



## UMA ABORDAGEM NUMÉRICA MULTIESCALA PARA SIMULAÇÃO DE ESTADOS UNIAXIAIS DE TENSÃO EM TECIDOS BIOLÓGICOS

**Bruno Klahr**<sup>a</sup>

**Thiago André Carniel**<sup>a</sup>

**Eduardo Alberto Fancello**<sup>a,b</sup>

bruno.klahr@posgrad.ufsc.br

carnielta@gmail.com

eduardo.fancello@ufsc.br

<sup>a</sup>GRANTE - Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina

<sup>b</sup>LEBm - Hospital Universitário, Universidade Federal de Santa Catarina

Campus Universitário - Trindade, 88040-900, Florianópolis, SC, Brasil

**Resumo.** *Ensaio mecânicos de tração e compressão são experimentos amplamente empregados no estudo do comportamento mecânico de diversos tecidos biológicos, onde a curva tensão-deformação usualmente é obtida sob hipótese de estado homogêneo uniaxial de tensões. Nesse caso, os alongamentos transversais da amostra provêm unicamente da resposta do material, isto é, resultam da condição de tensões transversais nulas. Contudo, em diversas teorias multiescala baseadas em técnicas de homogeneização em cinemática finita, o histórico do gradiente de deformação macroscópico deve ser informado a priori. Assim, percebe-se que a obtenção de um estado uniaxial de tensões macroscópico (homogeneizado) não é direto. Motivado por esses fatos, este trabalho propõe uma metodologia, com base no algoritmo de Newton-Raphson, para obtenção de estados uniaxiais de tensões a partir de experimentos numéricos multiescala. Essa estratégia foi implementada em um código laboratorial de elementos finitos e multiescala e validada em comparação com modelos analíticos. Estudou-se as respostas mecânicas de um elemento de volume representativos com características auxéticas (razão de Poisson negativa), demonstrando assim a aplicabilidade da metodologia proposta. Os desenvolvimentos apresentados neste manuscrito visam futuras pesquisas relacionadas à investigações multiescala de tecido conectivos fibrosos sujeitos a estados uniaxiais de tensão.*

**Palavras-chave:** *Multiescala, Homogeneização, Elementos finitos, Tecidos biológicos*

## 1 INTRODUÇÃO

Devido a morfologia e biomecânica de diversos tecidos biológicos, testes uniaxiais são os experimentos mais empregados para acessar seus comportamentos mecânicos (Calvo et al., 2010; Karimi et al., 2014; Jankowska et al., 2015; Rodeo et al., 2016). A interpretação desses ensaios é comumente realizada através da curva tensão-deformação, obtida considerando a hipótese de estado homogêneo uniaxial de tensões. Em vista dessa hipótese, o gradiente de deformações fica totalmente definido pela componente axial (na direção de aplicação da força), uma vez que os alongamentos transversais resultam da condição de tensões transversais nulas, isto é, provêm unicamente da resposta do material.

Como exemplo de tecidos biológicos que apresentam respostas mecânicas não usuais, citam-se os tendões. Particularmente em ensaios mecânicos de tração em fascículos de tendões, a literatura reporta razões de Poisson que podem variar de 0.7 a 4.0 (Cheng e Screen, 2007; Reese e Weiss, 2013). Essas grandes deformações transversais verificadas em estados trativos resultam em significativa redução volumétrica do material, muito além do limite da incompressibilidade, isto é, razão de Poisson de 0.5. Tal resposta mecânica é de difícil modelagem através de abordagens fenomenológicas clássicas baseadas na mecânica do contínuo, sinalizando que o comportamento mecânico macroscópico do material é fortemente dependente de mecanismos microestruturais.

Nesse contexto, as teorias multiescala baseadas em elementos de volume representativo (EVR) do material (de Souza Neto e Feijóo, 2006; de Souza Neto et al., 2015) e associadas ao método dos elementos finitos fornecem um quadro teórico-numérico adequado ao estudo dos comportamentos mecânicos desses materiais. Porém, a obtenção de estados uniaxiais de tensão, em vista dessas teorias multiescala, não é direta, uma vez que o histórico do gradiente de deformação em um ponto material macroscópico deve ser informado *a priori*.

Motivado pelos fatos previamente expostos, o objetivo principal deste trabalho é propor uma estratégia numérica para obter estados uniaxiais de tensões a partir de experimentos numéricos multiescala. Especificamente, a estratégia proposta consiste em obter os alongamentos transversais macroscópicos a fim de respeitar a condição de tensões transversais homogeneizadas nulas, simulando assim, um teste de tração (ou compressão) uniaxial.

Por fim, têm-se subsídios para estudar os campos locais da microestrutura, elucidando a compreensão de micromecanismos cinemáticos e cinéticos, assim como investigar em que quantidades esses afetam as respostas macroscópicas do material em estados uniaxiais de tensão.

## 2 TEORIA MULTIESCALA EM DEFORMAÇÕES FINITAS

Dentre as diversas teorias multiescala presentes na literatura, a que será utilizada neste trabalho é caracterizada por empregar conceitos variacionais e de homogeneização em cinemática finita segundo os desenvolvimentos apresentados em de Souza Neto e Feijóo (2006) e de Souza Neto et al. (2015).

O tamanho do EVR possui importância fundamental nessa teoria. O domínio da microescala deve ser suficientemente pequeno para representar um ponto da macroescala, porém deve ter dimensões suficientes para ser considerado um meio contínuo.

Essa teoria multiescala é constituída basicamente de dois conceitos fundamentais: a) admissibilidade cinemática, da qual resultam as classes de modelos multiescala; b) princípio de Hill-Mandel da macro-homogeneidade, que define as relações entre as tensões macroscópicas e microscópicas, e a equação de equilíbrio do EVR.

### Admissibilidade cinemática

Nessa teoria o deslocamento  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  e o gradiente de deformações  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ , definidos em um ponto macroscópico referencial  $\mathbf{X}$  e instante de tempo  $t$ , são relacionados à microescala através da média volumétrica de seus respectivos campos microscópicos  $\mathbf{u}_\mu(\mathbf{Y}, t)$  e  $\mathbf{F}_\mu(\mathbf{X}, t)$ , através de

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_Y} \mathbf{u}_\mu(\mathbf{Y}, t) dV_\mu \quad (1)$$

e

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_Y} \mathbf{F}_\mu(\mathbf{Y}, t) dV_\mu \quad (2)$$

em que  $V_\mu$  e  $\mathbf{Y}$  representam, respectivamente, o volume e os pontos referenciais do EVR.

Além disso, a teoria de multiescala propõe a seguinte expressão para o campo de deslocamentos microscópicos,

$$\mathbf{u}_\mu(\mathbf{Y}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + [\nabla_X \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)] \mathbf{Y} + \tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{Y}, t) \quad (3)$$

em que a operação  $\nabla_X(\cdot)$  é o gradiente material e o termo  $\tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{Y}, t)$  é denominado de deslocamento microscópico flutuante, representando assim um termo de ordem superior.

A partir das Eqs. (1) e (2), e utilizando a Eq. (3), pode-se obter as seguintes restrições ao campo de deslocamentos microscópicos flutuantes:

$$\int_{\Omega_Y} \tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{Y}, t) dV_\mu = 0, \quad (4)$$

$$\int_{\partial\Omega_Y} \tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{Y}, t) \otimes \mathbf{n}_Y dA_\mu = 0 \quad (5)$$

em que  $\mathbf{n}_Y$  é a normal unitária da superfície do EVR. As Eqs. (4) e (5) representam restrições translacionais e rotacionais de corpo rígido do EVR, respectivamente. Dessa forma tais restrições motivam a definição de um espaço mínimo de deslocamentos microscópicos flutuantes cinematicamente admissíveis, formalmente definido por,

$$\mathcal{K}_{\tilde{\mathbf{u}}_\mu}^{\min} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \tilde{\mathbf{w}}, \mid \int_{\Omega_Y} \tilde{\mathbf{w}} dV_\mu = 0; \int_{\partial\Omega_Y} \tilde{\mathbf{w}} \otimes \mathbf{n}_Y dA_\mu = 0 \right\}. \quad (6)$$

Entretanto, existem espaços  $\mathcal{K}_{\tilde{\mathbf{u}}_\mu}$  mais restritos, que também respeitam as condições impostas pelas Eqs. (4) e (5), sendo assim subespaços de  $\mathcal{K}_{\tilde{\mathbf{u}}_\mu}^{\min}$ . Dessa forma, esses subespaços

definem as classes de modelos multiescala, representando condições de contorno adequadas que devem ser impostas ao EVR, sendo que mais detalhes podem ser encontrados em de Souza Neto et al. (2015). Neste trabalho serão utilizados os clássicos modelos de Taylor e de deslocamentos lineares no contorno.

O espaço de Taylor representa um modelo de deformação uniforme, em que os deslocamentos microscópicos flutuantes são admitidos nulos em todo o domínio microscópico. Já o modelo deslocamentos lineares no contorno, admite que os deslocamentos flutuantes são nulos apenas nos contornos do EVR.

### Princípio de Hill-Mandel da Macro-homogeneidade

Este princípio estabelece a consistência energética entre as escalas macroscópica e microscópica. Tal princípio postula que a potência de um ponto na macroescala deve ser igual à média volumétrica da potência na microescala. De forma similar, de Souza Neto et al. (2015) reescrevem este princípio considerando que a potência (ou trabalho) virtual das tensões macroscópicas deve ser igual à média volumétrica da correspondente potência (ou trabalho) virtual realizada pelas tensões microscópicas, isto é,

$$\mathbf{P} : \delta \mathbf{F} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_Y} \mathbf{P}_\mu : (\delta \mathbf{F} + \nabla_Y \delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu) dV_\mu, \quad \forall \delta \mathbf{F}, \forall \delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \mathcal{V}_{\tilde{\mathbf{u}}_\mu} \quad (7)$$

em que  $\mathbf{P}$  é o primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff,  $\mathbf{P}_\mu$  sua contraparte microestrutural e  $\mathcal{V}_{\tilde{\mathbf{u}}_\mu}$  representa o espaço dos deslocamentos virtuais flutuantes cinematicamente admissíveis.

Em vista da relação variacional definida na Eq. (7), a equação de equilíbrio do EVR,

$$\int_{\Omega_Y} \mathbf{P}_\mu : (\nabla_Y \delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu) dV_\mu = 0, \quad \forall \delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \mathcal{V}_{\tilde{\mathbf{u}}_\mu} \quad (8)$$

e a equação de homogeneização das tensões,

$$\mathbf{P} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_Y} \mathbf{P}_\mu dV_\mu \quad (9)$$

são derivadas sem pressupostos *a priori*.

## 3 ESTRATÉGIA NUMÉRICA PARA CONSIDERAÇÃO DE ESTADOS UNIAXIAIS DE TENSÃO EM UM QUADRO MULTIESCALA

A abordagem multiescala empregada no desenvolvimento deste trabalho é guiada pela imposição de um histórico do gradiente de deformações de um ponto material da macroescala. Em vista disso, percebe-se que a obtenção de um estado uniaxial de tensões não é direta, uma vez que as deformações transversais macroscópicas resultam da condição de tensões transversais homogeneizadas nulas.

Em vista disso, o objetivo aqui proposto consiste em obter as componentes transversais  $\lambda_{22}$  e  $\lambda_{33}$  do gradiente de deformações macroscópico que respeitem um caso uniaxial de tensões, isto é,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{22} = ? & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} = ? \end{bmatrix} \implies \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & 0 \\ 0 & P_{22} = 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} = 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

A condição (10) pode ser representada matematicamente pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} P_{22}(\boldsymbol{\lambda}) = 0 \\ P_{33}(\boldsymbol{\lambda}) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

em que  $\boldsymbol{\lambda}^T \stackrel{\text{def}}{=} [\lambda_{22} \ \lambda_{33}]$  é o vetor das variáveis incógnitas. Sendo o problema (11) de natureza não linear, emprega-se aqui o clássico procedimento de Newton-Raphson para a sua solução. Nesse caso, um típico incremento  $\Delta\boldsymbol{\lambda}$ , resultante do algoritmo de Newton-Raphson, é obtido a partir da solução do seguinte sistema linear,

$$\mathbf{K}_T \Delta\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{R}, \quad \mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{22}}{\partial \lambda_{22}} & \frac{\partial P_{22}}{\partial \lambda_{33}} \\ \frac{\partial P_{33}}{\partial \lambda_{22}} & \frac{\partial P_{33}}{\partial \lambda_{33}} \end{bmatrix}, \quad \Delta\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \Delta\lambda_{22} \\ \Delta\lambda_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} P_{22} \\ P_{33} \end{bmatrix} \quad (12)$$

em que  $\mathbf{K}_T$  é a matriz tangente do método de Newton-Raphson e  $\mathbf{R}$  é o resíduo. Dessa forma, a atualização dos alongamentos transversais é dada por

$$\boldsymbol{\lambda}^{i+1} = \boldsymbol{\lambda}^i + \Delta\boldsymbol{\lambda}. \quad (13)$$

Na Fig. 1 é apresentado um fluxograma esquemático da metodologia proposta para consideração de estados uniaxiais de tensão em um quadro multiescala. É importante notar que o procedimento de Newton apresentado na Fig. 1 deve ser realizado para cada incremento de tempo.

## 4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta seção serão apresentados os resultados numéricos utilizando a abordagem numérica multiescala proposta na Seção 3, que possui o objetivo de simular estados uniaxiais de tensões a partir de um código de elementos finitos e multiescala.

Em primeiro lugar, realizou-se a validação da estratégia multiescala proposta utilizando o modelo cinemático de Taylor que permite sua comparação com uma solução fechada, dado que o gradiente de deformação macroscópico é transferido para todos pontos da microestrutura (campo de deslocamento flutuante nulo). Em seguida, foi realizado um estudo de caso

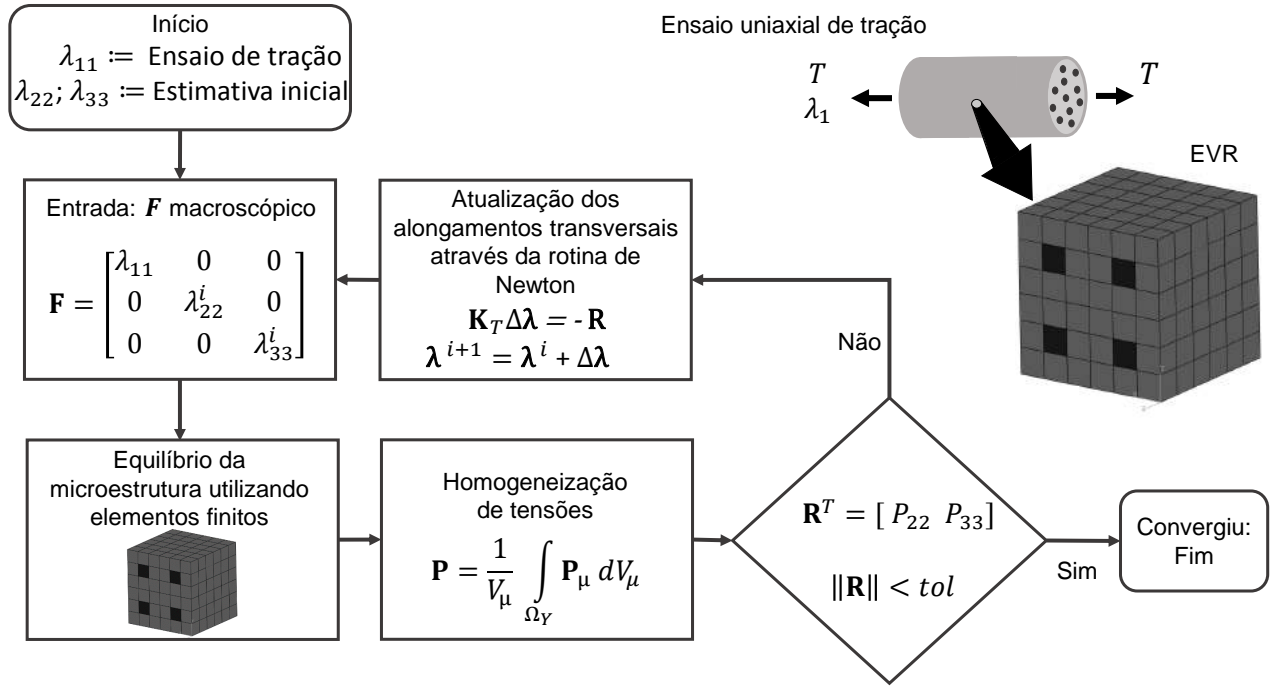


Figura 1: Fluxograma esquemático da abordagem utilizada para garantir estado uniaxial de tensões em um quadro multiescala.

com o objetivo de exemplificar a aplicabilidade da metodologia proposta na Seção 3. Nesse caso, investigou-se o comportamento auxético (razão de Poisson negativa) de um EVR frequentemente investigado na literatura, porém submetido à deformações finitas. Neste caso foi utilizado o modelo cinemático de deslocamentos lineares na fronteira do EVR.

#### 4.1 Exemplo 1: validação da abordagem proposta na Seção 3

Seja um EVR composto por duas fases materiais distintas A e B, cujas energias livre de Helmholtz são representadas por  $\psi_A$  e  $\psi_B$ , respectivamente. Em vista desse EVR, a energia de deformação homogeneizada consistente com a restrição cinemática de Taylor (regra das misturas), resulta na seguinte expressão analítica:

$$\psi = (1 - \nu_A)\psi_B + \nu_A\psi_A \quad (14)$$

em que  $\nu_A$  é a fração volumétrica do material A.

Considera-se aqui que as fases microestruturais A e B são modeladas por potenciais hiperelásticos (Holzapfel, 2000; Bonet e Wood, 2008; Gurtin et al., 2010). Nesse caso, o primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff macroscópico deve respeitar a seguinte igualdade,

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_Y} \mathbf{P}_\mu dV_\mu \quad (15)$$

sendo que as tensões em cada fase material microestrutural é calculada através de

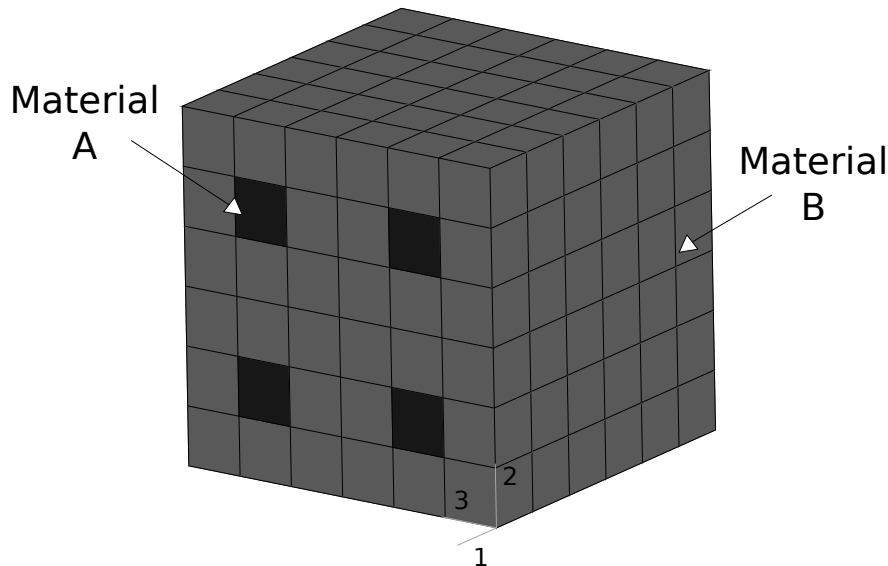
$$\mathbf{P}_{\mu(\cdot)} = \frac{\partial \psi(\cdot)}{\partial \mathbf{F}_\mu} \quad (16)$$

Nota-se então, através da igualdade (15), que a tensão macroscópica obtida de forma analítica pela Eq. (14) deve ser igual a homogeneização das tensões microscópicas em um EVR constituído de dois materiais distintos e sujeito à condição de contorno multiescala de Taylor.

Para a validação do procedimento descrito na Seção 3 escolheu-se o EVR ilustrado na Fig. 2. Tal EVR apresenta fração volumétrica do material A de 20% e foi discretizado com elementos finitos hexaédricos lineares. As respostas das fases materiais A e B são representadas através do modelo de Neo-Hookean (Bonet e Wood, 2008),

$$\psi_{(\cdot)} = \frac{\mu_{(\cdot)}}{2} (\text{tr}(\mathbf{C}_{\mu}) - 3) - \mu_{(\cdot)} \ln J_{\mu} + \frac{\kappa_{(\cdot)}}{2} (\ln J_{\mu})^2 \quad (17)$$

em que  $\mu_{(\cdot)}$  e  $\kappa_{(\cdot)}$  são os parâmetros constitutivos,  $\text{tr}(\cdot)$  é a operador traço e  $J_{\mu}$  é o determinante do gradiente de deformações  $\mathbf{F}_{\mu}$ . O tensor  $\mathbf{C}_{\mu}$  é a deformação de Cauchy-Green à direita, definido por  $\mathbf{C}_{\mu} = \mathbf{F}_{\mu}^T \mathbf{F}_{\mu}$ . Os parâmetros dos modelos materiais A e B utilizados nas análises realizadas neste experimento numérico podem ser consultados na Tabela 1.



**Figura 2:** Malha de elementos finitos de um EVR isotrópico-transverso constituído de fibras (material A) imersas em uma matriz (material B).

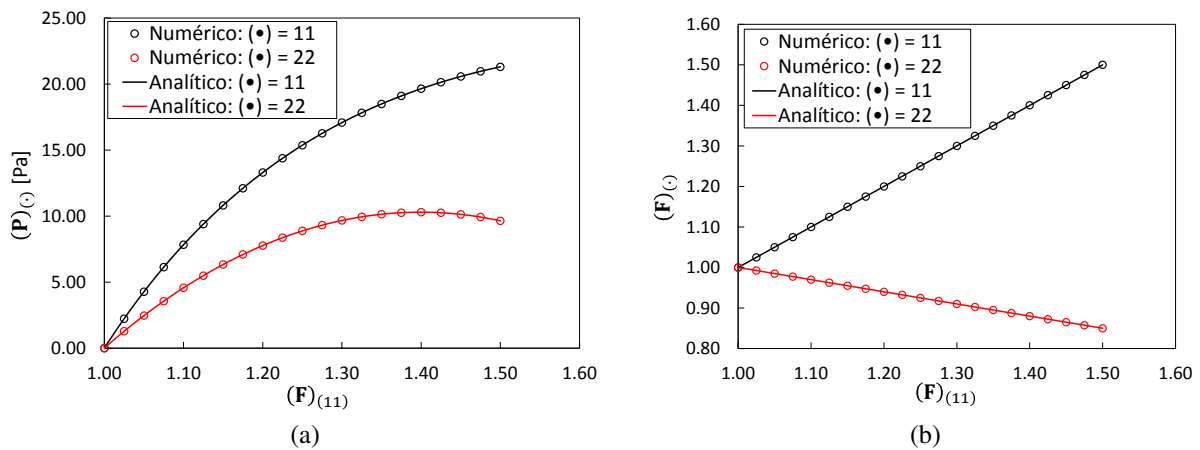
**Tabela 1:** Propriedades dos modelos materiais utilizados para modelar as fases microestruturais do EVR da Fig. 2.

Propriedade do modelo material	Material A	Material B
$\mu$ [Pa]	100	5
$\kappa$ [Pa]	1000	50

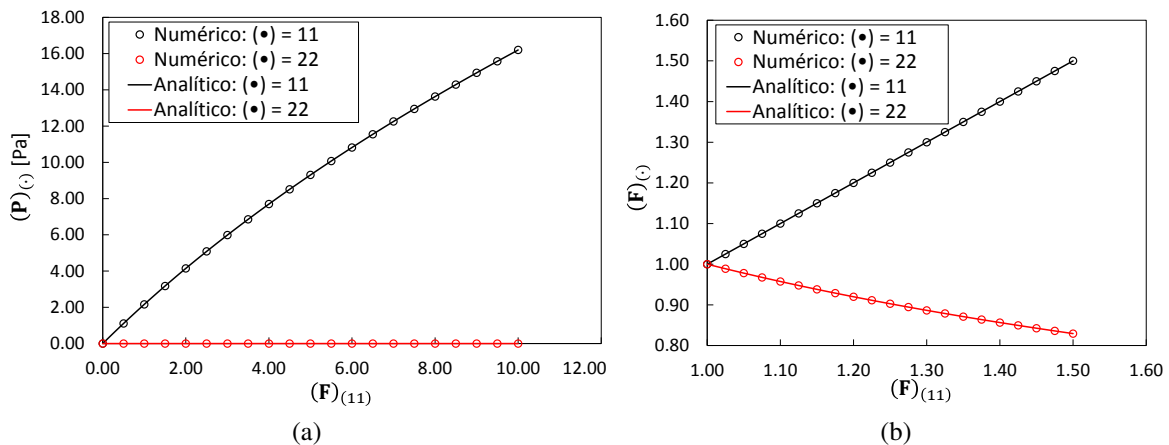
Duas análises distintas foram realizadas. A primeira, utilizando um gradiente de deformação diagonal incrementado linearmente de  $\mathbf{F} = \text{diag}[1, 1, 1]$  até  $\mathbf{F} = \text{diag}[1.50, 0.85, 0.85]$ . A segunda análise considera o mesmo valor de alongamento axial, porém deixando os valores de

$\lambda_{22}$  e  $\lambda_{33}$  livres de maneira a respeitarem a condição de tensões transversais nulas, tal como descrito na Seção 3.

Os resultados referentes a essas análises podem ser visualizados nas figs. 3 e 4, respectivamente. Especificamente em relação às figs. 3a e 4a, nota-se que a resposta em tensões obtida de forma analítica através da Eq. (14) é a mesma da calculada empregando o processo numérico de homogeneização no EVR da Fig. 2 sob a restrição cinemática de Taylor. Desse modo, verifica-se a igualdade (15), validando a implementação da metodologia multiescala em um código de elementos finitos não linear. Vale enfatizar que devido a geometria do EVR resultar em um material transversalmente isotrópico, os tensores de tensão e deformação apresentam as componentes 22 e 33 idênticas.



**Figura 3: Resultados para o caso da imposição de um gradiente de deformações diagonal ( $F = \text{diag}[1.50, 0.85, 0.85]$ ). (a) Curva de componentes do primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff pelo alongamento axial. (b) Curva de alongamentos em função do alongamento axial.**



**Figura 4: Resultados para um caso uniaxial de tensões. (a) Curva de componentes do primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff pelo alongamento axial. (b) Curva de alongamentos em função do alongamento axial.**

Visando comparar as diferenças entre ambas as análises realizadas, na Fig. 5 são apresentadas as curvas tensão-alongamento axiais e a evolução dos alongamentos transversais. Na Fig. 5a nota-se claramente que, como esperado, há uma diminuição na rigidez homogeneizada para



o caso que considera um estado uniaxial de tensões. Além disso, verifica-se na Fig. 5b um comportamento não linear dos alongamentos transversais resultantes da resposta microestrutural do material sob um estado uniaxial de tensões.

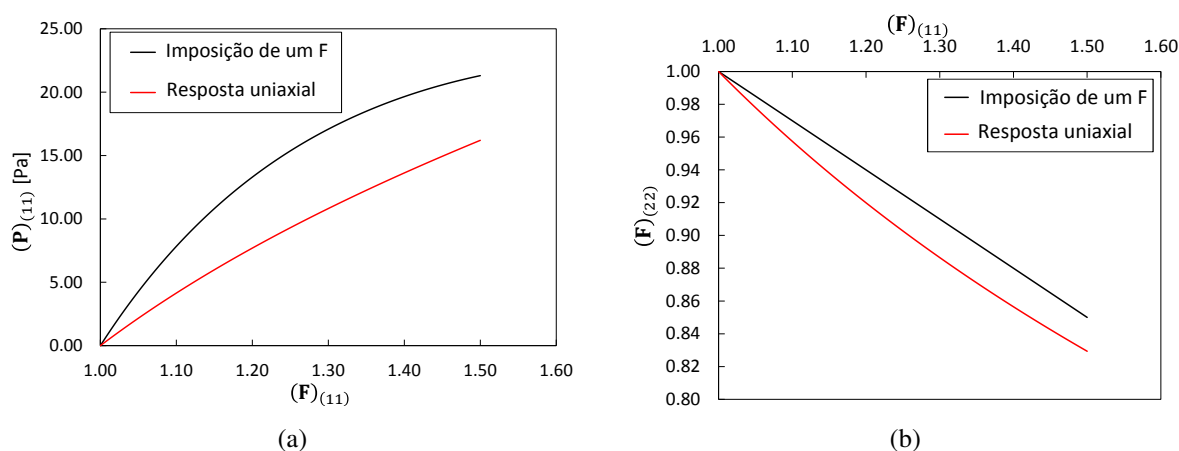


Figura 5: Comparação entre os resultados apresentados nas figs 3 e 4. (a) Curvas tensão-alongamento axiais. (b) Curvas de alongamento transversal em função do alongamento axial.

## 4.2 Exemplo 2: metamaterial auxético

Existem na literatura muitos estudos envolvendo microestruturas e materiais que apresentam características mecânicas peculiares. Um exemplo que pode ser citado são os chamados metamateriais auxéticos, isto é, materiais que apresentam razão de Poisson negativa (Sparavigna, 2014; Li et al., 2016; Lakes, 2017). Isto significa que quando esses materiais são submetidos a estados trativos, alongam-se em ambas direções axial e transversal. Já em condições de compressão, verifica-se contração em ambas direções citadas.

A razão de Poisson usualmente é obtida de ensaios de tração ou compressão sujeitos a estados homogêneos uniaxiais de tensão, sendo calculada pelo negativo da razão entre a deformação de engenharia transversal pela longitudinal. Em vista disso, percebe que a razão de Poisson é uma medida resultante da resposta mecânica do material. Portanto, a implementação descrita na Seção 3 torna-se importante nesse caso, onde é imposto a condição de estado uniaxial de tensões e são obtidos os alongamentos transversais como resposta da microestrutura, tornando possível o cálculo de uma razão de Poisson homogeneizada.

Como exemplo de aplicação da metodologia multiescala descrita na Seção 3, foi realizado um estudo sobre a resposta homogeneizada da estrutura auxética ilustrada na Fig. 6, cuja discretização em elementos finitos do EVR pode ser visualizada na Fig. 7. O modelo é composto pela estrutura da Fig. 6 imersa em uma matriz com rigidez consideravelmente inferior (ver Tabela 2). O EVR possui um formato retangular com dimensões 140x54x15mm. Com isso, a estrutura é justaposta simetricamente no interior da matriz.

As respostas mecânicas de cada fase material do EVR são representadas pelo modelo de Neo-Hookean, apresentado na Eq. (17). As propriedades de cada material são listadas na Tabela 2.

Nas análises numéricas multiescala em elemento finitos realizadas nesta seção, a condição de contorno multiescala de deslocamentos lineares nos contornos foi escolhida em detrimento

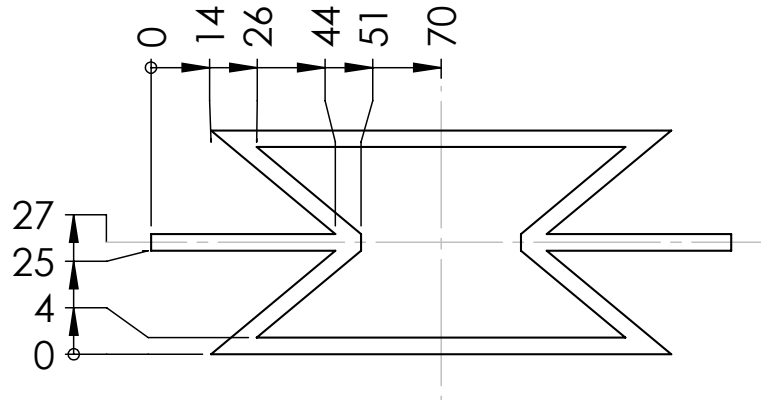


Figura 6: Desenho esquemático da estrutura utilizada (dimensões em [mm]).

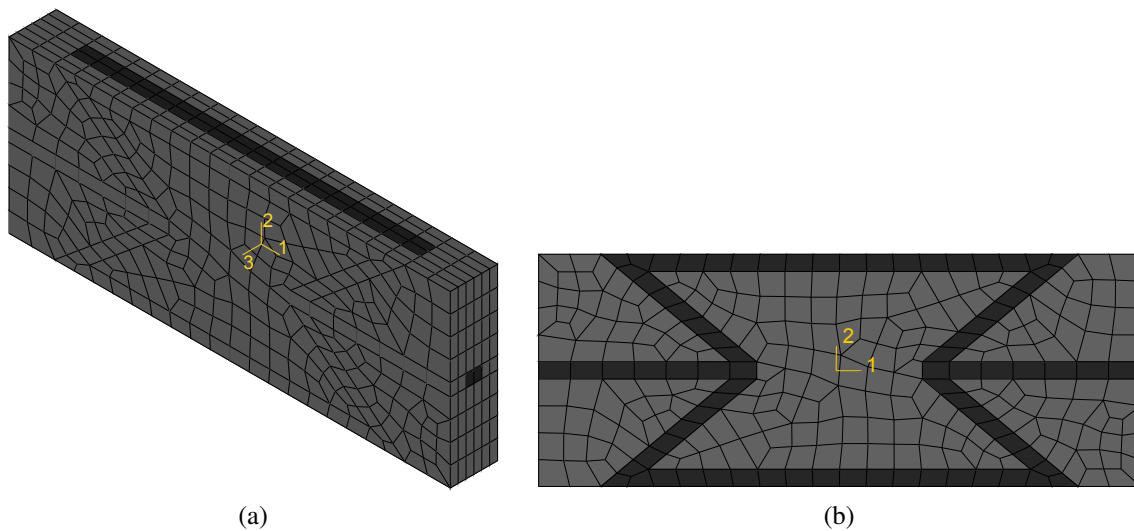


Figura 7: EVR da microestrutura auxética. (a) Vista isométrica. (b) Corte no plano 1 – 2.

Tabela 2: Propriedades dos modelos materiais utilizados nas fases microestruturais da estrutura auxética.

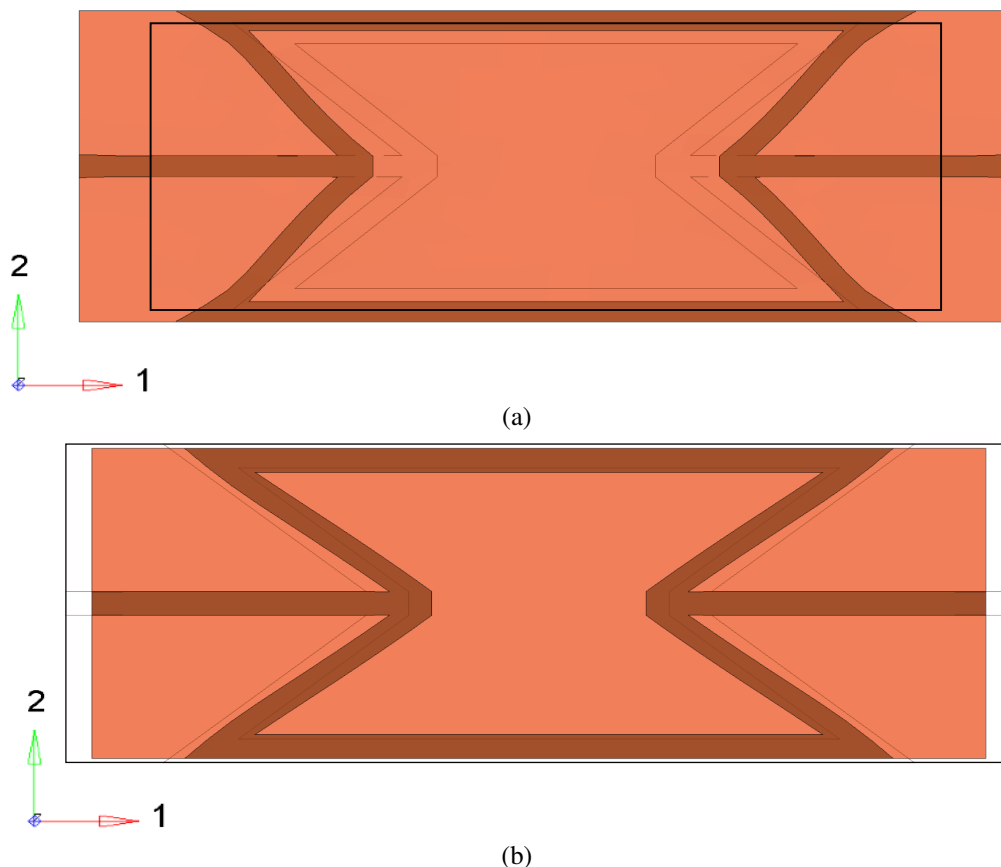
Propriedade do modelo material	Estrutura	Matriz
$\mu$ [Pa]	100000	10
$\kappa$ [Pa]	200000	12

ao modelo de Taylor empregado no exemplo anterior. Isso porque, enquanto o modelo de Taylor resulta na imposição de deslocamentos prescritos em todos os nós do EVR, o modelo de deslocamentos lineares restringe somente a cinemática nos contornos, possibilitando o livre deslocamento dos nós internos do EVR (mais detalhes na Seção 2).

Os experimentos numéricos multiescala são definidos a partir de um  $\mathbf{F}$  macroscópico diagonal. O alongamento longitudinal  $\lambda_{11}$  é imposto, já os alongamentos transversais  $\lambda_{22}$  e  $\lambda_{33}$ , são calculados de modo que a microestrutura apresente tensões transversais homogêneas nulas, de acordo com o apresentado na Eq. (10).

Foram simulados dois experimentos numéricos: a) um caso de tração, em que é aplicado um carregamento linear que varia  $\lambda_{11}$  de 1 à 1.18; b) um caso de compressão, em que é aplicado um carregamento linear, variando  $\lambda_{11}$  de 1 à 0.945.

Na Fig. 8 são apresentadas as microestruturas indeformada e deformada de ambos os experimentos numéricos simulados. Pode-se notar que na Fig. 8a, a qual representa o caso de tração, a microestrutura se expande nas direções 1 e 2. Já na Fig. 8b, que representa o caso sob compressão, a microestrutura se contrai nas direções 1 e 2. Dessa forma percebe-se que um material constituído dessa microestrutura apresentará razão de Poisson negativa.

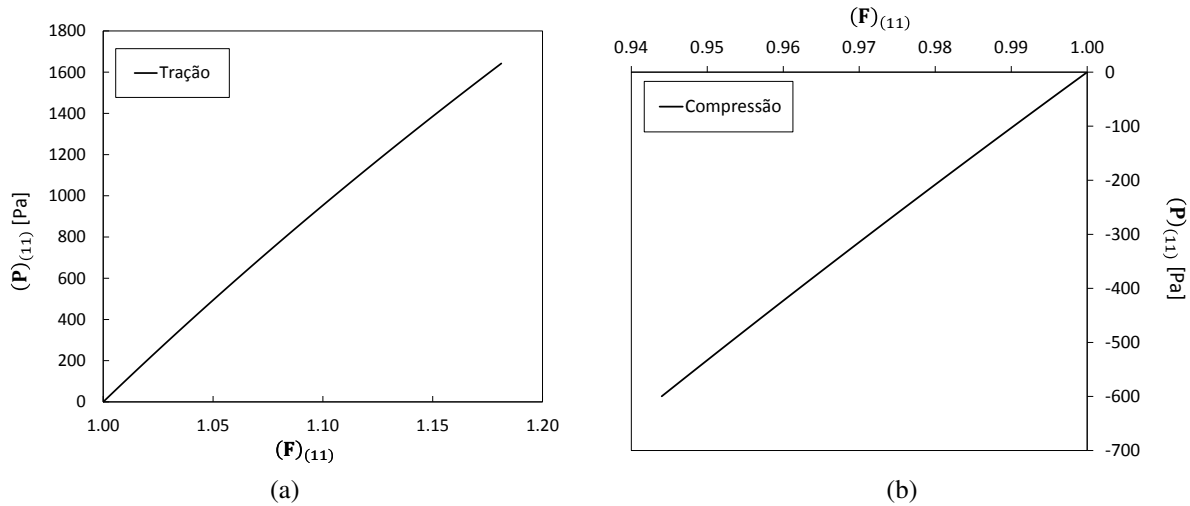


**Figura 8: Comparação dos EVRs indeformados (arestas em preto) e deformados. (a) Experimento numérico de tração (a) Experimento numérico de compressão.**

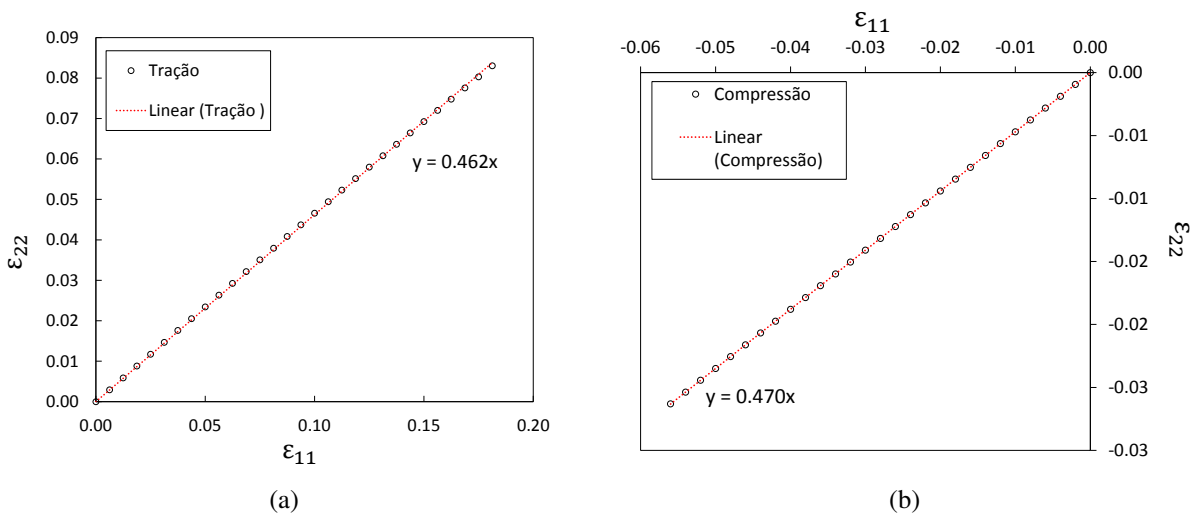
Na Fig. 9 é apresentada a relação entre a componente  $P_{11}$  do primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhof homogeneizado e o alongamento longitudinal homogeneizado. Pode-se observar que as respostas homogeneizadas das curvas tensão-alongamento apresentam uma relação quase linear, porém a microestrutura está sujeita a deformações finitas (ver Fig. 8).

Na Fig. 10 são apresentados os resultados da relação entre a deformação de engenharia homogeneizada transversal e longitudinal. No caso de se ter um gradiente de deformações diagonal, as deformações de engenharia  $\varepsilon_{11}$  e  $\varepsilon_{22}$  são calculadas por  $\varepsilon_{(\cdot)} = \lambda_{(\cdot)} - 1$ .

Nestes gráficos percebe-se que a deformação de engenharia homogeneizada transversal apresenta um comportamento quase linear em relação a deformação de engenharia homogeneizada longitudinal, verificado em mais detalhes pelo ajuste de curva linear. Desse ajuste de



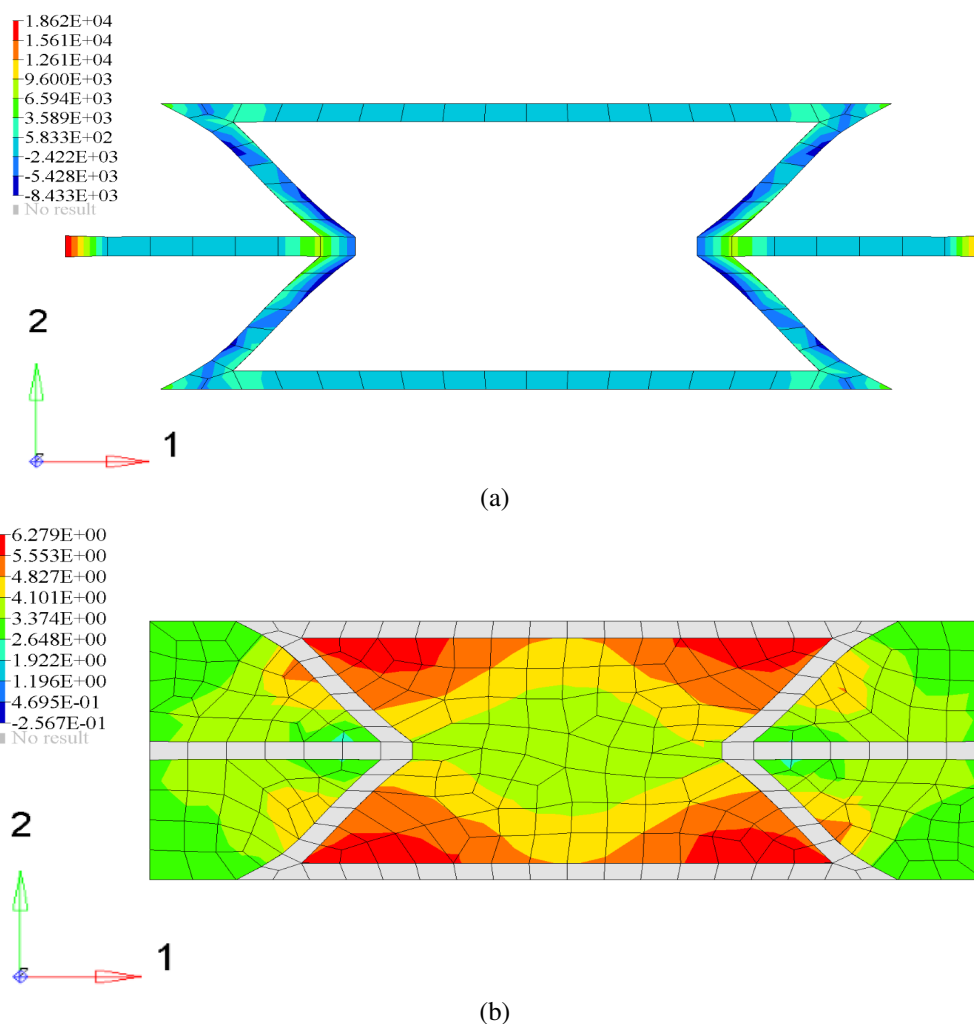
**Figura 9: Resultados numéricos da componente de tensão de Piola-Kirchhoff homogeneizado  $P_{11}$  por alongamento longitudinal homogeneizado para o EVR auxético. (a) Experimento numérico de tração (b) Experimento numérico de compressão.**



**Figura 10: Resultados numéricos de deformação de engenharia homogeneizada transversal por longitudinal para o EVR auxético. (a) Experimento numérico de tração (b) Experimento numérico de compressão.**

curva, é possível estimar a razão de Poisson macroscópica (homogeneizada) do material através do coeficiente angular dos ajustes lineares. Como esperado, a resposta macroscópica do material apresenta a razão de Poisson negativa, resultando nos valores de  $-0.462$  sob tração e de  $-0.47$  sob compressão.

Na Fig. 11 são apresentados os campos de tensões transversais (componente 22 do tensor tensão de Cauchy) no instante de máximo alongamento macroscópico para o ensaio de tração uniaxial (Fig. 8b). A partir desses resultados enfatiza-se que mesmo sob um estado macroscópico uniaxial de tensões, onde as tensões transversais homogeneizadas são nulas, nota-se que o campo microscópico das tensões transversais do EVR não é necessariamente nulo.



**Figura 11:** Campos de tensões transversais (componente 22 do tensor tensão de Cauchy) do EVR da Fig. 7 sob condição de tração uniaxial macroscópica. (a) Campo de tensões da estrutura auxética. (b) Campo de tensões da matriz.

## 5 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma metodologia para consideração de estado uniaxial de tensões a partir de experimentos numéricos utilizando técnicas de homogeneização em deformações finitas. A estratégia implementada consiste na aplicação de uma rotina de Newton-Raphson que visa obter os alongamentos transversais macroscópicos (homogeneizados) a fim de garantir a condição de tensões homogeneizadas transversais nulas.

Essa metodologia foi implementada em um código computacional laboratorial e validada utilizando o modelo multiescala de Taylor, onde as respostas homogeneizadas das curvas tensão-alongamento de um EVR proposto foram comparadas com os resultados de um modelo analítico-numérico.

Através da análise multiescala de um material com comportamento auxético (razão de Poisson negativo), demonstrou-se a aplicabilidade da metodologia multiescala proposta em casos onde é necessário garantir a condição de estado uniaxial de tensões homogeneizadas para estimar a resposta macroscópica resultante do comportamento intrínseco do material. Nesse

exemplo foi empregado o modelo multiescala de deslocamentos lineares nos contornos, possibilitando o livre deslocamento dos nós internos do EVR, condição essencial para avaliação do comportamento auxético da microestrutura. Vale lembrar que outras condições de contorno microestruturais, consistentes com a teoria multiescala, podem ser empregadas em conjunto com a metodologia proposta neste trabalho.

Os desenvolvimentos apresentados neste manuscrito visam trabalhos futuros relacionados à investigações numéricas multiescala de tecidos biológicos. Nesse caso, o objetivo é estudar os comportamentos micromecânicos e homogeneizados dos materiais quando submetidos à experimentos de tração uniaxial.

## **AGRADECIMENTOS**

Os autores agradecem à "Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES" e ao "Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq" pelo apoio financeiro a esta pesquisa.

## **REFERÊNCIAS**

- Bonet, J. & Wood, R. D., 2008. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press, New York, USA, 2 ed.
- Calvo, B., Ramírez, A., Alonso, A., Grasa, J., Soteras, F., Osta, R., & Muñoz, M., 2010. Passive nonlinear elastic behaviour of skeletal muscle: Experimental results and model formulation. *Journal of Biomechanics*, vol. 43, pp. 318–325.
- Cheng, V. W. T. & Screen, H. R. C., 2007. The micro-structural strain response of tendon. *Journal of Biomechanical Engineering*.
- de Souza Neto, E. A., Blanco, P. J., Sánchez, P. J., & Feijóo, R. A., 2015. An RVE-based multiscale theory of solids with micro-scale inertia and body force effects. *Mechanics of Materials*, vol. 80, pp. 136–144.
- de Souza Neto, E. A. & Feijóo, R. A., 2006. Variational Foundations of Multi-Scale Constitutive Models of Solid : Small and Large Strain Kinematical Formulation.
- Gurtin, M., Fried, E., & Anand, L., 2010. *The mechanics and thermodynamics of continua*.
- Holzappel, G., 2000. *Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering*. John Wiley & Sons, Chichester.
- Jankowska, M. A., Bartkowiak-Jowska, M., & Bedzinski, R., 2015. Experimental and constitutive modeling approaches for a study of biomechanical properties of human coronary arteries. *Journal of The Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, vol. 50, pp. 1–12.
- Karimi, A., Faturechi, R., Navidbakhsh, M., & Hashemi, S. A., 2014. A nonlinear hyperelastic behavior to identify the mechanical properties of rat skin under uniaxial loading. *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*, vol. 14, pp. 14.
- Lakes, R. S., 2017. Negative-Poisson's-Ratio materials: Auxetic Solids. *Annual Review of Materials Research*, vol. 47, pp. 63–81.

- Li, D., Yin, J., Dong, L., & Lakes, R. S., 2016. Numerical analysis on mechanical behaviors of hierarchical cellular structures with negative Poisson's ratio. *Smart Materials and Structures*, vol. 26, pp. 7.
- Reese, S. P. & Weiss, J. A., 2013. Tendon Fascicles Exhibit a Linear Correlation Between Poisson's Ratio and Force During Uniaxial Stress Relaxation. *Journal of Biomechanical Engineering*.
- Rodeo, S. A., Voigt, C., Ma, R., Solic, J., Stasiak, M., Ju, X. El-Amin, S., & Deng, X., 2016. Use of a new model allowing controlled uniaxial loading to evaluate tendon healing in a bone tunnel. *Journal of Orthopedic Research*, pp. 852–859.
- Sparavigna, A. C., 2014. Paper-based Metamaterials: Honeycomb and Auxetic Structures. *International Journal of Sciences*, vol. 3, pp. 22–25.