

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÃO DO
MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO (MLGFM)
PARA PROBLEMAS DO MEIO CONTÍNUO

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE
DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA

RENATO BARBIERI

FLORIANÓPOLIS, SETEMBRO DE 1992

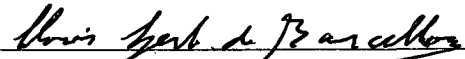
DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÃO DO MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN
LOCAL MODIFICADO (MLGFM) PARA PROBLEMAS DO MEIO CONTÍNUO

RENATO BARBIERI

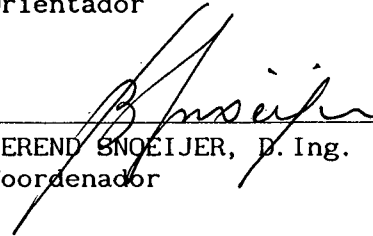
ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

DOUTOR EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO SÓLIDOS, APROVADA
EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA.



CLOVIS SPÊRB DE BARCELLOS, Ph.D.
Orientador

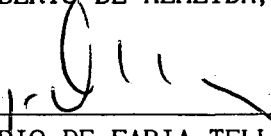


BEREND SNOEIJER, D. Ing.
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:



CARLOS ALBERTO DE ALMEIDA, Ph.D.



JOSE CLAUDIO DE FARIA TELLES, Ph.D.



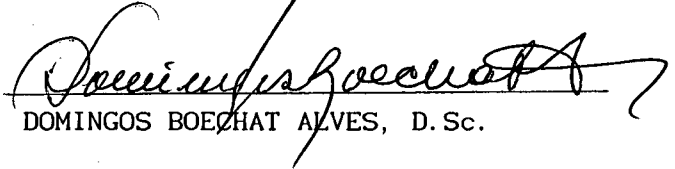
LUÍZ HENRY MONKEN E SILVA, D. Eng.



CLOVIS SPÊRB DE BARCELLOS, Ph.D.



CARLOS ALBERTO DE CAMPOS SELKE, Ph.D.



DOMINGOS BOECHAT ALVES, D. Sc.

Para Luciana.

AGRADECIMENTOS

Ao sistema FEJ/UEDESC/ACAFE/CAPES pelo apoio financeiro durante a realização deste trabalho.

Agradecimento especial ao Prof. Clovis Sperb de Barcellos que não poupou esforços para o desenvolvimento e aprimoramento desta tese.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

Origens do Método da Função de Green Local Modificado	1
---	---

CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA E FORMALISMO DO MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO (MLGFM)

Introdução	6
O Problema Abstrato de Valor no Contorno	7
Formulação Abstrata do MLGFM	14
Discretização do Domínio e do Contorno	22
Aproximação Numérica	23
Força de Corpo e/ou Reações Generalizadas Concentradas	25
Aproximações da Projeções da Função de Green	27
Determinação das Matrizes A, B, \dots, F	31
Como Selecionar as Constantes k_i 's	32
Subregiões	33
Conclusões	35
Referências Bibliográficas	36

CAPÍTULO 3 - O MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO (MLGFM) APLICADO A PROBLEMAS DE POTENCIAL

Introdução	38
Formalismo do MLGFM para os Problemas de Potencial	39
Sistema Final de Equações	49
Aplicações	51
Conclusões	101
Referências Bibliográficas	102

CAPÍTULO 4 - DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÃO DO MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO (MLGFM) PARA A ELASTOESTÁTICA

Introdução	105
Relações Clássicas da Elastoestática	106
Formalismo do MLGFM para a Elastoestática	109
Aproximação das Projeções da Função de Green	113
Equações Finais	120
Matrizes A, B, \dots, F	121
Aplicações	122
Conclusões	139
Referências Bibliográficas	140

CAPITULO 5 - DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÃO DO MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO (MLGFM) PARA A PLACA DE MINDLIN

Introdução	142
Modelo da Placa de Mindlin	144
Formalismo do MLGFM para a Placa de Mindlin	146
Aproximação das Projeções da Função de Green	150
Equações Finais	158
Matrizes A, B, \dots, F	158
Aplicações	159
Conclusões	201
Referências Bibliográficas	202

CAPITULO 6 - CONCLUSÕES FINAIS E SUGESTÕES

205

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 2

Figura	página
1-Esquema do MLGFM x Outras Técnicas Integrais	7
2-Identificação de $\mathcal{L}(\mathcal{K}, Q_0')$ e $\mathcal{L}(Q, \mathcal{K}_0')$	11
3-Identificação de \mathcal{K}_A e Q_A^*	12
4-Problema Original e Modificado	21
5-Discretização do Domínio em Subdomínios	22
6-Discretização dos Subdomínios em Elementos Finitos	22
7-Discretização dos Subdomínios em Elementos de Contorno	23
8-Interpretação Física dos Problemas 1/2 e 1*/2*	30
9-Partição do Domínio em 2 Subdomínios	32
10-Valores de k_i 's nas Interfaces dos Subdomínios	34

CAPÍTULO 3

Figura	página
1-Identificação de $\partial\Omega_u$ e $\partial\Omega_q$	41
2-Elemento Finito Bilinear (a) i-ésima Função de Interpolação de Domínio (b) j-ésima Função de Interpolação de Contorno	42
3-Funções de Interpolação Globais de Domínio (a) Funções de Interpolação Globais de Contorno (b).	43
4-Elementos Usados na Análise Bi-Dimensional	51
5-Elementos Usados na Análise Tri-Dimensional	52
6-Domínio e Discretização do Domínio e Contorno	53
7-Domínio (a) e Discretização Utilizada	54
8-Erro % no Potencial	55
9-Domínio (a) Condições de Contorno (b) Discretização (c)	56
10-Erro % Comparativo MLGFM x DBEM x Galerkin-BEM	57
11-Isopotencial Exato (a) Erro % com Elemento qu16po	57
12a-Erro % no Potencial em $x=0$	58
12b-Erro % no Fluxo em $x=3$	58
13-Erro % no Potencial para o qu09po	59
14a-Erro % no Potencial para $x=0$	60

14b-Erro % no Fluxo em $x=3$	60
15-Erro % no Potencial para o qu_04po	61
16a-Erro % no Potencial em $x=0$	61
16b-Erro % no Fluxo em $x=3$	62
17-Discretização de $1/4$ do domínio	65
18-Convergência h e η para o MLGFM na norma $\ e\ _E^{ER}$	66
19a-Convergência h para $u(0,0)$	67
19b-Convergência η para $u(0,0)$	68
20a-Convergência h para $u_n(1,0)$	68
20b-Convergência η para $u_n(1,0)$	69
21-Contorno com Vértice Típico	72
22-Discretização do Contorno. Ângulos Internos.	72
23-Condições de Contorno e Malha de Elementos Finitos. Detalhe da Malha de Elementos Finitos Perto da Singularidade	73
24a-Erro % no Potencial ao Longo do Lado Crítico	74
24b-Erro % no Potencial no Domínio	74
25-Linhas de isopotencial	74
26-Fluxo ao Longo do Lado Crítico	75
27-Erro % no Potencial ao Redor da Singularidade	76
28-Erro % no Potencial ao Longo do Lado Crítico	76
29-Domínio com Condições de Contorno (a) Isolinhas (b)	77
30-Domínio em L (a), Condições de Contorno (b) e Discretização com Malha Grosseira (c)	78
31-Erro $\ e\ _E^{ER} \times h$	79
32-Fluxo no Lado Crítico	80
33-Definição do Domínio, Condições de Contorno e Malha Auxiliar de Elementos Finitos	81
34-Isopotencial. Jaworski (a) e MLGFM (b)	82
35-Isopotencial. FEM (a), MLGFM (b) e Vista 3D (c)	83
36-Characterização do Problema	85
37-Condições de Contorno para a Função Potencial e Função Corrente	85
38-Malha de Elementos Finitos. FEM (a) MLGFM (b)	86
39-Isolinhas da Função Potencial e Velocidade Acima do cilindro	86
40-Isolinhas da Função Corrente. FEM (a) MLGFM (b)	87
41-Definição do Domínio e Condições de Contorno	89
42-Definição do Problema (a). Malha de Elementos Finitos-Chung (b). Malha de Elementos Finitos-MLGFM (c) e Malha de Elementos de Contorno-MLGFM (d)	90

43-Função Potencial-MLGFM (a), Função Corrente-FEM (b), Perfil de Velocidade-MLGFM (c) e FEM (d)	90
44-Sistema de Referência e Isolinhas da Função Tensão de Prandtl	93
45-Malha Auxiliar de Elementos Finitos e Isolinhas do Er- ro %	93
46-Discretização do Domínio e Contorno	94
47-Discretização do Domínio. T128 (a) e T16(b)	95
48-Isopotencial. T128 (a) e T16 (b)	96
49-MLGFM-HRZ. Fluxo ao Longo do Lado Crítico	99
50-Discretização do domínio	100

CAPÍTULO 4

Figura	página
1-Condições de Contorno Mixtas	109
2-Condições de Contorno	111
3-Funções de Interpolação Globais de Contorno	113
4-Testes Propostos por Mc Neal para Elementos Finitos	122
5-Sistema de Referência, Condições de Contorno e malha Auxiliar de Elementos Finitos e de Elementos de Con- torno	122
6-Malha Auxiliar de Elementos Finitos e Malha de Con- torno	124
7-Definição do Problema	126
8-Malha Auxiliar de Elementos Finitos e de Elementos de contorno	127
9-Discretização do Domínio e Contorno com Elementos Qua- dráticos	128
10-Tubo de Parede Espessa com Pressão Interna. Malha de Elementos Finitos e de Elementos de Contorno	129
11-Definição do Problema e Condições de Contorno	130
12-Discretizações do Problema para o FEM	131
13-Discretizações para o MLGFM	131
14-Fator de Concentração de Tensões	131
15-Characterização do Problema e Condições de Contorno	132
16-Malha Auxiliar de Elementos Finitos e de Elementos de Contorno	133
17a-Geometria Deformada	134
17b-Fator de Intensidade K_I	134

18-Placa Circular com Condições de Contorno	135
19-Discretizações do Domínio e Contorno	136
20-Discretização da Casca e Contorno	137
21-Discretização do Domínio e Contorno	139

CAPÍTULO 5

Figura	página
1-Superfície Média, Deslocamentos e Rotações Positivos para Placa	144
2-Elementos Finitos Utilizados	160
3-Domínio e Discretizações utilizadas com o qu25pl	161
4-Domínio e Discretizações utilizadas com o qu16pl	163
5-Discretizações do Domínio com o qu09pl	164
6a-Convergência κ para o deslocamento central, w_a	166
6b-Convergência κ para o momento normal no centro da placa, M_a	167
6c-Convergência κ para o momento normal no centro do lado, M_a	167
7a-Força Cortante ao Longo do Lado (qu25pl)	169
7b-Momento Normal ao Longo do Lado (qu25pl)	169
7c-Força Cortante ao Longo do Lado (qu16pl)	170
7d-Momento Normal ao Longo do Lado (qu16pl)	170
7e-Força Cortante ao Longo do Lado (qu09pl)	171
7f-Momento Normal ao Longo do Lado (qu09pl)	171
8-Malha Projetada para Captar a Variação de Q perto do Canto	172
9a-Força Cortante ao Longo do Lado	173
9b-Momento Normal ao Longo do Lado	173
10-Domínio e Discretização Utilizada	174
10a-Momento Normal ao Longo do Lado, $a/\kappa=40$	176
10b-Momento Normal ao Longo do Lado, $a/\kappa=100$	177
10c-Momento Normal ao Longo do Lado, $a/\kappa=250$	177
10d-Momento Normal ao Longo do Lado, $a/\kappa=500$	178
11a-Esforço Cisalhante ao Longo do Lado, $a/\kappa=40$	178
11b-Esforço Cisalhante ao Longo do Lado, $a/\kappa=100$	179
11c-Esforço Cisalhante ao Longo do Lado, $a/\kappa=250$	179
11d-Esforço Cisalhante ao Longo do Lado, $a/\kappa=500$	180
12a-Convergência κ para o deslocamento central	185

12b-Convergência h para o momento normal no canto da placa	186
12c-Convergência h para o momento normal no centro da placa	186
12d-Convergência h para a força cisalhante no centro do lado	187
13-Viga em Análise	190
14-Discretizações da Viga	190
15-Discretizações do Domínio	194
16-Discretizações do Domínio e Contorno	196
17-Esforço Cortante e Momento no Engaste para o qu09pl	197
18-Esforço Cortante e Momento no Engaste para o qu25pl	198
19-Placa de Morley Engastada Discretizada com Malha Homogênea	200
20-Comparativo MLGFM (qu09pl) × FEM (Heterosis)	201

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 3

Tabela	página
1-Solução com e sem nós duplos	53
2-Influência de k_0 no fluxo e potencial	53
3-Fluxos. Solução Analítica \times MLGFM	55
4-MLGFM: Erro na Energia $\ e\ _E^{ER}$	64
5-MLGFM: Erro % em $u(0,0)$	65
6-MLGFM: Erro % em $u_n(1,0)$	65
7-FEM: Erro % em $u(0,0)$	65
8-FEM: Erro $\ e\ _E^{ER}$	65
9-Taxas de convergência Experimentais para o MLGFM	67
10-Resultados do MLGFM e DBEM	78
11-Potencial. Comparação de Resultados	89
12-Resultados Comparativos para o MLGFM	94
13-Resultados Comparativos para o MLGFM	95
14-Resultados Comparativos para o MLGFM	96
15-Resultados Comparativos: MLGFM-Conv. \times MLGFM-HRZ	98
16-Resultados Comparativos: MLGFM-Conv. \times MLGFM-HRZ	98
17-Potencial e Fluxo: Analítico \times MLGFM	100

CAPÍTULO 4

Tabela	página
1-Deslocamentos $v(0,y)$	124
2-Tensões $\sigma_x(L,y)$	124
3-Deslocamentos $v(0,y)$	124
4-Tensões $\sigma_x(L,y)$	125
5-Tensões normais no Engaste	125
6-Deslocamento Radial no Raio Médio e Extremidade Livre	127
7-Tensões Normais no Engaste	127
8-Deslocamento Radial no Raio Médio e Extremidade Livre	127
9-Tensões Normais ao Longo do Raio	129

10-Deslocamentos Radiais	129
11-Deslocamento Central para Placa Engastada	137
12-Deslocamento Central para Placa Simplesmente Apoiada	137
13-Tensões Radiais no Engaste	137
14-Deslocamentos Radiais	138
15-Tensões Normais ao Longo do Raio	138
16-Deslocamentos Radiais	139
17-Tensões Normais ao Longo do Raio	139

CAPÍTULO 5

Tabela	página
1-Deslocamento Central	161
2-Momento Central	162
3-Momento Normal no Centro do Lado	162
4-Esforço Cortante no Centro do Lado	162
5-Deslocamento Central	163
6-Momento Central	163
7-Momento Normal no Centro do Lado	164
8-Esforço Cortante no Centro do Lado	164
9-Deslocamento Central	165
10-Momento Central	165
11-Momento Normal no Centro do Lado	165
12-Esforço Cortante no Centro do Lado	166
13-Deslocamento Central	168
14-Deslocamento Central	175
15-Momento Central	175
16-Momento Normal no Centro do Lado	175
17-Esforço Cortante no Centro do Lado	176
18-Deslocamento Central	181
19-Momento Central	181
20-Momento Normal no Centro do Lado	181
21-Esforço Cortante no Centro do Lado	181
22-Deslocamento Central	182
23-Momento Central	182
24-Momento Normal no Centro do Lado	182
25-Esforço Cortante no Centro do Lado	183
26-Deslocamento Central	183

27-Momento Central	183
28-Momento Normal no Centro do Lado	184
29-Esforço Cortante no Centro do Lado	184
30-Deslocamento Central	185
31-Deslocamento Central	188
32-Momento Central	188
33-Momento Normal no Centro do Lado	188
34-Esforço Cortante no Centro do Lado	189
35-Deslocamento no Extremo da Viga	190
36-Cisalhante no Engaste	191
37-Momento Normal no Engaste	191
38-Deslocamento no Extremo da Viga	191
39-Cisalhante no Engaste	192
40-Momento Normal no Engaste	192
41-Deslocamento no Extremo da Viga	192
42-Cisalhante no Engaste	193
43-Momento Normal no Engaste	193
44-Deslocamento Central Adimensionalizado	194
45-Momento Central	194
46-Momento no Canto da Placa	194
47-Esforço Cisalhante no Centro do Lado	195
48-Deslocamento Central Adimensionalizado	196
49-Deslocamento Central Adimensionalizado para $R/\lambda=100$ e malha com 12 elementos	199
50-Comparação: qu04pl x qu25pl para o mesmo número de nós	200

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathcal{H}^m	Espaço de Hilbert de Ordem "m"
$(\mathcal{H}^m)'$	Dual Topológico do Espaço de Hilbert de Ordem "m"
\mathcal{A}	Operador Diferencial
\mathcal{A}^*	Operador Ajunto Formal de \mathcal{A}
$B(\cdot, \cdot)$	Forma Bilinear
$\text{Ker}(\cdot)$	Núcleo da coleção de Operadores $\gamma_j(\cdot)$, ($j=1,2,\dots$)
$\gamma_j(\cdot)$	Operador Traço, $j=1,2,\dots,m-1$ onde "m" indica a ordem do espaço de Hilbert.
$\ \cdot\ _{\mathcal{H}^m}$	Norma no espaço de Hilbert de ordem "m"
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$	Produto dual em $\mathcal{H} \times \mathcal{H}'$
$(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$	Produto interno no espaço de Hilbert \mathcal{H}
γ	Operador de Dirichlet de \mathcal{A}
γ^*	Operador de Dirichlet para o problema adjunto, \mathcal{A}^*
\mathcal{N}	Operador de Neumann para \mathcal{A}
\mathcal{N}^*	Operador de Neumann para o operador adjunto, \mathcal{A}^*
\mathcal{N}'	Operador Adicional
$\inf(\cdot)$	Ínfimo de (\cdot)
$\sup(\cdot)$	Supremo de (\cdot)
$\delta(\cdot, \cdot)$	Distribuição Delta de Dirac
$(\cdot)^t$	Transposto de (\cdot)
$[\Phi]$	Conjunto das Funções de Interpolação de Contorno
$[\Psi]$	Conjunto das Funções de Interpolação de Domínio
A, B, \dots, F	Matrizes
$G(\cdot, \cdot)$	Solução Fundamental e/ou Função de Green
$Gd(\cdot)$	Projeção da Função de Green na Base do Espaço de Elementos Finitos, $\mathcal{V}(h, \eta)$
$Gc(\cdot)$	Projeção da Função de Green na Base do Espaço de Elementos de Contorno
\mathbb{G}^{DP}	Valores nodais de $Gd(\cdot)$ no domínio
\mathbb{G}^{DP}	Valores nodais de $Gd(\cdot)$ no contorno
\mathbb{G}^{CP}	Valores nodais de $Gc(\cdot)$ no domínio
\mathbb{G}^{CP}	Valores nodais de $Gc(\cdot)$ no contorno
h	Maior diâmetro externo dentre todos os elementos da malha de elementos finitos
η	Grau do polinômio aproximador do elemento finito

$J(\cdot)$	Funcional que depende de (\cdot)
Ω	Domínio aberto e limitado
$\partial\Omega$	Contorno de Ω
$\bar{\Omega}$	Fechamento (closure) de Ω
$\partial\bar{\Omega}$	Fechamento de $\partial\Omega$
$(\cdot)_{,x}$	Derivada parcial com relação a "x" de (\cdot)
$(\cdot)_{,n}$	Derivada normal de (\cdot)

RESUMO

Este trabalho é dividido em quatro partes distintas: a formulação matemática e o formalismo do Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM); o estudo de problemas de potenciais; da elastoestática e da placa de Mindlin.

A formulação matemática e o formalismo do MLGFM são obtidos com uso de relações de reciprocidade generalizadas e estabelecendo condições de contorno do tipo Cauchy para determinar uma Função de Green para o problema. O procedimento adotado para impor estas condições de contorno para o problema adjunto é mostrado com detalhes, juntamente com a interpretação física das hipóteses adotadas. Finalmente, usando técnicas residuais, todas as matrizes resultantes das discretizações do domínio e/ou contorno são calculadas sem o conhecimento explícito da Função de Green e, devido a este fato, o MLGFM pode ampliar bastante o campo de aplicações do Método de Elementos de Contorno.

Em seguida, o MLGFM é aplicado com muito sucesso, mesmo com malhas extremamente grosseiras, para resolver diversos problemas de potencial. A superconvergência dos valores nodais (potencial e fluxo) é notória para todas as aplicações e, mesmo para problemas singulares, a representação do fluxo ao redor da singularidade é muito boa. Destacam-se as aplicações para: problemas axissimétricos, tridimensionais, singulares e com propriedades físicas não homogêneas. Taxas de convergência experimentais para as versões h e η revelam boa proximidade com as do Método de Elementos Finitos (FEM) para a norma da energia do erro.

Problemas da Elastoestática são resolvidos pela primeira vez com o MLGFM e a superconvergência nodal de deslocamentos e esforços também é marcante para os elementos de ordem maior ou igual a dois. Mesmo com malhas grosseiras, a concentração de tensões é perfeitamente captada e a comparação de resultados com o FEM mostra-se favorável ao MLGFM. Novamente, problemas singulares (fratura elástica) são estudados e o fator de intensidade de tensões é obtido com boa precisão. Outro fato estudado é a sensibilidade dos elementos com relação à distorsão e os resultados apontam os elementos de ordem superior como os menos sensíveis.

Finalmente, a última etapa deste trabalho é destinada ao estudo da placa de Mindlin com o MLGFM. Mesmo usando elementos finitos com formulação de deslocamento para aproximar as projeções da Função de Green, o fenômeno do travamento não foi verificado para nenhum dos elementos. A sensibilidade com relação à distorção dos elementos é bastante investigada e, para deslocamentos, todos os elementos apresentam bons resultados. Para esforços (cisalhamento e momento), elementos de ordem superior são menos sensíveis à distorção. Características de superconvergência nodal de deslocamentos e esforços também estão presentes e as comparações com elementos finitos mostram-se bastante favoráveis ao MLGFM.

ABSTRACT

This work can be partitioned in four distinct parts: the Modified Local Green's Function Method (MLGFM) mathematical formulation and formalism, the MLGFM applications for potential, elastostatics and Mindlin's plate problems.

The MLGFM mathematical formulation and formalism are obtained from generalized reciprocity relationships and additional Cauchy boundary conditions are used for estimating the Green's Function of the adjoint problem. Detailed discussion and physical interpretation of these additional boundary conditions are included. Finally, with residual techniques, the matrices (after discretization) are calculated without the Green's Function explicit knowledge and, due to this fact, the MLGFM extend the Boundary Element Method (BEM) applications.

Here, the first MLGFM practical applications are potential problem analysis. Very coarse meshes are used with success to solve several problems. The nodal superconvergence (potential and flux) are evident in every application and, even for singular problems, the flux representation near the singularity are very closed to the correct one. The most significant applications are: axisymmetric, tridimensional, singular and variable physical properties problems. Experimental rates of convergence (h and n) in the relative error norm are calculated for the MLGFM.

The first elastostatic problems solution with the MLGFM are presented and characterized by nodal displacement and force superconvergence for all elements. Even with coarse meshes the stress concentration are perfectly represented by "smooth" solutions. Singular problems (elastic fracture) are modeled with the MLGFM and the results for the stress intensity factor, K_I , are obtained with good precision. The higher order elements are less sensitive to mesh distortion.

The Mindlin's plate problem is the last topic of this work. Even with finite elements (used to estimate the Local Green's Function projections) based on displacement formulation, the locking phenomenon is absent in all elements. The mesh distortion sensitivity is investigated and, for displacement, all

elements presents good results. As far as forces are concerned, moments and shear, the higher order elements are less sensitive to mesh distortion and the nodal superconvergence characteristics are verified.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO.

1.1-ORIGENS DO MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO (MLGFM)

O Método da Função de Green Local Modificado, MLGFM, surgiu no final da década de 80, com a técnica utilizada por Barcellos & Silva, 1987; e Silva, 1988; de aproximar a Função de Green localmente usando o Método de Elementos Finitos, (FEM), como método residual para cálculo dessa função. Os trabalhos anteriores de Burns, 1975, Horak, 1980, Dorning, 1981, e Horak & Dorning, 1981, com o Método da Função de Green Local utilizam integração direcional desacoplada para obter uma aproximação da Função de Green local, comprometendo o resultado final da análise.

A atual concepção do MLGFM é a de explorar as principais vantagens de três outras técnicas: o Método de Elementos Finitos, dos Elementos de Contorno e da Função de Green.

De posse do operador adjunto do problema, o Método de Elementos Finitos é utilizado com o objetivo de obter valores nodais das projeções da Função de Green na base do espaço de elementos finitos (base do domínio e contorno). Esta é uma das etapas fundamentais do MLGFM, pois permite o cálculo aproximado da Função de Green somente com o conhecimento do operador adjunto do

problema.

Após determinar as projeções da Função de Green, o Método dos Elementos de Contorno de Galerkin, Galerkin-BEM, é utilizado para resolver o problema no contorno. Vale a pena ressaltar que todas as integrais oriundas da discretização do domínio/contorno são suficientemente regulares, permitindo integrações numéricas com processos convencionais.

1.2-OBJETIVOS

O conteúdo deste trabalho é dividido em 4 partes distintas: o formalismo matemático do método, o desenvolvimento e aplicação do método para problemas de potencial, problemas da elasticidade bidimensional e análise de placas com teorias de primeira ordem.

1.2.1.-Formalismo Matemático do MLGFM.

No Cap.2 a formulação abstrata do MLGFM é tratada com detalhes, partindo de uma relação de reciprocidade genérica e mostrando que esta nova técnica numérica pode ser entendida como sendo uma extensão do Galerkin-BEM.

São discutidas as condições de existência e unicidade da solução e todo o formalismo para implementação numérica. Especial ênfase é dada para a interpretação física de cada um dos problemas que surgem no desenvolvimento do método.

1.2.2-Problemas de Potencial.

Os problemas de potenciais podem ser citados também como marco inicial do surgimento do MLGFM. Barcellos & Silva, 1987, resolveram com eficiência o problema de membranas elásticas com o MLGFM usando elementos quadráticos de 8 nós para as aproximações de domínio com o FEM. Ótimos resultados de potencial e fluxo foram observados com malhas grosseiras. É este fato, juntamente com a possibilidade de aproximar a Função de Green para situações onde uma solução fundamental não é conhecida, que motiva-

ram o desenvolvimento deste trabalho.

No Cap.3 é mostrado com detalhes a formulação do MLGFM para problemas de potencial. São desenvolvidos diversos tipos de elementos com o objetivo de testar a qualidade de cada um deles e verificar experimentalmente a taxa de convergência η para o MLGFM.

Com relação às taxas de convergência (h e η), é natural a comparação com o FEM, devido ao caráter das aproximações da Função de Green. Em se tratando do erro medido na norma da energia, as soluções via MLGFM aparentemente apresentam taxas de convergência h bem semelhantes às do FEM, porém com superconvergência de resultados para elementos de ordem maior ou igual a 2. Características de superconvergência pontual, tanto para potencial como para fluxo, são observadas. Na medida em que o grau do polinômio aproximador (elemento finito) é elevado, excepcionais valores pontuais são obtidos.

Outras aplicações interessantes, estudadas no Cap.3, são os problemas de materiais não homogêneos com características do meio físico variáveis, problemas singulares, axissimétricos e tridimensionais. Para os problemas não homogêneos, onde não existem soluções fundamentais, a aproximação das projeções da Função de Green é facilmente realizada com o FEM, sem comprometimento das características de convergência do método.

Os problemas singulares também são estudados com detalhes. As características de oscilação do fluxo perto da singularidade também são observadas com o MLGFM e a técnica de isolar a singularidade proposta por Szabo, 1986, e Babuška & Guo, 1988, é empregada com muita eficiência. Ótimos resultados pontuais de fluxo e potencial também são obtidos, mesmo muito perto da singularidade.

1.2.3-Elasticidade Bidimensional e Problemas Axissimétricos.

Esta é a primeira aplicação do MLGFM para problemas da Elasticidade Bidimensional/Axissimétrica. Devido a este fato, elementos lineares, quadráticos e cúbicos foram desenvolvidos com objetivo de verificar a convergência do método e selecionar os

melhores elementos.

São resolvidos problemas de Estado Plano de Tensões, Deformações e Axissimétricos com excelentes resultados. De maneira genérica, o aumento da ordem do polinômio do elemento provoca uma melhoria acentuada nos resultados.

Mesmo com malhas grosseiras, a concentração de tensões é perfeitamente captada com resultados extremamente satisfatórios quando comparados com outras técnicas numéricas. Outro aspecto interessante abordado é a determinação dos fatores de intensidade de tensão para problemas de fraturas elásticas.

1.2.4-Placa de Mindlin.

Novamente, esta é a primeira aplicação do MLGFM para problemas de flexão de placas semi-espessas/espessas. Como as aproximações da Função de Green são obtidas com o FEM, existia no início deste trabalho, uma certa expectativa com relação ao fenômeno do travamento (locking) e com relação à distorsão dos elementos. O travamento não foi detectado por nenhum dos elementos utilizados e a sensibilidade à distorsão para os deslocamentos foi bem pouco verificada para elementos de baixa ordem. Com relação aos esforços, força cortante e momentos, a sensibilidade à distorsão dos elementos é mais significativa e pronunciada para os elementos de baixa ordem. Entretanto, para o elemento de ordem quatro, esta sensibilidade só é significativa para placas muito finas.

Mais uma vez, a superconvergência nodal de deslocamento, momentos e esforços cortantes é notória. São efetuadas diversas comparações com os mais modernos elementos finitos e os resultados são bastante favoráveis às formulações com o MLGFM e elementos de ordem superior.

1.3-REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- Babuška, I. & Guo, B.Q. (1988).
The h-p Version of the Finite Element Method for Domains with Curved Boundaries. SIAM J. Num. Anal. 225, pg.837-861.

- Barcellos, C.S. e Silva, L.H.M. (1987).
Elastic Membrane Solution by a Modified Local Green's Function Method ", (Ed. Brebbia, C.A. e Venturini, W.S.) Proc. Int. Conf. on Boundary Element Technology, Comp. Mech. Publ., Southampton.
- Burns, T.J. (1975).
The Partial Current Balance Method: A Local Green's Function Technique for the Numerical Solution of Multidimensional Neutron Diffusion Problems. Urbana, University of Illinois (Ph.D. Thesis).
- Dorning, J.J. (1981).
A Review of Green's Function Methods in Computational Fluid Mechanics", Joint ANS/ENS Int. Topical Meeting on Advances in Mathematical Methods for Solution of Nuclear Engineering Problems, Munich.
- Horak, W.C. (1980).
Local Green's Function Techniques for the Solution of Heat Conduction and Incompressible Fluid Flow Problems. Urbana, University of Illinois (Ph.D. Thesis)
- Horak, W.C. & Dorning, J.J. (1981).
A Coarse-Mesh Method for Heat Flow Analysis Based Upon the Use of Locally-Defined Green's Function. In: Numerical Methods in Thermal Problems, Vol. II, Pineridge Press, Swansea, U.K. Proc. of the Second Int. Conference Held in Venice, Italy-July 1981.
- Silva, L.H.M. (1988).
Novas Formulas Integrals para Problemas da Mecanica. Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina (Ph.D. Thesis).
- Szabo, B.A. (1986).
Mesh Design for the p-Version of the Finite Element Method. Comp. Meth. Applied Mec. and Eng. 55, pg.181-197.

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA E FORMALISMO DO MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO (MLGFM).

1. INTRODUÇÃO

O Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM), foi originalmente desenvolvido por Barcellos & Silva (1987) e Silva (1988), após modificações no Método da Função de Green Local, (LGFM), usado por Horak (1980), Burns (1975) e Dorning (1981). As primeiras aplicações dessa nova técnica foram para solução de problemas de membranas, vigas e hastes. Recentemente Barbieri & Barcellos (a,b,c,1991) e Barcellos & Barbieri (1991) utilizaram este método para solução de problemas de potencial não homogêneo, potencial singular, potencial tridimensional e placa de Mindlin, com resultados extremamente satisfatórios.

A característica principal desse novo método é resolver com sucesso problemas ligados à mecânica do contínuo com o uso de vantagens de dois outros métodos largamente utilizados: o Método de Elementos Finitos (FEM) e o Método de Elementos de Contorno (BEM).

O BEM, embora seja uma técnica extremamente vantajosa para algumas situações, tem sua utilização inviabilizada para problemas onde uma solução fundamental não é conhecida na sua forma explícita. Para estes problemas, Beskos (1987) cita como futuros desenvolvimentos necessários para o BEM, o cálculo numérico da solução fundamental e/ou da função de Green com

técnicas de resíduos ponderados. Mostra-se nos itens seguintes, que é exatamente esta uma das proposições do MLGFM. A aproximação da função de Green é inegavelmente a maior contribuição desse novo método para o desenvolvimento de técnicas não convencionais do BEM.

Com relação ao FEM, o MLGFM tem a vantagem de calcular com precisão fluxos e/ou reações no contorno. Outra característica observada por Barbieri & Barcellos (c,1991) é a superconvergência de potencial e fluxo medidos na norma L^∞ . O erro no potencial (medido na norma da energia) também apresenta características de superconvergência e aparentemente preserva as "razões de convergência" da versão h do FEM. Técnicas adaptativas (h, p ou $h-p$) podem se tornar extremamente atrativas com uso do MLGFM devido a esta propriedade de superconvergência.

Um esquema simplificado das principais etapas do MLGFM é visto na Fig.1, em comparação com outros métodos integrais. Seu tratamento matemático e implementação numérica é o conteúdo dos próximos tópicos deste capítulo.

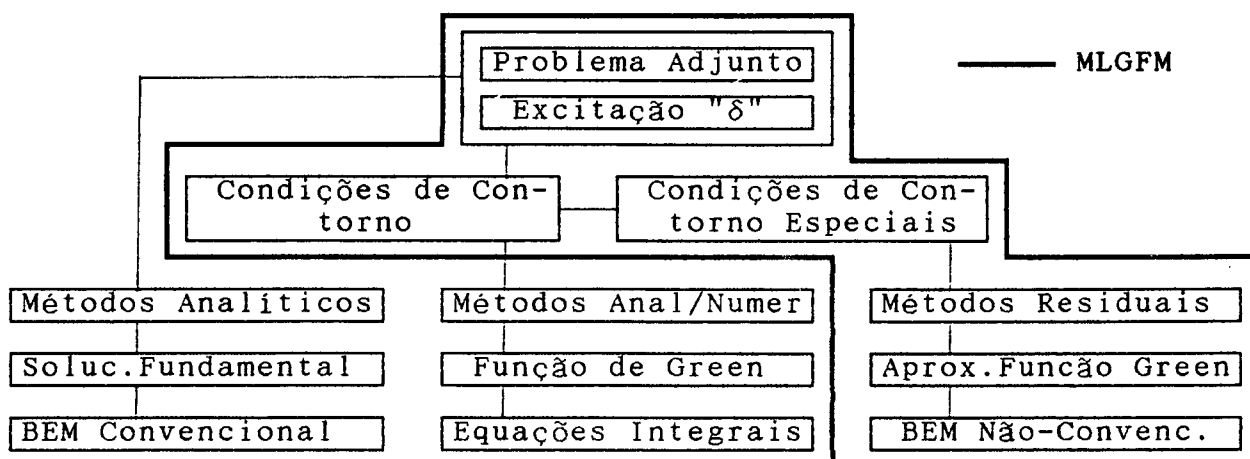


Fig.1- Esquema do MLGFM x Outras Técnicas Integrais.

2.0 PROBLEMA ABSTRATO DE VALOR NO CONTORNO

Designa-se por Ω um domínio aberto, limitado, no espaço \mathbb{R}^n , com contorno suficientemente regular $\partial\Omega$, i.é, um contorno que admite a existência do vetor normal em quase todos os pontos, ex-

ceto em conjuntos de medida nula.

Seja $u(x)$ uma função definida no espaço de Hilbert $\mathcal{H}^m(\Omega)$, i.é, $u(x) \in \mathcal{H}^m(\Omega)$. As derivadas normais de $u(x)$ no contorno $\partial\Omega(x)$ serão representadas por

$$\gamma_j u(x) = \partial^j u(x) / \partial n^j \quad \forall x \in \partial\Omega, 0 \leq j \leq m-1 \quad (2.1)$$

onde n é a normal ao contorno $\partial\Omega$ no ponto x . O operador γ_j é conhecido como "Operador Traço" e é um mapeamento linear e contínuo

$$\gamma_j : \mathcal{H}^m(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}^{m-j-1/2}(\partial\Omega) \quad (2.2)$$

onde, sem perda de generalidade, o expoente "m" pode assumir valores inteiros ou fracionais, Oden & Reddy (1976). Uma outra propriedade desse operador é:

$$\text{Ker} (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{m-1}) \equiv \mathcal{H}_0^m(\Omega) \quad (2.3)$$

onde $\text{Ker}(\cdot)$ denota o núcleo da coleção de operadores γ_j . Ainda, $\text{Ker}(\cdot)$ é denso no espaço $\mathcal{L}_2(\Omega)$.

Sejam \mathcal{H} , \mathcal{U} e $\partial\mathcal{H}$ espaços de Hilbert tais que:

$$\gamma : \mathcal{H} \rightarrow \partial\mathcal{H} \quad (2.4)$$

sendo γ o "Operador Traço". Diz-se que o espaço \mathcal{H} tem a "propriedade do traço" se satisfazer as seguintes condições:

1. \mathcal{H} estiver contido em \mathcal{U} , sendo \mathcal{U} de topologia mais fraca que \mathcal{H} ;
2. \mathcal{H} é denso em \mathcal{U} , sendo \mathcal{U} um espaço pivotal, i.é:

$$\mathcal{H} \subset \mathcal{U} \equiv \mathcal{U}' \subset \mathcal{H}' \quad (2.5)$$

- onde \mathcal{U}' e \mathcal{H}' são os espaços duais topológicos (espaço dos funcionais contínuos e lineares) de \mathcal{U} e \mathcal{H} ; e
3. Existe o mapeamento γ , tal que seu núcleo, \mathcal{H}_0 , seja denso em \mathcal{U} , i.é:

$$\begin{aligned} \text{Ker } \gamma &= \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H} \\ \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{U} &\equiv \mathcal{U}' \subset \mathcal{H}_0', \end{aligned} \quad (2.6)$$

sendo as inclusões densas e contínuas.

Considere-se agora, a forma bilinear contínua $B(\cdot, \cdot)$, definida nos espaços de Hilbert \mathcal{H} e \mathcal{Q} :

$$B(u, v) : \mathcal{H} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall u \in \mathcal{H}, v \in \mathcal{Q} \quad (2.7)$$

Como $B(\cdot, \cdot)$ é contínua, a continuidade implica na existência de um $M > 0$ tal que, para todo $u \in \mathcal{H}$ e $v \in \mathcal{Q}$:

$$|B(u, v)| \leq M \|u\|_{\mathcal{H}} \|v\|_{\mathcal{Q}} \quad (2.8)$$

onde $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$ representam as normas nos espaços de Hilbert \mathcal{H} e \mathcal{Q} , respectivamente.

Seja um $u \in \mathcal{H}$ fixo. Então, a forma bilinear $B(u, \cdot)$ define um funcional linear e contínuo $\mathcal{A}u$ em \mathcal{H} , sendo o funcional linearmente dependente da escolha de u . Este fato implica na existência de um operador $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{Q}_0')$ e $\mathcal{A}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{Q}, \mathcal{H}_0')$ ¹ \ni :

$$B(u, v) = \langle \mathcal{A}u, v \rangle_{\mathcal{Q}} \quad \forall v \in \mathcal{Q}_0 \quad (2.9)$$

$$B(u, v) = \langle \mathcal{A}^*v, u \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall u \in \mathcal{H}_0 \quad (2.10)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ indica o par dual definido em $\mathcal{H} \times \mathcal{H}'$, i.é, uma forma bilinear contínua $\mathcal{H} \times \mathcal{H}' \rightarrow \mathbb{R}$. O operador \mathcal{A}^* é conhecido como "Adjunto Formal" do operador \mathcal{A} . Note que as expressões (2.9) e (2.10) são válidas apenas para $v \in \text{Ker}(\gamma^*)$ e $u \in \text{Ker}(\gamma)$, respectivamente.

Para remover este inconveniente, ou seja, obter expressões do tipo de (2.9) e (2.10) com restrições mais brandas para u e v , o seguinte teorema, Oden & Carey (1983), é tomado como referência:

¹Definição: Sendo \mathcal{U} e \mathcal{V} dois espaços normados lineares, define-se $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ como sendo o espaço linear normado formado pelos operadores lineares e contínuos que mapeiam \mathcal{U} em \mathcal{V} .

Teorema:

Sejam \mathcal{H} e \mathcal{Q} espaços de Hilbert com a propriedade do traço:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} \subset \mathcal{U} \equiv \mathcal{U}' \subset \mathcal{H}' & & \mathcal{Q} \subset \mathcal{V} \equiv \mathcal{V}' \subset \mathcal{Q}' \\
 \gamma : \mathcal{H} \rightarrow \partial\mathcal{H} & & \gamma^* : \mathcal{Q} \rightarrow \partial\mathcal{Q} \\
 \text{Ker}(\gamma) = \mathcal{H}_0 & & \text{Ker}(\gamma^*) = \mathcal{Q}_0 \\
 \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{U} \equiv \mathcal{U}' \subset \mathcal{H}_0' & & \mathcal{Q}_0 \subset \mathcal{V} \equiv \mathcal{V}' \subset \mathcal{Q}_0'
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

com inclusões densas e contínuas. Seja também $B(\cdot, \cdot)$ uma forma bilinear contínua em $\mathcal{H} \times \mathcal{Q}'$ satisfazendo a Eq.(2.8). Além disso, sejam $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}^*}$ os subspaços:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{A}} = \{ u \in \mathcal{H} \mid \mathcal{A}u \in \mathcal{V} \} \tag{2.12}$$

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{A}^*} = \{ v \in \mathcal{Q} \mid \mathcal{A}^*v \in \mathcal{U} \} \tag{2.13}$$

onde \mathcal{A} e \mathcal{A}^* são definidos em (2.9) e (2.10). Então existem operadores univocamente definidos

$$N \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}, \partial\mathcal{Q}') \quad \text{e} \quad N^* \in \mathcal{L}(\mathcal{Q}_{\mathcal{A}^*}, \partial\mathcal{H}') \tag{2.14}$$

tais que

$$\begin{aligned}
 B(u, v) &= (\mathcal{A}u, v)_{\mathcal{V}} + \langle Nu, \gamma^*v \rangle_{\partial\mathcal{Q}} \\
 \forall u \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}, v \in \mathcal{Q}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
 B(u, v) &= (\mathcal{A}^*v, u)_{\mathcal{U}} + \langle N^*v, \gamma u \rangle_{\partial\mathcal{H}} \\
 \forall u \in \mathcal{H}, v \in \mathcal{Q}_{\mathcal{A}^*}
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

onde $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{V}}$, $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{U}}$ representam produto interno em \mathcal{V} e \mathcal{U} , respectivamente, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\mathcal{Q}}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\mathcal{H}}$ denotam par dual em $\partial\mathcal{Q}' \times \partial\mathcal{Q}$ e $\partial\mathcal{H}' \times \partial\mathcal{H}$, respectivamente. ■

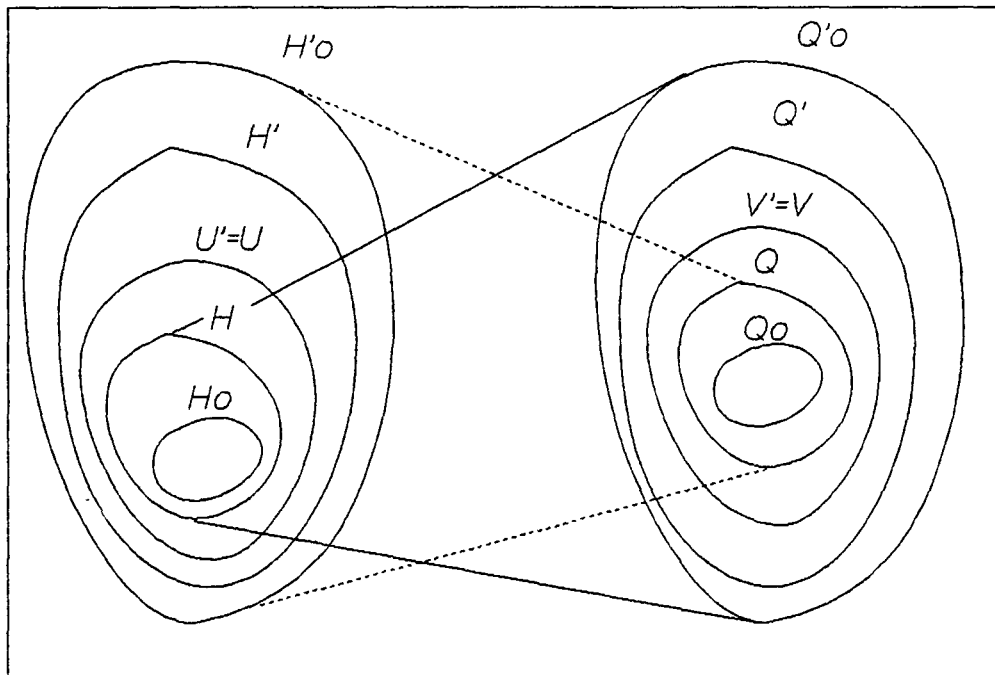


Fig.2- Identificação de $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{Q}_0')$ e $\mathcal{L}(\mathcal{Q}, \mathcal{H}_0')$.

Os operadores γ e γ^* são conhecidos como "Operadores de Dirichlet", enquanto \mathcal{N} e \mathcal{N}^* são chamados de "Operadores de Neumann" associados aos operadores \mathcal{A} e \mathcal{A}^* , respectivamente. As Eqs. (2.15) e (2.16) são conhecidas como "Fórmulas de Green Abstratas" para a forma bilinear $B(\cdot, \cdot)$. Os operadores \mathcal{A} e \mathcal{A}^* em (2.12) e (2.13) representam restrições a $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}^*}$, respectivamente, dos operadores \mathcal{A} e \mathcal{A}^* identificados pelos mesmos símbolos em (2.9) e (2.10).

Escolhendo $u \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$, $v \in \mathcal{Q}_{\mathcal{A}^*}$ e subtraindo membro a membro essas duas últimas equações, resulta:

$$(\mathcal{A}^*v, u)_{\mathcal{U}} = (\mathcal{A}u, v)_{\mathcal{V}} - \langle \mathcal{N}^*v, \gamma u \rangle_{\partial\mathcal{H}} + \langle \mathcal{N}u, \gamma^*v \rangle_{\partial\mathcal{Q}} \quad (2.17)$$

$$\forall u \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}, v \in \mathcal{Q}_{\mathcal{A}^*}$$

Esta equação pode ser convenientemente reescrita na forma:

$$(\mathcal{A}^*v, u)_{\mathcal{U}} = (\mathcal{A}u, v)_{\mathcal{V}} + \Gamma_{\partial\Omega} \langle u, v \rangle \quad (2.18)$$

que é conhecida como "Forma de Green Generalizada" para o operador \mathcal{A} . O termo $\Gamma_{\partial\Omega}\langle u, v \rangle$ é conhecido como "Concomitante Global Bilinear" do operador \mathcal{A} e vale:

$$\Gamma_{\partial\Omega}\langle u, v \rangle = - \langle \mathcal{N}^*v, \gamma u \rangle_{\partial\mathcal{H}} + \langle \mathcal{N}u, \gamma^*v \rangle_{\partial Q} \quad (2.19)$$

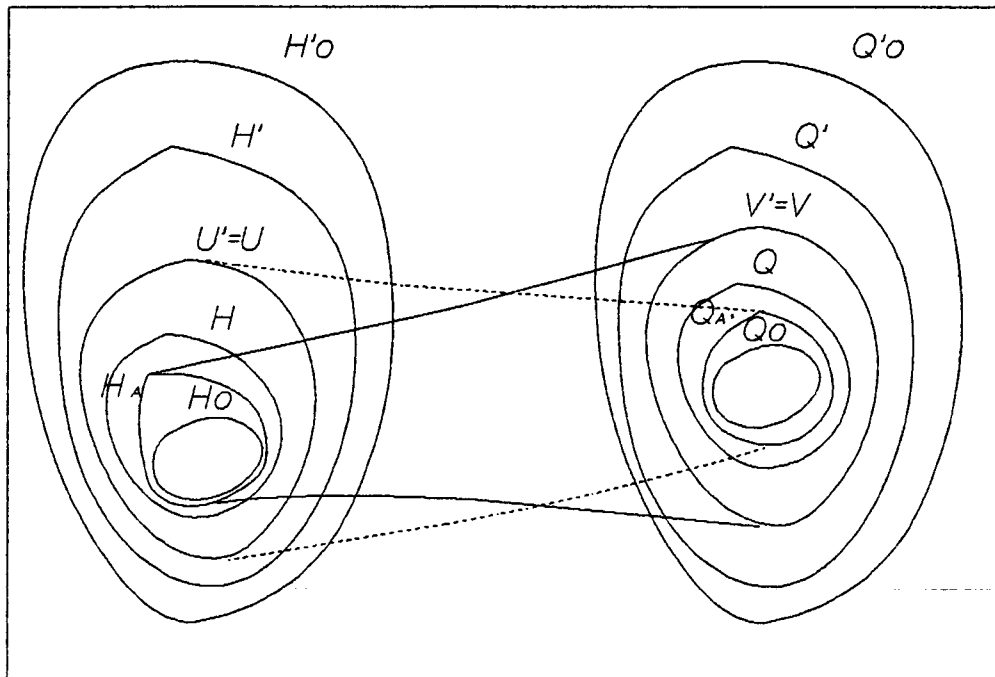


Fig.3- Identificação de $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}^*$.

Neste ponto é interessante estabelecer a questão da equivalência entre os problemas de valor no contorno "clássico" e "variacional" para o operador \mathcal{A} . Tem-se:

1.1- Problema Clássico de Dirichlet

Dados $f \in \mathcal{V}$ e $g \in \partial\mathcal{H}$, o problema é encontrar $u \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \ni$:

$$\mathcal{A}u = f \quad \text{e} \quad \gamma u = g \quad (2.20)$$

1.2- Problema Clássico de Neumann

Dados $f \in \mathcal{V}$ e $s \in \partial Q'$, o problema é encontrar $u \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \ni$:

$$\mathcal{A}u = f \quad \text{e} \quad \mathcal{N}u = s \quad (2.21)$$

2.1- Problema Variacional de Dirichlet

Dados $f \in \mathcal{V}$ e $g \in \partial\mathcal{H}$, o problema é encontrar $u \in \mathcal{H}_0 \ni$:

$$B(u,v) = (f,v)_{\mathcal{V}} - B(\gamma^{-1}g,v) \quad \forall v \in \mathcal{Q}_0 \quad (2.22)$$

2.2- Problema Variacional de Neumann

Dados $f \in \mathcal{V}$ e $s \in \partial\mathcal{Q}'$, o problema é encontrar $u \in \mathcal{H} \ni$:

$$B(u,v) = (f,v)_{\mathcal{V}} + \langle s, N^*v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{Q} \quad (2.23)$$

A equivalência entre estes problemas é estabelecida pelo seguinte teorema, Oden & Carey (1983):

Teorema :

O "Problema de Dirichlet" (2.20) para operador \mathcal{A} e o "Problema Variacional de Dirichlet" (2.22) são equivalentes no seguinte aspecto. Seja γ^{-1} a inversa do mapeamento γ , se u é solução de (2.20), então $w = u - \gamma^{-1}g$ é a solução de (2.22). Por outro lado, se w é a solução de (2.22), então $u = w + \gamma^{-1}g$ é a solução de (2.20). Além disso, o "Problema de Neumann" (2.21) para o operador \mathcal{A} é equivalente ao "Problema Variacional de Neumann" (2.23) no sentido de que qualquer solução de (2.21) também é uma solução de (2.23) e vice-versa. ■

Finalmente, a última questão a ser estudada é com relação a existência e a unicidade da solução dos problemas variacionais de valor no contorno. Felizmente, dada a forma bilinear $B(\cdot, \cdot)$ uma alternativa para a solução do problema é o uso do Teorema Generalizado de Lax-Milgram. Quando a utilização deste teorema é inviável (problema de Neumann, por exemplo), o Teorema da Alternativa de Fredholm deve ser aplicado para cada situação.

Teorema Generalizado de Lax-Milgram:

Sejam \mathcal{H} e \mathcal{E} espaços de Hilbert reais e $B(\cdot, \cdot)$ uma forma bilinear definida em $\mathcal{H} \times \mathcal{E}$ com as seguintes propriedades:

1- $B(\cdot, \cdot)$ é contínua, i.é, existe $M > 0 \ni$:

$$|B(u, v)| \leq M \|u\|_{\mathcal{H}} \|v\|_{\mathcal{E}} \quad (2.24)$$

2- $B(\cdot, \cdot)$ é coerciva no sentido de que existe a constante $\alpha \ni$:

$$\inf_{\substack{u \in \mathcal{H} \\ \|u\|_{\mathcal{H}}=1}} \sup_{\substack{v \in \mathcal{E} \\ \|v\|_{\mathcal{E}} \leq 1}} |B(u, v)| \geq \alpha > 0 \quad (2.25)$$

3-Para todo $v \neq 0$ em \mathcal{E}

$$\sup_{u \in \mathcal{H}} |B(u, v)| > 0 \quad (2.26)$$

Então existe um único $u^* \in \mathcal{H}$ tal que:

$$B(u^*, v) = F(v) \quad (2.27)$$

onde $F \in \mathcal{E}'$. Além disso,

$$\|u^*\|_{\mathcal{H}} \leq \|F\|_{\mathcal{E}'} \alpha^{-1} \quad (2.28) \blacksquare$$

As condições (2.24) e (2.26) são suficientes para assegurar a existência da solução única do problema variacional abstrato (2.27) que depende continuamente de $F \in \mathcal{E}'$.

3. FORMULAÇÃO ABSTRATA DO MLGFM

A escolha da função v como uma solução fundamental para o operador \mathcal{A}^* dá origem às formulações diretas de elementos de contorno. Isto pode ser visto claramente a partir da "Forma de

Green Generalizada" para o operador \mathcal{A} tomando-se v como solução para o problema $\mathcal{A}^*v = \delta$, onde δ indica uma excitação do tipo "função" Delta de Dirac. Dessa maneira, a Eq.(2.17) reduz-se a:

$$u = (\mathcal{A}u, v)_{\mathcal{V}} - \langle \mathcal{N}^*v, \gamma u \rangle_{\partial \mathcal{H}} + \langle \mathcal{N}u, \gamma^*v \rangle_{\partial \mathcal{Q}} \quad (2.29)$$

Entretanto, outras escolhas para o estado auxiliar podem ser feitas com a finalidade de compactar e melhorar a regularidade da solução, tornando o processo numérico mais eficiente, Silva (1988). Uma alternativa viável é adotar v como uma função de Green (uma solução do problema auxiliar $\mathcal{A}^*v = \delta$ com condições de contorno previamente definidas). O "Método da Função de Green Local" (LGFM) aproxima localmente a Função de Green dentro de cada volume finito com integrações direcionais desacopladas, comprometendo o resultado final da análise. Com as modificações propostas por Silva (1988) e Barcellos & Silva (1987) o LGFM deu origem ao "Método da Função de Green Local Modificado" (MLGFM). Nos próximos tópicos, mostra-se o desenvolvimento matemático do MLGFM e os detalhes para especificar as condições de contorno para a Função de Green.

Como primeira etapa, seja o estado $\{v, \gamma^*v, (\mathcal{N}^* + \mathcal{N}')v\}$ obtido à partir da solução do seguinte problema:

$$\mathcal{A}^* v(P, Q) = \delta(P, Q) \quad (2.30)$$

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') v(p, Q) = 0 \quad \forall P, Q \in \Omega; p, q \in \partial \Omega \quad (2.31)$$

onde $\delta(P, Q)$ é a distribuição de Dirac no ponto Q e \mathcal{N}' é um operador adicional atuando no contorno, especificado pelo usuário e de tal modo que:

$$\langle \mathcal{N}'v, \gamma u \rangle_{\partial \mathcal{H}} = \langle \mathcal{N}'u, \gamma^*v \rangle_{\partial \mathcal{Q}} \quad (2.31.a)$$

Substituindo estas três últimas expressões na Eq. (2.17) resulta:

$$u(Q) = (v(P, Q), \mathcal{A}u)_{\mathcal{V}} + \langle (\mathcal{N} + \mathcal{N}')u, \gamma^*v(p, Q) \rangle_{\partial \mathcal{Q}} \quad (2.32)$$

$$\forall P, Q \in \Omega; p \in \partial \Omega; v \in \mathcal{Q}_{\mathcal{A}^*} \text{ e } u \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$$

de onde são obtidos os valores de $u(Q)$, $\forall Q \in \Omega$. É interessante notar que se $N'u=0$, a Eq.(2.32) reduz-se a:

$$u(Q) = (v(P,Q), \mathcal{A}u)_{\gamma} + \langle Nu, \gamma \check{v}(p,Q) \rangle_{\partial Q} \\ \forall P, Q \in \Omega; p \in \partial\Omega; v \in Q_{\mathcal{A}^*} \text{ e } u \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \quad (2.32.a)$$

e o operador N' não influencia no resultado final da análise. Ele é especificado com o objetivo único de obter uma "aproximação" da Função de Green para o problema e seu estudo é realizado com detalhes nos próximos itens.

Como segunda etapa, seja o estado $\{v, \gamma^*v, (N^*+N)'v\}$ obtido à partir da solução do seguinte problema:

$$\mathcal{A}^* v(P,q) = 0 \quad (2.33)$$

$$(N^*+N') v(p,q) = \delta(p,q) \quad \forall P \in \Omega; p, q \in \partial\Omega \quad (2.34)$$

cuja substituição na relação de reciprocidade (2.17) gera os valores de $\gamma u(q)$ no contorno $\partial\Omega$, ou seja:

$$\gamma u(q) = (v(P,q), \mathcal{A}u)_{\gamma} + \langle (N+N')u, \gamma^*v(p,q) \rangle_{\partial Q} \\ \forall P \in \Omega; p, q \in \partial\Omega; v \in Q_{\mathcal{A}^*} \text{ e } u \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \quad (2.35)$$

As equações (2.32) e (2.35) formam um sistema de equações integrais que pode ser utilizado na solução de equações diferenciais que envolvam o operador \mathcal{A} e os operadores de contorno γ e N . Devido ao fato de que o operador de Neumann que aparece nas expressões (2.32) e (2.35) envolve derivadas no sentido do traço da função u , o uso direto dessas equações não é aconselhado para a análise numérica. Modifica-se estas expressões definindo uma nova quantidade, F , dada por:

$$F = (N+N')u \quad F \in \partial Q' \quad (2.36)$$

e dessa maneira, as Eqs.(2.32) e (2.35) podem ser convenientemente reescritas como sendo:

$$u(Q) = (G(P,Q), \mathcal{A}u)_{\gamma} + \langle F, \gamma^*G(p,Q) \rangle_{\partial Q} \\ \forall P, Q \in \Omega; p \in \partial\Omega; G \in Q_{\mathcal{A}^*} \text{ e } u \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \gamma u(q) = (G(P,q), \mathcal{A}u)_{\mathcal{V}} + \langle F, \gamma^* G(p,q) \rangle_{\partial Q} \\ \forall P \in \Omega; p, q \in \partial\Omega; G \in Q_{\mathcal{A}}^* \text{ e } u \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde $G(P,Q)$, $G(P,q)$, $G(p,Q)$ e $G(p,q)$ denotam as soluções dos dois problemas citados anteriormente. É interessante notar que estas funções agora representam funções de Green e não mais soluções fundamentais do problema auxiliar.

Os diversos tipos de condições de contorno são incluídas através do operador γu e da quantidade F . O traço de u no contorno absorve diretamente as condições de contorno do tipo Dirichlet, enquanto F representa condições do tipo Neumann. Assim, em cada ponto do contorno as incógnitas são γu ou F ; ou partições dessas quantidades (condições do tipo Cauchy-Robin).

Com estas modificações, o problema de equações integrais em estudo já pode ser reenunciado. Para tanto sejam:

$$\partial \mathcal{H}_{\alpha} = \{ u \in \partial \mathcal{H} ; u = \alpha \text{ em } \partial \Omega_u \} \quad (2.39)$$

$$\text{e } \partial Q_{\beta} = \{ F \in \partial Q ; F = \beta \text{ em } \partial \Omega_f \} \quad (2.40)$$

onde $\partial \Omega_u$ representa parte(s) de $\partial \Omega$ onde γu é especificado e $\partial \Omega_f$ representa parte(s) onde F é especificado. Então o problema fica sendo:

"Dado um $b \in \mathcal{V}$, encontrar $u \in \mathcal{H}$, $\gamma u \in \partial \mathcal{H}_{\alpha}$ e $F \in \partial Q_{\beta}$, tais que as equações integrais (2.37) e (2.38) sejam satisfeitas".

No sentido distributivo verifica-se que $\mathcal{A}u = b$ em quase todo lugar (a.e) e como $b \in \mathcal{V}$, então $u \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$.

4. FORMALISMO DO MLGFM

O objetivo inicial é encontrar a solução u para o sistema de equações diferenciais

$$\mathcal{A} u = b \quad \text{em } \Omega \quad (2.41)$$

com condições de contorno devidamente prescritas e contorno $\partial\Omega$ suficientemente regular (problema bem posto), onde \mathcal{A} é o operador diferencial, u o vetor "deslocamento generalizado" e b o "vetor força generalizado".

O problema adjunto correspondente para uma excitação do tipo "função" Delta de Dirac, $\delta(P,Q)$, pode ser escrito como:

$$\mathcal{A}^* G(P,Q) = \delta(P,Q) I \quad P, Q \in \Omega \quad (2.42)$$

onde I é o tensor identidade, $\delta(P,Q)$ a "função" Delta de Dirac e $G(P,Q)$ o tensor solução fundamental, i.é, G_{ij} representa o "deslocamento generalizado" na direção i de qualquer ponto $P \in \Omega$, provocado por uma "força generalizada" unitária aplicada no ponto $Q \in \Omega$ e direção j .

Pré-multiplicando a Eq.(2.41) por $G(P,Q)^t$ e a Eq.(2.42) por u^t obtem-se:

$$u^t \mathcal{A}^* G(P,Q) = \delta(P,Q) u^t I = \delta(P,Q) u^t \quad (2.43)$$

$$e \quad G(P,Q)^t \mathcal{A} u = G(P,Q)^t b \quad (2.44)$$

Subtraindo a Eq.(2.44) do transposto da Eq.(2.43) resulta:

$$u \delta(P,Q) = G(P,Q)^t b + [\mathcal{A}^* G(P,Q)]^t u - G(P,Q)^t [\mathcal{A} u] \quad (2.45)$$

Integrando no domínio Ω_P , i.é, com relação ao sistema de coordenadas localizados no ponto $P \in \Omega$, a solução procurada é:

$$u(Q) = \int_{\Omega} G(P,Q)^t b(P) d\Omega_P + \int_{\Omega} [\mathcal{A}^* G(P,Q)]^t u(P) d\Omega_P - \int_{\Omega} G(P,Q)^t [\mathcal{A} u(P)] d\Omega_P \quad (2.46)$$

Finalmente, com integrações por partes das duas últimas parcelas da Eq. (2.46) as integrais de domínio resultantes desta operação são automaticamente canceladas e a expressão final para $u(Q)$ fica sendo:

$$u(Q) = \int_{\Omega} G(P,Q)^t b(P) d\Omega_P + \int_{\partial\Omega} [N^*G(p,Q)]^t u(p) d\partial\Omega_p - \int_{\partial\Omega} G(p,Q)^t [Nu(p)] d\partial\Omega_p \quad (2.47)$$

onde $d\partial\Omega_p$ representa um elemento infinitesimal do contorno $\partial\Omega$ no ponto $p \in \partial\Omega$ e N , N^* são os operadores de Neumann associados a \mathcal{A} e \mathcal{A}^* , respectivamente. O valor de $u(Q)$ também pode ser obtido diretamente da Forma de Green Generalizada com auxílio do problema adjunto definido na Eq.(2.42).

Esta equação, Eq.(2.47), representa exatamente a formulação "Direta do Método de Elementos de Contorno" (DBEM) e $G(P,Q)$ representa (até aqui) apenas uma solução fundamental da Eq.(2.42).

Admitindo que a expressão matemática de $G(P,Q)$ é conhecida na sua forma explícita, o cálculo numérico das integrais que aparecem em (2.47) é bastante dificultado devido à singularidade desse tensor. A singularidade dessas integrais é ainda maior na presença do operador de Neumann que aparece na segunda parcela do lado direito dessa equação.

Entretanto, somando e subtraindo a quantidade

$$G(p,Q)^t [N'u(p)] \equiv [N'G(p,Q)]^t u(p) \quad (2.48)$$

na Eq.(2.47) tem-se:

$$u(Q) = \int_{\Omega} G(P,Q)^t b(P) d\Omega_P - \int_{\partial\Omega} [(N^*+N')G(p,Q)]^t u(p) d\partial\Omega_p + \int_{\partial\Omega} G(p,Q)^t [(N+N')u(p)] d\partial\Omega_p \quad (2.49)$$

que é a expressão básica para o desenvolvimento do MLGFM.

Uma escolha apropriada para o operador N' é da forma:

$$N' = \mu k_i$$

$$\mu = \begin{cases} 1 & \text{para } p \in \partial\Omega^f \\ 0 & \text{para } p \in \partial\Omega/\partial\Omega^f \end{cases} \quad (2.50)$$

onde k_i é uma constante real não nula (k_i pode ou não ser diferente de k_j para $i \neq j$) e $\partial\Omega^f$ indica a parcela do contorno onde é

especificado o operador \mathcal{N}' , como na Fig.4.

Em todas as situações práticas ilustradas nos capítulos que seguem, adota-se $k_i = k_j$ com valores variando desde $\pm 1.0d-6$ até $\pm 1.0d+6$, sem alterações nos resultados finais. A única preocupação do usuário é a de não prescrever um valor de k_i que comprometa o condicionamento numérico do sistema final de equações.

Neste momento a solução fundamental $G(P,Q)$ se torna uma função de Green, especificando como condição de contorno para a Eq.(2.42) o termo entre colchetes da segunda parcela do lado direito da Eq.(2.49). Em particular, define-se:

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') G(p,Q) = 0 \quad (2.51)$$

Assim, a solução procurada $u(Q)$ obtida em (2.49) é reescrita como:

$$u(Q) = \int_{\Omega} G(P,Q)^t b(P) d\Omega_P + \int_{\partial\Omega} G(p,Q)^t [(\mathcal{N} + \mathcal{N}')u(p)] d\partial\Omega_p \quad (2.52)$$

A última parcela de (2.52) contém a expressão " $(\mathcal{N}' + \mathcal{N})u(p)$ " que envolve derivadas de $u(p)$ no sentido do traço, altamente indesejáveis para análise numérica. Este inconveniente é eliminado com outra modificação, ou seja, definindo a nova quantidade $F(p)$ como:

$$F(p) = (\mathcal{N} + \mathcal{N}') u(p)$$

Finalmente, $u(Q)$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$$u(Q) = \int_{\Omega} G(P,Q)^t b(P) d\Omega_P + \int_{\partial\Omega} G(p,Q)^t F(p) d\partial\Omega_p \quad (2.53)$$

que é bem mais confortável de ser trabalhada numericamente, pois não estão presentes derivadas de $G(P,Q)/G(p,Q)$ e/ou da quantidade $F(p)$. Com estas alterações propostas por Silva (1988) e Barcellos & Silva (1987), as integrais que aparecem na Eq.(2.53) tem a ordem de suas singularidades bastante reduzida e/ou eliminada.

A expressão (2.53) oferece valores de $u(Q)$, $Q \in \Omega$. Como se admitiu nas hipóteses iniciais que os espaços de Hilbert em questão possuem a propriedade do traço, i.é:

$$u(q) = \lim_{Q \rightarrow q} u(Q) \quad q \in \partial\Omega, Q \in \Omega \quad (2.54)$$

aplica-se esta propriedade à Eq.(2.53), resultando:

$$u(q) = \int_{\Omega} G(P,q)^t b(P) d\Omega_P + \int_{\partial\Omega} G(p,q)^t F(p) d\partial\Omega_P \quad (2.55)$$

As Eqs.(2.53) e (2.55) formam o sistema de equações integrais que definem completamente o problema em estudo.

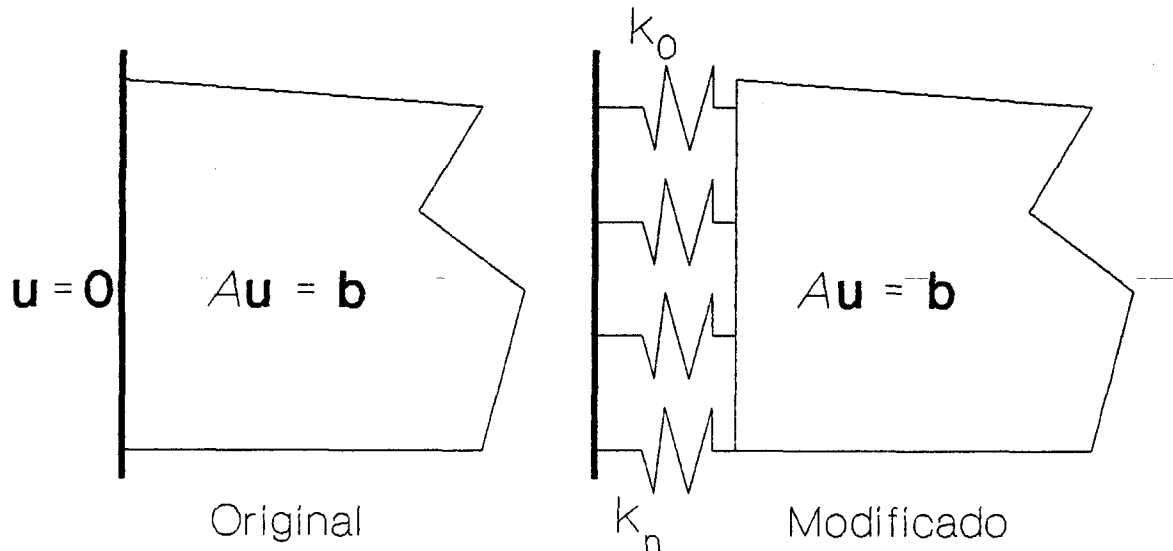


Fig.4- Problema Original e Modificado.

Embora todo o procedimento descrito até aqui tenha como objetivo aproximar a Função de Green para todo o domínio, o nome "Método da Função de Green Local Modificado", MLGFM, será mantido com o objetivo de lembrar as origens do método e indicar que a aproximação das projeções da Função de Green é feita localmente, i.é, em cada elemento finito.

5.DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO E DO CONTORNO

O domínio Ω pode ser subdividido em "m" subdomínios, de agora em diante denominados de Ω_s , $s = 1, 2, \dots, m$. Dessa maneira o domínio Ω pode ser escrito como sendo

$$\Omega = \bigcup_{s=1}^m \bar{\Omega}_s \quad (2.56)$$

onde $\bar{\Omega}_s$ denota o fechamento do subdomínio Ω_s .

Cada um dos subdomínios é discretizado em "nel" elementos finitos. Nas interfaces dos subdomínios o número de elementos e o grau do polinômio interpolador devem ser os mesmos.

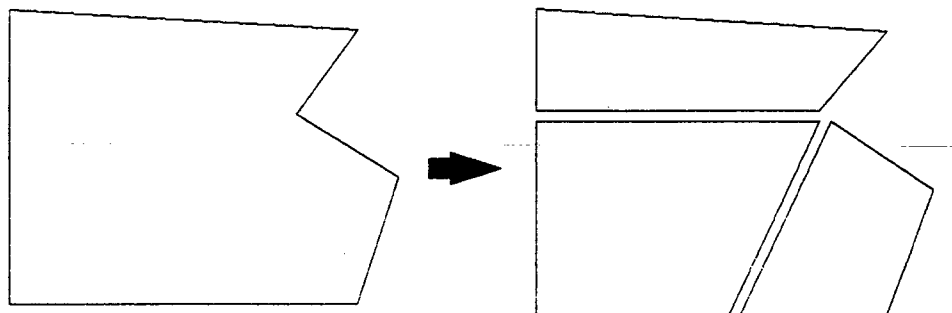


Fig.5 - Discretização do domínio em subdomínios

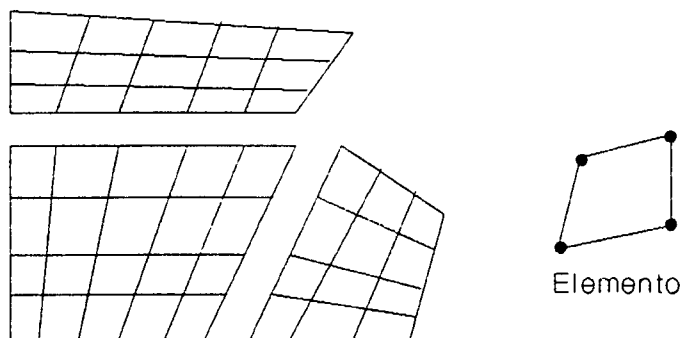


Fig.6 - Discretização dos subdomínios em elementos finitos

Assim, uma quantidade y qualquer com comportamento "sua-ve" no subdomínio Ω_s pode ser convenientemente interpolada com as usuais funções de interpolação locais utilizadas no Método de Elementos Finitos (FEM), i.é:

$$y = [\Psi]\{y\} \quad (2.57)$$

onde $\{y\}$ é o vetor cuja componente "i" representa o valor da quantidade y avaliada no nó "i" e $[\Psi]$ é o vetor das funções de interpolação de domínio da forma:

$$[\Psi] = [\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_{ntn}] \quad (2.58)$$

onde "ntn" é o número total de nós do subdomínio.

Cada contorno, i.é, o contorno do subdomínio "s" pode ser dividido em "nelc" elementos de contorno, como indicado na Fig.7. A única diferença com relação à malha de elementos finitos é que esta discretização pode ou não ter nós duplos em pontos de descontinuidade das condições de contorno e/ou geometria. As funções de interpolação ϕ_j de contorno são tomadas como traço das funções de interpolação de domínio e a quantidade y pode ser interpolada no contorno com

$$y = [\Phi]\{y\} \quad (2.59)$$

onde $\{y\}$ é o vetor cuja componente "i" representa o valor da quantidade y avaliada no nó "i" do contorno e $[\Phi]$ é o vetor das funções de interpolação de contorno da forma

$$[\Phi] = [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_{ntnc}] \quad (2.60)$$

onde "ntnc" é o número total de nós do contorno do subdomínio.

6. APROXIMAÇÃO NUMÉRICA

Com a discretização prevista no item anterior e considerando, por simplicidade, o número de subdomínios igual a 1, as

quantidades $u(Q)$, $u(p)$, $b(P)$ e $F(p)$ podem ser aproximadas com uso das expressões convencionais do método de elementos finitos (FEM), i.é:

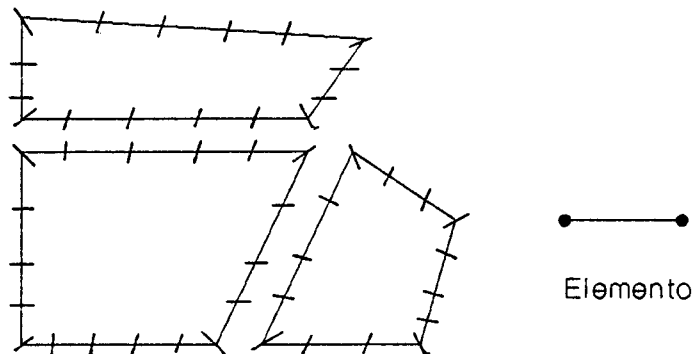


Fig.7 - Discretização dos subdomínios em elementos de contorno.

$$u(Q) = [\Psi(Q)]\{u\}^D \quad (2.61)$$

$$b(P) = [\Psi(P)]\{b\} \quad (2.62)$$

$$F(p) = [\Phi(p)]\{f\} \quad (2.63)$$

$$u(p) = [\Phi(p)]\{u\}^C \quad (2.64)$$

onde $\{u\}^D$ e $\{u\}^C$ representam valores nodais do "deslocamento generalizado" u no domínio e contorno; $\{b\}$ e $\{f\}$ representam valores nodais da "força de corpo generalizada" e das "reações generalizadas", respectivamente.

Em cada elemento de domínio a Eq.(2.53) pode ser reescrita como sendo :

$$[\Psi(Q)]\{u\}^D = \int_{\Omega} G(P,Q)^t [\Psi(P)] d\Omega_P \{b\} + \int_{\partial\Omega} G(p,Q)^t [\Phi(p)] d\partial\Omega_p \{f\} \quad (2.65)$$

Aplicando o Método Residual de Galerkin, i.é, tomando a projeção de $u(Q)$ ortogonal a $[\Psi(Q)]$ resulta:

$$\int_{\Omega} [\Psi(Q)]^t [\Psi(Q)] d\Omega_Q \{u\}^D = \int_{\Omega} [\Psi(Q)]^t \int_{\Omega} G(P,Q)^t [\Psi(P)] d\Omega_P d\Omega_Q \{b\} + \int_{\Omega} [\Psi(Q)]^t \int_{\partial\Omega} G(p,Q)^t [\Phi(p)] d\partial\Omega_p d\Omega_Q \{f\} \quad (2.66)$$

que pode ser melhor representada por

$$A \{u\}^D = B \{f\} + C \{b\} \quad (2.67)$$

onde

$$A = \int_{\Omega} [\Psi(Q)]^t [\Psi(Q)] d\Omega_Q \quad (2.68)$$

$$B = \int_{\partial\Omega} Gd(p)^t [\Phi(p)] d\partial\Omega_p \quad (2.69)$$

$$C = \int_{\Omega} Gd(P)^t [\Psi(P)] d\Omega_P \quad (2.70)$$

$$Gd(p)^t = \int_{\Omega} [\Psi(Q)]^t G(p, Q)^t d\Omega_Q \quad (2.71)$$

e

$$Gd(P)^t = \int_{\Omega} [\Psi(Q)]^t G(P, Q)^t d\Omega_Q \quad (2.72)$$

Repetindo o mesmo procedimento para a Eq.(2.55), porém tomando como funções peso o conjunto $[\Phi(q)]$, resulta:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]^t [\Phi(q)] d\partial\Omega_q \{u\}^C = & \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]^t \int_{\Omega} G(P, q)^t [\Psi(P)] d\Omega_P d\partial\Omega_q \{b\} \\ & + \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]^t \int_{\partial\Omega} G(p, q)^t [\Phi(p)] d\partial\Omega_p d\partial\Omega_q \{f\} \end{aligned} \quad (2.73)$$

ou ainda

$$D \{u\}^C = E \{f\} + F \{b\} \quad (2.74)$$

onde

$$D = \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]^t [\Phi(q)] d\partial\Omega_q \quad (2.75)$$

$$E = \int_{\partial\Omega} Gc(p)^t [\Phi(p)] d\partial\Omega_p \quad (2.76)$$

$$F = \int_{\Omega} Gc(P)^t [\Psi(P)] d\Omega_P \quad (2.77)$$

$$Gc(p)^t = \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]^t G(p, q)^t d\partial\Omega_q \quad (2.78)$$

e

$$Gc(P)^t = \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]^t G(P, q)^t d\partial\Omega_q \quad (2.79)$$

A Eq.(2.74), que é similar ao sistema final obtido pelo "Método de Elementos de Contorno de Galerkin" (GBEM), pode ser reescrita em termos dos valores prescritos no contorno, $\{u_p\}$ e $\{f_p\}$, e dos valores desconhecidos, $\{u_d\}$ e $\{f_d\}$, como:

$$\begin{bmatrix} D_p & D_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_p \\ u_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_d & E_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_d \\ f_p \end{Bmatrix} + F \{b\} \quad (2.80)$$

ou ainda na forma:

$$\begin{bmatrix} -E_d & D_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_d \\ u_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_p & E_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_p \\ f_p \end{Bmatrix} + F \{b\} \quad (2.81)$$

7. FORÇA DE CORPO E OU REAÇÕES GENERALIZADAS CONCENTRADAS

O primeiro caso estudado é a situação onde a força de corpo generalizada $b(P)$ é dada na forma:

$$b(P) = \delta(P,R) I \quad P,R \in \Omega \quad (2.82)$$

Considerando este tipo de excitação a Eq.(2.66) pode ser reescrita como sendo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\Psi(Q)]^t [\Psi(Q)] d\Omega_Q \{u\}^D &= \int_{\Omega} [\Psi(Q)]^t \int_{\Omega} G(P,Q)^t \delta(P,R) I d\Omega_P d\Omega_Q + \\ &\int_{\Omega} [\Psi(Q)]^t \int_{\partial\Omega} G(p,Q)^t [\Phi(p)] d\partial\Omega_p d\Omega_Q \{f\} \end{aligned} \quad (2.83)$$

ou simplesmente:

$$A \{u\}^D = B \{f\} + Gd(R)^t \quad (2.84)$$

Similarmente, a partir da Eq.(2.73) obtem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]^t [\Phi(q)] d\partial\Omega_q \{u\}^C &= \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]^t \int_{\Omega} G(P,q)^t \delta(P,R) I d\Omega_P d\partial\Omega_q \\ &+ \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]^t \int_{\partial\Omega} G(p,q)^t [\Phi(p)] d\partial\Omega_p d\partial\Omega_q \{f\} \end{aligned} \quad (2.85)$$

ou

$$D \{u\}^C = E \{f\} + Gc(R)^t \quad (2.86)$$

Estabelecendo uma "reação generalizada" do tipo

$$F(p) = \delta(p,r) I \quad p,r \in \partial\Omega \quad (2.87)$$

e utilizando as equações (2.66) e (2.73) resulta:

$$A \{u\}^D = Gd(r)^t + C \{b\} \quad (2.88)$$

$$D \{u\}^C = Gc(r)^t + F \{b\} \quad (2.89)$$

8. APROXIMAÇÕES DAS PROJEÇÕES DA FUNÇÃO DE GREEN

As matrizes B, C, E e F dependem das projeções da Função de Green Gd(P), Gd(p), Gc(P) e Gc(p). Para determinar estas quantidades utiliza-se o método proposto por Silva (1988) e Barcellos & Silva (1987), resolvendo com o Método de Elementos Finitos os dois problemas associados:

Problema 1 :

$$\mathcal{A}^* G(P,Q) = \delta(P,Q) I \quad (2.90)$$

$$(N^* + N') G(p,Q) = 0 \quad \forall P, Q \in \Omega; p \in \partial\Omega \quad (2.91)$$

Problema 2 :

$$\mathcal{A}^* G(P,q) = 0 \quad (2.92)$$

$$(N^* + N') G(p,q) = \delta(p,q) I \quad \forall P \in \Omega; p,q \in \partial\Omega \quad (2.93)$$

Note que, pós-multiplicando a Eq.(2.90) por $[\Psi(Q)]$ e integrando no domínio mantendo o ponto "P" fixo resulta:

$$\mathcal{A}^* \int_{\Omega} G(P,Q) [\Psi(Q)] d\Omega_Q = \int_{\Omega} \delta(P,Q) [\Psi(Q)] d\Omega_Q = [\Psi(P)] \quad (2.94)$$

e, de imediato identifica-se o termo Gd(P) no lado esquerdo dessa equação. Então, a Eq.(2.94) pode ser reescrita na forma:

$$\mathcal{A}^* Gd(P) = [\Psi(P)] \quad (2.95)$$

Como o termo de excitação dessa equação é constituído pelas funções convencionais de elementos finitos, esta parcela tem continuidade no mínimo $\mathcal{C}^0(\Omega)$. É bom lembrar que o termo de excitação da Eq.(2.90) é do "tipo δ ", muito mais singular. Dessa maneira a solução $Gd(P)$ é um tensor bem mais regular do que o próprio tensor $G(P,Q)$ ¹. Este resultado é crucial para o desenvolvimento do "Método da Função de Green Local Modificado" (MLGFM).

O mesmo procedimento é adotado para a Eq.(2.91), resultando:

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') \int_{\Omega} G(p,Q) [\Psi(Q)] d\Omega_Q = 0 \quad (2.96)$$

donde obtem-se:

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') Gd(p) = 0 \quad (2.97)$$

A mesma técnica pode ser aplicada ao segundo problema multiplicando as Eq.(2.92) e (2.93) por $[\Phi(q)]$ e integrando no contorno $\partial\Omega$, mantendo o ponto "p" fixo, ou seja:

$$\mathcal{A}^* \int_{\partial\Omega} G(P,q) [\Phi(q)] d\partial\Omega_q = 0 \quad (2.98)$$

ou

$$\mathcal{A}^* Gc(P) = 0 \quad (2.99)$$

$$e \quad (\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') \int_{\partial\Omega} G(p,q) [\Phi(q)] d\partial\Omega_q = [\Phi(q)] \quad (2.100)$$

ou,

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') Gc(p) = [\Phi(p)] \quad (2.101)$$

Dessa maneira, os conjuntos de equações (2.95)-(2.97) e (2.99)-(2.101) são tomados como referência para cálculo das projeções da Função de Green. Como estas projeções são contínuas, Mikhlin (1970), a interpolação no domínio usando as funções de

¹Se $x \in \mathbb{R}^n$, então a "função" $\delta(x,y) \in \mathcal{H}^r(\Omega)$, onde $r = -(n+\epsilon)/2$ e ϵ é uma pequena constante positiva.

interpolação de elementos finitos é viável, resultando nas expansões:

$$Gd(P) = [\Psi(P)] G^{DP} \quad (2.102)$$

$$Gc(P) = [\Psi(P)] G^{CP} \quad (2.103)$$

$$Gd(p) = [\Phi(p)] G^{DP} \quad (2.104)$$

e

$$Gc(p) = [\Phi(p)] G^{CP} \quad (1.105)$$

onde G^{DP} , G^{DP} , G^{CP} e G^{CP} são tensores obtidos dos valores nodais de $Gd(P)$, $Gd(p)$, $Gc(P)$ e $Gc(p)$, respectivamente. Com uso do Galerkin-FEM essas projeções podem ser calculadas resolvendo-se os dois novos problemas:

Problema 1* :

$$\mathcal{A}^* Gd(P) = [\Psi(P)] \quad (2.106)$$

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') Gd(p) = 0 \quad \forall p \in \partial\Omega, P \in \Omega \quad (2.107)$$

Problema 2* :

$$\mathcal{A}^* Gc(P) = 0 \quad (2.108)$$

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') Gc(p) = [\Phi(p)] \quad \forall p \in \partial\Omega, P \in \Omega \quad (2.109)$$

Para operadores auto-adjuntos ($\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}^*$) é possível determinar o funcional $J(Gd)$ para o problema 1*, cuja minimização também resulta nas projeções desejadas utilizando o FEM. Este funcional é escrito na forma:

$$J(Gd) = 0.5 B(Gd, Gd) - B_1(Gd, [\Psi]) + 0.5 B_2(Gd, Gd) \quad (2.110)$$

onde $B(Gd, Gd)$ é a forma bilinear em estudo,

$$B_1(Gd, [\Psi]) = \int_{\Omega} Gd(P) \cdot [\Psi(P)] d\Omega_P \quad (2.111)$$

e

$$B_2(Gd, Gd) = \int_{\partial} [\mathcal{N}' Gd(p)] \cdot Gd(p) d\partial\Omega_p \quad (2.112)$$

Analogamente, o funcional $J(Gc)$ para o problema 2* pode ser escrito na forma :

$$J(Gc) = 0.5 B(Gc, Gc) - B_3(Gc, [\Phi]) + 0.5 B_2(Gc, Gc) \quad (2.113)$$

onde $B_3(Gc, [\Phi])$ é da forma:

$$B_3(Gc, [\Phi]) = \int_{\partial\Omega} Gc(p) \cdot [\Phi(p)] \, d\partial\Omega_p \quad (2.114)$$

e $B_2(Gc, Gc)$ assume mesmo aspecto formal que em (2.112).

Um estudo mais detalhado desses funcionais é feito para cada uma das aplicações que aparecem nos capítulos subsequentes.

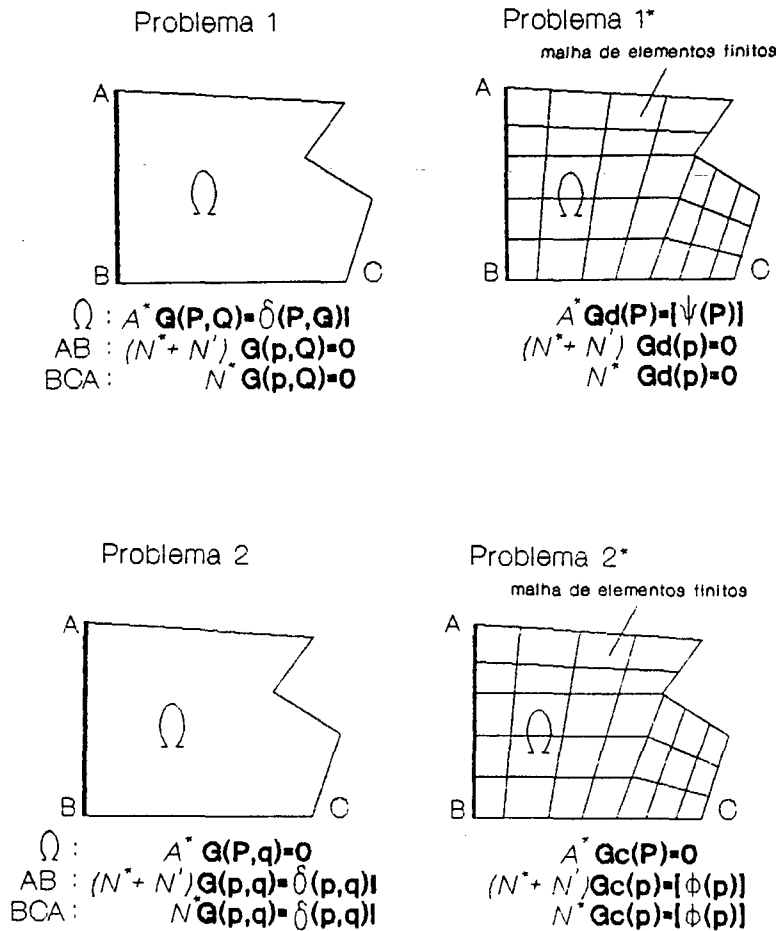


Fig.8-Interpretação Física dos Problemas 1/2 e 1*/2*.

9.DETERMINAÇÃO DAS MATRIZES A,B,...,F

Reescrevendo as expressões para B, C e F como:

$$B = \int_{\partial\Omega} \int_{\Omega} [\Psi(Q)]^t G(p,Q)^t [\Phi(p)] d\Omega_Q d\partial\Omega_p \quad (2.115)$$

$$C = \int_{\Omega} \int_{\Omega} [\Psi(Q)]^t G(P,Q)^t [\Psi(P)] d\Omega_Q d\Omega_P \quad (2.116)$$

e

$$F = \int_{\partial\Omega} \int_{\Omega} [\Phi(q)]^t G(P,q)^t [\Psi(P)] d\Omega_P d\partial\Omega_q \quad (2.117)$$

nota-se que C é uma matriz simétrica e que $B=F^t$. Dessa maneira, utilizando as projeções da função de Green escreve-se:

$$B = F^t = \int_{\Omega} [\Psi(P)]^t [\Psi(P)] d\Omega_P \quad G^{CP} = A G^{CP} \quad (2.118)$$

e

$$C = C^t = \int_{\Omega} [\Psi(P)]^t [\Psi(P)] d\Omega_P \quad G^{DP} = A G^{DP} \quad (2.119)$$

Uma vez que o vetor {b} é conhecido inicialmente, resolvendo a Eq.(2.81) determina-se {f}. Os valores de u(Q) são facilmente calculados a partir da Eq.(2.67) usando as Eqs.(2.118) e (2.119), i.é:

$$\{u\}^D = G^{CP} \{f\} + G^{DP} \{b\} \quad (2.120)$$

As matrizes A e D também são facilmente obtidas com integração numérica, enquanto que a matriz E também é calculada sem muita dificuldade com:

$$E = [G^{CP}]^t \int_{\partial\Omega} [\Phi(p)]^t [\Phi(p)] d\partial\Omega_p = [G^{CP}]^t D \quad (2.121)$$

que completa o cálculo de todas as matrizes necessárias para implementação do método.

10. COMO SELECIONAR AS CONSTANTES k_i 's.

Salientou-se anteriormente que valores numéricos para as constantes k_i 's podem ser arbitrados levando-se em consideração apenas dois critérios:

1- $k_i \neq 0$ e

2-Deve não comprometer o condicionamento final do sistema de equações para aproximação das projeções da função de Green. Este fato pode ser melhor visualizado agora, pois a forma bilinear $B_2(\cdot, \cdot)$ influi diretamente na matriz de rigidez do elemento finito e é esta parcela que "carrega" o operador \mathcal{N}' .

Entretanto, observando mais atentamente a expressão da quantidade definida como $F(p)$, $F(p) = (\mathcal{N} + \mathcal{N}') u(p)$, a primeira parcela representa a "reação/fluxo" real do problema, enquanto a segunda representa a "reação/fluxo" fictício. Devido a este fato, torna-se necessário uma terceira regra:

3-As constantes k_i 's devem ser aplicadas somente na parcela do contorno onde existem condições de contorno do tipo Dirichlet homogêneas. Do contrário, a parcela " $\mathcal{N}'u(p)$ " introduz um fluxo fictício em (2.53) e (2.55), tornando necessário o pós-processamento dos valores obtidos diretamente dessas equações. Uma outra alternativa, também utilizada neste trabalho, é arbitrar valores para k_i 's de tal modo que $\mathcal{N}u(p) \gg \mathcal{N}'u(p)$ para evitar o pós-processamento de $u(P)/u(p)$.

O aspecto final da atribuição dos valores para k_i 's é estudado no próximo item em conjunto com o tópico "Subregiões".

10. SUBREGIÕES

Seja a partição do domínio Ω em dois subdomínios, com as respectivas malhas de elementos de contorno, como ilustrado na Fig.9.

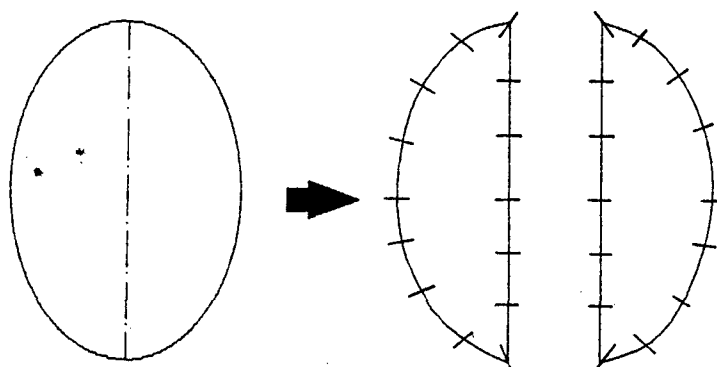


Fig.9 - Partição do Domínio em 2 Subdomínios.

Para o subdomínio "j", $j=1,2$; é válido o sistema de equações no contorno :

$$D_j \{u\} = E_j \{f\} + F_j \{b\} \quad (2.122)$$

que, por conveniência é melhor ser reescrito na forma:

$$\begin{bmatrix} D_j & D_{jk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ u_{jk} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_j & E_{jk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_j \\ f_{jk} \end{Bmatrix} + F_j \{b\} \quad (2.123)$$

$j \neq k; j, k = 1, 2$

onde o sub-índice "j" indica subdomínio e "jk" a interface do subdomínio "j" com o subdomínio "k".

Como o número de equações do sistema (2.122) é menor que o número de incógnitas do problema, é necessário estabelecer "condições de compatibilidade" para os subdomínios 1 e 2. Assim, na interface $\partial\Omega_{12}/\partial\Omega_{21}$ tem-se:

1- Continuidade de "deslocamento", i.é:

$$\{u_{12}\} = \{u_{21}\} \quad (2.124)$$

2- Somatório de "reações/fluxo" nulo, i.é:

$$\{f_{12}\} = -\{f_{21}\} \quad (2.125)$$

Dessa última identidade tem-se:

$$F_{12}(p) = (N_{12} + N_{12}') u(p) = (N_{21} + N_{21}') u(p) = -F_{21}(p) \quad (2.126)$$

e

$$N_{12}' = -N_{21}' \quad (2.127)$$

de onde conclui-se a última regra para seleção dos valores de k_i 's, i.é :

"Em interfaces de subdomínios deve-se especificar valores para k_i 's positivos de um lado e negativos do outro, quando a Eq.(2.125) é satisfeita."

Tomando como exemplo o caso ilustrado na Fig.10, para efetuar a compatibilidade das "reações/fluxos" no nó da intersecção dos três subdomínios deve-se especificar (por comodidade) todos k_i 's nulos neste ponto. Para esta situação poderíamos ter em $\partial\Omega_{32}$ k_i 's positivos (em $\partial\Omega_{23}$ k_i 's negativos), em $\partial\Omega_{31}$ k_i 's negativos (em $\partial\Omega_{13}$ k_i 's positivos) e $\partial\Omega_{12}$ k_i 's negativos (em $\partial\Omega_{21}$ k_i 's positivos).

Para "força de corpo generalizada" nula o sistema final de equações no contorno representativo da situação ilustrada na Fig.9 é escrito na forma :

$$\begin{bmatrix} D_1 & D_{12} & 0 \\ 0 & D_{21} & D_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_{12} \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & E_{12} & 0 \\ 0 & -E_{21} & E_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_{12} \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (2.128)$$

que é exatamente o sistema final obtido pelo BEM para duas sub-regiões.

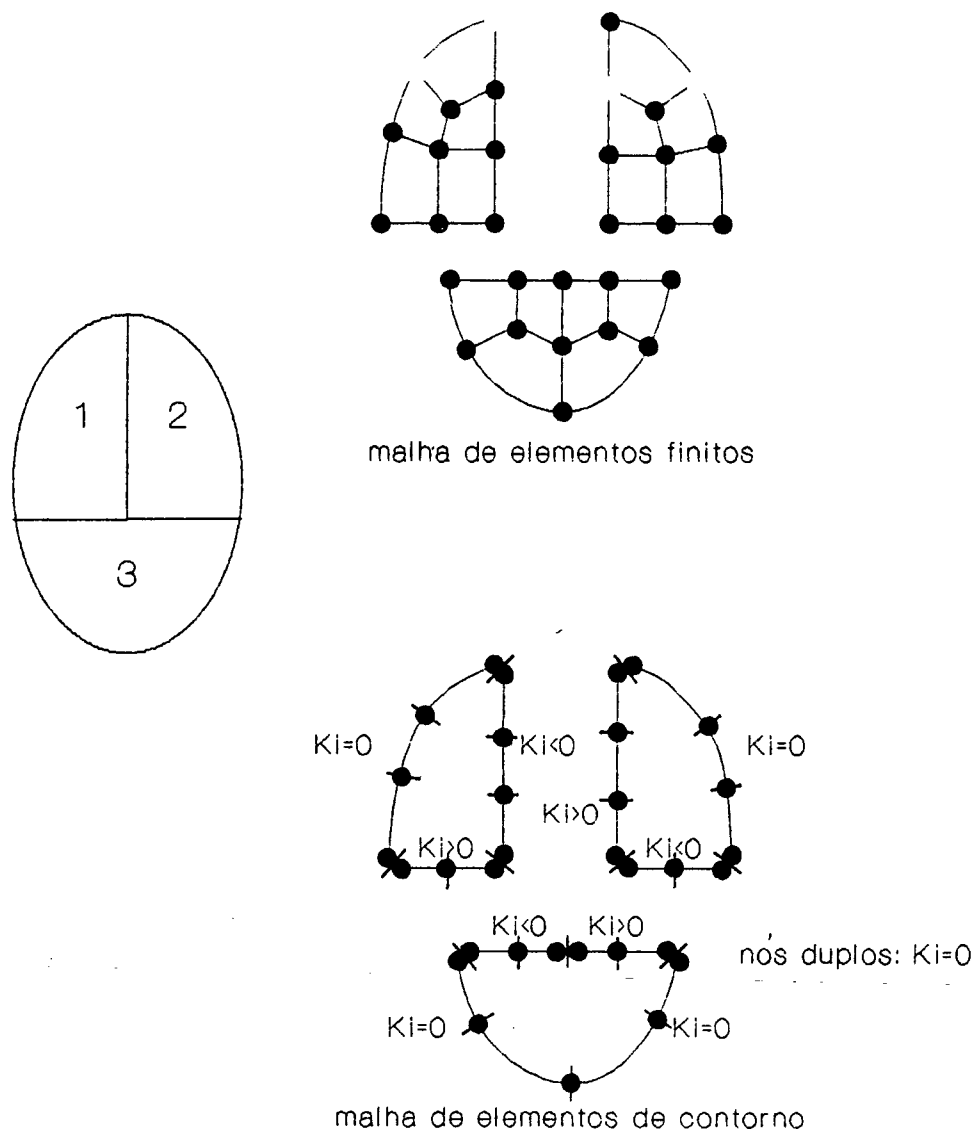


Fig.10 - Valores de k_i 's nas Interfaces dos Subdomínios.

11. CONCLUSÕES

O objetivo deste capítulo foi dar consistência matemática para o Método da Função de Green Local. A mesma teoria apresentada aqui serve também para o DBEM e Galerkin-BEM.

O fato de que a aproximação da Função de Green é executada com uso do FEM possibilita seu cálculo em situações onde são conhecidos apenas o operador adjunto e suas condições de contorno. Dessa maneira, o grande inconveniente do BEM é solucionado de modo simples e elegante com cálculo das projeções da Função de

Green na base do espaço de elementos finitos $\mathcal{V}(h,\rho)$. Outra característica marcante é que todos os integrandos que aparecem no cálculo das matrizes A, B, \dots, F são bem comportados. Dois fatores importantes levam a isto: a aproximação da Função de Green citada acima e a expansão do termo envolvendo o operador de Neumann, ambos com o FEM.

Finalmente, como mostra-se nos capítulos seguintes, características de superconvergência nodal de "deslocamento generalizado" e "esforços generalizados" observadas no BEM, também são características marcantes do MLGFM.

12. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Barbieri, R. & Barcellos, C.S. (1991).
Solução do Problema Potencial pelo Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM). Proc. COBEM.
- Barbieri, R. & Barcellos, C.S. (1992).
Non-Homogeneous Potential Field Solution by the Modified Local Green's Function Method. Eng. Analysis with Boundary Elements (to appear in EABE).
- Barbieri, R. & Barcellos, C.S. (1991).
A Modified Local Green's Function Technique for the Mindlin's Plate Problem. Proc. 13th. Int. Conf. Boundary Element Technology, (Ed. Brebbia, C.A. & Gibson, G.).
- Barcellos, C.S. & Barbieri, R. (1991).
Solution of Singular Potential Problems by the Modified Local Green's Function Method. Proc. 13th. Int. Conf. Boundary Element Technology, (Ed. Brebbia, C.A. & Gibson, G.).
- Barcellos, C.S. & Silva, L.H.M. (1987).
Elastic Membrane Solution by a Modified Local Green's Function Method. (Ed. Brebbia, C.A. e Venturini, W.S.) Proc. Int. Conf. Boundary Element Technology, Comp. Mech. Publ., Southampton.

- Beskos, D.E.(1987).
Boundary Element Methods in Mechanics. Vol.3 in Computational Methods in Mechanics (Ed.Beskos,D.E.), North-Holland.
- Burns,T.J.(1975).
The Partial Current Balance Method: A Local Green's Function Technique for the Numerical Solution of Multidimensional Neutron Diffusion Problems. Urbana, Univ. Illinois.(Ph.D. Thesis).
- Oden,J.T. & Carey, G.F. (1983).
Finite Elements: A Second Course. Vol.2. Prentice-Hall, Inc..New Jersey.
- Dorning,J.J.(1981).
A Review of Green's Function Method in Computational Fluid Mechanics", Joint ANSENS International Topical Meeting on Advances in Mathematical Methods for Solution of Nuclear Engineering Problems, Munich.
- Horak,W.C.(1980).
Local Green's Function Techniques for the Solution of Heat Conduction and Incompressible Fluid Flow Problems. Urbana, Univ. Illinois (Ph.D. Thesis).
- Jaswon,M.A. & Symm,G.T. (1977).
Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics, Academic Press.
- Miklin,S.G.(1970).
Mathematical Physics, an Advanced Course. North-Holland Publishing Company, Amsterdam and London.
- Oden,J.T. & Reddy,J.N.(1976).
An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements, John Wiley & Sons.
- Silva,L.H.M.(1988).
Novas Formulações Integrais para Problemas da Mecânica. Univ. Federal de Santa Catarina (Ph.D.Thesis).

CAPÍTULO 3

O MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO (MLGFM) APLICADO A PROBLEMAS DE POTENCIAL

3.1-INTRODUÇÃO

A Teoria Potencial estuda a solução das equações de Poisson e Laplace. Tais equações são caracterizadas por dois fatores extremamente interessantes para a análise numérica:

1.A equação diferencial é "bastante simples", permitindo sua análise com uso de escalares. Este fato quase que necessariamente torna este tipo de problema o marco inicial de novas técnicas numéricas, como aconteceu com o Método de Elementos de Contorno (BEM); e

2.A equação na sua forma genérica representa um número muito grande de aplicações práticas, como: o campo gravitacional, escoamento potencial de fluidos, escoamento de fluido incompressível em meios porosos rígidos, fluxo de calor, fluxo de corrente elétrica em condutores, campo magnético induzido por corrente elétrica, torção de eixo,....

Devido a estas duas principais características, os problemas de potenciais tem sido vastamente estudados com o uso de técnicas analíticas e numéricas. As técnicas analíticas estabelecem questões sobre a existência e a unicidade das soluções, porém tornam-se inviáveis na medida em que o contorno, as condições de contorno, a excitação e/ou as propriedades físicas do meio se

tornam complexas. Numericamente, os métodos de Elementos Finitos (FEM), Elementos de Contorno (BEM) e Volumes Finitos vem sendo largamente utilizados e, comparativamente, os resultados apresentados pelo BEM se mostram bastante atrativos com relação às outras técnicas.

Apesar das excelentes propriedades de convergência tanto para potencial como para fluxo alcançadas pelo BEM, existe um grande inconveniente que limita as aplicações do método: o conhecimento prévio de uma solução fundamental do problema adjunto. Situações de não homogeneidade das constantes físicas são suficientes para inviabilizar o cálculo de uma solução fundamental e incompatibilizar a aplicação do método.

Recentemente, Silva (1988) e Barcellos & Silva (1987), desenvolveram e utilizaram o Método da Função de Green Local Modificado na solução do problema de membranas elásticas, eliminando este inconveniente do BEM e mantendo as características de superconvergência tanto para fluxo como para potencial. Barbieri & Barcellos (a ser publicado, 1992) mostraram que o MLGFM pode ser compreendido como sendo uma extensão do Galerkin-BEM.

Nos próximos itens, apresenta-se o detalhamento desse método para os problemas de potencial, comparações com outros métodos numéricos, taxas experimentais de convergência para as versões h e p , aplicações para problemas singulares e de não homogeneidade das propriedades físicas.

3.2-FORMALISMO DO MLGFM PARA OS PROBLEMAS DE POTENCIAL.

Nos problemas de potencial, o interesse é minimizar funcionais do tipo:

$$J(u) = 0.5 B(u,u) + F(b,u) - f(q,u) \quad (3.1)$$

onde $B(\cdot,\cdot)$ é a forma bilinear

$$B(u,u) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot H \cdot \nabla u - \lambda u^2) d\Omega \quad (3.2)$$

sendo λ uma função escalar específica do meio, H da forma

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

e $F(b,u)/f(q,u)$ também são formas bilineares definidas como:

$$F(b,u) = \int_{\Omega} b u \, d\Omega \quad (3.4)$$

$$e \quad f(q,u) = \int_{\partial\Omega_q} q u \, d\partial\Omega_q \quad (3.5)$$

Sem perda de generalidade, de agora em diante são adotadas as hipóteses: $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e H é simétrica. Minimizando o funcional $J(u)$ obtem-se o seguinte sistema:

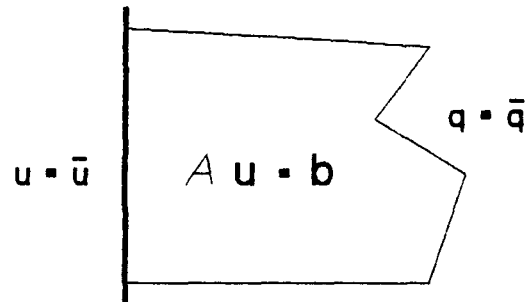
$$\begin{aligned} -[(h_{11} u, x), x + 2(h_{12} u, y), x + (h_{22} u, y), y] - \lambda u &= -b & \text{em } \Omega \\ u &= \bar{u} & \text{em } \partial\Omega_u \\ q &= \bar{q} & \text{em } \partial\Omega_q \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde $\partial\Omega_u$ e $\partial\Omega_q$ representam partes do contorno onde o potencial u e o fluxo q são especificados, respectivamente; b é a excitação, h_{jk} e λ são constantes físicas do meio e o símbolo $(\cdot)_{,k}$ indica derivada parcial com relação a coordenada "k". Dessa minimização ainda resulta:

$$q = h_{11} n_x u, x + h_{12} n_x u, y + h_{21} n_y u, x + h_{22} n_y u, y \quad (3.7)$$

onde (n_x, n_y) são as componentes do vetor normal ao contorno, n .

Das Eqs. (3.6) e (3.7) identifica-se o operador diferencial \mathcal{A} e o operador de Neumann \mathcal{N} , respectivamente. Os respectivos operadores para o problema adjunto são obtidos reescrevendo $B(\cdot, \cdot)$ na forma:

Fig.1-Identificação de $\partial\Omega_u$ e $\partial\Omega_q$.

$$B(G, u) = \int_{\Omega} (\nabla G \cdot H \cdot \nabla u - \lambda G u) d\Omega \quad (3.8)$$

e com posterior minimização com relação a u . Desse processo obtem-se:

$$A = A^* = -[h_{11}(\cdot), x], x - 2[h_{12}(\cdot), y], x - [h_{22}(\cdot), y], y - \lambda(\cdot) \quad (3.9)$$

e

$$N = N^* = h_{11} n_x(\cdot), x + h_{12} n_x(\cdot), y + h_{21} n_y(\cdot), x + h_{22} n_y(\cdot), y \quad (3.10)$$

De posse dos operadores diferenciais do problema adjunto, as aproximações da função de Green podem ser calculadas pelo Método de Elementos Finitos resolvendo os problemas 1^* e 2^* , equações (2.106)-(2.107) e (2.108)-(2.109), respectivamente.

Para facilitar a visualização, admite-se que a discretização do domínio seja feita com elementos finitos bilineares (4 nós) e a do contorno com elementos lineares (2 nós). Dessa maneira, a aproximação do escalar u em cada elemento de domínio pode ser escrita como:

$$u = [\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \psi_4] \{ u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \}^t = [\Psi] \{u\} \quad (3.11)$$

onde ψ_i, u_i representam a i -ésima função de interpolação de domínio e o valor de u no nó " i " local, respectivamente. A mesma aproximação pode ser realizada no contorno com uso das funções de interpolação de contorno calculadas como "traço" das funções de interpolação de domínio, i.é:

$$u = [\phi_1 \phi_2] \{ u_1 u_2 \}^t = [\Phi] \{u\} \quad (3.12)$$

onde ϕ_i é a i -ésima função de interpolação local de contorno e u_i o valor do potencial u no nó local " i ".

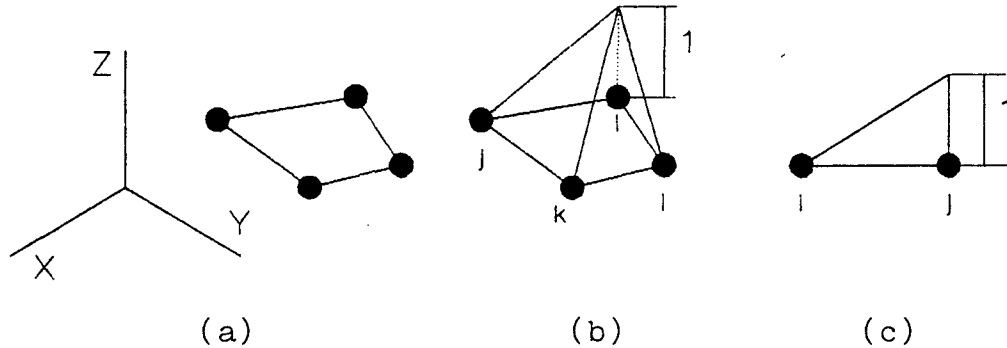


Fig.2- Elemento Finito Bilinear (a) i -ésima Função de Interpolação de Domínio (b) e j -ésima Função de Interpolação de Contorno.

Globalmente, i.é., usando as funções de interpolação globais, o escalar u é aproximado no domínio com:

$$u = [\psi_1 \psi_2 \psi_3 \dots \psi_{ntn}] \{ u_1 u_2 u_3 \dots u_{ntn} \}^t = [\Psi] \{u\} \quad (3.13)$$

onde ψ_i representa agora a i -ésima função de interpolação de domínio global e " ntn " o número total de nós da discretização. De maneira análoga, no contorno tem-se :

$$u = [\phi_1 \phi_2 \dots \phi_{ntnc}] \{ u_1 u_2 \dots u_{ntnc} \}^t = [\Phi] \{u\} \quad (3.14)$$

onde ϕ_i representa agora a i -ésima função de interpolação global do contorno e " $ntnc$ " o número total de nós no contorno.

Note que, uma vez estabelecido o tipo de elemento e a malha utilizada, o espaço $\mathcal{V}(h, r)$ de elementos finitos onde as projeções da Função de Green são realizadas também está definido e caracterizado pelas grandezas h e r que definem o maior diâmetro externo dentre os elementos da malha e o grau do polinômio aproximador, respectivamente.

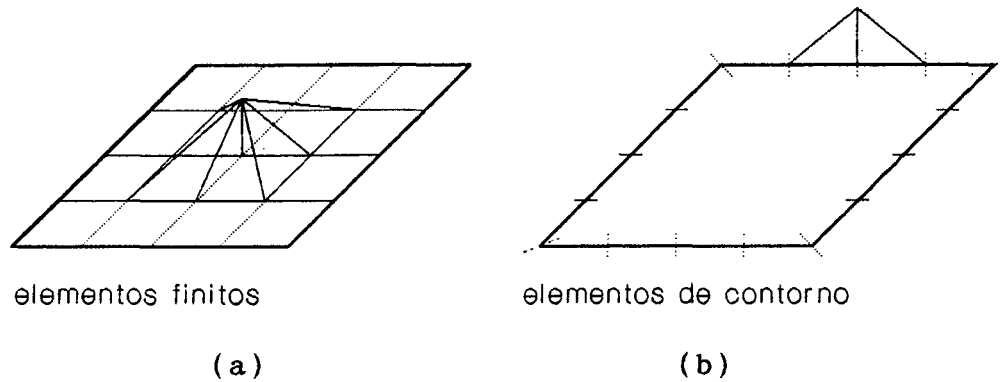


Fig.3- Funções de Interpolação Globais de Domínio (a)
Funções de Interpolação Globais de Contorno (b)

3.2.1- APROXIMAÇÃO DAS PROJEÇÕES DA FUNÇÃO DE GREEN.

As projeções da função de Green $G_d(P)$, $G_d(p)$, $G_c(P)$ e $G_c(p)$, definidas no Capítulo 2, são calculadas com o Método de Elementos Finitos e a partir dos Problemas 1 e 2; Eqs.(2.90)-(2.91) e (2.92)-(2.93), respectivamente. Repete-se por conveniência e para maior detalhamento, todo o procedimento realizado a partir desses dois problemas para o cálculo dessas projeções.

3.2.1.1- APROXIMAÇÃO DE $G_d(P)/G_d(p)$

Para obter as projeções $G_d(P)$ e $G_d(p)$, do Problema 1 tem-se:

$$\mathcal{A}^* G(P, Q) = \delta(P, Q) \quad \forall P, Q \in \Omega \quad (3.15)$$

$$(N^* + N') G(p, Q) = 0 \quad \forall Q \in \Omega; p \in \partial\Omega \quad (3.16)$$

Pós-multiplicando a Eq.(3.15) por $[\Psi(Q)]$ e integrando no domínio Ω mantendo o ponto "P" fixo, resulta:

$$\mathcal{A}^* \text{Gd}(P) = [\Psi(P)] \quad (3.17)$$

e com mesmo procedimento a partir da Eq.(3.16) obtem-se:

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') \text{Gd}(p) = 0 \quad (3.18)$$

Note que $\text{Gd}(P)$ é da forma:

$$\text{Gd}(P) = \int_{\Omega} G(P,Q) [\Psi(Q)] d\Omega_Q = [\text{gd}_1(P) \text{gd}_2(P) \dots \text{gd}_{\text{ntn}}(P)] \quad (3.19)$$

$$\text{onde } \text{gd}_j(P) = \int_{\Omega} G(P,Q) \psi_j(Q) d\Omega_Q .$$

A termo $\text{gd}_j(P)$ representa a j -ésima componente da projeção da Função de Green $G(P,Q)$ na base que define o espaço de elementos finitos $\mathcal{V}(\mathcal{h}, \mathcal{r})$.

Assim sendo, a Eq.(3.17) pode ser reescrita em termos de cada uma das componentes dessa projeção, i.é:

$$\mathcal{A}^* \text{gd}_j(P) = \psi_j(P) \quad j=1,2,\dots,\text{ntn} \quad (3.20)$$

e a Eq.(3.18) como:

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') \text{gd}_j(p) = 0 \quad j=1,2,\dots,\text{ntnc} \quad (3.21)$$

Dessas duas últimas equações, conclui-se que cada componente da projeção da Função de Green $\text{Gd}(P)$ na base do espaço $\mathcal{V}(\mathcal{h}, \mathcal{r})$ obedece também à equação diferencial do problema adjunto original, porém com modificações nas condições de contorno devido a presença do operador \mathcal{N}' (daí o nome MLGFM). Como comentado no Capítulo 2, a regularidade da projeção $\text{Gd}(P)/\text{Gd}(p)$ é superior à da função de Green $G(P,Q)$ e tal fato é facilmente verificado através das Eqs.(3.15) e (3.20). Enquanto em (3.15) o termo de excitação é a "função δ -Dirac", na (3.20) a excitação tem (no mínimo) continuidade $\mathcal{C}^0(\Omega)$.

Finalmente, a última etapa é obter a partir das Eqs. (3.20) e (3.21) a aproximação de elementos finitos. A maneira mais apropriada é aplicar o Galerkin-FEM (não é necessário o conhecimento de um funcional na sua forma explícita), porém, neste caso, é possível escrever o funcional $J(\text{gd}_j)$ cuja minimização resulta as duas equações citadas. Este funcional é :

$$J(\text{gd}_j) = 0.5 B(\text{gd}_j, \text{gd}_j) + B_1(\text{gd}_j, \psi_j) - 0.5 B_2(\text{gd}_j, \text{gd}_j) \quad (3.23)$$

onde $B(\cdot, \cdot)$ é a forma bilinear do problema original

$$B(\text{gd}_j, \text{gd}_j) = \int_{\Omega} \{ \nabla \text{gd}_j \cdot \mathbf{H} \cdot \nabla \text{gd}_j - \lambda \text{gd}_j \cdot \text{gd}_j \} d\Omega \quad (3.24)$$

$B_1(\cdot, \cdot)$ é outra forma bilinear sobre o domínio

$$B_1(\text{gd}_j, \psi_j) = \int_{\Omega} \text{gd}_j \psi_j d\Omega \quad (3.25)$$

e $B_2(\cdot, \cdot)$ é uma forma bilinear definida no contorno na forma

$$B_2(\text{gd}_j, \text{gd}_j) = \int_{\partial\Omega} \text{gd}_j (\mathcal{N}' \text{gd}_j) d\partial\Omega \quad (3.26)$$

Expandindo a componente $\text{gd}_i(P)$ com a técnica de elementos finitos tem-se:

$$\text{gd}_i(P) = [\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_{\text{ntn}}] [\text{gd}_{i1} \ \text{gd}_{i2} \ \dots \ \text{gd}_{i,\text{ntn}}]^t \quad (3.27)$$

que pode ser reescrita como:

$$\text{gd}_i(P) = [\Psi(P)] \{G^{DP}\}_i \quad (3.28)$$

onde $[\Psi(P)]$ é o conjunto das funções de interpolação de domínio de elementos finitos, gd_{ik} representa o valor no nó "k" da i-ésima componente da projeção $Gd(P)$ e $\{G^{DP}\}_i$ é o vetor:

$$\{G^{DP}\}_i = [\text{gd}_{i1} \ \text{gd}_{i2} \ \dots \ \text{gd}_{i,\text{ntn}}]^t \quad (3.29)$$

Admitindo esta expansão para a projeção $Gd(P)$ e minimi-

zando o funcional $J(gd_i)$ com respeito a cada componente gd_i com o FEM, obtem-se o sistema de equações:

$$[K+K^*][G^{DP}] = [M] \quad (3.30)$$

onde $[K]$ é a matriz convencional de elementos finitos para problemas de potencial. Por exemplo,

$$[K] = \int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} \psi_i',x \\ \psi_i',y \end{bmatrix}^t H \begin{bmatrix} \psi_j',x \\ \psi_j',y \end{bmatrix} + \lambda \psi_i \psi_j \right\} d\Omega \quad (3.31)$$

$i, j = 1, ntn$

para a análise bidimensional. A matriz $[K^*]$ é proveniente da modificação introduzida quando o operador \mathcal{N}' é especificado no contorno e/ou partes do contorno e vale:

$$[K^*] = \int_{\partial\Omega} [\Phi]^t [\mathcal{N}'\Phi] d\partial\Omega \quad (3.32)$$

A matriz $[M]$ tem formato idêntico à matriz massa com densidade unitária, i.é:

$$[M] = \int_{\Omega} [\Psi]^t [\Psi] d\Omega \quad (3.33)$$

Para problemas de potencial, o operador \mathcal{N}' pode ser arbitrado simplesmente na forma $\mathcal{N}'=k_0$, onde k_0 é uma constante não nula e seguindo as orientações citadas no Capítulo 2.

3.2.1.2-APROXIMAÇÃO DE $G_c(P)/G_c(p)$

De maneira completamente análoga ao realizado para obter as projeções $G_d(P)$ e $G_d(p)$, as projeções $G_c(P)$ e $G_c(p)$ são calculadas a partir do Problema 2, i.é:

$$\mathcal{A}^* G(P, q) = 0 \quad \forall P \in \Omega; q \in \partial\Omega \quad (3.34)$$

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') G(p, q) = \delta(p, q) \quad \forall p, q \in \partial\Omega \quad (3.35)$$

Pós-multiplicando a Eq.(3.34) por $[\Phi(q)]$ e integrando no contorno $\partial\Omega$ mantendo o ponto "P" fixo, resulta:

$$\mathcal{A}^* Gc(P) = 0 \quad (3.36)$$

e com mesmo procedimento a partir da Eq.(3.35), mantendo agora o ponto "p" fixo, obtem-se:

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') Gc(p) = [\Phi(p)] \quad (3.37)$$

Note que $Gc(P)$ é da forma:

$$Gc(P) = \int_{\partial\Omega} G(P, q) [\Phi(q)] d\partial\Omega_q = [gc_1(P) gc_2(P) \dots gc_{ntn}(P)] \quad (3.38)$$

$$\text{onde } gc_j(P) = \int_{\partial\Omega} G(P, q) \phi_j(q) d\partial\Omega_q .$$

A parcela $gc_j(P)$ representa a j -ésima componente da projeção da Função de Green, $Gc(P)$, na base de elementos finitos definida sobre o contorno do domínio. Ou seja, são funções de interpolação de grau η definidas como traço das funções de interpolação que formam a base de $\mathcal{V}(h, \eta)$.

Assim sendo, a Eq.(3.36) pode ser reescrita em termos de cada componente dessa projeção, i.é :

$$\mathcal{A}^* gc_j(P) = 0 \quad j=1, 2, \dots, ntn \quad (3.39)$$

e a Eq.(3.37) como:

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') gc_j(p) = \phi_j(p) \quad j=1, 2, \dots, ntn \quad (3.40)$$

Novamente, cada uma das projeções da Função de Green na base do contorno também obedece a mesma equação diferencial do problema adjunto com mudanças apenas no termo de excitação e nas condições de contorno. Os mesmos comentários com relação a regu-

laridade efetuados no item anterior são válidos para $Gc(P)/Gc(p)$.

Assim como para a projeção $Gd(P)$, é possível escrever o funcional $J(gc_j)$ cuja minimização resulta nas duas equações anteriores. Este funcional assume a forma:

$$J(gc_j) = 0.5 B(gc_j, gc_j) + B_3(gc_j, \phi_j) - 0.5 B_4(gc_j, gc_j) \quad (3.41)$$

onde $B(\cdot, \cdot)$ é a forma bilinear do problema original

$$B(gc_j, gc_j) = \int_{\Omega} \{ \nabla gc_j \cdot H \cdot \nabla gc_j - \lambda gc_j \cdot gc_j \} d\Omega \quad (3.42)$$

$B_3(\cdot, \cdot)$ é a forma bilinear sobre o contorno

$$B_3(gc_j, \phi_j) = \int_{\partial\Omega} gc_j \phi_j d\partial\Omega \quad (3.43)$$

e $B_4(\cdot, \cdot)$ é outra forma bilinear definida no contorno e na forma

$$B_4(gc_j, gc_j) = \int_{\partial\Omega} gc_j (N' gc_j) d\partial\Omega \quad (3.44)$$

Expandindo a componente $gc_i(P)$ via elementos finitos tem-se:

$$gc_i(P) = [\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_{ntn}] [gc_{i1} \ gc_{i2} \ \dots \ gc_{i"ntn"}]^t \quad (3.45)$$

que pode ser reescrita na forma:

$$gc_i(P) = [\Psi(P)] \{G^{CP}\}_i \quad (3.46)$$

onde $[\Psi(P)]$ é o conjunto das funções de interpolação de domínio de elementos finitos, gc_{ik} representa o valor no nó "k" da "i-ésima" componente da projeção $Gc(P)$ e $\{G^{CP}\}_i$ é o vetor:

$$\{G^{CP}\}_i = [gc_{i1} \ gc_{i2} \ \dots \ gc_{i"ntn"}]^t \quad (3.47)$$

Admitindo esta expansão para a projeção $Gc(P)$ e minimizando o funcional $J(gc_i)$ com respeito a cada componente gc_i com o FEM, obtem-se o sistema de equações:

$$[K+K^*][G^{CP}] = [m] \quad (3.48)$$

onde $[K]$ e $[K^*]$ são as matrizes citadas anteriormente e $[m]$ vale:

$$[m] = \int_{\partial\Omega} [\Phi]^t [\Phi] d\partial\Omega \quad (3.49)$$

Finalmente, as Eqs. (3.30) e (3.48) podem ser reescritas na forma:

$$[K+K^*][G^{DP}; G^{CP}] = [M; m] \quad (3.50)$$

de onde são obtidos os valores nodais de cada uma das projeções da Função de Green $Gd(P)$ e $Gc(P)$. Como os valores de $Gd(p)$ e $Gc(p)$ são traços dos valores de $Gd(P)$ e $Gc(P)$, respectivamente; estas quantidades também são calculadas com a solução do sistema (3.50).

3.3- SISTEMA FINAL DE EQUAÇÕES

Usando a Forma de Green Generalizada para o operador diferencial \mathcal{A} e introduzindo as hipóteses do MLGFM, mostrou-se no Capítulo 2 que o valor do potencial $u(Q)$; $\forall Q \in \Omega$, vale :

$$u(Q) = \int_{\Omega} G(P, Q)^t b(P) d\Omega_P + \int_{\partial\Omega} G(p, Q)^t F(p) d\partial\Omega_p \quad (3.51)$$

e usando a propriedade do traço nesta equação tem-se:

$$u(q) = \int_{\Omega} G(P, q)^t b(P) d\Omega_P + \int_{\partial\Omega} G(p, q)^t F(p) d\partial\Omega_p \quad (3.52)$$

para $\forall q \in \partial\Omega$, sendo $F(p) = \int_{\partial\Omega} (N+N')u(p) d\partial\Omega$ e $b(P)$ a força de corpo generalizada.

Finalmente, usando a discretização de elementos finitos e aplicando o método residual de Galerkin nestas duas equações

obtem-se:

$$\mathbf{A} \{u\}^D = \mathbf{B} \{f\} + \mathbf{C} \{b\} \quad (3.53)$$

$$\mathbf{D} \{u\}^C = \mathbf{E} \{f\} + \mathbf{F} \{b\} \quad (3.54)$$

onde $\{f\}$ e $\{b\}$ representam os valores nodais de $F(p)$ e $b(P)$, respectivamente. As matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} ,...e \mathbf{F} são obtidas a partir de integrações e valem:

$$\mathbf{A} = \int_{\Omega} [\Psi(Q)]^t [\Psi(Q)] d\Omega = [\mathbf{M}] \quad (3.55)$$

$$\mathbf{B} = \int_{\partial\Omega} Gd(p)^t [\Phi(p)] d\partial\Omega_p \quad (3.56)$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} Gd(P)^t [\Psi(P)] d\Omega \quad (3.57)$$

$$\mathbf{D} = \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]^t [\Phi(q)] d\partial\Omega_q = [\mathbf{m}] \quad (3.58)$$

$$\mathbf{E} = \int_{\partial\Omega} Gc(p)^t [\Phi(p)] d\partial\Omega_p \quad (3.59)$$

e

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} Gc(P)^t [\Psi(P)] d\Omega \quad (3.60)$$

Com as aproximações das projeções da Função de Green realizadas, de acordo com as Eqs.(2.118) e (2.119) escreve-se:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}^t = \mathbf{A} \mathbf{G}^{CP} \quad (3.61)$$

e

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{G}^{DP} \quad (3.62)$$

A última matriz necessária para completar a análise numérica do problema é a \mathbf{E} . Entretanto, de posse dos valores nodais de $[\mathbf{G}^{CP}]$, no contorno a projeção $Gc(p)$ pode ser aproximada por:

$$G_c(p) = [\Phi(p)] [G^{CP}] \quad (3.63)$$

onde $[G^{CP}]$ são valores nodais apropriadamente selecionados de $[G^C]$, i.é, são os valores do contorno (já conhecidos devido às características do FEM) necessários para as interpolações. Então, a matriz \mathbb{E} pode ser reescrita como:

$$\mathbb{E} = [G^{CP}]^t \int_{\partial\Omega} [\Phi(p)]^t [\Phi(p)] d\partial\Omega_p = [G^{CP}]^t \mathbb{D} \quad (3.64)$$

o que completa o cálculo de todas as matrizes.

3.4- APLICAÇÕES

Devido ao fato de que a Função de Green é projetada na base do espaço de elementos finitos $\mathcal{V}(k, r)$, para análise bi-dimensional foram utilizados os elementos ilustrados na Fig.4 para a aproximação dessas projeções. Na análise tri-dimensional os elementos usados são os que aparecem na Fig.5. Vale a pena lembrar, que a malha de elementos de contorno acompanha a malha de elementos finitos, i.é, para elementos finitos quadráticos usam-se também elementos de contorno quadráticos.

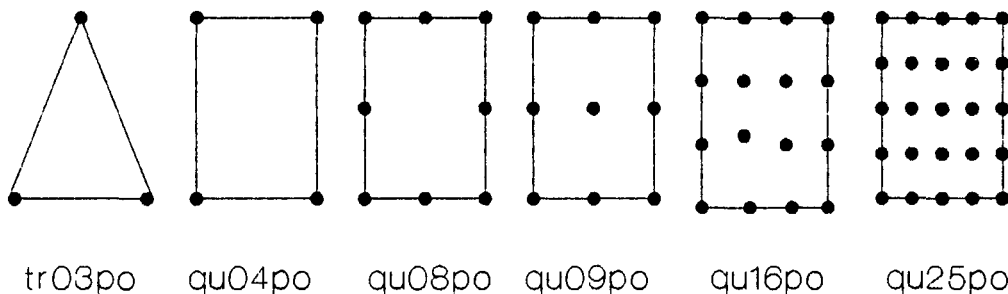


Fig.4- Elementos Usados na Análise Bi-Dimensional.

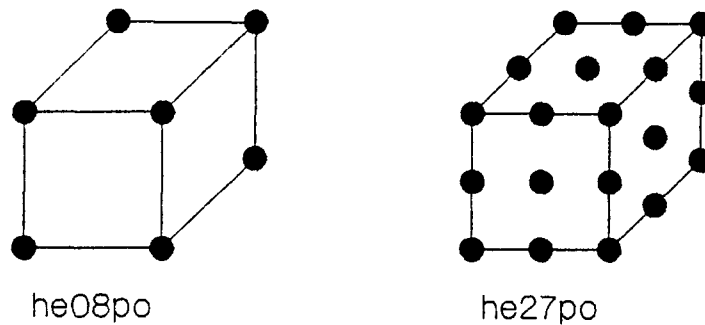


Fig.5- Elementos Usados na Análise Tri-Dimensional.

3.4.1-COMPARAÇÕES COM OUTROS MÉTODOS

As primeiras aplicações são estudadas com intuito puramente de comparar resultados com outras técnicas numéricas e/ou soluções analíticas. Assim temos :

Problema 1. Determinar $u(x)$ tal que

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= -2 [(1-x^2) + (1-y^2)] & \forall x \in \Omega \\ u(x) &= 0 & \forall x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

onde $\Omega = \{ x = (x,y) \in \mathbb{R}^2: -1 \leq x,y \leq 1 \}$ e $\partial\Omega = \{ x = (x,y) \in \mathbb{R}^2: x,y = \pm 1 \}$. A solução analítica é:

$$u(x,y) = (1-x^2)(1-y^2)$$

e a "energia de deformação", $U(u)$, é igual a 2.844444444E+0.

Com objetivo de demonstrar a eficiência do MLGFM, apenas um quarto do domínio é discretizado (devido a simetria do problema) com uso de um elemento finito qu04po e 4 elementos lineares de contorno, como mostra a Fig.6.

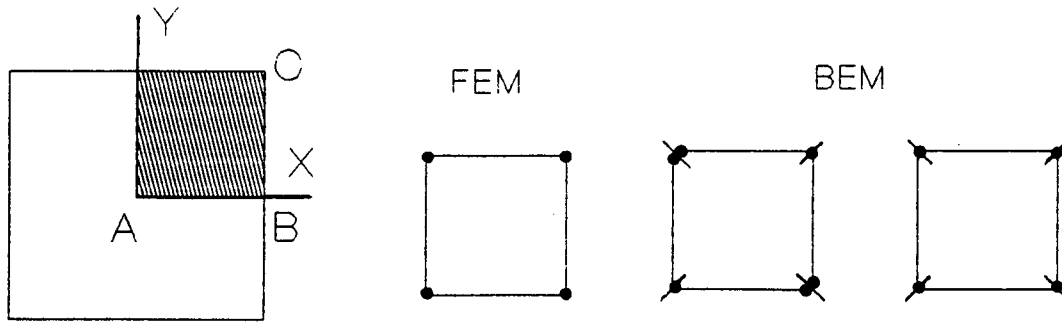


Fig.6- Domínio e Discretização do Domínio e Contorno.

Na Tab.1, apresentam-se dois resultados para o problema: o primeiro é obtido sem o uso de nós duplos e especificando-se potencial nulo nos nós de descontinuidade das condições de contorno e o segundo com nós duplos nestes pontos (Fig.6).

A Tabela 2 mostra a influência da escolha do operador N' e é montada com uso da malha com nós duplos citada anteriormente.

Três importantes conclusões podem ser tiradas desses resultados:

Tab.1- Solução Com e Sem Nós Duplos.

Pto	Analítico	Sem Nó Duplo	Com Nó Duplo
A	P 1.000E+00	.6000000000E+00	.1000000000E+01
B	P 0.000E+00	prescrito	-.2382354867E-15
	F -2.000E+00	-.8000000000E+00	-.2000000000E+01
C	F 0.000E+00	-.4000000000E+00	.7086356933E-15

P = Potencial F = Fluxo $k_0 = 1.0$

Tab.2- Influência de k_0 no Fluxo e Potencial.

k_0	Pto	Potencial	Fluxo
$\pm 1.0E-6$	A	.9999999999E+00	prescrito
	B	.1909441494E-09	-.2000000000E+01
	C	prescrito	.3274508714E-09
$\pm 1.0E-3$	A	.1000000000E+01	prescrito
	B	-.4468647674E-13	-.2000000000E+01
	C	prescrito	-.2568451690E-12
$\pm 1.0E+0$	A	.1000000000E+01	prescrito
	B	-.2382364867E-15	-.2000000000E+01
	C	prescrito	.7086356933E-15
$\pm 1.0E+3$	A	.1000000000E+01	prescrito
	B	-0.478885333E-16	-.2000000000E+01
	C	prescrito	.4900044090E-15
$\pm 1.0E+6$	A	.1000000000E+01	prescrito
	B	.3487011873E-16	-.2000000000E+01
	C	prescrito	.3929127336E-15

Solução Analítica: (P=Potencial F=Fluxo)

A:P=1.0 F=0.0 B:P=0.0 F=-2.0 C:P=0.0 F=0.0

1-O uso de nós simples em pontos de descontinuidade das condições de contorno e/ou da normal é totalmente inviável;

2-O fator k_0 não influencia na resposta; e

3-Existe superconvergência nodal para fluxo e potencial.

Note que se a resposta de potencial fosse obtida com uso direto do FEM, mesmo com os valores corretos da Tabela 1, o fluxo pós-processado no ponto B valeria apenas $-1.0E+0$. Outro aspecto interessante é o de que a energia obtida com o MLGFM é $1.333E+0$, reforçando o aspecto da superconvergência nodal.

Muito embora a convergência na norma da energia quase sempre é indicativo de que a convergência nodal aconteceu, a recíproca nem sempre é verdadeira (como prova o exemplo acima).

Problema 2. Determinar $u(r, \theta)$ tal que

$$\begin{aligned} \Delta u(r, \theta) &= 0 & \forall (r, \theta) \in \Omega \\ u(1, \theta) &= 1000 & \forall \theta \in (0, 2\pi) \\ u(32, \theta) &= 0 & \forall \theta \in (0, 2\pi) \end{aligned}$$

onde Ω é a seção anular de raio externo $R_e=32$ e raio interno $R_i=1$. A solução analítica é:

$$u(r, \theta) = T_i + [(T_e - T_i) / \ln(R_e / R_i)] \ln(r / R_i)$$

onde T_e/T_i representam as temperaturas no raio externo e interno, respectivamente.

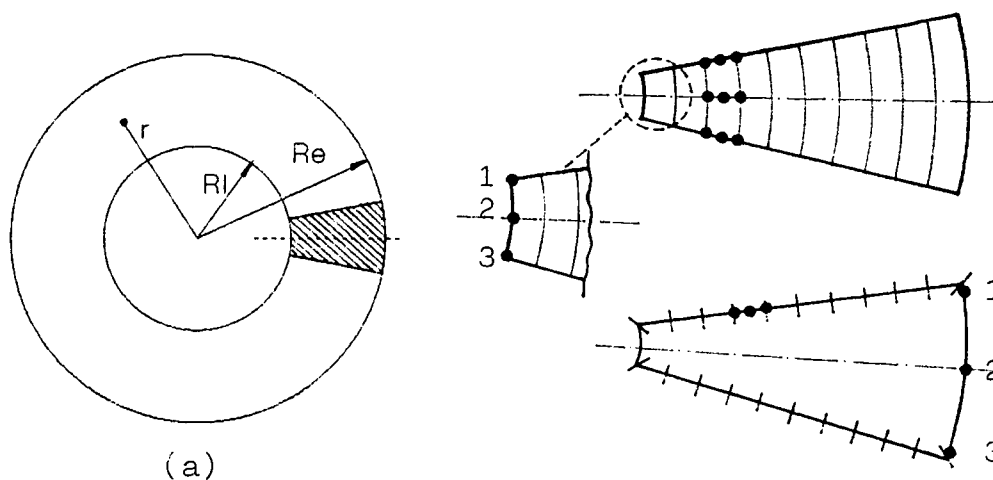


Fig.7- Domínio (a) e Discretização Utilizada.

Devido à independência do problema com relação a variável θ , apenas uma parte do domínio é discretizada com elementos quadráticos, como ilustrado na Fig.7. Nós duplos são utilizados em pontos de descontinuidade das condições de contorno e ou normal. Resultados para potencial são mostrados na Fig.8.

Na Tab.3 são encontrados os resultados para o fluxo no raio interno e externo para cada um dos nós situados nestas cotas.

Tab.3-Fluxos. Solução Analítica x MLGFM.

nó	R_i	R_e
1	288.7434	-9.0180
2	288.5535	-9.0199
3	288.7434	-9.0180
Anal.	288.5390	-9.0168

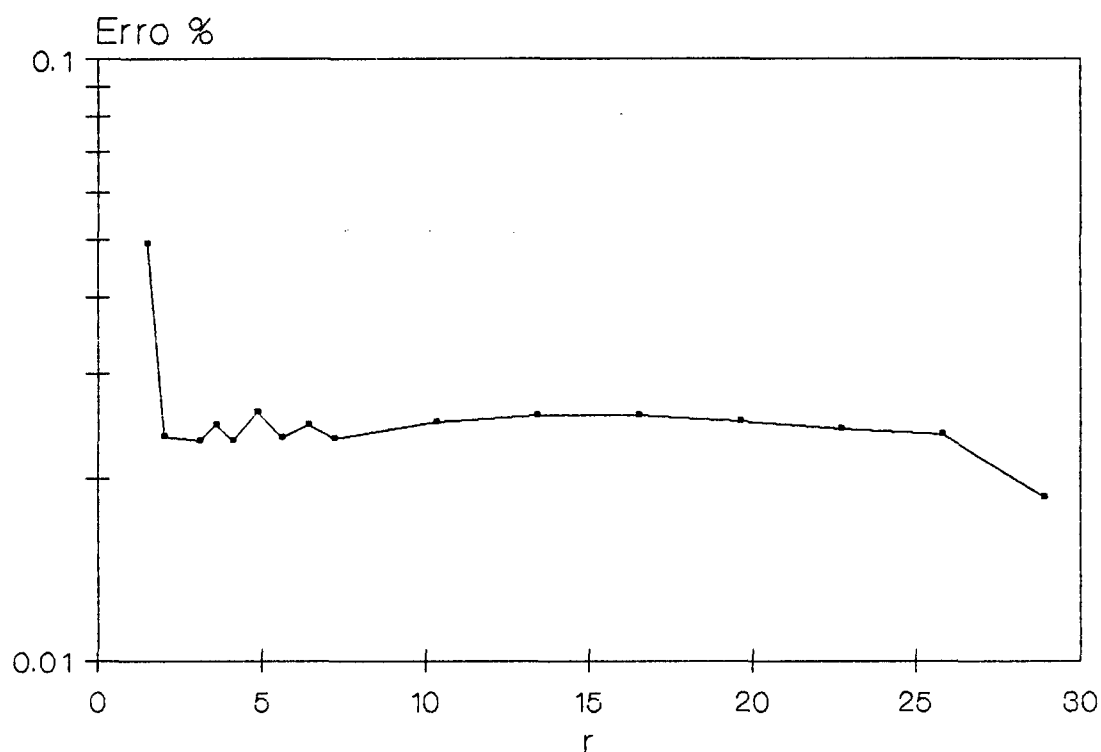


Fig.8- Erro % no Potencial ao longo do raio.

Como mostram a Fig.8 e a Tab.3, excelentes resultados tanto para potencial como para fluxo são obtidos com esta malha grosseira.

Problema 3. Determinar $u(x)$ tal que

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 & \forall x \in \Omega \\ u(x) &= T_m \cos(\pi x/\ell) & \forall x \in \partial\Omega_2 \\ u(x) &= 0 & \forall x \in \partial\Omega_1 \end{aligned}$$

onde $T_m=100$, $\ell=6$ e $\Omega = \{ x = (x,y) \in \mathbb{R}^2: -3 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 12 \}$, $\partial\Omega_2$ e $\partial\Omega_1$ são parcelas do contorno indicadas na Fig.9. A solução analítica desse problema é:

$$u(x,y) = T_m \left[\frac{\sinh(\pi y/\ell)}{\sinh(\pi b/\ell)} \right] \cos(\pi x/\ell)$$

onde $b=12$.

Devido à simetria do problema apenas uma metade do domínio foi discretizada impondo condição de fluxo nulo na linha de simetria. Nós duplos são usados em pontos de descontinuidade da normal ao contorno e/ou das condições de contorno.

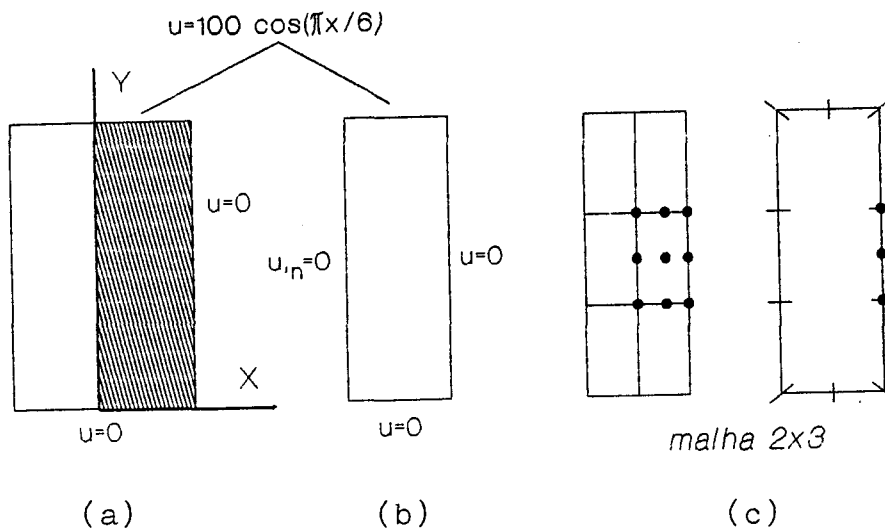


Fig.9- Domínio (a) Condições de Contorno (b) Discretização (c)

Usando a malha de 6×12 elementos qu04po o problema é resolvido com o MLGFM com a finalidade de comparar resultados com obtidos por Kanarachos & Provatidis (1989), mostrados na Fig.10. Estes resultados indicam boa concordância entre o MLGFM e o DBEM. Em alguns pontos a curva de erros indica também boa concordância com o Galerkin-BEM. Em $y=0$ e 12 o erro é nulo, pois nestas coordenadas utiliza-se nós duplos com valor de fluxo e potencial prescrito.

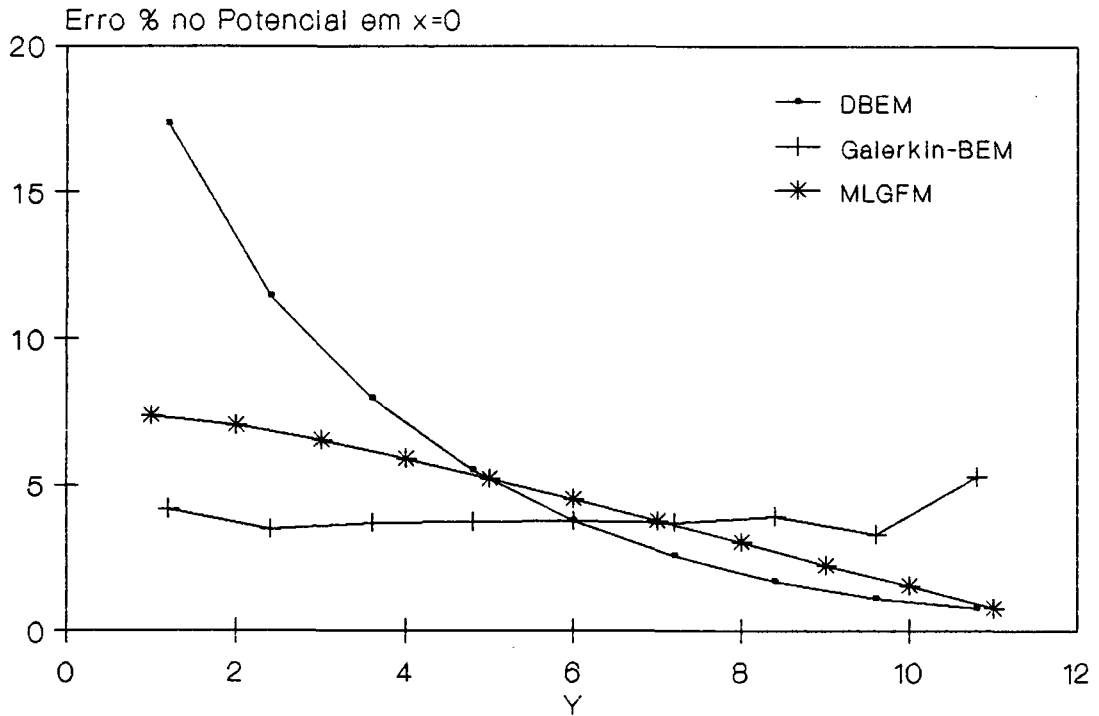


Fig.10- Erro %. Comparativo MLGFM x DBEM x Galerkin-BEM.

Apesar da boa concordância de resultados com outros métodos numéricos, a distância para a resposta correta ainda pode ser considerada "grande" para esta malha de elementos lineares. Assim, as malhas de elementos finitos e de elementos de contorno são reprojctadas com os elementos cúbicos, prevendo nós duplos em pontos de decontinuidade da normal, e os resultados de erro percentual no potencial são ilustrados nas Figs.11 e 12.

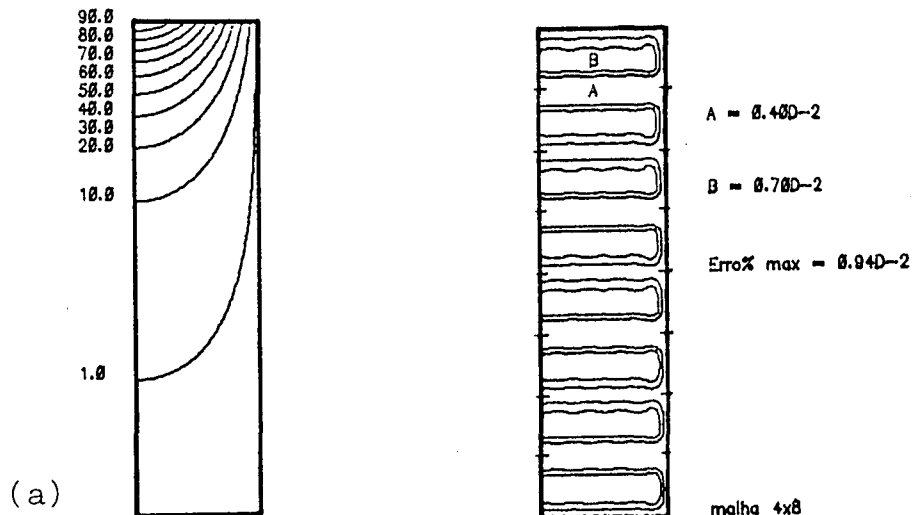


Fig.11 - Isopotencial Exato (a) Erro % com o Elemento qu16po.

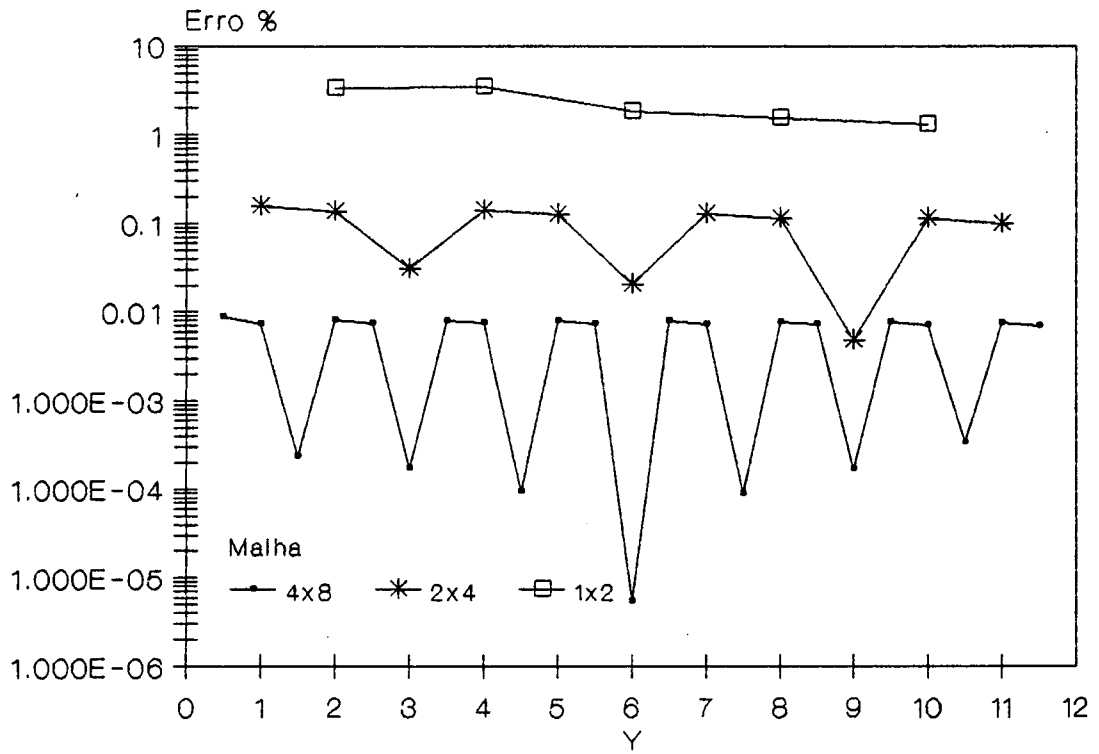


Fig.12a- Erro % Potencial em x=0.

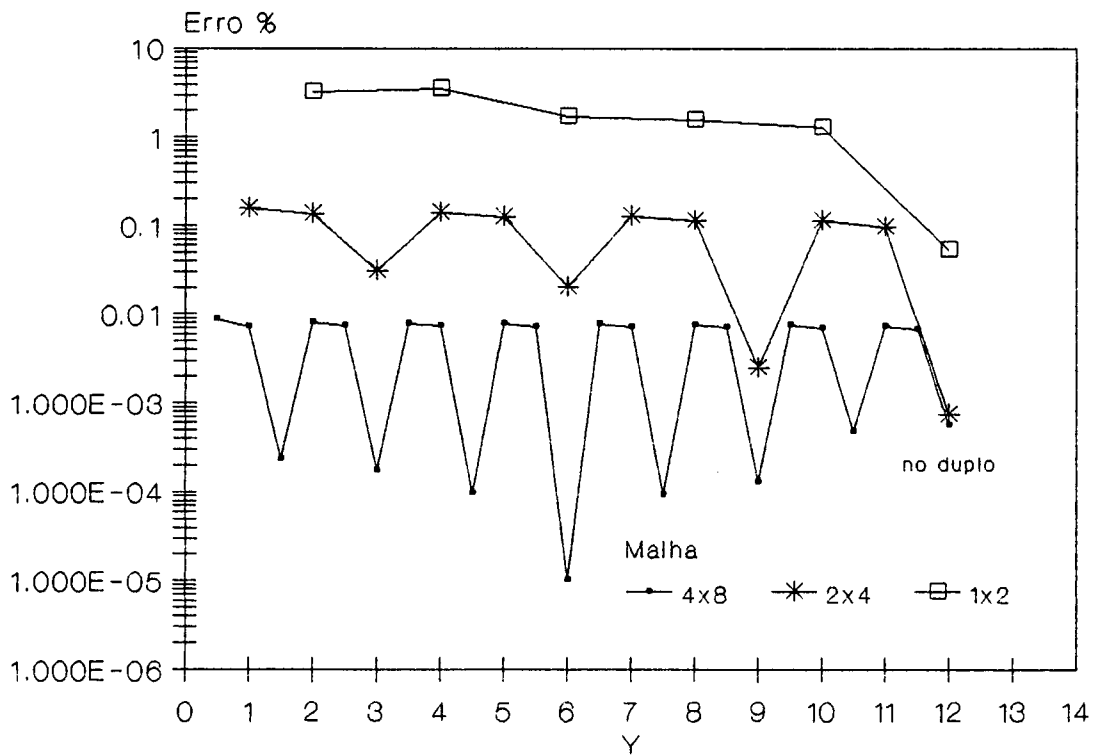


Fig.12b- Erro % Fluxo em x=3.

Com respeito à Fig.11, nota-se claramente que existe a *superconvergência* para o potencial nos nós inter-elementos. Este resultado também é confirmado na Fig.12a.

Na Fig.12a é mostrado o erro % no potencial ao longo da simetria para três malhas construídas com o elemento $qu16po$ (1x2, 2x4 e 4x8 elementos). É interessante notar a *superconvergência* citada acima.

Já na Fig.12b, aparecem as curvas de erro % no fluxo ao longo do lado $x=3$ para essas mesmas malhas. A *superconvergência* nos nós inter-elementos também é notória para o fluxo, porém nota-se um outro aspecto interessante que é a excepcional convergência de fluxo para os nós duplos em malhas mais grosseiras.

Entretanto, o aspecto da *superconvergência* nos nós inter-elementos não pode ser diretamente extrapolado para o elemento quadrático, como mostra a Fig.13. Neste caso, ocorre exatamente o contrário, a *superconvergência* ocorre nos nós intermediários.

Novamente, a Fig.14 aparentemente confirma a *superconvergência* de fluxo provocada por nós duplos para as malhas mais grosseiras. São ilustradas curvas para as malhas de 2x4, 3x6, 4x8 e 6x12 elementos $qu09po$.

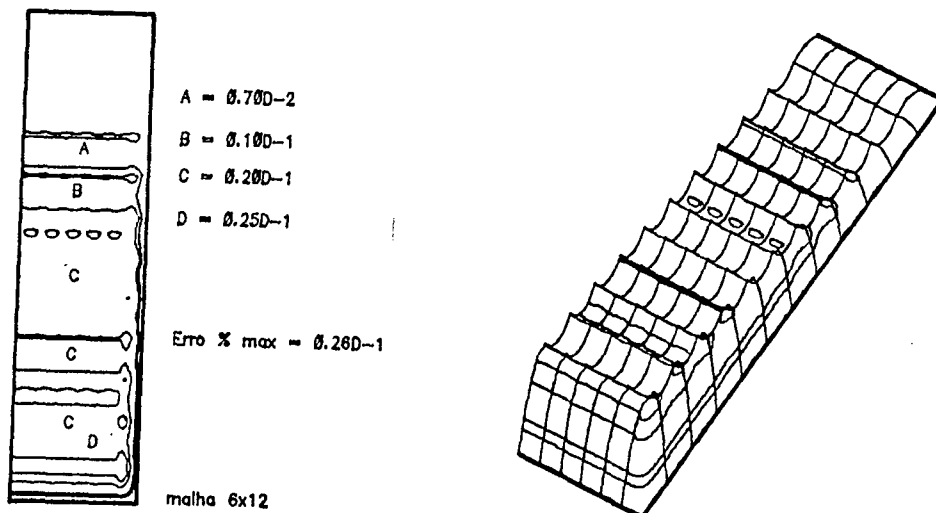


Fig.13-Erro % no Potencial para o $qu09po$.

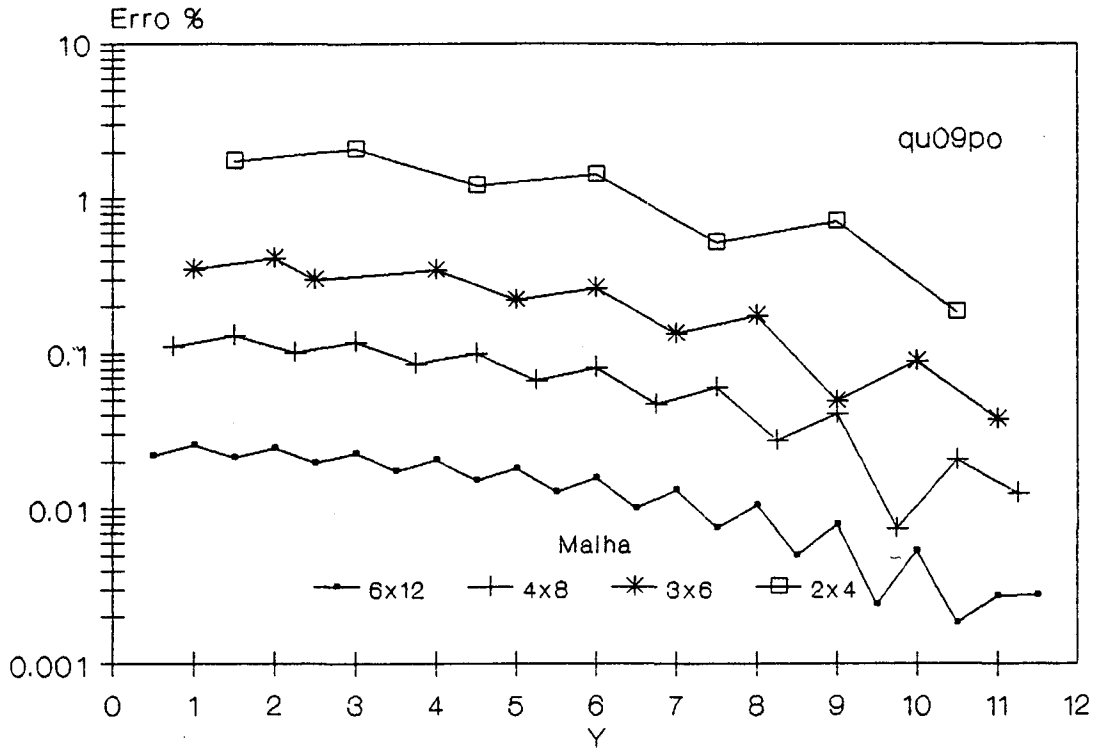


Fig.14a- Erro % no Potencial em x=0.

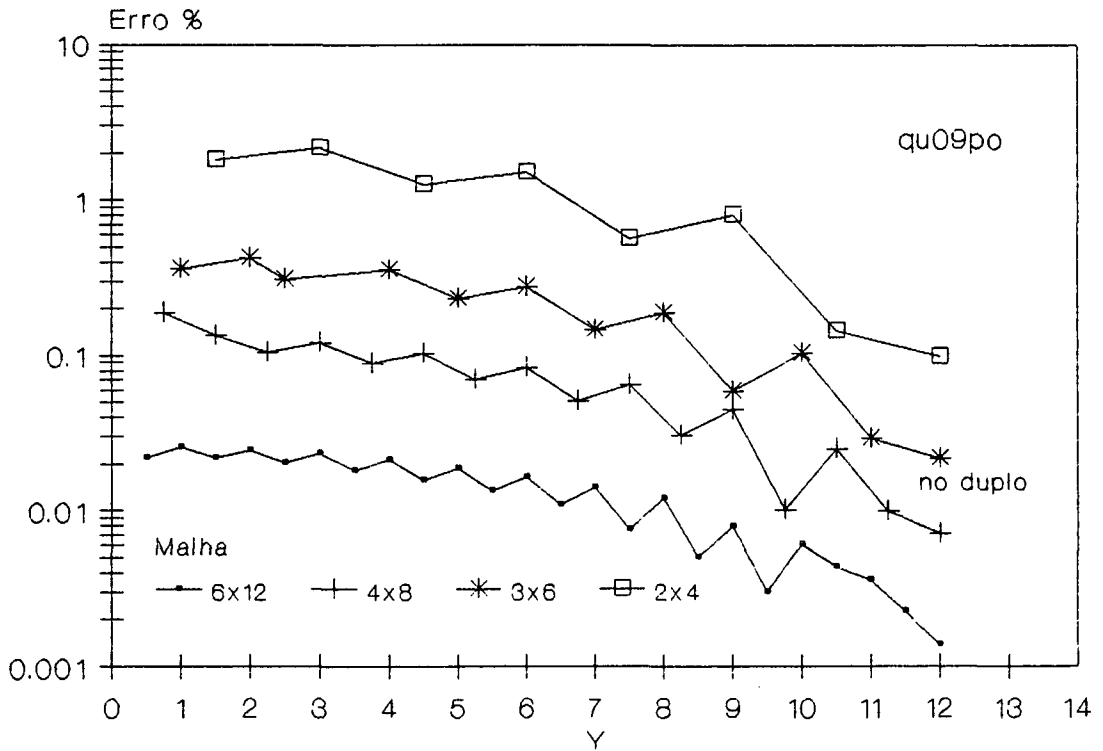


Fig.14b- Erro % no Fluxo em x=3.

O mesmo procedimento é repetido para o elemento qu04po com malhas de 2x4, 4x8, 6x12 e 8x16 elementos. Na Fig.15 mostra-se o erro % no potencial e nas Fig.16a e 16b o erro para o potencial na linha de simetria e fluxo em $x=3$, respectivamente. Apparently o nó duplo, como observado nos casos anteriores, provoca a superconvergência do fluxo. Porém, para o elemento linear esta superconvergência é bem mais acentuada.

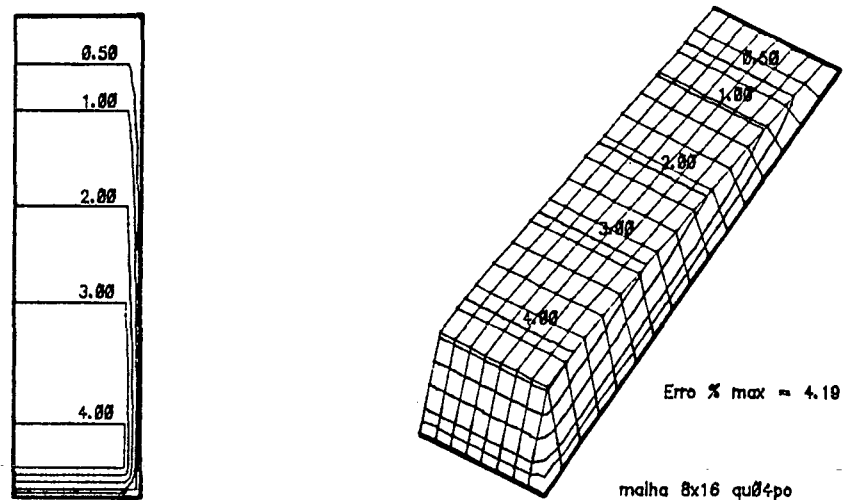


Fig.15- Erro % no Potencial para o qu04po.

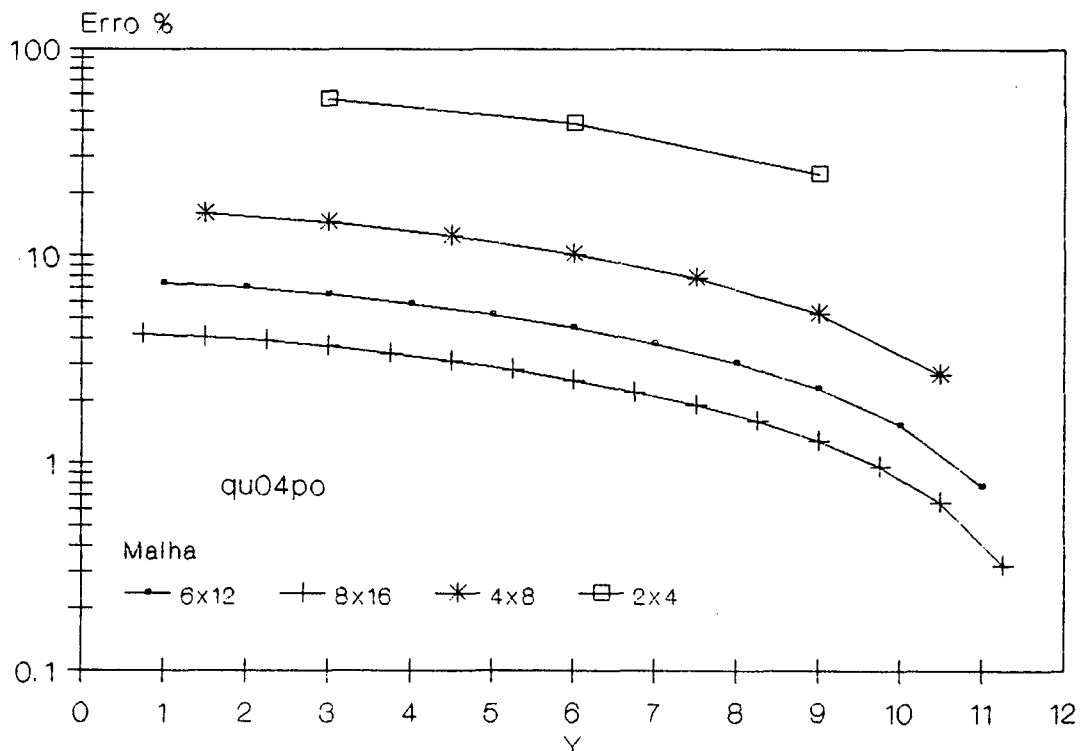


Fig.16a- Erro % no Potencial em $x=0$.

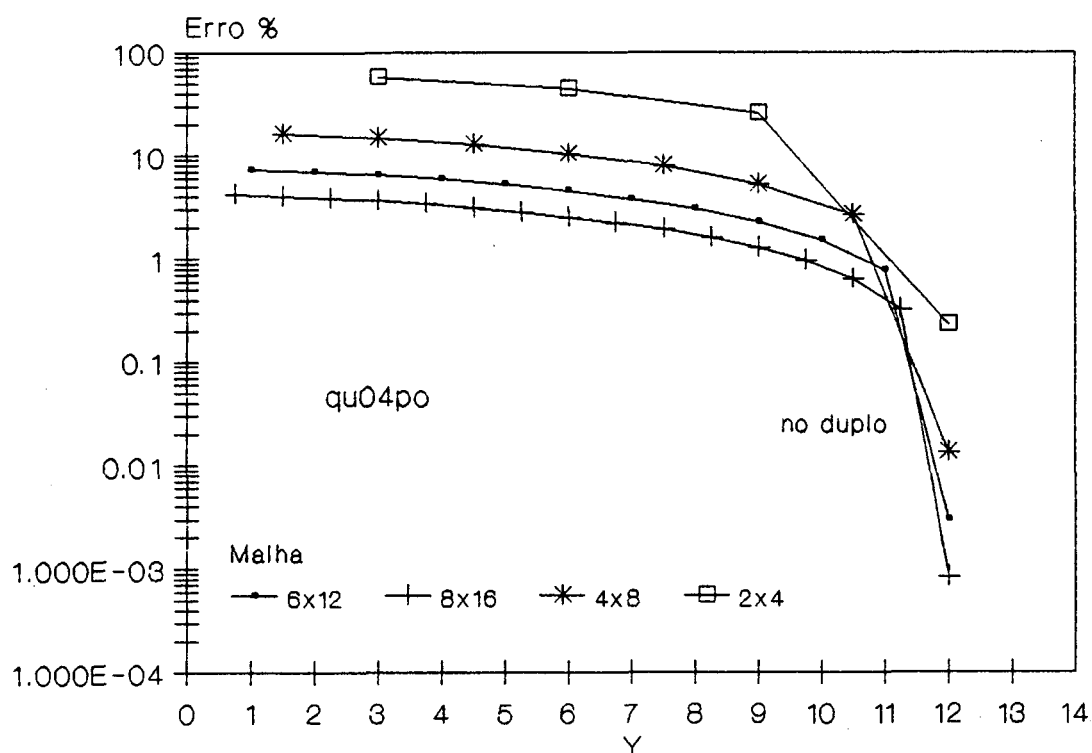


Fig.16b- Erro % no Fluxo em $x=3$.

Nas Figs.16a e 16b nota-se que os erros percentuais, tanto em fluxo como potencial, crescem na medida em que "y" decresce. Da solução analítica verifica-se que tanto o potencial como o fluxo se anulam em $y=0$ e isto explica a tendência destas curvas.

3.4.2-TAXAS DE CONVERGÊNCIA EXPERIMENTAIS PARA O MLGFM.

Uma vez que o MLGFM usa o FEM como método auxiliar para determinar projeções da Função de Green, é natural a pergunta: O MLGFM apresenta as mesmas características de convergência verificadas para o FEM ?. Uma segunda questão também é imediata: Uma vez que o MLGFM usa procedimento semelhante ao do Galerkin-BEM, existirá alguma relação entre as taxas de convergências desses métodos ?

Questões difíceis de responder !.

Devido ao fato de que as teorias matemáticas para o FEM estão bem estudadas e teoremas gerais para as versões h , p e

h - η estão disponíveis na literatura especializada, a primeira questão será respondida com a determinação experimental das taxas de convergência para o MLGFM. Entretanto, a segunda questão ficará com a resposta indefinida, pois para o BEM somente alguns trabalhos foram publicados nesta área e envolvendo problemas específicos, Babuska & all (1990) e Postell & Stephan (1990).

3.2.1- Estimativas de Erros A-Priori para o FEM

As diversas versões adaptativas do Método de Elementos Finitos (FEM) são normalmente comparadas através das curvas de erro \times número de equações para cada estimativa. O erro usualmente é medido na norma da energia definida como:

$$\|e\|_E^2 = 2.0 * U(e)$$

onde $U(e)$ é a "energia de deformação" do erro $e = u_0 - u_{FEM}$, sendo u_0 a solução exata do problema e u_{FEM} a aproximação obtida numericamente.

Designando por h o diâmetro externo do maior elemento da malha e por η o grau do polinômio utilizado nas funções de interpolação, é válido o seguinte teorema (Babuška & Suri, 1990):

Teorema

Seja $u_0 \in \mathcal{X}^k(\Omega)$, $k > 1$. Se o espaço de elementos finitos definido pelos parâmetros h e η é construído a partir de famílias de malhas uniformes (ou quase-uniformes), então

$$\|e\|_E \leq c h^\beta \eta^{-\alpha} \|u_0\|_{\mathcal{X}^k(\Omega)}$$

onde $\beta = \min(\eta, k-1)$, $\alpha = 2(k-1)$ e c uma constante que independe de u_0 , h e η . ■

Para soluções u_0 singulares do tipo:

$$u_0 \cong r^\gamma f(\theta), \quad \gamma > 0$$

e vértices dos elementos singulares localizados na singularidade,

a taxa de convergência da versão η é pelo menos o dobro do valor de β (Babuška & Suri, 1990).

Definindo $\|e\|_E^{ER}$ como

$$\|e\|_E^{ER} = 100 * (\|e\|_E / \|u_0\|_E)^{1/2}$$

e lembrando que $\|u_0\|_{\mathcal{H}^n(\Omega)} \leq c \|u_0\|_{\mathcal{H}^m(\Omega)}$ para $m \neq n$, m e n reais, do teorema anterior escreve-se (Oden & Reddy, 1976):

$$\|e\|_E^{ER} \leq c_1 h^\beta \eta^{-\alpha}$$

Problema 4. Determinar $u(x) \in \mathcal{H}^{3-\varepsilon}(\Omega)$, $0 < \varepsilon \ll 1$, tal que

$$\begin{aligned} \Delta u &= 1 & \forall x \in \Omega \\ u &= 0 & \forall x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

sendo $\Omega = \{ x=(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x,y \leq 1 \}$ e $\partial\Omega = \{ x=(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y = \pm 1 \}$, cuja solução analítica é:

$$u_0(x,y) = \frac{1-x^2}{2} - c \sum_{n=1,3,5}^{\infty} (-1)^{(n-1)/2} \frac{\cos(n\pi x/2) \cosh(n\pi y/2)}{n^3 \cosh(n\pi/2)}$$

onde $c=16/\pi^3$.

A taxa de convergência para a versão η do FEM vale:

$$\alpha = 2(k-1) = 4-2\varepsilon$$

e para a versão h é :

$$\beta = \min(\eta, k-1) = \min(p, 2-\varepsilon)$$

Devido à simetria do problema apenas 1/4 do domínio foi discretizado com as malhas M1, M2, ..., M6; ilustradas na Fig.17. Nós duplos são inseridos nos pontos A e B para a malha do contorno e os resultados para $\eta = 1, 2, 3$ e 4 do MLGFM são mostrados nas Tabs.4 a 6 e Figs.18 a 20. São admitidos como "exatos" os valores: 0.281154023, 0.294685413126055 e -0.675314475042451 para $U(u_0)$, $u(0,0)$ e $u_n(1,0)$, respectivamente. Estes valores foram

obtidos com 1000 termos na série da solução analítica.

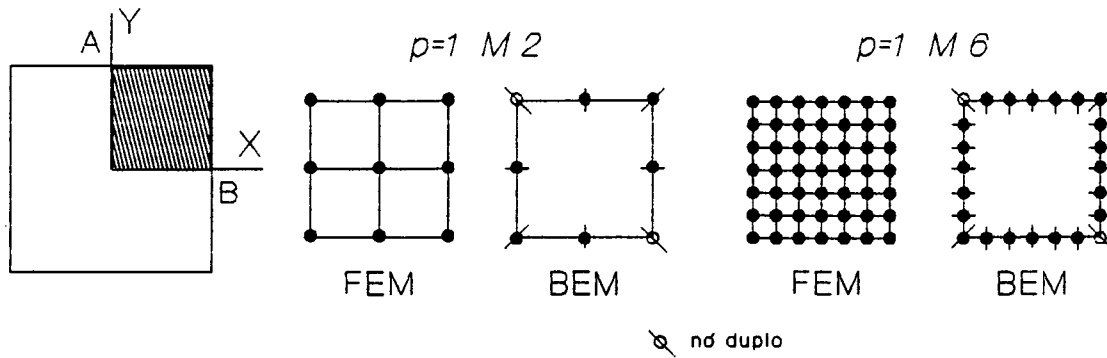


Fig.17 - Discretização de 1/4 do Domínio.

Tab.4- MLGFM: Erro na Energia $\|e\|_E^{ER}$

Malha	p=1	p=2	p=3	p=4
M 1	57.715 E 0	8.331 E 0	2.095 E 0	5.874 E-1
M 2	30.027 E 0	2.716 E 0	0.498 E 0	1.484 E-1
M 3	20.184 E 0	1.339 E 0	0.214 E 0	6.457 E-2
M 4	15.187 E 0	0.796 E 0	0.116 E 0	3.404 E-2
M 5	12.169 E 0	0.531 E 0	8.083 E-2	1.832 E-2
M 6	10.150 E 0	0.377 E 0	5.519 E-2	6.320 E-3

Tab.5- MLGFM: Erro % em $u(0,0)$

Malha	p=1	p=2	p=3	p=4
M 1	-27.254 E 0	-6.324 E-2	-3.177 E-2	1.837 E-2
M 2	- 5.439 E 0	2.691 E-2	2.934 E-4	3.304 E-5
M 3	- 2.279 E 0	6.057 E-3	4.059 E-5	3.155 E-7
M 4	- 1.258 E 0	1.961 E-3	8.119 E-6	2.305 E-8
M 5	- 0.798 E 0	8.191 E-4	6.276 E-8	3.714 E-9
M 6	- 0.552 E 0	3.944 E-4	3.240 E-7	9.993 E-10

Tab.6- MLGFM: Erro % em $u_n(1,0)$

Malha	p=1	p=2	p=3	p=4
M 1	-29.569 E 0	4.444 E 0	-1.531 E 0	7.434 E-1
M 2	- 2.598 E 0	0.366 E 0	7.739 E-2	3.182 E-2
M 3	- 2.111 E 0	4.662 E-2	6.817 E-3	2.093 E-3
M 4	- 0.975 E 0	8.473 E-3	5.852 E-4	1.568 E-4
M 5	- 0.670 E 0	2.180 E-3	8.399 E-5	1.156 E-5
M 6	- 0.454 E 0	6.972 E-4	6.490 E-6	1.398 E-6

Tab.7- FEM: Erro % em $u(0,0)$

p	M 1	M 2
1	-27.254 E 0	
2	8.491 E 0	
3	7.226 E 0	
4	- 1.648 E 0	-4.611 E-3
5	0.766 E 0	-2.912 E-3
6	- 0.336 E 0	-1.557 E-3
7	0.166 E 0	-5.360 E-4
8	- 9.045 E-2	-1.921 E-4

Tab.8- FEM: Erro $\|e\|_E^{ER}$

p	M 1	M 2
1	57.715 E 0	30.027 E 0
2	14.453 E 0	4.089 E 0
3	12.965 E 0	3.370 E 0
4	4.346 E 0	1.341 E 0
5	2.203 E 0	0.585 E 0
6	1.132 E 0	0.297 E 0
7	0.643 E 0	0.166 E 0
8	0.394 E 0	0.103 E 0

As Figs.18 a 20 foram obtidas a partir das Tabs.4 a 8. Da Fig.18 são extraídos os coeficientes α e β que representam as taxas de convergência para os refinamentos η e h do MLGFM, respectivamente; ilustrados na Tab.9.

Tab.9- Taxas de Convergência Experimentais para o MLGFM.

β	η	α	Malha
0.993	1	4.193	M 2
1.843	2	4.374	M 3
2.043	3	4.547	M 4
2.283	4	4.857	M 5

Muito embora as taxas de convergência na norma da energia aparentemente mantenham a tendência do FEM, a superconvergência é notória como se observa nas tabelas 4 e 8. Novamente, em se tratando do potencial e/ou fluxo a superconvergência também é observada e verificada nas tabelas 5, 6 e 7.

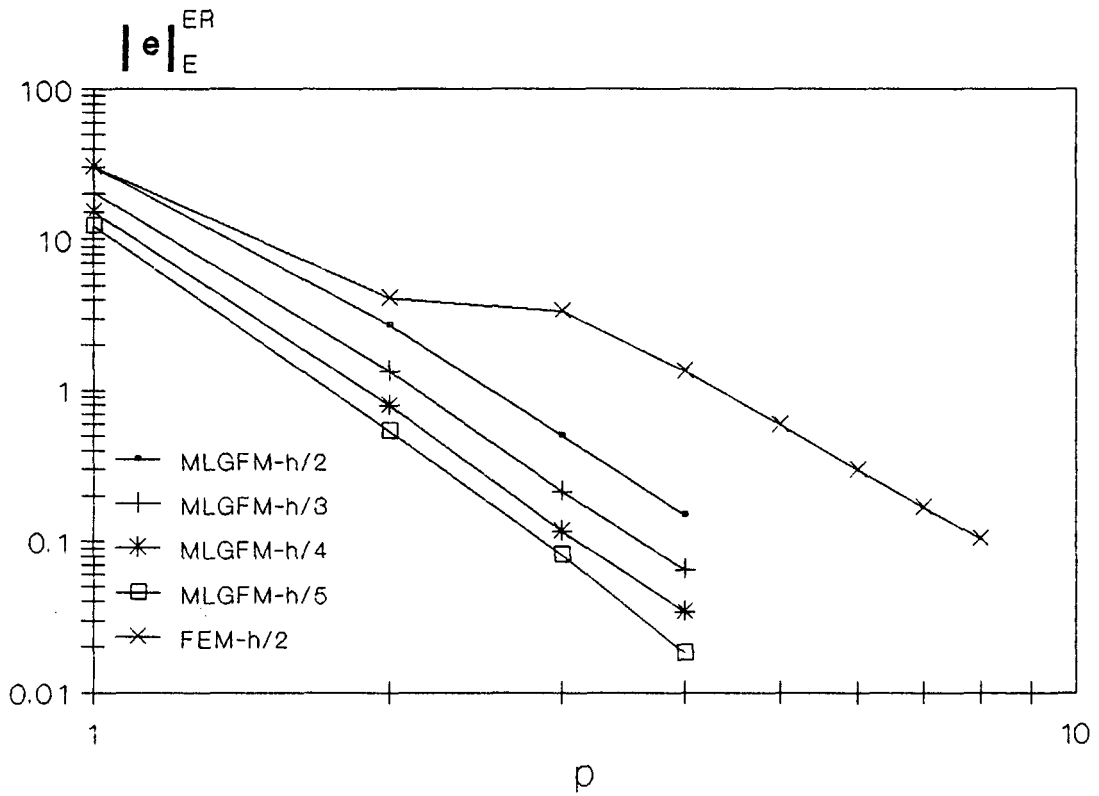
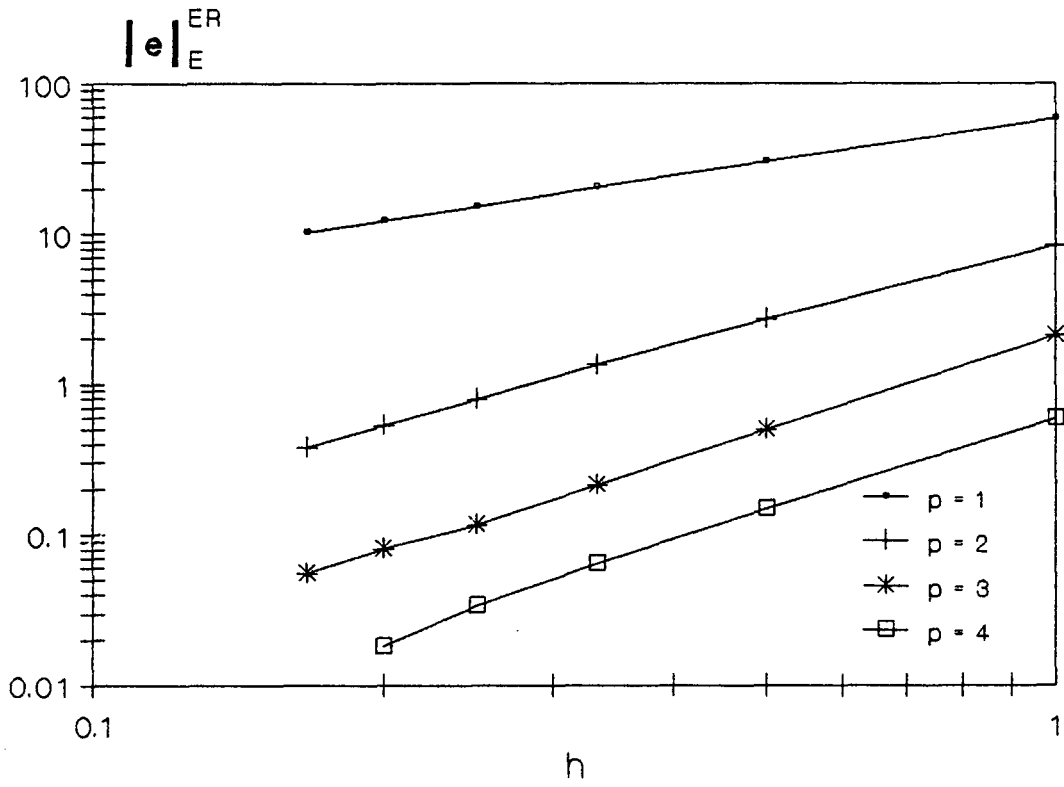
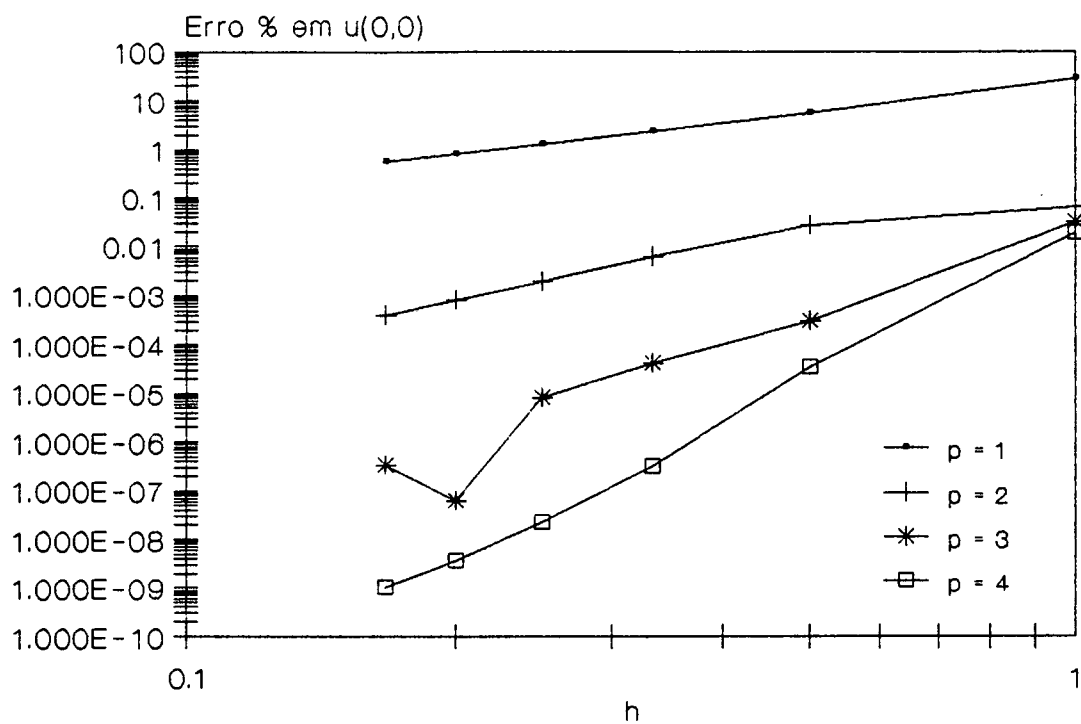
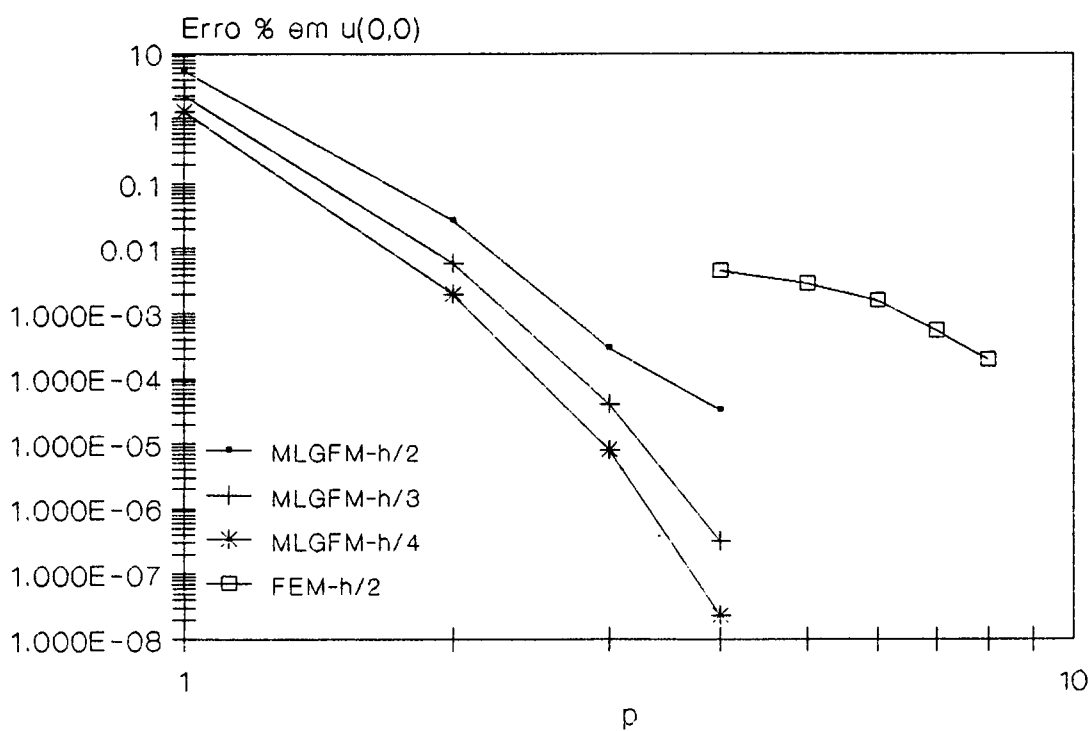


Fig.18- Convergência h e p para o MLGFM na norma $\|e\|_E^{ER}$.

Fig.19a-Convergência h para $u(0,0)$.Fig.19b- Convergência p para $u(0,0)$.

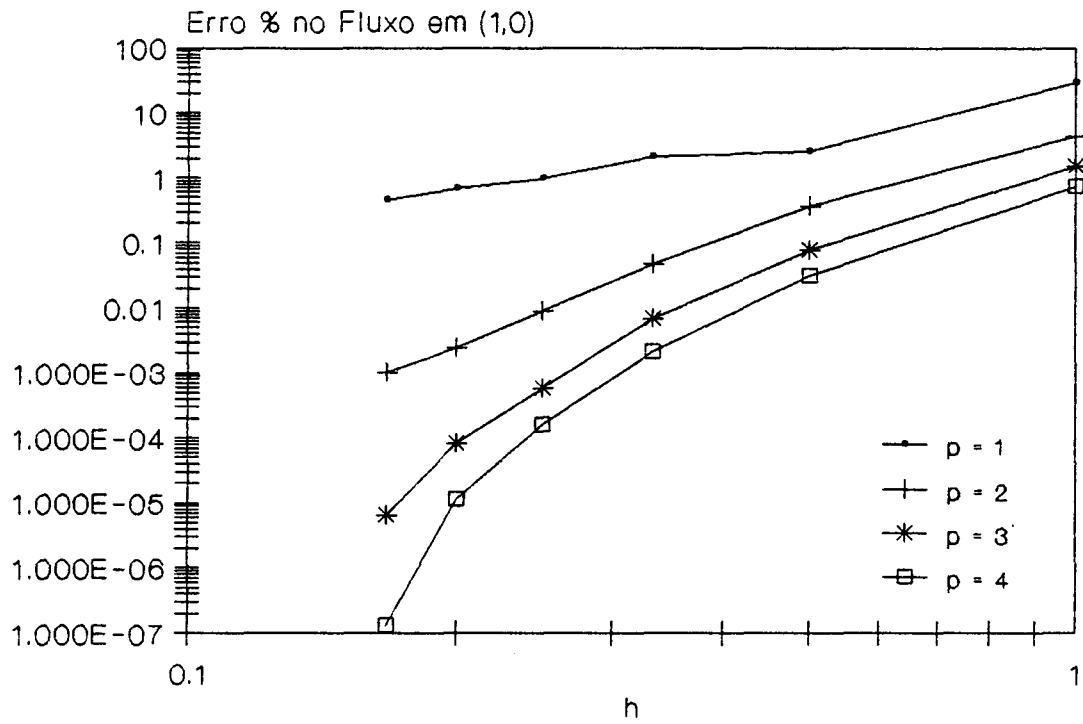


Fig.20a-Convergência h para $u_n(1,0)$.

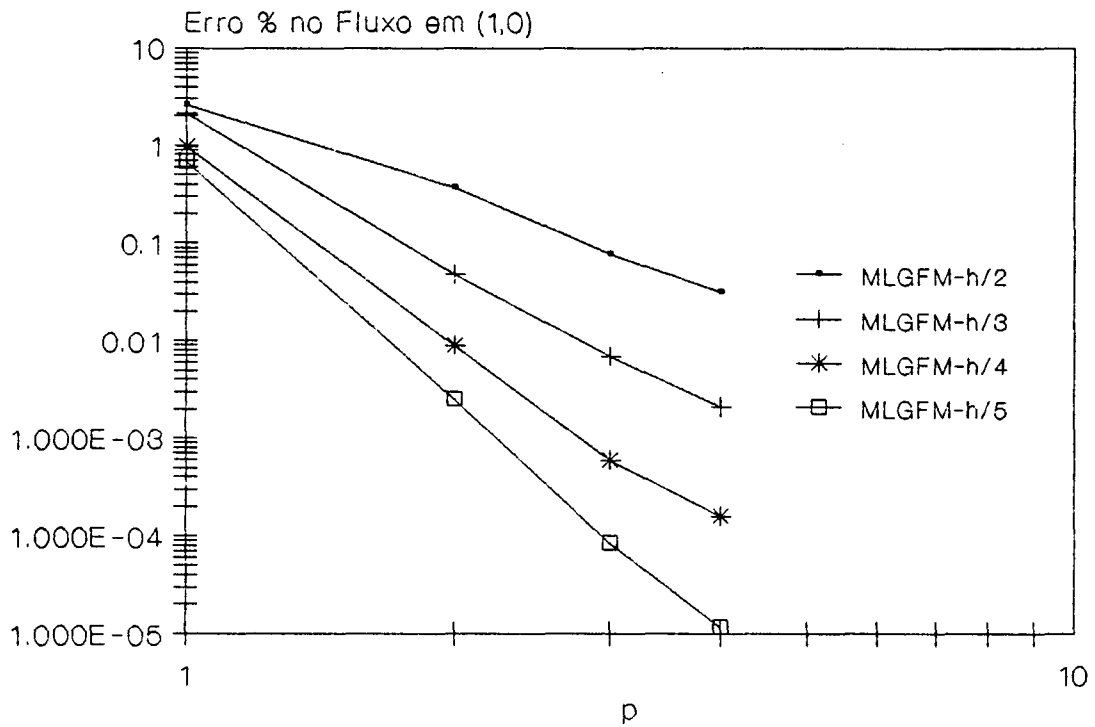


Fig.20b-Convergência p para $u_n(1,0)$.

3.4.3- PROBLEMAS SINGULARES

Em problemas de potencial, é interesse determinar a função $u(x)$ que satisfaz o seguinte problema elíptico de valores no contorno:

$$-\nabla \cdot [a(x) \nabla u(x)] + b(x) u(x) = f(x) \quad x \in \Omega \quad (1)$$

$$u(x) = 0 \quad x \in \partial\Omega \quad (2)$$

onde Ω é o domínio em questão em $\partial\Omega$ seu contorno.

A forma variacional do problema (1)-(2) consiste em determinar a função $u(x) \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \{ a(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + b(x) u(x)v(x) \} d\Omega = \int_{\Omega} f(x)v(x) d\Omega \quad \forall v(x) \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \quad (3)$$

onde $\mathcal{H}_0^k(\Omega)$ denota o espaço de Hilbert de ordem k , definido como o "completamento" (completion) na norma

$$\|u(x)\|_{\mathcal{H}^m} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \| D^{|\alpha|} u(x) \|_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \right]^{1/2} = \left[(u(x), u(x))_{\mathcal{H}^m} \right]^{1/2}$$

do espaço das funções k -vezes continuamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω . Na expressão acima tem-se:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2); \alpha_j \geq 0 \text{ inteiro}$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2; D^{|\alpha|} u(x) = \partial^{|\alpha|} u(x) / \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}$$

e $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}^m}$ denota o produto interno definido em $\mathcal{H}^m(\Omega)$; Oden & Reddy (1976).

Se o conjunto de dados $[a(x), b(x), f(x)]$ é suficientemente regular e o contorno $\partial\Omega$ é fechado e também regular em quase todos os seus pontos, as soluções dos problemas (1) e (3) são coincidentes. De fato, se $f(x) \in \mathcal{H}^r(\Omega)$; $r \geq 0$ e se $a(x), b(x) \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ de tal forma que $a(x) \geq a_0 > 0$; $b(x) > 0$; onde $\bar{\Omega}$ indica o "fechamento" de Ω e a_0 é uma constante, então a solução $u(x)$ tem derivadas de ordem $r+2$ no $\mathcal{H}^0(\Omega)$, i.é.,

$$u(x) \in \mathcal{H}^{r+2}(\Omega) \cap \mathcal{H}_0^1(\Omega) \quad (4)$$

Para discutir o efeito das singularidades em $\partial\Omega$, considere-se, sem perda de generalidade, o caso particular onde $a(x) = 1$, $b(x) = 0$ e $f(x) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Neste caso a Eq.(3) reduz-se a :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, d\Omega = \int_{\Omega} f(x)v(x) \, d\Omega \quad \forall v(x) \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \quad (5)$$

que está associada à equação de Poisson

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad x \in \Omega \quad (6)$$

$$u(x) = 0 \quad x \in \partial\Omega \quad (7)$$

onde $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$.

Seja $\partial\Omega$ um contorno fechado suave ("smooth") com exceção do vértice "P" onde existe um ângulo interno α ; Fig.(21). A perda de regularidade da solução $u(x)$ ocorre devido ao seu comportamento perto desse vértice "P" e para certos valores do ângulo α .

A solução $u(x)$ perto da singularidade pode ser escrita na forma :

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\mu_n} \Psi_n(\theta) + \text{" termos suaves "}$$

onde A_n são constantes, Ψ_n são funções que dependem exclusivamente da coordenada angular θ e são suficientemente regulares; porém a parcela r^{μ_n} pode ter comportamento singular, i.é., suas derivadas com relação a r podem ser ilimitadas quando $r \rightarrow 0$. Além disso, se o valor π/α não for um inteiro, o termo singular da série pode ser colocado na seguinte forma:

$$r^{\pi/\alpha} \sin(\pi\theta/\alpha) \quad (8)$$

e um acréscimo no ângulo α indica um aumento na ordem da singularidade da função $u(r, \theta)$. De fato, pode-se mostrar, Oden & Reddy

(1976), que a solução $u(x)$ da Eq.(5) é tal que :

$$u(x) \in \mathcal{H}^{1+\beta-\varepsilon}(\Omega) \quad (9)$$

onde ε é uma pequena constante arbitrária positiva, α_j é o maior ângulo interno dentre todos os vértices obtidos na discretização do contorno e β é igual a π/α_j .

Entretanto, outros tipos de irregularidades podem estar presentes na solução de Problemas de Valores no Contorno (BVP), mesmo quando a geometria é suficientemente regular. Indicativos de singularidades podem ser encontrados em:

1. Dados Singulares. Este tipo de singularidade é comumente encontrado em problemas com excitação tipo Delta de Dirac. Além disso, condições de contorno do tipo $u(x) \equiv g(x)$ e ou $\partial u(x)/\partial n \equiv h(x)$ podem incluir saltos localizados.

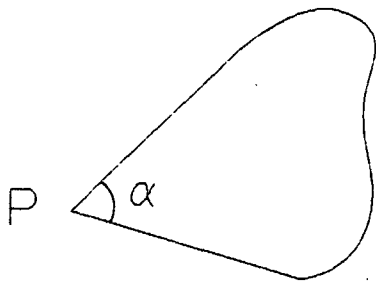


Fig.21-Contorno com Vértice Típico.

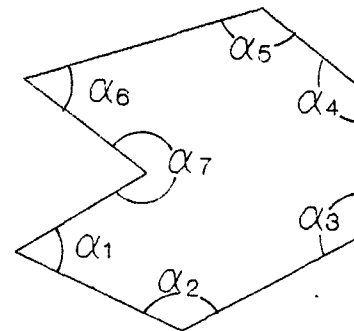


Fig.22- Discretização do Contorno Ângulos Internos.

2. Condições de Contorno Mistas. Se $u(x) \equiv g(x)$ é prescrita em $\partial\Omega_1$ e $\partial u(x)/\partial n \equiv h(x)$ é prescrita em $\partial\Omega_2$, $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, a solução $u(x)$ pode ter comportamento singular na junção $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$.

3. Coeficientes Descontínuos. Se $a(x)$ e/ou $b(x)$ são descontínuos ou assumem valores nulos em pontos do domínio, a solução $u(x)$ pode apresentar singularidades nestes pontos.

Para estes tipos de singularidades cada problema deve ser analisado separadamente visando identificar a regularidade da solução, i.é, para determinar qual a ordem máxima do espaço de Hilbert que contem esta solução.

Problema 5. Determinar a função $u(x) \in \mathcal{H}^{3/2-\epsilon}(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \Delta u(r,\theta) &= 0 & r,\theta \in \Omega \\ u(r,\theta) &= r^{1/2} \cos(\theta/2) & r,\theta \in \partial\Omega_1 \\ \partial u(r,\theta)/\partial\theta &= 0 & r,\theta \in \partial\Omega_2 \end{aligned}$$

onde $\Omega = \{ x = (x,y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \}$, $\partial\Omega_1$ e $\partial\Omega_2$ são mostrados na Fig.(23) e a solução analítica é

$$u(r,\theta) = r^{1/2} \cos(\theta/2)$$

com energia de deformação igual a $U(u) \cong 0.440686767E+0$.

As malhas de elementos finitos e de elementos de contorno utilizadas para obter aproximações das projeções da Função de Green estão mostradas na Fig.23. Os elementos finitos utilizados são os lagrangeanos quadráticos e para a malha de contorno usa-se também os elementos quadráticos de linha. Note que, perto da singularidade a malha é projetada com quatro elementos dispostos segundo uma progressão geométrica com razão de 0.50. Nós duplos são usados nos pontos de descontinuidade das condições de contorno e/ou de geometria.

As curvas de isopotencial e erros percentuais no potencial são mostradas nas Fig.24 e 25. Nota-se que na maior parte do domínio o erro é menor que 0.10% e até próximo da singularidade o erro atinge índices entre 0.10% e 1.00%. Valores superiores a 1.00% são verificados somente muito perto da singularidade, atingindo o patamar máximo de 15.00%, porém não influenciando de forma significativa a norma da energia da solução $u(x)$. Por exemplo, Kelly & ali. (1983), com uso de elementos finitos adaptativos, obteve 0.8869 para essa norma, enquanto que com o MLGFM obteve-se 0.8820.

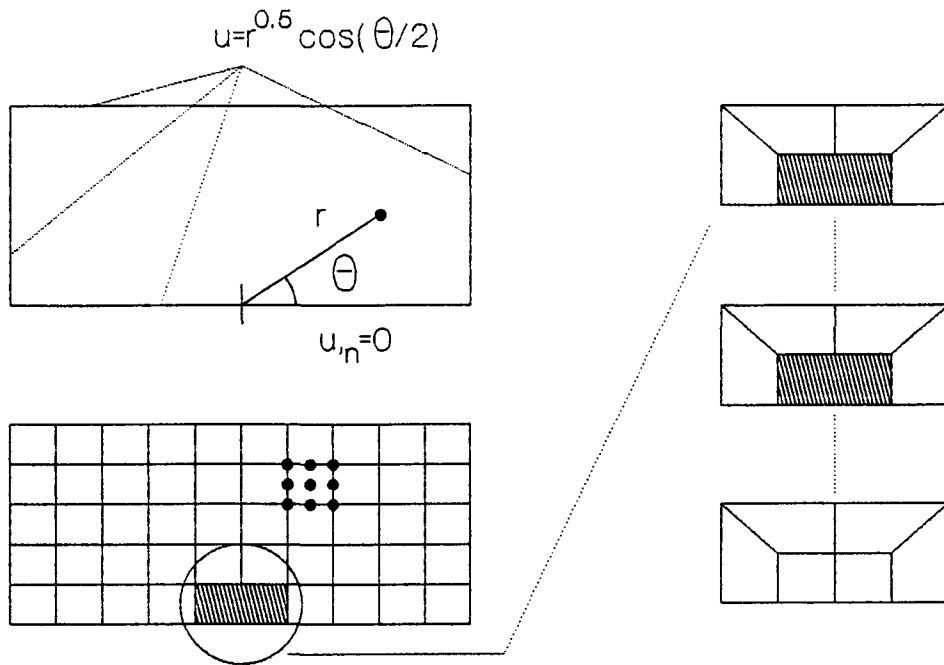


Fig.23- Condições de Contorno e Malha de Elementos Finitos. Detalhe da Malha de Elementos Finitos Perto da Singularidade.

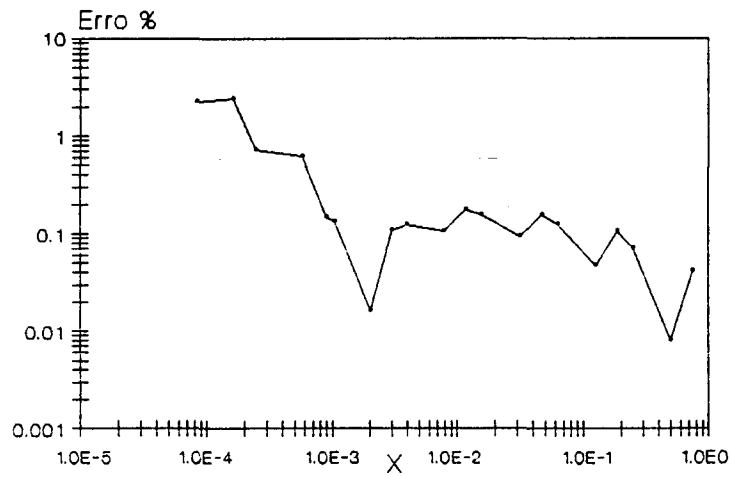


Fig.24a- Erro % no Potencial ao Longo do Lado Crítico.

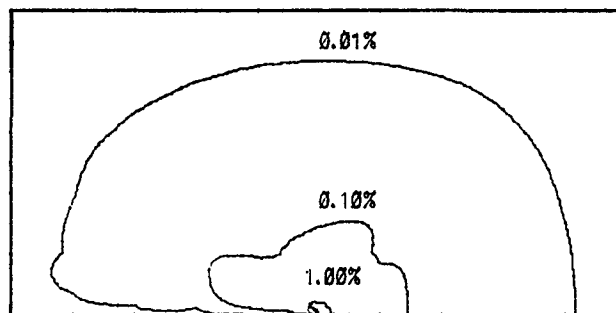


Fig.24b- Erro % do Potencial no Dominio.

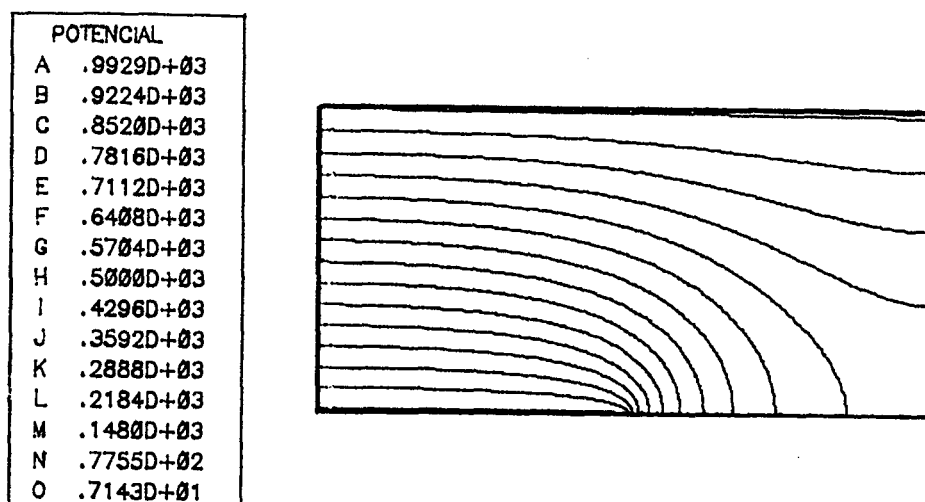


Fig.25. Linhas de Isopotencial .

Tomando como referência os trabalhos de Szabo (b,1986) e Babuska & Guo (1988), a malha para determinar as projeções da função de Green é redesenhada. O segmento singular (o lado onde existe a singularidade) é discretizado com sete elementos seguindo uma progressão geométrica com razão 0.25. Esta nova malha, considerada grosseira, também mostrou-se bastante eficiente para captar o efeito deste tipo de singularidade e os resultados de fluxo e potencial perto do ponto singular são mostrados nas Figs.26 a 28.

Note que o erro no fluxo aparece somente no último elemento junto à singularidade e que a solução obtida com o MLGFM apresenta o mesmo tipo de oscilação ao redor da solução analítica verificada com uso do DBEM para estas situações, Alarcon & Reverter (1986), Costa Jr.(1990).

Quando a metodologia utilizada para a solução deste tipo de problema é a h e/ou p BEM-adaptativa, alguns autores usam como critério de convergência a integral do fluxo ao longo do contorno. Neste caso esta integral comporta-se como:

$$\int_{\partial\Omega} r^{-1/2} dr = 2 r^{1/2}$$

e, perto da singularidade, este valor tem ordem $O(\epsilon^2)$ o que proporciona a "convergência" esperada, mesmo com resultados satisfatórios somente em regiões afastadas desse ponto.

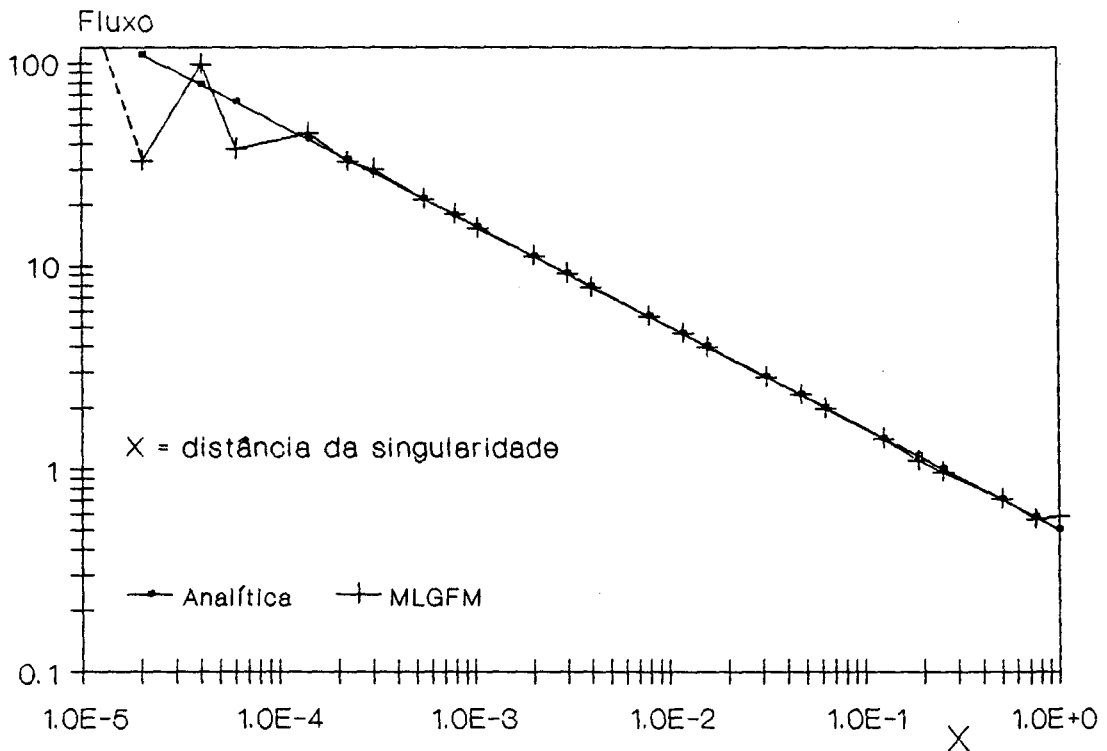


Fig.26. Fluxo ao Longo do Lado Crítico.

Assim como para o fluxo, as Figs.(27) e (28) mostram o comportamento do erro % do potencial ao longo do lado singular e para os elementos de domínio mais próximos da singularidade. Uma vez que o desenho da malha é baseado numa pg de razão 0.25, os lados dos elementos ilustrados na Fig.(27) tem comprimento igual a $1/4^6$ e $1/4^7$, o que indica resultados altamente satisfatórios com erro % máximo na ordem de 4.40%.

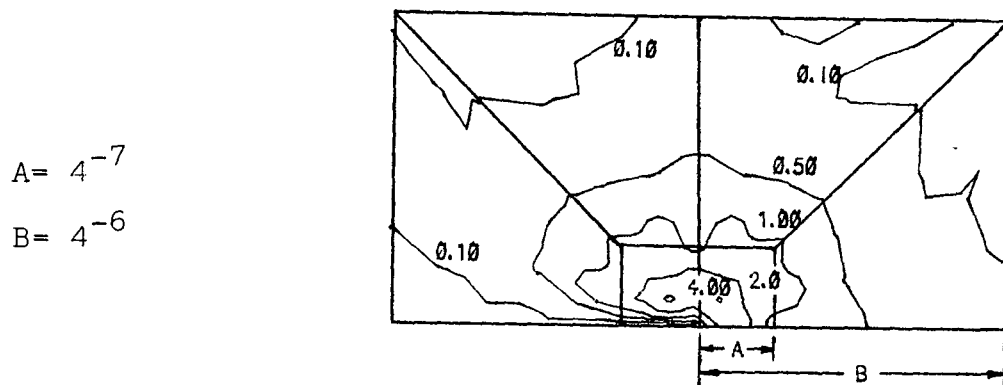


Fig.27. Erro % no Potencial ao Redor da Singularidade.



Fig.28. Erro % no Potencial ao Longo do Lado Crítico.

Modificando as condições de contorno de acordo com o ilustrado na Fig.29, e utilizando a malha inicial (4 elementos quadráticos em pg com razão 0.20 perto da singularidade) obtém-se os resultados ilustrados na Tab.10, que mostram excelente proximidade com os obtidos por Wrobel (1981) com o DBEM.

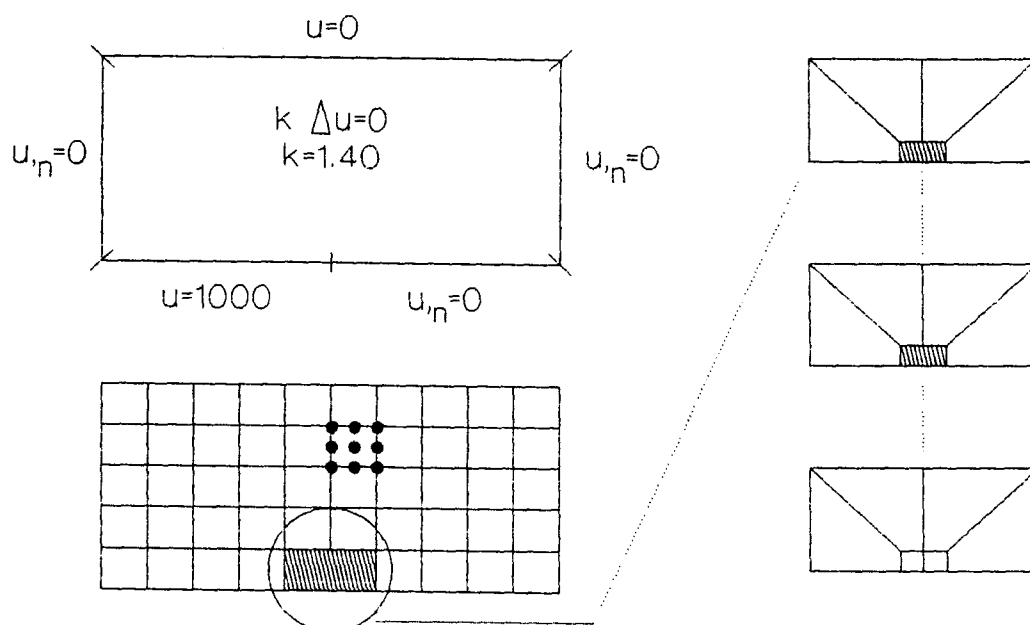


Fig.29- Domínio com Condições de Contorno.

Tab.10- Resultados do MLGFM e DBEM.

x	y	DBEM	MLGFM	x	y	DBEM	MLGFM
-.80	.20	790.8	790.8	-.80	.80	386.2	385.9
-.60	.20	785.1	784.7	-.60	.80	378.7	378.2
-.40	.20	771.1	770.1	-.40	.80	363.7	362.8
-.20	.20	736.6	733.8	-.20	.80	338.2	336.6
.00	.20	644.3	637.9	.00	.80	300.6	298.6
.20	.20	495.3	488.5	.20	.80	255.8	253.4
.40	.20	378.5	373.7	.40	.80	212.9	210.7
.60	.20	304.6	300.8	.60	.80	179.7	177.7
.80	.20	264.9	260.7	.80	.80	159.4	157.6

Problema 6. Determinar $u(x) \in \mathcal{H}^{5/3-\epsilon}(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= 1 & x \in \Omega \\ u(x) &= 0 & x \in \Gamma \end{aligned}$$

onde Ω é o domínio em L mostrado na Fig.30.

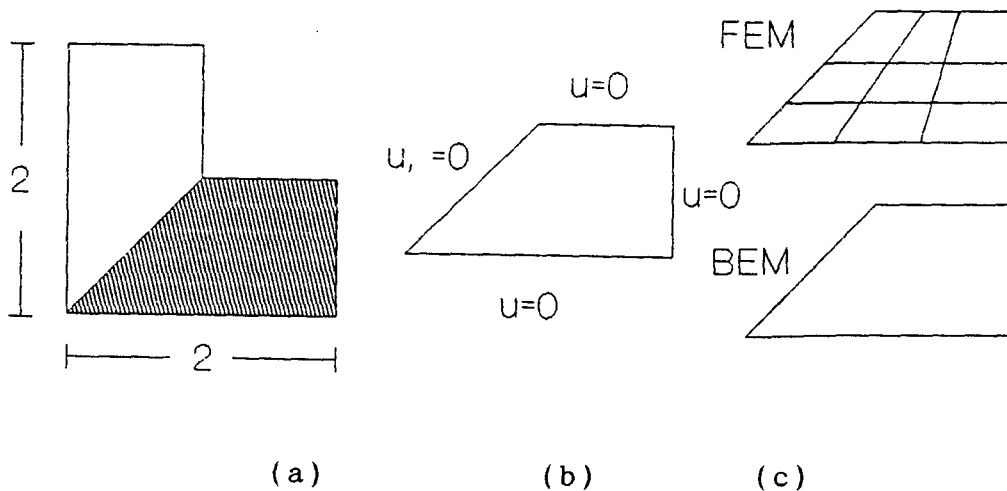


Fig.30- Domínio em L (a), Condições de Contorno (b) e Discretização com Malha Grosseira (c).

Nesta aplicação, devido à simetria, apenas a metade do domínio é particionada para a aproximação da Função de Green com o FEM. Ao longo da simetria é especificado fluxo nulo e nós duplos são utilizados nos pontos de descontinuidade das condições de contorno e ou da normal ao contorno.

Este problema também foi resolvido usando a técnica η -adaptativa do FEM, onde a energia "exata" foi estimada

igual a 0.10703473. Este valor é tomado como referência na obtenção da Fig.(31), onde h representa o maior diâmetro externo dos elementos da malha de FEM e $\|e\|_E^{ER}$ é a norma do erro definida no item anterior, trocando a aproximação do FEM, u_{FEM} , por u_{MLGFM} , do MLGFM.

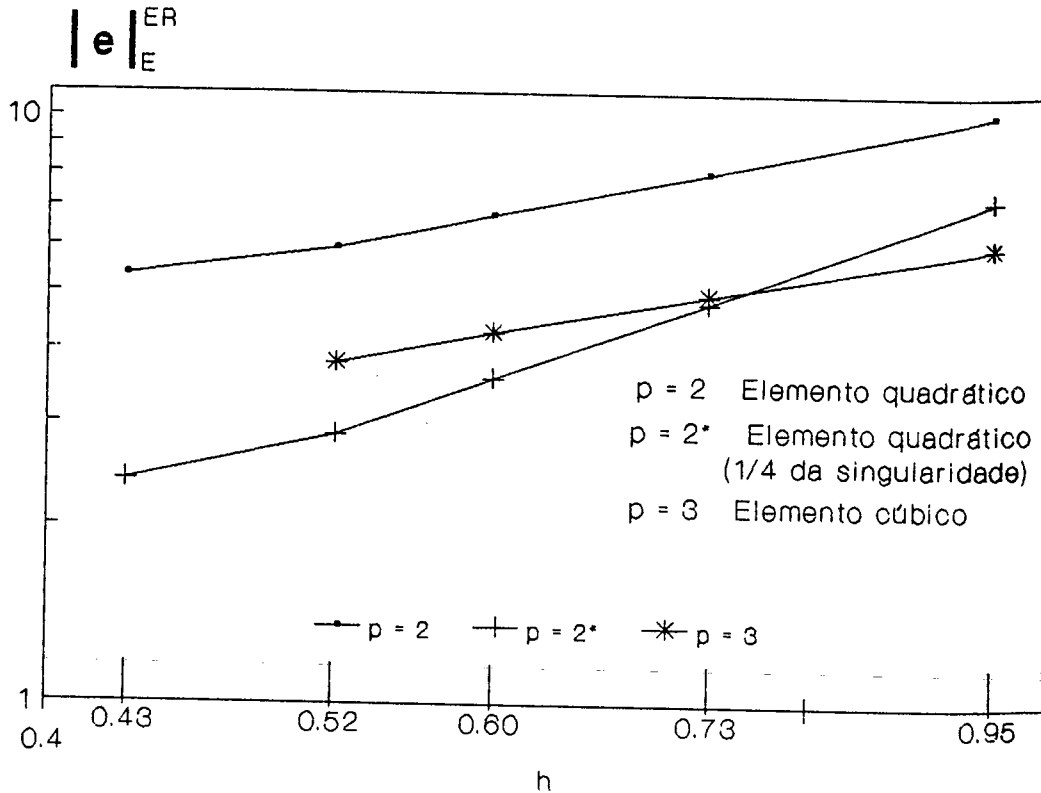


Fig.31- Erro $\|e\|_E^{ER} \times h$.

Novamente, usando a técnica de especificar a malha auxiliar de elementos finitos em progressão geométrica (malha de 6x6 elementos com o elemento próximo da singularidade subdividido em 4 elementos em pg com razão igual 0.20) os resultados apontam 0.106944661 ($\|e\|_E^{ER} = 2.89\%$) e 0.10698829 ($\|e\|_E^{ER} = 2,08\%$) para a "energia potencial" usando-se elementos quadráticos com nó central e a um quarto da singularidade, respectivamente.

A Fig.31 mostra o comportamento h -adaptativo do MLGFM para malhas uniformes e elementos quadráticos com nó central e a 1/4 da singularidade. Melhores taxas de convergência são observadas para o elemento com nó a 1/4 da singularidade.

Finalmente, o resultado do fluxo ao longo do lado

crítico é ilustrado na Fig.32 para a malha de 6x6 elementos finitos com a modificação em progressão geométrica já citada.

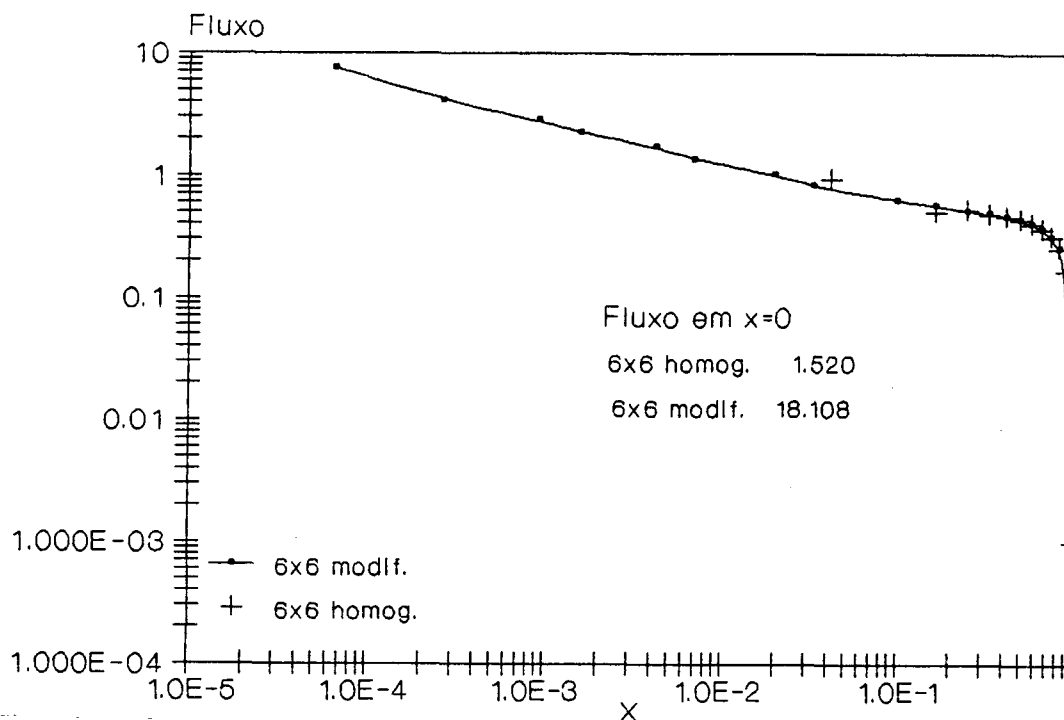


Fig.32. Fluxo no Lado Crítico.

3.4.4-MEIO NÃO HOMOGENEO

Esta é uma situação clara onde o BEM torna-se impraticável dada a inexistência de soluções fundamentais para variações aleatórias do coeficiente $t(x)$ da equação

$$-\nabla \cdot (t(x) \nabla u(x)) = f(x) \quad \forall x \in \Omega$$

que representa o campo potencial não homogêneo sendo $t(x)$ uma função característica do meio (com variação contínua ou contínua por partes) e $f(x)$ o termo de excitação. Nosso interesse é resolver tais problemas, com devidas condições de contorno, para situações onde $t(x)$ é variável.

Se $t(x)$ não se anula em nenhum ponto do domínio, essa variação de $t(x)$ não causa transtornos no MLGFM devido ao fato de que a projeção da Função de Green é obtida via FEM. O problema dessa variação é repassado para o modelo de elementos finitos,

fato que pode ser tratado sem dificuldade.

Problema 7. Determinar $u(x)$ tal que

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (k \nabla u(x)) &= 0 & \forall x \in \Omega \\ u(x) &= 0 & x \in \partial\Omega_1 \\ u(x) &= 50 & x \in \partial\Omega_2 \\ \partial u(x)/\partial n &= 0 & x \in \partial\Omega_3 \end{aligned}$$

onde $\Omega = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1, x_2 \leq a \}$; a condutividade térmica $k = k_1$ ou k_2 mantém a relação $k_1/k_2 = 10$ e $R/a = 0.6$, como indicado na Fig.33.

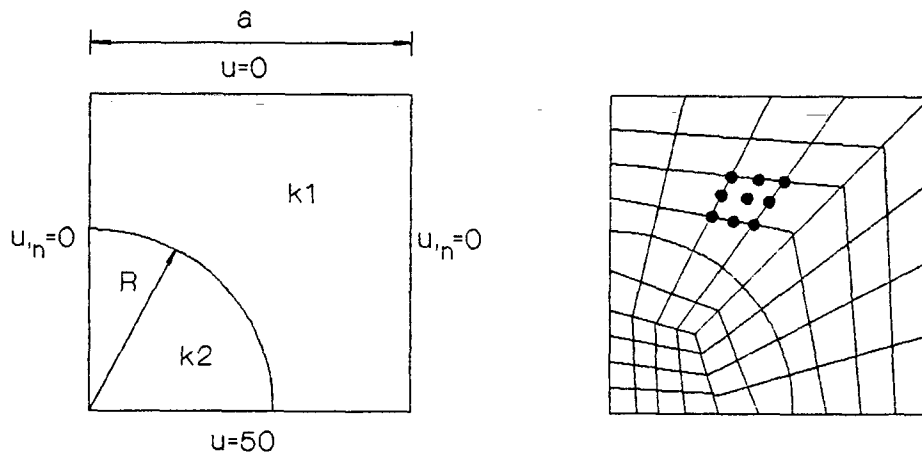


Fig.33- Definição do Domínio, Condições de Contorno e Malha Auxiliar de Elementos Finitos.

Este problema também foi resolvido por Jaworski (1981) obtendo para o potencial os resultados ilustrados na Fig.34a. A malha auxiliar de elementos finitos mostrada na Fig.33 é projetada com uso do elemento qu09po e nós duplos são utilizados em pontos de descontinuidade das condições de contorno. Na Fig.34b são mostrados os resultados obtidos com o MLGFM e a proximidade com os de Jaworski é evidente.

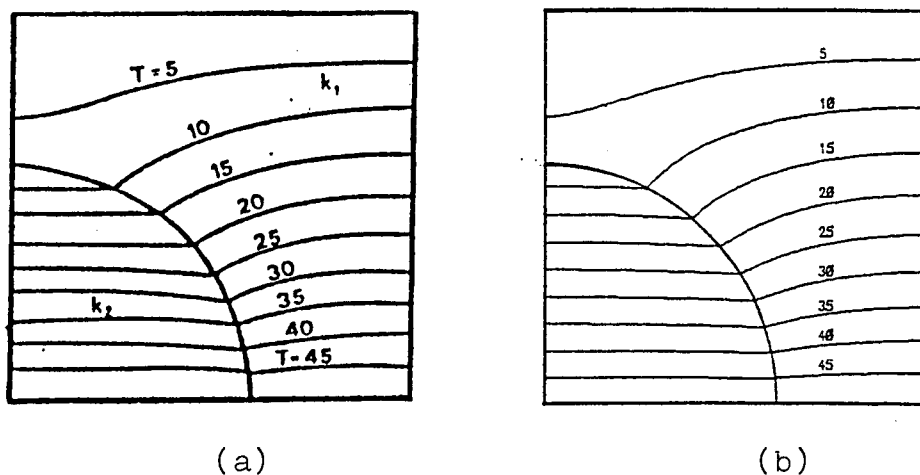


Fig.34- Isopotencial. Jaworski (a) e MLGFM (b).

Problema 8. Determinar $u(x)$ tal que

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (k \nabla u(x)) &= 1 & \forall x \in \Omega \\ u(x) &= 0 & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

onde $\Omega = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x_1, x_2 \leq 2 \}$, $k = 1$ para $x_1 \leq 1$ e $k = 2$ para $x_1 \geq 1$.

Devido a simetria do problema apenas metade do domínio é discretizada com elementos quadráticos, malha homogênea de 5×10 elementos. O problema é resolvido usando-se diretamente o FEM e o MLGFM. Resultados de isopotencial para as duas análises estão mostrados na Fig.35. O valor máximo para potencial obtido com o FEM é $2.145000E-1$, enquanto o obtido com o MLGFM é $2.145457E-1$. Novamente, a semelhança de resultados é evidente.

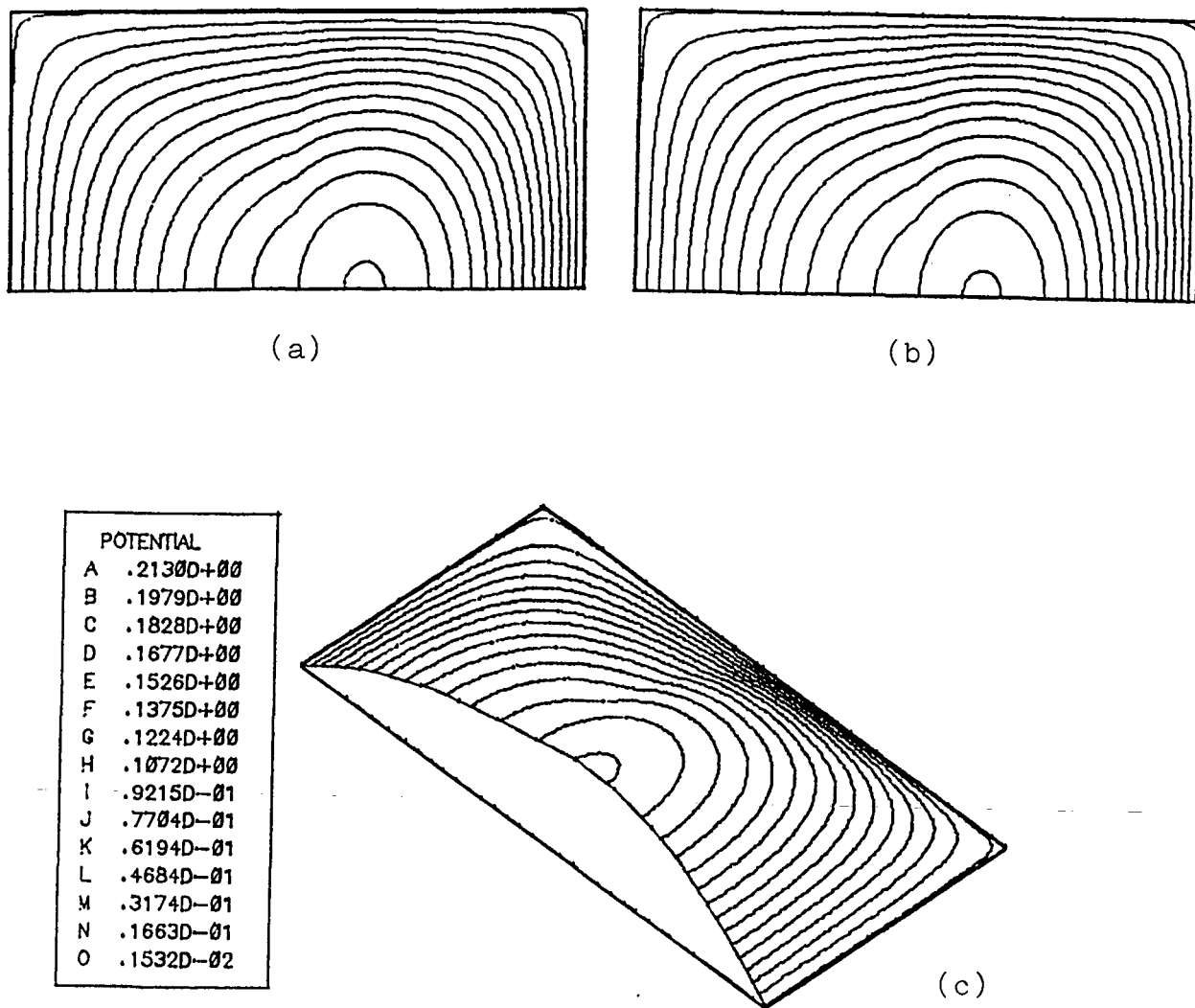


Fig.35-Isopotencial. FEM (a), MLGFEM (b) e Vista 3D (c).

3.4.5-ESCOAMENTO POTENCIAL

Considere o escoamento em regime permanente de um fluido ideal, i.é, incompressível e não viscoso. Dada a natureza irrotacional do escoamento tem-se:

$$\mathbf{v} = \nabla \phi \quad (1)$$

onde \mathbf{v} é o vetor velocidade e ϕ uma função potencial. Por outro lado, a equação da continuidade para um fluido ideal é da forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

Combinando estas duas equações resulta a equação de Laplace

$$\Delta \Phi = 0 \quad (3)$$

para o potencial Φ ($\Delta = \partial^2(\cdot)/\partial x_i^2$).

Para domínios bidimensionais a Eq.(2) é reescrita como:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

onde (v_x, v_y) representam as componentes de v nas direções x, y ; respectivamente. Esta equação pode ser satisfeita introduzindo uma nova função Ψ , chamada de função corrente, definida por:

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad e \quad v_y = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (5)$$

Por outro lado, o fato de que o escoamento é irrotacional indica que $\nabla \times v = 0$, ou seja:

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (6)$$

Usando a Eq.(5) na Eq.(6) teremos novamente a equação de Laplace

$$\Delta \Psi = 0 \quad (7)$$

para a função corrente.

Problema 9. Determinar a função potencial e/ou a função corrente para o escoamento ao redor de um cilindro confinado entre duas placas com as características ilustradas na Fig.36.

A primeira etapa para resolver o problema é estabelecer as condições de contorno para cada uma das funções desejadas e que estão visualizadas na Fig.37.

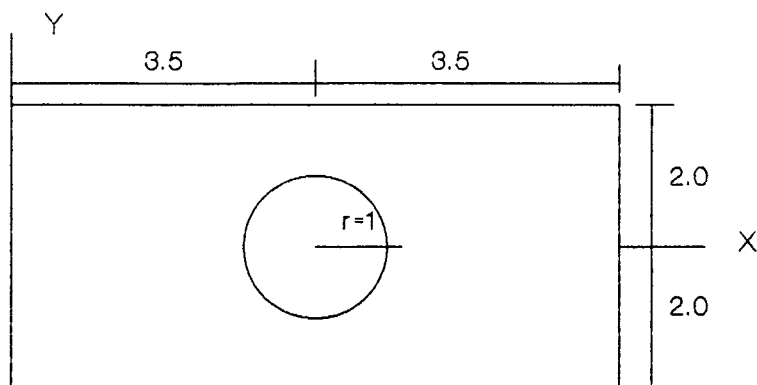


Fig.36- Caracterização do Problema.

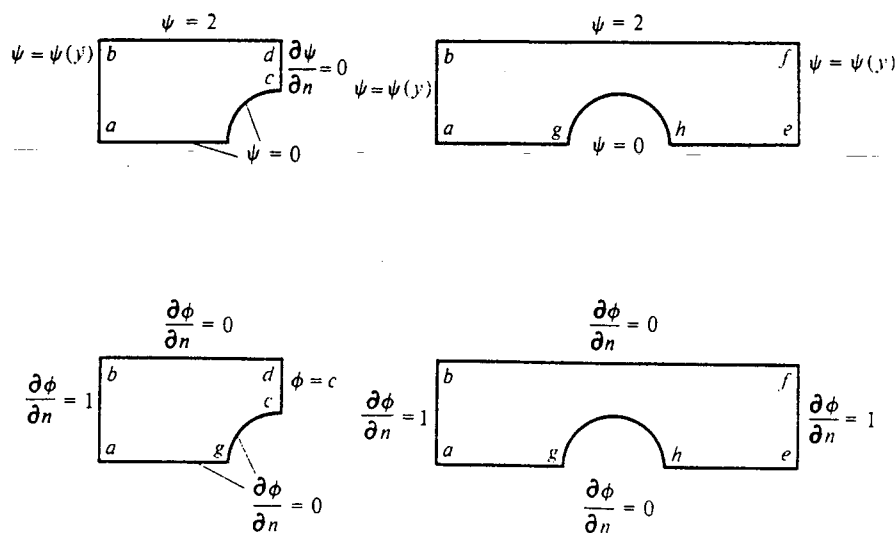


Fig.37- Condições de Contorno para a Função Potencial e Função Corrente.

Na Fig.38 apresenta-se a malha de elementos finitos lineares utilizada por Chung (1978) e a malha de elementos quadráticos usada para obtenção das projeções da Função de Green. Como nos casos anteriores, a malha de elementos de contorno acompanha a malha de elementos finitos com nós duplos nos pontos de descontinuidade das condições de contorno.

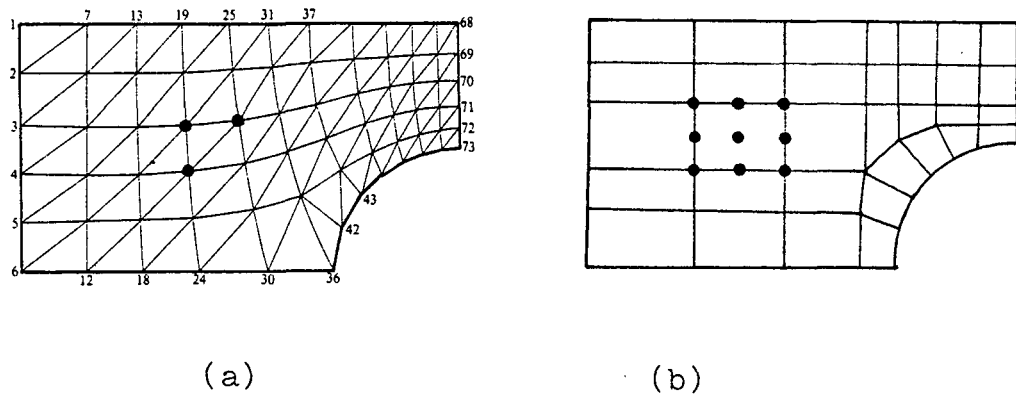


Fig.38-Malha de Elementos Finitos. FEM (a) MLGFM (b)

Nas duas figuras seguintes são apresentados os resultados obtidos com método de elementos finitos, Chung (1978), e com o MLGFM. Na Fig.39 são mostradas as isolinhas da função potencial e o perfil da velocidade (V_x) em $x=3.5$ para essas duas análises. Na Fig.40 mostra-se as isolinhas da função corrente.

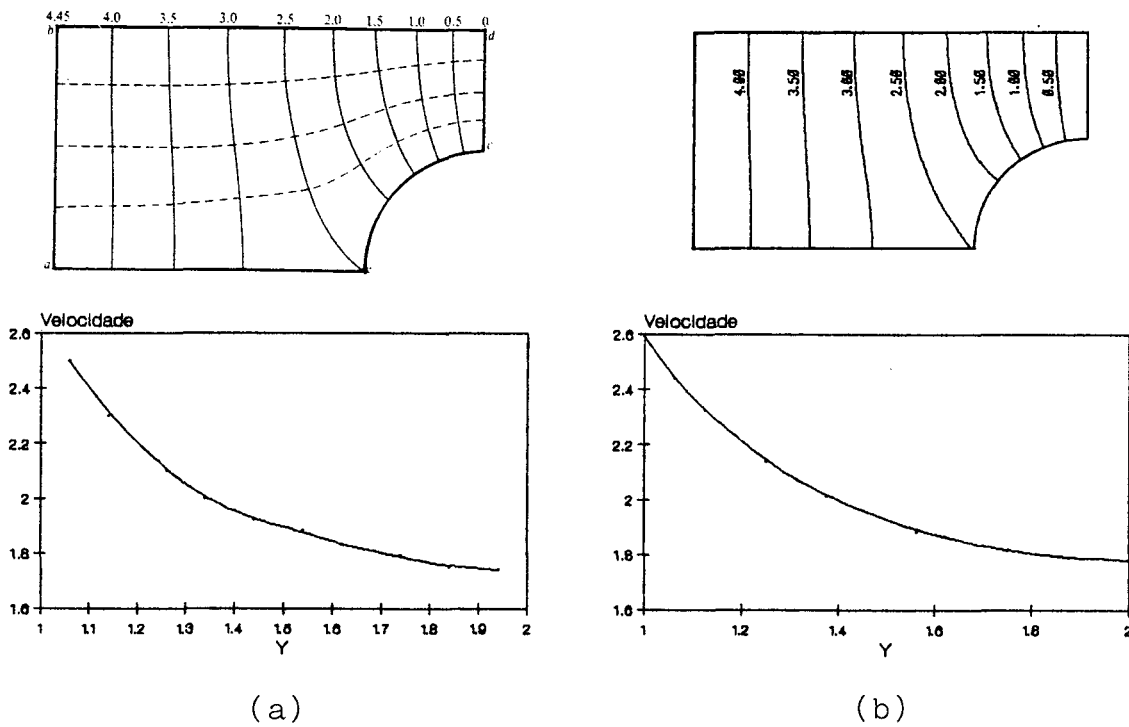


Fig.39-Isolinhas da Função Potencial e Velocidade Acima do Cilindro FEM (a) MLGFM (b).

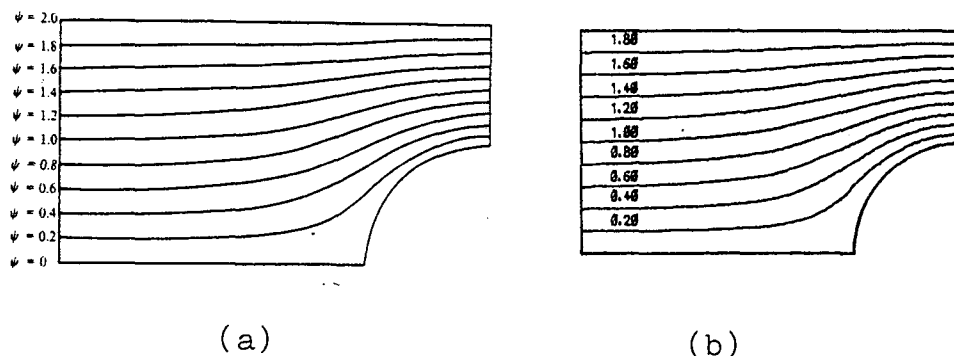


Fig.40-Isolinhas da Função Corrente. FEM (a) MLGFM (b).

Ótima correlação de resultados é observada, mesmo para o perfil de velocidades acima do cilindro (em $x=3.5$).

3.4.6-PROBLEMAS AXISSIMÉTRICOS

Muito embora o MLGFM possa ser entendido como sendo uma extensão do Galerkin-BEM, a análise de problemas axissimétricos também é caracterizada pela simplicidade.

Problemas axissimétricos são caracterizados pela invariância do potencial $u(r, \theta, z)$ com relação à coordenada angular θ ; sendo r , θ e z as coordenadas polares de um ponto x qualquer do domínio.

As projeções da Função de Green são feitas de modo convencional usando o FEM. A única alteração é a troca da matriz de rigidez do elemento, $[K]$, pela matriz $[KA]$ obtida para elementos axissimétricos. Para ilustrar este fato, considere-se o escoamento de um fluido ideal ao redor de uma esfera.

A equação de Laplace da função potencial para um sistema curvilíneo de coordenadas, ξ_i , assume a forma:

$$\Delta \Phi = \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \nabla \Phi = g^i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \cdot \left(g^j \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_j} \right) = \Phi|_{ij} g^{ij} = 0$$

onde

$$\Phi|_{ij} = \Phi_{,ij} - \Gamma_{ij}^k \Phi_{,k} = \Phi_{,ij} - \Gamma_{ki}^k \Phi_{,j}$$

sendo Γ_{ij}^k o símbolo de Christoffel de segunda espécie, g^i o vetor base do sistema contravariante de coordenadas e $g^{ij} = g^i \cdot g^j$.

Para o sistema cilíndrico de coordenadas ($\xi_1=r$, $\xi_2=\theta$, $\xi_3=z$, $g_{11}=1$, $g_{22}=r^2$, $g_{33}=1$, $\Gamma_{22}^1=-r$ e $\Gamma_{12}^2=1/r$) tem-se:

$$\Delta \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \phi = 0$$

de onde se calcula a matriz $[K_A]$ do elemento axissimétrico, que vale:

$$[K_A] = 2\pi \iint \begin{bmatrix} \psi_i, r \\ \psi_i, z \end{bmatrix}^t \cdot H \cdot \begin{bmatrix} \psi_j, r \\ \psi_j, z \end{bmatrix} r \, dr \, dz$$

$i, j=1, 2, \dots, n$

Para o usuário acostumado apenas com o FEM, especial atenção deve ser tomada no desenho da malha de elementos de contorno. Se o eixo de axissimetria, z , é parte do contorno, este eixo não deve conter elementos de contorno.

Problema 10. Determinar $u(r, \theta, z)$ tal que

$$\begin{array}{ll} -\Delta u(x) = 0 & \forall x=(r, \theta, z) \in \Omega \\ u(x) = 1000 & x \in \partial\Omega \ni r = 0.1 \\ u(x) = 500 & x \in \partial\Omega \ni r = 0.4 \\ u_{,n}(x) = 0 & x \in \partial\Omega \ni z = 0, \ell \end{array}$$

onde Ω é um tubo de seção anular e $\partial\Omega$ seu contorno.

Usando malha homogênea de 6×3 elementos quadráticos para discretização da seção de axissimetria, elementos de contornos quadráticos com nós duplos nos pontos de descontinuidade das condições de contorno e $k_0=1.0D-6$ (não existem condições de contorno do tipo Dirichlet homogêneas), obteve-se os resultados ilustrados na tabela abaixo. Resultados do BEM são de Skerget & Brebbia (1983).

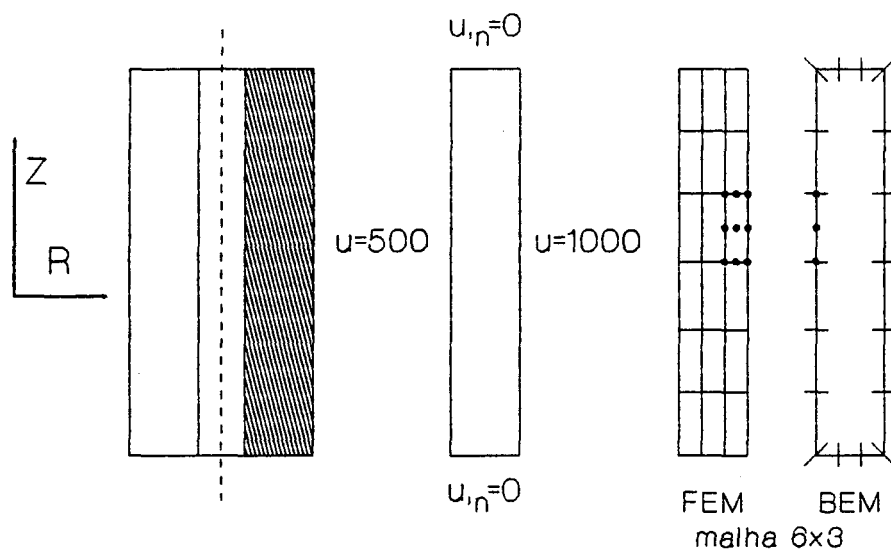


Fig.41- Definição do Domínio e Condições de Contorno.

Tab.11- Potencial.Comparação de Resultados.

α	Analítica	BEM	MLGFM
.15	853.76	854.0	854.23
.20	750.00	750.0	750.12
.25	669.52	669.4	669.65
.30	603.76	603.6	603.81
.35	548.16	548.0	548.20

Ótima concordância com a solução analítica e com os resultados obtidos com o BEM é alcançada com o MLGFM, mesmo com malha considerada grosseira.

Problema 11. Determinar $u(\alpha, \theta, z)$ tal que

$$-\Delta u(x) = 0 \quad \forall x = (\alpha, \theta, z) \in \Omega$$

com condições de contorno prescritas de acordo com a Fig.42. Este problema pode representar, por exemplo, o escoamento de um fluido ideal ao redor de uma esfera dentro de uma tubulação.

Na Fig.43 mostra-se as isolinhas da função potencial e o perfil da velocidade para $x=3.5$ obtidos pelo MLGFM. Como medida de comparação de resultados mostra-se na mesma figura as isolinhas da função corrente e o perfil de velocidade obtidos por Chung (1978).

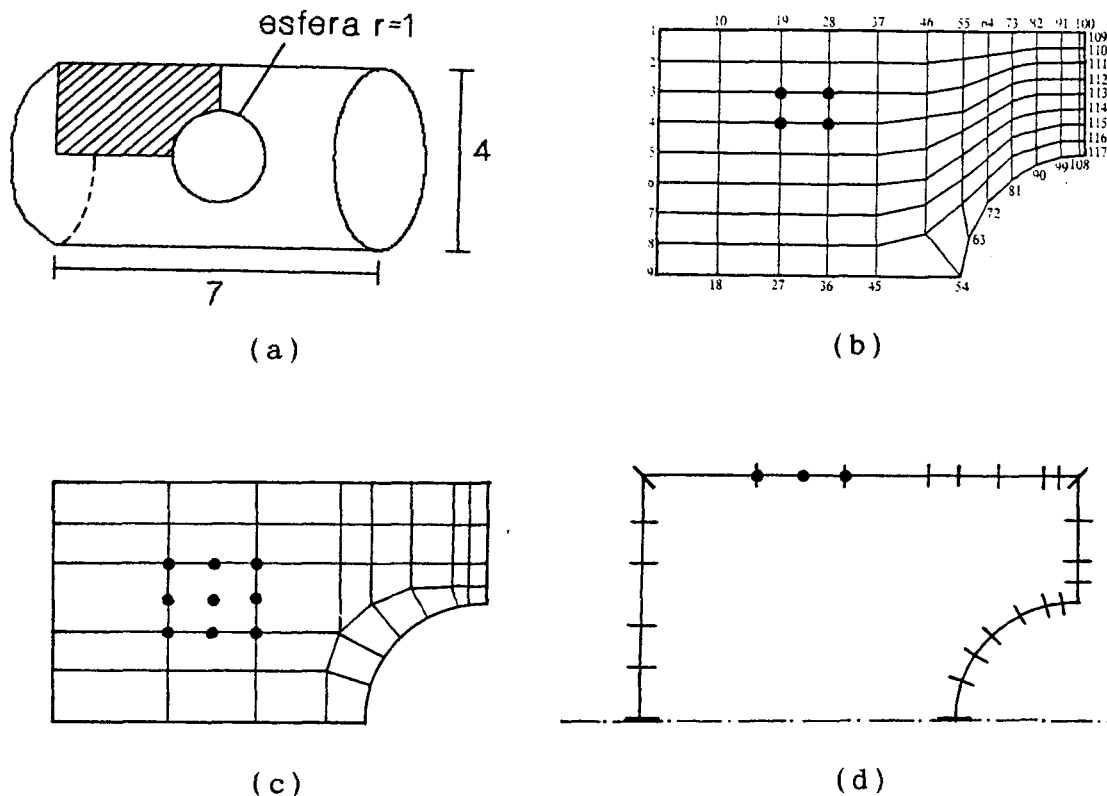


Fig.42-Definição do Problema (a). Malha de Elementos Finitos-Chung (b). Malha Auxiliar de Elementos Finitos-MLGFM (c) e Malha de Elementos de Contorno (d).

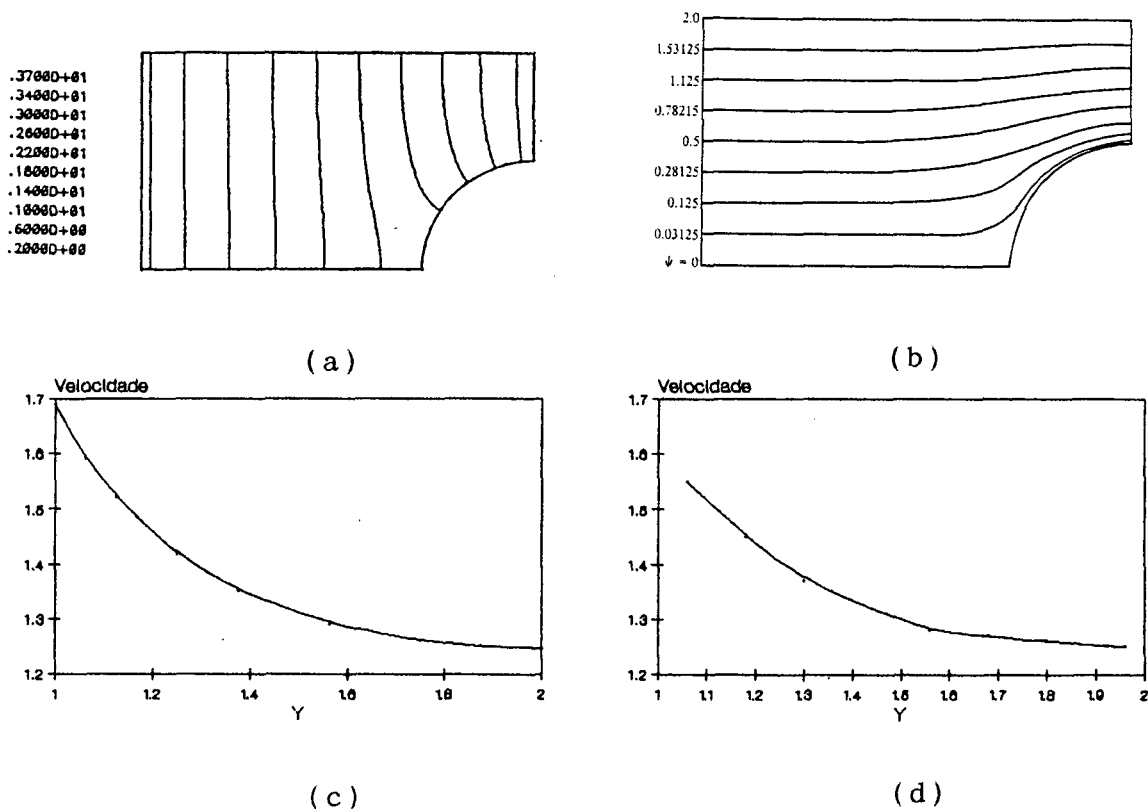


Fig.43-Função Potencial-MLGFM (a), Função Corrente-FEM (b), Perfil de Velocidade MLGFM (c) e FEM(d).

3.4.7-TORSÃO DE EIXOS

De acordo com a teoria de St.Venant, na torsão de barras elásticas, prismáticas, com seção transversal arbitrária e simplesmente conectada, Ω , e contorno $\partial\Omega$; o campo de deslocamentos u com componentes u, v e w nas direções x, y e z , respectivamente, é suposto ter a configuração:

$$u = -\theta zy \quad v = \theta zx \quad w = \theta \Phi(x, y).$$

onde z é o eixo axial da barra, θ é o ângulo de torsão por unidade de comprimento e $\Phi(x, y)$ é a conhecida função de empenamento. Usando as relações deformação \times deslocamento e tensão \times deformação da Teoria da Elasticidade (Lei de Hooke) resultam as expressões:

$$\tau_{13} = G\theta (\Phi_{,x} - y) \quad e \quad \tau_{23} = G\theta (\Phi_{,y} + x)$$

para as únicas tensões não nulas, onde G é o módulo de cisalhamento. Substituindo essas componentes do tensor tensão nas equações de equilíbrio tem-se:

$$\Delta \Phi(x, y) = 0$$

que é a equação de Laplace para a função empenamento. Esta equação admite como condição de contorno:

$$\Phi(\rho), n = x \cdot t \quad \text{em } \partial\Omega$$

onde n é o vetor normal a $\partial\Omega$, ρ representa o comprimento de arco do contorno, x é um ponto do contorno e t é o vetor tangente a $\partial\Omega$.

Mais outras duas formulações para o problema são possíveis. A primeira é obtida introduzindo a função conjugada da função empenamento, $\Psi(x, y)$, com as equações de Cauchy-Riemann, i.é:

$$\Psi_{,y} = \Phi_{,x} \quad e \quad \Psi_{,x} = -\Phi_{,y}$$

tem-se a formulação:

$$\begin{aligned}\Delta \Psi(x,y) &= 0 & \forall x \in \Omega \\ \Psi(x,y) &= 0.5 (x^2 + y^2) & \forall x \in \partial\Omega\end{aligned}$$

que envolve a equação de Laplace.

Finalmente, a última formulação é obtida com uso da função tensão de Prandtl, $\omega(x,y)$, tal que:

$$\tau_{13} = \omega, y \quad e \quad \tau_{23} = -\omega, x$$

resultando

$$\begin{aligned}\Delta \omega(x,y) &= -2G\theta & \forall x \in \Omega \\ \omega(x,y) &= 0 & \forall x \in \partial\Omega\end{aligned}$$

que é caracterizada pela equação de Poisson.

Problema 12. Determinar a função tensão de Prandtl para torsão de eixos com seção no formato de triângulos equiláteros. Este tipo de seção é escolhida devido ao fato de que a solução analítica do problema é bastante simples.

Adotando o sistema de referência ilustrado na Fig.44, a solução analítica é:

$$\omega(x,y) = G\theta (x - \bar{y} - 2\bar{a})(x + \bar{y} - 2\bar{a})(x + \bar{a})/2a$$

onde $\bar{y} = y/\sqrt{3}$, $\bar{a} = a/3$ e $a=12$.

Na Fig.45 mostra-se a malha auxiliar de elementos finitos utilizada na determinação das projeções da Função de Green e as isolinhas do erro % obtidas com uso do MLGFM. O valor de τ_{\max} calculado pelo MLGFM é 3.00237E+0, enquanto o analítico ($G\theta a/2$) vale 3.00E+0 para $G\theta=1/2$ e $a=12$.

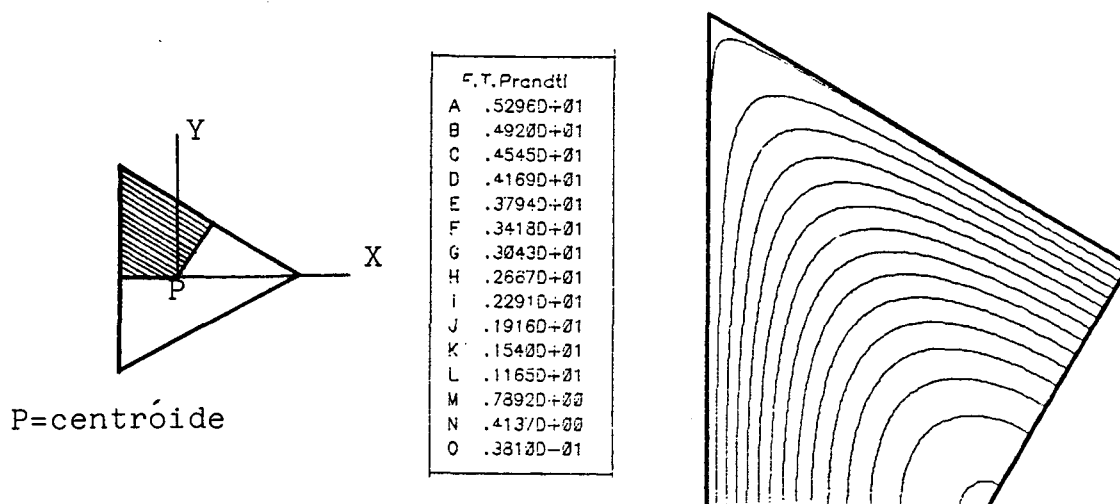


Fig.44-Sistema de Referência e Isolinhas da Função Tensão de Prandtl.

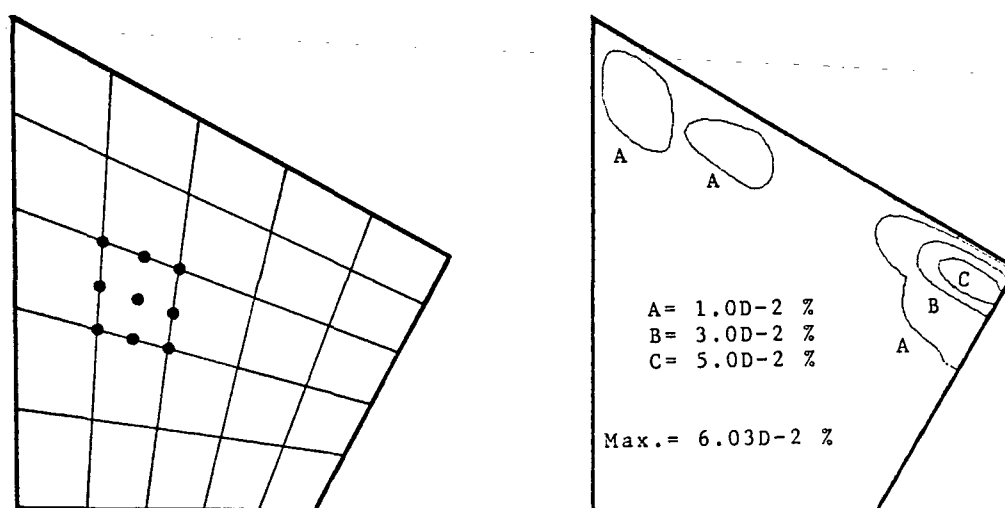


Fig.45- Malha Auxiliar de Elementos Finitos e Isolinhas do Erro %.

3.4.8-COMPARAÇÕES COM RESULTADOS ANTERIORES DO MLGFM.

Com objetivo de comparar resultados com os já disponíveis na literatura, Silva (1988) e Barcellos & Silva (1987), foram resolvidos os dois problemas seguintes.

Problema 13. Determinar $u(x)$ tal que

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 50(-x^2 - y^2 + x + y) & \forall x \in \Omega \\ e & \quad u = 0 & \forall x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

onde $\Omega = \{ x = (x,y) \in \mathbb{R}^2: -1 \leq x, y \leq 1 \}$ e $\partial\Omega = \{ x = (x,y) \in \mathbb{R}^2: x, y = \pm 1 \}$. Para discretização do domínio (usando a simetria do problema) foram utilizados 4 elementos quadráticos e para o contorno 8 elementos quadráticos de linha com nós duplos nos pontos de descontinuidade da normal e/ou condições de contorno.

Na Tab.12 apresenta-se os resultados de Silva (1988) e da presente análise, indicando o erro percentual de cada uma. Ótima proximidade de resultados é observada.

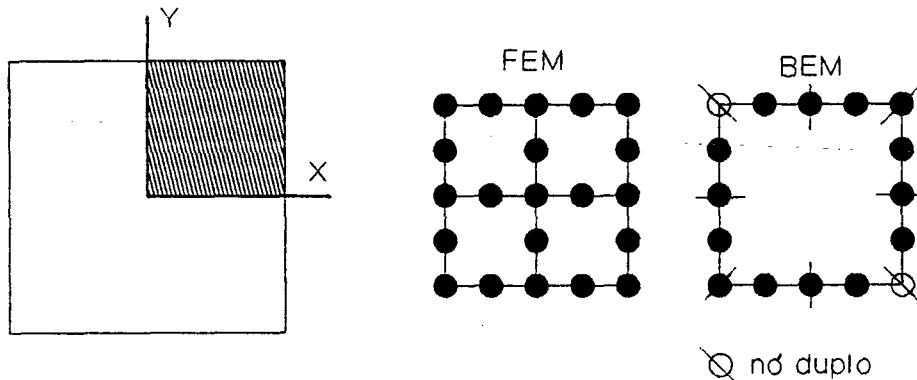


Fig.46-Discretização do Domínio e Contorno.

Tab.12-Resultados Comparativos para o MLGFM.

x	y	Sol. Anal.	Silva (1988)	Erro%	Presente	Erro%
0.5	0.5	1.5625	1.5644	0.121	1.5603	0.141
0.375	0.5	1.4648	1.4745	0.662	1.4658	-0.068
0.25	0.5	1.1718	1.1763	0.384	1.1688	0.256
0.125	0.5	0.6835	0.6892	0.834	0.6858	0.336

Um aspecto importante a salientar é que nas análises feitas por Silva (1988) e Barcellos & Silva (1987), a aproximação da função de Green é feita a nível de elemento, enquanto na presente análise esta aproximação é realizada tomando como referência todo o domínio.

Problema 14. Determinar $u(x)$ tal que

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 & \forall x \in \Omega \\ u &= 0 & \forall x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

com domínio e contorno iguais ao do problema anterior.

A discretização do domínio e contorno são iguais às do problema anterior e na Tab.13 mostra-se os resultados da presente análise, de Silva (1988) com o MLGFM e de Jaswon & Symm (1977) com o BEM e 64/128 elementos constantes.

Tab.13-Resultados Comparativos para o MLGFM.

x	y	Silva (1988)	Presente	BEM-64	BEM-128
0.0	0.0	0.2941	0.2941	0.2947	0.2947
0.0	0.5	0.2291	0.2292	0.2293	0.2293

Este mesmo problema foi resolvido com uso das malhas de elementos triangulares mostradas na Fig.47. A discretização do contorno foi realizada com elementos lineares e prevendo nós duplos nos pontos de descontinuidade da normal e/ou das condições de contorno.

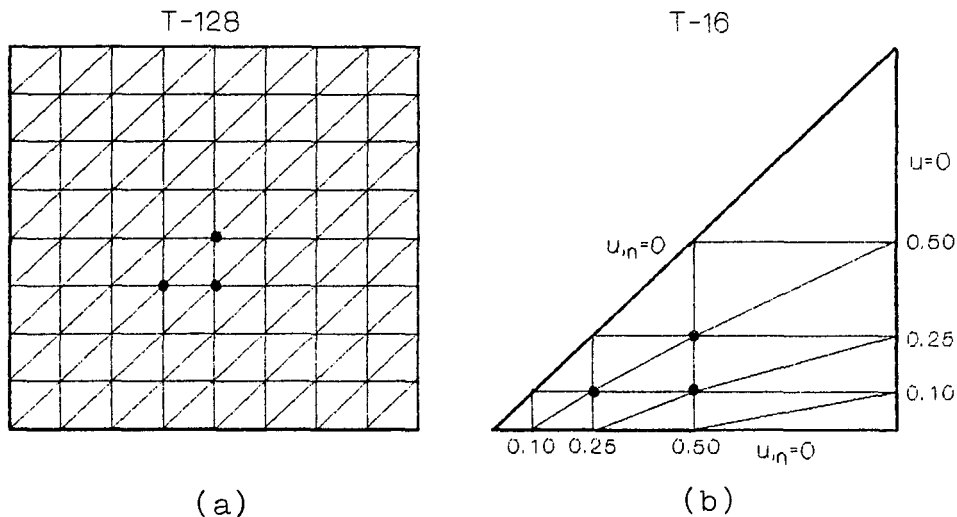


Fig.47- Discretização do domínio. T128 (a) e T16 (b).

A malha T16 é a mesma utilizada por Dhatt & Touzot (1985) para resolver este problema com o FEM. Resultados comparativos estão mostrados na Tab.14 e as linhas de potencial (resultados do MLGFM) aparecem na Fig.48.

Tab.14-Resultados Comparativos para o MLGFM.

x	FEM	MLGFM-T16	MLGFM-T128
0.0	0.29131	0.29131	0.29065
0.1	0.28798	0.28798	
0.25	0.27391	0.27391	0.27679
0.50	0.22353	0.22352	0.22799
y=0.0	u(0,0)=0.294685413E+0.		

Os resultados da Tab.14 mostram que o elemento triangular linear deve ser evitado pelo MLGFM, pois não apresenta ganho nenhum com relação ao FEM e, mesmo com malha relativamente refinada (128 elementos), os resultados para o potencial são "péssimos" quando comparados com os obtidos com o elemento quadrangular linear e mesmo número nós.

A=.2876E+0
 B=.2672E+0
 C=.2469E+0
 ⋮
 N=.2247E-2
 O=.2069E-3

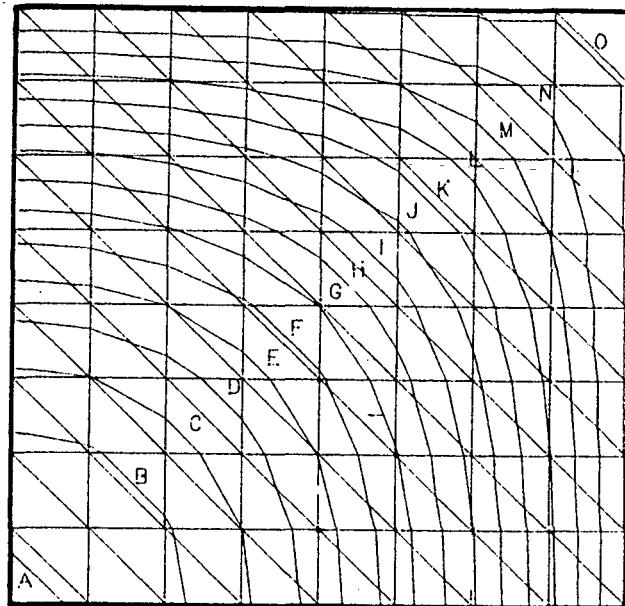


Fig.48- Isopotencial. Malha T128.

3.4.9-O MÉTODO "HRZ".

Na aproximação da projeção da Função de Green $G^D(P)$ o sistema de equações resultante é:

$$\left[K+K_0 \right] \left[G^{DP} \right] = \left[M \right]$$

onde $[M]$ tem mesmo aspecto formal que a matriz massa consistente com densidade unitária.

Devido à natureza da matriz $[M]$, o tempo de cpu utilizado para obter a aproximação de $Gd(P)$ é excessivamente alto para malhas com grande número de nós. Por exemplo, uma malha com "ntn" nós (que corresponde a "ntn" funções de interpolação para a análise potencial) resulta uma matriz $[M]$ com dimensão "ntn x ntn" e, além do espaço para armazenamento dessa matriz, o sistema acima é resolvido "ntn" vezes. Estes fatos podem inviabilizar a solução em computadores de médio e pequeno porte dos problemas onde existe a necessidade de usar malhas mais refinadas para a discretização do domínio.

Uma alternativa de solução para o problema é a diagonalização da matriz $[M]$ com uso do "Método HRZ", Cook et ali. (1989), com conseqüente redução do espaço de armazenamento dessa matriz e do tempo de cpu utilizado para resolução do sistema em questão. Duas são as principais razões dessa escolha: os excelentes resultados obtidos com o FEM usando a técnica na análise modal e que seu uso não é restrito a nenhum tipo de elemento.

A idéia central do Método HRZ é usar somente os elementos da diagonal da matriz massa consistente, porém com um certo escalonamento de modo a preservar a massa total do elemento. O Método pode ser resumido em 4 etapas:

1-Calcular somente os termos da diagonal da matriz massa consistente;

2-Calcular a massa total do elemento, m . Esta passagem exige apenas uma integração direta;

3-Calcular o valor $s = \sum m_{jj}$ usando somente as diagonais relacionadas com graus de liberdade de translação mutuamente paralelos e na mesma direção; e

4-Escalonar *todas* as diagonais multiplicando-as por m/s ; o que preserva a massa total do elemento.

Os resultados práticos do uso dessa técnica com o MLGFM estão mostrados nos exemplos que seguem.

Problema 16. Determinar $u(x)$, tal que

$$\begin{aligned} \Delta u &= 1 & \forall x \in \Omega \\ u &= 0 & \forall x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

sendo $\Omega = \{ x=(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x,y \leq 1 \}$ e $\partial\Omega = \{ x=(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y = \pm 1 \}$, que já foi resolvido anteriormente. Usando malha homogênea de 5×5 elementos quadráticos para discretizar $1/4$ do domínio (devido à simetria do problema) com correspondente malha de elementos quadráticos no contorno, os resultados obtidos com o HRZ são os ilustrados na Tab.15. Nota-se que não existe diferença entre as soluções obtidas com o MLGFM-convencional e o MLGFM-HRZ, tanto em energia, potencial e/ou fluxo máximo.

Tab.15-Resultados Comparativos:MLGFM-Conv.x MLGFM-HRZ.

Solução	Analítica	MLGFM-Conv.	MLGFM-HRZ
Energia	7.028850D-2	7.028652D-2	7.028652D-2
$u(0,0)$	2.948685D-1	2.946830D-1	2.946830D-1
$u_n(1,0)$	-6.753144D-1	-6.752976D-1	-6.752976D-1

Problema 17. Determinar a função $u(x)$ tal que

$$\begin{aligned} \Delta u(r,\theta) &= 0 & r,\theta \in \Omega \\ u(r,\theta) &= r^{1/2} \cos(\theta/2) & r,\theta \in \partial\Omega_1 \\ \partial u(r,\theta)/\partial \theta &= 0 & r,\theta \in \partial\Omega_2 \end{aligned}$$

onde $\Omega = \{ x = (x,y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \}$, $\partial\Omega_1$ e $\partial\Omega_2$ são mostrados na Fig.23. Este problema também já foi resolvido anteriormente e devido à sua singularidade foi escolhido como teste para validação do uso do HRZ. A Tab.16 mostra os resultados de energia obtidos com o MLGFM-convencional e o MLGFM-HRZ e a malha é a mesma ilustrada na Fig.23.

Tab.16-Resultados Comparativos:MLGFM-Conv.x MLGFM-HRZ.

Solução	Analítica	MLGFM-Conv.	MLGFM-HRZ
Energia	4.406867D-1	4.408931D-1	4.408931D-1

O comportamento oscilatório do fluxo perto da singularidade é preservado e erros significativos aparecem somente no

último elemento perto do ponto singular, ilustrados na Fig.49. Assim como verificado nas Tab.15 e 16, os valores pontuais do fluxo também são coincidentes para as duas análises: MLGFM-convencional e MLGFM-HRZ.

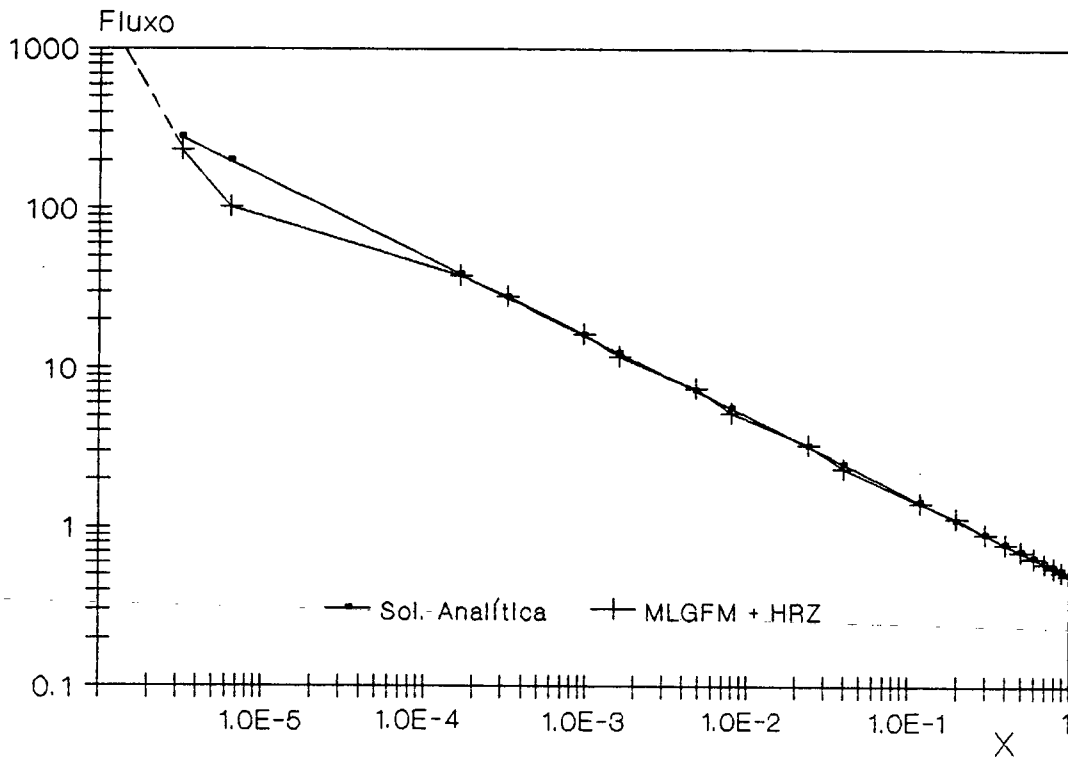


Fig.49- MLGFM-HRZ. Fluxo ao Longo do Lado Crítico.

3.4.10-PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS.

Problemas de potenciais tridimensionais são analisados com o MLGFM sem nenhuma mudança na metodologia proposta até aqui. Duas são as modificações necessárias: para aproximação das projeções da função de Green o elemento finito passa a ser tridimensional e para as aproximações no contorno o elemento é bidimensional.

As mesmas características de superconvergência nodal de fluxo e potencial estão presentes e verificadas com o exemplo seguinte.

Problema 18. Determinar $u(x)$ tal que:

$$\Delta u = 2[(1-x^2)(1-y^2) + (1-x^2)(1-z^2) + (1-y^2)(1-z^2)] \quad \forall x \in \Omega$$

$$u = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$$

sendo $\Omega = \{ x = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3: -1 \leq x,y,z \leq 1 \}$ e $\partial\Omega$ é formado pelos lados do cubo; $\partial\Omega = \{ x=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: x,y,z = \pm 1 \}$.

Devido à simetria do problema, apenas 1/8 do domínio é discretizado com apenas um elemento he27po e quatro elementos de contorno quadrático (de superfície) com nós duplos em pontos de descontinuidade da normal, Fig.50.

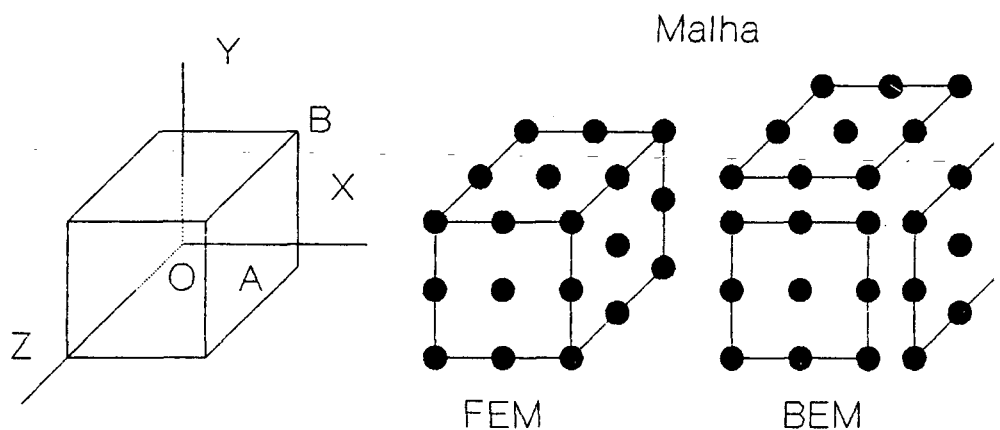


Fig.50-Discretização do domínio.

Excelentes resultados para fluxo e potencial são obtidos e mostrados na Tab.17, mesmo com malha tão pobre.

Tab.17-Potencial e Fluxo: Analítico \times MLGFM.

Solução	Analítica	MLGFM
P em O	1.0D+00	1.0D+00 (8)
P em A	0.0D+00	1.3D-24
F em A	-2.0D+00	-2.0D+00 (8)
F em B	0.0D+00	5.5D-14

P/F=Potencial/Fluxo.

(.)=Digitos significativos iguais.

3.5-CONCLUSÕES.

Após a resolução desta série de problemas de potencial com o MLGFM, algumas das principais características e observações verificadas são:

1-A superconvergência nodal de fluxo e potencial é marcante, até mesmo para os elementos de ordem baixa;

2-Características de oscilação do fluxo/potencial para os nós de um mesmo elemento (nós centrais e dos cantos) merece uma análise matemática mais detalhada;

3-O uso de nós duplos é essencial para os pontos do contorno onde existe a descontinuidade da normal e/ou das condições de contorno;

4-Aplicado segundo as regras estabelecidas no Capítulo 2, o operador de Neumann adicional ($N' = \mu k_0$) não influencia na resposta do problema;

5-A taxa de convergência k ($\|e\|_E^{ER}$) aparentemente tem o mesmo comportamento do FEM;

6-A taxa de convergência η ($\|e\|_E^{ER}$) aparentemente não tem o mesmo comportamento do FEM; mantendo, pelo menos, um ganho de 10 vezes para cada acréscimo da ordem do elemento. Para valores pontuais esta regra também não é válida e o ganho com o acréscimo da ordem do elemento é bem mais acentuado e técnicas η -adaptativas são altamente recomendadas para futuros trabalhos, como mostram as Figs.(19) e (20).

7-Para problemas singulares, o projeto da malha é a etapa fundamental para representar com eficiência a singularidade. Procedendo assim, mesmo com elementos de ordem baixa, fluxos singulares são pontualmente representados com perfeição. Erros significativos aparecem somente nos nós do elemento que contém a singularidade.

8-A não homogeneidade do meio também é tratada sem nenhuma dificuldade. Características de superconvergência permanecem inalteradas;

9-Problemas axissimétricos também são facilmente modelados com a mesma eficiência alcançada pelo BEM, porém com extrema simplicidade devido à aproximação da Função de Green;

10-Praticamente não existe sensibilidade com relação à distorsão dos elementos, mesmo para elementos de baixa ordem;

11-O Método "HRZ" pode ser empregado com bastante eficiência; e

12-Problemas de análise tridimensional também são modelados com eficiência.

3.6-REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- Alarcón, E. and Reverter, A. (1986).
P-Adaptive Boundary Elements", Int. J. Num. Meth. Eng. 23, pg. 801-829.
- Babuska, I. & Guo, B.Q. (1988).
The h-p Version of the Finite Element Method for Domains with Curved Boundaries", SIAM J. Num. Anal. 25, pg. 837-861.
- Babuška, I.; Guo, B.Q. and Stephan, E.P. (1990).
The h-p version of the Boundary Element Method with Geometric mesh on Polygonal Domains, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 80, pg. 319-325.
- Babuška, I. & Suri, M. (1990)
The p and h-p versions of the Finite Element Method, an Overview, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 80, pg. 5-26.
- Barbieri, R. & Barcellos, C.S. (1992).
Non Homogeneous Field Potential Problems Solution by the Modified Local Green's Function Method (MLGFM). (to appear in EABE).
- Barbieri, R. & Barcellos, C.S. (1991).
Solution of Singular Potential Problems by the Modified Local Green's Function Method. Proc. 13th Int. Conf. Boundary Element Technology, (Ed. Brebbia, C.A. & Gibson, G.).

- Barcellos, C.S. & Silva, L.H.M. (1987).
Elastic Membrane Solution by the Modified Local Green's Function Method, (Ed. Brebbia, C.A. e Venturini, W.S.) Proc. Int. Conf. on Boundary Element Technology.
- Carey, F.G. & Oden, J.T. (1983).
Finite Elements: A Second Course, Vol. II, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Cook, R.D., Malkus, D.S. & Plesha, M.E. (1989).
Concepts and Applications of Finite Element Analysis . John Wiley & Sons, 3 Ed.
- Costa Jr., J.A. (1990).
Formulação h-Auto-Adaptiva de Elementos de Contorno para Problemas de Potencial, Proc. 3rd. Brazilian Thermal Science Meeting, (Ed. Maliska, C.A.; Melo, C. & Prata, A.T.), pp.421-428.
- Chung, T.J. (1978).
Finite Element Analysis in Fluid Dynamics. Mc-Graw-Hill International Book Co.
- Dhatt, G. & Touzot, G. (1985).
The Finite Element Method Displayed . John Wiley & Sons.
- Jaworski, A.R. (1981).
Boundary Elements for Heat Conduction in Composite Media, Applied Mathematical Modelling, Vol.5, pp.45-48.
- Kelly, D.W.; Gago, J.P.S.R. & Zienkiewicz, O.C. (1983).
A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part I-Error Analysis, Int. J. Num. Meth. Eng. 19, pg.1593-1619.
- Oden, J.T. & Reddy, J.N. (1976)
An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements, New York, John Wiley & Sons.

- Postell, F.V. & Stephan, E.P. (1990).
On the h,p and h-p Versions of the Boundary Element Method - Numerical Results. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 83, pg. 69-89.
- Silva, L.H.M. (1988).
Novas Formulações Integrais para Problemas da Mecânica, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, 1988.
- Skerget, P. & Brebbia, C.A. (1983).
Nonlinear Potential Problems. Cap.1 em Progress in Boundary Element Methods Vol.2 (Ed. Brebbia, C.A.), Pentech-Press, London.
- Sokolnikoff, I.S. (1956).
Mathematical Theory of Elasticity. McGraw-Hill, N.Y.
- Szabo, B.A. (1986).
Estimation and Control of Error Based on p Convergence, Cap.3 em Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations, (Ed. Babuška, I.; Zienkiewicz, O.C.; Gago, J. & Oliveira, E.R.A.) John Wiley & Sons Ltda.
- Szabo, B.A. (1986).
Mesh Design for the p-Version of the Finite Element Method, Comp. Meth. in Applied Mechanics and Eng. 55, pg.181-197.
- Wrobel, L.C. (1981)
Potential and viscous flow problems using the boundary element method. Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering of the University of Southampton.

CAPÍTULO 4

DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÃO DO MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO (MLGFM) PARA A ELASTOESTÁTICA

4.1-INTRODUÇÃO

Esta é a primeira aplicação do MLGFM para resolver problemas da elasticidade bidimensional. Devido a este fato, diversos problemas são resolvidos com diferentes elementos, com objetivo de verificar se a superconvergência nodal de deslocamentos e esforços também está presente para aplicações da elasticidade bidimensional.

Problemas de potenciais singulares foram resolvidos com sucesso no Capítulo 3, mostrando ótima proximidade da solução analítica, tanto no fluxo como em potencial. Erros acentuados aparecem somente no último elemento perto da singularidade. Esta mesma característica é verificada na determinação do fator de intensidade de tensão para problemas de trincas em placas e, comparando com os resultados obtidos com outras técnicas numéricas, os presentes podem ser considerados ótimos.

Para a determinação da concentração de tensões para os problemas onde a solução é "suficientemente regular", malhas grosseiras são suficientes para uma boa representação da solução. Mesmo considerando elementos distorcidos, ótimos resultados de deslocamento e esforços foram obtidos com uso do MLGFM.

Outra característica bem semelhante aos problemas de potenciais é a solução de problemas axissimétricos, que também é

marcada pela sua simplicidade.

Finalmente, na primeira parte deste capítulo são mostradas as equações básicas da elastoestática; na segunda o detalhamento do formalismo do MLGFM para estes problemas e na terceira parte os resultados numéricos.

4.2-RELAÇÕES CLÁSSICAS DA ELASTOESTÁTICA.

Nesta seção são apresentadas apenas as fórmulas básicas que caracterizam a resposta de corpos elásticos lineares quando submetidos a carregamentos estáticos.

4.2.1-O Problema da Elasticidade Linear.

Na Teoria da Elasticidade o maior interesse é voltado para a solução da equação de Navier para meios homogêneos, isotrópicos e lineares:

$$(\lambda + G) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + G \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{b} = 0 \quad (4.1)$$

onde \mathbf{u} é o vetor deslocamento

$$\mathbf{u}^t = \{u_1 \ u_2 \ u_3\} \quad (4.2)$$

\mathbf{b} é o vetor força de corpo

$$\mathbf{b}^t = \{b_1 \ b_2 \ b_3\} \quad (4.3)$$

enquanto que λ e G são as clássicas constantes de Lamé relacionadas com o módulo de Young, E , e com o coeficiente de Poisson, ν , por

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{e} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.4)$$

A solução da Eq.(4.1) tem sido largamente investigada matematicamente e muitas soluções analíticas estão disponíveis na literatura especializada para problemas tidos como "acadêmicos".

Entretanto, a solução de problemas com geometria e condições de contorno complexas, é considerada de grande interesse.

Para tornar o problema (4.1) "bem posto", além das exigências geométricas, deve-se prescrever suas possíveis condições de contorno de forma adequada. Essas condições podem ser do tipo:

1-Condições de Contorno Essenciais:

O deslocamento é prescrito no contorno, i.é,

$$u = \bar{u}(x) \quad \text{para } x \in \partial\Omega \quad (4.5)$$

onde $\partial\Omega$ é o contorno do domínio Ω .

2-Condições de Contorno Naturais:

O vetor tração é prescrito no contorno, i.é,

$$T(x) = \bar{T}(x) \quad \text{para } x \in \partial\Omega \quad (4.6)$$

onde $T(x)$ é o vetor tração no ponto $x \in \partial\Omega$ que admite a existência do vetor normal (apontado para fora), n , em quase todos os seus pontos.

O vetor tração está relacionado com o tensor tensão, σ , por

$$T(x) = \sigma \cdot n \quad (4.7)$$

sendo que σ obedece a lei de Hooke:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{mm} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (4.8)$$

onde

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad (4.9)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

e $(\cdot)_{,j}$ indica derivada parcial com relação a j -ésima coordenada do sistema de coordenadas em referência.

Com a combinação dessas últimas quatro equações, as condições de contorno naturais podem ser reescritas em termos do vetor deslocamento na forma:

$$\lambda n \nabla \cdot u + 2G u_{,n} + G (n \times \text{rot} u) = \bar{T}(x) \quad (4.10)$$

onde $(\cdot)_{,n}$ indica derivada normal em $x \in \partial\Omega$.

Ainda, a Eq.(4.8) pode ser convenientemente reescrita como sendo:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (4.11)$$

onde

$$D_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (4.12)$$

3-Condições de Contorno Mistas.

São obtidas com combinação dos dois tipos anteriores em diferentes partes do contorno. Tomando como exemplo, o problema ilustrado na Fig.1, para explorar as condições de simetria é necessário especificar u_1 e σ_{12} nulos no lado DE.

4-Condições de Contorno não Clássicas.

Em adição a estes três tipos clássicos de condições de contorno, existem ocasiões onde as condições naturais aparecem combinadas com as condições essenciais (Robin-Newton) como:

$$a u + b T = c \quad (4.13)$$

que representa, por exemplo, um corpo sustentado por apoios elásticos e/ou suportado por fundação elástica.

Outro tipo de condição de contorno não clássica pode aparecer com a combinação das componentes do vetor tração da seguinte maneira:

$$a (T \cdot n) + b (T \cdot s) = c \quad (4.14)$$

onde s é o vetor unitário tangente ao contorno. Esta situação pode representar, por exemplo, condições de contorno para

superfícies de Coulomb.

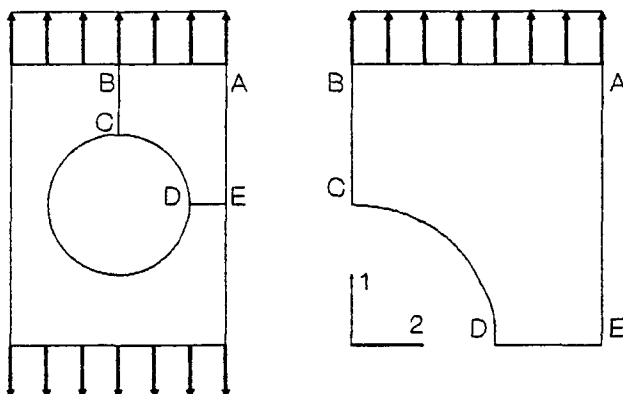


Fig.1- Condições de Contorno Mixtas.

De agora em diante, supõe-se que o problema é "bem posto" e a próxima etapa é o desenvolvimento do formalismo do MLGFM para problemas da elastoestática, sem restrições para o caso bi e/ou tri-dimensional.

4.3-FORMALISMO DO MLGFM PARA A ELASTOESTÁTICA.

Na Elastoestática, pelo Princípio da Energia Potencial Total, o interesse é obter o vetor deslocamento $u(x)$ que minimiza o funcional $J(u)$:

$$J(u) = 0.5 \int_{\Omega} D_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} d\Omega - \int_{\Omega} b_i u_i d\Omega - \int_{\partial\Omega_2} \bar{T}_i u_i d\partial\Omega - \int_{\partial\Omega_1} T_i \bar{u}_i d\partial\Omega \quad (4.15)$$

com $u = \bar{u}$ em $\partial\Omega_1$. Aqui $\Omega \subset \mathbb{R}^3$; $\partial\Omega_1$ é a parcela do contorno onde u é especificado e $\partial\Omega_2$ a parcela onde $\bar{T}(x)$ é especificado.

A primeira parcela do funcional $J(u)$ representa a energia de deformação do corpo elástico quando submetido ao carregamento da força de corpo b , das trações $\bar{T}(x)$ e deslocamentos \bar{u} no contorno. A segunda parcela representa o trabalho realizado pelas forças de corpo e as duas últimas o trabalho realizado pelas forças e deslocamentos de superfície.

O funcional $J(u)$ pode ser convenientemente reescrito na forma:

$$J(u) = 0.5 B(u,u) - F(u) \quad (4.16)$$

onde $B(\cdot, \cdot)$ é a forma bilinear

$$B(u,v) = \int_{\Omega} D_{ijkl} u_{i,j} v_{k,l} d\Omega \quad (4.17)$$

e $F(\cdot)$ é o funcional

$$F(u) = \int_{\Omega} b_i u_i d\Omega + \int_{\partial\Omega_2} \bar{T}_i u_i d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega_1} T_i \bar{u}_i d\partial\Omega \quad (4.18)$$

Minimizando $J(u)$ com relação ao vetor deslocamento obtém-se as equações de equilíbrio da elastoestática em termos de deslocamentos:

$$G u_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,kj} + b_j = 0 \quad (4.19)$$

com possíveis condições de contorno:

$$\frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{k,k} n_i + G (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j = \bar{T}_i \quad \text{em } \partial\Omega_2 \quad (4.20)$$

ou

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{em } \partial\Omega_1 \quad (4.21)$$

onde n_i representa a i -ésima componente do vetor normal (sentido positivo apontando para fora do corpo) e o símbolo " $\bar{\quad}$ " indica valor prescrito.

É interessante salientar que a forma bilinear $B(\cdot, \cdot)$, como definida acima, atende as condições do Teorema Generalizado de Lax-Milgram. Uma outra demonstração da solução única da Eq.(4.19) a partir da forma bilinear $B(\cdot, \cdot)$ é a realizada por Malvern (1969).

Das Eqs.(4.19) e (4.20) identifica-se o operador diferencial, \mathcal{A} , e o operador de Neumann, \mathcal{N} , tais que

$$\mathcal{A} u + b = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (4.22)$$

$$e \quad \mathcal{N} u = T \quad \text{em } \partial\Omega \quad (4.23)$$

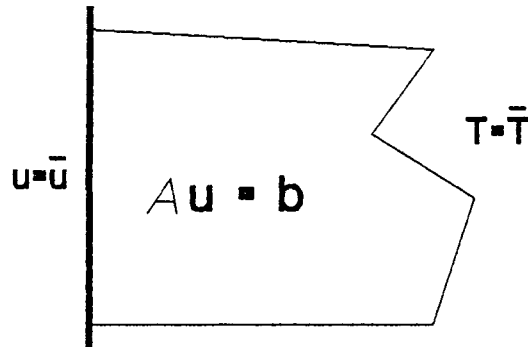


Fig.2- Condições de Contorno.

Como \mathcal{A} é um operador auto-adjunto, os operadores \mathcal{A}^* e \mathcal{N}^* também estão automaticamente identificados. Detalhes dessa demonstração podem ser encontrados, por exemplo, na referência Brebbia et ali. (1984).

De posse desses operadores diferenciais, as projeções da Função de Green podem ser calculadas via elementos finitos resolvendo os problemas 1* e 2*, Eqs.(2.106)-(2.107) e (2.108)-(2.109), respectivamente.

Com o objetivo de facilitar a visualização de futuros desenvolvimentos, admite-se que a discretização do domínio (malha de elementos finitos) seja efetuada com uso do elemento bilinear de quatro nós e que a discretização do contorno (malha de elementos de contorno) seja realizada com o elemento de linha linear. Ainda, todo o desenvolvimento que se segue será realizado baseando-se na elastoestática bidimensional, porém, pode ser aplicado sem nenhuma limitação à análise tridimensional.

Assim sendo, a aproximação do vetor deslocamento em cada elemento do domínio pode ser feita da seguinte maneira:

$$u = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 & 0 & \psi_4 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 & 0 & \psi_4 \end{bmatrix} \{u_{11} \quad u_{21} \quad u_{12} \quad u_{22} \quad u_{13} \quad u_{23} \quad u_{14} \quad u_{24}\}^t \quad (4.24)$$

onde ψ_i representa a i -ésima função de interpolação local de

domínio e u_{k1} o valor da componente u_k no nó "1" local. Matricialmente esta aproximação pode ser reescrita na forma:

$$u = [\Psi] q \quad (4.25)$$

onde

$$[\Psi] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 & 0 & \psi_4 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 & 0 & \psi_4 \end{array} \right]$$

e

$$q = \{u_{11} \mid u_{21} \mid u_{12} \mid u_{22} \mid u_{13} \mid u_{23} \mid u_{14} \mid u_{24}\}^t.$$

Procedendo de maneira análoga, no contorno, a aproximação para o vetor deslocamento u é feita segundo as funções de interpolação locais, i.é:

$$u = \left[\begin{array}{cc|cc} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{array} \right] \{u_{11} \mid u_{21} \mid u_{12} \mid u_{22}\}^t \quad (4.26)$$

onde ϕ_i representa a i -ésima função de interpolação local de contorno e u_{k1} o valor da componente u_k no nó "1" local. Matricialmente esta aproximação pode ser reescrita na forma:

$$u = [\Phi] q \quad (4.27)$$

onde

$$[\Phi] = \left[\begin{array}{cc|cc} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{array} \right]$$

e

$$q = \{u_{11} \mid u_{21} \mid u_{12} \mid u_{22}\}^t.$$

Globalmente, i.é, usando as funções de interpolação globais tem-se:

$$u = \left[\begin{array}{cc|cc| \dots | cc} \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \dots & \psi_{ntn} & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & \psi_2 & \dots & 0 & \psi_{ntn} \end{array} \right] \{u_{11} \mid u_{21} \mid u_{12} \mid u_{22} \mid \dots \mid u_{1ntn} \mid u_{2ntn}\}^t \quad (4.28)$$

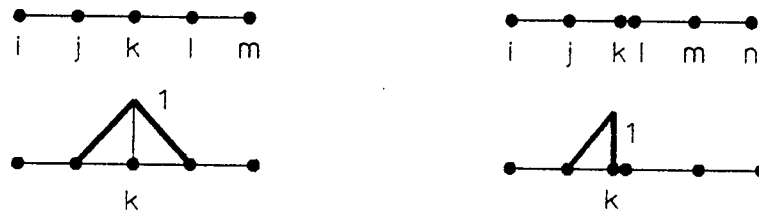
onde ψ_i denota agora a i -ésima função de interpolação global, u_{k1} indica o valor de u_k no nó global "1" e "ntn" o número total de nós da malha de elementos finitos.

Analogamente, para o contorno tem-se:

$$u = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \vdots & \phi_{ntnc} & 0 \\ 0 & \phi_1 & \vdots & 0 & \phi_{ntnc} \end{bmatrix} \{u_{11} \mid u_{21} \mid u_{12} \mid u_{22} \mid \dots \mid u_{1ntnc} \mid u_{2ntnc}\}^t \quad (4.29)$$

onde ϕ_i denota agora a i -ésima função de interpolação global, u_{kl} indica o valor de u_k no nó global "l" do contorno e "ntnc" o número total de nós da malha de elementos de contorno.

Note que, uma vez que na discretização de elementos de contorno existe a possibilidade da existência de nós duplos, caracterizados pelas mesmas coordenadas espaciais, estas funções de interpolação globais do contorno diferem das usuais de elementos finitos, como mostra a Fig.3.



ϕ_k de contorno convencional do FEM ϕ_k de contorno com no duplo
 Fig.3- Funções de Interpolação Globais de Contorno.

No final desta etapa o espaço $\mathcal{V}(k, \eta)$ de elementos finitos, caracterizado pelas grandezas k e η que definem o maior diâmetro externo dentre todos os elementos da malha e o grau η do polinômio aproximador, respectivamente, está completamente definido. A próxima etapa é determinar as projeções do Tensor de Green.

4.4-APROXIMAÇÃO DAS PROJEÇÕES DA FUNÇÃO DE GREEN.

Por conveniência, repete-se todo procedimento desenvolvido no Capítulo 2 a partir dos problemas 1 e 2, Eqs.(2.90)-(2.91) e (2.92)-(2.93), respectivamente, para obter as projeções $Gd(P)$, $Gd(p)$, $Gc(P)$ e $Gc(p)$.

4.4.1-APROXIMAÇÃO DE $G_d(P)/G_d(p)$.

Do problema 1, Eqs.(2.90) e (2.91), tem-se:

$$\mathcal{A}^* G(P,Q) = \delta(P,Q) I \quad \forall P,Q \in \Omega \quad (4.30)$$

e

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') G(p,Q) = 0 \quad \forall Q \in \Omega, p \in \partial\Omega \quad (4.31)$$

Pós-multiplicando a Eq.(4.30) por $[\Psi(Q)]$ e integrando no domínio Ω , mantendo o ponto "P" fixo, resulta:

$$\mathcal{A}^* G_d(P) = [\Psi(P)] \quad \forall P \in \Omega \quad (4.32)$$

e com mesmo procedimento a partir da Eq.(4.31) obtém-se:

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') G_d(p) = 0 \quad \forall p \in \partial\Omega \quad (4.33)$$

Note que $G_d(P)$ é da forma:

$$G_d(P) = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \dots & \psi_{n_{tn}} & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & \psi_2 & \dots & 0 & \psi_{n_{tn}} \end{bmatrix} d\Omega_Q \quad (4.34)$$

onde G_{ij} dependem dos pontos "P,Q" e ψ_i depende do ponto "Q". Esta expressão pode ser reescrita como:

$$G_d(P) = [G_d^1(P) \parallel G_d^2(P) \parallel G_d^3(P) \parallel \dots \parallel G_d^{n_{tn}}(P)] \quad (4.35)$$

onde as componentes $G_d^i(P)$ valem:

$$G_d^i(P) = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} G_{11}\psi_i & G_{12}\psi_i \\ G_{21}\psi_i & G_{22}\psi_i \end{bmatrix} d\Omega_Q \quad (4.36)$$

e representam a i-ésima componente da projeção da Função de Green no espaço de elementos finitos $\mathcal{V}(h,\eta)$. Assim sendo, a Eq.(4.32) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\mathcal{A}^* \int_{\Omega} \begin{bmatrix} G_{11}\psi_i & G_{12}\psi_i \\ G_{21}\psi_i & G_{22}\psi_i \end{bmatrix} d\Omega_Q = \begin{bmatrix} \psi_i & 0 \\ 0 & \psi_i \end{bmatrix} \quad \forall P \in \Omega$$

ou

$$\mathcal{A}^* \text{Gd}^i(P) = \begin{bmatrix} \psi_{i0}(P) & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_i(P) & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad \forall P \in \Omega \quad (4.37)$$

de onde se conclui que as componentes da projeção da Função de Green também obedecem à equação diferencial do problema adjunto, com modificações apenas no vetor excitação, i.é, com a substituição de

$$\delta(P,Q) \text{ I} \quad \text{por} \quad \begin{bmatrix} \psi_{i0}(P) & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_i(P) & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

As condições de contorno para a Eq.(4.37) são estabelecidas à partir da Eq.(4.33), i.é:

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') \text{Gd}^i(p) = 0 \quad (4.39)$$

Definindo o operador diferencial \mathfrak{B} como:

$$\mathfrak{B} = \begin{bmatrix} \cdot, x & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdot, y \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

onde $(\cdot), x$ indica derivada parcial com relação à coordenada cartesiana "x" e $(\cdot), y$ com relação a "y", formula-se o funcional, $J(\text{Gd})$,

$$J(\text{Gd}_j^i) = 0.5 \int_{\Omega} [D \mathfrak{B}(\text{Gd}_j^i)]^t \mathfrak{B}(\text{Gd}_j^i) d\Omega - \int_{\Omega} [\text{Gd}_j^i]^t P_j d\Omega + \int_{\partial\Omega} [\mathcal{N}'(\text{Gd}_j^i)]^t \text{Gd}_j^i d\partial\Omega \quad (4.41)$$

cuja minimização e posterior solução com o FEM resulta na projeção da Função de Green desejada. Nesta expressão tem-se: Gd_j^i é a j-ésima coluna de $\text{Gd}^i(P)$ e P_j ($j=1,2$) vale:

$$P_1 = \begin{bmatrix} \psi_{i0}(P) \\ \vdots \\ \psi_i(P) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \psi_i(P) \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Para facilitar a visualização, reescreve-se a j -ésima coluna da i -ésima componente da projeção da Função de Green, Gd_j^i , na forma:

$$Gd_j^i = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

cuja expansão no domínio com elementos finitos é feita com:

$$Gd_j^i = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \dots & \psi_{ntn} & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & \psi_2 & \dots & 0 & \psi_{ntn} \end{bmatrix} \{v_1 | w_1 | v_2 | w_2 | \dots | v_{ntn} | w_{ntn}\}^t \quad (4.44)$$

Substituindo esta aproximação no funcional $J(Gd_j^i)$ e minimizando via elementos finitos para todas as componentes da projeção da Função de Green na base do espaço $\mathcal{V}(h, \rho)$, resulta o sistema de equações:

$$[K + K_0][G^{DP}] = [M] \quad (4.45)$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez convencional de elementos finitos para análise de problemas elastoestáticos,

$$[K] = \int_{\Omega} B^t D B d\Omega \quad (4.46)$$

sendo D a matriz das constantes elásticas do material que correlacionam tensões com deformações (lei de Hooke), B é igual a

$$B = \begin{bmatrix} \psi_{1,x} & 0 & \psi_{2,x} & 0 & \dots & \psi_{ntn,x} & 0 \\ 0 & \psi_{1,y} & 0 & \psi_{2,y} & \dots & 0 & \psi_{ntn,y} \\ \psi_{1,y} & \psi_{1,x} & \psi_{2,y} & \psi_{2,x} & \dots & \psi_{ntn,y} & \psi_{ntn,x} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$[K_0]$ é a matriz rigidez adicional devido a presença do operador \mathcal{N}' no contorno:

$$[K_0] = \int_{\partial\Omega} \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \dots & \phi_m & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & \dots & 0 & \phi_m \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \dots & \phi_m & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & \dots & 0 & \phi_m \end{bmatrix} d\partial\Omega \quad (4.48)$$

onde "m" representa o número de nós do contorno onde atua o ope-

rador \mathcal{N}' e k_i uma constante não nula arbitrária. Uma outra escolha conveniente para a matriz $[K_0]$ é da forma:

$$[K_0] = \text{diag} [k_1 \mid k_2 \mid k_3 \mid \dots \mid k_{2m-1} \mid k_{2m}] \quad (4.49)$$

sendo que k_i 's são constantes arbitrárias não nulas e "m" indica o número de nós no contorno onde atua o operador \mathcal{N}' . $[M]$ é idêntica à matriz massa com densidade unitária, i.é:

$$[M] = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \dots & \psi_{ntn} & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & \psi_2 & \dots & 0 & \psi_{ntn} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \dots & \psi_{ntn} & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & \psi_2 & \dots & 0 & \psi_{ntn} \end{bmatrix} d\Omega \quad (4.50)$$

e $[G^{DP}]$ contém valores nodais das projeções da Função de Green:

$[G^{DP}]_{j, 2 \times i - 1}$ = valores nodais ($j=1, 2 \times ntn$) das componentes da projeção Gd^i devido ao carregamento ψ_i ($i=1, ntn$) na direção 1.

$[G^{DP}]_{j, 2 \times i}$ = valores nodais ($j=1, 2 \times ntn$) das componentes da projeção Gd^i devido ao carregamento ψ_i ($i=1, ntn$) na direção 2.

4.4.2-APROXIMAÇÃO DE $G_c(P)/G_c(p)$.

Do problema 2, Eqs.(2.92) e (2.93), tem-se:

$$\mathcal{A}^* G(P, q) = 0 \quad \forall P \in \Omega, q \in \partial\Omega \quad (4.51)$$

e $(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') G(p, q) = \delta(p, q) \quad \forall p, q \in \partial\Omega \quad (4.52)$

Pós-multiplicando a Eq.(4.51) por $[\Phi(q)]$ e integrando no contorno $\partial\Omega$, mantendo o ponto "P" fixo, resulta:

$$\mathcal{A}^* G_c(P) = 0 \quad \forall P \in \Omega \quad (4.53)$$

e com mesmo procedimento a partir das Eqs.(4.52), obtém-se:

$$(N^* + N')Gc(p) = [\Phi(p)] \quad \forall p \in \partial\Omega \quad (4.54)$$

Note que $Gc(P)$ é da forma:

$$Gc(P) = \int_{\partial\Omega} \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \vdots & \phi_2 & 0 & \vdots & \dots & \vdots & \phi_{ntnc} & 0 \\ 0^1 & \phi_1 & \vdots & 0^2 & \phi_2 & \vdots & \dots & \vdots & 0 & \phi_{ntnc} \end{bmatrix} d\partial\Omega_q \quad (4.55)$$

onde G_{ij} dependem dos pontos "P,q" e ϕ_i depende do ponto "q". Esta equação pode ser reescrita como:

$$Gc(P) = [Gc^1(P) \vdots Gc^2(P) \vdots Gc^3(P) \vdots \dots \vdots Gc^{ntnc}(P)] \quad (4.56)$$

onde as componentes $Gc^i(P)$ valem:

$$Gc^i(P) = \int_{\partial\Omega} \begin{bmatrix} G_{11}\phi_i & G_{12}\phi_i \\ G_{21}\phi_i & G_{22}\phi_i \end{bmatrix} d\partial\Omega_q \quad (4.57)$$

e representam a i-ésima componente da projeção da Função de Green no espaço gerado pelas funções de interpolação de elementos de contorno. Assim sendo, a Eq.(4.53) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\mathcal{A}^* \int_{\partial\Omega} \begin{bmatrix} G_{11}\phi_i & G_{12}\phi_i \\ G_{21}\phi_i & G_{22}\phi_i \end{bmatrix} d\partial\Omega_q = 0 \quad \forall P \in \Omega$$

ou

$$\mathcal{A}^* Gc^i(P) = 0 \quad \forall P \in \Omega \quad (4.58)$$

de onde se conclui que as componentes da projeção da Função de Green também obedecem à equação diferencial do problema adjunto, com modificações apenas no vetor excitação, i.é, com a substituição de

$$\delta(P,Q) \text{ I} \quad \text{por} \quad 0 \quad (4.59)$$

Novamente, as condições de contorno para a Eq.(4.58) são tomadas a partir da Eqs.(4.54) e valendo:

$$(\mathcal{N}^x + \mathcal{N}') \mathbf{Gc}^i(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \phi_i(\mathbf{p}) \\ 0 \\ \vdots \\ \phi_i(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Da mesma maneira efetuada para a projeção $\mathbf{Gd}(\mathbf{P})/\mathbf{Gd}(\mathbf{p})$, é possível escrever o funcional

$$J(\mathbf{Gc}_j^i) = 0.5 \int_{\Omega} [\mathbf{D} \mathfrak{X}(\mathbf{Gc}_j^i)]^t \mathfrak{X}(\mathbf{Gc}_j^i) d\Omega - \int_{\partial\Omega} [\mathbf{Gc}_j^i]^t \mathbf{p}_j d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega} [\mathcal{N}'(\mathbf{Gc}_j^i)]^t \mathbf{Gc}_j^i d\partial\Omega \quad (4.61)$$

cuja minimização e posterior solução com o FEM resulta na projeção da Função de Green desejada. Nesta expressão tem-se: \mathbf{Gc}_j^i é a j -ésima coluna de $\mathbf{Gc}^i(\mathbf{P})$ e \mathbf{p}_j ($j=1,2$) vale:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} \phi_i(\mathbf{p}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_i(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

Para facilitar a visualização, reescreve-se a j -ésima coluna da i -ésima componente da projeção da Função de Green, \mathbf{Gc}_j^i , na forma:

$$\mathbf{Gc}_j^i = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

cuja expansão no domínio com elementos finitos é feita com:

$$\mathbf{Gc}_j^i = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \vdots & \psi_2 & 0 & \vdots & \cdots & \vdots & \psi_{ntn} & 0 \\ 0 & \psi_1 & \vdots & 0 & \psi_2 & \vdots & \cdots & \vdots & 0 & \psi_{ntn} \end{bmatrix} \{v_1 | w_1 | v_2 | w_2 | \cdots | v_{ntn} | w_{ntn}\}^t \quad (4.64)$$

Substituindo esta aproximação no funcional $J(\mathbf{Gc}_j^i)$ e minimizando via elementos finitos para todas as componentes da projeção da Função de Green na base do espaço $\mathcal{V}(h, \mathbf{n})$, resulta o sistema de equações:

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}_0][\mathbf{G}^{CP}] = [\mathbf{m}] \quad (4.65)$$

onde $[\mathbf{K}]$ e $[\mathbf{K}_0]$ são as matrizes já calculadas anteriormente, $[\mathbf{m}]$ é a matriz

$$[m] = \int_{\partial\Omega} \begin{bmatrix} \phi_1^0 & \phi_2^0 & \dots & \phi_{ntnc}^0 \\ 0^1 \phi_1 & 0^2 \phi_2 & \dots & 0_{ntnc} \phi_{ntnc} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \phi_1^0 & \phi_2^0 & \dots & \phi_{ntnc}^0 \\ 0^1 \phi_1 & 0^2 \phi_2 & \dots & 0_{ntnc} \phi_{ntnc} \end{bmatrix} d\partial\Omega \quad (4.66)$$

e $[G^{CP}]$ contém valores nodais das projeções da Função de Green:

$[G^{CP}]_{j, 2 \times i-1}$ = valores nodais ($j=1, 2 \times ntn$) das componentes da projeção Gc^i devido ao carregamento ϕ_i ($i=1, ntn$) na direção 1.

$[G^{CP}]_{j, 2 \times i}$ = valores nodais ($j=1, 2 \times ntn$) das componentes da projeção Gc^i devido ao carregamento ϕ_i ($i=1, ntn$) na direção 2.

Para finalizar, as Eqs.(4.45) e (4.65) são resolvidas simultaneamente e podem ser reescritas como:

$$[K+K_0][G^{DP}; G^{CP}] = [M; m] \quad (4.67)$$

De posse desses valores nodais, $[G^{DP}]$ e $[G^{CP}]$, seleciona-se os valores dos nós do contorno para formar $[G^{DP}]$ e $[G^{CP}]$.

4.5-EQUAÇÕES FINAIS.

4.5.1-DOMÍNIO.

Foi mostrado no Capítulo 2 que o sistema final de equações para o domínio é:

$$A \{u\} = B \{f\} + C \{b\} \quad (4.68)$$

onde $\{u\}$ é o vetor contendo valores nodais dos deslocamentos nas direções "x" e "y" (desconhecido e/ou desconhecido por partes), $\{b\}$ é o vetor contendo valores nodais das forças de corpo (conhecido) e $\{f\}$ é o vetor das reações nodais no contorno, i.é, os va-

lores nodais de " $(N + N')u$ " (desconhecido e/ou desconhecido por partes).

4.5.2-CONTORNO.

Para o contorno o sistema final de equações é:

$$D \{u\} = E \{f\} + F \{b\} \quad (4.69)$$

onde $\{u\}$ representa agora o vetor dos valores nodais dos deslocamentos para os nós do contorno.

4.6-MATRIZES A, B, ..., F.

As matrizes A e D,

$$A = \int_{\Omega} [\Psi(P)]^t [\Psi(P)] d\Omega_P \quad (4.70)$$

$$D = \int_{\partial\Omega} [\Phi(p)]^t [\Phi(p)] d\partial\Omega_p \quad (4.71)$$

são calculadas diretamente por integração numérica em cada um dos elementos do domínio e/ou do contorno, com posterior superposição via elementos finitos.

Com relação às outras matrizes, mostrou-se no Capítulo 2 que:

$$F^t = B = A [G^{CP}] \quad (4.72)$$

$$C = A [G^{DP}] \quad (4.73)$$

$$e \quad E = [G^{CP}] D \quad (4.74)$$

o que completa o cálculo de todas as matrizes necessárias.

Finalmente, valores no domínio são calculados usando-se a Eq.(4.68) e as Eqs.(4.72) e (4.73), resultando:

$$\{u\} = [G^{CP}]\{f\} + [G^{DP}]\{b\} \quad (4.75)$$

4.7-APLICAÇÕES.

Em todas as aplicações contidas neste capítulo, utilizou-se a seguinte convenção para a enumeração da malha auxiliar de elementos finitos:

MX-Y = malha "Y" para o problema "X".

Problema 1. ANÁLISE DE VIGAS RETAS EM BALANÇO.

Como primeira aplicação do MLGFM para a solução de problemas da elastoestática, os testes de flexão de vigas propostos por Mc Neal, 1985, são tomados como referência. Estes problemas foram propostos com o objetivo de testar a eficiência de elementos finitos bidimensionais com relação à distorsão e razão de aspecto entre os lados do elemento. Estes testes estão ilustrados na Fig.4.

O carregamento "P" é aplicado na extremidade livre da viga, de comprimento L, altura h, espessura t, módulo de Young E e coeficiente de Poisson ν . Admitindo-se o estado plano de tensões e o sistema de referência ilustrado na Fig.5, a solução analítica para as tensões é dada por (Timoshenko & Goodier, 1970):

$$\sigma_x(x,y) = -3Pxy/(2c^3)$$

e

$$\tau_{xy}(x,y) = -3P [1 - (y/c)^2]/4c$$

onde "c" é a distância da linha neutra até a superfície livre da viga (h/2).

O perfil de cisalhamento $\tau_{xy}(0,y)$ é prescrito como condição de carregamento na extremidade carregada da viga e o deslocamento na direção "y" em (0,0) vale:

$$v(0,0) = PL^3[1+3E(h/L)^2/10G]/3EI$$

onde $G=E/(2+2\nu)$ e I o momento de inércia da seção. A primeira parcela dessa expressão é correspondente à flexão da viga e a se-

gunda ao seu cisalhamento.

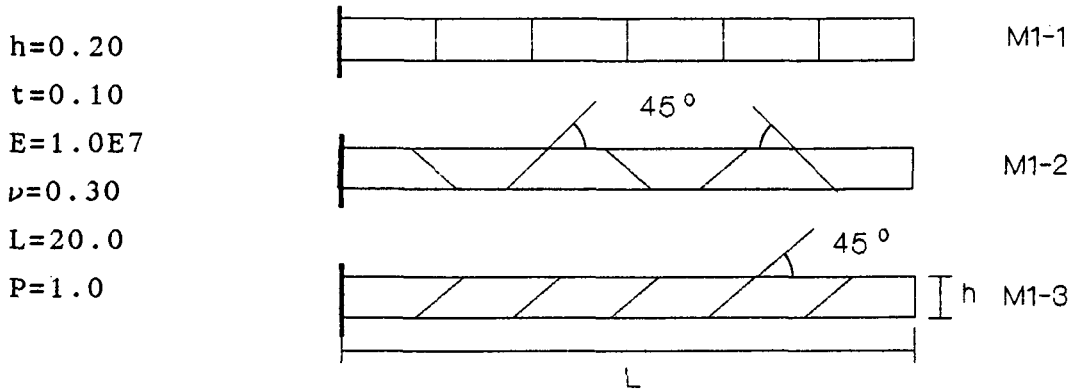


Fig.4-Testes propostos por Mc Neal para elementos finitos.

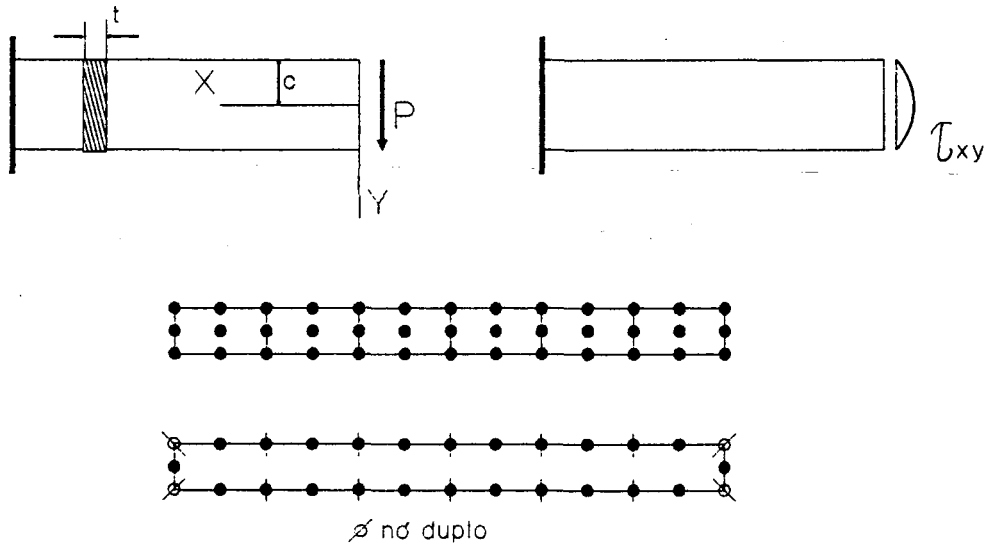


Fig.5-Sistema de Referência, Condições de Contorno e Malha Auxiliar de Elementos Finitos e de Contorno para a malha M1-1.

As Tabs.1 e 2a mostram os resultados obtidos com o MLGFM, utilizando como elemento finito auxiliar o lagrangeano quadrático para discretização do domínio e o elemento de linha quadrático para discretização do contorno. Nós duplos são adicionados em pontos de descontinuidade da normal. Na Tab.2b mostra-se alguns resultados típicos de elementos finitos para deslocamentos adimensionalizados.

Tab.1-Tensões $\sigma_x(L,y)$.

y	M1-1	M1-2	M1-3	Analítica
c	0.180000D+3	0.187215D+3	0.189245D+3	0.1800D+3
0	0.000000D+0	-0.360806D+1	-4.623441D+1	0.0000D+0
-c	-0.180000D+3	-0.172782D+3	-0.170751D+3	-0.1800D+3

Tab.2a-Deslocamentos $v(0,y)$.

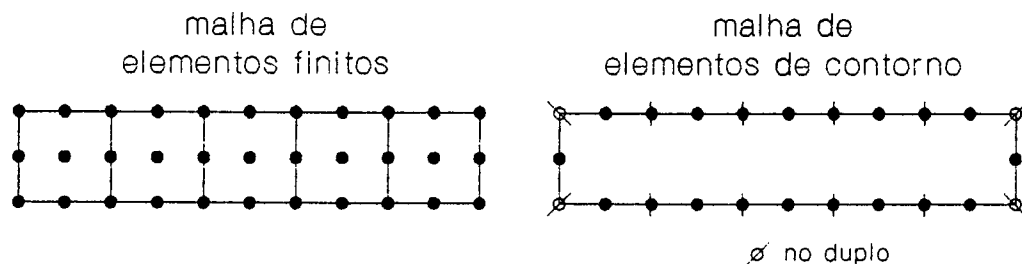
y	M1-1	M1-2	M1-3	Analítica
c	0.2161088D-1	0.2141157D-1	0.2139864D-1	0.216187D-1
0	0.2161068D-1	0.2141133D-1	0.2139844D-1	
-c	0.2161088D-1	0.2141175D-1	0.2139887D-1	

Tab.2b-Deslocamento em (0,0) v_{FEM}/v_{ANAL} .

Malha	QUAD4	Q4S	JET
M1-1	0.904	0.993	0.904
M1-2	0.071	0.986	0.045
M1-3	0.080	0.988	0.438

Ref. Frey,1989.

Como $L/h=20/0.20=100$, o efeito do cisalhamento é pouco pronunciado para as situações ilustradas neste exemplo. O próximo problema selecionado é a flexão de vigas com $L/h=5$, onde o efeito do cisalhamento da seção transversal não pode ser desprezado.



$L=20.0$ $h=4.0$ $\nu=0.20$ $E=80000.0$ $t=0.25$ $P=4.0$

Fig.6-Malha Auxiliar de Elementos Finitos e Malha de Contorno.

Este problema também foi resolvido por Brebbia & Dominguez (1989), com o uso do Método de Elementos de Contorno e com o objetivo de comparar resultados, a malha de elementos contorno é a mesma utilizada por estes autores. Elementos lagrangeanos quadráticos são utilizados para discretização do domínio e

nós duplos são especificados em pontos de descontinuidade da normal, conforme a Fig.6. Os resultados dessas análises estão resumidos nas Tabs.3 e 4.

Tab.3-Deslocamentos $v(0,y)$.

y	Brebbia & Dominguez-BEM	MLGFM	Analítica
c	0.10166D+0	0.10231D+0	
0	0.10169D+0	0.10234D+0	0.102880D+0
-c	0.10166D+0	0.10231D+0	

Tab.4-Tensões $\sigma_x(L,y)$.

y	Brebbia & Dominguez-BEM	MLGFM	Analítica
c	0.2985D+02	0.3000D+02	0.3000D+02
0	0.0000D+00	0.2244D-12	0.0000D+00
-c	-0.2985D+02	-0.3000D+02	-0.3000D+02

Nota-se das Tabs.1 a 4 ótima proximidade entre os resultados obtidos com o MLGFM e as soluções analíticas. Mesmo quando os elementos estão distorcidos, esta característica é mantida. Neste exemplo, a comparação BEM x MLGFM mostrou-se favorável ao MLGFM com relação à precisão dos resultados.

Problema 2. ANÁLISE DE VIGAS CURVAS EM BALANÇO.

Nestas primeiras aplicações se verificou que a sensibilidade com relação à distorsão dos elementos é relativamente pequena. Diante deste fato, os próximos problemas serão a análise de vigas curvas. O interesse é resolvê-los com a formulação da elasticidade bidimensional e serão consideradas duas situações: uma onde a razão R/h (raio médio/altura da viga) é pequena e a outra onde é grande.

A primeira viga curva analisada é a ilustrada na Fig.7 com R/h pequeno e condições de contorno do tipo (Timoshenko & Goodier, 1970):

Para $\theta=0$:

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta} &= 0 \\ \tau_{r\theta} &= -P \left[r + a^2 b^2 / r^3 - (a^2 + b^2) / r \right] / N \\ N &= a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \ln(b/a).\end{aligned}$$

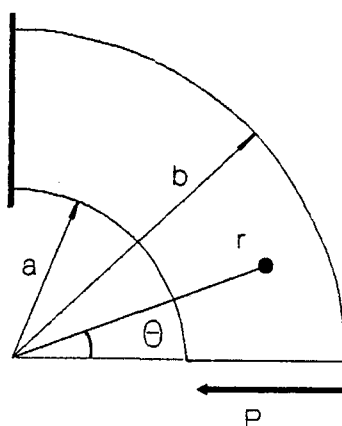
Para $\theta = \pi/2$:

$$\sigma_{\theta} = P [3r - a^2 b^2 / r^3 - (a^2 + b^2) / r] / N$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

O deslocamento radial (solução analítica) no raio médio e extremidade livre é dado por:

$$u = -P\pi (a^2 + b^2) / EN$$



$$a=12.0 \quad b=16.0 \quad P=1.0 \quad E=1.0 \quad \nu=0.20 \quad t=1.0$$

Fig.7-Definição do Problema.

Para a discretização do domínio são utilizadas malhas com 2×5 elementos lagrangeanos cúbicos (M2-1) e quadráticos (M2-2). As malhas de contorno são construídas com elementos cúbicos (M2-1) e quadráticos (M2-2), prevendo nós duplos em pontos de descontinuidade da normal. Resultados de tensões e deslocamento são apresentados nas Tabs.5 e 6.

Tab.5-Tensões Normais no Engaste.

r	Analítica	M2-1	M2-2
16.00	4.5560	4.8084	4.6808
15.33	3.1524	3.1358	
15.00	2.4117		2.3832
14.66	1.6409	1.5308	
14.00	-0.0018	0.0275	-0.0322
13.33	-1.8068	-1.8767	
13.00	-2.7819		-0.2807
12.66	-3.8134	-3.8326	
12.00	-6.0747	-5.7313	-5.9188

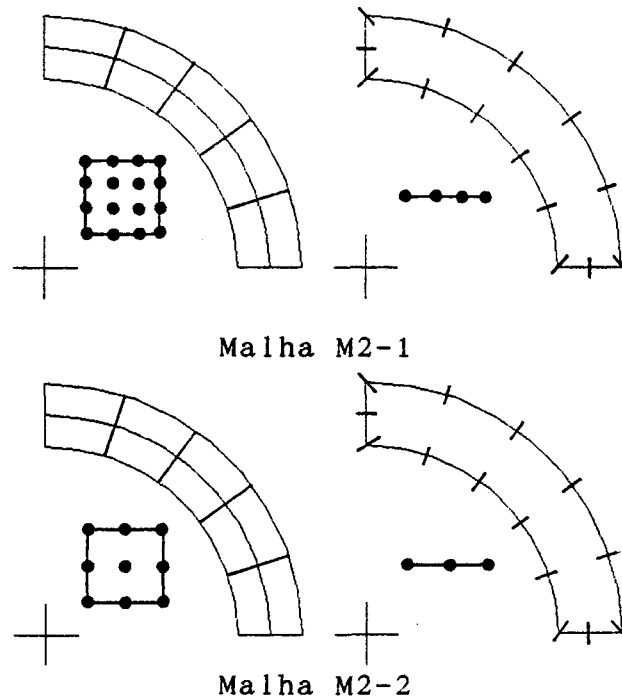


Fig.8-Malha Auxiliar de Elementos Finitos e de Elementos de Contorno.

Tab.6- Deslocamento Radial no Raio Médio da Extremidade Livre.

Analítica	M2-1	M2-2
408.94028	408.14532	391.25173

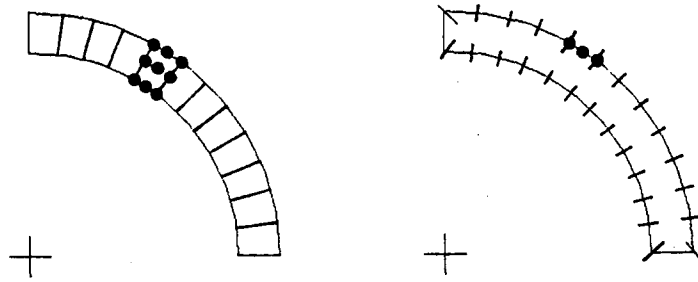
O segunda aplicação é a ilustrada na Fig.9 com R/h grande. A discretização é feita somente com elementos quadráticos (M2-3=12 elementos e M2-4=16 elementos). Resultados de tensões normais no engaste e deslocamento na extremidade livre são mostrados nas Tabs. 7 e 8.

Tab.7-Tensões Normais no Engaste.

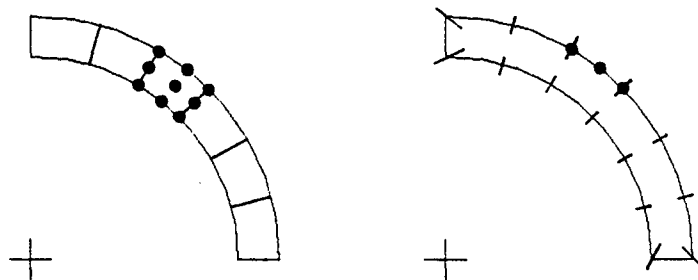
r	Analítica	M2-3	M2-4
4.32	123.3944	111.3402	124.6277
4.22	zero	6.1388	0.5129
4.12	-129.3845	-141.8956	-128.8576

Tab.8- Deslocamento Radial no Raio Médio da Extremidade Livre.

Analítica	M2-3	M2-4
1.7677D-3	1.5594D-3	1.7532D-3



Malha M2-3



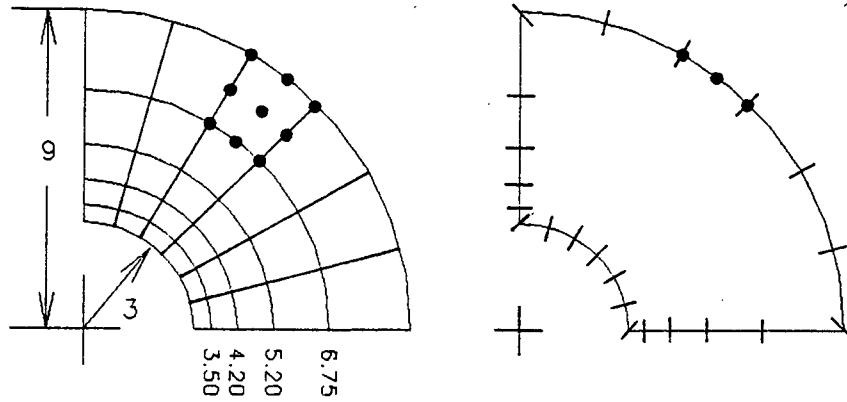
Malha M2-4

$a=4.12$ $b=4.32$ $E=1.0E7$ $\nu=0.25$ $t=0.10$
 Fig.9-Discretização do Domínio e Contorno com
 Elementos Quadráticos.

Mesmo com apenas um elemento ao longo da espessura, as tensões normais no engaste e os deslocamentos no raio médio da extremidade livre estão relativamente bem representados para a malha M2-3. Os resultados para a malha M2-4 mostram a eficiência do refino h .

Problema 3. TUBO DE PAREDE ESPESSA.

Um outro teste proposto por Mc Neal, 1985, é o tubo de parede grossa mostrado na Fig.10. Para modelamento desse problema foram utilizados os elementos quadráticos e nós duplos nos pontos de descontinuidade da normal. A Tab.9 mostra os resultados da tensão normal ao longo do raio ($MLGFM \times$ Analítico) e a Tab.10 os deslocamentos radiais.



$$Ri=3.00 \quad Re=9.00 \quad \nu=0.30 \quad E=1000.0 \quad Pi=1.0$$

Fig.10-Tubo de Parede Espessa com Pressão Interna.
Malha de Elementos Finitos e de Elementos de Contorno.

Tab.9-Tensões Normais ao Longo do Raio.

r	Analítica	MLGFM
9.000	0.25000	0.25230
7.875	0.28826	0.28726
6.750	0.34722	0.34920
5.975	0.40861	0.40743
5.200	0.49944	0.50152
4.700	0.58335	0.58206
4.200	0.69898	0.70134
3.850	0.80808	0.80656
3.500	0.95153	0.95432
3.250	1.08358	1.08096
3.000	1.25000	1.25650

Tab.10-Deslocamentos Radiais.

r	Sol. Analítica	MLGFM
3.0	4.650D-3	4.649650D-3
1.0	2.250D-3	2.249899D-3

Ótimos resultados, tanto para deslocamento como para tensões são verificados.

Problema 4. FURO CIRCULAR EM PLACA RETANGULAR.

Uma outra aplicação é o estudo de uma placa retangular com furo circular submetida à tração uniaxial, conforme a Fig.11. Devido à característica "suave" da solução do problema (não estão presentes cantos reentrantes, mudanças súbitas nas condições de contorno e/ou carregamento), malhas relativamente grosseiras são suficientes para captar perfeitamente a concentração de tensões existente perto do furo circular.

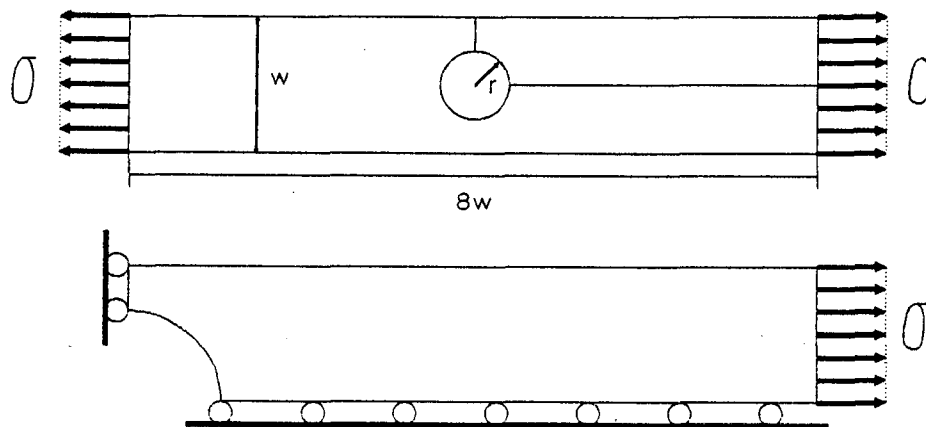
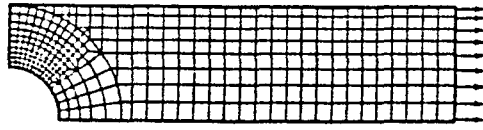


Fig.11-Definição do Problema e Condições de Contorno.

Szabo,1986, usa as malhas ilustradas na Fig.12 para resolver o problema com as versões h e p -adaptativas de elementos finitos, sendo que os elementos utilizados para análise h -adaptativa são lineares. Para analisar o problema com o MLGFM foram utilizadas as duas malhas (em escala) mostradas na Fig.13. O problema foi resolvido inicialmente somente com a malha M4-1 (elementos quadráticos), porém os resultados obtidos para a razão $r/w=0.75$ apresentam um erro relativo "muito grande" e, devido a este fato, a malha M4-2 é projetada com os elementos cúbicos com o objetivo de melhorar a resposta para esta razão de r/w . Resultados comparativos com a solução analítica mostram a superconvergência para tensões obtida com o MLGFM e podem ser vistos na Fig.14.

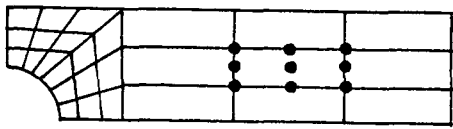


versão h (334 elementos)

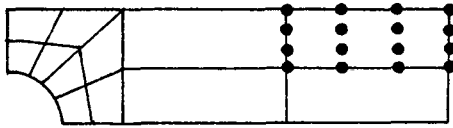


versão p (3 elementos)

Fig.12-Discretizações do Problema para o FEM.



Malha M4-1



Malha M4-2

Fig.13-Discretizações para o MLGFM.

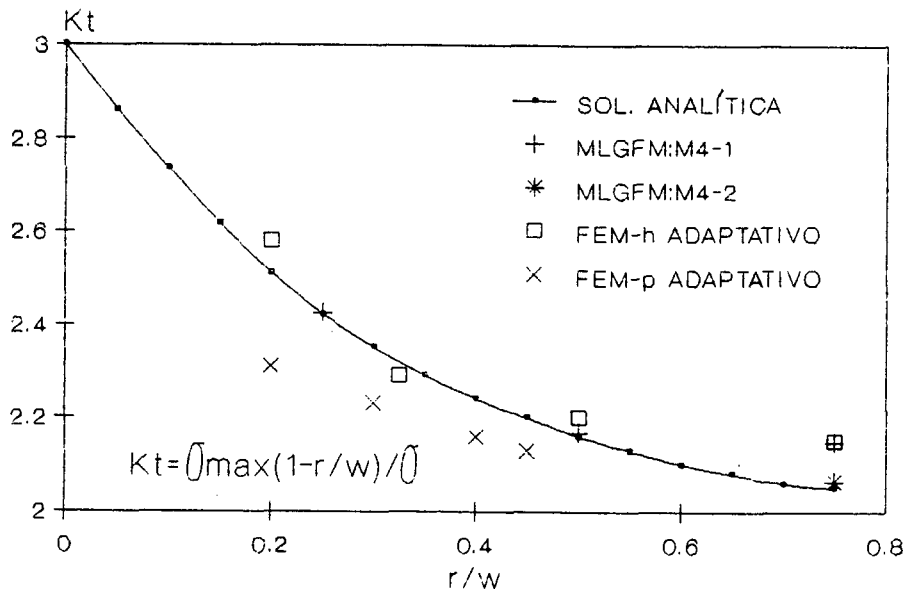


Fig.14-Fator de Concentração de Tensões.

Problema 5. FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÕES PARA TRINCAS.

Nesta aplicação, o objetivo é determinar o fator K_I para a situação ilustrada na Fig.15. Tomando como referência o estado plano de deformação, as componentes do tensor tensão perto da trinca podem ser escritas na forma:

$$\sigma_{ij}(r,\theta) = K_I (2\pi r)^{-1/2} f_{ij}(\theta)$$

onde (r,θ) são as coordenadas polares com o polo na raiz da trinca, K_I o fator de concentração de tensões (modo I) e $f_{ij}(\theta)$ são funções que dependem exclusivamente da coordenada angular θ e suficientemente bem comportadas.

Para calcular o fator K_I utiliza-se a mesma técnica empregada no método de elementos finitos, isto é, calculando o limite:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}(r,\theta) \cdot (2\pi r)^{1/2} / f_{ij}(\theta)$$

e, como visto em problemas potenciais, uma perturbação nesse fator é esperada perto da singularidade devido às oscilações características das soluções obtidas com o BEM para os problemas singulares. Entretanto, com o projeto da malha seguindo as progressões geométricas vistas anteriormente, erro significativo é esperado somente no último elemento perto da trinca.

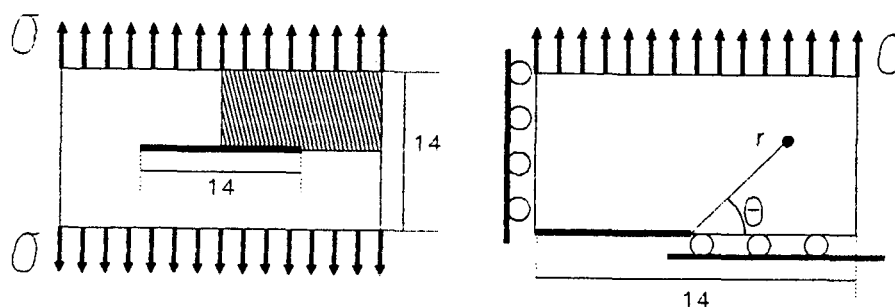


Fig.15-Characterização do Problema e Condições de Contorno.

Procedendo desta maneira, a malha auxiliar de elementos finitos é projetada com elementos quadráticos e escalonados em progressão geométrica (razão igual a 0.20), conforme a Fig.16. Nós duplos são especificados em pontos de descontinuidade da normal e a malha de contorno também é construída com elementos quadráticos.

Tomando como referência $\sigma_{22}(r,\theta)$ e fazendo o limite de r tender a zero para $\theta=0$, a curva obtida para K_I é a mostrada na Fig.17b. Como previsto, a oscilação da tensão $\sigma_{22}(r,\theta)$ ao redor do ponto singular é verificada e as maiores amplitudes de oscilação aparecem justamente nos últimos elementos perto da trinca. Mesmo assim, o valor de K_I (extrapolando) está bem próximo do valor exato.

Apesar desta ótima concordância com a solução analítica, na Fig.17b ainda é possível identificar que os resultados para os nós situados no meio do elemento estão mais próximos da curva analítica e que somente no último elemento perto da singularidade é que a oscilação é bem visível.

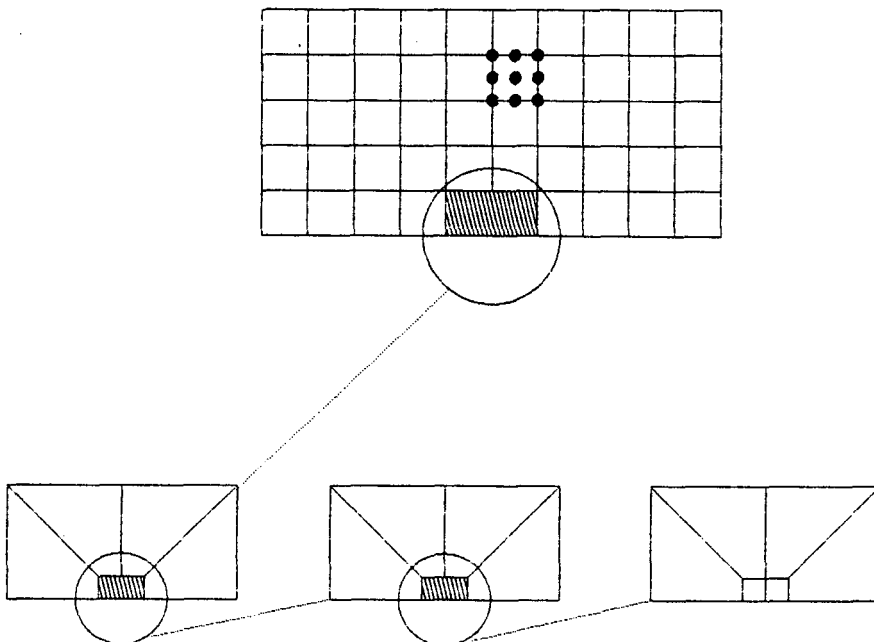


Fig.16-Malha auxiliar de Elementos Finitos e de Elementos de Contorno.

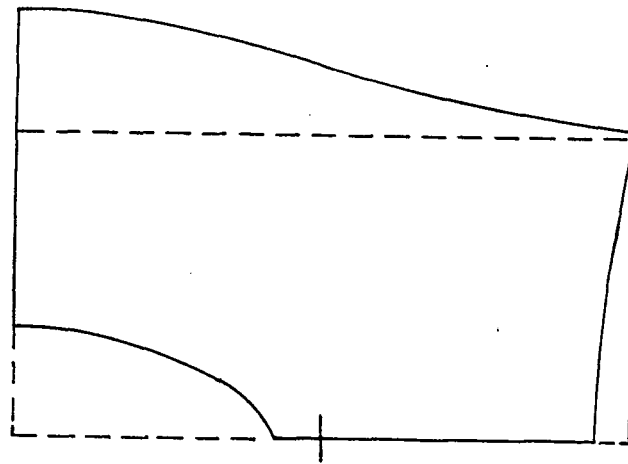


Fig.17a-Geometria Deformada.

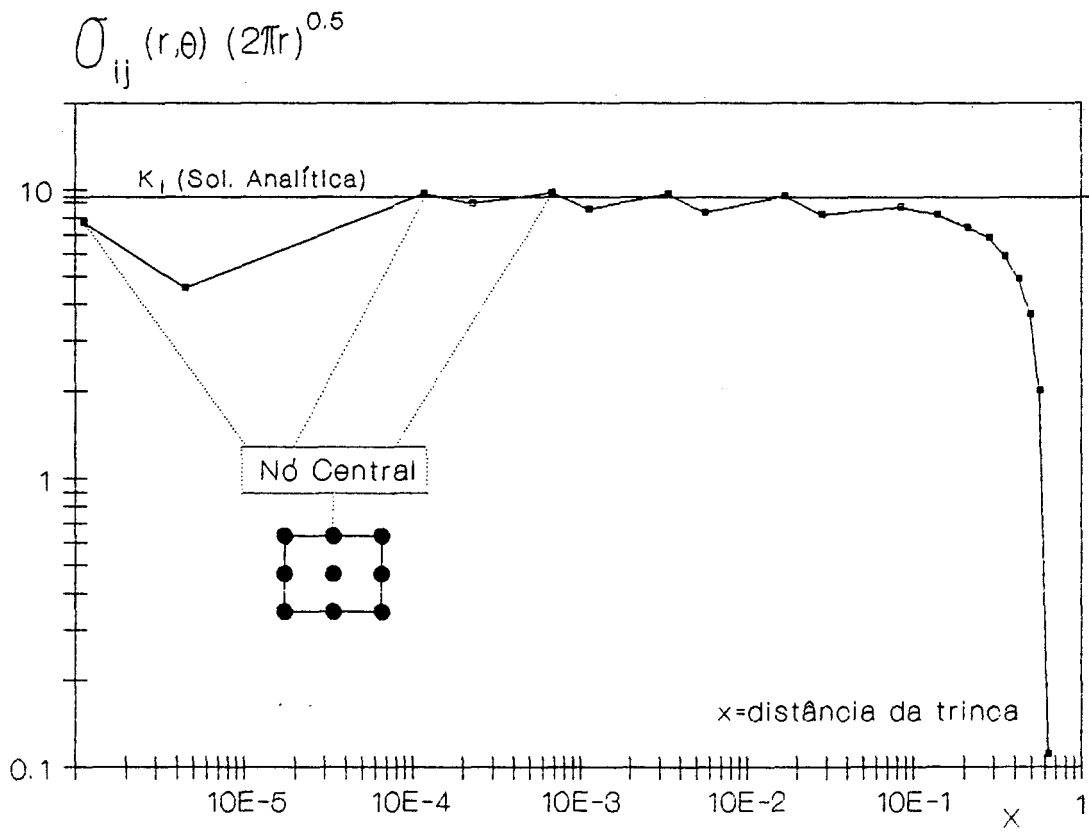


Fig.17b-Fator Intensidade K_I.

Problema 6. PLACA CIRCULAR.

Outra classe de problemas que podem ser analisados com elementos bidimensionais são os "axissimétricos". Assim como para a análise dos problemas de potencial, a formulação dos problemas axissimétricos com o MLGFM é caracterizada pela simplicidade e facilidade de implementação.

Novamente, as únicas alterações necessárias são: a troca do elemento finito bidimensional (estado plano de tensão ou deformação) pelo elemento axissimétrico e a malha de elementos de contorno que não deve conter elementos no eixo de axissimetria quando este eixo faz parte do contorno da seção axissimétrica.

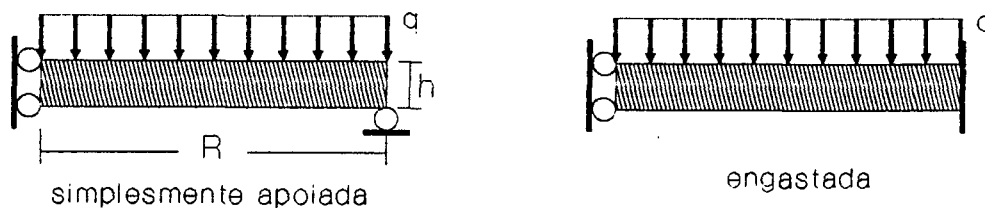
Assim, o elemento finito passa a ser (adotando o eixo "y" como eixo de simetria):

$$[K] = 2\pi \int_x \int_y B^t D B x dx dy$$

onde a matriz D é a específica para problemas axissimétricos e B vale

$$B = \begin{bmatrix} \phi_{j,x} & 0 \\ 0 & \phi_{j,y} \\ \phi_{j,y} & \phi_{j,x} \\ \phi_{j/x} & 0 \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, \dots, ntn$$

Como aplicação de problemas axissimétricos, considere-se a placa circular com carregamento uniformemente distribuído, como indicado na Fig.18.



$$E=10920.0 \quad h=0.10 \quad R=5.0 \quad q=1.0$$

Fig.18-Placa Circular com Condições de Contorno.

A placa é discretizada com quatro malhas: M6-1 e M6-2 com 10 e 5 elementos cúbicos, respectivamente; M6-3 e M6-4 com 10 e 5 elementos quadráticos, conforme a Fig.19. Nós duplos são inseridos na malha de contorno em pontos de descontinuidade da normal.

A solução analítica para o deslocamento central, (Teoria de Primeira Ordem), para a placa engastada é:

$$w(0) = \frac{qR^4}{64D} \left[1 + \frac{8}{3k(1-\nu)} (t/R)^2 \right]$$

onde "t" é a espessura da placa, k é o fator de correção da energia devido ao cisalhamento e $D = Et^3/12(1-\nu^2)$. Para a placa simplesmente apoiada tem-se:

$$w(0) = \frac{qR^4}{64D} \left[\frac{5+\nu}{1+\nu} + \frac{8}{3k(1-\nu)} (t/R)^2 \right]$$

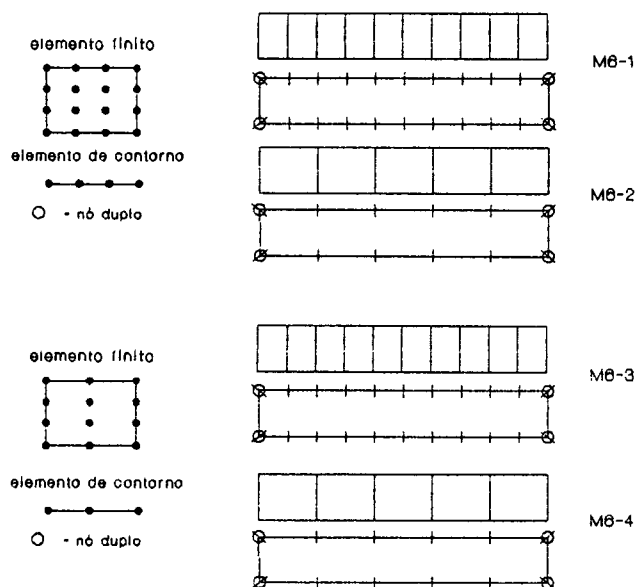


Fig.19-Discretizações do Domínio e Contorno.

Os resultados de deslocamento estão mostrados nas Tabs.11 e 12 e ótima concordância com a solução analítica é observada.

Tab.11-Deslocamento Central para Placa Engastada.

Sol.Analitica	M6-1	M6-2	M6-3	M6-4
9.78348	9.78300	9.78227	9.74576	9.58516

Tab.12-Deslocamento Central para Placa Simplesmente Apoiada.

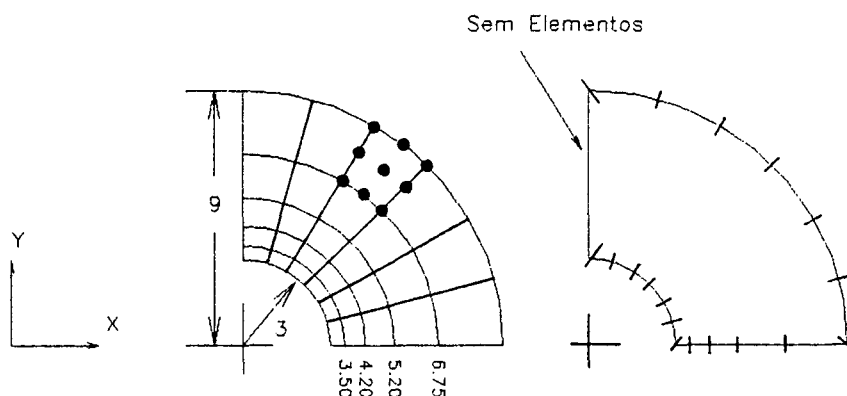
Sol.Analitica	M6-1	M6-2	M6-3	M6-4
39.83156	39.82657	39.81392	39.82589	39.78714

Tab.13-Tensões Radiais no Engaste.

y	M6-1	M6-2	M6-3	M6-4
0.0500	-.19834D+4	-.20917D+4	-.18745D+4	-.18749D+4
0.0166	-.58091D+3	-.53681D+3		
0.			.21428D+0	.21428D+0
-0.0166	.58035D+3	.53626D+3		
-0.0500	.19834D+3	.20916D+3	.18749D+4	.18745D+4

Problema 7.CASCAS ESFÉRICAS E SÓLIDOS COM PRESSÃO INTERNA.

Neste problema serão consideradas duas situações: cascas semi-espessas e sólido com pressão interna. Primeiramente analisa-se a esfera sólida, ilustrada na Fig.20, com raio interno $a=3.0$, raio externo $b=9.0$ e submetida a uma pressão interna $p=1$.



$$E=1000.0 \quad \nu=0.30$$

Fig.20-Discretização da Casca e Contorno.

A seção axissimétrica da casca é modelada com uso de elementos lagrangeanos quadráticos e seu contorno (não incluindo o eixo y) também é discretizado com elementos quadráticos, prevendo nós duplos em pontos de descontinuidade da normal.

Resultados de tensões, assim como deslocamentos, apresentam boa concordância com os valores analíticos, Roark & Young, 1976. A oscilação das tensões normais ao redor da solução analítica, vista na Tab.15, é uma das características do elemento quadrático e também foi verificada para os problemas de potencial.

Tab.14-Deslocamentos Radiais.

r	Sol.Anal.	MLGFM
3.0	2.0711D-3	2.0701D-3
9.0	3.6346D-4	3.6331D-4

Tab.15-Tensões Normais ao Longo do Raio.

r	Sol.Anal.	MLGFM
9.000	.5769D-1	.6121D-1
7.875	.6716D-1	.6528D-1
6.750	.8404D-1	.8899D-1
5.975	.1041D+0	.1009D+0
5.200	.1381D+0	.1458D+0
4.700	.1734D+0	.1688D+0
4.200	.2276D+0	.2211D+0
3.850	.2841D+0	.2779D+0
3.500	.3654D+0	.3786D+0
3.250	.4468D+0	.4389D+0
3.000	.5576D+0	.5747D+0

Dos resultados acima conclui-se que sólidos axissimétricos são modelados com boa precisão pelo MLGFM, mesmo considerando os elementos de baixa ordem utilizados.

A próxima aplicação é a análise de cascas semi-espessas com o MLGFM. Seja, por exemplo, a casca ilustrada na Fig.21, com raio interno $a=10$, raio externo $b=11$ e submetida a uma pressão interna $p=1$.

O domínio e o contorno são discretizados com elementos cúbicos e prevendo nós duplos nos pontos de descontinuidade da normal.

Resultados de tensões, assim como deslocamentos, apresentam boa concordância com os valores analíticos, Roark & Young, 1976. Melhores resultados poderiam ser conseguidos com o aumento do grau do elemento e/ou com o refino da malha, pois ao longo da espessura usou-se apenas um elemento. A oscilação de tensões ao redor da solução analítica, Tab.17, também já era esperada, como nos problemas de potencial (por exemplo, o Problema 3, pg.58).

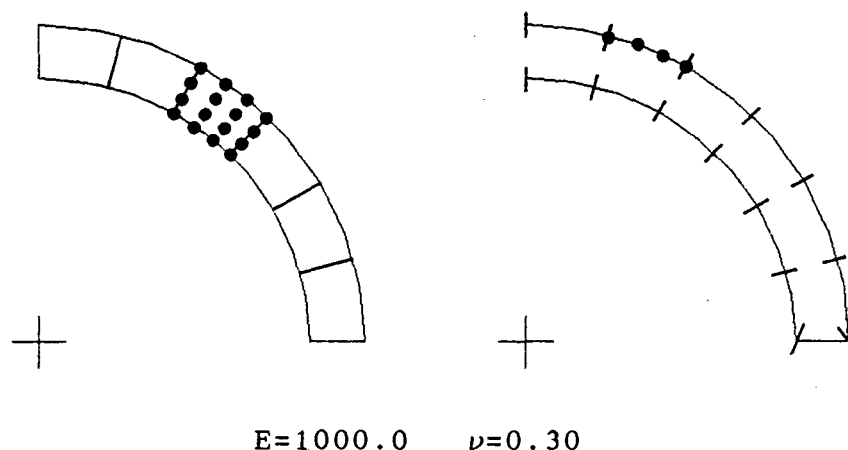


Fig.21-Discretização do Domínio e Contorno.

Tab.16-Deslocamentos Radiais.

r	Sol. Anal.	MLGFM
10.0	3.822D-2	3.8352D-2
11.0	3.489D-2	3.5024D-2

Tab.17-Tensões Normais ao Longo do Raio.

r	Sol. Anal.	MLGFM
10.000	.5031D+1	.5086D+1
10.333	.4843D+1	.4824D+1
10.666	.4677D+1	.4756D+1
11.000	.4531D+1	.4293D+1

4.8-CONCLUSÕES.

Com os resultados destas aplicações conclui-se que a aplicação do MLGFM para problemas da Elasticidade Bidimensional é perfeitamente viável e caracterizada pelos seguintes fatores:

1-A superconvergência nodal de deslocamento/esforços também é marcante para este tipo de aplicação,

2-A análise de problemas axissimétricos é extremamente simples quando comparada com os elementos axissimétricos do BEM,

3-A concentração de tensões para soluções "suaves" é captada com exatidão, mesmo com malhas grosseiras,

4-Com o projeto adequado da malha de elementos finitos, o fator de intensidade de tensões para fratura elástica pode ser determinado com boa precisão,

5-Resultados de deslocamento e esforços ficam comprometidos para elementos com razão entre lados muito grande e severamente distorcidos, e

6-De maneira geral, um aumento na ordem do elemento também acarreta uma sensível redução do erro.

4.9-REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- Brebbia, C.A. & Dominguez, J. (1989)
Boundary Elements An Introductory Course. Computational Mechanics Publications, Southampton-Boston. Copublicado com Mc Graw-Hill Book Company.
- Brebbia, C.A.; Telles, J.C.F. & Wrobel, L.C. (1984).
Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering. Springer-Verlag.
- Frey, F. (1989)
Shell Finite Elements with Six Degrees of Freedom per Node. In Analytical and Computational Models of Shells. CED-Vol.3, ASME, pg.291-316.
- Malvern, L.E. (1969).
Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

- MacNeal, R. & Harder, R.L. (1985).
A Proposed Standard Set of Problems to Test Finite Element Accuracy. Fin. Elem. Anal. Design, Vol.1, pg.3-20.
- Roark, R.J. & Young, W.C. (1976).
Formulas for Stress and Strain. Fifth Edition. International Student Edition. Mc Graw-Hill Book Company.
- Szabo, B.A. (1986).
Mesh Design for the p-Version of the Finite Element Method. Comp. Meth. in Applied Mech. and Engng., 55, pg.181-197.
- Timoshenko, S.P. & Goodier, J.N. (1970)
Theory of Elasticity. 3rd ed., Mc Graw-Hill, Tokyo.

CAPÍTULO 5

DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÃO DO MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO (MLGFM) PARA PLACA DE MINDLIN.

5.1-INTRODUÇÃO

O estudo da flexão de placas com uso do Método de Elementos de Contorno (BEM) pode ser considerado bastante recente. Formulações integrais (BEM) para placas finas surgiram na literatura no final da década de 60, Jaswon & Maiti, 1968; porém, foi durante a década de 70 que este problema foi devidamente resolvido com o BEM. Entretanto, a solução de placas moderadamente espessas só foi possível com o aparecimento das soluções fundamentais apresentadas por Van der Weeën (1982, placa de Reissner) e Silva (1988, placa de Mindlin). Desde então, ótimos resultados tanto para deslocamentos como para tensões são apresentados na literatura.

Apesar dos excelentes resultados para placas isotrópicas, o grande inconveniente do BEM para placas ainda persiste: uma solução fundamental nem sempre é conhecida. Basta uma variação das propriedades físicas do meio (espessura, por exemplo) para inviabilizar a sua aplicação direta, requerendo métodos iterativos. Mostra-se a seguir, que este fato é contornado com muita eficiência pelo Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) e que a superconvergência nodal, tanto para deslocamentos

como para tensões, também é uma característica dessa nova técnica.

Em se tratando do Método de Elementos Finitos (FEM), a procura de elementos com alta performance para placa/casca tem sido o objetivo de muitos pesquisadores nos últimos 25 anos. Elementos com alta performance são caracterizados por Felippa & Militello, 1989, como sendo elementos simples, com poucos graus de liberdade físicos e preferencialmente nos vértices dos elementos, convergentes, insensíveis com relação ao sistema de coordenadas adotado (frame-invariant), sem travamento (locking), sem modos espúrios, nem muito rígido e nem muito flexíveis, tensões precisas tanto quanto deslocamentos, pequena sensibilidade à distorsão, de fácil conexão com outros elementos, econômico, extensão fácil para análise não linear e dinâmica e com estimadores de erro para as análises adaptativas.

Entretanto, o travamento (locking), os modos espúrios e/ou a sensibilidade à distorsão da malha são problemas quase sempre presentes nos mais diversos tipos de elementos propostos na literatura. Mesmo nos elementos mais modernos, com as formulações ANS (Assumed Natural Strain) e MITC (Mixed-Interpolated Tensorial Componentes), a sensibilidade à distorsão é notada e o sucesso com elementos de baixa ordem não parece tão promissor para elementos de ordem superior, Donea & Belytschko (1987), dificultando os processos adaptativos.

Embora os elementos utilizados para a aproximação das projeções da Função de Green sejam elementos lagrangeanos baseados em deslocamento, o fenômeno do travamento (locking) não foi verificado com o uso do MLGFM. Outro resultado, já mencionado acima, é a superconvergência dos valores nodais de tensões e deslocamentos. A pouca sensibilidade dos deslocamentos para a distorsão da malha também é marcante, mesmo para elementos de baixa ordem. Resultados de momentos e força cisalhante menos sensíveis à distorsão da malha são obtidos com uso de elementos com ordem superior, aumentando ainda mais as expectativas com relação aos processos η -adaptativos para as aproximações das projeções da Função de Green.

5.2-MODELO DA PLACA DE MINDLIN.

Seja a placa moderadamente espessa, isotrópica, homogênea, com espessura " h " (constante ou não), caracterizada pela sua superfície média, conforme a Fig.1., e submetida a carregamentos de flexão. Sua superfície média pode ser entendida como sendo um domínio aberto, Ω , com contorno suficientemente regular, $\partial\Omega$.

Teorias de primeira ordem para flexão de placas adotam as seguintes hipóteses: deslocamentos e rotações pequenos, a normal à superfície média permanece reta, porém não necessariamente ortogonal à mesma após a deformação e que ao longo da espessura as tensões normais são desprezáveis.

Com estas hipóteses, o campo de deslocamento generalizado, $q=\{u,v,w\}^t$, pode ser escrito da seguinte maneira:

$$u(x,y) = -z \theta_x(x,y) \quad (5.1)$$

$$v(x,y) = -z \theta_y(x,y) \quad (5.2)$$

$$w(x,y) = w(x,y) \quad (5.3)$$

onde (u,v,w) são os deslocamentos de um ponto genérico da placa nas direções x,y e z , respectivamente; e (θ_x,θ_y) são as rotações indicadas na Fig.1. Assim, os deslocamentos (u,v,w) podem ser plenamente caracterizados pelo deslocamento transversal $w(x,y)$ e pelas duas rotações, θ_x e θ_y .

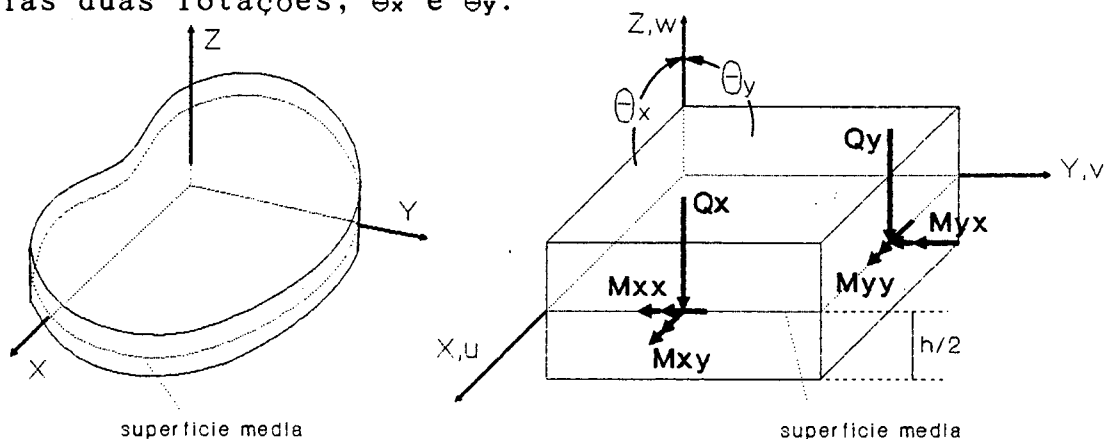


Fig.1-Superfície Média, Deslocamentos e Rotações Positivos para Placa.

O vetor dos momentos generalizados, $M = \{M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}\}^t$, e o vetor das forças cisalhantes generalizadas, $Q = \{Q_x, Q_y\}^t$, estão relacionados com o tensor tensão por:

$$M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}(x,y) z \, dz \quad i, j=1,2 \quad (5.4)$$

e

$$Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{i3}(x,y) \, dz \quad i=1,2 \quad (5.5)$$

Admitindo a variação linear das tensões ao longo da espessura, é possível explicitá-las em função dos momentos e forças cisalhantes:

$$\sigma_{ij}(x,y) = 12 M_{ij}(x,y) z/h^3 \quad i, j=1,2 \quad (5.6)$$

e

$$\sigma_{i3} = 3[1 - (2z/h)^2] Q_i / 2h \quad i=1,2 \quad (5.7)$$

Definindo $u(x)$ como:

$$u(x) = \{w(x,y), \theta_x(x,y), \theta_y(x,y)\}^t, \quad (5.8)$$

e usando as relações momentos \times tensões (Eq.5.6), cisalhamento \times tensões (Eq.5.7) e deslocamentos \times deformações da Teoria da Elasticidade, define-se os tensores $\epsilon_F(u)$ e $\epsilon_S(u)$,

$$\epsilon_F(u) = \begin{bmatrix} 0 & \cdot, x & 0 \\ 0 & 0 & \cdot, y \\ 0 & \cdot, y & \cdot, x \end{bmatrix} u = \mathcal{A}_F u \quad (5.9)$$

e

$$\epsilon_S(u) = \begin{bmatrix} \cdot, x & -1 & 0 \\ \cdot, y & 0 & -1 \end{bmatrix} u = \mathcal{A}_S u \quad (5.10)$$

que estão relacionados com os vetores de momentos e forças cisalhantes generalizadas por:

$$M = D_F \epsilon_F(u) \quad e \quad Q = D_S \epsilon_S(u) \quad (5.11)$$

onde

$$D_F = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D_S = \frac{Eh}{2\alpha(1+\nu)} I \quad (5.12)$$

sendo que E , ν , α e I denotam, módulo de Young, coeficiente de Poisson, fator de Mindlin para correção do cisalhamento e matriz identidade, respectivamente. Com estas definições a energia potencial total, $\Pi(\mathbf{u})$, para placas com carregamentos distribuídos na sua superfície, $q(x,y)$, pode ser escrita na forma:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \{0.5[\epsilon_F(\mathbf{u})^t D_F \epsilon_F(\mathbf{u}) + \epsilon_S(\mathbf{u})^t D_S \epsilon_S(\mathbf{u})] - q(x,y) w(x,y)\} d\Omega \quad (5.13)$$

A primeira parcela do funcional $\Pi(\mathbf{u})$ representa a energia de deformação produzida pela flexão da placa quando submetida ao carregamento da força externa $q(x,y)$. A segunda parcela é análoga à primeira e representa a parcela da energia de deformação devido aos esforços cisalhantes e a terceira parcela representa o trabalho realizado pela força externa $q(x,y)$.

O interesse é obter o vetor "deslocamento" $\mathbf{u}(x)$ que minimiza o funcional $\Pi(\mathbf{u})$ e os subsequentes valores de tensões.

5.3-FORMALISMO DO MLGFM PARA PLACA DE MINDLIN.

O funcional $\Pi(\mathbf{u})$ pode ser convenientemente reescrito na forma:

$$J(\mathbf{u}) = 0.5 B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - F(\mathbf{u}) \quad (5.14)$$

onde $B(\cdot, \cdot)$ é a forma bilinear

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} [\epsilon_F(\mathbf{v})^t D_F \epsilon_F(\mathbf{u}) + \epsilon_S(\mathbf{v})^t D_S \epsilon_S(\mathbf{u})] d\Omega \quad (5.15)$$

e $F(\cdot)$ é o funcional

$$F(u) = \int_{\Omega} q(x,y) w(x,y) d\Omega \quad (5.16)$$

Da minimização de $\Pi(u)$ com relação a $u(x)$ resultam as equações de equilíbrio para a placa em termos de deslocamentos:

$$\mathcal{A} u = b \quad (5.17)$$

onde $b = \{q(x,y), 0, 0\}^t$ e \mathcal{A} é o operador diferencial:

$$\mathcal{A} = \left[\begin{array}{c|c} -C(\cdot, \cdot)_{,xx} + \cdot, \cdot)_{,yy} & C \cdot, \cdot)_{,x} \\ -C \cdot, \cdot)_{,x} & -D(\cdot, \cdot)_{,xx} + a \cdot, \cdot)_{,yy} + C \\ -C \cdot, \cdot)_{,y} & -Db \cdot, \cdot)_{,xy} \end{array} \middle| \begin{array}{c} C \cdot, \cdot)_{,y} \\ -Db \cdot, \cdot)_{,yx} \\ -D(\cdot, \cdot)_{,yy} + a \cdot, \cdot)_{,xx} + C \end{array} \right] \quad (5.18)$$

sendo $D = E h^3 / 12(1 - \nu^2)$, $C = E h / 2\alpha(1 + \nu)$, $a = (1 - \nu) / 2$, $b = (1 + \nu) / 2$ e " \cdot ," indica derivada parcial.

As possíveis condições de contorno também são resultantes dessa minimização e são:

$$u(x) = \bar{u} \quad \text{ou} \quad T = \bar{T} \quad (5.19)$$

onde o símbolo " $\bar{\cdot}$ " indica valor prescrito e T vale:

$$T = \{Q_n, M_{xxn}, M_{yy n}\}^t, \quad (5.20)$$

sendo

$$M_{xxn} = M_{xx} n_x + M_{xy} n_y \quad (5.21.1)$$

$$M_{yy n} = M_{xy} n_x + M_{yy} n_y \quad (5.21.2)$$

$$Q_n = Q_x n_x + Q_y n_y \quad (5.21.3)$$

onde (n_x, n_y) representam os cossenos diretores do vetor normal ao contorno com relação aos eixos x e y , respectivamente. Portanto, o operador de Neumann, \mathcal{N} , tal que

$$\mathcal{N} u = T \quad (5.22)$$

também já está identificado e vale:

$$\mathcal{N} = \left[\begin{array}{c|c|c} -C(n_x+n_y) & C n_x & C n_y \\ 0 & D(n_x \cdot, x + a n_y \cdot, y) & D(\nu n_x \cdot, y + a n_y \cdot, x) \\ 0 & D(a n_x \cdot, y + \nu n_y \cdot, y) & D(n_y \cdot, x + a n_x \cdot, x) \end{array} \right] \quad (5.23)$$

É interessante salientar que a forma bilinear $B(\cdot, \cdot)$, como definida acima, atende as condições do Teorema Generalizado de Lax-Milgram.

Como \mathcal{A} é um operador auto-adjunto, os operadores \mathcal{A}^* e \mathcal{N}^* também estão automaticamente identificados. Esta demonstração pode ser obtida impondo a condição de valor estacionário da primeira variação de $B(u, v)$ com respeito a $u(x)$.

De posse desses operadores diferenciais, as projeções da Função de Green podem ser calculadas via elementos finitos, resolvendo os problemas 1* e 2*; Eqs.(2.106)-(2.107) e (2.108)-(2.109), respectivamente.

Com o objetivo de facilitar a visualização de futuros desenvolvimentos, admite-se que a discretização do domínio (malha de elementos finitos) seja efetuada com uso do elemento bilinear de quatro nós e que a discretização do contorno (malha de elementos de contorno) seja realizada com o elemento de linha linear. Assim sendo, a aproximação do vetor $u(x)$ em cada elemento do domínio pode ser feita da seguinte maneira:

$$u = \left[\begin{array}{c|c|c} \psi_1 & 0 & 0 \\ 0^1 & \psi_1 & 0 \\ 0 & 0^1 & \psi_1 \end{array} \right] \dots \left[\begin{array}{c|c|c} \psi_4 & 0 & 0 \\ 0^4 & \psi_4 & 0 \\ 0 & 0^4 & \psi_4 \end{array} \right] \{w_1, \theta_{x_1}, \theta_{y_1}, \dots, w_4, \theta_{x_4}, \theta_{y_4}\}^t \quad (5.24)$$

onde ψ_i representa a i -ésima função de interpolação de domínio local e $(w_i, \theta_{x_i}, \theta_{y_i})$ representam os valores de (w, θ_x, θ_y) no nó local "i". Matricialmente, esta aproximação pode ser reescrita na forma:

$$u = [\Psi] q \quad (5.25)$$

onde

$$[\Psi] = \left[\begin{array}{c|c|c} \psi_1 & 0 & 0 \\ 0^1 & \psi_1 & 0 \\ 0 & 0^1 & \psi_1 \end{array} \right] \dots \left[\begin{array}{c|c|c} \psi_4 & 0 & 0 \\ 0^4 & \psi_4 & 0 \\ 0 & 0^4 & \psi_4 \end{array} \right]$$

$$e \quad q = \{w_1, \theta_{x_1}, \theta_{y_1}, \dots, w_4, \theta_{x_4}, \theta_{y_4}\}^t.$$

Procedendo de maneira análoga, no contorno a aproximação para o vetor deslocamento $u(x)$ é feita segundo as funções de interpolação locais, i.é:

$$u = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \vdots & \phi_2 & 0 & 0 \\ 0^1 & \phi_1 & 0 & \vdots & 0^2 & \phi_2 & 0 \\ 0 & 0^1 & \phi_1 & \vdots & 0 & 0^2 & \phi_2 \end{bmatrix} \{w_1, \theta_{x_1}, \theta_{y_1}, w_2, \theta_{x_2}, \theta_{y_2}\}^t \quad (5.26)$$

onde ϕ_i representa a i -ésima função de interpolação de contorno local e $(w_i, \theta_{x_i}, \theta_{y_i})$ representam os valores de (w, θ_x, θ_y) no nó local "i" do contorno. Matricialmente esta aproximação pode ser reescrita na forma:

$$u = [\Phi] q \quad (5.26)$$

onde

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \vdots & \phi_2 & 0 & 0 \\ 0^1 & \phi_1 & 0 & \vdots & 0^2 & \phi_2 & 0 \\ 0 & 0^1 & \phi_1 & \vdots & 0 & 0^2 & \phi_2 \end{bmatrix}$$

$$e \quad q = \{w_1, \theta_{x_1}, \theta_{y_1}, w_2, \theta_{x_2}, \theta_{y_2}\}^t.$$

Globalmente, i.é, usando as funções de interpolação globais tem-se:

$$u = \begin{bmatrix} \psi & 0 & 0 & \vdots & \psi_{ntn} & 0 & 0 \\ 0^1 & \psi & 0 & \vdots & 0^{ntn} & \psi_{ntn} & 0 \\ 0 & 0^1 & \psi & \vdots & 0 & 0^{ntn} & \psi_{ntn} \end{bmatrix} \{w_1, \theta_{x_1}, \theta_{y_1}, \dots, w_{ntn}, \theta_{x_{ntn}}, \theta_{y_{ntn}}\}^t \quad (5.27)$$

onde ψ_i denota agora a i -ésima função de interpolação global, $(w_i, \theta_{x_i}, \theta_{y_i})$ representam os valores de (w, θ_x, θ_y) no nó global "i" e "ntn" o número total de nós da malha de elementos finitos.

Analogamente, para o contorno tem-se:

$$u = \begin{bmatrix} \phi & 0 & 0 \\ 0 & \phi & 0 \\ 0 & 0 & \phi \end{bmatrix}_1 \cdot \begin{bmatrix} \phi & 0 & 0 \\ 0 & \phi & 0 \\ 0 & 0 & \phi \end{bmatrix}_{ntnc} \{w_1, \theta_{x_1}, \theta_{y_1}, \dots, w_{ntnc}, \theta_{x_{ntnc}}, \theta_{y_{ntnc}}\}^t \quad (5.28)$$

onde ϕ_i representa a i -ésima função de interpolação global de contorno, $(w_i, \theta_{x_i}, \theta_{y_i})$ representam os valores de (w, θ_x, θ_y) no nó global "i" do contorno e "ntnc" o número total de nós da malha de elementos de contorno.

No final desta etapa o espaço $\mathcal{V}(h, \eta)$ de elementos finitos, caracterizado pelas grandezas h e η que definem o maior diâmetro externo dentre todos os elementos da malha e o grau η do polinômio aproximador, respectivamente; está completamente definido. A próxima etapa é determinar as projeções da Função de Green.

5.4-APROXIMAÇÃO DAS PROJEÇÕES DA FUNÇÃO DE GREEN.

Por conveniência, repete-se todo o procedimento desenvolvido no Capítulo 2 a partir dos problemas 1 e 2, Eqs.(2.90)-(2.91) e (2.92)-(2.93), respectivamente, para obter as projeções $G_d(P)$, $G_d(p)$, $G_c(P)$ e $G_c(p)$.

5.4.1-APROXIMAÇÃO DE $G_d(P)/G_d(p)$.

Do problema 1, Eqs.(2.90) e (2.91), tem-se:

$$\mathcal{A}^* G(P, Q) = \delta(P, Q) I \quad \forall P, Q \in \Omega \quad (5.29)$$

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') G(p, Q) = 0 \quad \forall Q \in \Omega, p \in \partial\Omega \quad (5.30)$$

Pós-multiplicando a Eq.(5.29) por $[\Psi(Q)]$ e integrando no domínio Ω , mantendo o ponto "P" fixo, resulta:

$$\mathcal{A}^* G_d(P) = [\Psi(P)] \quad \forall P \in \Omega \quad (5.31)$$

e, com mesmo procedimento a partir das Eqs.(5.30), mantendo o ponto "p" do contorno fixo, obtem-se:

$$(N^*+N')Gd(p) = 0 \quad \forall p \in \partial\Omega \quad (5.32)$$

Note que $Gd(P)$ é da forma:

$$Gd(P) = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi & 0 & 0 \\ 0^1 & \psi & 0 \\ 0 & 0^1 & \psi_1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \psi & 0 & 0 \\ 0^{ntn} & \psi & 0 \\ 0 & 0^{ntn} & \psi_{ntn} \end{bmatrix} d\Omega_Q \quad (5.33)$$

onde G_{ij} depende dos pontos "P,Q" e ψ_i depende do ponto "Q". Esta expressão pode ser reescrita como:

$$Gd(P) = [Gd^1(P) \parallel Gd^2(P) \parallel Gd^3(P) \parallel \dots \parallel Gd^{ntn}(P)] \quad (5.34)$$

sendo as componentes $Gd^i(P)$ da forma:

$$Gd^i(P) = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} G_{11}\psi_i & G_{12}\psi_i & G_{13}\psi_i \\ G_{21}\psi_i & G_{22}\psi_i & G_{23}\psi_i \\ G_{31}\psi_i & G_{32}\psi_i & G_{33}\psi_i \end{bmatrix} d\Omega_Q \quad (5.35)$$

e $Gd^i(P)$ representa a i -ésima componente da projeção da Função de Green no espaço de elementos finitos $\mathcal{V}(\mathcal{K}, \mathcal{r})$. Assim sendo, a Eq.(5.31) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\mathcal{A}^* \int_{\Omega} \begin{bmatrix} G_{11}\psi_i & G_{12}\psi_i & G_{13}\psi_i \\ G_{21}\psi_i & G_{22}\psi_i & G_{23}\psi_i \\ G_{31}\psi_i & G_{32}\psi_i & G_{33}\psi_i \end{bmatrix} d\Omega_Q = \begin{bmatrix} \psi & 0 & 0 \\ 0^i & \psi & 0 \\ 0 & 0^i & \psi_i \end{bmatrix} \quad \forall P \in \Omega. \quad (5.36)$$

$$\text{ou} \quad \mathcal{A}^* Gd^i(P) = P_i \quad \forall P \in \Omega \quad (5.37)$$

onde

$$P_1 = \begin{bmatrix} \psi_i(P) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_i(P) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_i(P) \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Das equações anteriores conclui-se que as componentes da projeção da Função de Green também obedecem a equação diferencial do problema adjunto, com modificações apenas no vetor excitação, i.é, com a substituição de

$$\delta(P,Q) \text{ I} \quad \text{por} \quad \begin{bmatrix} \psi_i & 0 & 0 \\ 0 & \psi_i & 0 \\ 0 & 0 & \psi_i \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Como condições de contorno para a Eq.(5.37), a partir das Eqs.(5.32) escreve-se:

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') \text{ Gd}^i(p) = 0 \quad (5.40)$$

Para facilitar a visualização, a j -ésima coluna da i -ésima componente da projeção da Função de Green ($j=1,2,3$), Gd_j^i , é reescrita na forma:

$$\text{Gd}_j^i = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

cuja expansão no domínio é feita com

$$\text{Gd}_j^i = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & \dots & \psi_{n_{tn}} & 0 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & \dots & 0 & \psi_{n_{tn}} & 0 \\ 0 & 0 & \psi_1 & \dots & 0 & 0 & \psi_{n_{tn}} \end{bmatrix} \{u_1, v_1, w_1, \dots, u_{n_{tn}}, v_{n_{tn}}, w_{n_{tn}}\}^t \quad (5.42)$$

Com estas aproximações, a j -ésima coluna ($j=1,2,3$) da i -ésima componente da projeção da Função de Green, $\text{Gd}(P)$, pode ser calculada com a minimização (via elementos finitos) do funcional:

$$J(\text{Gd}_j^i) = \int_{\Omega} [0.5 \{ \epsilon_F (\text{Gd}_j^i)^t D_F \epsilon_F (\text{Gd}_j^i) + \epsilon_S (\text{Gd}_j^i)^t D_S \epsilon_S (\text{Gd}_j^i) \} - (\text{Gd}_j^i)^t P_j] d\Omega + \int_{\partial\Omega} [(\text{Gd}_j^i)^t \mathcal{N}' \text{Gd}_j^i] d\partial\Omega \quad (5.43)$$

Substituindo a aproximação de Gd_j^i no funcional $J(Gd_j^i)$ e efetuando a minimização para todas as componentes da projeção da Função de Green na base do espaço $\mathcal{V}(h, \rho)$, resulta o sistema de equações:

$$[K+K_0][G^{DP}] = [M] \quad (5.44)$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez convencional de elementos finitos para placa de Mindlin,

$$[K] = \int_{\Omega} [B_F^t D_F B_F + B_S^t D_S B_S] d\Omega \quad (5.45)$$

sendo que D_F e D_S são as matrizes definidas anteriormente,

$$B_F = \begin{bmatrix} 0 & \psi_{1,x} & 0 & | & 0 & \psi_{2,x} & 0 & | & \dots & | & 0 & \psi_{ntn,x} & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{1,y} & | & 0 & 0 & \psi_{2,y} & | & \dots & | & 0 & 0 & \psi_{ntn,y} \\ 0 & \psi_{1,y} & \psi_{1,x} & | & 0 & \psi_{2,y} & \psi_{2,x} & | & \dots & | & 0 & \psi_{ntn,y} & \psi_{ntn,x} \end{bmatrix}, \quad (5.46)$$

$$B_S = \begin{bmatrix} \psi_{1,x} & -\psi_1 & 0 & | & \psi_{2,x} & -\psi_2 & 0 & | & \dots & | & \psi_{ntn,x} & -\psi_{ntn} & 0 \\ \psi_{1,y} & 0 & -\psi_1 & | & \psi_{2,y} & 0 & -\psi_2 & | & \dots & | & \psi_{ntn,y} & 0 & -\psi_{ntn} \end{bmatrix}, \quad (5.47)$$

$[K_0]$ é a matriz rigidez adicional devido a presença do operador \mathcal{N}' no contorno:

$$[K_0] = \int_{\partial\Omega} \begin{bmatrix} \phi & 0 & 0 & | & \dots & | & \phi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \phi & 0 & | & \dots & | & 0 & m & \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \phi_1 & | & \dots & | & 0 & 0 & m & \phi_m \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & k_3 & \\ & & & \dots & \\ & & & & k_{3m-1} & \\ & & & & & k_{3m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi & 0 & 0 & | & \dots & | & \phi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \phi & 0 & | & \dots & | & 0 & m & \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \phi_1 & | & \dots & | & 0 & 0 & m & \phi_m \end{bmatrix} d\partial\Omega \quad (5.48)$$

onde "m" representa o número de nós do contorno onde atua o operador \mathcal{N}' e k_i uma constante não nula arbitrária. Uma outra escolha conveniente, verificada experimentalmente, é selecionar a matriz $[K_0]$ como:

$$[K_0] = \text{diag} [k_1 | k_2 | k_3 | \dots | k_{3m-1} | k_{3m}] \quad (5.49)$$

sendo que k_i 's são constantes arbitrárias não nulas e "m" indica

o número de nós no contorno onde atua o operador \mathcal{N}' . $[M]$ é idêntica à matriz massa com densidade unitária, i.é:

$$[M] = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 \\ 0^1 & \psi_1 & 0 \\ 0 & 0^1 & \psi_1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \psi_{ntn} & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{ntn} & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{ntn} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 \\ 0^1 & \psi_1 & 0 \\ 0 & 0^1 & \psi_1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \psi_{ntn} & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{ntn} & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{ntn} \end{bmatrix} d\Omega \quad (5.50)$$

e $[G^{DP}]$ contém os valores nodais das projeções da Função de Green:

$$\begin{aligned} [G^{DP}]_{k, 3 \times i-2} &= \text{valores nodais } (k=1, 3 \cdot ntn) \text{ das componentes da} \\ &\text{projeção } Gd^i \text{ devido ao carregamento } \psi_i \text{ (} i=1, ntn \text{)} \\ &\text{na direção 1 (deslocamento } w \text{).} \\ [G^{DP}]_{k, 3 \times i-1} &= \text{valores nodais } (k=1, 3 \cdot ntn) \text{ das componentes da} \\ &\text{projeção } Gd^i \text{ devido ao carregamento } \psi_i \text{ (} i=1, ntn \text{)} \\ &\text{na direção 2 (rotação } \theta_x \text{).} \\ [G^{DP}]_{k, 3 \times i} &= \text{valores nodais } (k=1, 3 \cdot ntn) \text{ das componentes da} \\ &\text{projeção } Gd^i \text{ devido ao carregamento } \psi_i \text{ (} i=1, ntn \text{)} \\ &\text{na direção 3 (rotação } \theta_y \text{).} \end{aligned}$$

4.4.2-APROXIMAÇÃO DE $G_c(P)/G_c(p)$.

Do problema 2, Eqs.(2.92) e (2.93), tem-se:

$$\mathcal{A}^* G(P, q) = 0 \quad \forall P \in \Omega, q \in \partial\Omega \quad (5.51)$$

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') G(p, q) = \delta(p, q) \quad \forall p, q \in \partial\Omega \quad (5.52)$$

Pós-multiplicando a Eq.(5.51) por $[\Phi(q)]$ e integrando no contorno $\partial\Omega$, mantendo o ponto "P" fixo, resulta:

$$\mathcal{A}^* G_c(P) = 0 \quad \forall P \in \Omega \quad (5.53)$$

e com mesmo procedimento a partir das Eqs.(5.52), mantendo o ponto "p" do contorno fixo, tem-se:

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') G_c(p) = [\Phi(p)] \quad \forall p \in \partial\Omega \quad (5.54)$$

Note que $G_c(P)$ é da forma:

$$G_c(P) = \int_{\partial\Omega} \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \phi & 0 & 0 \\ 0^1 & \phi & 0 & \vdots & \vdots & 0^{ntnc} & \phi & 0 \\ 0 & 0^1 & \phi_1 & \vdots & \vdots & 0 & 0^{ntnc} & \phi_{ntnc} \end{bmatrix} d\partial\Omega_q \quad (5.55)$$

sendo que G_{ij} depende dos pontos "P,q" e ϕ_i depende do ponto "q". Compactadamente escreve-se:

$$G_c(P) = [G_c^1(P) \vdots G_c^2(P) \vdots G_c^3(P) \vdots \dots \vdots G_c^{ntnc}(P)] \quad (5.56)$$

sendo as componentes da projeção da Função de Green na base do contorno do espaço de elementos finitos $\mathcal{V}(h,\eta)$, $G_c^i(P)$, da forma:

$$G_c^i(P) = \int_{\partial\Omega} \begin{bmatrix} G_{11}\phi_i & G_{12}\phi_i & G_{13}\phi_i \\ G_{21}\phi_i & G_{22}\phi_i & G_{23}\phi_i \\ G_{31}\phi_i & G_{32}\phi_i & G_{33}\phi_i \end{bmatrix} d\partial\Omega_q \quad (5.57)$$

Assim sendo, a Eq.(5.53) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\mathcal{A}^* \int_{\partial\Omega} \begin{bmatrix} G_{11}\phi_i & G_{12}\phi_i & G_{13}\phi_i \\ G_{21}\phi_i & G_{22}\phi_i & G_{23}\phi_i \\ G_{31}\phi_i & G_{32}\phi_i & G_{33}\phi_i \end{bmatrix} d\Omega_q = 0 \quad \forall P \in \Omega. \quad (5.58)$$

ou

$$\mathcal{A}^* G_c^i(P) = 0 \quad \forall P \in \Omega \quad (5.59)$$

de onde se conclui que as componentes da projeção da Função de Green também obedecem a equação diferencial do problema adjunto com modificações apenas no vetor excitação, i.é, com a substituição de

$$\delta(P,Q) \text{ I} \quad \text{por} \quad 0 \quad (5.60)$$

Como condições de contorno para a Eq.(5.59), a partir das Eqs.(5.54) escreve-se:

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') Gc^i(p) = p_i \quad \forall p \in \partial\Omega \quad (5.61)$$

onde

$$p_1 = \begin{bmatrix} \phi_i(p) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_i(p) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad p_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_i(p) \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

Da mesma maneira efetuada para a projeção $Gd(P)/Gd(p)$, é possível escrever o funcional

$$J(Gc_j^i) = 0.5 \int_{\Omega} [\epsilon_F(Gc_j^i)^t D_F \epsilon_F(Gc_j^i) + \epsilon_S(Gc_j^i)^t D_S \epsilon_S(Gc_j^i)] d\Omega + \int_{\partial\Omega} [(Gc_j^i)^t \mathcal{N}' Gc_j^i - (Gc_j^i)^t p_j] d\partial\Omega \quad (5.63)$$

cuja minimização via elementos finitos resulta na projeção da Função de Green desejada. Nesta expressão Gc_j^i representa a j -ésima coluna de $Gc^i(P)$.

Para facilitar a visualização, reescreve-se a j -ésima coluna da i -ésima componente da projeção da Função de Green, Gc_j^i , na forma:

$$Gc_j^i = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

cuja expansão no domínio é feita com

$$Gc_j^i = \begin{bmatrix} \psi & 0 & 0 \\ 0^1 \psi & 0 & \\ 0 & 0^1 \psi_1 & \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \psi & 0 & 0 \\ 0^{ntn} \psi & 0 & \\ 0 & 0^{ntn} \psi_{ntn} & \end{bmatrix} \{u_1, v_1, w_1, \dots, u_{ntn}, v_{ntn}, w_{ntn}\}^t \quad (5.65)$$

Substituindo esta aproximação no funcional $J(Gc_j^i)$ e efetuando a minimização para todas as componentes da projeção da Função de Green na base do contorno do espaço $\mathcal{V}(h, \eta)$, resulta o sistema de equações:

5.5-EQUAÇÕES FINAIS.

5.5.1-DOMÍNIO.

Mostrou-se no Cap.2 que o sistema final de equações para o domínio é:

$$A \{u\} = B \{f\} + C \{b\} \quad (5.69)$$

onde $\{u\}$ é o vetor contendo valores nodais do deslocamentos transversal $w(x,y)$ e das rotações $\theta_x(x,y)$ e $\theta_y(x,y)$ (desconhecido e/ou desconhecido por partes), $\{b\}$ é o vetor contendo valores nodais das forças de corpo (conhecido) e $\{f\}$ é o vetor das reações nodais no contorno, i.é, os valores nodais de " $(N+N')$ u " (desconhecido e/ou desconhecido por partes).

5.5.2-CONTORNO.

Para o contorno o sistema final de equações é: --

$$D \{u\} = E \{f\} + F \{b\} \quad (5.70)$$

onde $\{u\}$ representa agora o vetor dos valores nodais dos deslocamentos para os nós do contorno.

5.6-MATRIZES A,B,...,F.

As matrizes A e D,

$$A = \int_{\Omega} [\Psi(P)]^t [\Psi(P)] d\Omega_P \quad (5.71)$$

$$D = \int_{\partial\Omega} [\Phi(p)]^t [\Phi(p)] d\partial\Omega_p \quad (5.72)$$

são calculadas diretamente com integração numérica em cada um dos elementos do domínio e/ou do contorno, com posterior superposição

via elementos finitos.

Com relação às outras matrizes, mostrou-se no Capítulo 2 que:

$$B = F^t = A [G^{CP}] \quad (5.72)$$

$$C = A [G^{DP}] \quad (5.73)$$

$$E = [G^{CP}] D \quad (5.74)$$

o que completa o cálculo de todas as matrizes necessárias.

Finalmente, valores no domínio são calculados usando-se a Eq.(5.69) e as Eqs.(5.72) e (5.73), resultando:

$$\{u\} = [G^{CP}]\{f\} + [G^{DP}]\{b\} \quad (5.75)$$

5.7-APLICAÇÕES.

Na aproximação das projeções da Função de Green foram utilizados os elementos finitos ilustrados na Fig.2. O elemento qu04pl é integrado seletivamente com 2x2 pontos de Gauss para a parcela de flexão e 1 ponto para a parcela do cisalhamento; o elemento qu09pl também é integrado seletivamente com 3x3 pontos para a flexão e 2x2 pontos para o cisalhamento e os elementos qu16pl e qu25pl são obtidos com integração cheia. Vale a pena ressaltar que a malha do contorno acompanha a malha de domínio, i.é, para elementos finitos de ordem n usa-se elementos de contorno de ordem n e com nós coincidentes. Ainda, todos os elementos finitos utilizados nos exemplos que seguem são obtidos com a formulação de deslocamentos.

Em todas as aplicações, os deslocamentos, momentos e esforço cortante são adimensionalizados seguindo as seguintes regras:

$$w^* = (wD/qa^4) \times 1000,$$

$$M^* = (M/qa^2) \times 100$$

e

$$Q^* = (Q/qa) \times 10$$

onde q e " a " representam o carregamento externo e o comprimento do lado da placa.

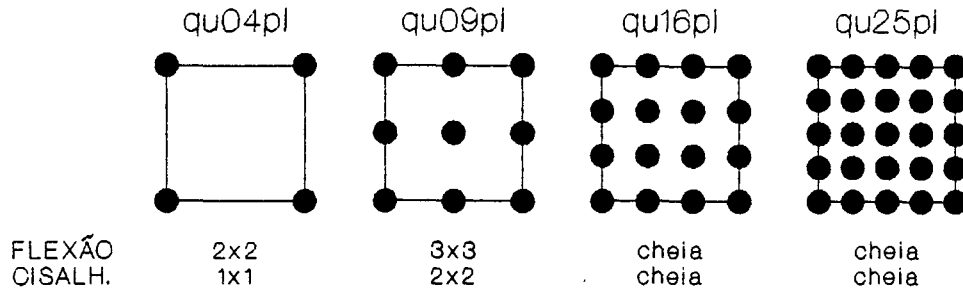
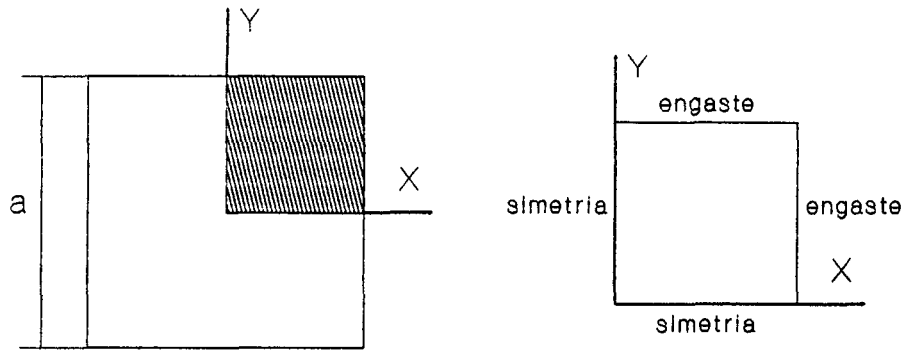


Fig.2-Elementos Finitos Utilizados.

5.7.1-PLACA ENGASTADA.

Como primeira aplicação, considere-se a placa quadrada (lado= a) engastada, com espessura constante e submetida ao carregamento uniformemente distribuído na sua superfície, $q(x,y)$. Devido à simetria do problema, apenas $1/4$ do domínio será discretizado com os elementos qu09pl, qu16pl e qu25pl. A espessura da placa, h , será variada obedecendo o critério $5 \leq a/h \leq 10^6$, com objetivo de detectar a presença do fenômeno do travamento (locking), presente nos elementos finitos com formulações de deslocamentos.

A primeira discretização é feita com o elemento qu25pl, de acordo com a Fig.3. Vale a pena ressaltar que nós duplos são inseridos em pontos de descontinuidade da normal e/ou condições de contorno. Resultados de deslocamentos, momentos e força cortante são mostrados nas Tabs.1 a 4, para as malhas M1-1, M1-2 e M1-3 e com a variação de espessura prevista anteriormente.



características do domínio

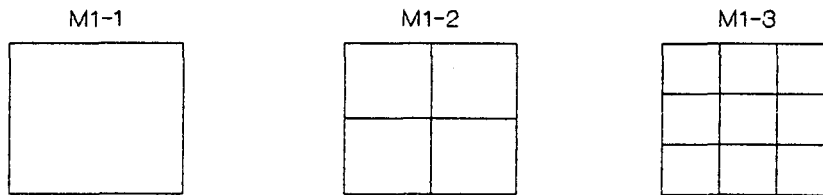
parcela a discretizada.

$E=2.1E6$

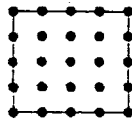
$\nu=0.30$

$a=10.0E0$

$q(x,y)=1.0E0$



Elemento Finito



Elemento de Contorno



Fig.3-Domínio e Discretizações Utilizadas com o qu25pl.

Tab.1-Deslocamento Central.

a/h	M1-1	M1-2	M1-3
5	2.17119	2.17213	2.17215
20	1.32197	1.32708	1.32721
40	1.27367	1.28088	1.28101
80	1.26111	1.26912	1.26924
100	1.25959	1.26770	1.26783
1E3	1.25690	1.26519	1.26532
1E4	1.25687	1.26517	1.26530
1E5	1.25687	1.26517	1.26532
1E6	1.25701	1.26581	1.26734
Placa Fina:1.265			

Tab.2-Momento Normal Central.

a/h	M1-1	M1-2	M1-3
5	2.36329	2.35795	2.35762
20	2.24168	2.29806	2.29981
40	2.19661	2.28807	2.29247
80	2.17772	2.28343	2.28987
100	2.17448	2.28267	2.28947
1E3	2.16936	2.28113	2.28862
1E4	2.16930	2.28112	2.28861
1E5	2.16931	2.28112	2.28863
1E6	2.16982	2.28237	2.29501
Placa Fina:2.31			

Tab.3-Momento Normal no Centro do Lado.

a/h	M1	M2	M3
5	4.51626	4.61845	4.62467
20	5.03614	5.07717	5.07816
40	5.05378	5.11848	5.11923
80	5.04647	5.12842	5.12973
100	5.04488	5.12949	5.13099
1E3	5.04159	5.13115	5.13321
1E4	5.04155	5.13116	5.13323
1E5	5.04155	5.13119	5.13328
1E6	5.04237	5.13228	5.13758
Placa Fina:5.13			

Tab.4-Esforço Cortante no Centro do Lado.

a/h	M1	M2	M3
5	-3.80538	-3.81960	-3.82060
20	-4.20188	-4.27626	-4.28507
40	-4.18184	-4.32845	-4.34515
80	-4.16029	-4.34216	-4.36349
100	-4.15687	-4.34359	-4.36587
1E3	-4.15029	-4.34547	-4.37031
1E4	-4.15022	-4.34548	-4.37036
1E5	-4.15022	-4.34548	-4.37039
1E6	-4.15022	-4.34556	-4.37523

O problema é resolvido novamente com o elemento $qu16pl$, com as malhas mostradas na Fig.4. Resultados de deslocamento, momentos e esforços cortantes são mostrados nas Tabs.5 a 8.

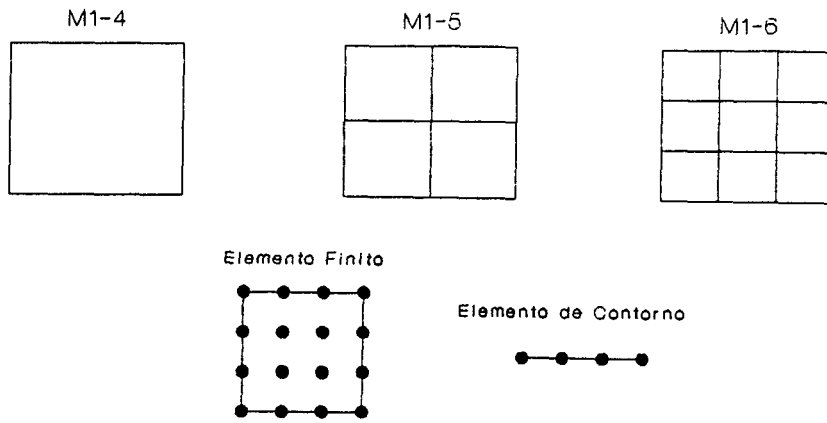


Fig.4-Domínio e Discretizações Utilizadas com o qul6pl.

Tab.5-Deslocamento Central.

a/h	M1-4	M1-5	M1-6
5	2.17056	2.17234	2.17210
20	1.31761	1.32713	1.32718
40	1.27081	1.28089	1.28084
80	1.25906	1.26910	1.26905
100	1.25766	1.26767	1.26763
1E3	1.25519	1.26515	1.26510
1E4	1.25517	1.26513	1.26508
1E5	1.25516	1.26513	1.26507
1E6	1.25513	1.26517	1.26507
Placa Fina:1.265			

Tab.6-Momento Central.

a/h	M1-4	M1-5	M1-6
5	2.32462	2.35365	2.35722
20	2.18967	2.29479	2.29934
40	2.15637	2.28851	2.30079
80	2.14387	2.28753	2.30363
100	2.14217	2.28749	2.30434
1E3	2.13905	2.28747	2.30596
1E4	2.13903	2.28747	2.30598
1E5	2.13902	2.28747	2.30597
1E6	2.13909	2.28778	2.30598
Placa Fina:2.31			

Tab.7-Momento Normal no Centro do Lado.

a/h	M1-4	M1-5	M1-6
5	4.93466	4.61120	4.62669
20	5.22117	5.05608	5.07879
40	5.08613	5.09465	5.12065
80	5.01266	5.11062	5.13167
100	5.00178	5.11343	5.13303
1E3	4.98130	5.11883	5.13533
1E4	4.98125	5.11888	5.13535
1E5	4.98108	5.11888	5.13532
1E6	4.98103	5.11894	5.13531
Placa Fina:5.13			

Tab.8-Esforço Cortante no Centro do Lado.

a/h	M1-4	M1-5	M1-6
5	-3.90732	-3.82700	-3.82064
20	-4.58926	-4.23284	-4.28716
40	-4.51705	-4.27269	-4.32901
80	-4.45010	-4.28125	-4.34505
100	-4.43934	-4.28125	-4.34703
1E3	-4.41858	-4.27138	-4.35012
1E4	-4.41845	-4.27112	-4.35015
1E5	-4.41836	-4.27111	-4.35014
1E6	-4.41813	-4.27094	-4.35013

Para concluir o estudo da convergência com malhas homogêneas, o problema é novamente resolvido com o elemento qu09pl e com as discretizações ilustradas na Fig.5. Resultados de deslocamento, momentos e esforços cortantes são mostrados nas Tabs.9 a 12.

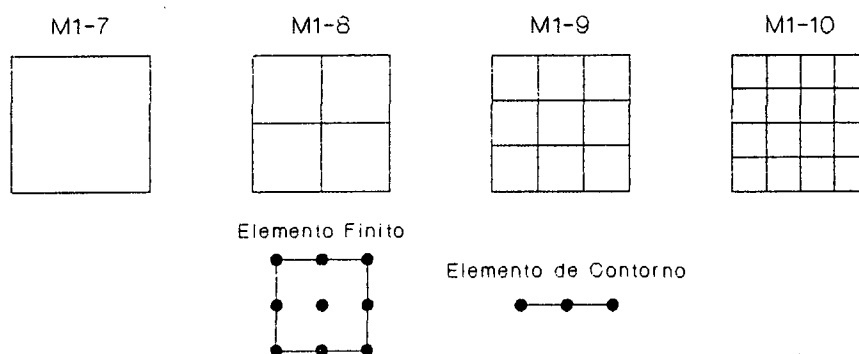


Fig.5-Discretizações do Domínio com o qu09pl.

Tab.9-Deslocamento Central.

a/h	M1-7	M1-8	M1-9	M1-10
5	2.40130	2.18390	2.17435	2.17282
20	1.59515	1.33841	1.32937	1.32792
40	1.55450	1.29194	1.28306	1.28168
80	1.54432	1.28008	1.27125	1.26989
100	1.54310	1.27864	1.26982	1.26846
1E3	1.54095	1.27612	1.26730	1.26594
1E4	1.54093	1.27609	1.26727	1.26592
1E5	1.54094	1.27609	1.26727	1.26591
1E6	1.54093	1.27618	1.26717	1.26577
Placa Fina: 1.265				

Tab.10-Momento Central.

a/h	M1-7	M1-8	M1-9	M1-10
5	2.72587	2.42936	2.38500	2.37152
20	2.60895	2.37033	2.32472	2.31238
40	2.58755	2.36606	2.31762	2.30512
80	2.58133	2.36523	2.31632	2.30315
100	2.58056	2.36514	2.31626	2.30296
1E3	2.57918	2.36495	2.31612	2.30280
1E4	2.57916	2.36496	2.31612	2.30279
1E5	2.57921	2.36495	2.31612	2.30278
1E6	2.57916	2.36513	2.31605	2.30276
Placa Fina:2.31				

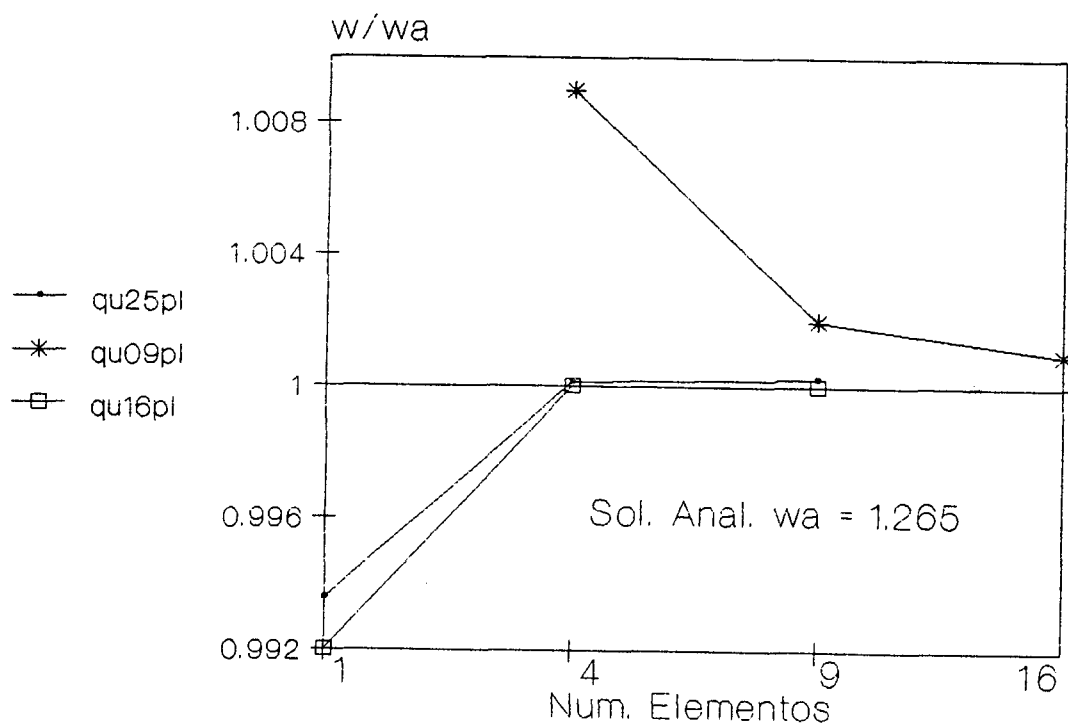
Tab.11-Momento Normal no Centro do Lado.

a/h	M1-7	M1-8	M1-9	M1-10
5	4.53289	4.65099	4.64408	4.63494
20	5.91454	5.09371	5.10246	5.09324
40	6.16732	5.13264	5.13493	5.13110
80	6.24084	5.14763	5.14118	5.13888
100	6.24999	5.14978	5.14111	5.13956
1E3	6.26627	5.15383	5.13274	5.13415
1E4	6.26643	5.15387	5.13224	5.13340
1E5	6.26633	5.15387	5.13224	5.13338
1E6	6.26643	5.15421	5.13207	5.13395
Placa Fina:5.13				

Tab.12-Esforço Cortante no Centro do Lado.

a/h	M1-7	M1-8	M1-9	M1-10
5	-4.40888	-3.98629	-3.90058	-3.86536
20	-5.32802	-4.35234	-4.37202	-4.34488
40	-5.49619	-4.35601	-4.42647	-4.41243
80	-5.54510	-4.34657	-4.43654	-4.44255
100	-5.55119	-4.34456	-4.43164	-4.44841
1E3	-5.56202	-4.34027	-4.35525	-4.40231
1E4	-5.56212	-4.34022	-4.35237	-4.39209
1E5	-5.56218	-4.34022	-4.35233	-4.39195
1E6	-5.56213	-4.34023	-4.35290	-4.39285

Com a finalidade de comparar os resultados das tabelas anteriores (Tabs.1 a 12) com a Teoria Clássica de Placas (CPT), a Fig.6 é construída mostrando a convergência h do MLGFM e tomando como referência $a/h=1000$. Nas Figs.7a a 7e mostra-se o comportamento do momento normal e esforço cisalhante ao longo do lado da placa. A superconvergência nodal é marcante para todos os elementos, tanto para deslocamentos como para esforços.

Fig.6a- Convergência h para o deslocamento central, w_a .

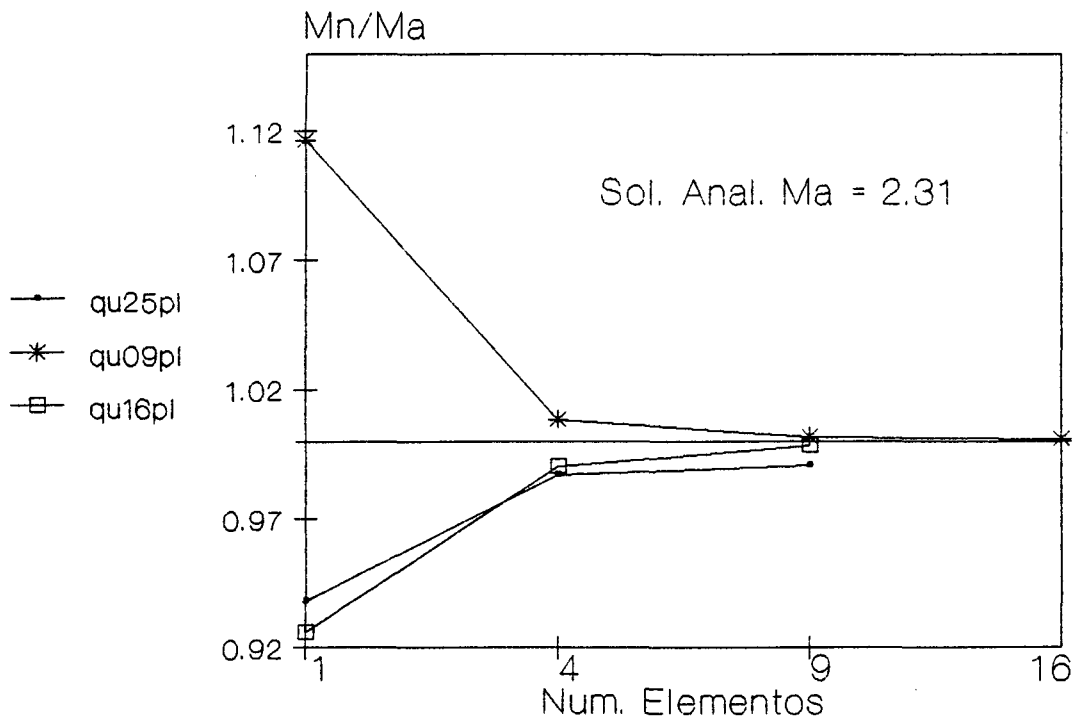


Fig.6b-Convergência k para o momento normal no centro da placa, Ma.

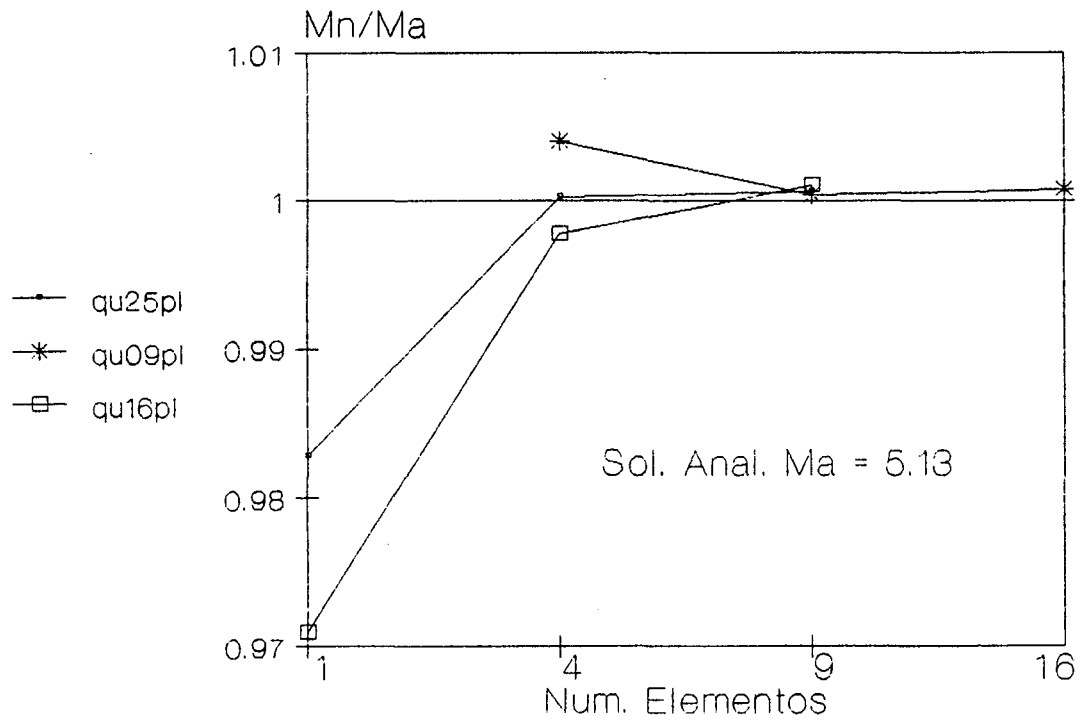


Fig.6c- Convergência k para o momento normal no centro do lado, Ma.

O fenômeno do travamento (locking) não é verificado para nenhum dos elementos e a deterioração dos resultados para $a/k=10^6$ pode ser atribuída ao mal condicionamento numérico das matrizes. Note que, para esta razão, a malha M1-2 apresenta melhores resultados que a M1-3, quando deveria ser o contrário. Entretanto, as teorias de primeira ordem para flexão de placas também já são impraticáveis para a razão $a/k=10^6$.

Novamente, com objetivo de comparar resultados para placas semi-espessas e espessas, razões $a/k \leq 100$; a Tab.13 é montada com alguns resultados recentes disponíveis na literatura. A semelhança de resultados, MLGFM x Série, FEM2 e FEM4 é notória.

Tab.13- Deslocamento Central.

a/h	FEM ₁	FEM ₂	FEM ₃	FEM ₄	Série	FEM ₅	BEM	MLGFM
5	2.1712	2.174	2.0540	2.1722	2.1666			2.1721
10	1.4816	1.504	1.4726		1.5046	1.5050	1.5331	
20	1.2976	1.326	1.3177		1.3285			1.3271
40					1.2826			1.2809
80					1.2709			1.2691
100	1.2362	1.265	1.2674	1.2644		1.2679	1.2714	1.2677

FEM₁-Yuan, F.G. & Miller, R.E., 1988. Malha 6x6 elementos.

FEM₂-Dill, E.H., 1990. Malha 40 elementos.

FEM₃-Yuan, F.G. & Miller, R.E., 1990. Malha 8x8 elementos.

FEM₄-Weissman, S.L. & Taylor, R.L., 1990. Malha 16x16 elementos S1.

FEM₅-Petrolito, J., 1990. Malha 4x4 elementos Q3-3.

BEM-Silva, L.H.M., 1988. Malha 6 elementos quadráticos.

Série-Deshmukh, R.S. & Archer, R.S., 1974.

MLGFM-M1-2 (4 elementos).

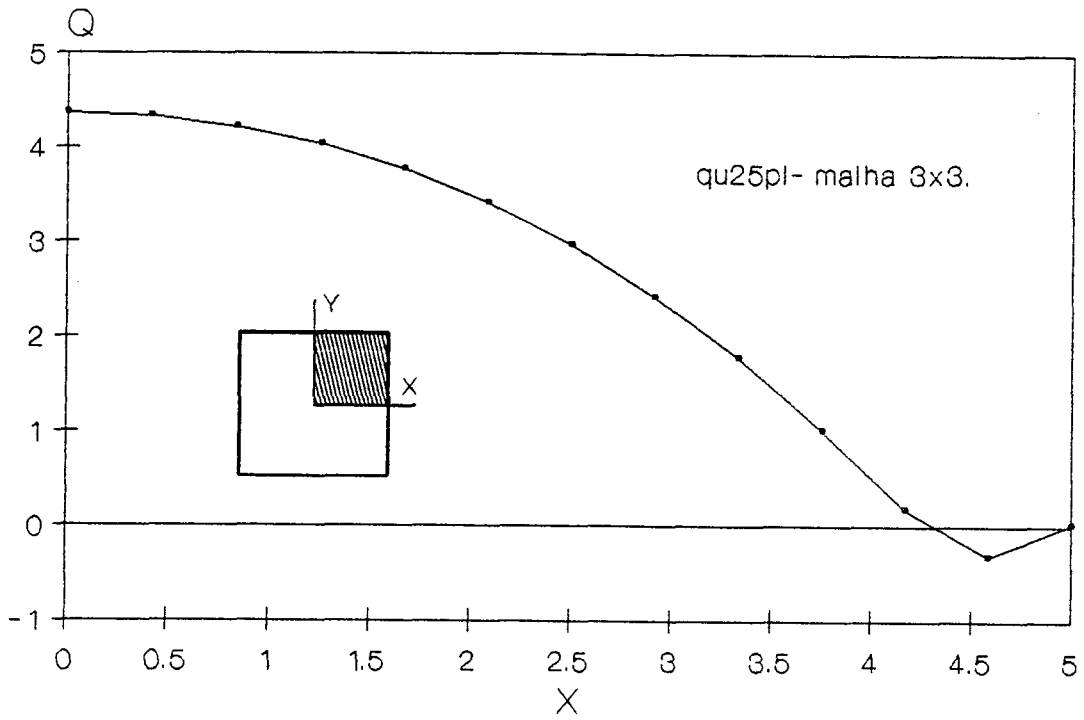


Fig.7a-- Esforço Cisalhante ao Longo do Lado (qu25pl).

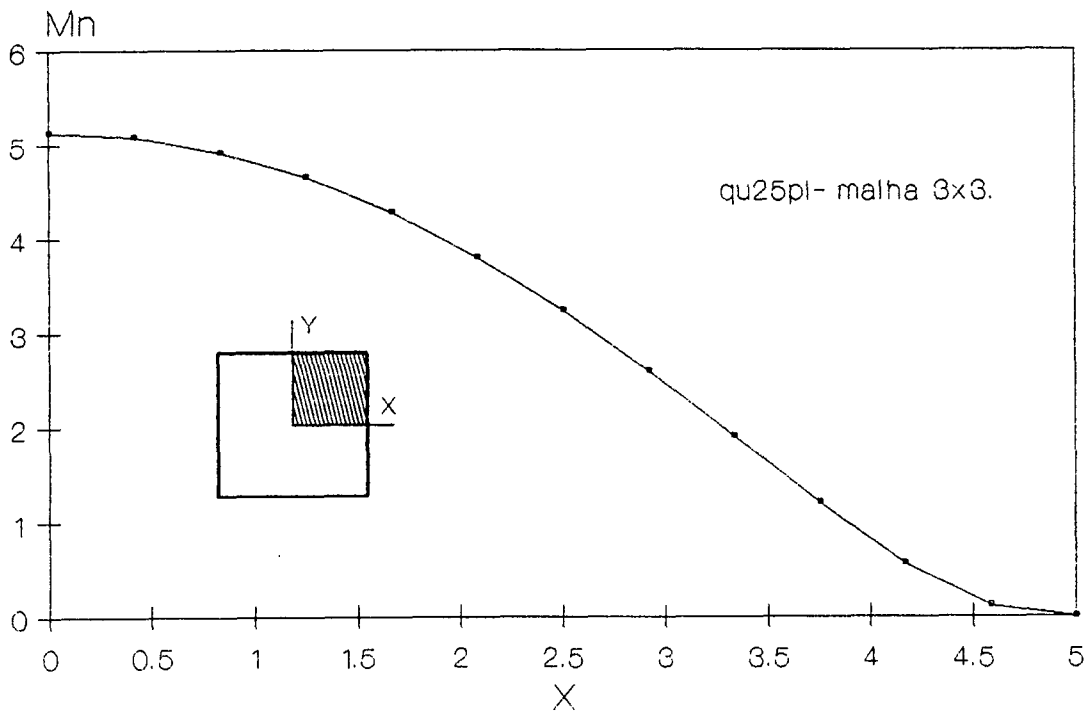


Fig.7b- Momento Normal ao Longo do Lado (qu25pl).

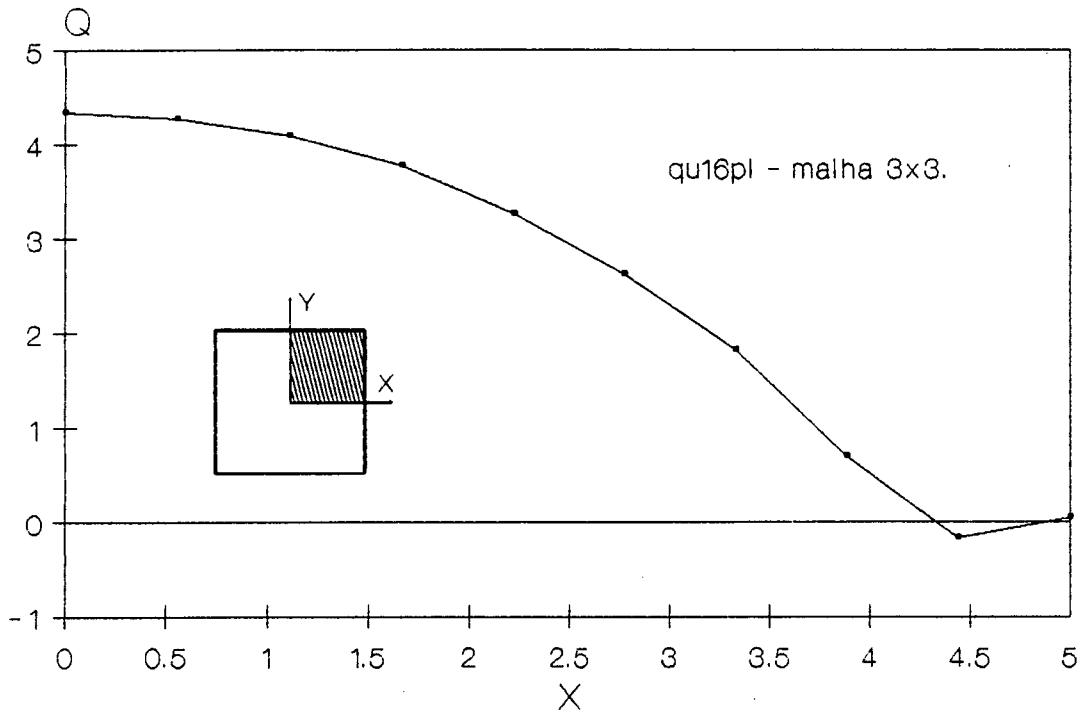


Fig.7c- Esforço Cisalhante ao Longo do Lado (qu16pl).

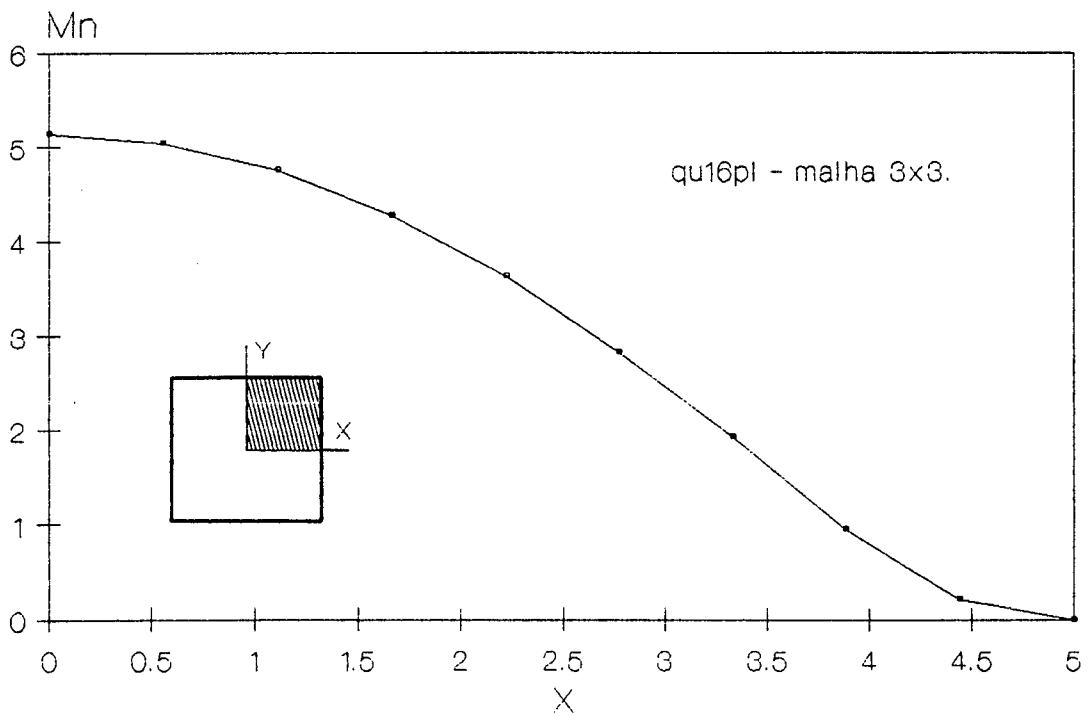


Fig.7d- Momento Normal ao Longo do Lado (qu16l).

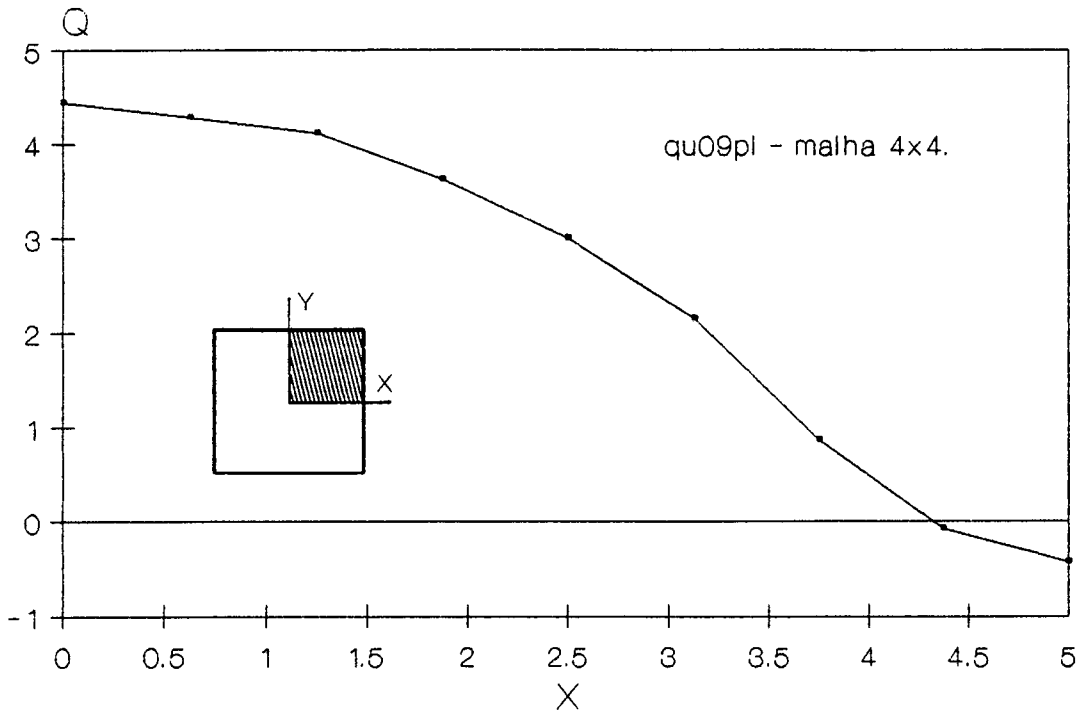


Fig.7e- Esforço Cisalhante ao Longo do Lado (qu09pl).

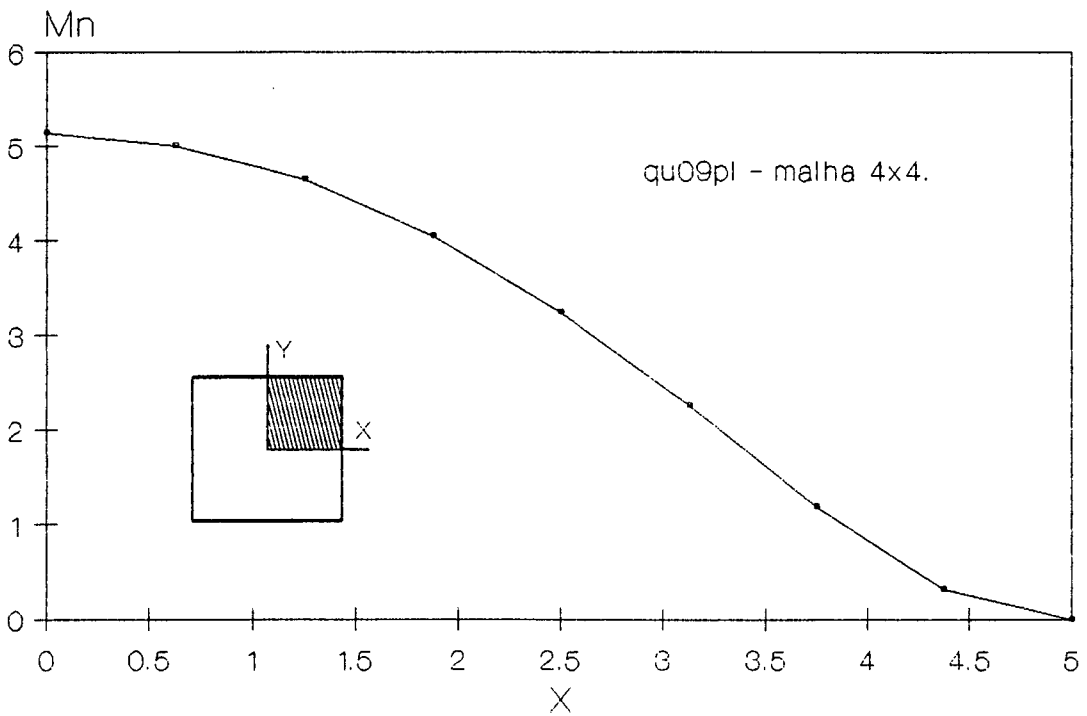


Fig.7f- Momento Normal ao Longo do Lado (qu09pl).

É interessante notar que a convergência h do MLGFM para placas semi-espessas/espessas é mais rápida do que para placas finas. Por exemplo, para os elementos qu16pl e qu25pl a solução para deslocamento central com as malhas M1-1 a M1-6 diferem apenas no quarto dígito significativo.

Outro aspecto interessante é a variação do esforço cisalhante perto do canto da placa. Embora as malhas utilizadas até aqui, M1-1 a M1-10, não permitam uma representação adequada da variação deste esforço perto do canto, os resultados centrais apresentam ótima concordância com os analíticos/numéricos. Para visualizar esta variação, a malha para o problema é reprojetaada com o elemento qu09pl, conforme ilustrado na Fig.8 e os resultados mostrados nas Figs.9a e 9b apresentam boa concordância com os apresentados por Matsumoto at. ali.,1991.

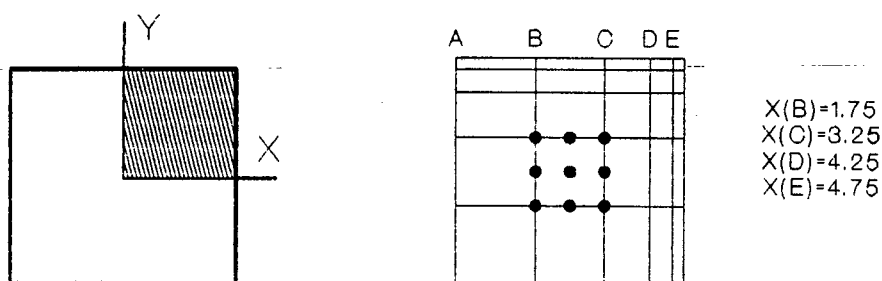


Fig.8-Malha Projetada para Captar a Variação de Q perto do Canto.

Uma outra dúvida relevante é com relação a distorção dos elementos: Para malhas distorcidas (elementos distorcidos) o MLGFM apresenta mesmo comportamento que o FEM ?!.

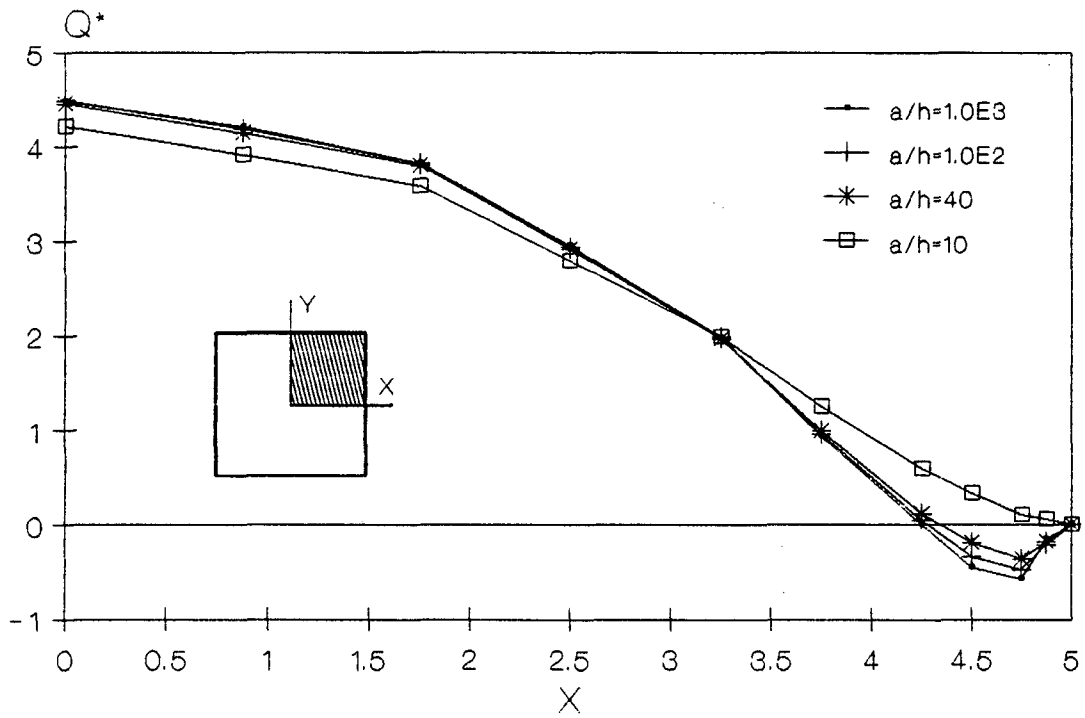


Fig. 9a- Esforço Cisalhante ao Longo do Lado.

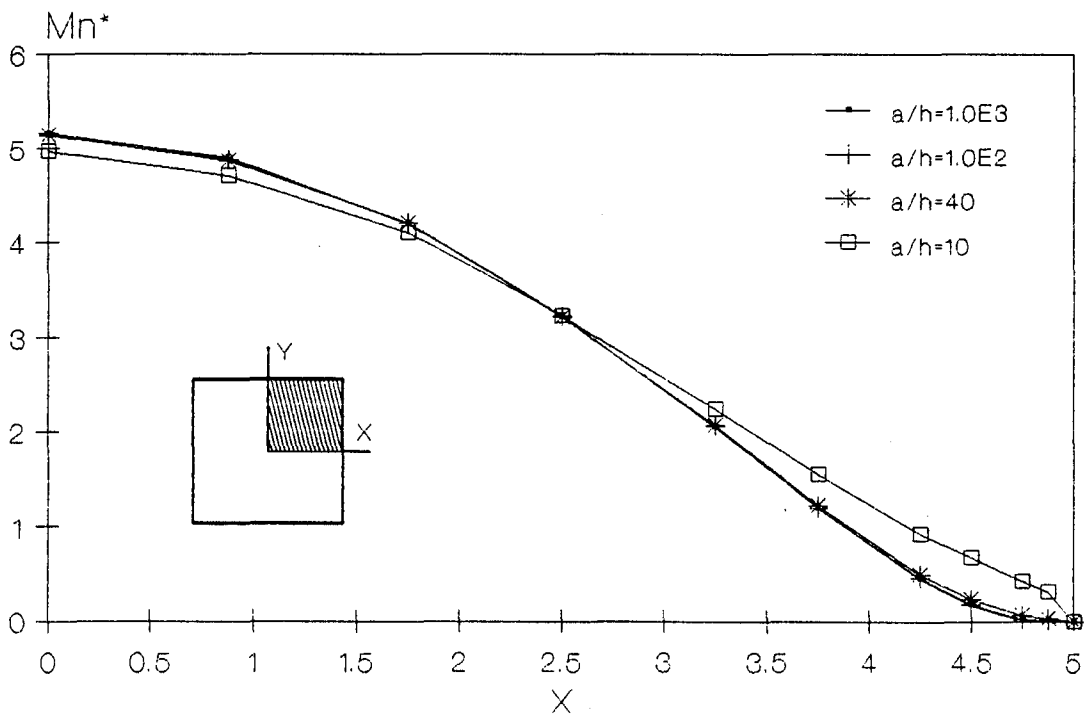


Fig. 9b- Momento Normal ao Longo do Lado.

Elementos finitos com formulações mais recentes (ANS-MITC) contornam com eficiência o problema do travamento (locking) e modos espúrios, porém, a sensibilidade do esforço cortante com relação à distorção da malha ainda é um problema a ser resolvido. Este problema é caracterizado pela oscilação do esforço cisalhante ao redor da solução analítica e, segundo Donea & Belystchko, 1989, está associado com a violação da condição de Babuška-Brezzi. Recentemente, Franca & Hughes, 1990, demonstraram, com uso de princípios variacionais híbridos e mínimos quadrados, que elementos de alta ordem são pouco sensíveis à distorção. Ainda, Akhtar & Basu, 1991, também mostram que o fenômeno do travamento (locking) não está presente nestes elementos.

Na tentativa de demonstrar tais resultados na prática, o problema é resolvido novamente com a discretização de 1/4 do domínio e com uso das malhas distorcidas mostradas na Fig.10. Resultados de deslocamento, momentos e esforços cisalhantes estão mostrados nas Tabs.14 a 17.

Para deslocamentos, mesmo para placas finas, todos os elementos apresentam ótimos resultados. Entretanto, na medida em que a razão a/h cresce, a deterioração dos resultados do esforço cortante é bastante visível.

De acordo com as expectativas, o elemento de ordem quatro (qu25pl) é o que apresenta melhores resultados com relação à distorção, como mostra as Tabs.16 e 17 e Figs.10a a 11d.

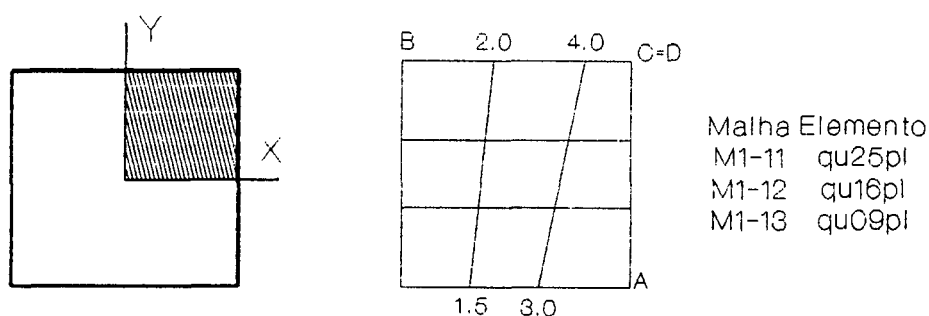


Fig.10-Domínio e Discretização Utilizada.

Tab.14-Deslocamento Central.

a/h	M1-11	M1-12	M1-13
5	2.17119	2.17213	2.17481
20	1.32722	1.32718	1.32954
40	1.28101	1.28098	1.28302
80	1.26925	1.26881	1.27077
100	1.26783	1.26737	1.26915
250	1.26570	1.26517	1.26557
500	1.26540	1.26573	1.26209
1E3	1.26532	1.26431	1.25568
Placa Fina:1.265			

Tab.15-Momento Central.

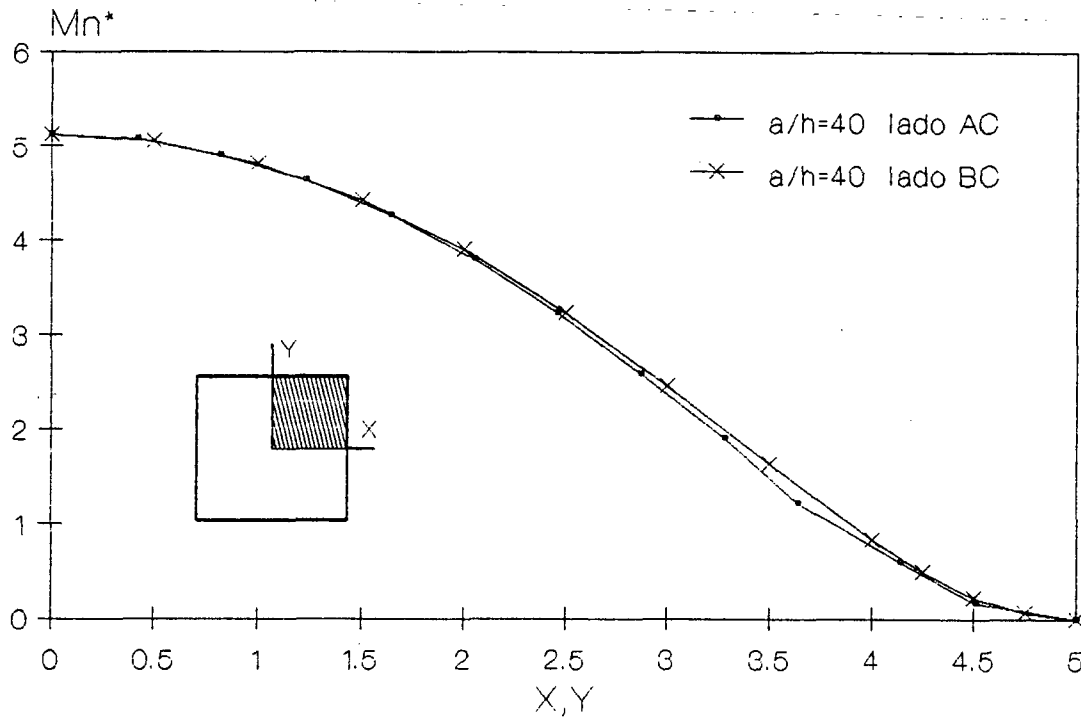
a/h	M1-11	M1-12	M1-13
5	2.35762	2.35689	2.39023
20	2.29979	2.29869	2.35706
40	2.29240	2.30307	2.75658
80	2.28957	2.30698	2.75658
100	2.28918	2.30723	2.89943
250	2.28753	2.29412	3.94037
500	2.28407	2.26570	6.03119
1E3	2.26809	2.34979	0.10592
Placa Fina:2.31			

Tab.16-Momento Normal no Centro do Lado.

a/h	Pto	M1-11	M1-12	M1-13
5	A	4.62478	4.62786	4.64541
	B	4.62491	4.62579	4.65806
20	A	5.07899	5.08147	5.07731
	B	5.07824	5.07679	5.11924
40	A	5.12076	5.16161	5.03561
	B	5.11925	5.12100	5.14792
80	A	5.13254	5.20547	4.87895
	B	5.12969	5.13236	5.14857
100	A	5.13439	5.22269	4.79076
	B	5.13094	5.13358	5.15235
250	A	5.14236	5.41004	3.90310
	B	5.13281	5.13132	5.55207
500	A	5.16057	5.94675	1.73853
	B	5.13316	5.11746	7.29265
1E3	A	5.20911	7.20544	-2.59540
	B	5.13369	5.08348	11.07045
Placa Fina:5.13				

Tab.17-Esforço Cisalhante no Centro do Lado.

a/h	Pto	M1-11	M1-12	M1-13
5	A	-3.82038	-3.81278	-3.84672
	B	-3.82064	-3.81911	-3.93332
20	A	-4.27966	-4.16356	-3.42622
	B	-4.28521	-4.28852	-4.50391
40	A	-4.32984	-4.18466	-1.28400
	B	-4.34535	-4.33586	-4.83557
80	A	-4.32885	-4.00180	4.16500
	B	-4.36402	-4.36009	-6.02508
100	A	-4.32063	-3.88177	7.07967
	B	-4.36664	-4.36778	-5.07396
250	A	-4.19584	-2.31243	32.80166
	B	-4.37377	-4.42672	-20.89056
500	A	-3.80115	2.13907	91.88568
	B	-4.38612	-4.60793	-61.62415
1E3	A	-2.73825	11.52293	209.51232
	B	-4.42807	-5.18713	-145.59355

Fig.10a-Momento Normal ao Longo do Lado, $a/h=40$.

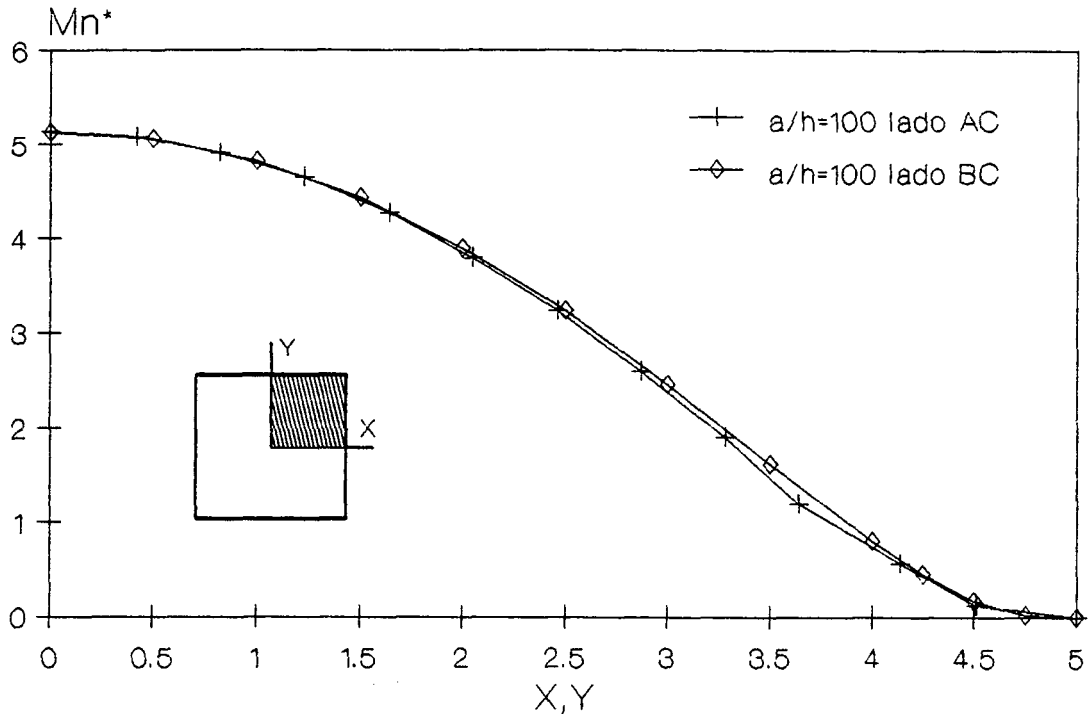


Fig.10b-Momento Normal ao Longo do Lado, $a/h=100$.

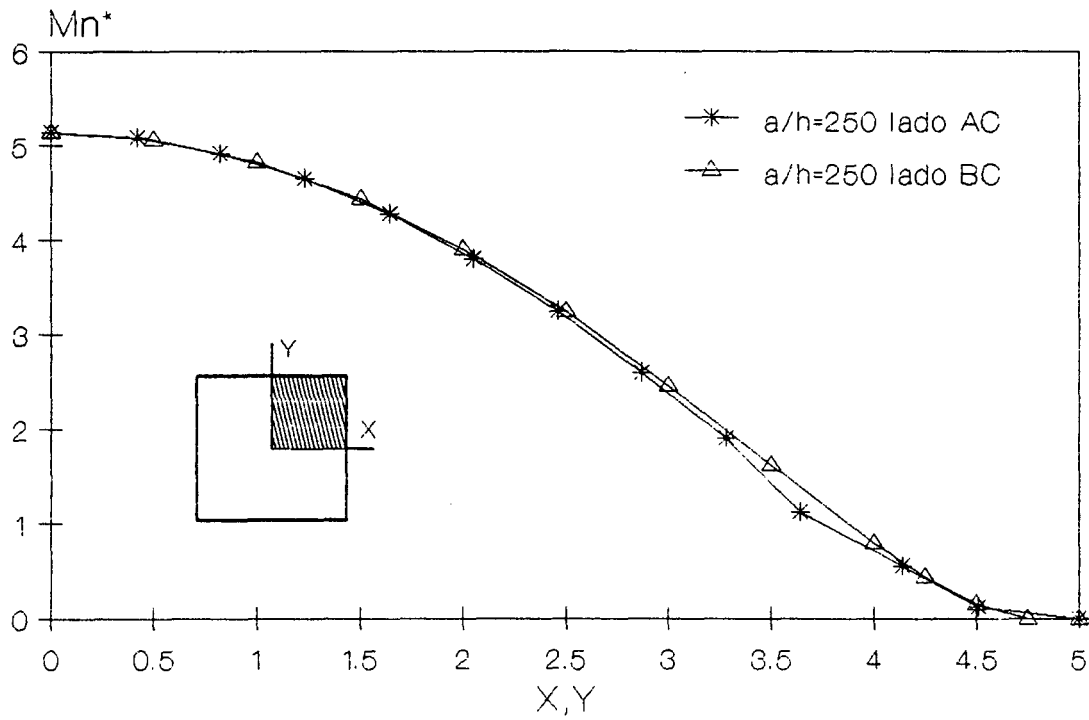
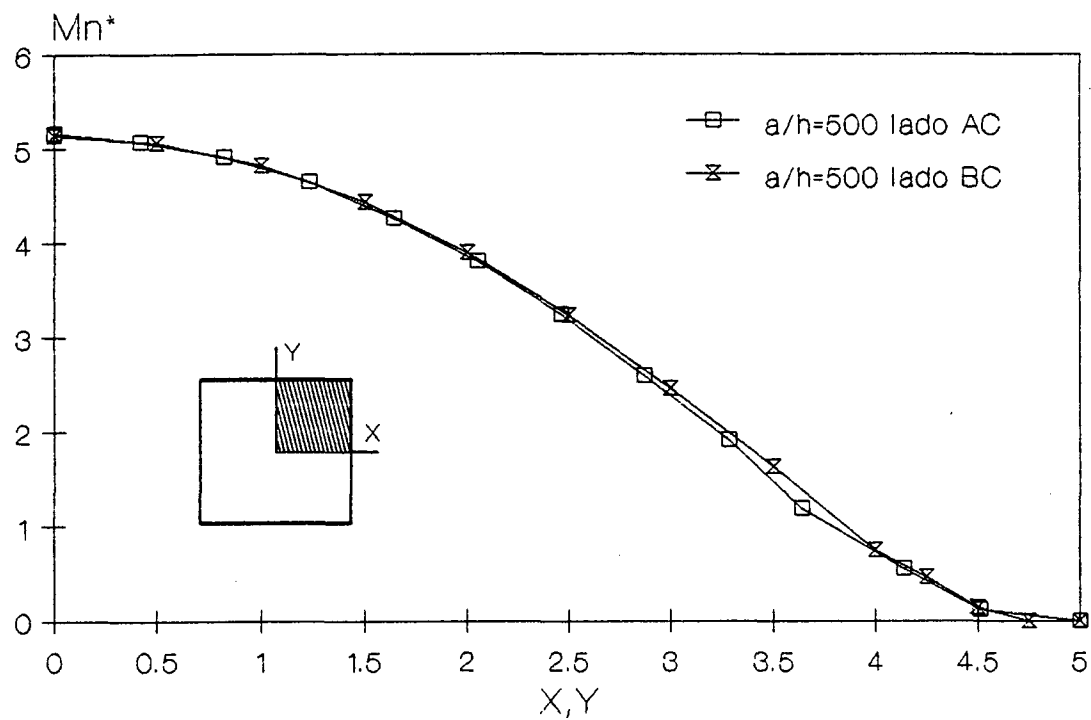
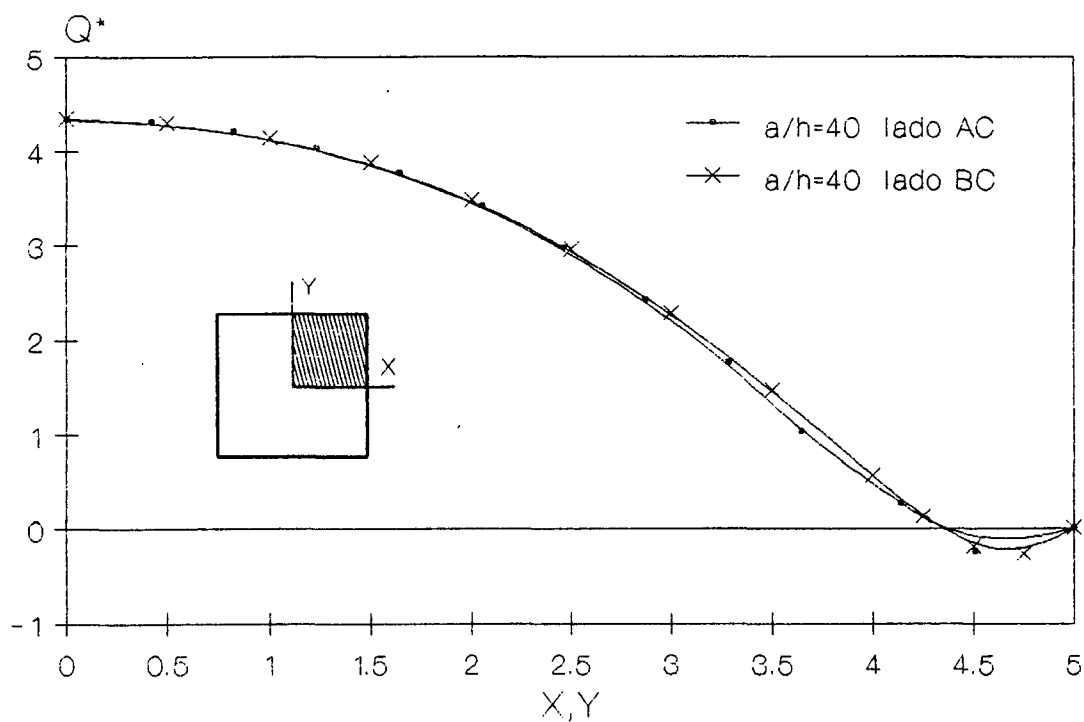


Fig.10c-Momento Normal ao Longo do Lado, $a/h=250$.

Fig.10d-Momento Normal ao Longo do Lado, $a/h=500$.Fig.11a-Esforço Cisalhante ao Longo do Lado, $a/h=40$

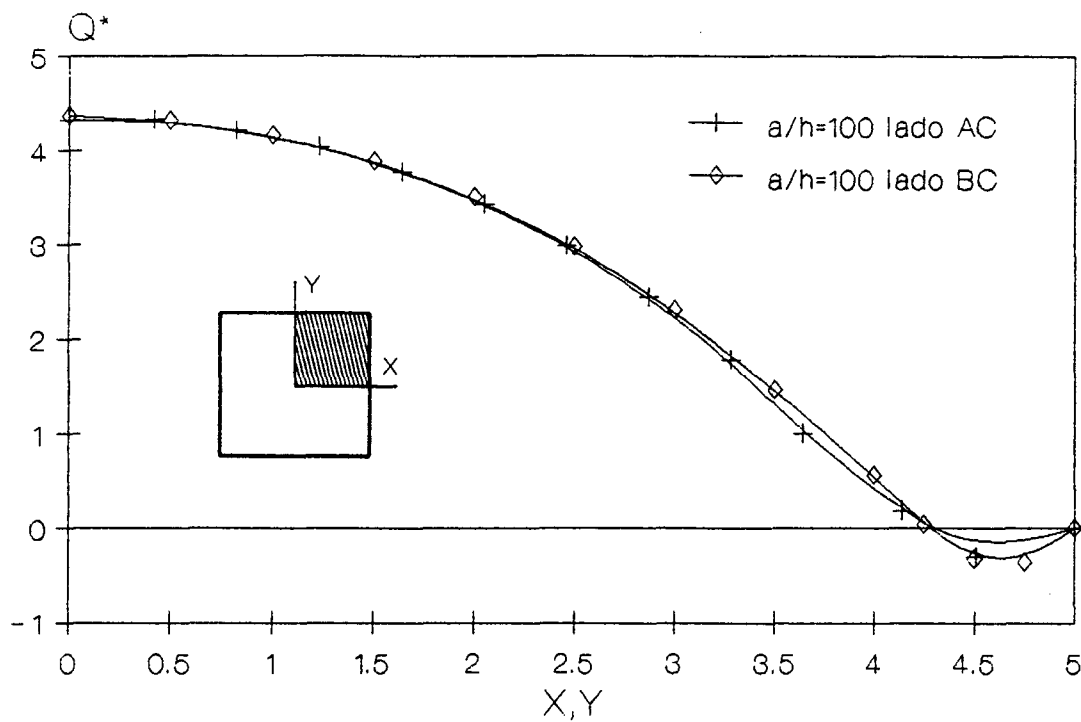


Fig.11b-Esforço Cisalhante ao Longo do Lado, $a/h=100$

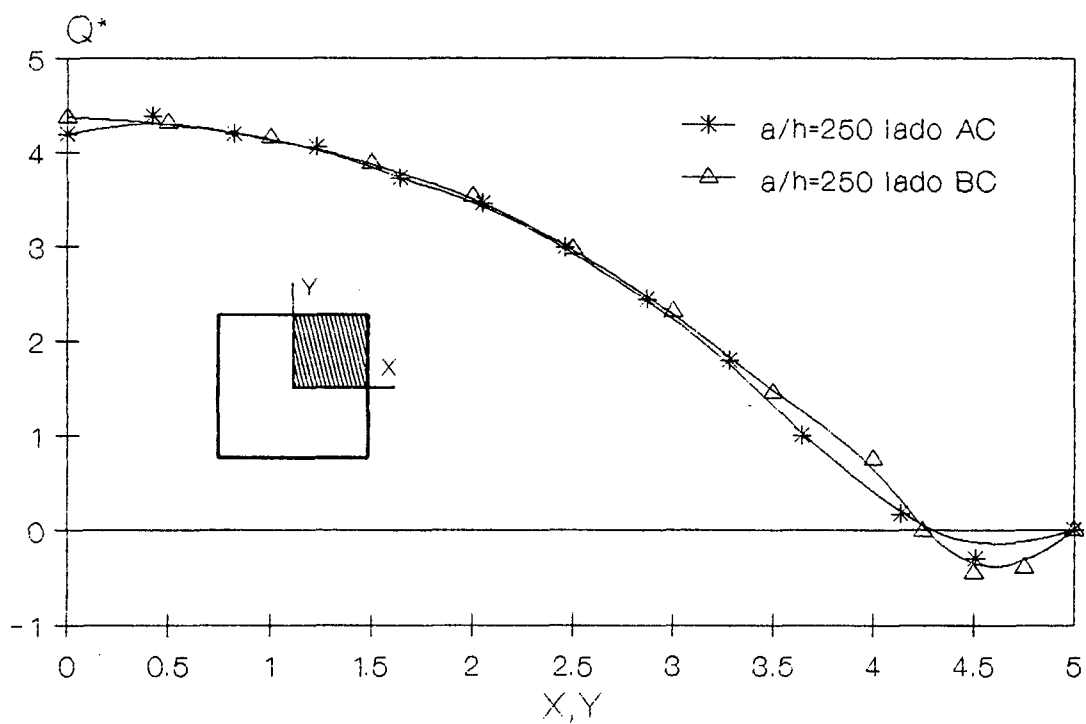


Fig.11c-Esforço Cisalhante ao Longo do Lado, $a/h=250$

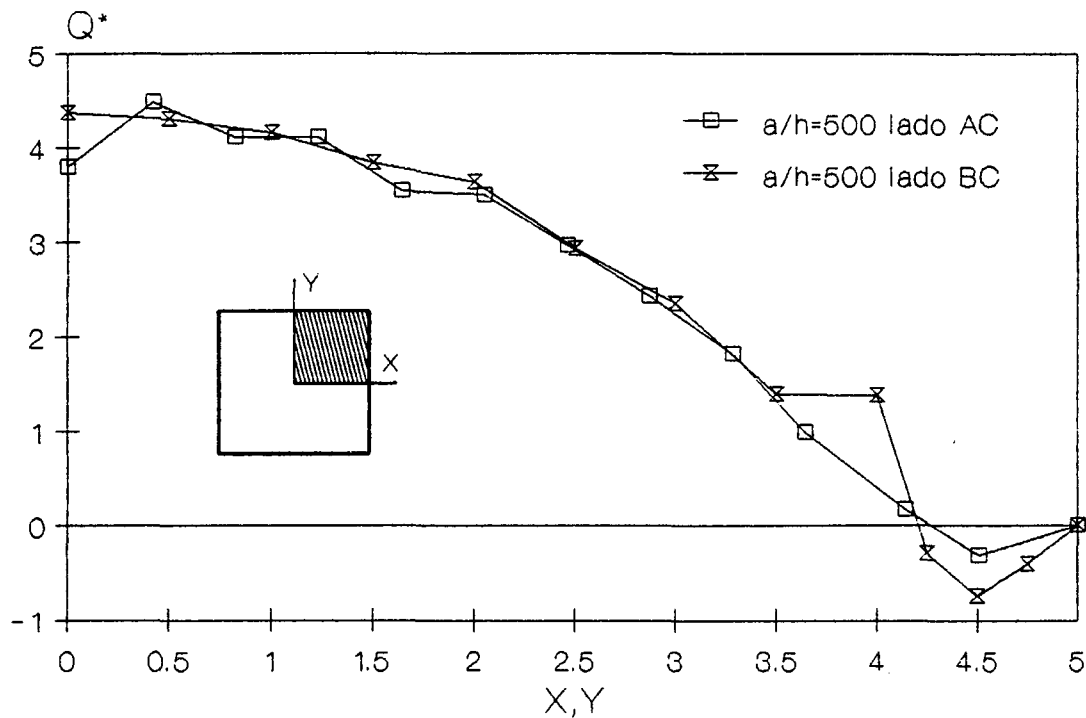


Fig.11d-Esforço Cisalhante ao Longo do Lado, $a/h=500$

5.7.2-PLACA SIMPLEMENTE APOIADA.

De maneira análoga ao realizado para o problema anterior, o próximo objetivo é determinar a convergência k e a sensibilidade com relação à distorsão da malha para as placas simplesmente apoiadas em todos os lados.

Seja a placa quadrada, de lado "a", simplesmente apoiada em todos os lados e submetida ao carregamento externo uniformemente distribuído e constante, $q(x,y)$. Devido a simetria do problema, apenas 1/4 do domínio é discretizado com as malhas M2-1 a M2-10, iguais às malhas M1-1 a M1-10, respectivamente.

Os resultados obtidos para o elemento qu25pl são os mostrados nas Tabs.18 a 21.

Tab.18-Deslocamento Central.

a/h	M2-1	M2-2	M2-3
5	4.90423	4.90431	4.90431
20	4.11375	4.11497	4.11497
40	4.07377	4.07549	4.07551
80	4.06370	4.06561	4.06564
100	4.06249	4.06443	4.06445
1E3	4.06035	4.06234	4.06237
1E4	4.06033	4.06232	4.06235
1E5	4.06031	4.06241	4.06233
1E6	4.05990	4.06430	4.04225
Placa Fina:4.0624			

Tab.19-Momento Normal Central

a/h	M2-1	M2-2	M2-3
5	4.79147	4.78900	4.78872
20	4.75796	4.78785	4.78860
40	4.73983	4.78626	4.78835
80	4.73210	4.78496	4.78803
100	4.73101	4.78471	4.78796
1E3	4.72899	4.78421	4.78776
1E4	4.72897	4.78421	4.78775
1E5	4.72895	4.78429	4.78810
1E6	4.73037	4.79298	4.75683
Placa Fina:4.7887			

Tab.20-Momento Normal no Canto

a/h	M2-1	M2-2	M2-3
5	3.25507	3.25000	3.24907
20	3.23835	3.24684	3.24825
40	3.23295	3.24382	3.24702
80	3.23103	3.24174	3.24576
100	3.23077	3.24138	3.24548
1E3	3.23032	3.24064	3.24481
1E4	3.23031	3.24063	3.24480
1E5	3.23030	3.24070	3.24479
1E6	3.22936	3.23976	3.23234
PlacaFina:3.25			

Tab.21-Esforço Cisalhante no Centro do Lado.

a/h	M2-1	M2-2	M2-3
5	-3.35379	-3.37550	-3.37650
20	-3.31632	-3.37514	-3.37648
40	-3.27170	-3.37287	-3.37632
80	-3.24902	-3.36939	-3.37589
100	-3.24567	-3.36860	-3.37574
1E3	-3.23937	-3.36685	-3.37530
1E4	-3.23931	-3.36684	-3.37529
1E5	-3.23932	-3.36694	-3.37549
1E6	-3.23946	-3.36852	-3.37932
Placa Fina:-3.3765			

Para o elemento quí6pl os resultados obtidos são os mostrados nas Tabs.22 a 25.

Tab.22-Deslocamento Central.

a/h	M2-4	M2-5	M2-6
5	4.90934	4.90436	4.90437
20	4.15613	4.11606	4.11497
40	4.12965	4.07760	4.07550
80	4.12432	4.06833	4.06563
100	4.12372	4.06724	4.06445
1E3	4.12271	4.06534	4.06236
1E4	4.12270	4.06533	4.06234
1E5	4.12271	4.06533	4.06230
1E6	4.12272		4.05554
Placa Fina:4.0624			

Tab.23-Momento Normal Central.

a/h	M2-4	M2-5	M2-6
5	4.79361	4.78755	4.78827
20	4.97861	4.79453	4.78827
40	5.04438	4.80136	4.78827
80	5.06706	4.80551	4.78827
100	5.07001	4.80617	4.78827
1E3	5.07533	4.80746	4.78827
1E4	5.07585	4.80748	4.78827
1E5	5.07540	4.80748	4.78821
1E6	5.07517		4.78078
Placa Fina:4.7887			

Tab.24-Momento Normal no Canto.

a/h	M2-4	M2-5	M2-6
5	3.23424	3.25655	3.25587
20	3.13418	3.24026	3.25566
40	3.10787	3.23100	3.25563
80	3.09917	3.22634	3.25569
100	3.09805	3.22564	3.25573
1E3	3.09603	3.22430	3.25605
1E4	3.09601	3.22429	3.25606
1E5	3.09600	3.22429	3.25602
1E6	3.09604		3.25158
Placa Fina: 3.25			

Tab.25-Esforço Cisalhante no
Centro do Lado.

a/h	M2-4	M2-5	M2-6
5	-3.42855	-3.37407	-3.37247
20	-3.61952	-3.37962	-3.37249
40	-3.71475	-3.38116	-3.37243
80	-3.74979	-3.38005	-3.37228
100	-3.75443	-3.37975	-3.37231
1E3	-3.76287	-3.37910	-3.37370
1E4	-3.76296	-3.37909	-3.37379
1E5	-3.76297	-3.37909	-3.37386
1E6	-3.76427		-3.37015
Placa Fina:-3.3765			

Para o elemento qu09pl os resultados obtidos são os mostrados nas Tabs.26 a 29.

Tab.26-Deslocamento Central.

a/h	M2-7	M2-8	M2-9	M2-10
5	5.05138	4.91191	4.90575	4.90476
20	4.24744	4.12175	4.11625	4.11537
40	4.20722	4.08224	4.07678	4.07590
80	4.19717	4.07236	4.06691	4.06604
100	4.19596	4.07117	4.06573	4.06485
1E3	4.19384	4.06908	4.06364	4.06277
1E4	4.19382	4.06906	4.06362	4.06275
1E5	4.19382	4.06906	4.06362	4.06269
1E6	4.19386	4.06861	4.06287	4.06126
Placa Fina:4.0624				

Tab.27-Momento Normal Central.

a/h	M2-7	M2-8	M2-9	M2-10
5	4.97551	4.82702	4.80333	4.79604
20	4.97081	4.82671	4.80329	4.79603
40	4.97033	4.82652	4.80325	4.79602
80	4.97020	4.82640	4.80321	4.79600
100	4.97019	4.82639	4.80320	4.79600
1E3	4.97016	4.82635	4.80318	4.79598
1E4	4.97016	4.82635	4.80318	4.79598
1E5	4.97016	4.82634	4.80318	4.79591
1E6	4.97012	4.82629	4.80195	4.79456
Placa Fina:4.7887				

Tab.28-Momento Normal no Canto.

a/h	M2-7	M2-8	M2-9	M2-10
5	3.67957	3.33082	3.28984	3.27503
20	3.76404	3.36552	3.29883	3.27840
40	3.77256	3.38827	3.30974	3.28298
80	3.77483	3.39943	3.32127	3.28987
100	3.77511	3.40108	3.32388	3.29217
1E3	3.77559	3.40419	3.33010	3.30016
1E4	3.77559	3.40422	3.33018	3.30029
1E5	3.77559	3.40422	3.33018	3.30026
1E6	3.77575	3.40428	3.32975	3.29966
Placa Fina:3.25				

Tab.29-Esforço Cisalhante no Centro do Lado.

a/h	M2-7	M2-8	M2-9	M2-10
5	-3.93215	-3.53316	-3.43287	-3.40350
20	-3.86927	-3.50479	-3.43180	-3.40410
40	-3.86292	-3.47973	-3.42278	-3.40330
80	-3.86124	-3.46624	-3.40929	-3.39745
100	-3.86103	-3.46417	-3.40588	-3.39481
1E3	-3.86067	-3.46018	-3.39697	-3.38399
1E4	-3.86066	-3.46013	-3.39684	-3.38377
1E5	-3.86066	-3.46013	-3.39678	-3.38375
1E6	-3.86082	-3.46013	-3.39527	-3.38752
Placa Fina:-3.3765				

Novamente, a superconvergência de resultados nodais é notória, tanto para deslocamentos como para esforços. Nas Figs.12a a 12d mostra-se a convergência k para o deslocamento central, momento normal e esforço cisalhante para cada um dos elementos utilizados na análise.

Para verificação desses resultados de placas semi-espessas/espessas simplesmente apoiada, toma-se como referência os valores da Tab.30, coletados de soluções em série e elementos finitos recentemente publicado na literatura. Ótima concordância de valores é observada.

Tab.30-Deslocamento Central.

a/h	FEM ₁	FEM ₂	FEM ₃	FEM ₄	FEM ₅	Série1	Série2
5	4.1007		4.1181			5.4965	4.7564
10	4.0743	4.275	4.0778	5.5460	4.2490	5.4028	4.2353
20	4.0651		4.0659		4.1117	4.2835	4.1034
50	4.0549		4.0595			4.1393	
80						4.1085	
100	4.0540	4.066	4.0567	4.0672	4.0645		4.0604

Sériez-Voyiadjis, G.Z. et. ali., 1985.

Outras Referências iguais à Tab.13

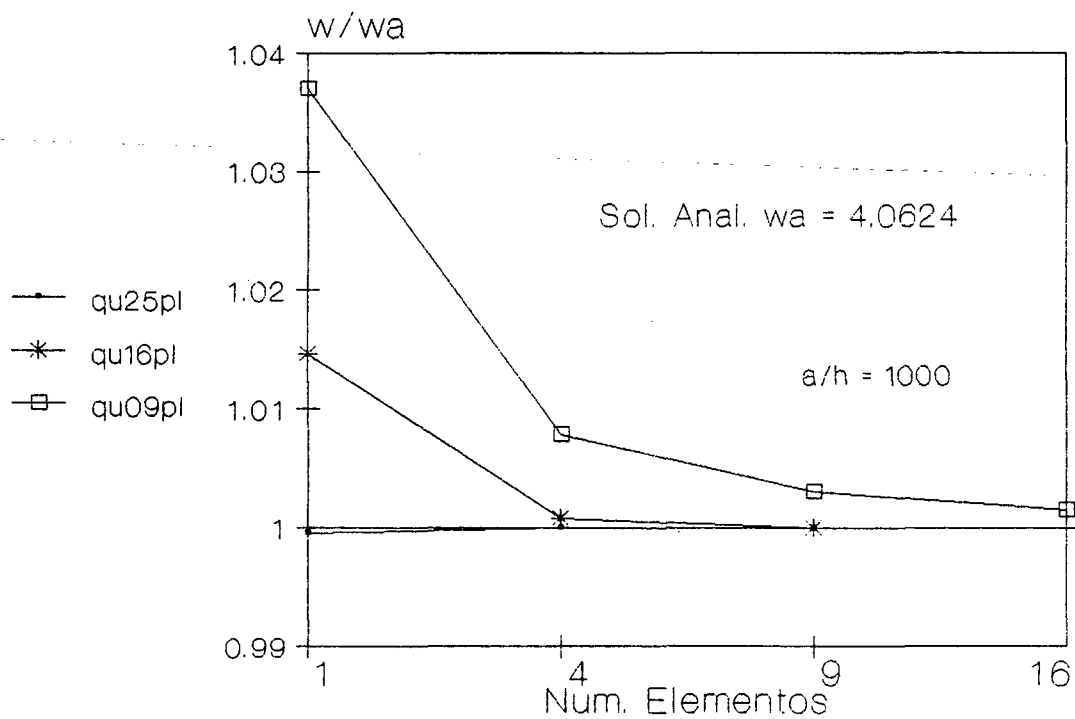


Fig.12a-Convergência k para o deslocamento central.

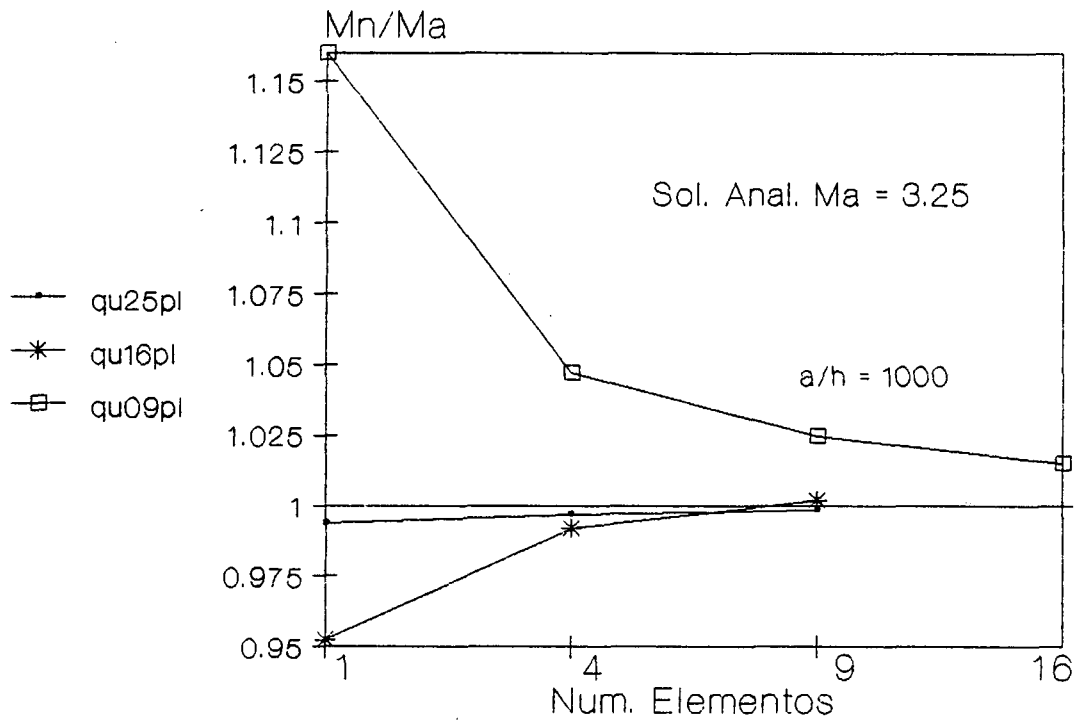


Fig.12b-Convergência k para o momento normal no canto da placa.

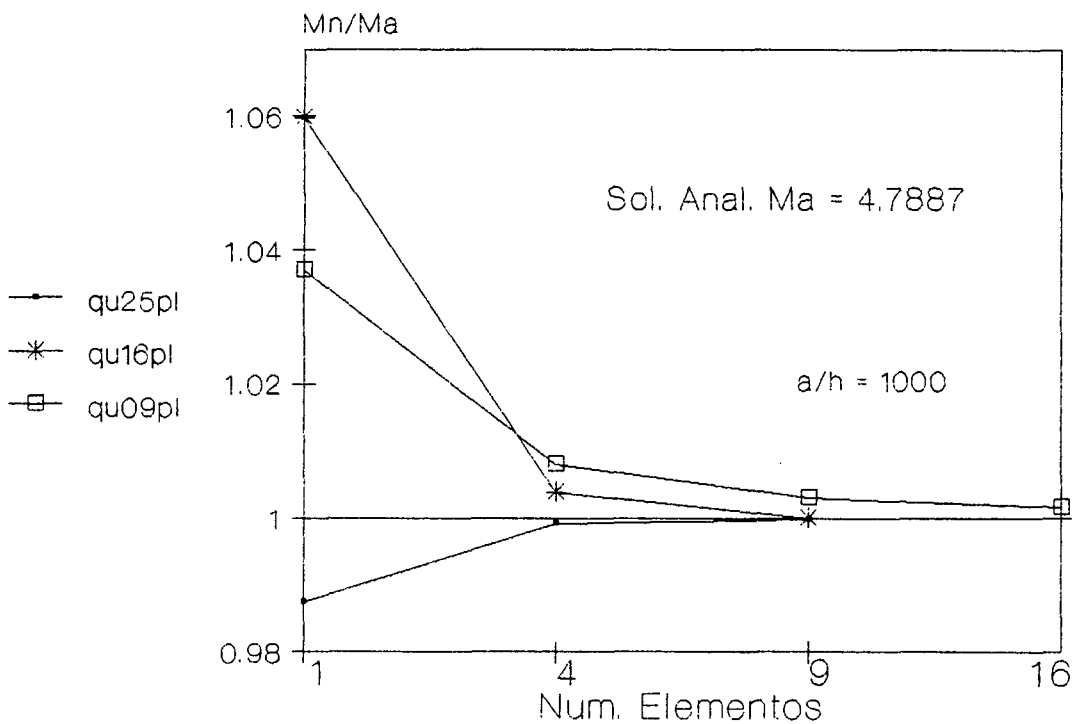


Fig.12c-Convergência k para momento normal no centro da placa.

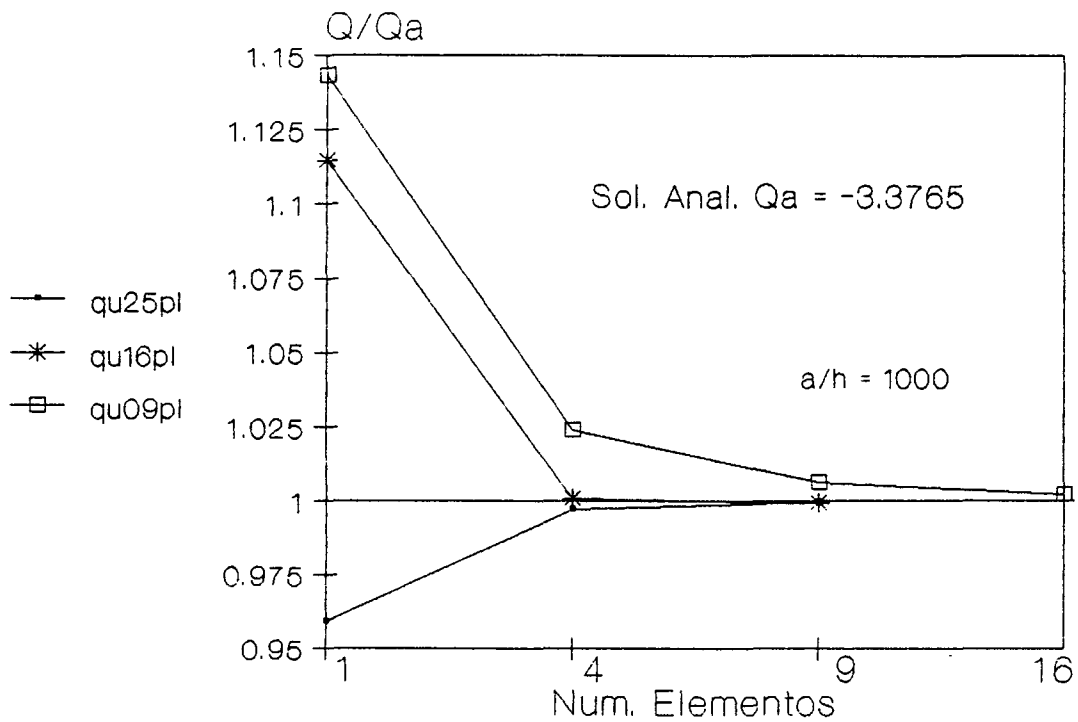


Fig.12d-Convergência k para a força cisalhante no centro do lado.

Novamente, a etapa final de análise do problema é o teste da sensibilidade com relação à distorsão do elemento e são utilizadas as malhas M2-11 a M2-13, iguais às malhas M1-12 a M1-14, respectivamente. Os resultados de deslocamento central, momento e esforço cortante estão mostrados nas Tabs.31 a 34.

Como esperado, o elemento qu_{25pl} é o que apresenta melhor capacidade de assimilar a distorsão dos elementos sem alterações significativas nos resultados obtidos com malha homogênea.

Tab.31-Deslocamento Central.

a/h	M2-11	M2-12	M2-13
5	4.90624	4.90431	4.90431
20	4.11668	4.11495	4.11497
40	4.07705	4.07548	4.07551
80	4.06699	4.06562	4.06564
100	4.06576	4.06444	4.06445
250	4.06387	4.06267	4.06268
500	4.06359	4.06242	4.06243
1E3	4.06352		4.06237
Placa Fina:4.0624			

Tab.32-Momento Central.

a/h	M2-11	M2-12	M2-13
5	4.80943	4.78825	4.78872
20	4.83211	4.78795	4.78859
40	4.90936	4.78507	4.78832
80	5.08393	4.77135	4.78795
100	5.15213	4.76285	4.78783
250	5.35474	4.70099	4.78728
500	5.40234	4.61541	4.78584
1E3	5.41455		4.77924
Placa Fina:4.7887			

Tab.33-Momento Normal no Canto.

a/h	Pto	M2-11	M2-12	M2-13
5	C	3.29545	3.25639	3.25014
	D	3.28307	3.25217	3.24757
20	C	3.30492	3.25534	3.24986
	D	3.36579	3.24653	3.24706
40	C	3.36269	3.25407	3.24942
	D	3.53650	3.23356	3.24593
80	C	3.51241	3.25378	3.24888
	D	3.62032	3.19990	3.32409
100	C	3.57810	3.25424	3.24870
	D	3.58188	3.18177	3.24134
250	C	3.80371	3.27272	3.24791
	D	3.32506	3.05147	3.21830
500	C	3.87163	3.34304	3.24633
	D	3.23017	2.88058	3.13877
1E3	C	3.89256		3.24025
	D	3.20018		2.84261
Placa Fina:3.25				

Tab.34-Esforço Cisalhante no Centro do Lado.

a/h	Pto	M2-11	M2-12	M2-13
5	A	-3.39344	-3.37067	-3.37641
	B	-3.45366	-3.37568	-3.37653
20	A	-2.98183	-3.31188	-3.37510
	B	-3.50342	-3.37914	-3.37650
40	A	-2.28362	-3.14122	-3.37172
	B	-3.65196	-3.39014	-3.37619
80	A	-1.31703	-2.62423	-3.36317
	B	-4.05566	-3.43389	-3.37578
100	A	-1.05653	-2.32502	-3.35803
	B	-4.22932	-3.46923	-3.37582
250	A	-0.55415	-2.84784	-3.29262
	B	-4.72138	-4.11327	-3.37879
500	A	-0.53454	3.09461	-3.08989
	B	-4.79068	-5.87877	-3.39102
1E3	A	-0.55114		-2.54714
	B	-4.79434		-3.44096
Placa Fina:		-3.3765		

5.7.3-VIGA EM BALANÇO.

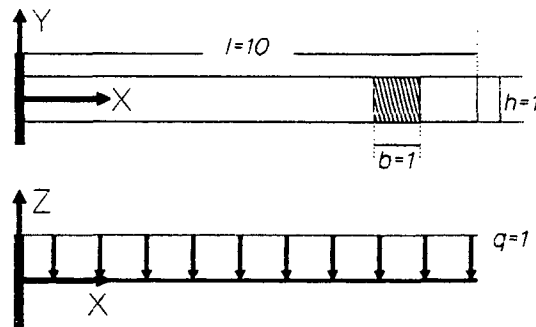
O problema da flexão de vigas em balanço será resolvido com os elementos de placa (qu09pl, qu16pl e qu25pl) com a finalidade de testar a resposta com relação à razão de aspecto entre os lados dos elementos e sua capacidade de assimilar a distorsão da malha sem alterar os resultados da malha homogênea.

A viga considerada é a ilustrada na Fig.13 e é submetida ao carregamento uniforme distribuído, $q(x,y)$. A solução analítica para o deslocamento na sua extremidade livre é:

$$\delta = \frac{q\ell^4}{8EI} [1+2E(\lambda/\ell)^2/5G]$$

onde ℓ , λ , I , E e G representam comprimento, espessura, momento de inércia, Módulo de Young e Módulo de Cisalhamento, respectivamente.

Utilizam-se as malhas M3-1, M3-2 e M3-3, ilustradas na Fig.14, justamente para testar a capacidade de distorsão dos elementos sem alterar os resultados obtidos com malha homogênea.



$E=0.21E7$ $\nu=0.0$ $l=10.0$ $h=1.0$ $q=1.0$ $b=1.0$

Fig.13-Viga em Análise.

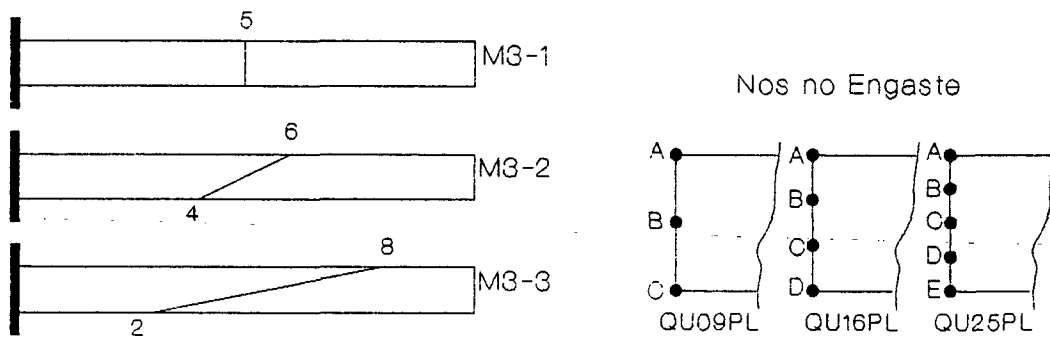


Fig.14-Discretizações da Viga.

Os resultados para o elemento qu09pl são os mostrados nas Tabs.35 a 37.

Tab.35-Deslocamento do Extremo da Viga.

L/h	Pto	M3-1	M3-2	M3-3
10	A	.720000000E-2	.709613815E-2	.692141133E-2
	B	.720000000E-2	.704183852E-2	.667453410E-2
	C	.720000000E-2	.708670337E-2	.699298142E-2
100	A	.714342857E+1	.683500987E+1	.581827413E+1
	B	.714342857E+1	.680907222E+1	.574403122E+1
	C	.714342857E+1	.684241669E+1	.586162975E+1
Sol.Analitica: 7.20E-1 para L/h=10 e 7.143428571E+0 para L/h=100.				

Tab.36-Esforço Cisalhante no Engaste.

L/h	Pto	M3-1	M3-2	M3-3
10	D	-.100000000E+2	.489630172E+2	.626351241E+2
	E	-.100000000E+2	-.100000000E+2	-.100000000E+2
	F	-.100000000E+2	-.689630172E+2	-.826351241E+2
100	D	-.999999999E+1	.127937979E+3	.226267632E+3
	E	-.999999999E+1	-.100000000E+2	-.100000000E+2
	F	-.999999999E+1	-.147937979E+3	-.246267632E+3
Sol.Analítica:-10.0E+0.				

Tab.37-Momento Normal no Engaste.

L/h	Pto	M3-1	M3-2	M3-3
10	D	-.500000000E+2	-.360096113E+2	-.203153585E+2
	E	-.500000000E+2	-.498238735E+2	-.510956606E+2
	F	-.500000000E+2	-.646948945E+2	-.753019988E+2
100	D	-.499999999E+2	-.161507709E+1	.822285286E+2
	E	-.499999999E+2	-.527782949E+2	-.596835933E+2
	F	-.499999999E+2	-.872717431E+2	-.143494155E+3
Sol.Analítica:-50.0E+0.				

Os resultados para o elemento qui6pl são os mostrados nas Tabs.38 a 40.

Tab.38-Deslocamento do Extremo da Viga.

L/h	Pto	M3-1	M3-2	M3-3
10	A	.720000000E-2	.719963417E-2	.7198771210E-2
	B	.720000000E-2	.719999767E-2	.7199408531E-2
	C	.720000000E-2	.720007157E-2	.7200576374E-2
	D	.720000000E-2	.720015800E-2	.7201275867E-2
100	A	.714342863E+1	.714511318E+1	.7144924827E+1
	B	.714342863E+1	.714404230E+1	.7143883851E+1
	C	.714342863E+1	.714293051E+1	.7142957939E+1
	D	.714342863E+1	.714139810E+1	.7141981105E+1
Sol.Analítica: 7.20E-1 para L/h=10 e 7.143428571E+0 para L/h=100.				

Tab.39-Esforço Cisalhante no Engaste.

L/h	Pto	M3-1	M3-2	M3-3
10	A	-.999999920E+1	.327758168E+1	.239051225E+2
	B	-.100000002E+2	-.136338619E+2	-.167374012E+2
	C	-.100000002E+2	-.866700530E+1	-.104430520E+2
	D	-.999999920E+1	-.163749806E+2	-.223637644E+2
100	A	-.999999999E+1	.114800435E+3	.702428543E+2
	B	-.100000000E+2	-.585514059E+2	-.333989411E+2
	C	-.100000000E+2	.162160288E+2	-.706739100E+1
	D	-.999999999E+1	-.677943097E+2	-.288438627E+2
Sol. Analítica:-10.0E+0.				

Tab.40-Momento Normal no Engaste.

L/h	Pto	M3-1	M3-2	M3-3
10	A	-.499999960E+2	-.483947913E+2	-.540056982E+2
	B	-.500000013E+2	-.503941933E+2	-.505422539E+2
	C	-.500000013E+2	-.501397390E+2	-.488747924E+2
	D	-.499999960E+2	-.500034117E+2	-.477431624E+2
100	A	-.499999960E+2	-.600699347E+2	-.504253351E+2
	B	-.500000013E+2	-.519010650E+2	-.540733008E+2
	C	-.500000013E+2	-.449865483E+2	-.486962028E+2
	D	-.499999960E+2	-.492672233E+2	-.412661541E+2
Sol. Analítica:-50.0E+0.				

Os resultados para o elemento qu25pi são os mostrados nas Tabs.41 a 43.

Tab.41-Deslocamento do Extremo da Viga.

L/h	Pto	M3-1	M3-2	M3-3
10	A	.7200000000E-2	.7200000000E-2	.7200000000E-2
	B	.7200000000E-2	.7200000000E-2	.7200000000E-2
	C	.7200000000E-2	.7200000000E-2	.7200000000E-2
	D	.7200000000E-2	.7200000000E-2	.7200000000E-2
	E	.7200000000E-2	.7200000000E-2	.7200000000E-2
100	A	.7143428610E+1	.7143428531E+1	.7143428566E+1
	B	.7143428610E+1	.7143428531E+1	.7143428566E+1
	C	.7143428611E+1	.7143428531E+1	.7143428566E+1
	D	.7143428611E+1	.7143428531E+1	.7143428566E+1
	E	.7143428611E+1	.7143428532E+1	.7143428566E+1
Sol. Analítica: 7.20E-2 para L/h=10 7.143428571E+0 para L/h=100.				

Tab.42-Esforço Cisalhante no Engaste.

L/h	Pto	M3-1	M3-2	M3-3
10	A	-.1000000000E+2	-.1000000000E+2	-.1000000000E+2
	B	-.1000000000E+2	-.1000000000E+2	-.1000000000E+2
	C	-.1000000000E+2	-.1000000000E+2	-.1000000000E+2
	D	-.1000000000E+2	-.1000000000E+2	-.1000000000E+2
	E	-.1000000000E+2	-.1000000000E+2	-.1000000000E+2
100	A	-.1000000007E+2	-.9999999981E+1	-.9999999778E+1
	B	-.1000000004E+2	-.1000000001E+2	-.9999999990E+1
	C	-.1000000003E+2	-.9999999935E+1	-.9999999993E+1
	D	-.1000000003E+2	-.9999999956E+1	-.1000000001E+2
	E	-.1000000000E+2	-.9999999860E+1	-.1000000001E+2
Sol.Analitica: -10.0E+0.				

Tab.43-Momento Normal no Engaste.

L/h	Pto	M3-1	M3-2	M3-3
10	A	-.5000000000E+2	-.5000000000E+2	-.5000000000E+2
	B	-.5000000000E+2	-.5000000000E+2	-.5000000000E+2
	C	-.5000000000E+2	-.5000000000E+2	-.5000000000E+2
	D	-.5000000000E+2	-.5000000000E+2	-.5000000000E+2
	E	-.5000000000E+2	-.5000000000E+2	-.5000000000E+2
100	A	-.5000000000E+2	-.5000000000E+2	-.5000000000E+2
	B	-.5000000000E+2	-.5000000000E+2	-.5000000000E+2
	C	-.5000000000E+2	-.5000000000E+2	-.5000000000E+2
	D	-.5000000000E+2	-.5000000000E+2	-.5000000000E+2
	E	-.5000000000E+2	-.5000000000E+2	-.5000000000E+2
Sol.Analitica:-50.0E+0.				

Novamente, a capacidade de distorsão do elemento qu25pl é excelente e essa característica é deteriorada com o decréscimo da ordem do elemento.

5.7.4-PLACA SIMPLEMENTE APOIADA COM CARREGAMENTO SENOIDAL.

Estuda-se novamente uma placa quadrada, de lado "a", simplesmente apoiada em todos os lados e submetida ao carregamento externo $q(x,y)$ dado por:

$$q(x,y) = \text{sen}(\pi x/a) \text{ sin}(\pi y/a)$$

O objetivo deste exemplo é analisar com mais detalhes a convergência η para placas semi-espessas/espessas. São utilizadas as malhas M4-1, M4-2 e M4-3 para discretizar 1/4 do domínio, conforme a Fig.15, e os resultados de deslocamento central, momento e esforço cortante estão mostrados nas Tabs.44 a 47.

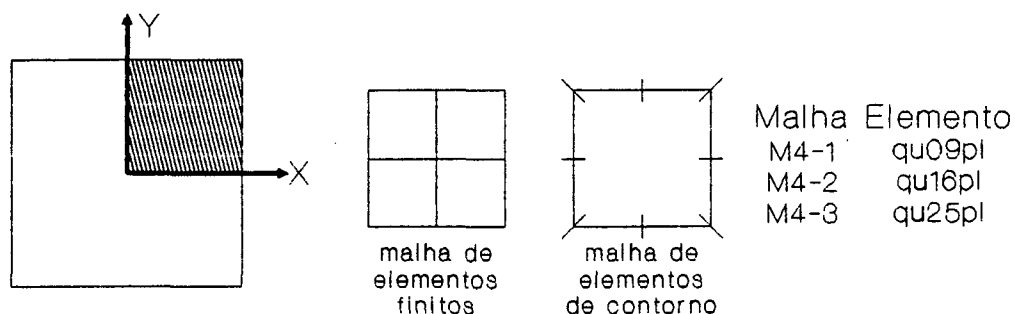


Fig.15-Discretizações do Domínio.

Tab.44- Deslocamento Central Adimensionalizado.

a/h	M4-1	M4-2	M4-3	Série
5	3.14466	3.14593	3.14548	3.14551
10	2.71074	2.71183	2.71124	2.71126
12.5	2.65866	2.65983	2.65914	2.65915
20.0	2.60225	2.60374	2.60269	2.60274
50.0	2.57187	2.57414	2.57230	2.57234
100.0	2.56753	2.57008	2.56795	2.56795
1000.0	2.56610	2.56877	2.56652	2.56657*

Série:Reddy (1988) (*=CPT)

Tab.45-Momento Central.

a/h	M4-1	M4-2	M4-3
5	3.32316	3.29549	3.29283
10	3.32303	3.29909	3.29292
12.5	3.32296	3.30135	3.29299
20.0	3.32277	3.30836	3.29321
50.0	3.32245	3.32388	3.29390
100.0	3.32236	3.32938	3.29426
1000.0	3.32233	3.33166	3.29442

Tab.46-Momento no Canto da Placa

a/h	M4-1	M4-2	M4-3
5	1.81244	1.77366	1.77293
10	1.81687	1.77369	1.77295
12.5	1.81938	1.77364	1.77297
20.0	1.82611	1.77354	1.77304
50.0	1.83697	1.77347	1.77325
100.0	1.83991	1.77348	1.77335
1000.0	1.84103	1.77348	1.77339

Tab.47-Esforço Cisalhante no
Centro do Lado.

a/h	M4-1	M4-2	M4-3
5	-1.65742	-1.59209	-1.59154
10	-1.65202	-1.59462	-1.59155
12.5	-1.64895	-1.59675	-1.59156
20.0	-1.64073	-1.60437	-1.59166
50.0	-1.62746	-1.62314	-1.59232
100.0	-1.62387	-1.62999	-1.59276
1000.0	-1.62251	-1.62286	-1.59299

Admitindo a solução em série como "exata", Reddy (1988), na Tab.44 nota-se a excepcional convergência de todos os elementos para placas semi-espessas/espessas. Por exemplo, para $a/h=10$ a diferença entre a solução "exata" e a apresentada pelo qu09pl (pior resultado) encontra-se no quarto dígito significativo.

Entretanto, para a razão $a/h=100$, o resultado do elemento qu09pl é melhor do que o do qu16pl; repetindo-se para $a/h=1000$. Tal fato pode ser explicado pela sub-integração da parcela de cisalhamento efetuada no qu09pl.

Levando em consideração os resultados de deslocamento, Tab.44, o elemento qu25pl demonstrou ser o melhor dentre os analisados.

5.7.5-PLACA CIRCULAR ENGASTADA.

Outro exemplo para testar a capacidade de distorsão da malha é a análise de placas circulares. Seja a placa circular engastada de raio R , espessura h e submetida ao carregamento uniforme $q(x,y)=1$, cuja solução analítica para o deslocamento central, δ , é:

$$\delta = \frac{R^4}{64D} \left[1 + \frac{8}{3k(1-\nu)} (h/R)^2 \right]$$

com k é o fator de correção da parcela de cisalhamento (Teoria de Mindlin) e $\nu=0.30$.

Devido à simetria do problema, apenas 1/4 do domínio será discretizada com 12 elementos qu09pl e qu25pl, conforme a Fig.16.

Resultados de deslocamento central são mostrados nas Tabs.49 e 50, de esforço cisalhante na Fig.17 e de momento normal no engaste na Fig.18.

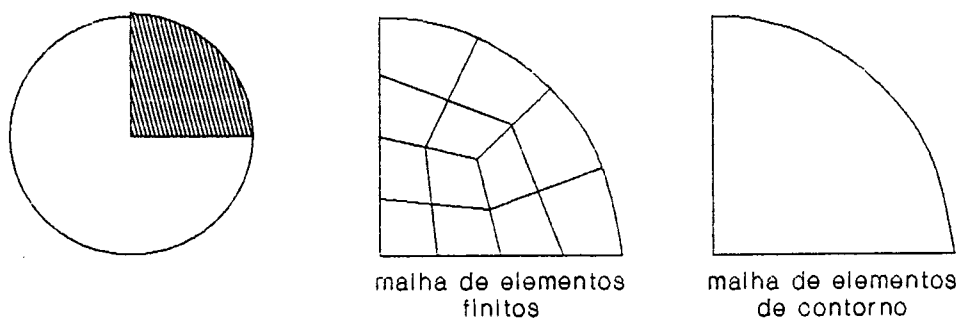


Fig.16-Discretizações do Domínio e-Contorno.

Tab.49-Deslocamento Central Adimensionalizado.

R/h	Sol.Analítica	qu09pl	qu25pl
5	1.182857	1.181965	1.182867
20	1.011428	1.010536	-
40	1.002857	1.001858	-
50	1.001835	-	1.001836
80	1.000714	0.999624	-
100	1.000457	0.999350	1.000467
250	1.000073	0.998935	1.000083
500	1.000018	0.998875	1.000025

Adimens.- $w^* = 64D w_{max}/qR^4$.

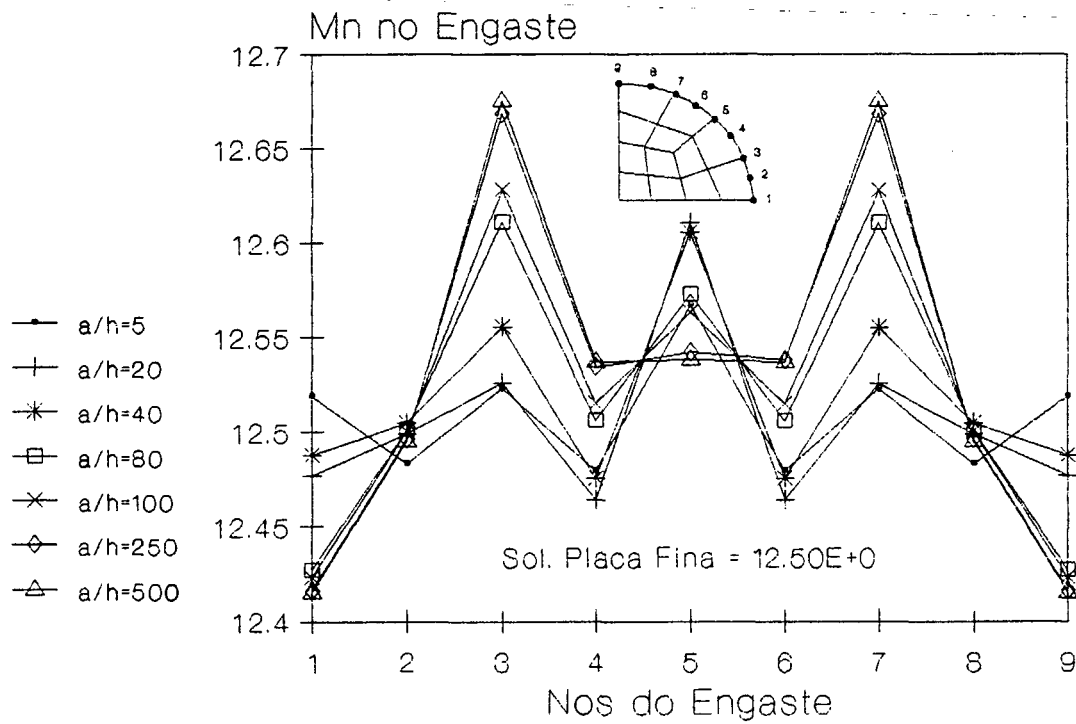
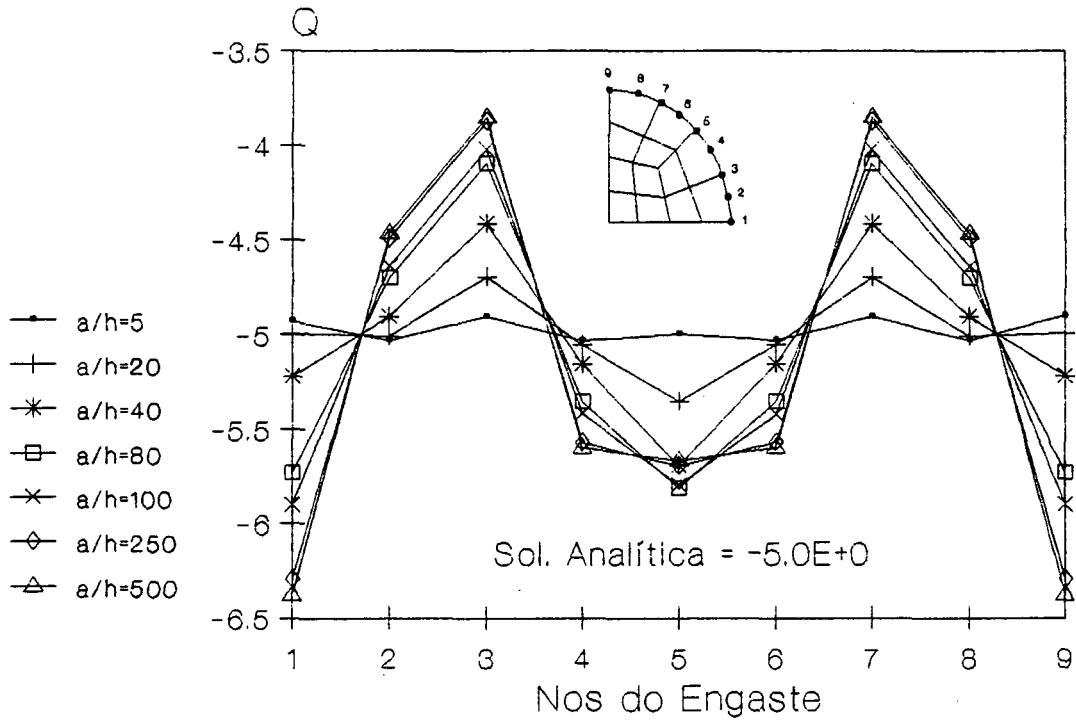


Fig.17-Esforço Cortante e Momento no Engaste para o qu09pl.

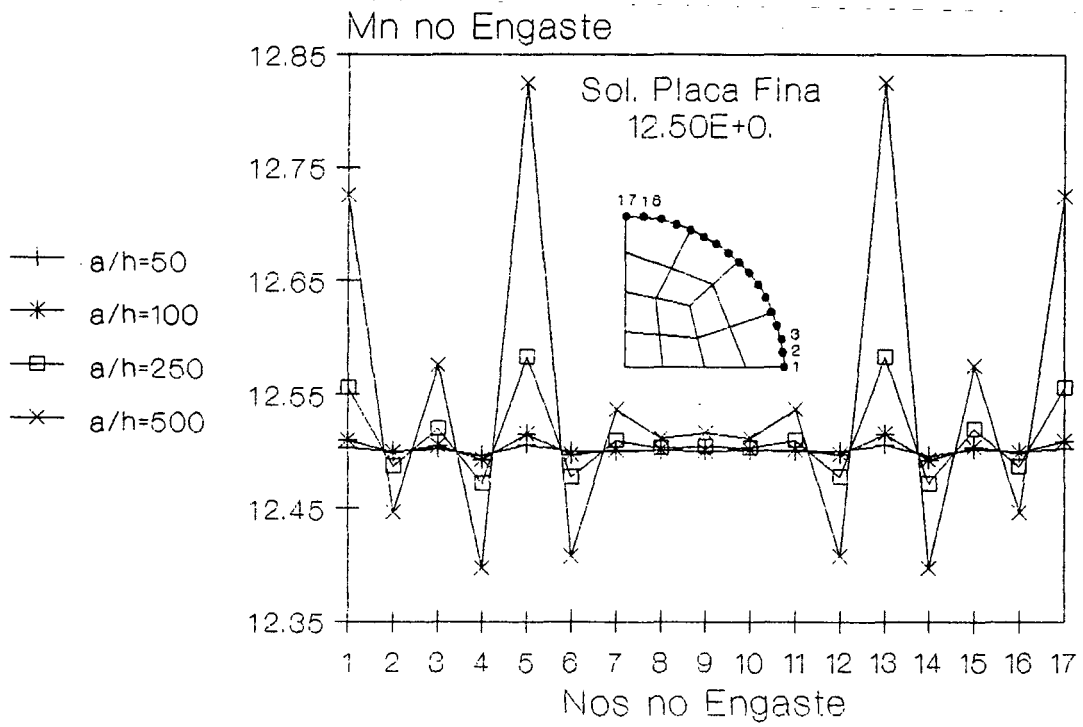
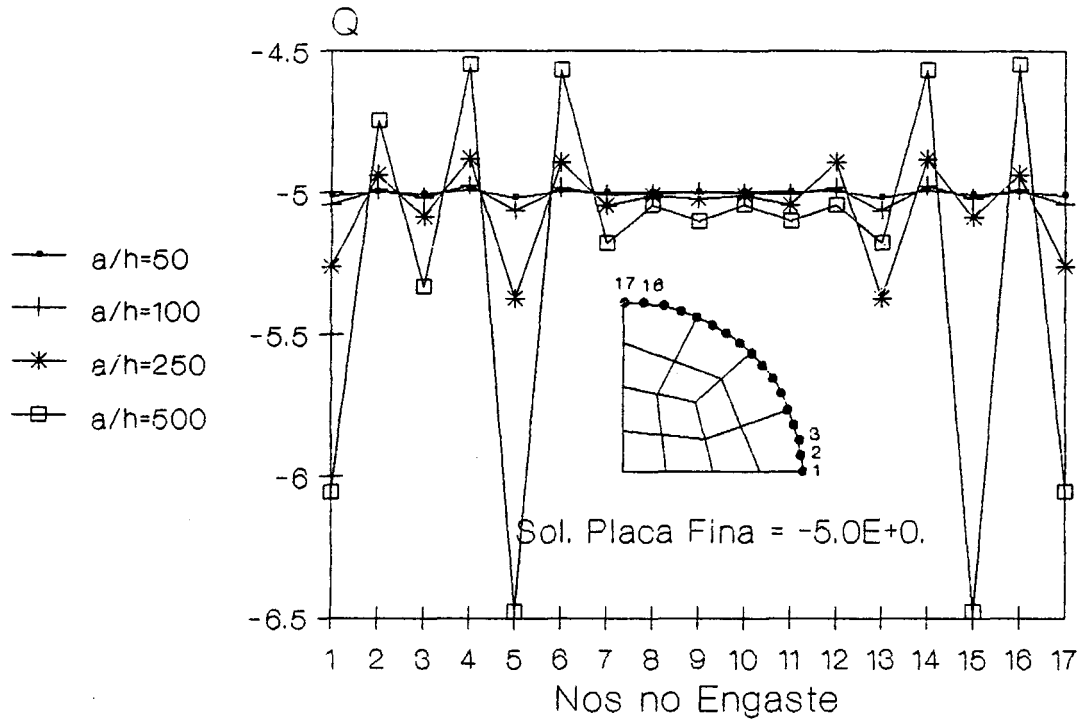


Fig.18-Esforço Cortante e Momento para o qu25pl.

Tab.50-Deslocamento Central Adimensionalizado para $R/h=100$ e malha com 12 elementos.

Elemento	Deslocamento	Erro %
qu09pl-MLGFM	0.999350	0.110E+0
qu25pl-MLGFM	1.000467	2.745E-4
MITC4-FEM ₁	0.948	5.243E+0
MITC8-FEM ₁	0.997	0.345E+0
MITC9-FEM ₁	0.998	0.245E+0
CRB1-FEM ₂	1.049224	4.874E+0
CRB2-FEM ₂	1.133619	1.331E+1
S1-FEM ₂	0.914496	8.592E+0

FEM₁- Bathe, Brezzi & Cho. 1987.

FEM₂- Weissman & Taylor. 1990.

Como já foi comentado anteriormente e previsto, a oscilação do momento e esforço cisalhante no engaste é bem visível e o elemento qu25pl apresenta melhor capacidade de absorver as distorsões da malha.

Entretanto, os resultados do qu09pl também podem ser considerados ótimos. Note que, por exemplo, na Tab.50 a performance do qu09pl é superior à de todos os elementos finitos (modernos) tomados como referências. O elemento MITC9 também tem 9 nós, porém o erro percentual em deslocamento é maior que duas vezes o erro percentual obtido pelo qu09pl.

Com relação ao qu25pl, não bastasse a pouca sensibilidade à distorsão, os resultados mostrados na Tab.50 são excepcionais.

4.7.6-O ELEMENTO LINEAR (qu04pl).

Mesmo apresentando resultados razoáveis para deslocamentos, o elemento linear qu04pl pode ser considerado de baixa performance, pois, os momentos e esforços cortantes são mal representados. Para demonstrar estes fatos, o problema da placa quadrada engastada e submetida a carregamento externo uniforme é resolvido com malha a homogênea de 4×4 elementos qu04pl (número total de nós = 25). Os resultados mostrados na Tab.51 para o elemento qu25pl são para a malha de 1×1 elemento (25 nós).

Tab.51-Comparação: qu04pl x qu25pl para o mesmo número de nós.

a/h	Ref.	$w_{max.}$	Mc	Mcl	Qcl
5	qu04pl	2.17419	1.38169	2.86683	-2.91109
	qu25pl	2.17119	2.36329	4.51625	-3.80538
100	qu04pl	1.25701	1.20562	2.69356	-2.69140
	qu25pl	1.25959	2.17440	5.04488	-4.15687
	CPT	1.265	2.31	5.13	

Mc=Momento Central Mcl=Momento no Centro do Lado
Qcl=Cortante no Centro do Lado

4.7.7-PLACA DE MORLEY (LOSANGO).

O exemplo final é a análise da placa de Morley engastada, de lado "2a", espessura "h" e submetida ao carregamento constante $q(x,y)$, conforme a Fig.19.

O problema é resolvido com malhas homogêneas de elementos quadráticos e os resultados comparativos com o "Heterosis" (Butalia; Kant & Dixit, 1990) são mostrados na Fig.20, de onde nota-se a excepcional performance do MLGFM.

Ainda, na Fig.20, as soluções obtidas com o "Heterosis" são para $2a/h=100$; a solução analítica é a da teoria de placas finas e as soluções MLGFM-100 e MLGFM-500 são as obtidas com o MLGFM para as razões $2a/h=100$ e 500, respectivamente.

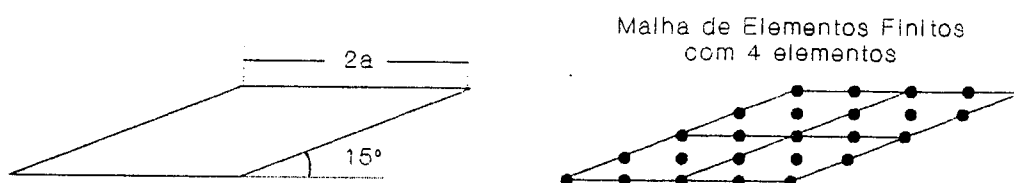


Fig.19-Placa de Morley Engastada Discretizada com Malha Homogênea

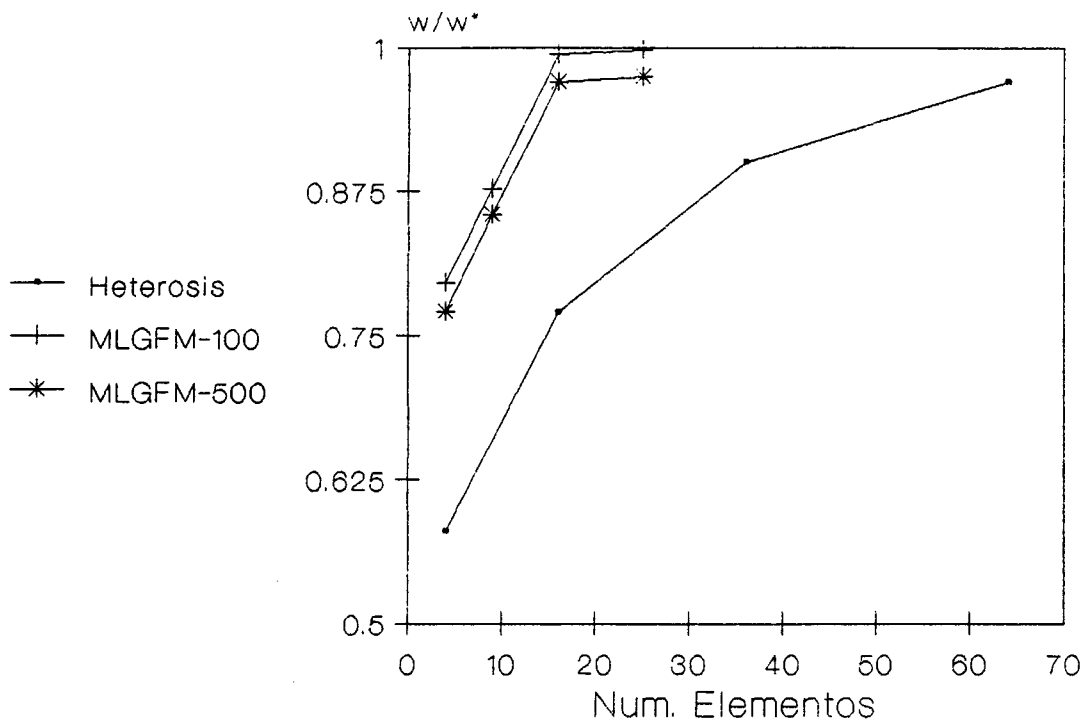


Fig.20-Comparativo MLGFM(qu09pl) \times FEM(Heterosis).

4.8-CONCLUSÕES.

Das aplicações anteriores conclui-se:

1-Mesmo usando elementos finitos com formulações de deslocamento, o fenômeno do travamento (locking) não foi verificado para nenhum dos elementos;

2-Para deslocamento, a distorsão da malha não é tão significativa quanto para momentos e forças cisalhantes. Com o acréscimo da ordem do elemento a sensibilidade à distorsão é reduzida;

3-A superconvergência nodal de deslocamentos e esforços é marcante;

4-As comparações FEM \times MLGFM mostram claramente a superioridade dos resultados obtidos com o MLGFM;

5-A convergência δ (pontual) pode ser considerada excepcional;

6-Além da pouca sensibilidade à distorsão para os elementos de ordem superior, um aumento na ordem do elemento também indica uma sensível diminuição nos erros pontuais (deslocamento e esforços).

4.9-REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- Akhtar, M.N. & Basu, P.K. (1991).
A New p-Version General Plate Finite Element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.85, pg.219-236.
- Barbieri, R. & Barcellos, C.S. (1991)
A Modified Local Green's Function Technique for the Mindlin's Plate Problem. *Proc. 13th. Int. Conf. Boundary Element Technology*, (Ed. Brebbia, C.A. & Gipson, G.).
- Bathe, K.J.; Brezzi, Franco & Cho, S.W. (1989).
The MITC7 and MITC9 Plate Bending Elements. *Computers & Structures*, Vol.32 (3/4), pg. 797-814.
- Butalia, T.S.; Kant, T. & Dixit, V.D. (1990).
Performance of Heterosis Element for Bending of Skew Rhombic Plates. *Computers & Structures*, Vol.34 (1), pg.23-49.
- Dill, E.H. (1990).
A Triangular Finite Element for Thick and Thin Plate. *Computers & Structures*, Vol. 35(4), pg.301-308.
- Deshmukh, R.S. & Archer, R.R. (1974).
Numerical Solution of Moderately Thick Plates. *J. Eng. Mech. Division, Proc. ASCE*, Vol. 100 (EM5), pg.903-917.
- Donea, J. & Belystchko, T. (1989).
Advances in Computational Mechanics. *Proc. SMiRT Conferences*, pg. 71-102.

- Felippa, C.A. & Militello, M.M. (1989).
Developments in Variational Methods for High Performance of Plate and Shell Elements. In Analytical and Computational Models of Shells, CED-Vol.3, ASME, (Ed. Noor, A.K.; Belytschko, T. & Simo, J.C.)
- Hughes, J.R.T. & Franca, P.L. (1988).
A Mixed Finite Element Formulation for Reissner-Mindlin Plate Theory: Uniform Convergence of all Higher-Order Spaces. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.67, pg.223-240.
- Jaswon, M.A. & Maiti, M. (1968)
An Integral Equation Formulation of Plate Bending Problems. J. Engng. Math., 2, pg.83-93.
- Petrolito, J. (1990).
Hybrid-Trefftz Quadrilateral Elements for Thick Plate Analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.78, pg.331-351.
- Van der Weeën, F. (1982)
Application of the Boundary Element Method to Reissner's Plate Model. Int. J. Num. Meth. Eng., 18, pg.1-10.
- Voyiadjis, G.Z.; Asce, M.; Baluch, M.H. & Chi, W.K. (1985).
Effects of Shear and Normal Strain on Plate Bending. J. Eng. Mech. Division, Proc. ASCE, Vol. 111 (9), pg.1130-1143.
- Voyiadjis, G.Z. & Pecquet Jr., R.W. (1987).
Isotropic Plate Elements with Shear and Normal Strain Deformations. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.24, pg.1671-1695.
- Yuan, F.G. & Miller, R.E. (1989)
A Cubic Triangular Finite Element for Flat Plates with Shear. Int. J. Num. Meth. in Eng., Vol.28, pg.109-126.

- Yuan, F.G. & Miller, R.E. (1988).
A Rectangular Finite Element for Moderately Thick Flat Plates. *Computers & Structures*, Vol.30 (6), pg.1375-1387.
- Weissman, S.L. & Taylor, R.L. (1990).
Resultant Fields for Mixed Plate Bending Elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.79, pg.321-355.
- Reddy, J.N. (1984)
Energy and Variational Methods in Applied Mechanics. John Wiley & Sons.
- Matsumoto, T.; Tanaka, M. & Hondoh, K. (1991)
A New Regularized Boundary Integral Formulation for Thin Elastic Plate Bending Analysis. *Proc. XIII International Conference on Boundary Element Methods*. pg 523-533. Ed. C.A. Brebbia & C.S. Gipson.
- Silva, L.H.M. (1988).
Novas Formulações Integrais para Problemas da Mecânica. Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina (Ph.D. Thesis).

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES FINAIS E SUGESTÕES.

Em todos os problemas estudados neste trabalho (potencial, elastoestática e placa de Mindlin), duas características sempre foram observadas:

1-A superconvergência nodal de "deslocamento" e "força" (para os problemas de potencial também verificou-se a superconvergência na norma da energia do erro), e

2-O acréscimo da ordem dos elementos contribui sensivelmente para a redução do erro pontual (no caso de potenciais, um acréscimo na ordem do elemento proporciona, pelo menos, uma redução de 10 vezes no erro pontual).

Devido a estes dois fatores, recomenda-se para futuros trabalhos o estudo matemático detalhado do MLGFM com intuito de explicar esta superconvergência e implementar versões η -adaptativas para o método. Para tornar a versão η -adaptativa ainda mais atraente, para os problemas de placas o aumento na ordem do elemento é responsável pela diminuição da sensibilidade com relação à distorsão da malha.

Atualmente, um dos grandes inconvenientes do MLGFM é com relação ao tempo de processamento gasto na aproximação das projeções da Função de Green. Neste sentido, o Método HRZ foi aplicado com bastante sucesso para os problemas de potencial e o

desenvolvimento de algoritmos para explorar este fato também é altamente recomendado.

Outra técnica que também contribuirá para o desenvolvimento do MLGFM é o uso de subestruturas. Como os valores de "fluxo" no domínio são calculados com as funções de interpolação de elementos finitos, com o uso desta técnica a expectativa é a de aumentar sensivelmente a precisão destes cálculos.

Explorando outra característica do método, i.é, a aproximação da Função de Green para os problemas onde não existe uma solução fundamental, o estudo de cascas genéricas e dos problemas de não homogeneidade das propriedades físicas do meio também são ótimas recomendações para futuros trabalhos.

Para análise não linear recomenda-se, primeiramente, a obtenção de "forças" precisas no domínio e depois explorar todos os aspectos de superconvergência do método. Entretanto, nada impede o uso dessa técnica associada ao FEM para o cálculo dessas "forças".

Finalmente, o MLGFM pode ser considerado um método bastante eficiente para solução de problemas do meio contínuo e novos investimentos são necessários para o seu aperfeiçoamento e perfeita compreensão matemática.