AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a MCT, CNPq e CAPES pelo apoio financeiro obtido.

REFERÊNCIAS

- Aliabadi, M. H. Hall, W. S., Phemister, T. G. Taylor (1985), Expansions for Singular Kernels in the Boundary Element Method, *Int. N. Num. Meth. Engng*, Vol. 21, pp 2221-2236.
- Crotty Sisson, J. M. (1992), Accurate Interior Point Computations in the Boundary Integral Eqaution Method, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng 79*, pp 281-307.
- Dumont, N. A. (1987), The Hybrid Boundary Element Method, *Boundary Elements IX, Vol. 1: Mathematical and Computational Aspects*, Brebbia C. A., Wedland W. L., Kuhn, G., eds, Computational Mechanics Publications, Spring-Verlarg, pp 125-138.
- Dumont, N. A. (1989), The Hybrid Element Method: an Alliance Between Mechanical Consistency and Simplicity, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 42, nr. 11, Part 2, pp S54-S63.
- Dumont, N. A., de Souza, R. M. (1992), A Simple, Unified Technique for the Evaluation of Quasi-singular, Singular and Strongly Singular Integrals, *Boundary Elements XIV, Vol. 1: Field Problems and Applications*, Brebbia, C. A., Dominguez, J., Paris, F., eds., Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science, pp 619-632.
- Dumont, N. A. (1994), On the Efficient Numerical Evaluation of Integrals with Complex Singularity Poles, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 13, pp 155-168.
- Dumont, N. A., Noronha, M. A. M. (1993), A Procedure for the Semi-analytical Evaluation of Generally Singular Integrals in the Boundary Element Methods, XIV Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos computacionais em Engenharia, Vol. 1, pp 325-334.
- Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M., Table of Integrals Series and Products (1965), *Academic Press*, New York and London.
- Gray, F. R. S. A., Mathews, F. R. S. (1966), A Treatise on Bessel Functions and Their Aplications to Physics, *Dover Publications.*
- Hall, W. S. (1988), Integration Methods for Singular Boundary Element Integrands, *Boundary Elements X, Vol. 1: Mathematical and Computational Aspects*, Brebbia C. A. ed., Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag, pp 291-236.
- Hamming, R. W. (1962), Numerical Methods for Scientists and Engineers, McGraw-Hill, Tokyo.
- Hayami, K., Matsumot, H. Moroga, K. (1992), Improvement and Implementation of PART: Numerical Quadrature for Nearly Singular Boundary Element Integrals, *Boundary Elements XIV, Vol. 1: Field Problems and Applications*, Brebbia C. A., Dominguez, J., Pris, F., eds. Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science, pp 604-617.
- Noronha, M. A. M. (1994), Uma Sistemática para a Avaliação de Integrais Impróprias, Singulares e Quase Singulares dos Métodos de Elementos de Contorno, Tese de Mestrado, PUC/RJ, Brasil.
- Sladek, V., Sladek, J. (1992), Non-Singular Boundary Integral Representation of Potential Field Gradients, *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, Vol. 22, pp 1181-1195.
- Telles, J. C. F. (1987), A Self-Adaptive Co-ordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Bounday Element Integrals, *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, Vol. 24, pp 959-973.

XV CILAMCE

CONGRESSO IBERO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA

30/11 a 2/12 . 1994
B H . M G . BRASIL

ESCOLA DE ENGENHARIA DA UFMG
AMC - Associação para Métodos Computacionais em Engenharia

MLGFM - UMA FORMULAÇÃO PARA SUBREGIÕES

RENATO BARBIERI
Faculdade de Engenharia de Joinville - FEJ

ROBERTO DALLEDONE MACHADO
Universidade Federal do Paraná - UFPr

CARLO GIUSEPPE FILIPPIN
Universidade Federal do Paraná - UFPr

CLOVIS SPERB DE BARCELLOS
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

SUMÁRIO

O Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) é uma nova técnica integral que tem sido utilizada para a solução de diversos problemas da mecânica do contínuo. Sua principal característica é aproximar projeções da Função de Green com o Método de Elementos Finitos (FEM). Nos trabalhos mais recentes, esta aproximação das projeções da Função de Green tornou-se bastante morosa, praticamente inviabilizando a análise de grandes modelos com este método. No presente trabalho é proposta uma alternativa para a redução do tempo de processamento com uso de subregiões e, ao mesmo tempo, calculando com precisão os fluxos nas interfaces. Resultados numéricos mostrados são para os problemas de potencial.

1. INTRODUÇÃO

O Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) foi desenvolvido originalmente por de Barcellos & Silva (1987) usando projeções da Função de Green nos subespaços gerados pelas bases de elementos finitos (domínio) e de elementos de contorno (contorno), sendo necessárias duas discretizações para a implementação numérica do método: a do domínio com elementos finitos e a do contorno com elementos de contorno.

Esta primeira aplicação do método foi voltada para o estudo de problemas de membranas elásticas e os resultados para os deslocamentos foram considerados extremamente satisfatórios.

Ainda com relação a este primeiro trabalho, cada célula utilizada na aproximação das projeções da Função de Green foi especificada coincidente com o elemento finito da malha de domínio com posterior compatibilização de valores nodais nas fronteiras da célula. Entretanto, o formalismo para o acoplamento destas células e os resultados de fluxo nas interfaces não foram publicados.

Posteriormente, à partir de 1991, alguns orientados do Prof. Clovis Sperb de Barcellos (UFSC) também utilizaram esta técnica para a solução de diversos problemas do contínuo: problemas de potencial, de Barcellos & Barbieri (1991), Barbieri (1992), Barbieri & de Barcellos (1993a); elasticidade bidimensional, Barbieri (1992), Barbieri et al (1992); placa de Mindlin, Barbieri & de Barcellos (1991,1993b); placas ortotrópicas, Machado & de Barcellos (1992), Machado (1992), Machado et al (1993); equação de Helmoltz, Filippin et al (1992-1993); fratura elástica, Maldaner et al (1992); e cascas semi-espessas, Barbieri et al (1993).

Nesta segunda etapa de desenvolvimento do método as aproximações da Função de Green passaram a ser executadas considerando o domínio todo como sendo uma única célula, veja Fig.1.1; tornando excessivamente grande o tempo de processamento necessário no cálculo das projeções da Função de Green. Além disso, resultados de *fluxo* precisos só foram obtidos no contorno do domínio.

Neste trabalho apresenta-se uma formulação detalhada do MLGFM para subregiões (que pode ser reduzida a nível de elemento) e as aplicações numéricas são realizadas com problemas de potencial, ressaltando o resultado de fluxo nas interfaces das subregiões.

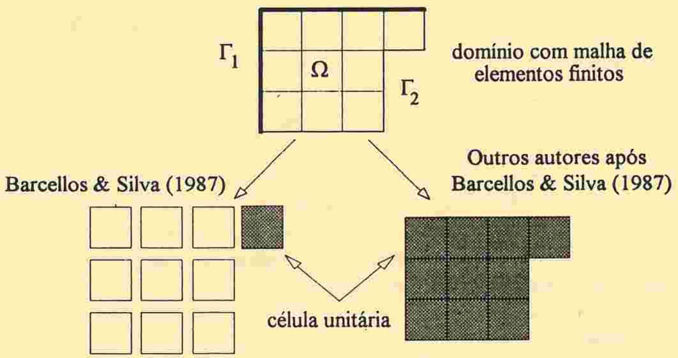

Fig.1.1-Células para as Aproximações da Função de Green.

2. O PROBLEMA DISCRETIZADO

Usando a *Forma de Green Generalizada para o Operador A*, Oden & Reddy (1976), mostra-se que $\mathbf{u}(Q)$, obtido da seguinte equação integral

$$\mathbf{u}(Q) = \int_\Omega \mathbf{G}(P,Q)^t\, \mathbf{b}(P)\, d\Omega_P - \int_\Gamma [N^*\mathbf{G}(p,Q)]^t\, \mathbf{u}(p)\, d\Gamma_p + \int_\Gamma \mathbf{G}(p,Q)^t [N\,\mathbf{u}(p)]\, d\Gamma_p \quad (1)$$

é a solução do problema:

$$A\,\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad \text{em } \Omega; \quad (2.1)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{em } \Gamma_1; \quad \text{e} \quad (2.2)$$

$$N\,\mathbf{u} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (2.3)$$

onde N, $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\mathbf{t}}$ e $\mathbf{b}$ representam o Operador de Neumann associado a A, os deslocamentos prescritos, as forças prescritas e o vetor força de corpo externo, respectivamente. Denota-se as partições do contorno por Γ_1 e Γ_2 de tal modo que o contorno total é obtido com a união, $\Gamma=\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. N^* representa o operador de Neumann associado ao operador adjunto A^*; P,Q são pontos do domínio; p,q são pontos do contorno e $\mathbf{G}$(P,Q) é uma solução fundamental para o problema:

$$A^*\mathbf{G}(P,Q) = \delta(P,Q)\,\mathbf{I} \quad (3)$$

sendo que $\delta(P,Q)$ é a *função* generalizada de Dirac e $\mathbf{I}$ a matriz identidade. Adicionando e subtraindo a quantidade

$$\mathbf{G}(p,Q)^t [N'\mathbf{u}(p)] \equiv [N'\mathbf{G}(p,Q)]\mathbf{u}(p) \quad (4)$$

na Eq.(3) e tomando como condições de contorno para $\mathbf{G}$(P,Q) a quantidade:

$$(N^*+N')\,\mathbf{G}(p,Q) = 0, \quad (5)$$

a expressão final para u(Q) fica sendo:

$$\mathbf{u}(Q) = \int_\Omega \mathbf{G}(P,Q)^t\, \mathbf{b}(P)\, d\Omega_P + \int_\Gamma \mathbf{G}(p,Q)^t\, \mathbf{F}(p)\, d\Gamma_p, \quad (6)$$

onde $\mathbf{F}(p) = (N+N')\,\mathbf{u}(p)$. Se $N'\mathbf{u}(p) = 0$, então $\mathbf{F}(p) = N\,\mathbf{u}(p)$ e não foi introduzida nenhuma modificação nas reações do contorno devido a presença do operador N'. Este operador pode ser tomado como sendo uma constante não nula atuando pontualmente; Barbieri (1992), ou distribuído; Barcellos & Silva (1987), na(s) parcela(s) do contorno onde existem condições de Dirichlet homogêneas. Na ausência deste tipo de condição de contorno, prescreve-se o fluxo fictício (N'u(p)) muito menor que o fluxo real (N u(p)), de tal modo que o resultado final do fluxo seja *pouco* afetado.

Tomando o traço de $\mathbf{u}$(Q) tem-se:

$$\mathbf{u}(q) = \int_\Omega \mathbf{G}(P,q)^t\, \mathbf{b}(P)\, d\Omega_P + \int_\Gamma \mathbf{G}(p,q)^t\, \mathbf{F}(p)\, d\Gamma_p \quad (7)$$

para todo $q \in \Gamma$.

Então, conhecida a Função de Green, os valores de domínio são calculados com a Eq.(6) e os de contorno com a Eq.(7). Entretanto, como não existem soluções fundamentais para muitos problemas do contínuo, a Função de Green é aproximada numéricamente com o FEM de acordo com o procedimento descrito a seguir.

Substituindo na Eq.(7) a aproximação do método de elementos finitos para $\mathbf{b}$(P), $\mathbf{b}(P) = [\varphi(P)]\,\mathbf{b}$; e as aproximações do método de elementos de contorno para $\mathbf{u}$(q) e $\mathbf{F}$(p), $\mathbf{F}(p) = [\phi(p)]\,\mathbf{f}$ e $\mathbf{u}(q) = [\phi(q)]\,\mathbf{q}$; resulta:

$$[\phi(q)]\mathbf{q} = \int_{\Omega} \mathbf{G}(P,Q)^t [\varphi(P)] d\Omega_P \, \mathbf{b} + \int_{\Gamma} \mathbf{G}(p,Q)^t [\phi(p)] \, d\Gamma_p \, \mathbf{f}, \tag{8}$$

onde as componentes dos vetores **b**, **f** e **q** representam os valores nodais de domínio da força de corpo, das reações e dos deslocamentos no contorno, respectivamente. Agora, ortogonalizando a Eq.(8) com respeito a $[\phi(q)]$, o sistema de equações integrais discretizado é repassado pelo seguinte sistema linear de equações:

$$[\mathbf{D}]\,\mathbf{q}^B = [\mathbf{E}]\,\mathbf{f} + [\mathbf{F}]\,\mathbf{b} \tag{9}$$

onde:

$$[\mathbf{D}] = \int_{\Gamma} [\phi(q)]^t [\phi(q)] d\Gamma_q, \tag{10}$$

$$[\mathbf{E}] = \int_{\Gamma} \mathbf{Gc}(p)^t [\phi(p)] d\Gamma_p, \tag{11}$$

$$[\mathbf{F}] = \int_{\Omega} \mathbf{Gc}(P)^t [\varphi(P)] d\Omega_P, \tag{12}$$

$$\mathbf{Gc}(p)^t = \int_{\Gamma} [\phi(q)]^t \mathbf{G}(p,q)^t \, d\Gamma_q, \tag{13}$$

$$\mathbf{Gc}(P)^t = \int_{\Gamma} [\phi(q)]^t \mathbf{G}(P,q)^t \, d\Gamma_q \tag{14}$$

e $\mathbf{q}^B$ é o vetor cujas componentes representam valores nodais do deslocamento no contorno. Os tensores **Gc**(P) e **Gc**(p) representam as projeções da função de Green no subespaço gerado pela base de elementos de contorno com $P \in \Omega$ e $p \in \Gamma$. Seus valores numéricos são computados resolvendo com o FEM o seguinte problema, veja Barbieri (1992) para maiores detalhes:

$$A^* \mathbf{Gc}(P) = 0 \tag{15}$$

$$(N^* + N')\,\mathbf{Gc}(p) = [\phi(p)] \qquad \forall \; p \in \Gamma; P \in \Omega \tag{16}$$

e os valores nodais de **Gc**(P) e **Gc**(p) são obtidos com a solução do problema (15)-(16) com o FEM convencional.

3. O MLGFM PARA SUBREGIÕES

Seja Ω o domínio em análise subdividido em duas subregiões, como na Fig.3.1a. Para implementar o MLGFM para cada uma das subregiões, são necessárias as discretizações em elementos finitos, Fig.3.1b e elementos de contorno, Fig.3.1c.

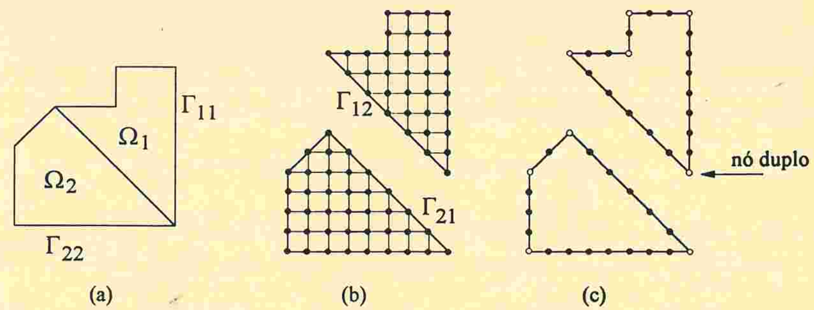

Fig.3.1-Subregiões (a).Malhas de Elementos Finitos (b) e de Elementos de Contorno (c).

Aplicando o MLGFM para o subdomínio Ω_1 o sistema final de equações para o contorno fica sendo:

$$[D_{11} \;\; D_{12}]\begin{Bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \end{Bmatrix} = [E_{11} \;\; E_{12}]\begin{Bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \end{Bmatrix} + [F_{11} \;\; F_{12}]\begin{Bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{Bmatrix} \tag{17}$$

onde o subscrito "ij" indica valores relacionados com a interface Γ_{ij}, como na Fig.3.1.

Análogamente, para o subdomínio Ω_2 tem-se:

$$[D_{21} \;\; D_{22}]\begin{Bmatrix} q_{21} \\ q_{22} \end{Bmatrix} = [E_{21} \;\; E_{22}]\begin{Bmatrix} f_{21} \\ f_{22} \end{Bmatrix} + [F_{21} \;\; F_{22}]\begin{Bmatrix} b_{21} \\ b_{22} \end{Bmatrix} \tag{18}$$

Usando a compatibilidade de deslocamento, de força de corpo e a condição de equilíbrio aplicada às interfaces Γ_{12} e Γ_{21}, isto é:

$$q_{12} = q_{21} = q_i, \tag{19}$$

$$b_{12} = b_{21} = b_i \;\; \text{e} \tag{20}$$

$$f_{12} = -f_{21} = f_i; \tag{21}$$

as equações acima podem ser combinadas na seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{11} \\ q_i \\ q_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ 0 & -E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{11} \\ f_i \\ f_{22} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ 0 & F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_{11} \\ b_i \\ b_{22} \end{Bmatrix} \qquad (22)$$

Este sistema de equações é similar ao obtido para a discretização de todo o domínio como sendo uma região apenas. Impondo as condições de contorno a este sistema, lembrando que na interface das subregiões tanto u(x) como f(x) são desconhecidos, o sistema da Eq.(22) pode ser reescrito na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & -E_{12} & 0 \\ 0 & D_{21} & E_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{11} \\ q_i \\ f_i \\ q_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & 0 \\ 0 & E_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{11} \\ f_{22} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ 0 & F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_{11} \\ b_i \\ b_{22} \end{Bmatrix} \qquad (23)$$

que é idêntico ao sistema de equações obtido para a análise de subregiões com o Método de Elementos de Contorno, BEM.

4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

4.1-Determinar a solução u(x,y) para o seguinte problema:

$$\nabla u(x,y) = 1 \qquad \forall\ (x,y) \in \Omega$$
$$u(x,y) = 0 \qquad \forall\ (x,y) \in \Gamma$$

onde $\Omega=\{(x,y): -1 \le x,y \le 1\}$. Devido à simetria, apenas um quarto do domínio é discretizado com a(s) malha(s) ilustrada(s) na Fig.4.1.

O problema é resolvido com o MEF e malha homogênea de 2×2 elementos lagrangeanos quadráticos. A solução com o MLGFM é obtida com uso de duas subregiões e o operador $N'=k=\delta(x-x_i)$ também é ilustrado na Fig.4.1. Resultados comparativos entre o FEM e o MLGFM são mostrados na Tab.4.1, onde *e%* indica o erro percentual com relação à solução analítica dada por:

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left(1-x^2\right) - \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos(n\pi x/2)\ \cosh(n\pi y/2)}{n^3 \cosh(n\pi/2)}$$

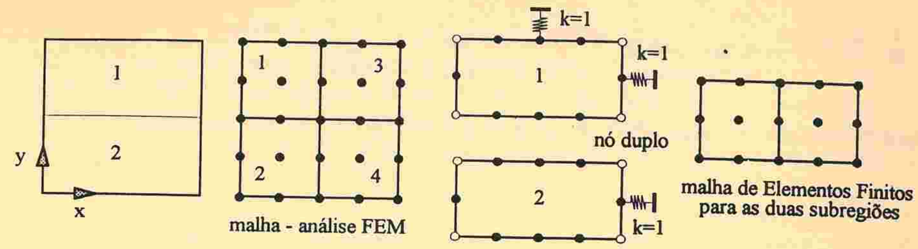

Fig.4.1-Domínio, Subregiões, Malhas e Operador *N'*.

Tab.4.1- Análise de Erros no Fluxo em y=0.50

Método	x=0	x=0.25	x=0.50	x=0.75
FEM*	-0.266035 (1) *e% =2.457*	-0.249160 (1) *e% =2.607*	-0.196955 (1-3) *e% =3.413*	-0.112095 (3) *e% =3.211*
	-0.258413 (2) *e% =5.251*	-0.240258 (2) *e% =6.087*	-0.186683 (2-4) *e% =8.450*	-0.090820 (4) *e% =21.581*
MLGFM	-0.272503 *e% =0.085*	-0.255967 *e% =0.053*	-0.203973 *e% =0.028*	-0.116444 *e% =0.544*
Analítico**	-0.272736	-0.255830	-0.203915	-0.115814

* (.) indica o elemento onde foi calculado o fluxo.
** Valores obtidos com 200 termos na série

4.2-Achar a solução u(x) para o problema unidimensional;

$$\frac{d^2 u}{d x^2} + u + x = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega = \{\ x: 0 \le x \le 1\ \}$$

com u(0) = 0 e derivada nula em x=1.

O domínio foi discretizado com malhas homogêneas de elementos lineares (p1), quadráticos (p2) e cúbicos (p3). Como o operador *N'* é especificado pelo usuário, na Fig.4.2 é mostrado o esquema utilizado para a malha de elementos lineares. Note que na interface do elemento 1 com o elemento 2 o operador *N'* é especificado sendo igual a k=1 para o elemento 1 e k=-1 para o elemento 2 para compatibilizar o fluxo neste nó. Para elementos lagrangeanos de ordem maior que um, o mesmo esquema é mantido, incluindo apenas os nós intermediários dos elementos.

Surpreendentemente, ao contrário do verificado até agora em outros trabalhos relacionados com este tipo de problema, os resultados nodais do potencial obtidos com o FEM e com o MLGFM foram *exatamente iguais* (em todos os dígitos significativos); porém, os resultados para fluxo são bastante diferentes, como mostra a Fig.4.3 onde "h" indica o tamanho do elemento finito.

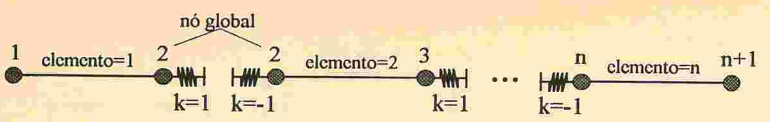

Fig.4.2- Operador N' para problemas unidimensionais (malha de elementos lineares).

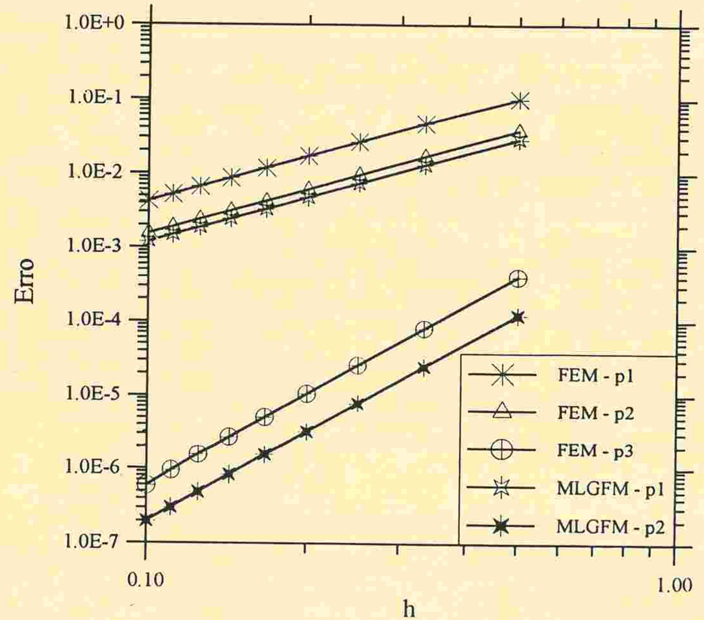

Fig.4.3- Análise de Convergência para o Erro no fluxo em x=0.

5. CONCLUSÃO

Os resultados da primeira aplicação numérica deixam claro a superioridade dos resultados pontuais de fluxo obtidos com o MLGFM.

Já os resultados do segundo exemplo mostram as taxas de convergência h para o valor pontual do fluxo em x=0. Além de resultados pontuais significativamente melhores, os dados da Fig.4.3 deixam claro que as taxas de convergência para *fluxo* são bastante diferentes para o FEM e o MLGFM. Maiores investigações numéricas são necessárias para estabelecer taxas experimentais de convergência para os problemas bi e tridimensionais.

Uma outra vantagem com relação ao FEM é que os valores nodais de fluxo são automaticamente extraídos na solução do sistema de equações resultantes, Eq.(22). Problemas como os de concentração de tensões, fratura (in)elástica e/ou plasticidade localizada tornam-se um bom campo de aplicação desta técnica de subregiões devido à continuidade do campo de *tensões/fluxo* na interfaces.

Uma vez que o erro no *fluxo* é relativamente pequeno quando comparado com os do FEM e que o *fluxo* é contínuo nas interfaces dos elementos (subregiões), processos adaptativos também podem ser beneficiados com este fato; principalmente para os estimadores que trabalham com o pós-processamento das *tensões/fluxo* nas intefaces dos elementos. Maior rigor matemático ainda é necessário para o perfeito entendimento dos resultados do MLGFM.

Finalmente, com este tratamento com subregiões, as matrizes resultantes do MLGFM ficam com dimensões reduzidas e o tempo de processamento também é reduzido.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. de Barcellos, C.S. & Silva, L.H.M. (1987)
Elastic Membrane Solution by Modified Local Green's Function Method. Proc. of the Boundary Element Technology Conference, BETECH-87, pp. 151-161, RJ, Brasil.

2. de Barcellos, C.S. and Barbieri, R. (1991)
Solution of Singular Potential Problems by the Modified Local Green's Function Method (MLGFM), Proc.13th Boundary Element Method International Conference, pp.851-861, Tulsa, USA.

3. Barbieri, R. & de Barcellos, C.S. (1991)
A Modified Local Green's Function Technique for the Mindlin's Plate Problem, Proc. 13th Boundary Element Method International Conference, pp.405-417, Tulsa, USA.

4. Barbieri, R. (1992)
Desenvolvimento e Aplicação do Método da Função de Green Local Modificado à Problemas da Mecânica do Contínuo, UFSC, Brasil, Tese de Doutorado.

5. Barbieri, R. & de Barcellos, C.S. (1993a)
Non Homogeneous Fiel Potential Problems Solution by the Modified Local Green's Function Method (MLGFM), Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.11, pp.9-15

6. Barbieri, R. & de Barcellos, C.S. (1993b)
Mindlin's Plate Solution by the MLGFM. Proc. 15th Boundary Element Method International Conference, Worcester, USA, Vol.2, pp.149-164.

7. Barbieri, R.; Noel, A.T. & de Barcellos, C.S. (1993)
A Green's Function Method Approach to Shell Analysis. Proc. 15th Boundary Element Method International Conference, Worcester, USA, Vol.2, pp.179-194.

8. Filippin, C.G.; Barbieri, R. & de Barcellos, C.S. (1992)
Numerical results for h and p convergences for the Modified Local Green's Function Method. Proc. VII BETECH. Edited by C.A. Brebbia & M.S. Ingber, Computational Mechanics Publications, pp.887-904.

9. Filipin, C.G.; Machado, R.D.; Barbieri, R.; de Barcellos, C.S. & Munhoz, P. (1993). Aplicação do MLGFM em problemas de Vibração Livre de Membranas e Cavidades Acústicas. Proc. XII COBEM, pg.77-80.

10. Machado, R.D. & de Barcellos, C.S. (1992)
A First Modified Local Green's Function Method Approach to Orthotropic Laminated Plates, pp.405-417, Proc. 3rd International Conference in Computer Aided Design in Composite Material Technology, Dellaware, USA.

11. Machado, R.D. (1992)
Implementação do Método da Função de Green Local Modificado para a Solução de Placas Laminadas Compostas. UFSC, Brasil, Tese de Doutorado.

12. Machado, R.D.; Barbieri, R.; Filippin, C.G. & de Barcellos, C.S. (1993)
Análise Comparativa entre o MEF e o MLGFM para a Solução de Placas Laminadas de Materiais Compostos. Proc. XII COBEM, pg. 81-84.

13. Maldaner, M.; Barbieri, R. & de Barcellos, C.S. (1993)
"Quarter Point" e o Método da Função de Green Local Modificado. IEV- International Conference on Integrity Evaluation and Life Extension of Industrial Equipments, pp.237-240.

14. Oden, J.T. & Reddy, J.N. (1976)
An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements, John Wiley & Sons. New York.

XV CILAMCE
CONGRESSO IBERO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA
30/11 a 2/12 . 1994
B H . M G . BRASIL
ESCOLA DE ENGENHARIA DA UFMG
AMC - Associação para Métodos Computacionais em Engenharia

SOBRE A DETERMINAÇAO DE DESLOCAMENTOS E ESFORÇOS EM PONTOS PRÓXIMO DO CONTONO DE PLACAS VIA MEC

JOÃO BATISTA DE PAIVA
Escola de Engenharia de São Carlos, EESC-USP, São Carlos,SP

LUTTGARDES DE OLIVEIRA NETO
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, FEG-UNESP, Guaratinguetá,SP

SUMÁRIO

O cálculo de deslocamentos e esforços em pontos próximos do contorno de placas via MEC pode em muitos casos conduzir a resultados erroneos. Estes erros variam de acordo com a formulação adotada. Neste trabalho são comparados os resultados obtidos pelas formulações usuais e alternativas do MEC com atenção aos valores de esforços calculados em pontos próximos ao contorno.

1 INTRODUÇÃO

O método dos elementos de contorno já é reconhecido como uma alternativa ao método dos elementos finitos para resolução de diversos problemas na engenharia. Dentre as formulações deste método voltadas à análise de placas, podem-se citar os apresentados por BEZINE [1,2], STERN [3], VANDER WEEN [4], HARTMANN e ZOTEMANTEL [5], entre outros.

A resolução numérica das integrais de contorno presentes no método, onde o principal esquema de cálculo utilizado é o da quadratura numérica de Gauss, apresenta o problema de singularidades ao se calcular os deslocamentos e esforços em pontos do domínio próximos ao contorno. Neste caso a formulação usual, que consiste em se escrever as equações integrais do deslocamento e de sua derivada para pontos do contorno conduz a resultados imprecisos, mesmo para um grande número de pontos de integração. Estés resultados são ainda mais imprecisos se a aproximação adotada para deslocamentos e esforços no contorno for linear.