

## 6. CONCLUSÃO

O Método Híbrido dos Elementos de Contorno usa a solução fundamental como a própria solução do problema, isto é, utiliza uma superposição de campos com singularidades para aproximar um campo contínuo. Este procedimento é estritamente correto, em termos matemáticos, mas pode levar a resultados pouco representativos, no domínio, quando se tem uma discretização grosseira. A idéia da introdução de campos polinomiais (harmônicos), que são parte da própria solução fundamental, é de propiciar bons resultados mesmo com discretizações grosseiras, embora não se possa esperar melhoria acentuada para problemas com altos gradientes, ou aceleração da convergência para malhas cada vez mais refinadas, já que, em casos limites, a solução fundamental possui capacidade de representação inigualável.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Ministério de Ciências e Tecnologia (MCT), ao Conselho Nacional de Ciências e Tecnologia (CNPq) e à Coordenação do Aperfeiçoamento do Pessoal de Ensino Superior (CAPES) pelo apoio financeiro recebido.

## REFERÊNCIAS

- Ben-Israel, A. e Greville, T. N. E. (1980) - "Generalized Inverses: Theory and Applications" Robert E. Krieger Publishing Company, New York.
- De Oliveira, R. (1994) - "O Método Híbrido dos Elementos de Contorno para a Análise de Problemas Dependentes do Tempo", Tese de Doutorado, PUC/RJ, Rio de Janeiro
- Dumont, N. A. (1987) - "The Hybrid Boundary Element Method", Boundary Elements IX, Vol 1: Mathematical and Computational Aspects, Brebbia C. A., Wendland W. L., Kuhn, G., eds., Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag, pp 125-138
- Dumont, N. A. (1989) - "The Hybrid Boundary Element Method: an Alliance Between Mechanical Consistency and Simplicity", Applied Mechanics Reviews, Vol. 42, nr. 11, Part 2, pp S54-S63
- Dumont, N. A. e de Carvalho, M. T. (1990) - "Consideração de Forças de Massa no Método Híbrido dos Elementos de Contorno - Parte A: Formulação Teórica", XI Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para a Engenharia, Vol. II, pp 935-945, Rio de Janeiro
- Dumont, N. A. e de Carvalho, M. T. (1990) - "Consideração de Forças de Massa no Método Híbrido dos Elementos de Contorno - Parte B: Interpretações Físicas e Exemplos", XI Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para a Engenharia, Vol. II, pp 947-956, Rio de Janeiro
- Pian, T. H. H. e Tong, P. (1969) - "Basis of Finite Elements for Solid Continua", International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 1, pp 3-28

## XV CILAMCE

CONGRESSO IBERO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA

30/11 a 2/12. 1994  
B H . M G . BRASIL

ESCOLA DE ENGENHARIA DA UFMG  
AMC - Associação para Métodos  
Computacionais em Engenharia

### ANÁLISE COMPARATIVA DO DESEMPENHO DO MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO FRENTE AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE FLEXÃO E VIBRAÇÃO LIVRE DE PLACAS DE MINDLIN.

P. A. Muñoz R. & C. S. de Barcellos

GRANTE - Grupo de Análise de Tensões  
Departamento de Engenharia Mecânica - UFSC  
Caixa Postal 476 - CEP 88040-900 - Florianópolis - SC  
e-mail: grante@ibm.ufsc.br ou grante@brufsc

## SUMÁRIO

O Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) é uma técnica numérica fundamentada em equações integrais, resolvidas de forma aproximada pelo Método dos Elementos de Contorno de Galerkin (GBEM), com o auxílio do Método dos Elementos Finitos (FEM). A grande vantagem desta formulação reside em não ser necessário conhecer uma solução fundamental para o problema tratado. Neste trabalho apresenta-se uma comparação do MLGFM com o FEM para problemas de flexão e vibração livre de placas de Mindlin. As comparações são feitas para deslocamentos, esforços e frequências naturais de vibração. São empregados elementos de domínio de 8, 9, 16, 25 e 36 nós, sempre aplicando no FEM o mesmo elemento finito e a mesma discretização utilizados no MLGFM.

## 1. INTRODUÇÃO

O Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) foi concebido em sua forma atual na década de 80, com os trabalhos de Barcellos & Silva (1987) e Silva (1988). A idéia desta formulação consiste em substituir uma solução fundamental, requerida no Método dos Elementos de Contorno (BEM) convencional, por funções de Green definidas em "células" locais, sendo as mesmas calculadas de forma aproximada pelo Método dos Elementos Finitos. Se o domínio for dividido em várias células, a abordagem é dita pluricelular. Se for empregada uma única célula abrangendo todo o domínio, tem-se a abordagem unicelular.

Vários trabalhos têm sido desenvolvidos, demonstrando a possibilidade de aplicação generalizada do MLGFM a problemas da mecânica do contínuo. Uma boa revisão bibliográfica sobre este aspecto pode ser encontrada em Muñoz R. (1994). No entanto, apesar dos resultados obtidos nestes trabalhos terem sido comparados com o FEM, estas comparações não foram realizadas empregando o mesmo elemento finito e a mesma discretização de domínio em ambos os métodos. Este fato impediu uma avaliação segura da potencialidade do MLGFM frente ao FEM.

O presente trabalho pretende, através de uma comparação coerente entre os dois métodos, analisar o desempenho dos mesmos, apontando circunstâncias em que é vantajosa a utilização de um ou do outro. Estudam-se os problemas de

flexão e vibração livre de placas de Mindlin, incluindo o comportamento do MLGFM frente ao fenômeno do "locking". A abordagem, no MLGFM, é a unicelular.

## 2. REVISÃO DA FORMULAÇÃO DO MLGFM PARA PLACAS DE MINDLIN

### 2.1. FORMULAÇÃO PARA O PROBLEMA DE FLEXÃO

Deseja-se resolver, com o MLGFM, o problema de flexão de placa de Mindlin, dado por

$$\mathbf{A}u = \mathbf{b} \text{ em } \Omega \quad (2.1)$$

$$u = \bar{u} \text{ sobre } \partial\Omega_1 \quad (2.2)$$

$$\mathbf{N}u = \bar{T} \text{ sobre } \partial\Omega_2 \quad (2.3)$$

onde  $u = \{w \ \theta_x \ \theta_y\}^T$  é o vetor deslocamento generalizado;  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\bar{u}$  e  $\bar{T}$  são, respectivamente, o operador diferencial de placa de Mindlin, o operador de Neumann associado a  $\mathbf{A}$ , e os valores prescritos para o vetor deslocamento generalizado e esforço generalizado. O vetor  $\mathbf{b} = \{q \ 0 \ 0\}^T$  é definido pelo carregamento transversal externo,  $q$ .

Considere-se o operador adjunto  $\mathbf{A}^*$  de  $\mathbf{A}$  e o problema associado

$$\mathbf{A}^* \mathbf{G}(Q, P) = \delta(Q, P) \mathbf{I} \quad (2.4)$$

onde  $\mathbf{G}(Q, P)$  é o tensor solução fundamental,  $\delta(Q, P)$  é a função generalizada delta de Dirac e  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade.  $Q$  é um ponto campo, pertencente ao domínio, e  $P$  é um ponto fonte, também pertencente ao domínio.

Pré-multiplicando a equação (2.1) por  $\mathbf{G}(Q, P)^T$  e a equação (2.4) por  $u(Q)^T$ , tem-se

$$\mathbf{G}(Q, P)^T \mathbf{A}u(Q) = \mathbf{G}(Q, P)^T \mathbf{b}(Q) \quad (2.5)$$

$$e \quad u(Q)^T \mathbf{A}^* \mathbf{G}(Q, P) = u(Q)^T \delta(Q, P) \quad (2.6)$$

Subtraindo (2.5) do transposto de (2.6), fica

$$u(Q)^T \delta(Q, P) = [\mathbf{A}^* \mathbf{G}(Q, P)]^T u(Q) - \mathbf{G}(Q, P)^T \mathbf{A}u(Q) + \mathbf{G}(Q, P)^T \mathbf{b}(Q) \quad (2.7)$$

Integrando esta equação no domínio  $\Omega_Q$  com relação a um sistema de coordenadas com origem no ponto  $P \in \Omega$ , tem-se como solução para  $u(P)$ ,

$$u(P) = \int_{\Omega} [\mathbf{A}^* \mathbf{G}(Q, P)]^T u(Q) d\Omega_Q - \int_{\Omega} \mathbf{G}(Q, P)^T \mathbf{A}u(Q) d\Omega_Q + \int_{\Omega} \mathbf{G}(Q, P)^T \mathbf{b}(Q) d\Omega_Q \quad (2.8)$$

Aplicando integração por partes às duas primeiras parcelas do lado direito da igualdade em (2.8), vem

$$u(P) = - \int_{\partial\Omega} [\mathbf{N}^* \mathbf{G}(q, P)]^T u(q) d\partial\Omega_q + \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(q, P)^T \mathbf{N}u(q) d\partial\Omega_q + \int_{\Omega} \mathbf{G}(Q, P)^T \mathbf{b}(Q) d\Omega_Q \quad (2.9)$$

onde  $\mathbf{N}^*$  é o operador de Neumann associado ao operador  $\mathbf{A}^*$ .

Neste ponto é conveniente introduzir um operador  $\mathbf{N}'$  tal que

$$\mathbf{G}(q, P)^T \mathbf{N}' u(q) \equiv \mathbf{N}'^T \mathbf{G}(q, P)^T u(q) \quad (2.10)$$

de forma que essa quantidade seja adicionada e subtraída em (2.9), resultando

$$u(P) = - \int_{\partial\Omega} [(\mathbf{N}'^* + \mathbf{N}') \mathbf{G}(q, P)]^T u(q) d\partial\Omega_q + \int_{\Omega} \mathbf{G}(Q, P)^T \mathbf{b}(Q) d\Omega_Q \quad (2.11)$$

Adota-se, por conveniência, como condição de contorno para o problema estabelecido por (2.4), a expressão

$$(\mathbf{N}'^* + \mathbf{N}') \mathbf{G}(q, P) = 0 \quad (2.12)$$

de modo a anular a primeira integral de (2.11), estabelecendo desta maneira, uma função de Green com condições de contorno do tipo Cauchy. O operador  $\mathbf{N}'$  pode ser definido como uma matriz diagonal com elementos  $k_i$  tal que

$$k_i u_i(p) \equiv 0 \text{ em } \partial\Omega_2 \quad (2.13)$$

e  $k_i$  podendo assumir qualquer valor na parcela de  $\partial\Omega_1$  com condições de contorno homogêneas.

A solução procurada fica, então,

$$u(P) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(q, P)^T \mathbf{F}(q) d\partial\Omega_q + \int_{\Omega} \mathbf{G}(Q, P)^T \mathbf{b}(Q) d\Omega_Q \quad (2.14)$$

$$\text{onde } \mathbf{F}(q) = (\mathbf{N}' + \mathbf{N}') u(q).$$

Aplicando-se o teorema do traço, obtém-se para um ponto  $p$  do contorno,

$$u(p) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(q, p)^T \mathbf{F}(q) d\partial\Omega_q + \int_{\Omega} \mathbf{G}(Q, p)^T \mathbf{b}(Q) d\Omega_Q \quad (2.15)$$

As equações (2.14) e (2.15) são as expressões finais a discretizar para o caso estático do MLGFM.

### 2.2. FORMULAÇÃO PARA O PROBLEMA DE VIBRAÇÃO LIVRE

Neste caso, a equação diferencial a ser resolvida é dada por

$$\mathbf{A}u(Q) - \omega^2 \mathbf{P}u(Q) = 0 \quad (2.16)$$

onde  $\mathbf{A}$  é o mesmo operador diferencial do caso estático,  $\mathbf{P}$  é dada por

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \rho h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

e  $\omega$  são as frequências naturais de vibração da placa.

De forma semelhante ao efetuado no BEM convencional, utiliza-se como estado auxiliar o problema dado por (2.4), que envolve o operador adjunto do problema estático,  $\mathbf{A}^*$ . A partir daí, procedendo de forma exatamente análoga à apresentada para flexão, chega-se às equações

$$u(p) = \int_{\partial\Omega} G(q, p)^T F(q) d\partial\Omega_q + \omega^2 \int_{\Omega} G(Q, p)^T Pu(Q) d\Omega_Q \quad (2.18)$$

$$e \quad u(p) = \int_{\partial\Omega} G(q, p)^T F(q) d\partial\Omega_q + \omega^2 \int_{\Omega} G(Q, p)^T Pu(Q) d\Omega_Q \quad (2.19)$$

que devem ser, em seguida, discretizadas. Note-se que a função de Green envolvida é a mesma do problema estático.

### 2.3. DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

Nas equações (2.14), (2.15), (2.18) e (2.19), as variáveis definidas no domínio são aproximadas pelas funções de interpolação convencionais de elementos finitos, representadas por  $[\Psi]$ . Por outro lado, as variáveis definidas sobre o contorno são aproximadas com funções de interpolação de contorno, representadas por  $[\phi]$ .

Tem-se, portanto, o seguinte

$$u(p) = [\Psi(p)]\{u\}^D \quad u(Q) = [\Psi(Q)]\{u\}^D \quad (2.20)$$

$$u(p) = [\phi(p)]\{u\}^C \quad F(q) = [\phi(q)]\{f\} \quad b(Q) = [\Psi(Q)]\{b\} \quad (2.21)$$

Substituem-se as aproximações nas equações integrais, adotando após, o procedimento indicado a seguir

#### Para o problema de flexão

No sistema de domínio, minimiza-se o resíduo em relação à base dos elementos finitos, obtendo

$$A\{u\}^D = B\{f\} + C_F\{b\} \quad (2.22)$$

No sistema de contorno, analogamente, minimiza-se o resíduo em relação à base dos elementos de contorno, resultando

$$D\{u\}^C = E\{f\} + F_F\{b\} \quad (2.23)$$

#### Para o problema de vibração livre

Após o mesmo procedimento acima descrito, sobre os sistemas de domínio e contorno, tem-se, respectivamente

$$A\{u\}^D = B\{f\} + \omega^2 C_V\{u\}^D \quad (2.24)$$

$$e \quad D\{u\}^C = E\{f\} + \omega^2 F_V\{u\}^D \quad (2.25)$$

Nos sistemas (2.22) a (2.25) tem-se que

$$A = \int_{\Omega} [\Psi(p)]^T [\Psi(p)] d\Omega_p \quad (2.26)$$

$$B = \int_{\partial\Omega} [Gd(q)]^T [\phi(q)] d\partial\Omega_q \quad (2.27)$$

$$C_F = \int_{\Omega} [Gd(Q)]^T [\Psi(Q)] d\Omega_Q \quad (2.28)$$

$$C_V = \int_{\Omega} [Gd(Q)]^T [P] [\Psi(Q)] d\Omega_Q \quad (2.29)$$

$$D = \int_{\partial\Omega} [\phi(p)]^T [\phi(p)] d\partial\Omega_p \quad (2.30)$$

$$E = \int_{\partial\Omega} [Gc(q)]^T [\phi(q)] d\partial\Omega_q \quad (2.31)$$

$$F_F = \int_{\Omega} [Gc(Q)]^T [\Psi(Q)] d\Omega_Q \quad (2.32)$$

$$F_V = \int_{\Omega} [Gc(Q)]^T [P] [\Psi(Q)] d\Omega_Q \quad (2.33)$$

onde

$$[Gd(q)]^T = \int_{\Omega} [\Psi(p)]^T [G(q, p)]^T d\Omega_p \quad (2.34)$$

$$[Gd(Q)]^T = \int_{\Omega} [\Psi(p)]^T [G(Q, p)]^T d\Omega_p \quad (2.35)$$

$$[Gc(q)]^T = \int_{\partial\Omega} [\phi(p)]^T [G(q, p)]^T d\partial\Omega_p \quad (2.36)$$

$$[Gc(Q)]^T = \int_{\partial\Omega} [\phi(p)]^T [G(Q, p)]^T d\partial\Omega_p \quad (2.37)$$

### 3. DETERMINAÇÃO APROXIMADA DAS PROJEÇÕES DA FUNÇÃO DE GREEN

As projeções da função de Green podem ser calculadas mediante o auxílio do Método dos Elementos Finitos, solucionando dois problemas associados

Problema 1

$$A * [Gd(p)] = [\Psi(p)] \quad (2.38)$$

$$(N * + N') [Gd(p)] = 0 \quad \forall p \in \partial\Omega, p \in \Omega \quad (2.39)$$

Problema 2

$$A * [Gc(p)] = 0 \quad (2.40)$$

$$(N * + N') [Gc(p)] = [\phi(p)] \quad \forall p \in \partial\Omega, p \in \Omega \quad (2.41)$$

### 4. RESULTADOS NUMÉRICOS

#### 4.1. PROBLEMAS DE FLEXÃO

Foram analisados problemas de placa quadrada simplesmente apoiada e engastada em todas as arestas. Em ambos os casos foi aplicado um carregamento transversal unitário uniforme. Por considerações de simetria, apenas um quadrante da placa foi modelado. A análise é separada em duas partes. Na primeira observam-se aspectos de convergência de esforços e deslocamentos do MLGFM x FEM. As características da placa, neste caso, são as seguintes: Lado = a = 20.0, espessura = h = 0.2, módulo de elasticidade = E = 2.1 x 10<sup>6</sup> e coeficiente de Poisson = ν = 0.3. Na segunda parte estuda-se o fenômeno do "locking". Neste caso analisa-se apenas o problema de placa engastada, sendo suas características basicamente as mesmas, apenas variando a espessura.

##### 4.1.1. CARACTERÍSTICAS DE CONVERGÊNCIA h E p DO MLGFM FRENTE AO FEM

Nesta análise, empregam-se elementos lagrangeanos de 9, 16, 25 e 36 nós, sendo que no elemento de 9 nós é aplicada a regra de subintegração seletiva. Observa-se nas Figuras 4.1 a 4.5 o comportamento dos dois métodos quanto à aproximação de esforços em pontos selecionados, onde a solução analítica é conhecida pela teoria de placa fina (Timoshenko & Woinowsky-Krieger, 1970). Nestas figuras, N corresponde ao número de elementos finitos utilizados por lado do quadrante e P é o grau do polinômio interpolador. Os esforços analisados são: Momento Normal no Centro da Placa (MNC), Momento Normal no Centro do Lado (MNCL) e Esforço Cortante no Centro do Lado (ECCL).

Os esforços são adimensionalizados segundo as seguintes regras:

$$\text{Momento: } M^* = 100 M / (qa^2) \quad \text{Esforço Cortante: } Q^* = 10 Q / (qa)$$

## Placa Engastada

No caso de placa engastada verifica-se que, para o momento normal central (Fig. 4.1 e 4.3), ambos os métodos convergem para um valor um pouco abaixo do fornecido por Timoshenko & Woinowsky-Krieger (1970). Esse comportamento pode ser explicado pelo fato destes autores apresentarem a solução com apenas dois dígitos após a vírgula, o que leva a crer que o valor para o qual a solução numérica converge, representa melhor a situação real. A convergência do MLGFM é marcadamente mais rápida.

### Placa Engastada - Refino p

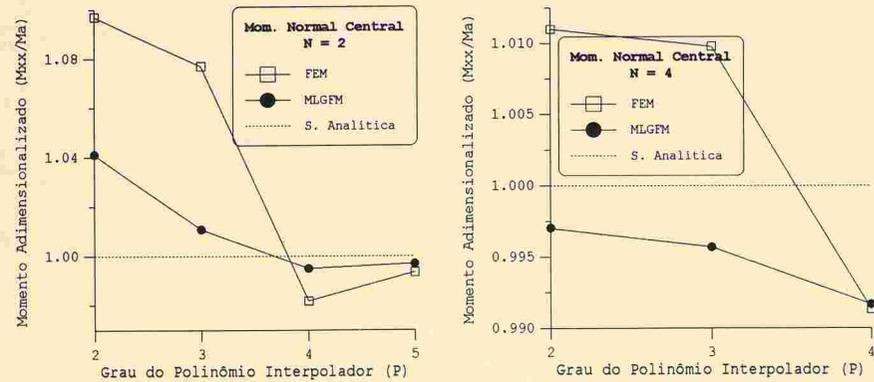


Figura 4.1 - Convergência p do MNC. Sol. analítica adimensional ( $M_a$ ) = 2.31.

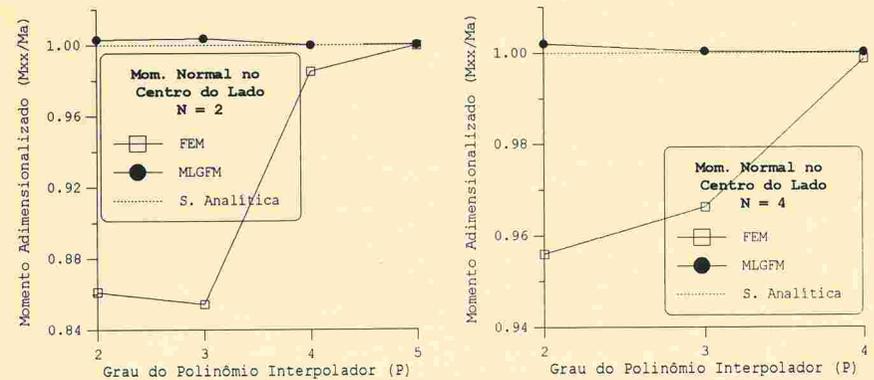


Figura 4.2 - Convergência p do MNCL. Sol. analítica adimensional ( $M_a$ ) = -5.13.

No caso do momento normal do centro do lado a convergência ocorre para o valor fornecido por Timoshenko & Woinowsky-Krieger, apesar deste ter sido truncado com duas casas decimais. Isto leva a crer que a contribuição da terceira casa em diante, nesta solução, é muito pequena. Por outro lado, deve ser considerada a diferença na escala do eixo vertical das Figuras 4.2 e 4.1.

## Placa Engastada - Refino h

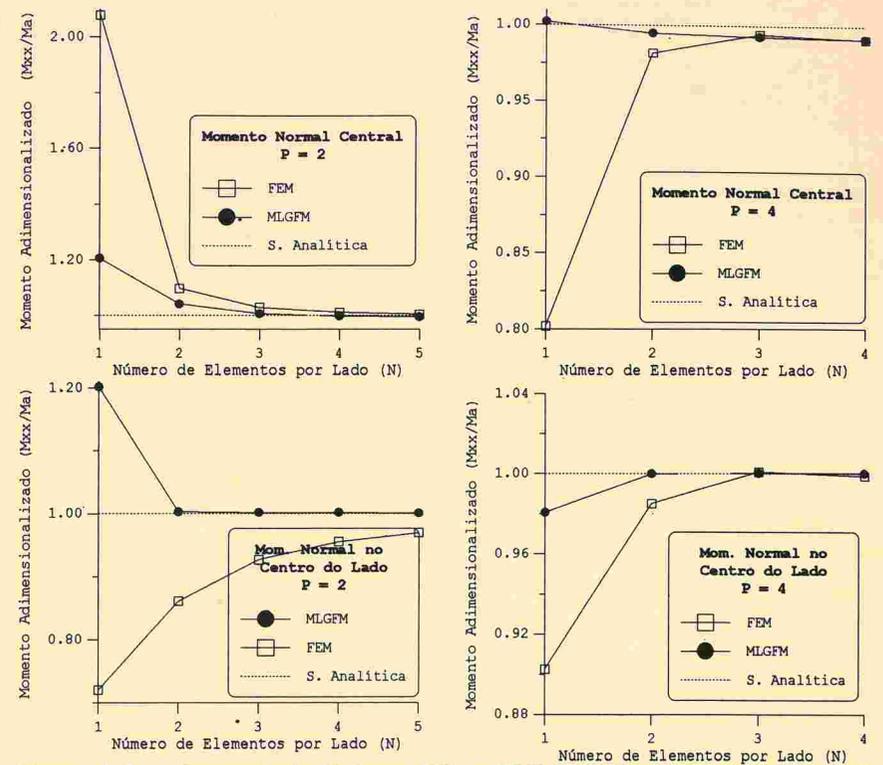
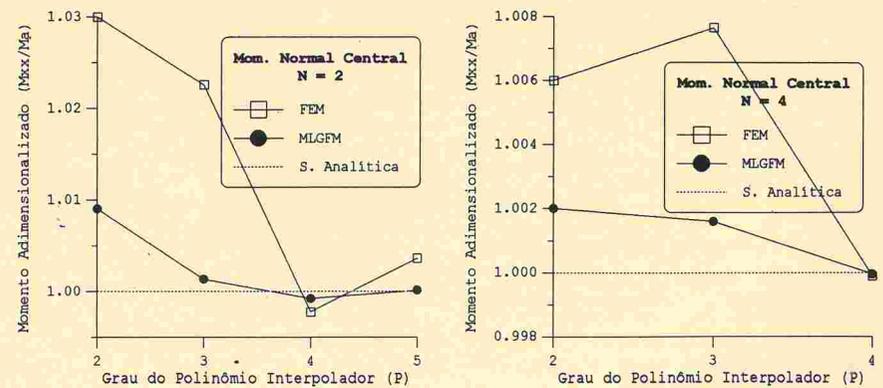


Figura 4.3 - Convergência h para MNC e MNCL da placa engastada. Solução analítica adimensional ( $M_a$ ): Central = 2.31, No centro do lado = -5.13.

### Placa Simplesmente Apoiada - Refino p



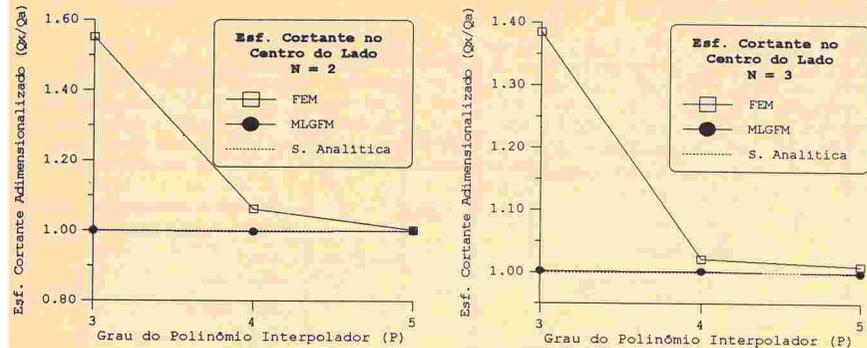


Figura 4.4 - Convergência p para MNC e ECCL da placa simplesmente apoiada. Soluções analíticas adimensionalizadas: MNC (Ma) = 4.7887, ECCL (Qa) = -3.3765.

**Placa Simplesmente Apoiada - Refino h**

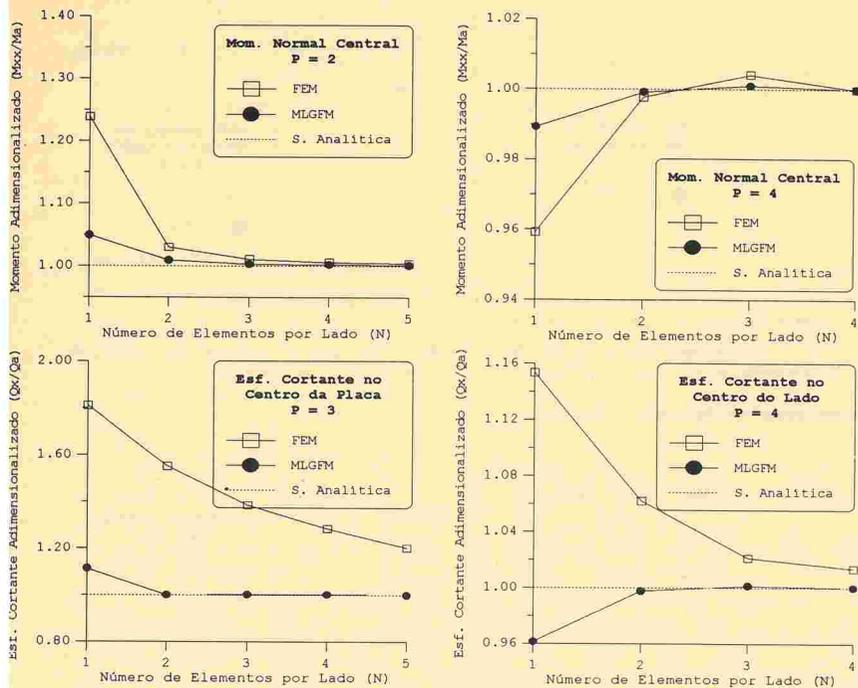


Figura 4.5 - Convergência h para MNC e ECCL da placa simplesmente apoiada. Soluções analíticas adimensionalizadas: MNC (Ma) = 4.7887, ECCL (Qa) = -3.3765.

Em todos os casos ilustrados o MLGFM apresenta melhores características de convergência para esforços do que o FEM.

$\nu = 0.3$ . A discretização é realizada com 48 elementos finitos lagrangeanos quadráticos com subintegração seletiva no domínio, e uma malha adicional, no MLGFM, com 16 elementos de contorno do mesmo grau. A malha utilizada no domínio é mostrada na Figura 4.7, e os resultados obtidos para frequências naturais, na Tabela 4.2.

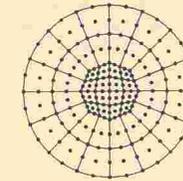


Figura 4.7 - Malha de Domínio da Placa Circular

Tabela 4.2 - Placa Circular Engastada

h/b		Parâmetro de Frequência $\lambda = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D}$						
		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$
0.20	FEM	9.522	17.858	27.256	32.295	37.279	43.552	47.745
	MLGFM	9.258	17.858	27.256	30.756	37.279	43.552	47.758
	Irie et al., 1980	9.240	17.834	27.214	30.211	37.109	42.409	47.340

**5. CONCLUSÕES**

Os exemplos ilustrados evidenciam claramente as excelentes características de convergência do MLGFM para cálculo de esforços, sendo estas bastante superiores às do FEM. Por outro lado, mediante a formulação unicelular, o cálculo de deslocamentos e frequências naturais fornece resultados semelhantes aos obtidos empregando o FEM, inclusive em relação ao fenômeno do "locking". O FEM parece ser, então, uma melhor alternativa nesses casos, face a seu menor esforço computacional em relação ao MLGFM.

**AGRADECIMENTOS**

Os autores gostariam de agradecer à CAPES, pelo suporte financeiro dado a esta pesquisa.

**REFERÊNCIAS**

- Barcellos, C.S. & Silva, L.H.M., "Elastic Membrane Solution by a Modified Local Green's Function Method", in: Proceedings of the Int. Conf. on Boundary Element Technology 1987, Ed. Brebbia, C.A. and Venturini, W.S., Comp. Mech. Publ., Southampton, 1987.
- Irie, T., Yamada, G. & Kitipornchai, S., "Natural Frequencies of Mindlin Circular Plates", J. Appl. Mech., vol. 47, pp. 652-655, 1980.
- Liew, K.M., Xiang, Y. & Kitipornchai, S., "Transverse Vibration of Thick Rectangular Plates - I. Comprehensive Sets of Boundary Conditions", Comp. & Struct., vol. 49, n.º 1, pp. 1-29, 1993.
- Muñoz R., P.A., "Desenvolvimentos na Aplicação do Método da Função de Green Local Modificado a Problemas de Placa de Mindlin", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 1994.
- Silva, L.H.M., "Novas Formulações Integrais para Problemas da Mecânica", Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, 1988.
- Timoshenko S.P. & Woinowsky-Krieger, S., "Theory of Plates and Shells", Mc Graw-Hill, 2a edição, 1970.

#### 4.1.2. CARACTERÍSTICAS DO MLGFM FRENTE AO FEM PARA APROXIMAÇÃO DE DESLOCAMENTOS

Nesta seção apresenta-se, através da análise do fenômeno do "locking", uma comparação do desempenho dos dois métodos para aproximação de deslocamentos generalizados. A placa é engastada em todo o seu contorno e o carregamento é unitário uniforme. As demais características são as mesmas das placas anteriormente citadas. Devido à simetria do problema, é modelado apenas um quadrante da placa. A discretização de domínio é feita com duas malhas de 4 x 4 elementos finitos, sendo empregados elementos quadráticos lagrangeanos e Serendipity, respectivamente, ambos com subintegração seletiva. No MLGFM aplica-se, adicionalmente, uma malha de 16 elementos de contorno do mesmo grau.

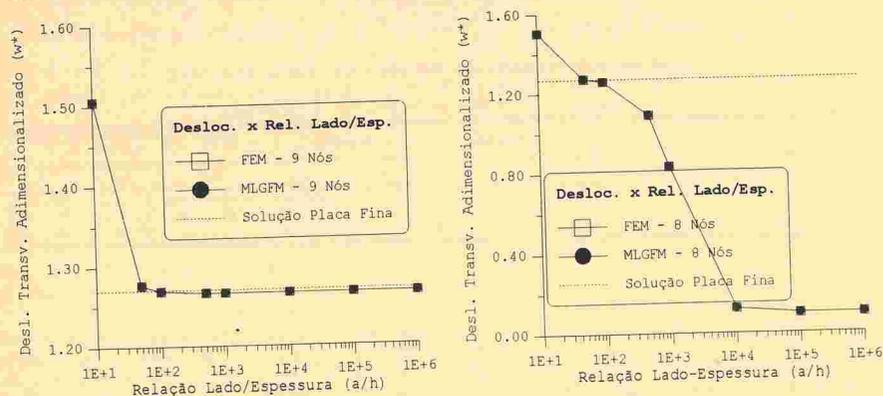


Figura 4.6 - Análise do fenômeno do "locking".  $w^* = 1000 wD / (qa^4)$

Verifica-se que, nesta situação, ambos os métodos têm comportamento idêntico, apresentando "locking".

#### 4.2. PROBLEMAS DE VIBRAÇÃO LIVRE

Na análise de problemas de vibração livre, foram escolhidos dois casos: o primeiro corresponde a uma placa retangular com dois lados opostos simplesmente apoiados e os outros dois livres (SFSF). As características da placa são as seguintes: relação entre o comprimento dos lados =  $a/b = 2$ , relação de espessura/lado =  $h/b = 0.2$ , coeficiente de elasticidade =  $E = 1.0$ , massa específica =  $\rho = 1.0$ , e as demais características da placa são semelhantes às dos casos anteriores. A discretização empregada é uma malha de 6 x 6 elementos finitos lagrangeanos quadráticos no domínio e, no MLGFM, uma malha adicional de 24 elementos de contorno do mesmo grau. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 - Placa Retangular - Caso SFSF

h/b		Parâmetro de Frequência $\lambda = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D}$						
		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$
0.20	FEM	0.2363	0.6360	0.9193	1.4470	2.0092	2.3594	2.5362
	MLGFM	0.2363	0.6360	0.9193	1.4470	2.0092	2.3594	2.5362
	Liew et al., 1993	0.2362	0.6314	0.9102	1.4280	1.9238	2.2634	2.4422

O segundo caso trata de uma placa circular engastada em todo o contorno. A placa tem diâmetro unitário e relação espessura/raio igual a 0.2. O módulo de Young =  $E = 1.0$ , a massa específica =  $\rho = 1.0$  e o coeficiente de Poisson =

## XV CILAMCE

CONGRESSO IBERO-LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA

30/11 a 2/12. 1994  
BH . MG . BRASIL

ESCOLA DE ENGENHARIA DA UFMG  
AMC - Associação para Métodos  
Computacionais em Engenharia

### MLGFM: UMA NOVA FORMULAÇÃO INTEGRAL PARA CASCAS

RENATO BARBIERI

Faculdade de Engenharia de Joinville - FEJ

CLOVIS SPERB DE BARCELLOS

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

ANDRÉ TAMAGNINI NOEL

Washington University (aluno de doutorado)

#### SUMÁRIO

A aplicação do Método de Elementos de Contorno, BEM, para a análise de cascas ainda é restrita a poucas geometrias devido à inexistência de uma solução fundamental apropriada para cascas com geometrias arbitrária. Por outro lado, o Método da Função de Green Local Modificado, MLGFM, pode ser entendido como sendo uma extensão do Galerkin-BEM que não usa a forma explícita de uma solução fundamental e/ou Função de Green. Este fato possibilita a aplicação dessa nova técnica integral para cascas finas, semi-espessas, com espessura variável e com propriedades físicas heterogêneas. Neste trabalho apresenta-se o formalismo matemático do MLGFM aplicado à cascas semi-espessas e algumas soluções numéricas.

#### 1. INTRODUÇÃO

Embora o Método de Elementos de Contorno, BEM, seja um método numérico com muitas vantagens sobre outras técnicas, sua formulação integral requer o conhecimento explícito de uma solução fundamental e/ou uma aproximação desta solução. Porém, muitos problemas em engenharia são descritos por equações cujas soluções fundamentais são desconhecidas e/ou muito complicadas, impossibilitando ou dificultando sua implementação numérica. Devido a estes fatos, as aplicações do BEM para cascas ainda são restritas a geometrias específicas e, geralmente, usando a teoria de casca fina, meio homogêneo e espessura constante.

O Método da Função de Green Local Modificado, MLGFM, é uma nova técnica integral proposta por Barcellos & Silva (1987) após algumas modificações no Método da Função de Green Local, LGFM, desenvolvido por Dorning (1981) e seus co-autores, Burns (1975) e Horak (1980). O MLGFM foi aplicado inicialmente para a solução de membranas elásticas, Barcellos & Silva (1987) e posteriormente para diversos problemas da mecânica do contínuo. Algumas destas aplicações mais recentes são: placa de Mindlin, Barbieri & Barcellos (1993b), potenciais não homogêneos, Barbieri & Barcellos (1993a), placas laminadas ortótropas com teoria de primeira e segunda ordem, Machado (1992), elasticidade bidimensional, Barbieri (1992), e cascas semi-espessas, Barbieri et al. (1993c).

Uma das características mais importantes do MLGFM é explorar as propriedades da Função de Green do operador adjunto sem o seu conhecimento na forma explícita. As