

# UMA ABORDAGEM PARA O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA COM RESTRIÇÃO SOBRE AS TENSÕES

## J. Tomás Pereira

GRANTE, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina - Brasil.

e-mail: jucelio@cefetpr.br

## E. A. Fancello

GRANTE, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina - Brasil.

e-mail: fancello@grante.ufsc.br

## C. S. de Barcellos

Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais - Belo Horizonte - Brasil.

e-mail: barcellos@pucminas.br

**Resumo:** *Esse trabalho aborda o problema de otimização topológica voltando a atenção para o problema mais comum em Mecânica Estrutural. Conhecidos as propriedades materiais, o espaço de projeto e as regiões de fixação e aplicação do carregamento, busca-se a topologia estrutural ótima com vistas à menor massa e, ao mesmo tempo, que a estrutura não falhe por escoamento do material. A função objetivo (massa do componente) é linear e facilmente calculável. As restrições são as funções de falha avaliadas, formalmente, em cada ponto da estrutura contínua e, numericamente, em cada ponto de integração dos elementos finitos. Com a aplicação da técnica de Lagrangeano Aumentado, essas restrições são incorporadas à função objetivo em um formato integral. Como o problema é originalmente mal posto, realiza-se uma relaxação parcial utilizando a microestrutura porosa do tipo SIMP (Solid Isotropic Microstructure with Penalization). O fenômeno de checkerboard é devidamente tratado através de um funcional de regularização. Finalmente, o trabalho apresenta um conjunto de aplicações numéricas indicando um bom comportamento da técnica, tanto em termos de tempo de solução quanto de eficiência.*

**Key words:** Structural optimization, topology optimization, stress constraints, Finite Element Method, SIMP material.

## 1 Introdução

Atualmente, em virtude da grande competitividade entre empresas e da enorme velocidade de fluxo de informações, há a necessidade de sistemas de projeto de alto desempenho que possibilitem ao projetista implementar rapidamente mudanças em projetos já existentes ou criar novos projetos. Do ponto de vista tecnológico, isso corresponde a aliar ferramentas computacionais integradas com ferramentas matemáticas que propiciem maiores segurança e velocidade de cálculo. Ou seja, há a necessidade de ferramentas que além de realizar a análise de um modelo, possa fazê-lo dentro de uma dada confiabilidade em termos de resultados e que, além disso, possa apontar direções de alteração do modelo que indiquem uma melhoria de uma medida de performance especificada. A área de otimização estrutural (e em particular a de otimização de topologia) vem de encontro a esse anseio, propiciando uma forma eficiente de encontrar (quando possível) uma solução para o problema. A grande maioria das formulações de otimização topológica existentes trata do problema de busca de uma configuração a mais rígida possível, para uma dada quantidade de material. Ou seja, busca-se uma estrutura que se deforme o menos possível. Esse é o clássico problema de mínima flexibilidade (Bendsøe, 1995).

Entretanto, uma boa parcela dos projetos mecânicos práticos refere-se à busca de um componente que utilize a menor quantidade possível de material sem falhar. Colocando essa restrição em termos de uma função de falha  $F$  do material, dependente do campo de tensões  $\sigma$ , pode-se escrever o problema como

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} \quad \text{Massa} \\ & \text{Sujeito a} \quad F(\sigma(x)) \leq 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Neste caso,  $\mathcal{D}$  é o domínio de projeto.

Cabem, aqui, algumas importantes considerações. A primeira diz respeito ao tipo de restrição deste problema. Na sua expressão contínua, implica satisfação em um sentido forte (puntual). Na forma discreta, implica satisfação em um número finito de pontos, geralmente proporcional ao número de elementos finitos utilizados. Convém ressaltar que no problema de mínima flexibilidade estão envolvidos somente dois funcionais: a flexibilidade (função objetivo) e a massa total (única restrição).

Outra característica é a não-convexidade do problema, provocando a não-unicidade de solução, decorrente da existência de mínimos locais. Finalmente, dependendo do tipo de variável de projeto utilizado, o problema pode ser inclusive mal-posto, o que é discutido posteriormente.

## 1.1 Breve histórico do problema

Apesar da clara importância do problema de otimização em questão, a bibliografia apresenta poucos trabalhos relacionados. A abordagem mais clássica estabelece a condição *ad-hoc* de que a estrutura ótima é aquela onde o material possui um campo de tensões saturado (FSD - *fully stressed design*). Essa técnica fornece bons resultados em problemas onde as variáveis de projetos não possuem limites (por exemplo, em problemas onde as variáveis de projeto são o campo de espessuras de um domínio 2D, que podem aumentar indefinidamente). Aplicações nesse formato podem ser encontradas em Cursi & Pagnaco, 1995, e Novotny, 1998 .

Otimização estrutural evolucionária (ESO) é um método de otimização estrutural também baseado no critério de otimalidade de FSD. Trabalhos envolvendo essa técnica são devidos principalmente a Querin *et alli*, 1998. O algoritmo baseia-se na remoção de material (elementos) em regiões de baixa tensão ou adição em regiões de tensões elevadas (por isso é denominado bidirecional). Outra abordagem é o "algoritmo aditivo", dos mesmos autores (Querin *et alli*, 2000), onde o projeto parte de uma estrutura com conectividade de elementos finitos mínima e vai adicionando material (elementos). Nesse caso, o objetivo é minimizar uma função adimensional denominada índice de performance (*PI*) e dada por

$$PI = \frac{1}{FL} \int \sigma_{vM} dD,$$

onde  $\sigma_{vM}$  é o campo de tensões efetivas de von Mises,  $F$  é uma força representativa e  $L$  uma dimensão característica.

Uma abordagem utilizada por vários autores baseia-se no emprego de uma função global do campo de tensões para aproximar as restrições locais. É empregada uma norma- $p$  (com elevados valores do expoente  $p$ ) das tensões efetivas de von Mises, na forma

$$\left\| \frac{\sigma_{vM}}{\sigma_{adm}} \right\|_{L^p(\mathcal{D})} = \left[ \int \left( \frac{\sigma_{vM}}{\sigma_{adm}} \right)^p dD \right]^{1/p}, \quad (1)$$

onde  $\sigma_{adm}$  é a tensão efetiva de von Mises admissível sobre o domínio. Yang & Chuang, 1994, Park, 1995, e Yang & Cheng, 1996, consideram como função objetivo uma combinação linear dos funcionais flexibilidade e da norma- $p$  das tensões (Eq. 1). Nesses trabalhos é utilizada a microestrutura do tipo SIMP.

Shim e Manoochchri, 1997, utilizam a técnica de otimização *Simulated Annealing*. A linha central dessa metodologia é a alteração do modelo de Elementos Finitos através da remoção/restauração de elementos. Em trabalho posterior, Shim e Manoochchri, 1998, utilizam técnicas de otimização discreta baseada em enumeração binária das possíveis soluções. Da mesma forma que o trabalho anterior, a implementação numérica trata da existência ou não de elementos. Nesses trabalhos, uma atenção especial deve ser dada à conectividade do modelo de Elementos Finitos.

Em uma abordagem significativamente distinta das anteriores, Duysinx & Bendsøe, 1998, e Duysinx & Sigmund, 1998, empregam o material SIMP para o problema de otimização considerando restrições locais sobre as tensões. Para evitar o fenômeno de singularidade das tensões, os autores realizam a  $\epsilon$ -relaxação dessas restrições, nos moldes propostos por Kirsch, 1990, e Cheng & Guo, 1997. O problema de otimização de larga escala resultante é resolvido utilizando aproximações convexas e métodos duais, aliados à uma estratégia de pré-seleção de restrições potencialmente ativas. Com uma abordagem semelhante, Duysinx, 1998, discute o problema de otimização de estruturas onde o material possui diferentes limites de falha sob tração ou compressão.

O presente trabalho apresenta uma formulação de otimização de topologia tendo como objetivo a mínima massa, mas como restrições a falha do material por escoamento. Assim, na Seção 2 é apresentada a formulação básica do problema. Nesse caso, como as restrições são locais, avaliadas em cada ponto da estrutura, é suposto um campo de multiplicadores de Lagrange associado, definido sobre toda a região de projeto. Aplicando o Método dos Multiplicadores de Lagrange, incorpora-se essas restrições ao funcional objetivo, recaindo em uma sequência de subproblemas de otimização cujas únicas restrições são simples e no formato caixa (sobre os limites simples do campo de densidades). A relaxação dar-se-á pela utilização do material tipo SIMP. Objetivando a solução dos subproblemas através de técnicas de programação não-linear, a Seção 3 mostra a obtenção dos termos de sensibilidade do funcional Lagrangeano resultante. Na Seção 4 é apresentada a maneira como são aproximados os campos de deslocamentos e densidades sobre cada elemento finito. O algoritmo de solução dos subproblemas de otimização e atualização dos parâmetros em cada um destes são apresentados na Seção 5. Finalmente nas Seções 6 e 7 são mostrados alguns resultados e discutida a eficiência da técnica utilizada.

## 2 Formulação do problema

Seja  $\mathcal{D}$  um domínio limitado, cujo contorno é Lipschitziano e denotado  $\partial\mathcal{D}$ , pertencente ao espaço físico  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 1, 2$  ou  $3$ ) e submetido a um carregamento de superfície  $t$  suficientemente bem-comportado (por exemplo,  $t \in H^{-1/2}(\partial\mathcal{D}; \mathbb{R}^n)$ ). A parcela do domínio ocupada por material é denotada  $\mathcal{D}_m$  e a que não contém é denotada  $\mathcal{D}_v$ . É suposto que o subdomínio  $\mathcal{D}_m$  é suficientemente suave (*smooth*) e que seu contorno ( $\partial\mathcal{D}_m$ ) contém a parcela do contorno  $\partial\mathcal{D}$  onde as condições de contorno de Neumann são não-homogêneas (Figura 1).

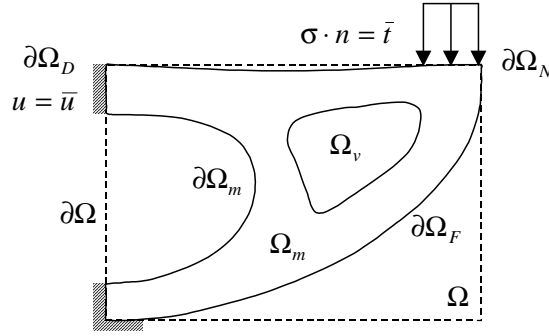


Figura 1: Notação para as definições geométricas em um domínio composto de um sólido e furos.

Considerando um problema com pequenas deformações e deslocamentos e material elástico, linear e isotrópico (cujo tensor constitutivo de rigidez é denotado  $D$ ) obtém-se um problema da elasticidade linear, definido sobre o domínio  $\mathcal{D}_m$ , e satisfazendo o seguinte conjunto de equações constitutivas, cinemáticas e de equilíbrio:

$$\begin{aligned}\sigma &= D\varepsilon, \\ \varepsilon &= \nabla^S u = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla^T u), \\ \operatorname{div}(\sigma) &= 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_m,\end{aligned}\tag{2}$$

e as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned}\sigma \cdot n &= \bar{t} \quad (\bar{t} \text{ conhecido}) \quad \forall x \in \partial\mathcal{D}_N \subset (\partial\mathcal{D}_m \cap \partial\mathcal{D}), \\ \sigma \cdot n &= 0 \quad \forall x \in \partial\mathcal{D}_F := \partial\mathcal{D}_m \setminus (\partial\mathcal{D}_N \cup \partial\mathcal{D}_D), \\ u &= \bar{u} \quad (\bar{u} \text{ conhecido}) \quad \forall x \in \partial\mathcal{D}_D \subset (\partial\mathcal{D}_m \cap \partial\mathcal{D}).\end{aligned}\tag{3}$$

É suposto que o campo vetorial de deslocamentos  $u \in H^1(\mathcal{D}_m; \mathbb{R}^n)$  e está associado univocamente (a menos de rotações e deslocamentos rígidos) aos campos tensoriais de deformação  $\varepsilon$ , onde  $\varepsilon \in L^2(\mathcal{D}_m; \mathbb{R}^{n \times n})$ , e de tensão de Cauchy  $\sigma$ , onde  $\sigma \in L^2(\mathcal{D}_m; \mathbb{R}^{n \times n})$ .

Associada ao domínio  $\mathcal{D}$ , é definida a função  $\chi_m : \mathcal{D} \rightarrow \{0; 1\}$ , denominada *função característica do material* (do domínio  $\mathcal{D}_m$ ), e dada por

$$\chi_m(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathcal{D}_m \\ 0 & \text{se } x \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_m, \end{cases}\tag{4}$$

onde é suposto pertencer à classe de funções  $L^\infty(\mathcal{D}; \{0; 1\})$ .

A aplicação do Método dos Resíduos Ponderados ao conjunto de equações (2)-(3) obtém-se o problema variacional de contorno na forma:

Encontrar a função  $u \in U$ , tal que

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V,\tag{5}$$

onde  $a(\cdot, \cdot) : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$  é a forma bilinear simétrica associada e  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$  é o operador funcional linear. Os espaços de funções  $U$  (espaço de funções admissíveis) e  $V$  (espaço de variações admissíveis) são definidos respectivamente como

$$U = \{u \in H^1(\mathcal{D}) \mid u = \bar{u} \text{ em } \partial\mathcal{D}_D\}\tag{6}$$

$$V = \{v \in H^1(\mathcal{D}) \mid v = 0 \text{ em } \partial\mathcal{D}_D\}.\tag{7}$$

Cabe ressaltar que, considerando a continuidade e a coercividade da forma bilinear  $a$ , é possível garantir a existência de uma única solução  $u^* \in U$  para o problema variacional abstrato (Eq. 5) (Oden & Reddy, 1976).

Considerando a densidade do material ( $\rho_0$ ) e a função característica como apresentada anteriormente, pode-se formular o problema de projeto ótimo em sua forma original como:

*Problema  $P_o$ :*

$$\begin{aligned}\text{Min}_{(\chi_m \in L^\infty(\mathcal{D}; \{0; 1\}))} & m(\chi_m) = \rho_0 \int_{\mathcal{D}} \chi_m(x) d\mathcal{D}, \\ \text{Restrições} & \begin{cases} F(\sigma) \chi_m(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}, \\ \text{Problema variacional (Eq. 5)} \end{cases}\end{aligned}\tag{8}$$

## 2.1 Relaxação do problema

Note-se que o problema de otimização, como colocado em (8), trata da seleção (para cada ponto material) da existência ou não de material. Caracteriza-se, assim, um funcional não semicontínuo-inferior (*no lower-semicontinuous function*) (Dacorogna [1989]). Como consequência, não é possível garantir a existência de uma solução visto que, eventualmente, pode-se gerar seqüências de funções características que fornecem sempre um menor valor para a função objetivo. Isto pois, a solução pode não estar neste conjunto de funções admissíveis ( $L^\infty(\mathcal{D}; \{0; 1\})$ ), mas em um outro conjunto mais amplo (que englobe, por exemplo, materiais compostos).

Há, portanto, a necessidade de relaxar o problema, através da ampliação do espaço de soluções (funções características) para um espaço de soluções que abranja valores intermediários entre 0 e 1. Uma forma de relaxação é introduzir no espaço de soluções microestruturas porosas (laminadas ou não). É importante frisar que o termo relaxação utilizado aqui refere-se unicamente a uma ampliação do conjunto de definição das variáveis de projeto.

Para problemas de mínima flexibilidade é frequente a utilização de microestruturas laminadas ótimas (dos tipos rank-1, rank-2, etc...)(Bendsøe, 1995). Entretanto, para problemas envolvendo restrição sobre tensões, além do inconveniente de um número elevado de variáveis de projeto para cada elemento, há a dificuldade de estabelecimento de um critério de falha coerente para a microestrutura (Duysinx & Bendsøe, 1998).

Assim, optou-se pela utilização de um modelo simples de microestrutura. Nesse caso, a microestrutura porosa do tipo isotrópica (*SIMP - Solid Isotropic Microstructure with Penalization*) (Bendsøe & Sigmund, 1999). Nesse tipo de microestrutura é suposta a existência de uma relação entre os tensores constitutivos do material original ( $D^0$ ) e do material poroso com densidade relativa  $\rho(D_\rho)$ , dada por

$$D_\rho = D(\rho) = \rho^p D^0. \quad (9)$$

A densidade relativa  $\rho$  é tal que  $0 \leq \rho \leq 1$ , e o expoente  $p$  deve ser escolhido de tal maneira que penalize as densidades intermediárias ( $p \geq 1$ ) e satisfaça os limites de Hashin-Shtrikman para materiais bi-fásicos (Bendsøe & Sigmund, 1999, e Hashin & Shtrikman, 1963). Para materiais onde o coeficiente de Poisson é 1./3., tem-se que  $p \geq 3.0$ . Nesse trabalho, esse valor limite é o adotado.

Assim, o problema de projeto ótimo original (Eq. 8) pode ser reescrito como: *Problema  $P_1$* :

$$\begin{aligned} \text{Min}_{(\rho \in L^\infty(\mathcal{D}; (0,1)))} \quad & m(\rho) = \rho_0 \int_{\mathcal{D}} \rho(x) d\mathcal{D}, \\ \text{Restrições:} \quad & \rho(x) F(\sigma(x)) \leq 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}. \end{aligned} \quad (10)$$

A partir desse ponto fica implícita, para todo problema de ótimo, a dependência da solução com relação à solução  $u$  do problema de estado (5).

## 2.2 Critério de falha na microestrutura

Uma questão crucial é o estabelecimento do critério de falha na microestrutura adotada (neste caso, uma microestrutura "fictícia"). Essa questão foi discutida por Duysinx & Bendsøe, 1998, onde os autores estabelecem funções relacionando os campos de tensões e deformações aparentes na estrutura e os campos internos à célula. A partir de considerações de consistência física, quando a densidade relativa tende aos valores limites 0 e 1, tem-se que

$$\sigma(x) = D^0 \langle \varepsilon(x) \rangle, \quad (11)$$

onde  $\sigma(x)$  é o campo de tensões homogenizado na microcélula fictícia e  $\langle \varepsilon(x) \rangle$  é o campo de deformações aparente. Esse termo é obtido pela diferenciação direta do campo de deslocamentos (Eq. 2). Note-se que, fisicamente, o acréscimo nas tensões em virtude de uma diminuição na densidade na região ocorre em virtude da diminuição da capacidade de absorver energia (a rigidez é penalizada), provocando um aumento nos deslocamentos e, por consequência, nas deformações e tensões.

Outra questão importante é o fenômeno de singularidade de tensões, detectado inicialmente por Kirsch, 1990, em problemas de otimização de treliças. Posteriormente, Cheng & Jiang, 1992, e Cheng & Guo, 1997, mostram que regiões de baixos valores de densidades, em geral, tornam-se sobre-tensionadas. Assim, quando a densidade tende a zero, as tensões tendem a um valor não-nulo. Isso pois a região possui pouca capacidade de absorver energia, sendo facilmente deformável. Esse comportamento impede que o material nessa região seja eliminado. A estratégia adotada por vários autores é realizar uma relaxação da restrição sobre as tensões, que se anule quando a densidade se aproxime da unidade (onde efetivamente existirá material). Com isso, as restrições colocadas em (10) são substituídas por

$$\begin{cases} g_\sigma(x) \equiv \rho(x) F(\sigma(x)) - \epsilon(1 - \rho(x)) \leq 0, \\ 0 < \epsilon^2 = \rho_{\min} \leq \rho(x) \leq 1, \end{cases} \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad (12)$$

onde  $\epsilon$  é o parâmetro de relaxação.

Considerando as restrições nesse novo formato  $\epsilon$ -relaxado, pode-se reescrever o problema de projeto ótimo ( $P_1$ ) como:

*Problema  $P_2$ :*

$$\begin{aligned} \text{Min}_{(\rho \in K_\rho)} m(\rho) &= \rho_0 \int_{\mathcal{D}} \rho(x) d\mathcal{D}, \\ \text{Restrições: } g_\sigma(x) &\leq 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}, \end{aligned} \quad (13)$$

onde  $K_\rho = \{\rho \mid \rho \in L^\infty(\mathcal{D}) \text{ e } 0 < \epsilon^2 = \rho_{\min} \leq \rho(x) \leq 1\}$  é o espaço de definição do campo de densidades.

### 2.3 Solução baseada no Método do Lagrangeano Aumentado

Essa Seção trata da transformação do problema de otimização (13) com restrições em outro problema equivalente, mas com restrições somente sobre o campo de densidades (limites em formato "caixa"). Esse procedimento é discutido por Tomás Pereira, 2000. Para tanto, utiliza uma abordagem baseada no Método do Lagrangeano Aumentado - MLA - (Bertsekas, 1996).

Empregando a formulação clássica do MLA e definindo um espaço convexo de funções Multiplicadores de Lagrange ( $\lambda$ ), associados às restrições sobre as tensões,  $K_\lambda = \{\lambda \mid \lambda \geq 0, 0 \text{ e } \lambda \in L^2(\mathcal{D})\}$ , pode-se incorporar as mesmas ao funcional objetivo, em um formato integral. Com isso obtém-se o funcional Lagrangeano, dado por

$$m^*(\rho, \sigma) = \rho_0 \int_{\mathcal{D}} \rho(x) d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \lambda(x) [g_\sigma(x) + z^2(x)] d\mathcal{D}, \quad (14)$$

onde  $z^2$  representa uma função de folga positiva associada às restrições, definida sobre todo o domínio  $\mathcal{D}$  e Lebesgue integrável.

A inserção de um termo de penalização quadrática associado às mesmas restrições permite a eliminação das variáveis de folga resultando, assim, no funcional Lagrangeano Aumentado ( $\mathcal{L}$ ), onde

$$\mathcal{L}(\rho, \sigma, r, \lambda) = m(\rho) + m_\sigma(\rho, \sigma, r, \lambda) = \rho_0 \int_{\mathcal{D}} \rho d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} M_\sigma(\rho, \sigma, r, \lambda) d\mathcal{D}, \quad (15)$$

onde  $r > 0$  é o parâmetro de penalização. O funcional resultante  $M_\sigma(\rho, \sigma, r, \lambda)$  é obtido através de

$$M_\sigma(\rho, \sigma, r, \lambda) = \frac{1}{r} \begin{cases} (r\lambda(x) + 0.5g_\sigma(x))g_\sigma(x) & \text{se } g_\sigma(x) + r\lambda(x) > 0, \\ -0.5(r\lambda(x))^2 & \text{se } g_\sigma(x) + r\lambda(x) \leq 0. \end{cases} \quad (16)$$

### 2.4 Formulação geral do problema

O problema de otimização acima é, portanto, o de busca de uma função minimizadora  $\rho \in K_\rho$ , para o funcional objetivo (15). Entretanto, há a necessidade de se realizar a regularização do mesmo, com vistas a evitar o conhecido fenômeno de oscilação do campo de densidade em formato tabuleiro de xadrez (*checkerboard*). Essa regularização pode ser feita de várias maneiras, entre as quais, controle de perímetro, controle local ou global do gradiente, etc... (Sigmund & Petersson, 1998). Nesse trabalho é feita a opção pela utilização de um funcional de restrição do gradiente do campo de densidades ( $F_c(\rho)$ ), dado por

$$F_c(\rho) = R_c \int_{\mathcal{D}} |\nabla \rho|^2 d\mathcal{D}. \quad (17)$$

Finalmente, adiciona-se à função objetivo (15) um funcional de penalização das densidades intermediárias ( $F_\rho(\rho)$ ), dado por

$$F_\rho(\rho) = R_\rho \int_{\mathcal{D}} \rho(1 - \rho) d\mathcal{D}. \quad (18)$$

Nos funcionais acima,  $R_c$  e  $R_\rho$  são os respectivos parâmetros de penalização (sempre positivos).

Assim, tem-se que a forma final do problema de otimização proposto, após a divisão de todas as parcelas pela densidade absoluta do material ( $\rho_0$ ), é dada por:

*Problema  $P$ :*

$$\text{Min}_{(\rho \in H^1(\mathcal{D}) \cap K_\rho(\mathcal{D}))} M(\rho, \sigma(\rho), r, \lambda, K_c, K_\rho) = m(\rho) + m_\sigma(\rho, \sigma(\rho), r, \lambda) + F_c(\rho) + F_\rho(\rho). \quad (19)$$

Note-se que a relação  $\sigma(\rho)$  implica que para cada campo de densidade  $\rho$  é resolvido o problema variacional de equilíbrio (5), obtendo-se o campo de tensões  $\sigma$ .

### 3 Análise de sensibilidade

A implementação da busca numérica do projeto ótimo proposto acima (em uma estrutura de programação não-linear) envolve a obtenção do gradiente do funcional objetivo (19) em relação às variáveis de projeto (densidades).

Note-se que que, numericamente, o espaço de funções densidades é associado à malha de elementos finitos. Ou seja, qualquer densidade  $\rho$  pode ser expressa pela combinação linear de um conjunto finito de funções globais de interpolação. Assim, o problema envolve um funcional objetivo e número finito (em geral, elevado) de variáveis de projeto. Ademais, como todas as parcelas desse funcional têm expressão analítica e são diferenciáveis, pode-se empregar o **Método Adjunto Analítico de Análise de Sensibilidade** (Haug *et alii*, 1986).

A obtenção da sensibilidade das parcelas envolvendo somente o campo de densidade é imediata. A atenção é voltada ao funcional associado às restrições sobre as tensões. Considerando uma perturbação genérica  $\delta\rho \in H^1(\mathcal{D}) \cap K_\rho(\mathcal{D})$ , tem-se que a perturbação total no funcional  $m_\sigma$ , devida a essa perturbação pode ser obtida por

$$m_\sigma(\rho, \sigma, r, \lambda)_G[\delta\rho] = \int_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial M_\sigma(\dots)}{\partial \rho} \cdot \delta\rho \right) d\mathcal{D} - a_\rho(u, u_a)_G[\delta\rho],$$

onde  $a_\rho(u, u_a)_G[\delta\rho]$  representa o diferencial Gateaux da forma bilinear  $a(\cdot, \cdot)$  na direção  $\delta\rho$  e para um vetor de projeto  $\rho$  fixo (campo de densidades corrente).  $u_a$  é o campo de deslocamentos adjunto, resultante da solução do problema variacional adjunto associado ao funcional  $m_\sigma$ , em questão.

### 4 Discretização do problema

A solução numérica do problema de otimização proposto é dado pelo Método dos Elementos Finitos. São considerados somente problemas em Estado Plano de Tensões. Entretanto, a abordagem acima é totalmente extensível a problemas 3D.

O elemento finito utilizado é o triangular linear de 3 nós. A aproximação do campo de densidades é similar e feita considerando funções lineares centradas nos vértices (nós) dos elementos finitos.

### 5 Algoritmo de solução

O procedimento de solução do problema de otimização segue as linhas gerais do MLA, com algumas alterações com vistas a uma maior estabilidade numérica. O algoritmo completo de otimização pode ser colocado em duas etapas. A primeira consiste em fixar um conjunto de Multiplicadores de Lagrange ( $\lambda^0$ ) e fator de penalização ( $r^0$ ) para as restrições e resolver o problema de ótimo do funcional objetivo  $M$  com as restrições únicas do tipo "caixa" sobre as densidades. Esse constitui-se no loop externo do processo e é esquematizado a seguir.

*Loop externo:*

1. Definir  $k = 0$ ,  $\eta^k$ ,  $R_c$ ,  $R_\rho$ ,  $\lambda^k$  e  $r^k$ ;
2. Minimizar o funcional  $M$ , satisfazendo  $0 < \rho_{\min} \leq \rho(x) \leq 1$ , e com tolerância  $\eta^k$ ;
3. Verificação da convergência. Se convergiu, pára o processo;
4. Atualização de  $\eta^k$ ,  $\lambda^k$  e  $r^k$ ;
5. Retorna ao passo 2.

A segunda etapa (*loop interno*) trata do algoritmo de otimização do funcional  $M$ , com restrições simples do tipo "caixa" e com os parâmetros  $\eta^k$ ,  $R_c$ ,  $R_\rho$ ,  $\lambda^k$  e  $r^k$  fixos (item 2, acima). Nesse caso é empregado um algoritmo de otimização não-linear baseado em regiões de confiança (*trust-region*) especializado para norma  $L_\infty$ . Proposto inicialmente por Friedlander *et alii*, 1994, e generalizado posteriormente por Bielschowsky *et alii*, 1997, o algoritmo baseia-se na construção de um modelo quadrático definido em uma região de confiança e de um procedimento de busca do ponto ótimo ao longo das faces. É proposto um algoritmo adaptivo que altera a dimensão dessas regiões com base na qualidade do modelo quadrático. Nos resultados apresentados é utilizada uma implementação do algoritmo BOX-QUACAN, dos autores acima, adaptada ao problema.

### 6 Resultados numéricos

Com vistas a analisar as potencialidades da formulação apresentada anteriormente, essa seção discute três aplicações. Em todas as aplicações as propriedades elásticas do material original são  $E = 100$ ,  $\nu = 0,3$  e  $p = 3,0$ . As unidades de todas as propriedades físicas são omitidas, mas devem ser mantidas coerentes.

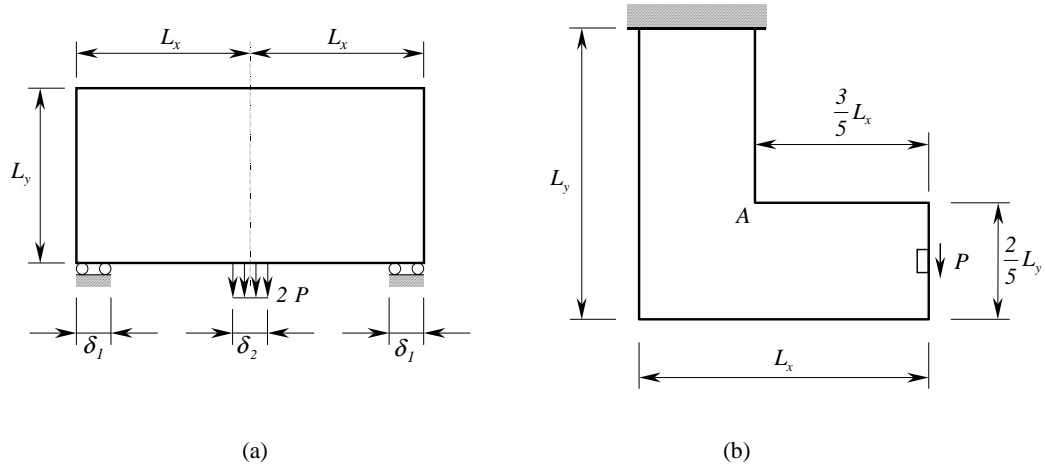


Figura 2: Modelos estruturais planos analisados: (a) Viga bi-apoiada. (b) Viga em formato L.

### 6.1 Exemplo 1: Viga bi-apoiada

Esse é um exemplo clássico de otimização de topologia, quando a função objetivo é a flexibilidade. Entretanto, a solução apresentada trata da minimização da massa com tensão de von Mises máxima prescrita. Nesse modelo, uma viga bi-apoiada ( $L_x = L_y = 8,0$ ) é submetido a um carregamento distribuído vertical na região intermediária inferior ( $P = 6,0$ ) (Fig. 2.a). Devido a simetria do problema, é realizada a modelagem por elementos finitos de metade da mesma. O critério de falha é de von Mises, sendo a tensão admissível  $\sigma_{adm} = 8,0$ .

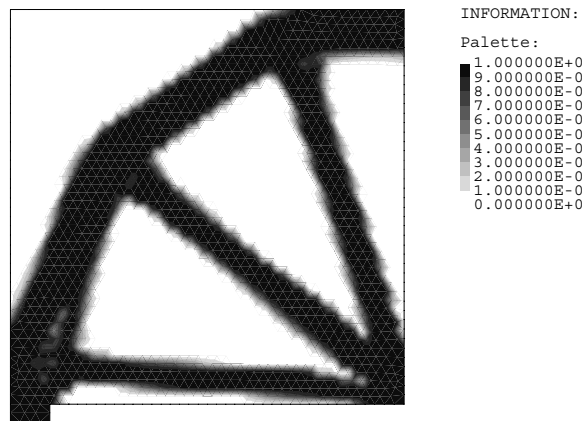


Figura 3: Campo de densidades solução do problema de mínima massa de viga bi-apoiada.

Na Fig. 3 é mostrado o campo de densidades solução do problema. Também, na Fig. 4 pode ser visualizado o campo de funções de falha  $\epsilon$ -relaxado associadas à falha por von Mises. Note-se que o valor de função de falha é sempre negativa. Um valor identicamente nulo indica escoamento incipiente. Este problema envolve uma discretização com 2101 variáveis de projeto, 4042 restrições sobre as tensões e 4202 limites sobre os valores das densidades.

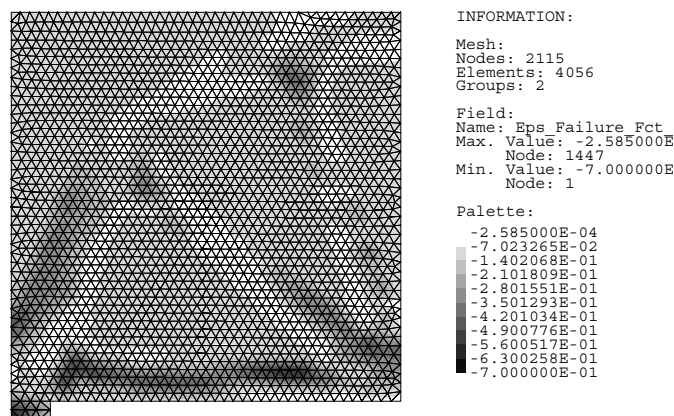


Figura 4: Campo de funções de falha  $\epsilon$ -relaxadas no problema de mínima massa de uma viga bi-apoiada.

## 6.2 Exemplo 2: Viga engastada em formato L

Nesse exemplo é discutido o problema de uma estrutura plana em formato L, engastada em sua parte superior e submetida a um carregamento cisalhante na região central da extremidade direita ( $P = 1,0$ ), como mostrado na Fig. 2.b. A malha de elementos finitos é composta de 1582 elementos e 858 nós. Tem-se, portanto, 858 variáveis de projeto, com suas correspondentes restrições bilaterais, e 1582 restrições sobre as tensões.

Devido a existência do vértice (ponto A), ocorre singularidade no campo de tensões. Esse problema é bastante interessante pois realça a diferença entre as formas finais obtidas para diferentes abordagens de otimização. Nas Figs. 5 e 6 são apresentados os resultados finais para os campos de densidades e funções de falha  $\epsilon$ -relaxada considerando o problema de mínima massa com restrição sobre as tensões efetivas de von Mises (tensão admissível  $\sigma_{adm} = 42,42641$ ).

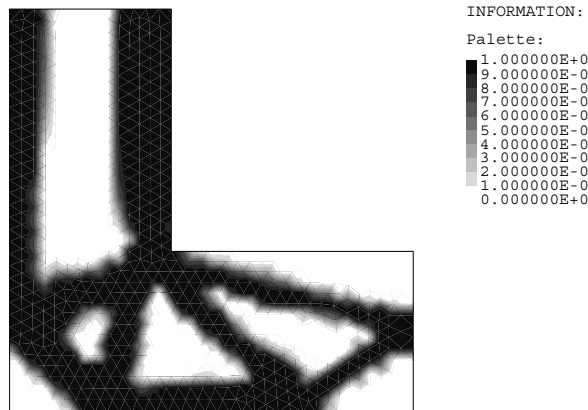


Figura 5: Campo de densidades ótimo para o problema de mínima massa de uma viga em formato L.

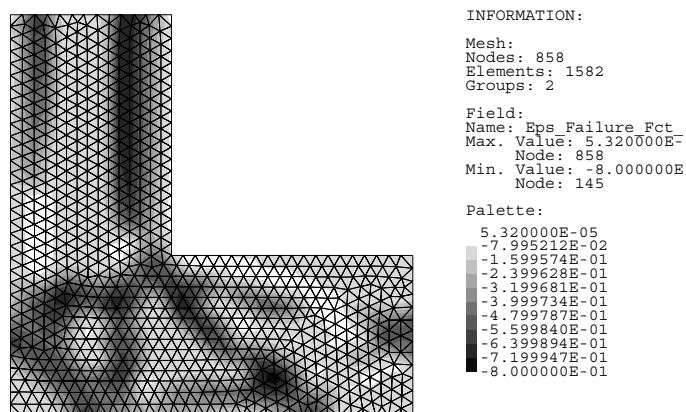


Figura 6: Campo de funções de falha  $\epsilon$ -relaxadas para o problema de mínima massa de uma viga em formato L.

Com o objetivo de evidenciar as diferenças entre as formas finais para os dois problemas de otimização, resolveu-se o mesmo problema tendo como objetivo a mínima flexibilidade, mas com massa restrita. Naturalmente, o segundo problema é resolvido para um valor restrito de massa idêntico ao valor da massa obtida no primeiro problema ( $m = 0,341032$ ). Nas Figs. 7 e 8 são mostrados os resultados finais para esse problema.

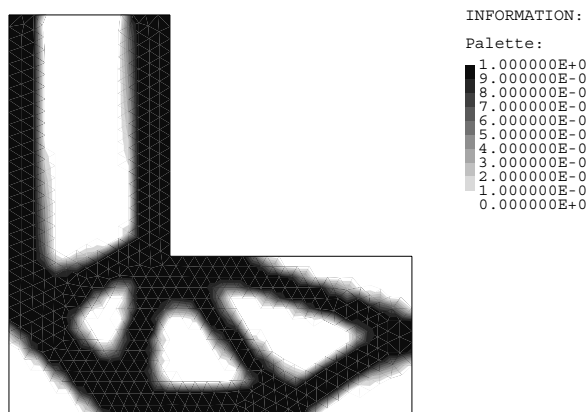


Figura 7: Campo de densidades ótimo para o problema de mínima flexibilidade de uma viga em formato L.



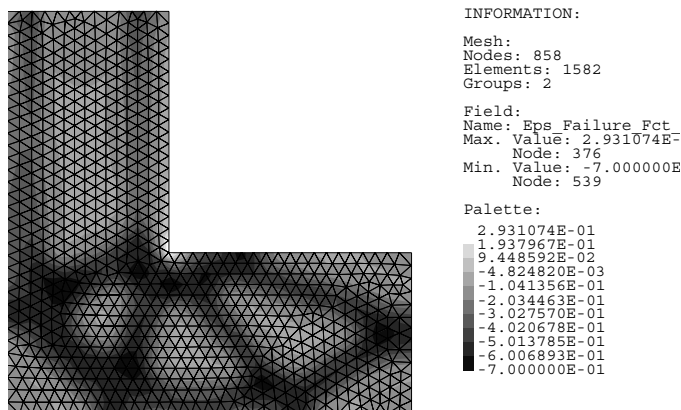


Figura 8: Campo de funções de falha  $\epsilon$ -relaxadas para o problema de mínima flexibilidade de uma viga em formato L.

## 7 Conclusões

Esse trabalho procurou apresentar uma formulação para o problema de otimização topológica de estruturas contínuas tendo como objetivo uma mínima massa e como restrições a tensão de falha por escoamento em cada ponto da estrutura. A abordagem utilizada baseia-se no Método do Lagrangeano Aumentado e na microestrutura porosa fictícia do tipo SIMP. O problema, nessa forma, envolve um conjunto de restrições distribuídas sobre as tensões (com elevado número em forma discreta), aliado a outro conjunto de restrições simples sobre as densidades.

Em geral, a solução ótima obtida possui um contorno suave, evitando concentração de tensões. Ademais, em virtude da penalização sobre as densidades intermediárias, as regiões cinza são relativamente pequenas, facilitando um posterior pós-processamento dessa solução.

Duas diferenças básicas entre o problema em questão e o de mínima flexibilidade podem ser evidenciadas. A primeira trata da grande diferença entre os tempos de processamento (da ordem de 10 vezes) no processo de busca do ótimo. Essa diferença é natural em virtude da enorme diferença entre os números de restrições envolvidas.

Outra diferença está relacionada ao projeto ótimo em si. Essa pode ser visualizada pelas soluções do problema da viga em formato L. Pode-se notar que no problema envolvendo restrição sobre as tensões a forma final busca uma topologia que forneça uma redução na concentração de tensões no vértice. Ou seja, a topologia busca um arredondamento da peça nessa região (Fig. 5). No problema de mínima flexibilidade, a topologia induz a um formato mais rígido, tendendo a posicionar o material nas bordas na estrutura, aumentando a rigidez da viga (Fig. 7). Entretanto, para esse problema pode-se notar, pela Fig. 8, que em algumas regiões a função de falha será positiva (máxima de 0,2931), indicando que a tensão máxima admissível do material é ultrapassada em cerca de 29,3 %.

## 8 Agradecimentos

Os autores agradecem aos Profs. Ana Friedlander Martínez, Sandra A. Santos e José M. Martínez (IMECC/UNICAMP) pelas discussões a cerca do método de otimização não-linear e pela cessão de seu algoritmo (QUACAN). Agradecem também ao grupo TACSOM (*Theoretical, Applied and Computational Solid Mechanics Group*) ([www.lncc.br/~tacsom](http://www.lncc.br/~tacsom)) pelas facilidades do sistema computacional ACDPOOP/ACDPFEM.

Parte desse trabalho foi financiado pelo Programa PICDT/CAPES, pelo Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná (CEFET/PR), através do Departamento Acadêmico de Mecânica (DAMEC), e pelos projetos CNPq 520093/96-8, 523564/96-1 e 400187/95-7.

## Referências

- [1] M.P. Bendsøe. *Optimization of Structural Topology, Shape, and Material*. Springer Verlag, Berlin, Alemanha; Heidelberg, Alemanha; New York, U.S.A.; etc., 1995.
- [2] M.P. Bendsøe and O. Sigmund. Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of Applied Mechanics*, 69:635–654, 1999.
- [3] D.P. Bertsekas. *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*. Athena Scientific, Belmont, MA, U.S.A., 1996.
- [4] G.D. Cheng and X. Guo.  $\epsilon$ -Relaxed approach in structural topology optimization. *Structural Optimization*, 13:258–266, 1997.

- [5] G.D. Cheng and Z. Jiang. Study on topology optimization with stress constraints. *Engineering Optimization*, 20:129–148, 1992.
- [6] B. Dacorogna. *Direct Methods in the Calculus of Variations*. Springer Verlag, Berlin, Alemanha; Heidelberg, Alemanha; New York, U.S.A.; etc., 1989.
- [7] J.E. Sousa de Cursi and E. Pagnaco. Minimum mass parts in 2D elasticity. In Rozvany and Olhoff [22], pages 231–236.
- [8] P. Duysinx. Topology optimization with different stress limits in tension and compression. Relatório Interno, Robotics and Automation – Institute of Mechanics – University of Liege, Liege, Bélgica, 1998.
- [9] P. Duysinx and M.P. Bendsøe. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43:1453–1478, 1998.
- [10] P. Duysinx and O. Sigmund. New developments in handling stress constraints in optimal material distribution. In *7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Design Optimization*, pages 98/4906/1–9, Saint Louis, MI, U.S.A., 1998. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [11] A. Friedlander, J.M. Martínez, and S.A. Santos. A new trust-region algorithm for bound constrained minimization. *Applied Mathematics and Optimization*, 30(3):235–266, 1994.
- [12] Z. Hashin and S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 11:127–140, 1963.
- [13] E.J. Haug, K.K. Choi, and P.V. Komkov. *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. Academic Press, Orlando, FL, U.S.A., 1986.
- [14] S. Idelsohn, E. Oñate, and E. Dvorkin, editors. *WCCM IV – Proceedings of the Fourth World Congress on Computational Mechanics*, Buenos Aires, Argentina, Junho 1998. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería.
- [15] U. Kirsch. On singular topologies in optimal structural design. *Structural Optimization*, 2:133–142, 1990.
- [16] A.A. Novotny, E.A. Fancello, and J.E. Souza de Cursi. An  $h$  adaptive topological optimization design in 2D elasticity. In Idelsohn et al. [14].
- [17] J.T. Oden and J.N. Reddy. *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*. John Wiley and Sons, New York, NY, U.S.A., 1976.
- [18] Y.K. Park. *Extensions of Optimal Layout Design Using the Homogenization Method*. Tese de Doutorado, The University of Michigan, Ann Arbor, MI, U.S.A., 1995.
- [19] J. Tomás Pereira. *Otimização Topológica de Componentes Mecânicos com Restrições sobre as Tensoões*. Proposta de Tese de Doutorado, GRANTE – Grupo de Análise e Projeto Mecânico – Departamento de Engenharia Mecânica – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil, 2000.
- [20] O.M. Querin, G.P. Steven, and Y.M. Xie. Evolutionary structural optimization using additive algorithm. *Finite Elements in Analysis and Design*, 34:291–308, 2000.
- [21] O.M. Querin, V. Young, G.P. Steven, and Y.M. Xie. Computational efficiency and validation of bidirectional evolutionary structural optimisation. In Idelsohn et al. [14].
- [22] G. Rozvany and N. Olhoff, editors. *WCSMO I – Proceedings of the First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Goslar, Alemanha, Junho 1995. Pergamon Press Ltd.
- [23] P.Y. Shim and S. Manoochehri. Generating optimal configurations in structural design using simulated annealing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40:1053–1069, 1997.
- [24] P.Y. Shim and S. Manoochehri. Optimal configuration design of structures using the binary enumeration technique. *Finite Elements in Analysis and Design*, 31:15–32, 1998.
- [25] O. Sigmund and J. Petersson. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependence and local minima. *Structural Optimization*, 16:68–75, 1998.
- [26] R.J. Yang and C.J. Chen. Stress-based topology optimization. *Structural Optimization*, 12:98–105, 1996.
- [27] R.J. Yang and C.H. Chuang. Optimal topology design using linear programming. *Computers and Structures*, 52(2):265–275, 1994.