

4.1.2. CARACTERÍSTICAS DO MLGFM FRENTE AO FEM PARA APROXIMAÇÃO DE DESLOCAMENTOS

Nesta seção apresenta-se, através da análise do fenômeno do "locking", uma comparação do desempenho dos dois métodos para aproximação de deslocamentos generalizados. A placa é engastada em todo o seu contorno e o carregamento é unitário uniforme. As demais características são as mesmas das placas anteriormente citadas. Devido à simetria do problema, é modelado apenas um quadrante da placa. A discretização de domínio é feita com duas malhas de 4 x 4 elementos finitos, sendo empregados elementos quadráticos lagrangeanos e Serendipity, respectivamente, ambos com subintegração seletiva. No MLGFM aplica-se, adicionalmente, uma malha de 16 elementos de contorno do mesmo grau.

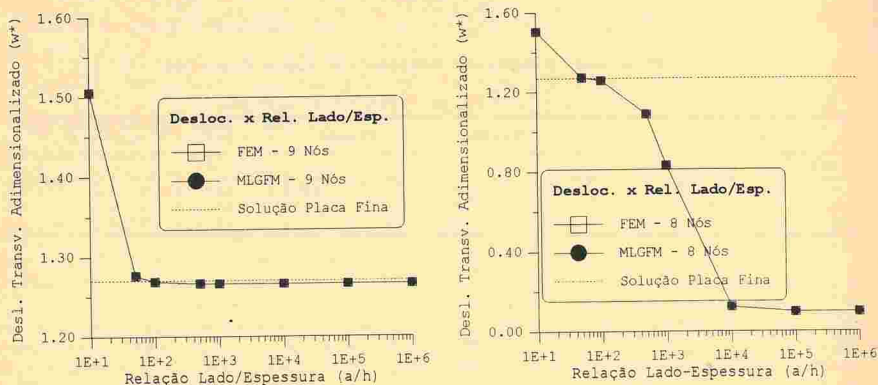


Figura 4.6 - Análise do fenômeno do "locking". $w^* = 1000 wD / (qa^4)$

Verifica-se que, nesta situação, ambos os métodos têm comportamento idêntico, apresentando "locking".

4.2. PROBLEMAS DE VIBRAÇÃO LIVRE

Na análise de problemas de vibração livre, foram escolhidos dois casos: o primeiro corresponde a uma placa retangular com dois lados opostos simplesmente apoiados e os outros dois livres (SFSF). As características da placa são as seguintes: relação entre o comprimento dos lados = $a/b = 2$, relação de espessura/lado = $h/b = 0.2$, coeficiente de elasticidade = $E = 1.0$, massa específica = $\rho = 1.0$, e as demais características da placa são semelhantes às dos casos anteriores. A discretização empregada é uma malha de 6 x 6 elementos finitos lagrangeanos quadráticos no domínio e, no MLGFM, uma malha adicional de 24 elementos de contorno do mesmo grau. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 - Placa Retangular - Caso SFSF

h/b		Parâmetro de Frequência $\lambda = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D}$						
		λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7
0.20	FEM	0.2363	0.6360	0.9193	1.4470	2.0092	2.3594	2.5362
	MLGFM	0.2363	0.6360	0.9193	1.4470	2.0092	2.3594	2.5362
	Liew et al., 1993	0.2362	0.6314	0.9102	1.4280	1.9238	2.2634	2.4422

O segundo caso trata de uma placa circular engastada em todo o contorno. A placa tem diâmetro unitário e relação espessura/raio igual a 0.2. O módulo de Young = $E = 1.0$, a massa específica = $\rho = 1.0$ e o coeficiente de Poisson =

XV CILAMCE

CONGRESSO IBERO-LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA

30/11 a 2/12. 1994
BH . MG . BRASIL

ESCOLA DE ENGENHARIA DA UFMG
AMC - Associação para Métodos
Computacionais em Engenharia

MLGFM: UMA NOVA FORMULAÇÃO INTEGRAL PARA CASCAS

RENATO BARBIERI

Faculdade de Engenharia de Joinville - FEJ

CLOVIS SPERB DE BARCELLOS

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

ANDRÉ TAMAGNINI NOEL

Washington University (aluno de doutorado)

SUMÁRIO

A aplicação do Método de Elementos de Contorno, BEM, para a análise de cascas ainda é restrita a poucas geometrias devido à inexistência de uma solução fundamental apropriada para cascas com geometrias arbitrária. Por outro lado, o Método da Função de Green Local Modificado, MLGFM, pode ser entendido como sendo uma extensão do Galerkin-BEM que não usa a forma explícita de uma solução fundamental e/ou Função de Green. Este fato possibilita o aplicação dessa nova técnica integral para cascas finas, semi-espessas, com espessura variável e com propriedades físicas heterogêneas. Neste trabalho apresenta-se o formalismo matemático do MLGFM aplicado à cascas semi-espessas e algumas soluções numéricas.

1. INTRODUÇÃO

Embora o Método de Elementos de Contorno, BEM, seja um método numérico com muitas vantagens sobre outras técnicas, sua formulação integral requer o conhecimento explícito de uma solução fundamental e/ou uma aproximação desta solução. Porém, muitos problemas em engenharia são descritos por equações cujas soluções fundamentais são desconhecidas e/ou muito complicadas, impossibilitando ou dificultando sua implementação numérica. Devido a estes fatos, as aplicações do BEM para cascas ainda são restritas a geometrias específicas e, geralmente, usando a teoria de casca fina, meio homogêneo e espessura constante.

O Método da Função de Green Local Modificado, MLGFM, é uma nova técnica integral proposta por Barcellos & Silva (1987) após algumas modificações no Método da Função de Green Local, LGFM, desenvolvido por Dorning (1981) e seus co-autores, Burns (1975) e Horak (1980). O MLGFM foi aplicado inicialmente para a solução de membranas elásticas, Barcellos & Silva (1987) e posteriormente para diversos problemas da mecânica do contínuo. Algumas destas aplicações mais recentes são: placa de Mindlin, Barbieri & Barcellos (1993b), potenciais não homogêneos, Barbieri & Barcellos (1993a), placas laminadas ortrópicas com teoria de primeira e segunda ordem, Machado (1992), elasticidade bidimensional, Barbieri (1992), e cascas semi-espessas, Barbieri et al. (1993c).

Uma das características mais importantes do MLGFM é explorar as propriedades da Função de Green do operador adjunto sem o seu conhecimento na forma explícita. As

propriedades da Função de Green são avaliadas através de projeções nos subespaços gerados pelas bases de elementos finitos e elementos de contorno, o que possibilita a solução via BEM de problemas para os quais não existem soluções fundamentais disponíveis e/ou são muito complicadas. Outra característica marcante do método é a superconvergência nodal de "fluxos", Barbieri (1992), assim como para frequências naturais de membranas, Filippin et al (1992).

Neste trabalho, o formalismo matemático para a implementação numérica do MLGFM para cascas semi-espessas com geometria arbitrária é apresentado com detalhes e os exemplos numéricos são para demonstrar a convergência do método.

2. DEFINIÇÕES GEOMÉTRICAS

Considere um elemento de casca típico, como na Fig.2.1. As superfícies internas e externas do elemento podem ser curvas, entretanto, as seções transversais são geradas por linhas retas. Seja ξ, η coordenadas intrínsecas à superfície média do elemento e ζ a coordenada linear na direção da espessura. Usando as funções isoparamétricas do Método de Elementos Finitos, FEM, a relação entre o sistema global e o sistema local de coordenadas para qualquer ponto do elemento pode ser expressa na forma:

$$\{x, y, z\}^t = \varphi_i(\xi, \eta) \{x_i, y_i, z_i\}^t + 0.5 \varphi_i(\xi, \eta) h_i \mathbf{n}_i \zeta \quad (1)$$

onde $\{x_i, y_i, z_i\}^t$, h_i , \mathbf{n}_i e $\varphi_i(\xi, \eta)$ representam os valores associados ao nó "i" das coordenadas cartesianas, da espessura, do vetor normal à superfície média e da função de interpolação local do Método de Elementos Finitos, respectivamente.

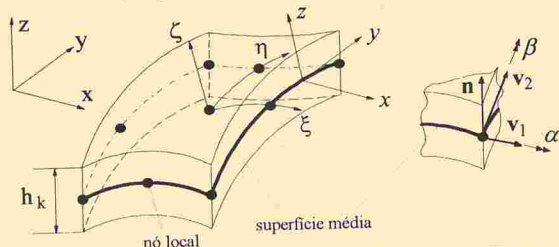


Fig.2.1-Definições Geométricas do Elemento de Casca.

3. HIPÓTESES CINEMÁTICAS

Na formulação do elemento de casca semi-espessa assume-se que ao longo da espessura a deformação é negligenciável e que a normal (reta) permanece reta mas não necessariamente normal à superfície média após a deformação. Então, o vetor deslocamento que qualquer ponto do elemento é univocamente determinado por três deslocamentos medidos na superfície média e duas rotações do vetor normal, \mathbf{n} , nas direções ortogonais ao plano médio.

Definindo os vetores \mathbf{v}_{1i} e \mathbf{v}_{2i} ortogonais ao vetor normal no nó "i" e seus correspondentes graus de liberdade de rotação, α_i e β_i , Fig.2.1, o campo de deslocamentos de um ponto qualquer do elemento para a teoria de primeira ordem pode ser escrito como sendo:

$$\mathbf{u} = \{u, v, w\}^t = \varphi_i(\xi, \eta) \{u_i, v_i, w_i\}^t + 0.5 \varphi_i(\xi, \eta) h_i \zeta [\mathbf{v}_{1i} \quad -\mathbf{v}_{2i}] \{\alpha_i, \beta_i\}^t \quad (2)$$

ou,

$$\mathbf{u} = \overline{\varphi}_i(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{q}_i = [\overline{\Phi}] \mathbf{q} \quad (3)$$

onde (u, v, w) representam os deslocamentos nas direções cartesianas.

$$\mathbf{q} = \{u_i, v_i, w_i, \alpha_i, \beta_i, \dots, u_n, v_n, w_n, \alpha_n, \beta_n\}^t \quad (4)$$

com "n" igual ao número de nós do elemento e $\overline{\varphi}_i(\xi, \eta, \zeta)$ é o conjunto das funções de interpolação da superfície média modificadas e obtidas comparando com a Eq.(2). No contorno do elemento, a aproximação para o vetor deslocamento é descrita por:

$$\mathbf{u} = \overline{\varphi}_i(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{q}_i = [\overline{\Phi}] \mathbf{q} \quad (5)$$

onde $\overline{\varphi}_i(\xi, \eta, \zeta)$ são obtidas com o traço de $\overline{\varphi}_i(\xi, \eta, \zeta)$.

4. ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

As componentes de deformação descritas em função do sistema local (ortogonal), (x, y, z) , relacionadas com a superfície $\zeta = \text{constante}$, é fundamental para a formulação da teoria de casca utilizada. Definindo como "z" a direção normal à superfície com ζ constante, outros dois eixos ortogonais, x e y, tangentes à esta superfície também podem ser definidos e as componentes relevantes do tensor deformação ficam sendo:

$$\{\epsilon'\} = \mathbf{L} \mathbf{u}' = \{\epsilon_m' \quad \epsilon_s'\}^t \quad (6)$$

com a deformação na direção z desprezada para consistência com as teorias de casca; \mathbf{u}' é o vetor deslocamento no sistema (x, y, z) , $\mathbf{u}' = \{u, v, w\}$; $\{\epsilon_m'\}$ e $\{\epsilon_s'\}$ são as componentes de deformação de membrana e cisalhamento dadas por:

$$\{\epsilon_m'\} = \{\partial u / \partial x, \partial v / \partial y, \partial u / \partial y + \partial v / \partial x\}^t \quad (6.1)$$

$$\{\epsilon_s'\} = \{\partial u / \partial z + \partial w / \partial x, \partial v / \partial z + \partial w / \partial y\}^t \quad (6.2)$$

As componentes do tensor tensão associadas a estas deformações, $\{\sigma'\}$, estão relacionadas com as as deformações através da matriz constitutiva, $[\mathbf{D}']$, isto é:

$$\{\sigma'\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}\}^t = [\mathbf{D}'] \{\epsilon'\} \quad (7)$$

A energia de deformação para um material isotrópico, U, pode ser expressa por:

$$U = 0.5 (B_m(*, *) + B_s(*, *)) \quad (8)$$

onde $B_m(*, *)$ e $B_s(*, *)$ são formas quadráticas definidas como:

$$B_m(\mathbf{u}', \mathbf{u}') = \int_{\Omega} \{\epsilon_m'(\mathbf{u}')\}^t [\mathbf{D}_m'] \{\epsilon_m'(\mathbf{u}')\} d\Omega \quad (9)$$

$$B_s(\mathbf{u}', \mathbf{u}') = \int_{\Omega} \{\epsilon_s'(\mathbf{u}')\}^t [\mathbf{D}_s'] \{\epsilon_s'(\mathbf{u}')\} d\Omega \quad (10)$$

onde $[\mathbf{D}_m']$ e $[\mathbf{D}_s']$ são submatrizes de $[\mathbf{D}']$ associadas aos efeitos de membrana e cisalhamento, respectivamente.

Usando a transformação:

$$\begin{bmatrix} \partial u/\partial x & \partial v/\partial x & \partial w/\partial x \\ \partial u/\partial y & \partial v/\partial y & \partial w/\partial y \\ \partial u/\partial z & \partial v/\partial z & \partial w/\partial z \end{bmatrix} = [\Theta]^t \begin{bmatrix} \partial u/\partial x & \partial v/\partial x & \partial w/\partial x \\ \partial u/\partial y & \partial v/\partial y & \partial w/\partial y \\ \partial u/\partial z & \partial v/\partial z & \partial w/\partial z \end{bmatrix} [\Theta] \quad (11)$$

onde a matriz rotação $[\Theta]$ é igual a

$$[\Theta] = [v_1 \quad v_2 \quad n], \quad (12)$$

as formas quadráticas anteriores, sem perda de generalidade, podem ser expressas em função das componentes globais do vetor deslocamento u , isto é:

$$B_m(u, u) = \int_{\Omega} \{\epsilon_m'(u)\}^t [D_m'] \{\epsilon_m'(u)\} d\Omega \quad (13)$$

$$e \quad B_s(u, u) = \int_{\Omega} \{\epsilon_s'(u)\}^t [D_s'] \{\epsilon_s'(u)\} d\Omega \quad (14)$$

5. OPERADOR DIFERENCIAL E ADJUNTO

Seja v um vetor no espaço auxiliar, dual, de tal modo que as formas quadráticas das Eqs. (13) e (14) possam ser reescritas como sendo formas bilineares, isto é:

$$B_m(v, u) = \int_{\Omega} \{\epsilon_m'(v)\}^t [D_m'] \{\epsilon_m'(u)\} d\Omega \quad (15)$$

$$e \quad B_s(v, u) = \int_{\Omega} \{\epsilon_s'(v)\}^t [D_s'] \{\epsilon_s'(u)\} d\Omega \quad (16)$$

O operador diferencial para a análise linear de cascas semi-espessas é obtido tomando a primeira variação da energia de deformação com respeito a v , ou seja:

$$\delta_v (B_m(v, u) + B_s(v, u)) = (\delta v)^t A u + \text{termos no contorno} \quad (17)$$

onde δ_v denota a primeira variação com relação a v e A é o operador diferencial desejado.

Agora, tomando a primeira variação de U com relação a u tem-se:

$$\delta_u (B_m(v, u) + B_s(v, u)) = (\delta u)^t A^* v + \text{termos no contorno} \quad (18)$$

onde A^* é o operador adjunto formal de A e, desde que as formas bilineares $B_m(*, *)$ e $B_s(*, *)$ sejam simétricas, o operador A é auto-adjunto, isto é, $A=A^*$

6. O FORMALISMO DO MLGFM PARA CASCAS SEMI-ESPESAS

O passo fundamental da implementação do MLGFM é a aproximação das projeções da Função de Green e para obter uma expressão integral para a análise genérica de cascas semi-espessas é suficiente a formulação do problema para cada elemento, como mostrado a seguir.

O problema original consiste em determinar a solução para o seguinte sistema de equações:

$$A u = b \quad \text{em } \Omega \quad (19)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_1 \quad e \quad (20)$$

$$N u = \bar{t} \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (21)$$

onde N , \bar{u} , \bar{t} e b representam o Operador de Neumann associado a A , os deslocamentos prescritos, as forças prescritas e o vetor força de corpo externo, respectivamente. Denota-se as partições do contorno por Γ_1 e Γ_2 de tal modo que o contorno total é obtido por $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Usando o processo de resíduos ponderados e/ou a *Forma de Green Generalizada para o Operador A*, Oden & Reddy (1976), o vetor deslocamento procurado é obtido pela seguinte equação integral:

$$u(Q) = \int_{\Omega} G(P, Q)^t b(P) d\Omega_P - \int_{\Gamma} [N^* G(P, Q)]^t u(p) d\Gamma_P + \int_{\Gamma} G(p, Q)^t [N u(p)] d\Gamma_P \quad (22)$$

onde N^* representa o operador de Neumann associado ao operador adjunto A^* ; P, Q são pontos do domínio; p, q são pontos do contorno e $G(P, Q)$ é uma solução fundamental para o problema:

$$A^* G(P, Q) = \delta(P, Q) I \quad (23)$$

sendo que $\delta(P, Q)$ é a função generalizada de Dirac e I a matriz identidade. Adicionando e subtraindo a quantidade

$$G(p, Q)^t [N^* u(p)] \equiv [N^* G(p, Q)] u(p) \quad (24)$$

na Eq. (22) resulta:

$$u(Q) = \int_{\Omega} G(P, Q)^t b(P) d\Omega_P - \int_{\Gamma} [(N^* + N') G(p, Q)]^t u(p) d\Gamma_P + \int_{\Gamma} G(p, Q)^t [(N + N') u(p)] d\Gamma_P \quad (25)$$

que é a expressão básica para o desenvolvimento do MLGFM. Discussão detalhada sobre a prescrição do operador N' é realizada por Barbieri (1992). Entretanto, a regra básica é tomar N' como sendo um operador diagonal não nulo e atuando nas partições do contorno onde existem condições de Dirichlet homogêneas.

Para obter uma Função de Green, prescreve-se como condições de contorno para a Eq. (23) a seguinte quantidade:

$$(N^* + N') G(p, Q) = 0 \quad (26)$$

e a expressão final para $u(Q)$ fica sendo:

$$u(Q) = \int_{\Omega} G(P, Q)^t b(P) d\Omega_P + \int_{\Gamma} G(p, Q)^t F(p) d\Gamma_P \quad (27)$$

onde $F(p) = (N + N') u(p)$. Se $N' u(p) = 0$, então $F(p) = N u(p)$ e não foi introduzida nenhuma modificação nas reações do contorno devido a presença do operador N' . Tomando o traço de $u(Q)$ tem-se:

$$u(\hat{q}) = \int_{\Omega} G(P, q)^t b(P) d\Omega_P + \int_{\Gamma} G(p, q)^t F(p) d\Gamma_P \quad (28)$$

para todo $q \in \Gamma$.

Então, conhecida a Função de Green, os valores de domínio são calculados com a Eq.(27) e os de contorno com a Eq.(28). Entretanto, como não existem soluções fundamentais para cascas semi-espessas com geometria arbitrária, a Função de Green é aproximada numericamente com o FEM de acordo com o procedimento descrito a seguir.

Substituindo na Eq.(27) as aproximações do método de elementos finitos para $\mathbf{b}(P)$ e $\mathbf{u}(Q)$; $\mathbf{u}(Q) = [\varphi(Q)] \mathbf{q}$, $\mathbf{b}(P) = [\varphi(P)] \mathbf{b}$; e a aproximação do método de elementos de contorno para $\mathbf{F}(p)$, $\mathbf{F}(p) = [\phi(p)] \mathbf{f}$, resulta:

$$[\varphi(Q)] \mathbf{q} = \int_{\Omega} \mathbf{G}(P, Q)^t [\varphi(P)] d\Omega_P \mathbf{b} + \int_{\Gamma} \mathbf{G}(p, Q)^t [\phi(p)] d\Gamma_p \mathbf{f} \quad (29)$$

onde as componentes dos vetores \mathbf{b} e \mathbf{f} representam os valores nodais de domínio da força de corpo e das reações no contorno, respectivamente. Agora, ortogonalizando a Eq.(29) com respeito a $[\varphi(Q)]$, o sistema de equações integrais discretizado é repassado pelo seguinte sistema linear de equações:

$$[\mathbf{A}] \mathbf{q}^D = [\mathbf{B}] \mathbf{f} + [\mathbf{C}] \mathbf{b} \quad (30)$$

onde:

$$[\mathbf{A}] = \int_{\Omega} [\varphi(Q)]^t [\varphi(Q)] d\Omega_Q, \quad [\mathbf{B}] = \int_{\Gamma} \mathbf{Gd}(p)^t [\phi(p)] d\Gamma_p, \quad [\mathbf{C}] = \int_{\Omega} \mathbf{Gd}(P)^t [\varphi(P)] d\Omega_P,$$

$$\mathbf{Gd}(p)^t = \int_{\Omega} [\varphi(Q)]^t \mathbf{G}(p, Q)^t d\Omega_Q, \quad \mathbf{Gd}(P)^t = \int_{\Omega} [\varphi(Q)]^t \mathbf{G}(P, Q)^t d\Omega_Q,$$

e \mathbf{q}^D é o vetor cujas componentes representam os deslocamentos nodais de domínio. Note que $\mathbf{Gd}(P)$ e $\mathbf{Gd}(p)$ são projeções da Função de Green no subespaço gerado pela base de elementos finitos (domínio) com $P \in \Omega$ e $p \in \Gamma$, respectivamente. Estas projeções são calculadas usando o FEM convencional na solução do seguinte problema:

$$\mathbf{A} * \mathbf{G}(P, Q) = \delta(P, Q) \mathbf{I} \quad (31)$$

$$(N^* + N') \mathbf{G}(p, Q) = 0 \quad \forall p \in \Gamma; P, Q \in \Omega \quad (32)$$

Com o objetivo de melhorar a regularidade da solução, as Eqs.(31) e (32) são pós-multiplicadas por $[\varphi(Q)]$ e integradas sobre o domínio, resultando:

$$\mathbf{A} * \int_{\Omega} \mathbf{G}(P, Q) [\varphi(Q)] d\Omega_Q = \int_{\Omega} \delta(P, Q) \mathbf{I} [\varphi(Q)] d\Omega_Q \quad (33)$$

$$(N^* + N') \int_{\Omega} \mathbf{G}(p, Q) [\varphi(Q)] d\Omega_Q = 0 \quad (34)$$

Nas Eqs.(33) e (34) identifica-se com facilidade as projeções $\mathbf{Gd}(P)/\mathbf{Gd}(p)$ e estas equações são mais convenientemente escritas como sendo:

$$\mathbf{A} * \mathbf{Gd}(P) = [\varphi(P)] \quad (35)$$

$$(N^* + N') \mathbf{Gd}(p) = 0 \quad \forall p \in \Gamma; P \in \Omega \quad (36)$$

Portanto, os valores nodais de $\mathbf{Gd}(P)$ e $\mathbf{Gd}(p)$ são obtidos com a solução via elementos finitos do problema (35)-(36).

Repetindo a mesmo procedimento de ortogonalização com a Eq.(28), porém usando $[\phi(q)]$ como funções peso obtém-se:

$$[\mathbf{D}] \mathbf{q}^B = [\mathbf{E}] \mathbf{f} + [\mathbf{F}] \mathbf{b} \quad (37)$$

onde:

$$[\mathbf{D}] = \int_{\Gamma} [\phi(q)]^t [\phi(q)] d\Gamma_q, \quad [\mathbf{E}] = \int_{\Gamma} \mathbf{Gc}(p)^t [\phi(p)] d\Gamma_p, \quad [\mathbf{F}] = \int_{\Omega} \mathbf{Gc}(P)^t [\varphi(P)] d\Omega_P,$$

$$\mathbf{Gc}(p)^t = \int_{\Gamma} [\phi(q)]^t \mathbf{G}(p, q)^t d\Gamma_q, \quad \mathbf{Gc}(P)^t = \int_{\Gamma} [\phi(q)]^t \mathbf{G}(P, q)^t d\Gamma_q,$$

e \mathbf{q}^B é o vetor cujas componentes representam valores nodais do deslocamento no contorno. Os tensores $\mathbf{Gc}(P)$ e $\mathbf{Gc}(p)$ representam as projeções da função de Green no subespaço gerado pela base de elementos de contorno com $P \in \Omega$ e $p \in \Gamma$. Seus valores numéricos são computados resolvendo com o FEM o seguinte problema:

$$\mathbf{A} * \mathbf{G}(P, q) = 0 \quad (38)$$

$$(N^* + N') \mathbf{G}(p, q) = \delta(p, q) \mathbf{I} \quad \forall p, q \in \Gamma; P \in \Omega \quad (39)$$

Novamente, Eqs.(38) e (39) são pós-multiplicadas por $[\phi(q)]$ e integradas sobre o contorno, o que resulta:

$$\mathbf{A} * \mathbf{Gc}(P) = 0 \quad (40)$$

$$(N^* + N') \mathbf{Gc}(p) = [\phi(p)] \quad \forall p \in \Gamma; P \in \Omega \quad (41)$$

e os valores nodais de $\mathbf{Gc}(P)$ e $\mathbf{Gc}(p)$ são obtidos com a solução do problema (40)-(41) com o FEM convencional.

Com o procedimento descrito acima, as projeções da Função de Green são computadas com o FEM para qualquer problema de análise linear de cascas, mesmo para problemas anisotrópicos e não homogêneos. Fica evidente que não é necessário o conhecimento explícito de uma solução fundamental e/ou Função de Green para implementação do MLGFM.

Após obter as aproximações das projeções da Função de Green, todas as matrizes $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, ..., $[\mathbf{F}]$ podem ser calculadas com simples produtos de matrizes. Note que $[\mathbf{C}]$ e $[\mathbf{D}]$ são matrizes simétricas e que $[\mathbf{B}]^t = [\mathbf{F}]$. Uma vez que as projeções $\mathbf{Gd}(P)/\mathbf{Gd}(p)$ e $\mathbf{Gc}(P)/\mathbf{Gc}(p)$ são aproximadas com as funções do FEM/BEM, suas interpolações sobre o domínio e contorno são da forma:

$$\mathbf{Gd}(P) = [\varphi(P)] \mathbf{G}^{DP}, \quad \mathbf{Gd}(p) = [\phi(p)] \mathbf{G}^{Dp}, \quad \mathbf{Gc}(P) = [\varphi(P)] \mathbf{G}^{BP} \quad \text{e} \quad \mathbf{Gc}(p) = [\phi(p)] \mathbf{G}^{Bp},$$

onde $\mathbf{G}^{DP}/\mathbf{G}^{BP}$ e $\mathbf{G}^{Dp}/\mathbf{G}^{Bp}$ são valores nodais de $\mathbf{Gd}(P)/\mathbf{Gc}(P)$ sobre o domínio e contorno, respectivamente. Então, as matrizes $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{C}]$ e $[\mathbf{E}]$ podem ser calculadas com:

$$[\mathbf{B}] = [\mathbf{F}]^t = \int_{\Omega} [\phi(P)]^t [\phi(P)] d\Omega_P \mathbf{G}^{BP} = [\mathbf{A}] \mathbf{G}^{BP} \quad (42)$$

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{C}]^t = \int_{\Omega} [\phi(P)]^t [\phi(P)] d\Omega_P \mathbf{G}^{DP} = [\mathbf{A}] \mathbf{G}^{DP} \quad (43)$$

$$[\mathbf{E}] = [\mathbf{G}^{BP}]^t \int_{\Gamma} [\phi(p)]^t [\phi(p)] d\Gamma_p = [\mathbf{G}^{BP}]^t [\mathbf{D}] \quad (44)$$

Finalmente, a Eq.(37), esquecendo o superscrito "B", pode ser reescrita como:

$$[\mathbf{D}_p \quad \mathbf{D}_u] \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_p \\ \mathbf{q}_u \end{Bmatrix} = [\mathbf{E}_u \quad \mathbf{E}_p] \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_p \end{Bmatrix} + [\mathbf{F}] \mathbf{b} \quad (45)$$

onde os subscritos "p" e "u" indicam os valores prescritos e desconhecidos, respectivamente. Então, este sistema linear de equações pode ser reescrito como sendo:

$$[-\mathbf{E}_u \quad \mathbf{D}_u] \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{q}_u \end{Bmatrix} = [-\mathbf{D}_p \quad \mathbf{E}_p] \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_p \\ \mathbf{f}_p \end{Bmatrix} + [\mathbf{F}] \mathbf{b} \quad (46)$$

que é similar ao obtido com uso do DBEM.

Após a solução deste sistema, Eq.(46), os valores no contorno de esforços e deslocamentos já são conhecidos. Havendo interesse nos valores de $\mathbf{u}(\mathbf{Q})$ no domínio, determina-se estes valores com o simples produto de matrizes e vetores, isto é, usando as Eqs.(30), (42) e (43) os valores discretos de $\mathbf{u}(\mathbf{Q})$ são calculados por:

$$\mathbf{q}^D = \mathbf{G}^{BP} \mathbf{f} + \mathbf{G}^{DP} \mathbf{b} \quad (47)$$

e o formalismo numérico do MLGFM está completo.

7. EXEMPLOS NUMÉRICOS

7.1-Scordelis-Lo Roof. Este tipo de geometria, carregado com seu próprio peso, suportado nos extremos por diafrágmás rígidos, é um teste relevante para um estado complexo de tensões de membrana, Fig.7.1. A espessura da casca é considerada constante, $t=0.25$, é carregada com seu peso próprio, 90 por unidade de área, e as propriedades do material são $E=432E6$ e $\nu=0$.

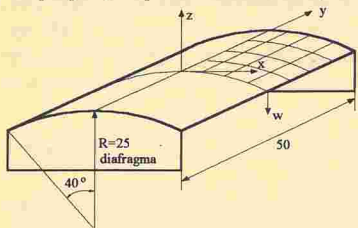


Fig.7.1-Scordelis-Lo Roof (malha 4x4).

O elemento finito SHELM9 é usado para obter as projeções da Função de Green e a malha de elementos de contorno é projetada com nós duplos nos pontos de descontinuidade da normal.

Os resultados para o deslocamento máximo, w , mostrados na Tab.7.1, estão normalizados com relação ao valor de referência 0,3024. A convergência para o momento normal, M_n , em $(0,0^+,0)$ também é mostrada nesta tabela.

Tab.7.1- Convergência para o Deslocamento, w , e Momento Normal, M_n .

Malha	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6
w	1.0062	1.0054	1.0044	1.0040	1.0038
Mn	1822.2	1950.6	2041.2	2061.1	2065.2

2.Casca Cilíndrica Curta Engastada. O segundo problema é a análise de uma casca cilíndrica curta, engastada nos dois extremos e submetida ao carregamento de pressão interna. São adotados os seguintes valores para as grandezas físicas do material e do carregamento interno: $R=2.0$, $L=2.0$, $t=0.1$, $E=2.1E6$, $\nu=0.30$ e $p=1$.

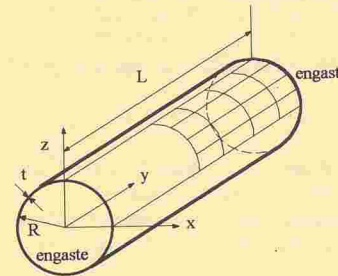


Fig.7.2-Casca Cilíndrica. Malha 4x4.

Devido à simetria do problema, apenas 1/8 do domínio é discretizado, Fig.7.2, e as projeções da Função de Green são calculadas usando malhas homogêneas do elemento SHELM9. A malha de contorno prevê a existência de nós duplos em pontos de descontinuidade da normal.

Os resultados, comparados com os obtidos com malha homogênea de 20x20 elementos finitos SHELM9 são mostrados na Tab.7.2. Na Figs.7.3 mostra-se a convergência para o deslocamento e tensão circunferencial central. Novamente, os resultados obtidos com o MLGFM apresentam ótima correlação com os obtidos com o FEM, mesmo com malha mais grosseira

Tab.7.2-Solução no Centro da Casca: Comparação MLGFMx FEM.

Método	Malha	w_{max}	σ_{circ}	σ_{axial}
FEM	20x20	1.91936E-3	2.1391E+2	4.1050E+1
MLGFM	6x6	1.91934E-3	2.1431E+2	4.1376E+1

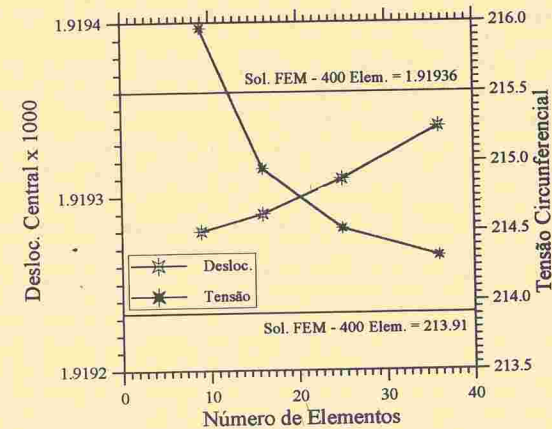


Fig.7.3- Análise de Convergência.

8. CONCLUSÃO

O formalismo do MLGFM para análise de cascas semi-espessas foi apresentado por Barbieri et al (1993b) e revisto com detalhes neste trabalho. Os resultados numéricos são para ilustrar a convergência do método e demonstrar sua performance com relação ao FEM. Resultados mostram ótima convergência, principalmente em tensões, para todos os exemplos estudados até agora.

Embora muitos estudos ainda sejam necessários, os resultados dos exemplos numéricos mostram que o BEM pode ser aplicado com sucesso para a solução dos problemas de cascas semi-espessas com geometria arbitrária. Baseado nos resultados de Barbieri & Barcellos (1993c) espera-se o mesmo sucesso para cascas com espessura variável e meios não homogêneos.

AGRADECIMENTOS

Agradecimentos ao CNPq pelo suporte financeiro durante a execução deste trabalho, proj. nº CNPq 300296/93-2.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Barbieri, R. (1992). Desenvolvimento e Aplicação do Método da Função de Green Local Modificado à Problemas da Mecânica do Contínuo, UFSC, Brasil, Tese de Doutorado.
2. Barbieri, R. & de Barcellos, C.S. (1993a). Non Homogeneous Fiel Potential Problems Solution by the Modified Local Green's Function Method (MLGFM), Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.11, pg.9-15.
3. Barbieri, R.; Noel, A.T. & de Barcellos, C.S. (1993b). A Green's Function Method Approach to Shell Analysis. Proc. XV BEM-Boundary Element Method International Conference, Vol.2, pg.179-194.
4. Barbieri, R. & de Barcellos, C.S. (1993c). Mindlin's Plate Solution by the MLGFM, Proc. XV BEM-Boundary Element Method International Conference, Vol.2., pp.149-164.
5. Burns, T.J. (1975). The Partial Current Balance Method: a Local Green's Function Technique for the Numerical Solution of Multi-dimensional Neutron Diffusion Problems, Urbana, University of Illinois (PhD Thesis).
6. de Barcellos, C.S. & Silva, L.H.M. (1987). Elastic Membrane Solution by Modified Local Green's Function Method em BETECH-87, pp. 151-161, Prooc. of the Boundary Element Technology Conference, RJ, Brasil.
7. Dorning, J.J. (1981). A Review of Green's Functions Methods in Computational Mechanics, Joint ANS/ENS Int. Topical Meeting on Advances in Mathematical Methods for Solution of Nuclear Engineering Problems, Munich.
8. Filippin, C.G.; Barbieri, R. & de Barcellos, C.S. (1992). Numerical Results for h and p convergences for the Modified Local Green's Function Method. Proc. VII Boundary Element Technology Conference, pg.887-904.
9. Horak, W.C. (1980). Local Green's Function Techniques for the Solution of Heat Conduction and Incompressible Fluid Flow Problems, Urbana, University of Illinois (PhD Thesis).
10. Machado, R.D. (1992). Implementação do Método da Função de Green Local Modificado para a Solução de Placas Laminadas Compostas. UFSC, Brasil,(Tese de Doutorado).
11. Oden, J.T. & Reddy, J.N. (1976). An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements, John Wiley & Sons, New York.

GERAÇÃO AUTOMÁTICA DO CÓDIGO FONTE DE FUNÇÕES PARA PROGRAMAS DE CÁLCULO NUMÉRICO

Prof. Dr. Mauro Cavalcante Pequeno (UFC)
Prof. Msc. Mário Hattori (UFPB)
Maria do Socorro Alves Taumaturgo de Farias (UFC)
Universidade Federal do Ceará - Departamento de Computação
Campus do Pici - Bloco 910
CEP 60.455-760 - Fortaleza - CE
e-mail: mauro@taiba.ufc.br

SUMÁRIO

O software matemático, apenas na década de 70, criou as metodologias de desenvolvimento, manutenção, documentação e distribuição de software numérico de alta qualidade. Como produto surgiram o EISPACK, LINPACK e outros pacotes, além das bibliotecas de rotinas numéricas como a NAG e IMSL. Tem-se observado que a tarefa de programar as aplicações pelos usuários é onerosa, desestimulando e restringindo o uso dos pacotes a uma classe de usuários relativamente especializada. Surgiu, então, a idéia de facilitar a utilização de software numérico pelas pessoas que tinham problemas para resolver, aliviando-as da tarefa de programar a solução desses problemas. Em alguns casos é necessário que o usuário forneça a função através de uma subrotina que deverá ser compilada e ligada à rotina de cálculo, criando uma programa executável próprio daquele problema. Esse procedimento exige conhecimentos específicos do usuário, como linguagem de programação e peculiaridades das rotinas de cálculo. Neste trabalho tenta-se propor uma idéia para abolir os inconvenientes citados, através da utilização de uma linguagem próxima da matemática usual, que permite ao usuário fornecer a especificação da função de maneira simplificada. É descrito, então, um sistema que interpreta a especificação da função fornecida pelo usuário e gera seu código fonte correspondente para então compilá-lo e ligá-lo à rotina de cálculo adequada. Para construir o módulo de reconhecimento da especificação do usuário foram utilizadas idéias da construção de compiladores na implementação de analisadores léxicos e sintáticos.

1.0 INTRODUÇÃO

A Análise Numérica teve um desenvolvimento acentuado durante os séculos XVIII e XIX no sentido de mecanizar a resolução de problemas numéricos, principalmente no que diz respeito a problemas que envolvessem integrais. Com o desenvolvimento dos métodos numéricos e principalmente com o advento do computador, pôde-se então pensar em automatizá-los, surgindo o que se denominou *software matemático* [RICE 1969].