
- SZABÓ, Barna A.
1986b "Estimation and Control of Error Based on p Convergence". In: *VVAA, Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, eds. Ivo Babuska et alli, New York, John Wiley & Sons, 1986, pp. 61-78.
- SZABÓ, Barna A. & SAHRMANN, Glenn J.
1988 "Hierarqic Plate and Shell Models Based on p -Extension". *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 26, 1988, pp. 1855-1881.
- SZABÓ, Barna A., BABUSKA, Ivo & CHAYAPATHY, Bidar K.
1989 "Stress Computations for Nearly Incompressible Materials by the p -Version of the Finite Element Method". *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, vol. 28, 1989, pp. 2175-2190.
- SZABÓ, Barna A.
1990 "The p - and h - p Versions of the Finite Element Method in Solid Mechanics". *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 80, 1990, pp. 185-195.

ABSTRACT

The h and p versions of the Finite Element Method are used to solve two elastoestatic problems. The sensitivity of the rate of convergence of the method is analysed when h and p extensions are used to increase the dimension of the solution space. The behavior of the p version is examined numerically for the case of nearly incompressible materials. The use of geometric meshes is also examined.