XVI CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA
16th BRAZILIAN CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING

USO DE APROXIMAÇÕES PARA MODELAR A RESPOSTA NUMÉRICA DE SISTEMAS LINEARES E NÃO LINEARES, COM APLICAÇÕES EM ANÁLISE ESTRUTURAL E CONFIABILIDADE

Edison da Rosa, Dr. Eng.
Universidade Federal de Santa Catarina, SC,
Laboratório de Análise e Projetos Mecânicos
Campus Universitário – Trindade – 88040-970, Florianópolis, SC, Brasil
darosa@emc.ufsc.br

Analucia Vieira Fantin, M. Sc.
Universidade Federal de Santa Catarina, SC,
Laboratório de Metrologia e Automatização
Campus Universitário – Trindade – 88040-970, Florianópolis, SC, Brasil
avf@labmetro.ufsc.br

Resumo: A análise de grandes sistemas estruturais exige hoje o uso de modelos numéricos, com um elevado número de graus de liberdade, o que dificulta a análise de resultados, e desvia o foco do analista dos aspectos físicos do problema. Este trabalho busca determinar uma função desempenho analítica, definida a partir de modelos numéricos do sistema. A funcão é definida de uma maneira heurística, com base na solução de problemas clássicos de engenharia. Um resumo destas soluções é apresentado e aplicações a um problema de concentração de tensão e de confiabilidade são desenvolvidas.

Palavras-chave: Resposta estrutural, métodos numéricos, elementos finitos, confiabilidade.

1. Introdução

A otimização, ou a avaliação da confiabilidade, de grandes sistemas estruturais, exige o uso de modelos numéricos com um elevado número de graus de liberdade, para representar de forma adequada a resposta estrutural deste sistema. O uso de modelos numéricos com um elevado número de graus de liberdade, da ordem de 10^5 a 10^6 é hoje usual, o que onera o processo de análise de resultados e desvia o foco do analista dos aspectos físicos do problema. O trabalho proposto busca o desenvolvimento de funções desempenho numericamente definidas, a partir de modelos de elementos finitos do sistema. A função de desempenho, ou função objetivo, é determinada em alguns pontos do espaço de projeto, para cada um dos parâmetros considerados relevantes em uma análise preliminar do problema. A partir deste mapeamento de pontos no espaço de projeto é analisada a resposta que a função desempenho pode apresentar. A forma proposta da função desempenho foi estudada partindo de casos de estruturas simples, com soluções analíticas conhecidas, considerando tanto casos lineares como não lineares, sob carregamentos quaisquer. O objetivo final é a aplicação da função resposta analítica obtida a partir dos dados numéricos, para aplicações em problemas reais de análise de confiabilidade e otimização.

O desenvolvimento segue os conceitos básicos de otimização e confiabilidade, como sendo duas áreas afins que farão uso, de uma ou de outra forma, da função desempenho, como função objetivo, ou como função de falha, respectivamente. Em aplicações práticas é necessário considerar a ocorrência de múltiplos modos de falha, situação em que múltiplas funções de falha devem ser definidas. O uso de uma aproximação analítica da função de falha torna significativamente mais rápida a busca do ponto de falha mais provável, no caso de uma análise de confiabilidade. Neste caso os resultados numéricos indicam que na determinação de uma aproximação numérica por diferenças finitas o passo na definição da aproximação, bem como o passo das sucessivas iterações no processo de busca, devem estar relacionados com o desvio padrão da variável de projeto correspondente. O trabalho proposto diz respeito à investigação de diferentes formas analíticas para a função de desempenho e suas implicações no comportamento dos algoritmos, bem como no que diz respeito à análise de erro nas aproximações efetuadas. Uma primeira versão para a função desempenho aproximada é na forma de um produto de parâmetros adimensionalisados, elevados a expoentes a serem determinados, para cada modo de falha e tipo de carregamento. No caso de carregamentos combinados, existe a necessidade de um critério de falha, que está sendo proposto como a soma de frações de carga crítica, elevadas a expoentes a serem determinados. As frações de carga são definidas como a razão entre a carga aplicada e a carga limite para aquele tipo de carregamento. Esta proposição está baseada em alguns casos analisados que possuem solução analítica, particularmente problemas estruturais lineares e não lineares, com carregamentos simples ou combinados. Em todos os casos analisados a solução analítica segue exatamente a forma proposta. Foram também considerados os critérios da máxima tensão normal, máxima tensão cisalhante e máxima energia de distorção.

2. Breve Histórico das Aproximações em Engenharia

Desde tempos antigos, quando das primeiras construções de porte, foi necessário obter informações sobre a resistência dos materiais para determinar dimensões seguras para as estruturas. Os egípcios possuíam algumas regras empíricas para construir, de outra forma não teriam erguido as famosas pirâmides, as quais permanecem até hoje. Os gregos avançaram na arte de construir, desenvolvendo a Estática, que forma a base da Mecânica dos Materiais. Arquimedes (287-212 AC) iniciou os estudos dos métodos para determinação do centro de gravidade dos corpos. Durante o Renascimento houve um ressurgimento do interesse pela ciência com Leonardo da Vinci (1452-1519), que foi o mais notável deste período. Dentro das várias áreas nas quais atuou, foi um grande interessado na Mecânica, tanto que em uma de suas anotações disse: “A Mecânica é o paraíso da ciência matemática porque aqui nós colhemos os frutos da matemática”. Galileu (1564-1642) sucedeu da Vinci e escreveu seu famoso livro “Two New Sciences”, no qual ele recapitulou os resultados de todos os seus trabalhos passados nos vários campos da Mecânica. Uma parte do livro versa sobre as propriedades mecânicas dos materiais e a resistência de vigas, constituindo a primeira publicação no campo da Resistência dos Materiais, sendo que a partir desta data, a história da mecânica dos corpos elásticos teve início. Durante os últimos 25 anos do século 17 e o começo do século 18 houve um rápido desenvolvimento do cálculo infinitesimal, iniciando por Leibnitz (1646-1716), e continuado por Jacob e John Bernoulli, os quais, na tentativa de expandir o campo de aplicações de suas novas ferramentas matemáticas, trabalharam em vários casos da Mecânica e da Física. Enquanto Galileu e Edme Mariotte (1620-1684) investigaram a resistência de vigas, Jacob Bernoulli (1654-1705) desenvolveu equações para calcular a deflexão destas vigas. John Bernoulli (1667-1748), o irmão mais novo de Jacob, foi considerado o maior matemático de seu tempo, formulando o princípio dos deslocamentos virtuais. Muitas outras contribuições importantes à resistência dos materiais foram feitas pelo filho de John Bernoulli, Daniel Bernoulli, e por seu pupilo Leonard Euler (1707-1783). Euler, ao invés de empregar os métodos geométricos até então usados, introduziu os métodos analíticos para a simplificação dos problemas na Engenharia, e um destes métodos foi o chamado cálculo variacional, com o qual obteve a equação diferencial da linha elástica. Lord Rayleigh mostrou as vantagens que um engenheiro poderia obter através da adoção das noções de forças e coordenadas generalizadas. Em seu famoso livro “The Theory of Sound”, ele demonstrou os benefícios do uso de coordenadas normais e mostrou como, fazendo as velocidades desaparecerem, as soluções de problemas estáticos podem ser tiradas da análise dinâmica. Desta forma ele obteve as deflexões de barras, placas, e cascas expressas em termos de funções normais. Esta idéia de calcular freqüências diretamente da consideração da energia, sem resolver equações diferenciais, foi mais tarde empregada por Walter Ritz, surgindo assim o método de Rayleigh-Ritz, o qual hoje é amplamente empregado não apenas no estudo de vibrações, mas também na resolução de problemas em elasticidade, teoria de estruturas, e mecânica dos sólidos não linear, entre outros casos (Timoshenko, 1976).

Lagrange (1736-1813), no estudo da instabilidade em colunas iniciado por Euler, mostrou que é possível ter um infinito número de curvas de flambagem em colunas, não limitando-se a calcular apenas os valores de carga crítica, e desta forma mostrando as deflexões que poderiam ocorrer quando fossem excedidas as cargas críticas. Para isso ele aproximou a equação da linha elástica de uma coluna determinada por Euler na forma de uma série infinita. S. D. Poisson (1781-1840) desenvolveu equações dadas por séries trigonométricas para resolver vibrações em barras e calcular as freqüências dos vários modos. Este foi o primeiro caso conhecido no qual as séries trigonométricas foram usadas na investigação da deflexão em barras, sendo que naquela época este método não atraiu a atenção dos engenheiros, porém hoje é comumente aplicado em vários casos da Engenharia, (Timoshenko, 1976).

Novos problemas em projeto de máquinas e na teoria de estruturas no século 20 levaram ao desenvolvimento de vários métodos de aproximação numérica, os quais levam em consideração a discretização do domínio de análise. Entre estes destacam-se os métodos de diferenças finitas, elementos finitos, e elementos de contorno. O método das diferenças finitas foi inicialmente abordado por C. Runge, que usou equações diferenciais finitas em substituição às equações diferencias clássicas anteriormente definidas. Este método mostrou-se muito útil para a obtenção de soluções aproximadas. O método dos elementos finitos (FEM) foi usado pela primeira vez a cerca de 45 anos atrás na resolução de problemas práticos em engenharia estrutural, ou seja, foi elaborado para resolver problemas reais na área de engenharia estrutural, onde os procedimentos teóricos e clássicos mostraram-se insuficientes. É praticamente impossível identificar com exatidão a origem deste método, pois trata-se de um método que faz uso de muitas teorias e técnicas elaboradas (método de Rayleigh-Ritz por exemplo) anteriormente por matemáticos e especialistas em mecânica do contínuo. Um aspecto importante do método está relatado no trabalho desenvolvido independentemente nos anos 30 por McHenry (1943) e Hrennikoff (1941), o qual apresenta a formulação da discretização de uma barra em elementos na simulação de um estado plano de tensões. Uma etapa mais importante no desenvolvimento do método foi a generalização matricial da teoria estrutural na qual a análise foi formulada na forma de uma transformação de coordenadas. As referências iniciais conhecidas com relação à montagem de elementos estruturais pela transformação de coordenadas matriciais são de Falkenheimer (1950) e Langefors (1952). Entretanto, o trabalho clássico o qual define completamente a formulação matricial da teoria estrutural, e que traça claramente o paralelo com os procedimentos dos métodos das forças e dos deslocamentos, foi a série de artigos publicados na área de engenharia aeronáutica feitos por Argyris et al (1954). Foi este trabalho que demonstrou que os conceitos da análise estrutural clássica podem ser generalizados para a aplicação na modelagem de quaisquer tipos de elementos estruturais, e não apenas nos tradicionais já conhecidos (vigas, placas, cascas, ...). A próxima etapa englobou o desenvolvimento dos computadores digitais, onde pôde-se aplicar numericamente toda a formulação matricial elaborada para a análise estrutural, e assim encaminhar o método dos elementos finitos ao que se conhece atualmente.

Em situações nas quais o sistema sob estudo não possui solução analítica, uma das formas de avaliar seu comportamento é na forma de experimentos e simulações. Uma das formas que hoje em dia é utilizada para tratar estes casos é o chamado método da superfície de resposta, em que um conjunto de experimentos é planejado e os resultados destes são utilizados para ajustar uma superfície na forma de um hiperplano, ou outro tipo de aproximação de ordem superior. O método da superfície de resposta tem grande aplicação em áreas tão distintas como biologia, química, medicina, engenharia, ecologia, etc, dada sua versatilidade. Tradicionalmente é um método que busca determinar uma forma analítica aproximada $S(\mathbf{X})$ para descrever o comportamento de um sistema complexo. A superfície de resposta é obtida a partir de um conjunto de experimentos controlados, segundo um planejamento prévio. Estes experimentos podem ser realizados em campo, em laboratório ou em simulações computacionais. A partir deste conjunto de pontos, no espaço das variáveis $\mathbf{X} = \{Xi\}$, $S(\mathbf{X})$ é é obtida por ajuste (no sentido dos mínimos quadrados), quando um grande número de pontos está disponível, ou pela determinação de coeficientes quando foi obtido o número exato de pontos para explicitar $S(\mathbf{X})$ univocamente. Este último caso é o usual em experimentos com custo elevado. A forma mais simples de $S(\mathbf{X})$ é uma aproximação linear, em que um hiperplano é obtido. Para que esta aproximação linear seja boa é necessário que a resposta seja de baixa não linearidade, em particular no ponto médio do domínio de interesse de $\{Xi\}$. Esta aproximação linear em muitos casos não é satisfatória, sendo necessário usar aproximações de ordem superior, o que exige um maior número de pontos experimentais. Vários procedimentos têm sido propostos para baratear o custo de obtenção de $S(\mathbf{X})$, nos casos não lineares.

Por outro lado, a função desempenho $G(\mathbf{X})$ de um sistema estrutural relaciona as variáveis de projeto $\{Xi\}$ com a resposta deste sistema, em termos de alguma grandeza de interesse, como deslocamento, tensão máxima, volume de material, freqüência natural, entre outras. Nos sistemas complexos, hoje é usual obter $G(\mathbf{X})$ em pontos específicos do domínio das variávewis de projeto, por meio de métodos numéricos de análise, como o dos elementos finitos, elementos de contorno, elementos sem malha, etc. Para uma avaliação mais global do comportamento do sistema quanto às variáveis de projeto, $G(\mathbf{X})$ deve ser mapeada no domínio de $\{Xi\}$, o que se for feito numéricamente pode ser muito oneroso. Assim, a proposta é o uso de aproximações analíticas de $G(\mathbf{X})$, no espírito do método da superfície de resposta (Ang and Tang, 1984).

3. Aproximação de G(x)

Tradicionalmente quando se fala em aproximação de uma função está implícito um desenvolvimento por série de Taylor, com um número adequado de termos, gerando assim aproximações de primeira ordem, de segunda ordem, ou mesmo de ordem superior. Sendo G a função exata e G* sua aproximação,

$$G^* = G_0 + \Sigma_j [\ \Sigma_i G_{i0} (X_{io} - X_i)\ ] / (j!) \tag{1}$$

em que $G_0 = G(\mathbf{X}_0)$, $d^j(\mathbf{X}_0) = \Sigma_{i1} \Sigma_{i2} \Sigma_{i3} \ldots \Sigma_{ir} h_{i1} h_{i2} h_{i3} \ldots h_{ij} G_{,X1,X2,X3,\ldots Xj}(\mathbf{X}_0)$ e $h_{ij} = X_i - X_{i0}$.

No caso de uma aproximação linear,

$$G^* = G_0 + \Sigma_i G'_i(X_0)(X_{i0} - X_i) \tag{2}$$

sendo X o vetor de variáveis de projeto do sistema estrutural em estudo e X_0 um ponto particular dentro do domínio de X. No presente trabalho busca-se uma outra maneira de tratar a funcão G, sendo sua forma tratada de uma maneira heurística, com base num levantamento da solução de problemas clássicos de engenharia. A função G representa a função relevante ao problema, podendo ser chamada de Função Objetivo ou Função Custo, no contexto de otimização e de Função de Falha no caso da confiabilidade. No presente trabalho será chamada de Função Desempenho. Um breve resumo de soluções tradicionais da Mecânica dos Sólidos é mostrado nas tabelas 1 a 4 para casos de carregamentos simples, onde a nomeclatura adotada é a tradicional: F: força total aplicada; l: comprimento; r: raio; I: momento de inércia; E: módulo de elasticidade; ν : coeficiente de Poisson; σ_E : tensão limite de escoamento; e : espessura; h : altura; a, b : dimensões características do problema.

O critério de falha para carregamento simples pode ser colocado de modo que a falha fica estabelecida por $G(\mathbf{X}) > G_{cr}$, sendo G_{cr} característico de um modo de falha relevante para o sistema. Introduzindo o conceito de fração de carga, γ, (ou índice de carga, ou fator de carga) como na Eq. (3), a falha fica estabelecida com $\gamma \geq 1$.

$$\gamma = G(\mathbf{X}) / G_{cr} \tag{3}$$

Tabela 1 - Flexão de vigas (Roark, 1965).

Caso	**Momento máximo**	**Deslocamento máximo**
Em balanço	$F\,l$	$-F\,l^3\,E^{-1}\,I^{-1}/6$
Biapoiada	$F\,l/4$	$-F\,l^3\,E^{-1}\,I^{-1}/48$
Biengastada	$F\,l/8$	$-F\,l^3\,E^{-1}\,I^{-1}/192$
Biengastada, carga uniforme	$F\,l/12$	$-F\,l^3\,E^{-1}\,I^{-1}/384$

Tabela 2 - Estabilidade (Roark, 1965).

Caso	**Carga crítica**
Coluna bi-rotulada (Euler)	$F_{cr} = \pi^2\,(E\,I)\,l^{-2}$
Coluna biengastada	$F_{cr} = 4\,\pi^2\,(E\,I)\,l^{-2}$
Anel circular sob compressão radial	$p_{cr} = 3\,(E\,I)\,r^{-2}$
Placa longa simplesmente apoiada, comprimida	$\sigma_{cr} = 3{,}29\,E\,(e/b)^2\,f_4(\nu)$
Placa longa apoiada, sob cizalhamento	$\tau_{cr} = 4{,}40\,E\,(e/b)^2\,f_4(\nu)$
Placa apoiada com carga concentrada nos lados	$F_{cr} = E\,e^3\,b^{-1}\,f_4(\nu)$
Cilindro de parede fina sob compressão axial	$\sigma_{cr} = 3{,}29\,E\,(e/r)\,f_5(\nu)$

$f_4(\nu) = (1-\nu^2)^{-1}$; $f_5(\nu) = [\,3\,(1-\nu^2)\,]^{-1/2}$

Tabela 3 – Flexão de placas com carga distribuída (Brush and Almroth, 1975).

Caso	**Tensão máxima**	**Deslocamento máximo**
Placa circular apoiada	$F\,e^{-2}\,f_1(\nu)\;3/(8\,\pi)$	$F\,E^{-1}\,e^{-3}\,r^2\,f_2(\nu)\;3/(16\,\pi)$
Placa circular engastada	$F\,e^{-2}\;3/(4\,\pi)$	$F\,E^{-1}\,e^{-3}\,r^2\,f_3(\nu)\;3/(16\,\pi)$
Placa quadrada engastada	$F\,e^{-2}\,0{,}308$	$F\,E^{-1}\,e^{-3}\,a^2\,0{,}0138$

F : Força total aplicada. $f_1(\nu) = (3+\nu)$; $f_2(\nu) = (1-\nu)(5+\nu)$; $f_3(\nu) = (1-\nu^2)$

Tabela 4 – Colapso plástico de vigas de seção retangular (Brush and Almroth, 1975).

Caso	**Carga crítica**
Carga axial pura	$F_{cr} = \sigma_E\,(bh)$
Flexão pura	$M_{cr} = \sigma_E\,(bh^2)/4$

No caso de carregamentos combinados, o critério de falha é generalizado usando o conceito de fração de carga para cada caso de carregamento, γ_j para o carregamento j. A fração de carga é definida como a relação entre a carga atuante e o correspondente valor crítico de falha, calculado como se este tipo de carga atuasse isoladamente. Tal pode ser aplicado tanto para casos lineares como para casos não lineares. Os exemplos abaixo ilustram a idéia.

Casos com estado uniaxial de tensão.

Vigas sob tração e flexão, modos de falha por ruptura ou início de escoamento, por exemplo:

$$\gamma_F + \gamma_M = 1 \qquad (4)$$

Para o caso não linear de colapso plástico de uma viga de seção retangular, tração e flexão, as cargas críticas são:

$F_{cr} = \alpha\, \sigma_E\, A$

$M_{cr} = (1-\alpha^2)\, \sigma_E\, bh^2/4$, resultando assim,

$$\gamma_F^2 + \gamma_M = 1. \qquad (5)$$

Para os casos com estado plano de tensão, tensões atuantes σ_x e τ_{xy}, as teorias clássicas de colapso podem ser reescritas, usando o conceito de fração de carga, como mostra a tabela 5. A tabela 6 apresenta os critérios de falha por fadiga de eixos sob solicitação combinada, torção e flexão.

Tabela 5 – Teorias de colapso em função das frações de carga (Roark, 1965).

Máxima Tensão Normal	Máx. Tensão Cisalhante	Máx. Energia de Distorção
$\gamma_\sigma + \gamma_\tau^2 = 1$	$\gamma_\sigma^2 + \gamma_\tau^2 = 1$	$\gamma_\sigma^2 + \gamma_\tau^2 = 1$

Tabela 6 - Equações da condição crítica para fadiga de eixos

Caso	**Critério de falha**
Material dútil	$\gamma_\sigma^2 + \gamma_\tau^2 = 1$
Material dútil com alta concentração de tensão	$\gamma_\sigma + \gamma_\tau^2 = 1$
Material frágil	$\gamma_\sigma + \gamma_\tau^2 = 1$

4. Proposta

Para um estudo sistemático do sistema é conveniente considerar as variáveis adimensionais, seguindo os conceitos da teoria de modelos e da análise dimensional. Pelos resultados listados nas tabelas anteriores, uma generalização destes pode ser feita da seguinte forma:

4.1. Carregamento simples

Para um carregamento simples a função desempenho assume a forma do produto de potências de X_i:

$$G(X) = C\, \Pi_i\, X_i^{\,ai} \qquad (6)$$

Pela forma como a função G(X) está escrita, as variáveis adimensionais X_i devem ser definidas no sentido de que o ponto zero não pertença ao domínio de interesse, pois isto força G(X) = 0. Neste caso uma nova definição de X_i deve ser feita.

Critério de falha:

$$G(X) = G_{cr}\text{ , ou } \gamma = G / G_{cr} = 1. \qquad (7)$$

4.2. Carregamento combinado:

No caso de carregamento combinado a função desempenho deve ser definida para cada caso de carga:

$$G_j = C_j \, \Pi_i \, X_{ij}^{\;a_{ij}} \tag{8}$$

A função desempenho para o carregamento combinado será,

$$G = \Sigma_j \, G_j \tag{9}$$

e as correspondentes frações de carga:

$$\gamma_j = G_j \,/\, G_{jcr} \text{ para cada caso de carregamento.} \tag{10}$$

Sendo G_{jcr} a carga crítica para o modo de carregamento j, agindo isoladamente. No caso de carregamento combinado a falha não ocorre com $\gamma_j = 1$ sendo necessário estabelecer um novo critério de falha, combinando os vários casos de carga. O novo critério de falha passa a ser:

$$\Lambda = \Sigma \, \gamma_j \qquad \text{para os casos lineares, princípio da superposição, e} \tag{11}$$

$$\Lambda = \Sigma \, \gamma_j^{\;g_j} \qquad \text{para os casos não lineares,} \tag{12}$$

sendo Λ o fator de carga total, atingindo o valor unitário na condição crítica de falha. No caso de cargas críticas obtidas numericamente, busca-se então determinar os expoentes g_j do critério de falha não linear. Tal leva à necessidade de resolver um sistema não linear de equações.

5. Aplicações

5.1. Análise de concentração de tensão.

Nesta aplicação é analisada uma placa com furo circular submetida a tração. Os resultados foram obtidos numericamente por elementos finitos. Foram considerados como parâmetros que definem a geometria, a largura (h) da placa, o raio (r) do furo e a distância (e) do centro do furo em relação ao centro da placa.

Duas variáveis adimensionais foram usadas na análise, o tamanho relativo do furo (X_1) e a excentricidade relativa do furo (X_2) definidas como:

$$X_1 = 1 - r \,/\, h \,; \qquad\qquad X_2 = 1 - e \,/\, h, \tag{13}$$

Esta escolha na definição de X_1 e X_2 foi feita para evitar o ponto $X_2 = 0$. A placa é suficientemente longa de forma que o comprimento não afeta o estado de tensões na região de interesse. Foram definidos três valores para cada X_i, a partir de um valor médio, de referência, dentro da faixa de interesse prático do problema. A tabela a seguir resume os resultados obtidos, quanto à tensão equivalente máxima e a tensão principal máxima. Ambas ocorreram na borda do furo. A malha usada na análise numérica usou elementos de estado plano de tensão com campo quadrático de deslocamentos, com um refino de tal ordem a fornecer valores de tensão dentro de um erro estimado de 5 %, o que no caso correspondeu a um tamanho do menor elemento, na direção radial, da ordem de 0,086 $\cdot$ r. As duas últimas colunas da tabela fornecem o erro relativo a partir da equação ajustada,

$$\sigma_1 = 1{,}7217 \cdot X_1^{-3{,}4541} \cdot X_2^{-0{,}1874} \cdot F \tag{14}$$

$$\sigma_{eq} = 1{,}7170 \cdot X_1^{-3{,}4608} \cdot X_2^{-0{,}1874} \cdot F \tag{15}$$

Tabela 7 – Resultados numéricos por elementos finitos e os erros relativos da aproximação.

X_1	X_2	σ_{eq}	σ_1	Erro em σ_{eq}	Erro em σ_1
0,9	0,8	3.39	3,45	0,087	0,112
0,8	0,8	4,97	4,99	0.013	0,010
0,7	0,8	8,98	8,99	0,002	0,001
0,8	1,0	4,49	4,51	0,025	0,021
0,8	0,8	4,97	4,99	0,013	0,010
0.8	0,6	5,57	5,59	0,027	0,025

5.2. Análise de confiabilidade

O estudo de confiabilidade de sistemas estruturais está focado no cálculo da probabilidade de falha, definida por

$$P_f = P\,[\,S \geq R\,],\ \text{ou} \tag{16}$$

$$P_f = P\,[\,G < 0\,], \tag{17}$$

Sendo S uma função que caracteriza a solicitação no sistema (cargas, tensões, pressões, etc) e R uma função que define o correspondente nível de resistência do sistema. G é a chamada função de falha, G = R – S. R e S geralmente são funções da geometria, de propriedades do material e do carregamento atuante. Em sistemas complexos a função G deve ser calculada numericamente, em pontos específicos do domínio de interesse. Este domínio está relacionado com a dispersão estatística das variáveis envolvidas no problema. Assim, o interesse é na região das variáveis que maximiza a solicitação e que minimiza a resistência, pois esta é a região em que a falha ocorrerá. No método de primeira ordem para o cálculo da confiabilidade, FORM, as funções são linearizadas no chamado ponto de projeto, ou ponto de falha mais provável, no espaço das variáveis de projeto. Esta linearização, caso a função de falha, G, esteja na forma da Eq. (6), leva a uma maneira simples de calcular o coeficiente de dispersão de G (desvio padrão relativo), na forma:

$$V_G^2 = \Sigma_i\,(a_i\,V_{Xi})^2 \tag{18}$$

Sendo V_{Xi} o coeficiente de dispersão de X_i. Considerando o problema anterior da placa com furo, definindo o modo de falha como por ruptura, e o critério de falha como $\sigma_1 = \sigma_R$, a função de falha pode ser escrita como, já usando o resultado ajustado da tensão σ_1,

$$G(X) = R - S = \sigma_R - 1{,}7217 \cdot X_1^{-3{,}4541} \cdot X_2^{-0{,}1874} \cdot F \tag{19}$$

Considerando que a carga aplicada tem um coeficiente de dispersão de 5%, e que por imperfeições de fabricação X_1 e X_2 tem um coeficiente de dispersão de 1%, vem que o coeficiente de dispersão da solicitação s é:

$$V_S^2 = (\,0{,}01 \cdot 3{,}4541\,)^2 + (\,0{,}01 \cdot 0{,}1874\,)^2 + (\,0{,}05 \cdot 1{,}0\,)^2 \tag{20}$$

$$V_S = 0{,}061 \tag{21}$$

Este resultado evidencia o efeito significativo de X_1, sendo X_2 muito pouco relevante. Assim, conhecido V o índice de confiabilidade de Hassofer/Lind é facilmente obtido, permitindo a estimativa do nível de confiabilidade do sistema em análise.

6. Conclusões

Uma primeira versão para a função desempenho foi apresentada, na forma de um produto de parâmetros adimensionalisados, elevados a expoentes a serem determinados, para cada modo de falha e tipo de carregamento. No caso de carregamentos combinados, o critério de falha é proposto como a soma das frações de carga crítica, elevadas a expoentes a serem determinados. As frações de carga crítica foram definidas como a razão entre a carga aplicada e a carga limite para aquele tipo de carregamento. Esta proposição está baseada em alguns casos com solução analítica, em particular problemas estruturais lineares e não lineares, com cargas simples ou combinada. Em todos os casos analisados a solução analítica segue a forma proposta. Foram vistos dois casos de aplicação, um de concentração de tensão e outro de confiabilidade, sendo clara a conveniência da aproximação analítica para os problemas.

7. Referências

Ang, A. H., Tang, W. H., 1984. "Probability Concepts in Engineering Planning and Design". John Wiley & Sons.
Argyris, J. H., 1954-55. "Energy theorems and structural analysis". Aircraft Engineering.
Brush, D. O., Almroth, B. O., 1975. "Buckling of Bars, Plates and Shells". McGraw-Hill.
Den Hartog, J. P., 1987. "Advanced Strength of Materials". Dover.
Hrennikoff, A., 1941. "Solution of problems in elasticity by the framework method". J. Appl. Mech. 8. A169-175.
Langefors, B., 1952. "Analysis of elastic structures by matrix transformation, with special regard to semi-monocoque structures". J. Aeron. Sci. 19(7).
McHenry, D., 1943-44. "A lattice analogy for the solution of plane stress problems". J. Instit. Civil Engrs. 21(2).
Falkenheimer, H. "Systematic calculation of the elastic characteristics of hyperstatic systems". La Recherche Aeronautique No. 17 (Sept-Oct. 1950). No. 23 (Sept-Oct. 1951).
Roark, R. J., 1965. "Formulas for Stress and Strain". McGraw-hill.
Timoshenko, S., 1976. "History of strenght of materials". Dover.

THE USE OF APPROXIMATIONS TO NUMERICAL RESPONSE MODEL OF LINEAR AND NON LINEAR SYSTEMS, WITH APPLICATIONS IN RELIABILITY AND STRUCTURAL ANALYSIS

Edison da Rosa
Universidade Federal de Santa Catarina, SC,
Laboratório de Análise e Projetos Mecânicos
Campus Universitário – Trindade – 88040-970, Florianópolis, SC, Brasil
darosa@emc.ufsc.br

Analucia Vieira Fantin
Universidade Federal de Santa Catarina, SC,
Laboratório de Metrologia e Automatização
Campus Universitário – Trindade – 88040-970, Florianópolis, SC, Brasil
avf@labmetro.ufsc.br

Abstract. *Nowadays, the analysis of large structural systems requires the use of numerical models with a high number of degrees of freedom. This demand hidden the analysis results and deviates the analyst focus from physical problem aspects. This work proposes the development of objective functions defined numerically by finite elements models. The objective function is determined at some points in the design space for each one of the relevant parameters, determined in a preliminary analysis. The response of differents analytical fits that objective functions can present is analyzed through points in the design space. The functions proposed were studied starting from simple cases which analytical solutions are known. It was considered linear and non-linear functions with multiple load cases. Some solutions are presented and an application in stress analysis and reliability is developed.*

Keywords: *Reliability, objective function, stress analysis.*