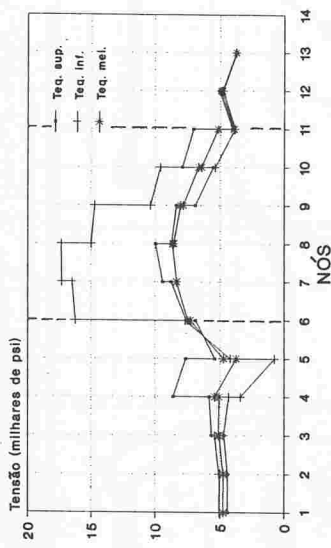
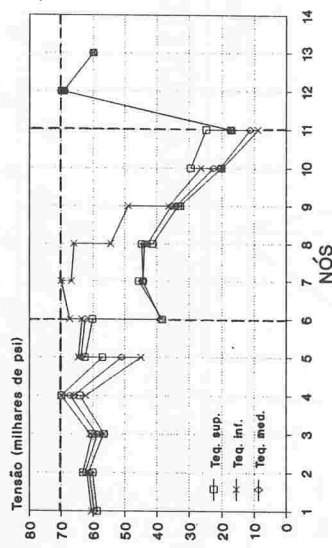


TENSÃO EQUIVALENTE PRÉ-OTIMIZAÇÃO



TENSÃO EQUIVALENTE PÓS-OTIMIZAÇÃO



FIGURAS 9 e 10

REFERÊNCIAS

- [01] Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method", 3rd ed., Macgraw Hill Book Company, Inc.
- [02] Rangel, M., "Otimização do Peso em Cascas de Revolução Modeladas pela Teoria de Reissner-Mindlin", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1992.
- [03] Herskovits, J., "An Interior Points Method for Nonlinear Constrained Optimization", COPPE/UFRJ, 1992.
- [04] Taroco, E.; Feijoo, R.A., "Tensões em Diferentes Tapas Toroesféricas de Recipientes de Presion", L.N.C.C..Rev.Br.C.Mec., Rio de Janeiro, Vol. III, No. 3, 1981, pp. 9 a 18.
- [05] Haug, E.J.; K.K.Choi & V.Komkov, "Design sensitivity analysis of structural systems". Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, 1986.

ANAIS



7^º SIMPÓSIO BRASILEIRO
SOBRE TUBULAÇÕES E VASOS DE PRESSÃO

7TH BRAZILIAN SYMPOSIUM ON PIPING AND PRESSURE VESSELS
FLORIANÓPOLIS, 07 - 09 DE OUTUBRO DE 1992

TRABALHO Nº

PROCEEDINGS



PP. 127-136

SOLUÇÃO DE PROBLEMAS AXISSIMÉTRICOS UTILIZANDO A VERSÃO P DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

CARLOS ARMANDO M. DUARTE
CLOVIS S. DE BARCELLOS

Depto. Eng. Mecânica, UFSC Cx. Postal 476
88040-900 - Florianópolis - SC - Brasil

SUMÁRIO

O Método dos Resíduos em Elementos (MRE) é empregado para se obter estimativas a posteriori do erro de discretização de soluções aproximadas obtidas com a versão *p* do Método de Elementos Finitos (MEF). A formulação do MRE é investigada para o caso de problemas da elasticidade nos quais ocorrem assimetria geométrica, de propriedades materiais e do carregamento. Um problema usado para testar o efeito de materiais quase incompressíveis é resolvido utilizando-se a versão *p* do MEF.

SUMMARY

The Element Residual Method (ERM) is used for a posteriori discretization error estimation of *p* version Finite Element Method approximate solutions. The ERM formulation is analysed for solving elasticity problems with geometric, material properties and load axis-symmetry. The *p* version of the Finite Element Method is used to solve a problem designed to test the effect of almost incompressible materials.

1. Introdução

O uso de qualquer método numérico para se resolver um conjunto de equações diferenciais parciais implica em diversas aproximações cujos efeitos podem ser adicionados ou cancelados. Em geral o usuário do método desconhece a magnitude dos diferentes erros. Um método adaptativo pode ser usado para controlar o erro de discretização proveniente do uso de um número finito de funções de interpolação para representar o espaço solução. O erro de discretização, $e_p = u - u_p$, representa a diferença entre a solução exata, u , do modelo matemático e a solução aproximada, u_p , obtida utilizando-se, por exemplo, o Método de Elementos Finitos (MEF).

No MEF o erro de discretização, e_p , pode ser controlado, por exemplo, mantendo a ordem das funções de interpolação constante em todos os elementos e aumentando-se o número de elementos de modo que o parâmetro de malha h tenda a zero nas regiões do domínio onde o erro for elevado. Tem-se então a versão h do MEF. No caso da versão p do MEF o erro de discretização é controlado mantendo fixa a malha e aumentando-se sucessivamente a ordem polinomial das funções de interpolação. Uma grande vantagem do uso da versão p em relação à versão h é que quando a solução exata, u , é analítica em todos os elementos finitos, incluindo os respectivos contornos, a energia de deformação da função erro decresce exponencialmente quando a versão p é utilizada [7]. No caso da versão h este decréscimo será algébrico.

Mesmo quando a solução exata, u , não é conhecida, é possível estimar quantitativamente o erro de discretização [1]. Neste trabalho é utilizado o Método dos Resíduos em Elementos (MRE) [1], [2], [6], para se obter estimativas a posteriori do erro de discretização associado ao uso da versão p do MEF. Em [1] e [2] o problema local associado ao MRE, apresentado originalmente por Oden et al. em [6], foi modificado a fim de tornar a implementação do estimador mais direta e de menor custo. Na Seção 2 a formulação para o MRE utilizada por [1] e [2] é investigada para o caso de problemas da elasticidade nos quais existem assimetria geométrica, de propriedades materiais e do carregamento.

Na Seção 3 um problema proposto por MacNeal & Harder em [5] para testar o efeito de materiais quase incompressíveis é resolvido utilizando-se a versão p do MEF. O Método dos Resíduos em Elementos é utilizado para controlar o enriquecimento p hierárquico da base do espaço solução.

2. O Método dos Resíduos em Elementos

Em [1] e [2] mostrou-se que para problemas da elasticidade pode-se obter uma estimativa do erro de discretização, e_p , resolvendo-se, para cada elemento finito K , o seguinte problema local:

Encontre $\{\varphi_k\} \in X_{p+2}^0(K)$, tal que $\forall v_{p+2} \in X_{p+2}^0(K)$

$$B_k(\varphi_k, v_{p+2}) = L_k(v_{p+2}) - B_k(u_p, v_{p+2}) + \int_{\partial K} \left[t(u_p) \right]_M \cdot v_{p+2} \, ds \quad (1)$$

onde:

$$B_k(\varphi_k, v_{p+2}) = \int_K \sigma_{ij}(\varphi_k) \varepsilon_{ij}(v_{p+2}) \, d\Omega \quad (2)$$

$$L_k(v_{p+2}) = \int_K f_k v_{p+2} \, d\Omega + \int_{\partial K \cap \Gamma_N} g_k v_{p+2} \, ds \quad (3)$$

f_k representa uma força de corpo na direção k e g_k representa a k -ésima componente do vetor tração prescrito no contorno de Neumann, Γ_N .

$$t(u_p) = \{t_i(u_p)\} = \{\sigma_{ij}(u_p)n_j\} \quad (4)$$

portanto

$$\left[t(u_p) \right]_M = \frac{1}{2} \left(t(u_p^*) + t(u_p) \right) \quad (5)$$

é a tração média no contorno inter-elementos. u_p^* é a solução aproximada nos elementos vizinhos ao elemento K .

$X_{p+2}^0(K)$ é um subespaço do espaço de elementos finitos enriquecido $X_{p+2}(K)$ gerado por funções de interpolação que se anulam nos vértices dos elementos. No caso da versão p do MEF, se forem utilizadas funções de interpolação p hierárquicas, a base do espaço $X_{p+2}^0(K)$ é constituída apenas das funções que são adicionadas hierarquicamente à base do espaço de elementos finitos $X_p(K)$, quando a ordem da aproximação passa de p para $p + 2$ [1].

A norma da energia da função φ_k , $\|\varphi_k\|_E = (B_k(\varphi_k, \varphi_k))^{1/2}$, é conhecida como indicador de erro local. A estimativa da norma da energia do erro global e_p , no MRE, é dada por [1]

$$\|e_p\|_E \doteq \Theta_{MRE} = \left[\sum_{K \in L_H} B_k(\varphi_k, \varphi_k) \right]^{1/2} = \left[\sum_{K \in L_H} \|\varphi_k\|_E^2 \right]^{1/2} \quad (6)$$

onde L_H é uma partição do domínio Ω .

2.1. O MRE para Problemas Axissimétricos

Um sólido de revolução é axialmente simétrico se sua geometria e propriedades materiais são independentes da coordenada circunferencial θ . Fisicamente tem-se um problema tridimensional porém, existindo axissimetria, ele pode ser tratado como um problema bidimensional, sendo a abordagem similar a utilizada em problemas de estado plano de tensão ou de deformação. Se o sólido é axialmente simétrico, em forma e propriedades mecânicas, mas o carregamento não é, são feitas expansões em série de Fourier do carregamento e do campo de deslocamentos, e a análise é feita para cada componente da série.

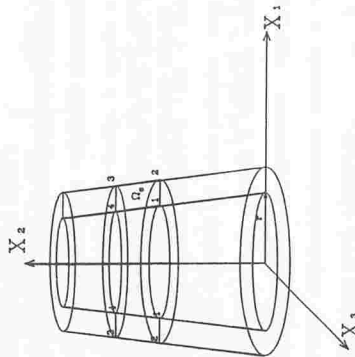


Fig. 1. Axissimetria em relação ao eixo X_2 .

Supondo-se então axissimetria em relação ao eixo X_2 (vide Figura 1) tal que todas as funções sejam independentes da coordenada θ , obtém-se, a partir das relações deformação-deslocamento em coordenadas cilíndricas [4], que

$$\{\epsilon_a\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \epsilon_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_2} \\ \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_1} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = L u \quad (7a)$$

$$\{\sigma_a\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = C_a \{\epsilon_a\} \quad (7b)$$

$$C_a = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & \nu \\ \nu & 1-\nu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & 1-\nu & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7c)$$

Devido à axissimetria geométrica, material e de carga, necessita-se analisar apenas um radiano da estrutura. Utilizando-se as definições (7) as integrais que aparecem em (1) ficam na seguinte forma:

$$\bullet B_k(\phi_k, v_{p+2}) = \int_{\Omega_e} (L\phi_k)^T C_a (L v_{p+2}) d\theta r dr dx_2 = \int_{\Omega_e} (L\phi_k)^T C_a (L v_{p+2}) r dr dx_2 \quad (8)$$

$$\bullet L_k(v_{p+2}) = \int_{\Omega_e} \int_0^1 f \cdot v_{p+2} d\theta r dr dx_2 + \int_{\partial\Omega_e} \int_0^1 g \cdot v_{p+2} d\theta r ds = \int_{\Omega_e} \int_0^1 f \cdot v_{p+2} r dr dx_2 + \int_{\partial\Omega_e} \int_0^1 g \cdot v_{p+2} r ds \quad (9)$$

$$\bullet \int_{\partial\Omega_e} \int_0^1 [t(u_p)]_M \cdot v_{p+2} d\theta r ds = \int_{\partial\Omega_e} \int_0^1 [t(u_p)]_M \cdot v_{p+2} r ds \quad (10)$$

onde Ω_e é mostrado na Figura 1, $\partial\Omega_e \cap \Gamma_N$ é a porção do contorno do elemento onde foram aplicadas condições de contorno de Neumann e $\partial\Omega_e \cap \partial\Omega$ é o contorno inter-elementos.

3. Teste de MacNeal-Harder

O problema de um cilindro de parede espessa submetido a uma pressão interna foi proposto por MacNeal & Harder em [5] como um problema padrão para testar o efeito de materiais quase incompressíveis. Nesta seção este problema é resolvido utilizando-se a versão p do MEF e o Método dos Resíduos em Elementos é empregado para se obter estimativas a posteriori do erro de discretização.

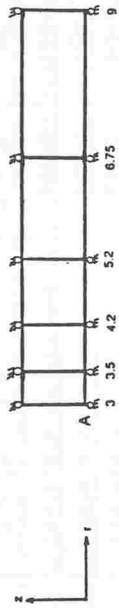


Fig. 2. Cilindro de parede espessa, malha utilizada e condições de contorno impostas.

A malha utilizada e as condições de contorno impostas estão ilustradas na Figura-

a versão p do MEF, estão na Tabela 1. Em [5], no entanto, foram utilizados elementos para estado plano de deformação ou elementos sólidos e não elementos axisimétricos. Os valores obtidos foram adimensionalizados em relação a solução exata, $u = 5,062.274.993 \times 10^{-3}$ mm. Os pssimos resultados obtidos com os elementos QUAD2, QUAD4 e P = 1 indicam que houve travamento ("locking") desses elementos.

Na Tabela 2 tem-se os valores das tensões radial, σ_r , circunferencial, σ_t , e longitudinal, σ_z , no ponto A, obtidos com os elementos p-hierárquicos. Note-se que apesar dos valores dos deslocamentos, obtidos com elementos do 3º e do 4º grau, já serem excelentes, as tensões ainda apresentam elevado erro. Em [5] não foram apresentados os valores de tensões obtidos. A Tabela 2 revela também a elevadíssima taxa de convergência dos valores das tensões obtidos com a versão p, neste problema. As Figuras 3 (a)-(b) e 4 (a)-(b) representam os resultados das Tabelas 1 e 2.

Tabela 2. Tensões (MPa) obtidas com a versão p do MEF no ponto A do cilindro.

TENSOES NA SUPERFÍCIE INTERNA						
P	σ_r	$e_r(\sigma_r)\%$	σ_t	$e_t(\sigma_t)\%$	σ_z	$e_z(\sigma_z)\%$
1	19,80438	2,080E+3	19,91473	-1,493E+3	19,85558	-1,579E+4
2	25,33357	2,633E+3	27,29957	-2,084E+3	26,31131	-2,095E+4
3	0,84002	1,840E+2	3,08709	-1,470E+2	1,96316	-1,471E+3
4	-0,89880	1,012E+1	1,35115	-8,092E+0	0,22613	-8,094E+1
5	-0,99481	5,193E-1	1,25519	-4,153E-1	0,13017	-4,154E+0
6	-0,99975	2,544E-2	1,25025	-2,035E-2	0,12523	-2,035E-1
7	-0,99999	1,206E-3	1,25001	-9,641E-4	0,12499	-9,643E-3
8	-1,00000	5,570E-5	1,25000	-4,456E-5	0,12498	-4,457E-4
∞	-1,0	0	1,25	0	0,12498	0

Na Tabela 3 tem-se as estimativas da norma da energia do erro global, Θ_{MRE} , e do erro relativo medido na norma da energia, η_{MRE} , obtidas com o Método dos Resíduos em Elementos. Θ_{MRE} foi calculada utilizando-se (6). O erro relativo medido na norma da energia, definido por

$$\|e_p\|_E^2 = \|e_p\|_E^2 / \|u_p\|_E^2 \quad (12)$$

foi estimado por

$$\eta_{MRE} = \Theta_{MRE} / (B(u_p, u_p) + \Theta_{MRE}^2)^{1/2} \quad (13)$$

A qualidade das estimativas obtidas foi medida pelo Índice de Efetividade, de-

ra 2. Nesta, tem-se o raio interno, $R_1 = 3,0$ mm, o raio externo, $R_e = 9,0$ mm, a cota da base, $Z_b = 0,0$ e a cota do topo, $Z_t = 1,0$ mm, para o cilindro analisado. Adotou-se também módulo de Young $E = 1000$ MPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,4999$ e pressão interna $P = 1,0$ MPa. Note-se que as condições de contorno de estado plano de deformação impostas em $z = Z_b$ e em $z = Z_t$, juntamente com a axisimetria do problema, confinam o material em todas as direções, com a exceção da radial, o que provoca um aumento das dificuldades numéricas causadas pela quase incompressibilidade do material [5].

A solução deste problema é analítica em todos os elementos finitos, incluindo os respectivos contornos, e portanto a energia de deformação da função erro deve crescer exponencialmente quando a versão p é utilizada. A expressão analítica da solução é dada pela Equação (11) [3]. O valor exato da energia de deformação, para um radiano do cilindro, foi estimado em $U(u) = 0,759.341.248.882$ N.mm utilizando-se uma malha de 20 elementos na direção radial e 2 na direção longitudinal.

$$\sigma_r = \frac{R^2 P}{R_e^2 - R_1^2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \quad (11a)$$

$$\sigma_t = \frac{R_1^2 P}{R_e^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \quad (11b)$$

$$\sigma_z = \frac{2 \nu P R_1^2}{R_e^2 - R_1^2} \quad (11c)$$

$$u_1 = \frac{P R_1^2}{E(R_e^2 - R_1^2)} \left[(1 - \nu)r + (1 + \nu)R_e^2 \frac{1}{r} - 2\nu^2 r \right] \quad (11d)$$

Tabela 1. Deslocamentos adimensionalizados na superfície interna ($r = R_1$). u_h indica solução obtida com a versão h e (R) integração reduzida.

[5]	u_h / u	P	u_p / u
QUAD2	0,018	1	0,052.960
QUAD4	0,053	2	0,878.884
QUAD8	0,967	3	0,999.052
HEXA(8)	0,986	4	0,999.994
HEX20	0,879	5	1,000.000
HEX20(R)	1,000	6	1,000.000
		7	1,000.000
		8	1,000.000

Os deslocamentos no ponto A, para várias formulações analisadas por [5] e para

finido por

$$\Gamma_{MRE} = \Theta_{MRE} / \|e_p\|_E \quad (14)$$

Tabela 3. Estimativas obtidas com o método MRE.

P	N	$\ e\ _E$	Θ_{MRE}	Γ_{MRE}	$\ e\ _E^*$	$\eta_{MRE} \%$
1	12	1,19927E-1	9,47315E-2	0,7899	97,316	95,799
2	32	4,28879E-2	4,02027E-2	0,9374	34,802	32,865
3	52	3,79419E-3	3,79188E-3	0,9994	3,079	3,077
4	82	3,09210E-4	3,09102E-4	0,9997	2,509E-1	2,508E-1
5	122	2,49037E-5	2,48900E-5	0,9995	2,021E-2	2,020E-2
6	172	1,99858E-6	1,98434E-6	0,9929	1,622E-3	1,610E-3
7	238	< 1,0E-6	1,56777E-7	-	< 1,0E-3	1,272E-4
8	302	< 1,0E-6	1,22895E-8	-	< 1,0E-3	9,972E-6

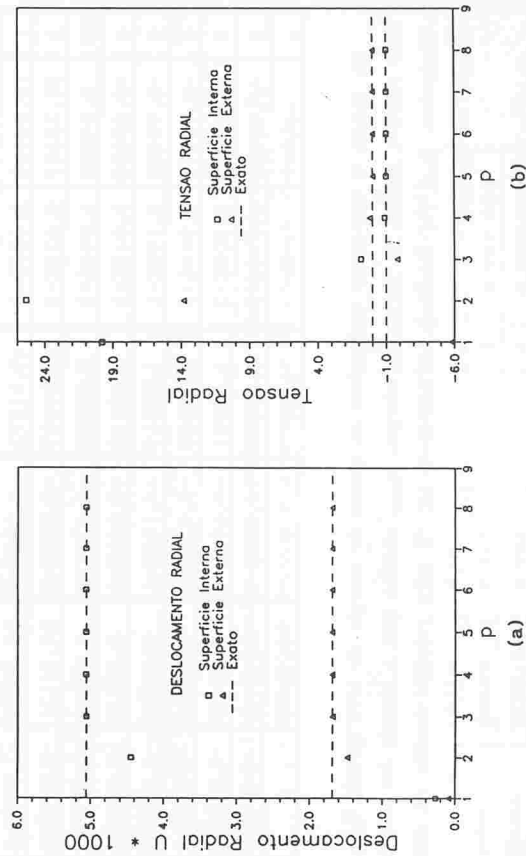


Fig. 3. (a) Convergência dos deslocamentos. (b) Convergência da tensão radial. Enriquecimento p -uniforme dos elementos.

Nota-se que as estimativas obtidas foram muito precisas, com o índice de Efetividade mantendo-se consistentemente próximo à 1,0. Os valores de $\|e\|_E$ e de $\|e\|_E^*$ só

estão tabelados para $1 \leq p \leq 6$ pois como $U(u)$ foi estimada com apenas 12 algarismos significativos não tem sentido calcular-se valores de $\|e\|_E$ menores do que 10^{-6} .

Na Figura 5 foi traçado, em escala log-log, o número de equações versus $\eta_{MRE} \#100 \%$. A curva obtida demonstra a insensibilidade da versão p do MEF em relação ao travessamento de Poisson. Nota-se também que a inclinação da curva está aumentando com o aumento do número de equações, o que caracteriza uma convergência exponencial [7].

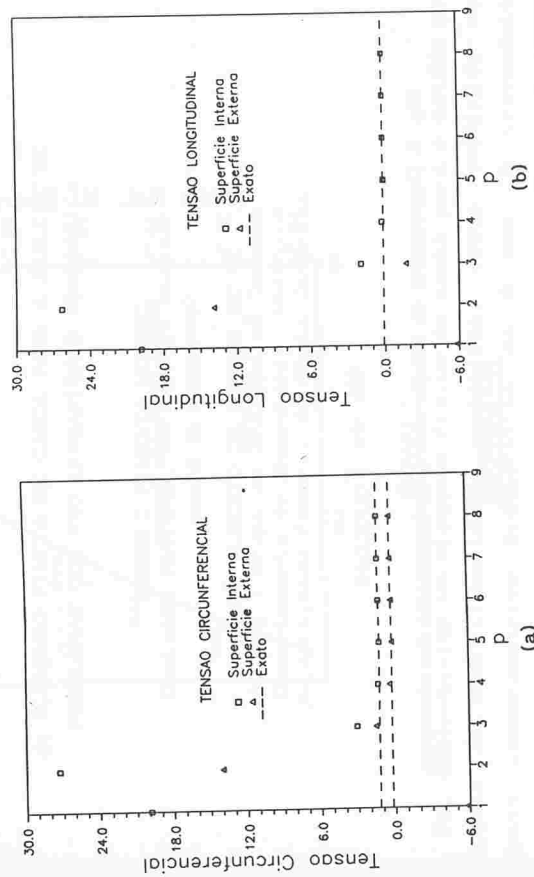


Fig. 4. (a) Convergência da tensão circunferencial. (b) Convergência da tensão longitudinal. Enriquecimento p -uniforme dos elementos.

4. Conclusões

Comprovou-se numericamente que quando a solução de um problema é suave a versão p do MEF permite que sejam utilizadas malhas com poucos elementos e ainda se obter elevada precisão tando nos valores de deslocamento como nos valores de tensões. A escolha da malha é controlada basicamente pela geometria do domínio e dos elementos. A energia de deformação do erro decresce exponencialmente, neste caso, quando a versão p é utilizada.

O Método dos Resíduos em Elementos forneceu estimativas bastante precisas do erro de discretização. O bom desempenho do método em Problemas de Potencial [2],[6] repetiu-se para o caso de problemas da elasticidade com assimetria.

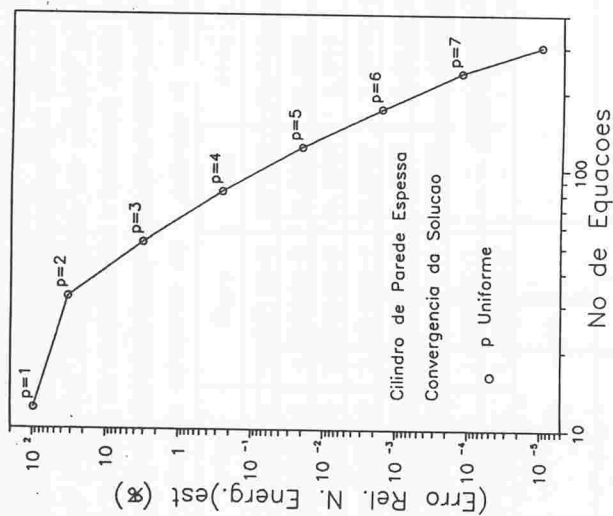


Fig. 5. Convergência da solução com o enriquecimento dos elementos.

REFERÊNCIAS

- [1] DUARTE, C. A. M. " Estudo da Versão p do Método de Elementos Finitos para Problemas da Elasticidade e de Potencial ". M. Sc. Thesis, UFSC, Florianópolis, 1991, pp. 164.
- [2] DUARTE, C. A. M. & BARCELLOS, C. S. de " O Método dos Resíduos em Elementos para Problemas da Elasticidade e de Potencial ", Anais do Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional, Belo Horizonte, Brasil, 1991, pp. 328-335.
- [3] FÉODOSIEV, V. " Resistência dos Materiais ". Porto, Lopes da Silva Editora, 1977.
- [4] KIKUCHI, N. " Finite Element Methods in Mechanics ". Cambridge, Cambridge University Press, 1986, pp. 418.
- [5] MACNEAL, R. H. & HARDER, R. " A Proposed Standard Set of Problems to Test Finite Element Accuracy ". Fin. Elem. Anal. Design., vol. 1, 1985, pp 3-20.
- [6] ODEN, J. T., DEMKOWICZ, L., RACHOWICZ, W. & WESTERMANN, T. A. " Toward a Universal h - p Adaptive Finite Element Strategy, Part 2. A posteriori Error Estimation ". Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., volume 77, 1989, pp. 113-180.
- [7] SZABÓ, B. A. " Mesh Design for the p -Version of the Finite Element Method ". Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., vol. 55, 1986, pp. 181-197.

UM ELEMENTO FINITO DE CASCA PARA A ANÁLISE DE PROBLEMAS COM NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

ROGÉRIO PIMENTA MOURÃO
Comissão Nacional de Energia Nuclear

CARLOS ALBERTO DE CAMPOS SELKE
GRANTE - Grupo de Análise de Tensões
Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Santa Catarina

SUMÁRIO

Foi desenvolvido um elemento finito de casca para o estudo de problemas de não linearidade geométrica, sendo escolhido um elemento isoparamétrico biquadrático de 9 nós. O travamento ("locking") é eliminado pelo método da subintegração e os modos espúrios decorrentes são estabilizados pela introdução de um operador matemático especialmente construído.

SUMMARY

A shell finite element for the study of geometric nonlinear problems is developed in this work. For this purpose, a displacement-based nine-node biquadratic isoparametric element was selected. Locking is avoided by the subintegration method, and the resulting spurious modes are stabilized by the introduction of a mathematical operator specially constructed.