

Universidade Federal de Santa Catarina  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Adaptatividade  $h$  na Otimização Topológica  
e Projeto Ótimo de Malhas  $hp$  Adaptativas

Dissertação submetida à Universidade Federal de  
Santa Catarina para obtenção do grau de  
Mestre em Engenharia Mecânica

**Antonio André Novotny**

Florianópolis, junho de 1998

Adaptatividade  $h$  na Otimização Topológica e Projeto Ótimo  
de Malhas  $hp$  Adaptativas

**Antonio André Novotny**

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

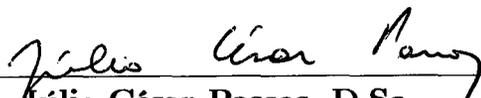
**Mestre em Engenharia**

Especialidade Engenharia Mecânica, área de concentração Projeto e  
Análise de Componentes Mecânicos, e aprovada em sua forma final pelo  
curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica



---

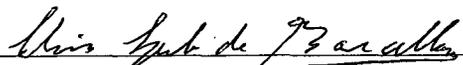
**Eduardo Alberto Fancello, D.Sc.**  
Orientador do Trabalho



---

**Júlio César Passos, D.Sc.**  
Coordenador do Curso

**Banca Examinadora**



---

**Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D.**  
Presidente da Banca



---

**José Eduardo Souza de Cursi, D.Sc.**



---

**Acires Dias, Dr.Eng.Mec.**

## Agradecimentos

Ao Prof. Eduardo Alberto Fancello pela confiança, orientação, paciência e conhecimentos transmitidos, não somente no decorrer do desenvolvimento deste trabalho, mas sobretudo nos mais variados aspectos de minha vida. Obrigado Fancello, você que é acima de tudo um grande amigo, um irmão mais velho.

Ao Prof. Clovis Sperb de Barcellos pela *alfabetização* e pelos conselhos e orientação que transcenderam os limites da minha formação acadêmica.

Ao Prof. José Eduardo Souza de Cursi que me acolheu durante a etapa que foi talvez a mais importante da minha vida.

Ao Prof. Acires Dias por aceitar o desafio de compor a banca de defesa deste trabalho.

Ao amigo Jucélio Tomás Pereira quem primeiro me deu créditos, confiança e liberdade para trabalhar nesta área do conhecimento.

A todos os amigos do GRANTE - Nichele, Celso já paguei, Cristian High Lander, Fabrício, Fogginho, Ivan, Juanito, Karina, Prof. Lauro, Marco Ipira, Mineiro, Pablito, Rato, Sandroca, Sérgio, Tancredo, Vinadé, Yuji GJD e inclusive àqueles que esqueci de mencionar, pelo agradável e discontraído ambiente de trabalho proporcionado.

Ao Grupo de Desenvolvimento de Software em Engenharia Mecânica do Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC/CNPq) pela permissão de utilizar as bibliotecas do ACDPOOP e ACDPFEM para desenvolvimento deste trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro concedido a esta pesquisa através da bolsa de estudos, indispensável para realização deste trabalho e ao CNPq pelos três anos de bolsa de Iniciação Científica concedida durante a graduação, vitais para direcionar meus passos na mais nobre das faculdades humana: a pesquisa.

Ao GRANTE, enfim, pela liberdade.

Quero agradecer em especial à Vanessinha pela paciência, compreensão e sobretudo pelo carinho durante esses anos todos. Obrigado Vanessinha por ser tão especial. Também agradeço pelas valiosas correções ortográficas, as quais contribuíram enormemente para preservar a qualidade deste trabalho.

A meus pais pelo equilíbrio e força que me estimularam durante todos os passos da minha vida, e que se constituíram num modelo de valores que sempre me guiará.

## Resumo

No presente trabalho são desenvolvidos dois temas centrais naturalmente complementares, quais sejam: adaptatividade  $h$  na otimização topológica e projeto ótimo de malhas  $hp$  adaptativas.

Em primeiro lugar, a estratégia  $h$  adaptativa do Método dos Elementos Finitos é utilizada como ferramenta no problema de otimização topológica em elasticidade plana. Para determinação da topologia ótima, é imposto um critério de massa mínima, sujeito a restrições de falha plástica baseada no critério de von Mises. Através da formulação adotada é possível caracterizar a topologia ótima da peça por uma carta de espessura  $\rho$ , a qual é obtida mediante a resolução numérica de uma equação não-linear. A idéia básica do método consiste em determinar a espessura ótima da peça  $\rho^*$  de modo que, para  $\rho > 0$ , tem-se uma saturação do critério de von Mises, caso contrário, ou seja para  $\rho = 0$ , tem-se as cavidades (Souza de Cursi, 1994 e 95). Com o intuito de obter uma melhor representação da geometria no processo iterativo de otimização, é realizado um refinamento  $h$  adaptativo no contorno da peça otimizada, de modo a chegar à forma final do componente, sem a necessidade de fazer algum tipo de pós-processamento da solução. O refinamento local da malha é desencadeado por intermédio de uma modificação no estimador de erro de Zienkiewicz & Zhu (1987). Para verificar tanto a formulação aqui desenvolvida como o algoritmo implementado, é feita uma análise dos resultados obtidos mediante a resolução numérica de alguns exemplos clássicos.

Em seguida, o projeto ótimo de malha  $hp$  adaptativa é realizado mediante um critério de minimização do número de equações para um dado limite de erro especificado. Sendo assim, nesta etapa do trabalho as técnicas de otimização são utilizadas como ferramenta no projeto de malhas  $hp$  adaptativas. Essa nova abordagem conduz a um problema de busca do ótimo, no qual os parâmetros  $h$  e  $p$  da malha aparecem explicitamente nas equações. É desenvolvido um algoritmo de otimização fundamentado nesse critério, o qual culmina na resolução aproximada de uma equação algébrica não-linear que fornece os valores ótimos dos parâmetros  $h$  e  $p$ , de modo a tornar possível a projeção simultânea de ambos os

parâmetros. Esta metodologia é aplicada na resolução aproximada de vários problemas elípticos de valor no contorno uni-dimensionais.

Como os dois temas abordados neste trabalho são naturalmente complementares, ao final são discutidas formas de acoplar ambas metodologias de modo a melhorar, tanto a geometria da estrutura otimizada, como o campo de tensões obtido numericamente.

## Abstract

*In this work, one discusses two naturally complementary topics:  $h$  adaptive in the topological optimization and an optimum design of  $hp$  adaptive meshes.*

*Firstly, a feasible way to obtain the optimum topology of a two dimensional elastic component under geometrical and mechanical constraints is used (Souza de Cursi, 1994 e 95). In this approach, the topology is characterized by an unknown thickness map  $\rho$  which is explicitly detached from equilibrium equations in order to use it as design variable. The problem formulation is based on the idea that the optimal topology is obtained when a minimum mass criterion, subjected to a von Mises plastic collapse constraint, is satisfied. This leads to a non-linear equation on  $\rho$  whose solution is an optimal thickness distribution  $\rho^*$ . In the case of  $\rho > 0$  one has a fully stressed design condition. Otherwise, i.e.  $\rho = 0$ , one has cavities. The aim of this part of the work is the proposition of an  $h$  adaptive procedure as a straightforward technique to obtain a better geometrical representation within topological optimization. In this context, a modification of Zienkiewicz & Zhu (1987) error estimator is also proposed to guide the refinement of the mesh.*

*Soon after, an optimum design of  $hp$  adaptive meshes is accomplished by means of a minimization criteria of the number of equations for a given limit of specified error. Thereby, in this stage of the work, the optimization techniques are used as tool in the design of  $hp$  adaptive meshes. This new approach leads to a problem in which the parameters  $h$  and  $p$  of the mesh appear explicitly in the equations. The optimal conditions leads to the resolution of a non-linear algebraic equation that simultaneously supplies the optimum values of the parameters  $h$  and  $p$ . The methodology here developed is applied in the numerical resolution of several unidimensional elliptical boundary value problems.*

*Since the two topics presented in this work are naturally complementary, some discussions about forms of coupling both methodologies in order to improve geometry as well as numerical stress fields, are presented.*

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Método dos Elementos Finitos . . . . .	2
1.2	Otimização Estrutural . . . . .	4
1.3	Objetivos do Trabalho . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Formulação de Equilíbrio em Elasticidade Linear</b>	<b>9</b>
2.1	Equilíbrio em Elasticidade Tridimensional . . . . .	9
2.2	Estado Plano de Tensões . . . . .	14
2.3	Aproximação via Método dos Elementos Finitos . . . . .	16
2.4	Discretização das Equações de Estado Plano de Tensões . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Estratégias Adaptativas &amp; Estimadores de Erro</b>	<b>20</b>
3.1	Estratégias Adaptativas . . . . .	20
3.1.1	Versão $r$ . . . . .	21
3.1.2	Versão $s$ . . . . .	21
3.1.3	Versão $h$ . . . . .	21
3.1.4	Versão $p$ . . . . .	22
3.1.5	Versão $hp$ . . . . .	23
3.2	Estimadores de Erro . . . . .	23
3.2.1	O Estimador de Erro de Zienkiewicz & Zhu . . . . .	24
3.2.2	Estimativa do Erro Utilizando uma Análise Assintótica . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Bases Hierárquicas no Método dos Elementos Finitos</b>	<b>28</b>
4.1	Consequências do Uso de Bases Hierárquicas . . . . .	28

4.2	Escolha do Espaço de Elementos Finitos . . . . .	30
4.2.1	Base Hierárquica Unidimensional . . . . .	30
4.2.2	A Base Hierárquica para Triângulo de Webb & Abouchacra . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Um Problema de Massa Mínima</b>	<b>34</b>
5.1	Formulação Matemática do Problema . . . . .	34
5.2	Algoritmo para Cálculo da Carta de Espessura . . . . .	37
5.3	Identificação das Cavidades . . . . .	38
5.4	Resultados Numéricos . . . . .	39
5.4.1	Barra Submetida a Tração Simples . . . . .	39
5.4.2	Viga Curta Simplesmente Apoiada . . . . .	40
5.5	Comentários Adicionais . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Estratégia <math>h</math> Adaptativa na Otimização Topológica</b>	<b>42</b>
6.1	O Estimador $Z^2$ Modificado no Problema de Otimização Topológica . . . . .	42
6.2	Carta de Espessura Binária . . . . .	44
6.3	Algoritmo para Identificação da Nova Geometria . . . . .	45
6.4	Resultados Numéricos . . . . .	46
6.4.1	Projeto de uma Barra . . . . .	46
6.4.2	Projeto de uma Viga Curta . . . . .	49
6.4.3	Projeto de uma Treliça Plana . . . . .	52
6.4.4	Projeto de uma Viga . . . . .	55
6.4.5	Projeto de uma Bicicleta . . . . .	59
6.5	Comentários Adicionais . . . . .	65
<b>7</b>	<b>Projeto Ótimo de Malhas <math>hp</math> Adaptativas</b>	<b>67</b>
7.1	Projeto da Malha Ótima . . . . .	68
7.1.1	Malha $h$ . . . . .	71
7.1.2	Malha $p$ . . . . .	72
7.1.3	Malha $hp$ . . . . .	73

7.2	Um Refino <i>hp</i> Adaptativo . . . . .	79
7.2.1	Problemas Regulares ( $s \geq 1$ ) . . . . .	80
7.2.2	Problemas Singulares ( $0 < s < 1$ ) . . . . .	80
7.2.3	Algoritmo de Refinamento <i>hp</i> . . . . .	82
7.3	Resultados Numéricos . . . . .	83
7.3.1	Exemplo 1 . . . . .	84
7.3.2	Exemplo 2 . . . . .	85
7.3.3	Exemplo 3 . . . . .	87
7.4	Comentários Adicionais . . . . .	90
<b>8</b>	<b>Aspectos Computacionais</b>	<b>92</b>
8.1	Programação Orientada a Objetos . . . . .	92
8.2	ACDPOOP & ACDPFEM, 2D ARANHA e ACDPTOP . . . . .	94
<b>9</b>	<b>Conclusões Finais &amp; Sugestões</b>	<b>96</b>
9.1	Conclusões Finais . . . . .	96
9.2	Sugestões . . . . .	97

# Capítulo 1

## Introdução

Classicamente, no processo de concepção de um novo produto o projetista tem se amparado, quase unicamente, na própria intuição e experiência adquirida na solução de outros problemas caracterizando, portanto, um processo de tentativa e erro onde a evolução é extremamente lenta. Em técnicas mais modernas, busca-se sistematizar a atividade de projeto através de alguma metodologia. Neste sentido, as técnicas de otimização mostram-se particularmente atraentes visto que, através delas muitas vezes é possível formular matematicamente um problema de busca de soluções que sejam, segundo algum critério, melhores dentre as diversas possíveis.

Mais especificamente, no contexto de otimização estrutural, uma questão de grande importância na concepção de componentes e/ou sistemas mecânicos destinados a transmitir esforços entre dois ou mais pontos, é a capacidade de obter automaticamente a topologia <sup>1</sup> ótima dos mesmos, respeitando certos critérios de geometria e resistência mecânica. Por razões de custos, necessita-se determinar morfologias que conduzam a peças de alta resistência de maneira a empregar o mínimo material possível através de uma adequada distribuição de tensões. Assim, uma etapa que precede o processo de otimização estrutural, consiste na determinação das tensões que atuam no componente mecânico.

A formulação matemática para problemas de análise de tensões envolve equações de equilíbrio, equações constitutivas, relações deformação-deslocamento e condições de contorno. Soluções analíticas para estas equações muitas vezes são impraticáveis quando

---

<sup>1</sup>A palavra *topológica* aqui utilizada, é a terminologia já consagrada que descreve a *morfologia* viável de um componente estrutural, não se referindo ao termo utilizado no contexto matemático de Análise Funcional.

aplicadas a situações físicas reais devido às complexidades de geometria, carregamento, condições de contorno, etc. Nesses casos, portanto, é mais viável o uso de métodos numéricos para a obtenção de uma solução aproximada para estes problemas. Dentre outros, o mais difundido atualmente é o Método dos Elementos Finitos (MEF), o qual está fundamentado na discretização do meio contínuo, cuja essência consiste em colocar as equações escritas na forma diferencial ou abstrata (funcionais contínuos) em termos de um conjunto de equações algébricas de valores discretos. Em síntese, o meio contínuo é aproximado por um modelo discreto.

## 1.1 Método dos Elementos Finitos

O nome Elementos Finitos, que identifica o uso preciso da metodologia geral aplicável a sistemas discretos, foi dado por Clough em 1960. Os primeiros trabalhos foram realizados na década de 50 em que as equações algébricas eram escritas em forma matricial, a partir de uma abordagem vetorial para satisfazer as equações de equilíbrio. Esta abordagem é denominada direta e só é aplicável a problemas extremamente simples. Destaca-se, neste sentido, o trabalho pioneiro de Turner, Clough, Martin & Topp, datado de 1956. Uma outra notável publicação é o trabalho de Argyris & Kelsey, apresentado em 1960. Ao contrário do anterior, este é fundamentado em princípios energéticos para satisfazer as equações de equilíbrio. Esta outra abordagem foi denominada forma fraca ou global das equações de equilíbrio e estendeu a aplicabilidade do método a problemas mais complexos que os solucionados pela abordagem direta. Tais publicações uniram os conceitos de análise estrutural e mecânica do contínuo, e lançaram os procedimentos resultantes na forma matricial. Desta maneira, as equações passaram a ser escritas em notação matricial e resolvidas em computadores digitais, estabelecendo um marco no desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos.

A partir da década de 60, o MEF foi reconhecido como um método eficiente e confiável e tornou-se uma respeitável área de estudo acadêmico, conquistando, também, um merecido espaço na indústria. Esse fato estimulou a pesquisa, que, a partir de então, se desenvolveu

nas seguintes áreas (Muñoz, 1994):

- O MEF foi reformulado como um caso particular do Método dos Resíduos Ponderados (ver por exemplo Hughes, 1987);
- Desenvolveu-se uma grande variedade de formulações para elementos, tais como a isoparamétrica e a hierárquica. Na primeira é utilizada a mesma base de funções de interpolação para aproximar a variável de interesse e a geometria do problema. Já na segunda, *i.e.*, na hierárquica, tem-se que cada conjunto de funções relativo a uma determinada ordem de aproximação está contido nos conjuntos subsequentes, ou de maior ordem;
- Aplicabilidade do método para várias classes de fenômenos físicos, bem como na resolução de problemas não-lineares, transientes e na otimização de forma e topológica;
- Nas décadas de 70-80 a teoria matemática do MEF foi estabelecida, relacionando seu embasamento variacional com conceitos de análise funcional.

Este último ponto possibilitou o desenvolvimento de técnicas de obtenção automáticas de estimadores de erro no problema discretizado, dando assim, lugar às chamadas estratégias adaptativas no MEF, que consistem na modificação automática do modelo de elementos finitos nas regiões do domínio onde a precisão não é satisfatória. Tais técnicas são, geralmente, baseadas na mudança de localização dos nós sem alterar a topologia da malha (refino  $r$ ), na superposição de uma nova malha sobre a original (refino  $s$ ), no refinamento da malha através do aumento do número de elementos (refino  $h$ ), no aumento da ordem polinomial dos elementos (refino  $p$ ) ou através de combinações destes dois últimos (refino  $hp$ ).

Sendo assim, neste trabalho, discute-se uma nova estratégia de refino  $hp$  adaptativo onde um problema de ótimo é formulado de modo a permitir a projeção **simultânea** dos parâmetros  $h$  e  $p$  da malha em cada iteração do problema.

É importante mencionar ainda que o MEF é visto atualmente como uma eficaz ferramenta numérica na obtenção de soluções aproximadas para modelos contínuos e, sendo

suas bases matemáticas bem postas, é o método mais amplamente utilizado em problemas de análise estrutural e da mecânica do contínuo em geral. No entanto, o MEF está muito longe de ser apenas uma ferramenta de análise numérica, pois, quando devidamente explorado, pode auxiliar o projetista, desde a concepção de um novo produto, até o projeto final do mesmo, respeitando critérios de segurança e confiabilidade.

## 1.2 Otimização Estrutural

O problema de otimização estrutural é uma área de estudo que, na sua essência, procura melhorar o desempenho estrutural de componentes ou sistemas mecânicos de maneira sistemática. Assim, primeiramente necessita-se identificar as variáveis de projeto que caracterizam um determinado componente. Em seguida, mediante modificações destas variáveis segundo algum critério, espera-se obter uma melhor solução, dentre as diversas possíveis.

Em geral, as variáveis de projeto que definem um componente mecânico, destinado a transmitir esforços entre dois ou mais pontos dados, estão associadas à sua geometria (ver Figura 1.1). Logo, várias técnicas têm sido utilizadas para controlar e/ou definir projetos ótimos em termos geométricos, sendo, portanto, relativamente dependentes do tipo de estrutura em análise: treliças, pórticos, placas e cascas, sólidos tridimensionais, etc.

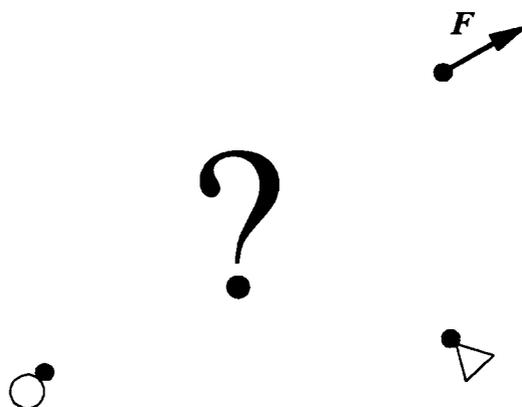


Figura 1.1: Otimização estrutural como um problema de transmissão de esforços.

Assim, o problema de otimização estrutural tem sido resolvido através da caracterização da peça por um esqueleto conhecido (ou desconhecido) ou por uma curva média a ser coberta por seções de momento estático a ser determinado, como é mostrado na Figura 1.2.

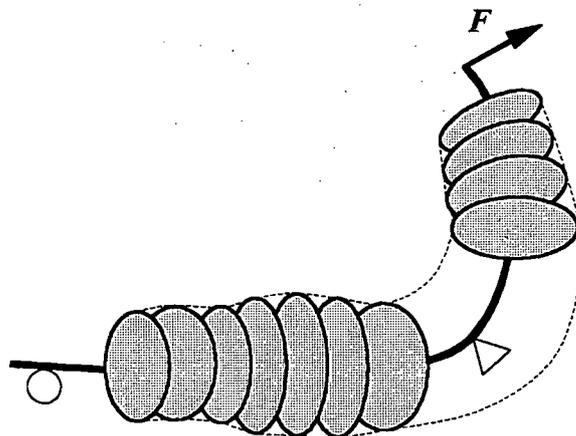


Figura 1.2: Cobertura de um esqueleto conhecido.

Uma maneira mais geral de abordar esse problema é através da parametrização da geometria do componente, cuja topologia já está previamente definida, e posterior otimização em relação a esses parâmetros, dando lugar então à já consagrada técnica de Otimização de Forma, como mostrado na Figura 1.3.

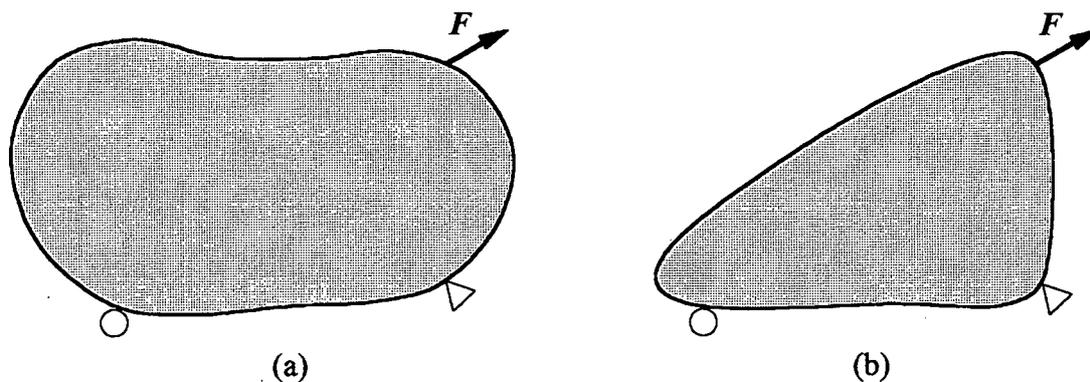


Figura 1.3: Otimização de Forma: Configuração inicial (a) e componente otimizado (b).

O inconveniente dessas abordagens é que requerem hipóteses prévias sobre a topologia da peça em estudo (no último exemplo, não foi prevista a presença de cavidades, portanto a peça otimizada é resultado apenas de mudanças na fronteira!). Neste sentido, surgiram as técnicas de Otimização Topológica onde nada é suposto sobre a morfologia do componente e, classicamente, caracteriza-se sua topologia, geralmente de forma grosseira, por uma densidade de material a ser determinada, ou seja, as cavidades correspondem à região de densidade nula e a peça é identificada por uma região onde a densidade é não nula, sendo a topologia final obtida através de técnicas de homogenização (Bendsøe et al. 1993 e Diaz & Kikuchi, 1992). Na Figura 1.4. é mostrado um exemplo dessa técnica onde, apesar de não previsto, nota-se a presença de cavidades.

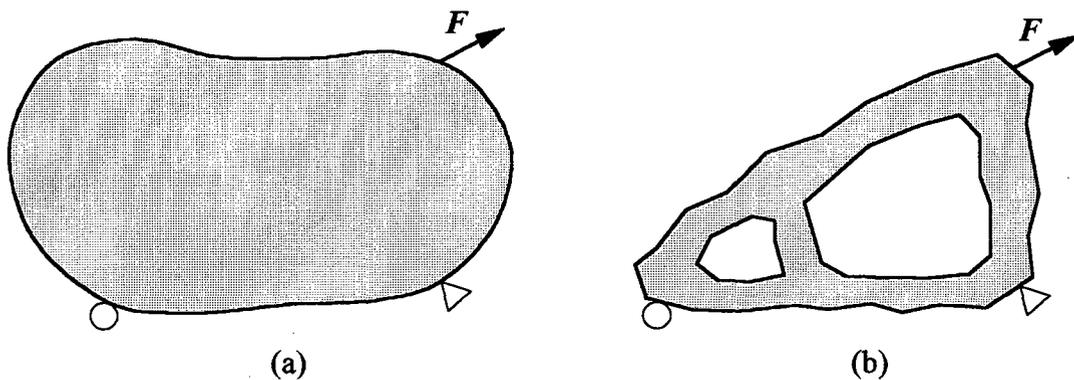


Figura 1.4: Otimização Topológica: Configuração inicial (a) e peça otimizada (b).

Mais recentemente (Souza de Cursi, 1994 e 95), foi apresentada uma forma possível de obter a topologia ótima de componentes estruturais em regime elástico linear, sujeitos a um critério de massa mínima e restrições de falha plástica de von Mises. A idéia básica desta formulação, a qual foi primeiramente proposta por Souza de Cursi (1994), consiste em caracterizar a morfologia da peça por meio de um parâmetro geométrico  $\rho$ , de modo que, para  $\rho > 0$ , tem-se uma saturação do critério segundo von Mises. Caso contrário, para  $\rho = 0$ , aparecem as cavidades na peça. Sendo assim, uma limitação desta metodologia é que necessita-se estabelecer uma formulação matemática para o problema de análise de

tensões de modo que a carta de espessura  $\rho$  apareça explicitamente como um parâmetro multiplicativo nas equações de equilíbrio.

É importante mencionar que as metodologias de otimização de forma e topológica são naturalmente complementares, ou seja, a geometria resultante do processo de otimização topológica pode ser parametrizada de acordo com alguma técnica e, em seguida, desencadear um processo de otimização em relação a esses parâmetros (ver Figura 1.5). Esse procedimento, embora clássico, tem o inconveniente de ser extremamente custoso e de difícil implementação computacional.

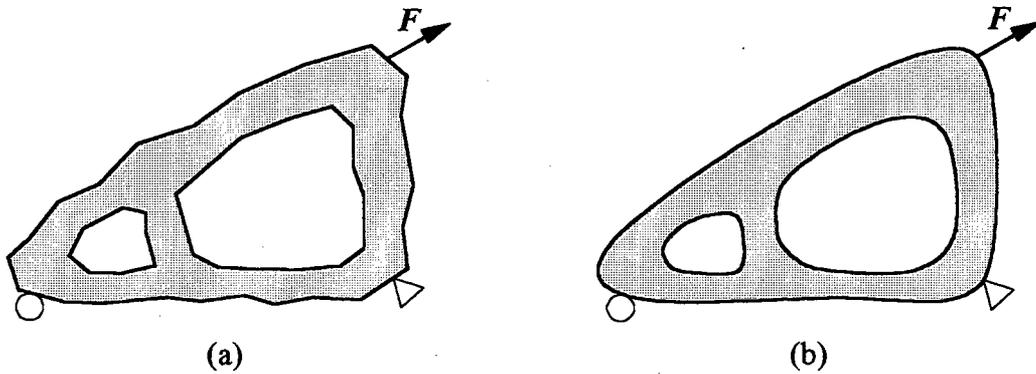


Figura 1.5: Acoplamento entre otimização Topológica (a) e Forma (b).

Devido aos inconvenientes do acoplamento entre essas abordagens, nesse trabalho é proposta uma forma alternativa para melhorar a geometria do componente mecânico obtido via otimização topológica, mediante a utilização da estratégia  $h$  adaptativa do Método dos Elementos Finitos, como pode ser visto na Figura 1.6.

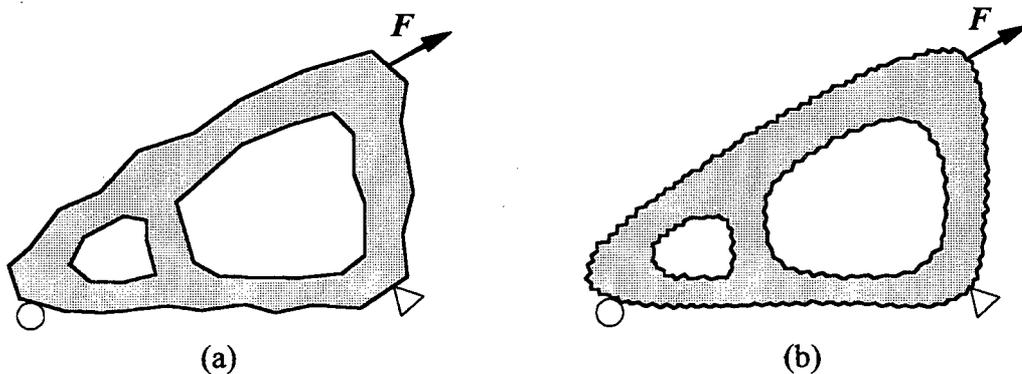


Figura 1.6: Otimização topológica: geometria identificada (a) e refinada (b).

## 1.3 Objetivos do Trabalho

O presente trabalho tem como enfoque central dois temas naturalmente complementares. O primeiro, consiste no estudo e implementação computacional de uma técnica de otimização topológica em elasticidade plana. Neste caso, é proposta uma metodologia não convencional para melhorar a geometria da peça obtida via otimização topológica, mediante a identificação do novo contorno e posterior refino  $h$  adaptativo nessa região, de modo a melhorar, além do cálculo de tensões, a própria geometria otimizada. Deste modo, espera-se chegar à forma final do componente sem a necessidade de desencadear algum tipo de pós-processamento da solução, tal como otimização de forma. Assim, no primeiro estágio deste trabalho, o MEF é utilizado como ferramenta para auxiliar no processo de otimização topológica. No segundo estágio, é apresentada uma nova estratégia de refino  $hp$  adaptativo, onde um problema de busca do ótimo é estabelecido mediante um critério de minimização do número de equações para um dado limite de erro fixo. Essa abordagem conduz a um problema de otimização onde os parâmetros  $h$  e  $p$  da malha aparecem explicitamente nas equações. Um algoritmo fundamentado nesse critério é desenvolvido, o qual culmina na resolução aproximada de uma equação algébrica não-linear que fornece os valores ótimos dos parâmetros  $h$  e  $p$ , de modo a tornar possível a projeção **simultânea** de ambos os parâmetros. Sendo assim, nesta outra etapa do trabalho, a situação se inverte, ou seja, as técnicas de otimização são agora utilizadas como ferramenta para auxiliar no projeto de malhas  $hp$  adaptativas.

É importante mencionar ainda que a estratégia de refino  $hp$ , aqui desenvolvida, é aplicada somente na resolução aproximada de problemas elípticos de valor no contorno unidimensionais. No entanto, como será mostrado no Capítulo 7, nada impede que esta metodologia seja estendida diretamente à problemas bidimensionais e tridimensionais e, conseqüentemente, acoplada à técnica de otimização topológica estudada neste trabalho ou ainda a outras técnicas de projeto e análise de componentes mecânicos e da mecânica do contínuo em geral. Fechando, portanto, o ciclo do trabalho.

## Capítulo 2

# Formulação de Equilíbrio em Elasticidade Linear

Neste trabalho é abordado o problema de elasticidade linear no plano, cujas equações são obtidas mediante a degeneração de um problema tridimensional. As equações de equilíbrio de um meio elástico linear podem ser obtidas em forma de equações diferenciais (forma forte), ou mediante formulações variacionais (forma fraca) que, no contexto do método dos elementos finitos, tornam-se particularmente atraentes (Oden & Carey, 1983).

### 2.1 Equilíbrio em Elasticidade Tridimensional

Seja  $\Omega$  um domínio aberto limitado em  $\mathbb{R}^n$  cujo contorno, denotado por  $\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_D$  e tal que  $\Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$ , é suficientemente regular, ou seja, admite a existência de um vetor normal  $\mathbf{n}$  em quase todo lugar (a.e.) exceto possivelmente em um conjunto de medida nula. Fisicamente, tem-se um corpo deformável  $\Omega$ , submetido a um conjunto de forças  $\mathbf{t}$  no contorno  $\Gamma_N$ , forças de campo  $\mathbf{f}$  no domínio  $\Omega$  e restrições de deslocamentos na superfície  $\Gamma_D$ , como mostrado na Figura 2.1.

Se o corpo  $\Omega$  está em equilíbrio, o seguinte conjunto de equações deve ser satisfeitas:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{em } \Gamma_D, \quad (2.1b)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{em } \Gamma_N, \quad (2.1c)$$

onde  $\mathbf{g}$  são os deslocamentos prescritos no contorno  $\Gamma_D$ ,  $\mathbf{n}$  o vetor unitário normal à

superfície  $\Gamma$  e  $\sigma(\mathbf{u})$  é o tensor tensão de Cauchy que depende da variável primal  $\mathbf{u}$ . Esse conjunto de equações é composto pelas equações de equilíbrio na sua forma forte ou diferencial (Eqs. 2.1a), condições de contorno de Dirichlet ou essenciais (Eqs. 2.1b) e condições de contorno de Neumann ou naturais (Eqs. 2.1c).

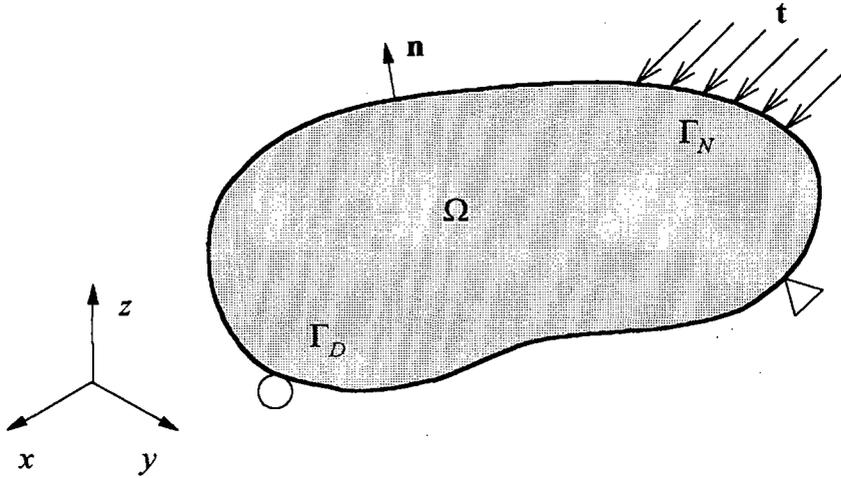


Figura 2.1: Corpo elástico em equilíbrio.

As equações cinemáticas de uma estrutura, sujeita ao campo de forças e condições de contorno mostrado na Figura 2.1, são dadas por

$$u_x(x, y, z) = u(x, y, z), \quad u_y(x, y, z) = v(x, y, z) \quad \text{e} \quad u_z(x, y, z) = w(x, y, z), \quad (2.2)$$

sendo  $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$  os deslocamentos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

As equações deformações-deslocamentos da teoria da elasticidade, considerando o caso de pequenos deslocamentos e deformações, são dadas por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.3)$$

na qual  $\varepsilon_{ij}$  são as componentes do tensor deformação de Green linearizado,  $u_i$  são as componentes do vetor deslocamentos e o operador  $(\cdot)_{,i}$  é adotado para representar  $\partial(\cdot)/\partial x_i$ .

Escrevendo as Eqs. (2.3) em forma compacta vem,

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T}{2} \equiv \nabla^s \mathbf{u}, \quad \text{sendo} \quad \varepsilon = \varepsilon^T. \quad (2.4)$$

Considerando as equações constitutivas da teoria da elasticidade para o caso de material isotrópico, linear e homogêneo tem-se (Chen & Han, 1988)

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2G \varepsilon_{ij}, \quad (2.5)$$

na qual  $\sigma_{ij}$  são as componentes do tensor tensão de Cauchy,  $\delta_{ij}$  o delta de Kronecker,  $\lambda$  a constante de Lamé dada por  $\lambda = \nu E / (1 - \nu^2)$ ,  $G$  o módulo de elasticidade transversal do material dado por  $G = E / 2(1 + \nu)$ , sendo  $E$  o módulo de elasticidade longitudinal e  $\nu$  o coeficiente de Poisson do material.

Uma forma mais conveniente da Eq. (2.5) é

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (2.6)$$

onde o tensor  $C_{ijkl}$  é dado por

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (2.7)$$

e, devido à propriedade de simetria do tensor constitutivo tem-se que,

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij} = C_{lkij}. \quad (2.8)$$

Escrevendo a Eq. (2.6) em notação compacta e inserindo a relação deformação-deslocamento dada por Eq. (2.4), vem

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbf{C} \nabla^s \mathbf{u}, \quad \text{onde} \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T. \quad (2.9)$$

Então, as equações de equilíbrio podem ser colocadas em termos da variável primal  $\mathbf{u}$ , ou seja,

$$\operatorname{div} (\mathbf{C} \nabla^s \mathbf{u}) + \mathbf{f} = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (2.10a)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{em } \Gamma_D, \quad (2.10b)$$

$$(\mathbf{C} \nabla^s \mathbf{u}) \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{em } \Gamma_N, \quad (2.10c)$$

Este problema pode ser escrito em uma forma variacional, o que permite trabalhar em espaços topologicamente mais fracos e estabelecer condições de existência e unicidade de

solução, bem como estimativas de erro *a priori* e *a posteriori* no problema discretizado que são vitais em análises adaptativas. A forma abstrata das equações diferenciais de equilíbrio pode ser obtida através do Método dos Resíduos Ponderados, o que consiste na ortogonalização do resíduo da Eq. (2.10a) em relação ao espaço das variações admissíveis. Em outras palavras, significa resolver (2.10a) no sentido distributivo, *i.e.*:

Encontre  $\mathbf{u} \in U$ , tal que

$$r(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} [\text{div} (\mathbf{C}\nabla^s \mathbf{u}) + \mathbf{f}] \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (2.11)$$

Supondo a existência de forças de corpo  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$  e forças de superfície  $\mathbf{t} \in L^2(\Gamma_N)$ , o espaço das variações admissíveis  $V$  e o espaço das funções admissíveis  $U$  podem ser definidos, respectivamente, como

$$V = \{\mathbf{v} \text{ suf. regular} \mid \mathbf{v} = 0 \text{ em } \Gamma_D\} \quad \text{e} \quad U = \{\mathbf{u} \in H^2(\Omega) \mid \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ em } \Gamma_D\}, \quad (2.12)$$

sendo  $L^2(\cdot)$  o espaço das funções quadraticamente integráveis segundo Lebesgue e  $H^2(\cdot)$  um espaço de Hilbert de segunda ordem, ambos definidos em um dado domínio (Kolmogorov & Fomin, 1995).

É importante observar que na forma (2.11) as funções admissíveis (funções teste)  $\mathbf{u}$  devem ser duas vezes diferenciáveis e satisfazer às condições de contorno em  $\Gamma_D$  e  $\Gamma_N$ . Entretanto, as variações admissíveis (funções peso)  $\mathbf{v}$  necessitam apenas ser suficientemente regulares para que a integral de Lebesgue em (2.11) possa ser resolvida, ou seja, que não gere distribuições singulares.

Por simplicidade, será suposto que  $\mathbf{u} = 0$  em  $\Gamma_D$ . Isso pode ser feito, visto que um problema com condições de contorno não homogêneas pode ser facilmente transformado em outro com condições de contorno homogêneas.

Rearranjando a Eq. (2.11), tem-se

$$\begin{aligned} r(\mathbf{u}) &= \int_{\Omega} \text{div} (\mathbf{C}\nabla^s \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \text{div} [(\mathbf{C}\nabla^s \mathbf{u})^T \mathbf{v}] \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{C}\nabla^s \mathbf{u} \cdot \nabla^s \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \end{aligned} \quad (2.13)$$

Aplicando apenas uma vez o Teorema da Divergência no primeiro termo da Eq. (2.13), ou seja, integrando por partes até que a ordem da derivada atuando sobre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  sejam as mesmas, resulta que

$$\begin{aligned} r(\mathbf{u}) &= \int_{\Gamma} (\mathbf{C}\nabla^s \mathbf{u})^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{C}\nabla^s \mathbf{u} \cdot \nabla^s \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \\ &= \int_{\Gamma_N} \mathbf{C}\nabla^s \mathbf{u} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{C}\nabla^s \mathbf{u} \cdot \nabla^s \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \\ &= \int_{\Gamma_N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{C}\nabla^s \mathbf{u} \cdot \nabla^s \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Finalmente, tem-se o problema (2.14) na sua forma fraca, a qual nada mais é que o Princípio dos Trabalhos Virtuais (Reddy, 1984), ou seja:

Encontre  $\mathbf{u} \in U$ , tal que

$$\int_{\Omega} \mathbf{C}\nabla^s \mathbf{u} \cdot \nabla^s \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (2.15)$$

Nesse caso, a exigência de regularidade de  $\mathbf{u}$  foi relaxada, portanto necessita-se redefinir os espaços  $U$  e  $V$ , da seguinte maneira,

$$V = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{v} = 0 \text{ em } \Gamma_D\} \quad \text{e} \quad U = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ em } \Gamma_D\}, \quad (2.16)$$

Uma forma mais compacta da Eq. (2.15) é obtida mediante a definição do operador bilinear simétrico, limitado e coersivo  $B : U \times V \rightarrow \Re$  e do funcional linear limitado  $l : V \rightarrow \Re$ , ou seja,  $l \in V'$ , sendo  $V'$  o espaço dual de  $V$ . Assim, o problema (2.15) pode ser escrito na forma abstrata:

Encontre  $\mathbf{u} \in U$ , tal que

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (2.17)$$

onde,

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{C}\nabla^s \mathbf{u} \cdot \nabla^s \mathbf{v} \, d\Omega \quad (2.18)$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \quad (2.19)$$

Nos trabalhos de Oden & Carey (1983) e Oden & Reddy (1976) são tratadas as questões de equivalência entre formulações diferenciais e variacionais. Já os problemas de existência e unicidade da solução das equações escritas na forma abstrata são dados pelo Teorema Generalizado de Lax-Milgram, também demonstrado nas referências ora citadas.

## 2.2 Estado Plano de Tensões

Nesta Seção é adotada a hipótese de estado plano de tensões para obter uma formulação onde a espessura  $\rho$  aparece explicitamente como um parâmetro multiplicativo nas equações de equilíbrio. Isso torna mais tratável o problema de otimização topológica que será abordado no Capítulo 5.

Considerando um sistema cartesiano de referência  $(x, y, z)$ , um componente submetido a um estado de tensões planas tem a característica de possuir uma dimensão muito pequena comparada com as outras duas dimensões. Dessa forma, o domínio de interesse  $\Omega$  é então denotado por

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \left[ -\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2} \right], (x, y) \in S \subset \mathbb{R}^2 \right\}, \quad (2.20)$$

sendo  $\rho$  a espessura do modelo e  $S$  a projeção do domínio  $\Omega$  sobre a superfície de referência, cujo contorno é denotado por  $L = L_N \cup L_D$ , onde  $L_N \cap L_D = \emptyset$ .

A partir deste ponto, a notação anterior será preservada, ou seja, as variáveis serão apenas redefinidas, não devendo ser confundidas com as variáveis da Seção anterior. Assim, no caso de uma estrutura sujeita a um campo de tensões planas, o tensor tensão  $\sigma$  é redefinido como,

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \text{ onde } \sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \text{ ou ainda, } \sigma = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\}^T. \quad (2.21)$$

Note que (ver Eq. 2.5), como as tensões cisalhantes transversais  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$  são consideradas nulas, então as deformações cisalhantes transversais  $\varepsilon_{xz}$  e  $\varepsilon_{yz}$  também são nulas. Por outro lado, como  $\sigma_{zz} = 0$ , a componente  $\varepsilon_{zz}$  pode ser expressa em termos das deformações  $\varepsilon_{xx}$  e  $\varepsilon_{yy}$ , ou seja

$$\varepsilon_{zz} = \frac{-\lambda}{\lambda + 2G} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}). \quad (2.22)$$

Assim, o campo de deformações pode ser escrito utilizando somente as três componentes independentes  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  e  $\varepsilon_{xy}$ , da seguinte maneira

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \text{ onde } \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\gamma_{yx}, \text{ ou ainda, } \boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}\}^T. \quad (2.23)$$

Reescrevendo a relação tensão-deformação (Eq. 2.5) em forma expandida e utilizando o campo de tensões e deformações dados, respectivamente, por Eqs. (2.21 e 2.23), tem-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \text{ ou } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.24)$$

onde  $\mathbf{C}$  é a matriz constitutiva do material, representando a rigidez de membrana do componente, isto é,

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Finalmente, a relação deformação-deslocamento (Eq. 2.3) pode ser reescrita, em forma expandida, como

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \text{ ou } \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u}. \quad (2.26)$$

Particularizando-se as equações de equilíbrio escritas na forma fraca (Eq. 2.15) para o estado de tensões (Eq. 2.24) e deformações (Eq. 2.26), aqui descrito, tem-se o seguinte problema:

Encontre  $\mathbf{u} \in U$ , tal que

$$\int_S \int_z \mathbf{C} \nabla^s \mathbf{u} \cdot \nabla^s \mathbf{v} \, d\Omega = \int_S \int_z \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{L_N} \int_z \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (2.27)$$

Efetando analiticamente as integrais ao longo da espessura na Eq. (2.27), tem-se,

$$\int_S \rho \mathbf{C} \nabla^s \mathbf{u} \cdot \nabla^s \mathbf{v} \, dS = \int_S \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dS + \int_{L_N} \rho \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, dL \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (2.28)$$

O problema (2.28) também pode ser escrito na seguinte forma abstrata:

Encontre  $\mathbf{u} \in U$ , tal que

$$B(\rho \mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\rho \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (2.29)$$

onde,

$$B(\rho \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_S \rho \mathbf{C} \nabla^s \mathbf{u} \cdot \nabla^s \mathbf{v} \, dS, \quad (2.30)$$

$$l(\rho \mathbf{v}) = \int_S \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dS + \int_{L_N} \rho \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, dL. \quad (2.31)$$

A equação variacional (Eq. 2.29) é equivalente à

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho \mathbf{C} \nabla^s \mathbf{u}) + \rho \mathbf{f} &= 0 && \text{em } S, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} && \text{em } L_D, \\ (\rho \mathbf{C} \nabla^s \mathbf{u}) \mathbf{n} &= \mathbf{T} && \text{em } L_N, \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde  $\mathbf{T} = \int_z \mathbf{t} \, dz = \rho \mathbf{t}$ . Em termos de tensões, vem

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) + \rho \mathbf{f} &= 0 && \text{em } S, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} && \text{em } L_D, \\ (\rho \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) \mathbf{n} &= \mathbf{T} && \text{em } L_N. \end{aligned} \quad (2.33)$$

O parâmetro  $\rho$  está agora explicitamente inserido nas equações de equilíbrio, tanto na forma abstrata (Eq. 2.29), como na forma diferencial (Eqs. 2.32 e 2.33). A razão do esquema aqui adotado ficará mais claro no Capítulo 5. Note ainda que, dessa forma a variável primal  $\mathbf{u}$  e, conseqüentemente, a variável dual  $\boldsymbol{\sigma}$  dependem de  $\rho$ .

## 2.3 Aproximação via Método dos Elementos Finitos

Na Seção 2.1, os problemas de valor no contorno em elasticidade linear foram colocados em uma forma variacional, a partir das equações diferenciais, sendo o equilíbrio obtido na seguinte forma abstrata:

Encontre  $\mathbf{u} \in U$ , tal que

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (2.34)$$

onde  $l$  é um funcional linear em  $V$  e  $B$  é uma forma bilinear associada que satisfaz às devidas condições de continuidade e coersividade, de modo que o Teorema generalizado de Lax-Milgram se aplique.

Os métodos de busca de soluções aproximadas para problemas de valor no contorno em geral baseiam-se na reconstrução do problema de modo que a solução aproximada pertença a uma classe restrita de funções. Mais especificamente, o Método de Bubnov-Galerkin pode ser visto como uma maneira sistemática e geral de se construir famílias de subespaços  $U_{hp} \subset U$ , ou seja, consiste em resolver o seguinte problema aproximado:

Encontre a solução aproximada  $\mathbf{u}_{hp} \in U_{hp} \subset U$ , tal que

$$B(\mathbf{u}_{hp}, \mathbf{v}_{hp}) = l(\mathbf{v}_{hp}) \quad \forall \mathbf{v}_{hp} \in V_{hp} \subset V. \quad (2.35)$$

Nesse caso, o espaço das variações admissíveis discretizado  $V_{hp}$  coincide com o espaço das funções admissíveis discretizado  $U_{hp}$ , ou seja  $U_{hp} \equiv V_{hp}$  são topologicamente equivalentes.

Essa última forma de colocar as equações de equilíbrio, conduz às equações de Elementos Finitos em um problema de elasticidade linear estática, do tipo

$$\mathbf{K}\mathbf{u}_{hp} = \mathbf{F}, \quad (2.36)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez global da estrutura e  $\mathbf{F}$  é o vetor carregamento generalizado.

Sabe-se que a qualidade da solução obtida por elementos finitos dependerá de quão bem  $U_{hp}$  se aproxima de  $U$ . Portanto, uma questão de grande interesse é a possibilidade de se melhorar automaticamente a qualidade da solução numérica obtida via Elementos Finitos mediante a incorporação de estratégias adaptativas, as quais serão apresentadas no Capítulo 3.

É importante observar que a aproximação de Galerkin  $\mathbf{u}_{hp}$  é a melhor aproximação possível da solução exata  $\mathbf{u}$  no espaço  $U_{hp}$ , pois, da Eq. (2.34) tem-se

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}_{hp}) = l(\mathbf{v}_{hp}) \quad \forall \mathbf{v}_{hp} \in V_{hp}. \quad (2.37)$$

Subtraindo Eq. (2.37) de Eq. (2.35), vem

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}_{hp}) - B(\mathbf{u}_{hp}, \mathbf{v}_{hp}) = B(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{hp}, \mathbf{v}_{hp}) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_{hp} \in V_{hp}. \quad (2.38)$$

Definindo o erro de aproximação como

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{hp}, \quad (2.39)$$

tem-se então que

$$B(\mathbf{e}, \mathbf{v}_{hp}) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_{hp} \in V_{hp}, \quad (2.40)$$

ou seja, o erro  $\mathbf{e}$  é ortogonal ao subespaço  $V_{hp}$ .

## 2.4 Discretização das Equações de Estado Plano de Tensões

Na seção 2.2, o problema de elasticidade linear em estado plano de tensões foi colocado na seguinte forma variacional (Eq. 2.28):

Encontre  $\mathbf{u} \in U$ , tal que

$$\int_S \rho \mathbf{C} \nabla^s \mathbf{u} \cdot \nabla^s \mathbf{v} \, dS = \int_S \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dS + \int_{L_N} \rho \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, dL \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (2.41)$$

Para obter a equação de elementos finitos do problema (2.41) necessita-se escrever os deslocamentos  $\mathbf{u}$  em termos de deslocamentos nodais  $\mathbf{u}_{hp}$ , mediante a definição de uma base de funções de interpolação, da seguinte maneira,

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{u}_{hp}. \quad (2.42)$$

Neste caso,  $\mathbf{N}$  é a matriz de funções de interpolação que representa um conjunto apropriado de funções base globais e  $\mathbf{u}_{hp}$  é o vetor de parâmetros multiplicativos dados, respectivamente, por

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_{hp} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}, \quad (2.43)$$

sendo  $n$  o número de funções de interpolação e o índice  $i$  denota valores nodais.

Do Teorema do embutimento de Sobolev tem-se que os espaços  $H^1(\Omega)$  e  $C^0(\Omega)$  são, em certas condições, topologicamente equivalentes, portanto as funções de interpolação  $\mathbf{N}$  utilizadas nesse trabalho devem possuir ao menos continuidade  $C^0$ .

Introduzindo a equação (2.42) na forma variacional definida em Eq. (2.41), tem-se o seguinte problema aproximado:

Encontre  $\mathbf{u}_{hp} \in U_{hp} \subset U$ , tal que

$$\begin{aligned} \int_S \rho \mathbf{C} \nabla^s (\mathbf{N} \mathbf{u}_{hp}) \cdot \nabla^s (\mathbf{N} \mathbf{v}_{hp}) dS &= \int_S \rho \mathbf{f} \cdot (\mathbf{N} \mathbf{v}_{hp}) dS + \\ &+ \int_{L_N} \rho \mathbf{t} \cdot (\mathbf{N} \mathbf{v}_{hp}) dL \quad \forall \mathbf{v}_{hp} \in V_{hp} \subset V. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Como  $\mathbf{v}_{hp} \in V_{hp}$  é arbitrário, a Eq. (2.44) pode ser transformada no seguinte conjunto de equações algébricas

$$\int_S \rho (\nabla^s \mathbf{N})^T \mathbf{C} \nabla^s \mathbf{N} dS \mathbf{u}_{hp} = \int_S \rho \mathbf{N}^T \mathbf{f} dS + \int_{L_N} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{t} dL, \quad (2.45)$$

ou, de forma mais compacta, tem-se as equações de elementos finitos de uma estrutura em regime elástico linear e estado plano de tensões, como

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_{hp} = \mathbf{F}, \quad (2.46)$$

onde a matriz de rigidez da estrutura  $\mathbf{K}$  e o vetor carregamento generalizado  $\mathbf{F}$  são dados, respectivamente, por

$$\mathbf{K} = \int_S \rho \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dS, \quad \text{sendo } \mathbf{B} = \nabla^s \mathbf{N} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \int_S \rho \mathbf{N}^T \mathbf{f} dS + \int_{L_N} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{t} dL. \quad (2.47)$$

É importante mencionar ainda que as integrais que aparecem nessas equações podem ser resolvidas de maneira aproximada utilizando algum tipo de quadratura numérica (Dunavant, 1985).

## Capítulo 3

# Estratégias Adaptativas & Estimadores de Erro

Apesar dos significativos avanços alcançados no desenvolvimento da teoria matemática e de algoritmos para o Método dos Elementos Finitos, a discretização de um determinado problema depende, na maioria dos casos, do bom senso do analista e das experiências adquiridas na solução de outros problemas. Entretanto, se os resultados forem julgados ruins, a discretização deverá ser refeita. Ocorre que, se na concepção do modelo a intuição do analista falhou, é razoável supor que o mesmo poderá acontecer no julgamento da validade dos resultados (Szabó & Babuška, 1991). Devido a estas incertezas, a possibilidade de se melhorar automaticamente a qualidade de uma solução numérica tornou-se uma questão de grande interesse em Mecânica Computacional, dando lugar assim às estratégias adaptativas do Método dos Elementos Finitos. Nestas técnicas está implícita a capacidade de se avaliar localmente o erro de discretização, fornecendo uma medida da qualidade da solução aproximada (Oden et al. 1989). Mediante esta informação, alguma das técnicas de refino da malha pode ser utilizada para melhorar de forma eficiente a solução obtida (Rachowicz et al. 1989).

### 3.1 Estratégias Adaptativas

As estratégias adaptativas encontradas na literatura vigente, consistem, geralmante, na mudança de localização dos nós sem alterar a topologia da malha (refino  $r$ ), na superposição de uma nova malha sobre a original (refino  $s$ ), no refinamento da malha através

do aumento do número de elementos (refino  $h$ ), no aumento da ordem polinomial dos elementos (refino  $p$ ) ou através de combinações destes dois últimos (refino  $hp$ ).

### 3.1.1 Versão $r$

Na adaptatividade  $r$ , a qualidade da solução de elementos finitos é melhorada através de uma redistribuição das coordenadas dos nós sem alterar a topologia da malha. A vantagem deste método é que consegue-se melhorar a solução mantendo-se constante o número de graus de liberdade do problema. Por outro lado, os resultados possíveis de serem obtidos através desta técnica dependem direta e fortemente da topologia da malha original, bem como do número de graus de liberdade utilizados na discretização inicial do problema. Além disso, pode-se ter problemas de distorção excessiva dos elementos, produzindo instabilidade nos resultados. Devido a estas desvantagens, este método de refino torna-se pouco atrativo

### 3.1.2 Versão $s$

A versão  $s$  adaptativa consiste em superpor uma nova malha, mais refinada, à malha original somente nas regiões onde o erro é elevado. Esta metodologia é ideal em problemas transientes ou incrementais, onde tem-se, por exemplo, uma frente de propagação de ondas de choque ou plastificação. Apesar de bastante eficiente em termos de custos computacionais e controle de erro, esse método exige que a malha superposta seja compatibilizada à malha original através de alguma técnica, o que, em muitos casos, pode ser extremamente complexo (Fish, 1992).

### 3.1.3 Versão $h$

O refino  $h$  da malha é a mais natural técnica de refinamento da solução, sendo utilizada pelos engenheiros de maneira intuitiva, antes mesmo do desenvolvimento da teoria do erro no MEF. No entanto, com as atuais técnicas de estimativa de erro é possível utilizar as informações obtidas em uma iteração para aumentar de maneira automática o número de elementos nas regiões onde o erro é elevado, melhorando com isso a solução do problema.

Dessa forma, deu-se lugar à adaptatividade do tipo  $h$ .

Neste procedimento, a ordem polinomial das funções de interpolação dos elementos permanece constante, enquanto o tamanho dos mesmos é modificado em função de uma estimativa de erro calculada localmente.

A dificuldade deste método está na necessidade de geração automática da malha para permitir utilizar eficientemente o erro estimado no processo de refinamento. Isto tem motivado muitos trabalhos de desenvolvimento de algoritmos para geração automática de malhas. Neste trabalho é utilizado o gerador de malhas 2D ARANHA (Fancello, 1993), o qual é baseado na regeneração total da malha via método frontal.

A versão  $h$  adaptativa é adequada aos casos em que a malha não pode ser construída de modo que os pontos singulares coincidam com os vértices dos elementos ou que as regiões onde ocorram mudanças abruptas nas derivadas da solução, tais como interfaces entre materiais diferentes ou fronteira de uma frente plástica que coincidam com contornos inter-elementos (Duarte, 1991).

### 3.1.4 Versão $p$

Esta metodologia procura criar uma sequência de malhas, aumentando-se sucessivamente a ordem polinomial das funções de interpolação em cada elemento e mantendo-se a topologia da malha inalterada, até alcançar um nível aceitável de erro local.

A grande dificuldade deste método é que o enriquecimento das funções de interpolação de cada elemento, em função de uma distribuição adequada do erro, produz uma malha não conforme que deve ser compatibilizada através de alguma técnica, geralmente mais simples do que as empregadas em malhas  $s$ , impedindo com isso a utilização de códigos comuns de análise por elementos finitos (Novotny et al. 1995).

A versão  $p$  adaptativa é adequada a problemas em que a solução analítica não possui pontos de singularidade. Neste caso, aumentando-se a ordem polinomial dos elementos a energia de deformação da função erro decresce algebricamente com o dobro das taxas de convergência encontradas no método  $h$ , sendo, portanto, o método de controle do erro de discretização mais eficiente para esta classe de problemas (Babuška & Suri, 1990). Em

contrapartida, a principal desvantagem da versão  $p$  é que, em problemas cuja solução não é suave, a solução aproximada obtida com esta metodologia pode oscilar nas regiões de singularidade (Duarte, 1991).

### 3.1.5 Versão $hp$

Neste caso as estratégias  $h$  e  $p$  são combinadas, obtendo-se então o método mais eficiente de controle de erro para uma vasta classe de problemas (Babuška & Suri, 1990), sendo este o motivo do grande interesse no refinamento  $hp$  adaptativo, apesar do inconveniente de que as estruturas de dados capazes de suportar versões combinadas são extremamente complexas (Denkowitz et al. 1989 e Novotny & Fancello, 1996). Além do mais, surge a necessidade de fazer, segundo algum critério, uma projeção dos parâmetros  $h$  e  $p$  da malha (Rachowicz et al. 1989 e Guo & Babuška, 1986). Neste sentido, é apresentada, no Capítulo 7 uma nova estratégia de refinamento  $hp$  que é capaz de fazer a projeção simultânea desses parâmetros dentro de cada iteração do problema, de modo a reduzir substancialmente o número de iterações necessárias para atingir uma tolerância pré-estabelecida.

## 3.2 Estimadores de Erro

Pela teoria de Elementos Finitos, o erro de discretização é uma decorrência, sobretudo, do particionamento do domínio  $\Omega$  e da escolha das funções de interpolação (Szabó & Babuška, 1991). Portanto, pode ser escrito como a diferença entre o valor exato da solução  $\mathbf{u}$  e o valor  $\mathbf{u}_{hp}$  obtido numericamente considerando os parâmetros  $h$  e  $p$  da corrente malha, sendo dado por

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{hp}. \quad (3.1)$$

Na maioria das vezes, a solução exata é desconhecida. No entanto, é possível estimar o erro de discretização como a diferença entre uma solução  $\mathbf{u}^*$ , que, sob algum critério, produz uma aproximação melhor de  $\mathbf{u}$  que  $\mathbf{u}_{hp}$ , ou seja

$$\mathbf{e} \approx \mathbf{u}^* - \mathbf{u}_{hp}. \quad (3.2)$$

Logo, o problema passa a ser a determinação de  $\mathbf{u}^*$  de modo a representar de forma aproximada, e melhor que  $\mathbf{u}_{hp}$ , a solução exata  $\mathbf{u}$ . Obviamente, o custo computacional para estimar a solução  $\mathbf{u}^*$  não pode exceder ao da solução original  $\mathbf{u}_{hp}$  (Oden et al. 1989).

### 3.2.1 O Estimador de Erro de Zienkiewicz & Zhu

No trabalho de Zienkiewicz & Zhu (1987) é mostrada uma forma possível de estimar o erro de discretização através da chamada *Técnica de Recuperação de Gradientes da Solução*, que consiste basicamente em fazer uma projeção da derivada nas funções base.

Seja a norma-energia do erro e definida como,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}\|_E^2 &= B(\mathbf{e}, \mathbf{e}) \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla^s \mathbf{e} \cdot \nabla^s \mathbf{e} \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla^s (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{hp}) \cdot \nabla^s (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{hp}) \, d\Omega. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Nos problemas de valor no contorno aqui estudados, a norma-energia  $\|\cdot\|_E$  é topologicamente equivalente a norma no espaço  $H^1(\Omega)$ , ou seja,  $\|\cdot\|_E \equiv \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ .

O erro  $\mathbf{e}$  pode ainda ser expresso em termos de deformações, isto é,

$$\mathbf{e}_\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_{hp} = \nabla^s (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{hp}) = \nabla^s \mathbf{e}. \quad (3.4)$$

Reescrevendo a expressão da norma-energia do erro em termos de deformações, mediante a introdução da Eq. (3.4) em Eq. (3.3), tem-se

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{e}_\varepsilon)^T \mathbf{C} \mathbf{e}_\varepsilon \, d\Omega = \int_{\Omega} (\varepsilon - \varepsilon_{hp})^T \mathbf{C} (\varepsilon - \varepsilon_{hp}) \, d\Omega. \quad (3.5)$$

Pode-se, também, definir o erro em termos de tensões, ou seja

$$\mathbf{e}_\sigma = \sigma - \sigma_{hp} = \mathbf{C} (\varepsilon - \varepsilon_{hp}) = \mathbf{C} \nabla^s \mathbf{e} = \mathbf{C} \mathbf{e}_\varepsilon, \quad (3.6)$$

portanto,

$$\mathbf{e}_\varepsilon = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{e}_\sigma. \quad (3.7)$$

A expressão (3.5) pode ser escrita agora em termos de tensões, inserindo-se na mesma a Eq. (3.7), isto é

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 \equiv \|\mathbf{e}_\sigma\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{e}_\sigma)^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{e}_\sigma \, d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma - \sigma_{hp})^T \mathbf{C}^{-1} (\sigma - \sigma_{hp}) \, d\Omega. \quad (3.8)$$

onde  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  denota a norma no espaço  $L^2(\Omega)$ , por isso, o estimador de erro de Ziekiewicz & Zhu, inicialmente *apelidado* de ZZ, atualmente é conhecido como  $Z^2$ .

Como não se conhece  $\sigma$ , o cálculo da norma-energia do erro utilizando a equação (3.8) é ainda impossível. No entanto, uma estimativa do erro pode ser obtida se  $\sigma$  for substituído por  $\sigma^*$ , a qual é obtida a partir de um pós-processamento de  $\sigma_{hp}$ . Isso pode ser conseguido através da Técnica da Projeção (Hinton & Campbell, 1974), que consiste na obtenção de um campo de tensões contínuo mediante uma projeção de  $\sigma_{hp}$  nas funções base. Dessa forma, o campo de tensões será considerado contínuo em todo o domínio e escrito em termos de valores nodais, empregando-se a mesma base de funções de interpolação utilizada para interpolar os deslocamentos, ou seja,  $\sigma^* = \mathbf{N}\bar{\sigma}^*$ , onde  $\mathbf{N}$  é a matriz de funções de interpolação e  $\bar{\sigma}^*$  denota o vetor tensão nodal. Sendo assim, a equação (3.8) pode ser escrita como

$$\|e\|_E^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{N}\bar{\sigma}^* - \sigma_{hp})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{N}\bar{\sigma}^* - \sigma_{hp}) d\Omega. \quad (3.9)$$

A minimização da expressão (3.9), a qual é obtida apenas tomando-se a primeira variação e igualando-se a zero, resulta no seguinte sistema de equações

$$\mathbf{m}\bar{\sigma}^* = \mathbf{b}, \quad (3.10)$$

sendo a matriz massa de densidade unitária  $\mathbf{m}$  e o vetor  $\mathbf{b}$  escritos, respectivamente, como

$$\mathbf{m} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \sigma_{hp} d\Omega. \quad (3.11)$$

Este procedimento é equivalente a resolver um problema de mínimos quadrados, ou seja, minimização na norma  $\|\cdot\|_E$  (Hinton & Campbell, 1974).

No trabalho de Zienkiewicz & Zhu (1987) é mostrada uma forma possível de calcular o novo tamanho do elemento através da Eq. (3.9). Sabe-se no entanto que este tipo de estimador só fornece um *upper-bound* para o erro quando a malha é suficientemente fina. Portanto ele não é recomendável para guiar um refino  $p$  da malha, podendo apenas ser utilizado como um indicador de erro nos problemas  $hp$  adaptativos, mas com ressalvas. O termo indicador de erro é empregado para denotar uma estimativa, geralmente

grosseira, do erro em um determinado elemento da malha. Sendo assim, os indicadores de erro fornecem apenas informações para o controle de um refinamento adaptativo, não quantificando satisfatoriamente o erro de discretização cometido (Duarte, 1991).

### 3.2.2 Estimativa do Erro Utilizando uma Análise Assintótica

Um procedimento clássico para uma estimativa *a priori* do erro de discretização consiste em utilizar as soluções obtidas mediante uma sequência de malhas com enriquecimento  $p$  uniforme. Essa abordagem fundamenta-se na teoria matemática do erro no Método dos Elementos Finitos, a qual pode ser escrita, admitindo-se a ausência de descontinuidades na solução, da seguinte maneira (Szabó & Babuška, 1991):

Sejam  $C_1$  e  $C_2$  constantes que dependem do domínio  $\Omega$ , do carregamento, da discretização e de uma constante positiva chamada taxa de convergência assintótica  $\beta$ , então

$$\Pi - \Pi_p \leq C_1 p^{-2\beta}, \quad (3.12)$$

$$\Pi - \Pi_{p-1} \leq C_2 (p-1)^{-2\beta}, \quad (3.13)$$

onde  $\Pi$  é a Energia Potencial Total exata,  $\Pi_p$  é a Energia Potencial Total obtida pelo MEF utilizando-se uma distribuição  $p$  uniforme, dadas respectivamente por

$$\Pi = \frac{1}{2} B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad \text{e} \quad \Pi_p = \frac{1}{2} B(\mathbf{u}_p, \mathbf{u}_p). \quad (3.14)$$

Para  $p$  suficientemente grande, diz-se que a solução está na faixa assintótica. Neste caso, o sinal de menor ou igual nas inequações (3.12 e 3.13) podem ser trocados por igualdades (Szabó & Babuška, 1991).

Supondo um comportamento assintótico da solução,  $\beta$  conhecida e  $C_1 = C_2$ , pode-se operar sobre as inequações (3.12 e 3.13) para determinar  $\Pi$  mediante a equação

$$\Pi = \frac{\Pi_{p-1} p^{-2\beta} - \Pi_p (p-1)^{-2\beta}}{p^{-2\beta} - (p-1)^{-2\beta}}. \quad (3.15)$$

Será mostrado a seguir que, caso não se conheça o valor  $\beta$ , a obtenção de três soluções aproximadas serão suficientes para estimar  $\Pi$ . Voltando-se às inequações (3.12 e 3.13),

tem-se

$$\frac{\Pi - \Pi_p}{\Pi - \Pi_{p-1}} = \frac{p^{-2\beta}}{(p-1)^{-2\beta}} \quad \text{e} \quad \frac{\Pi - \Pi_{p-1}}{\Pi - \Pi_{p-2}} = \frac{(p-1)^{-2\beta}}{(p-2)^{-2\beta}}. \quad (3.16)$$

Reescrevendo ambas as Equações (3.16) vem

$$\log \left( \frac{\Pi - \Pi_{p-1}}{\Pi - \Pi_p} \right) = 2\beta \log \left( \frac{p}{p-1} \right), \quad (3.17)$$

$$\log \left( \frac{\Pi - \Pi_{p-2}}{\Pi - \Pi_{p-1}} \right) = 2\beta \log \left( \frac{p-1}{p-2} \right). \quad (3.18)$$

Dividindo-se a Eq. (3.17) por (3.18) tem-se

$$\frac{\log \left( \frac{\Pi - \Pi_{p-1}}{\Pi - \Pi_p} \right)}{\log \left( \frac{\Pi - \Pi_{p-2}}{\Pi - \Pi_{p-1}} \right)} = \frac{\log \left( \frac{p}{p-1} \right)}{\log \left( \frac{p-1}{p-2} \right)} = q. \quad (3.19)$$

Reordenando a Eq. (3.19), obtém-se

$$\frac{\Pi - \Pi_{p-1}}{\Pi - \Pi_p} = \left( \frac{\Pi - \Pi_{p-2}}{\Pi - \Pi_{p-1}} \right)^q, \quad (3.20)$$

onde  $q$  é dado por

$$q = \frac{\log \left( \frac{p}{p-1} \right)}{\log \left( \frac{p-1}{p-2} \right)}. \quad (3.21)$$

Resolvendo-se a Eq. (3.20), tem-se uma estimativa de  $\Pi$ , que pode ser utilizada para guiar um enriquecimento  $p$  uniforme. Esse procedimento permite obter valores precisos de  $\Pi$ , no entanto, fornece apenas uma estimativa do erro global. Isso faz com que esse estimador de erro não seja utilizável, tal como apresentado, em um processo de enriquecimento  $p$  adaptativo de uma malha, já que, nesse caso, é necessário obter estimativas do erro local. Por outro lado, é importante mencionar que ambas as técnicas de estimativas de erro mostradas nesse Capítulo podem ser utilizadas simultaneamente em um refino  $hp$  adaptativo da malha, ou seja, primeiramente faz-se um refino  $h$  adaptativo através da técnica de *remeshing* de Zienkiewicz & Zhu e, partindo-se da premissa que o erro está equidistribuído em todo o domínio, faz-se um refino  $p$  uniforme estimando-se o erro através de uma análise de convergência assintótica da solução.

## Capítulo 4

# Bases Hierárquicas no Método dos Elementos Finitos

Sabe-se que o procedimento padrão para interpolar os deslocamentos tem a vantagem de atribuir um significado físico aos deslocamentos (Dhatt & Touzot, 1984) com o inconveniente de que as funções relativas a uma determinada ordem de aproximação diferem totalmente das de outra ordem e, em consequência, também as respectivas matrizes e vetores resultantes. Isso faz com que, por exemplo, em um processo  $p$  ou  $hp$  adaptativo, o sistema obtido na iteração anterior (para um determinado  $p$ ) não seja aproveitado. Este inconveniente pode ser resolvido utilizando-se uma base hierárquica, pois, neste caso, a matriz de rigidez e os vetores carregamento relativos a um grau  $p$  estarão contidos nas matrizes e vetores correspondentes aos graus polinomiais maiores ou iguais a  $p + 1$ . Desta maneira, pode-se aproveitar a matriz de rigidez e o respectivo vetor carregamento calculados numa iteração anterior, diminuindo assim o custo computacional na montagem de um problema adaptativo.

### 4.1 Consequências do Uso de Bases Hierárquicas

Quando se utiliza uma base hierárquica no método dos elementos finitos a versão  $p$ , e conseqüentemente a versão  $hp$ , torna-se particularmente atraente, pois, neste caso, o aninhamento dos conjuntos de funções de interpolação resulta em um aninhamento da matriz de rigidez e do vetor carregamento, conforme a descrição que segue:

Seja o sistema de equações, onde foram inicialmente utilizadas  $m$  funções base para gerar o espaço de elementos finitos

$$\mathbf{K}_{mm}\mathbf{u}_m = \mathbf{f}_m. \quad (4.1)$$

Se a base do espaço de elementos finitos for enriquecida hierarquicamente, adicionando-se às  $m$  funções pré-existentes outras  $n$  funções, o sistema de equações resultante será dado por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{mn} \\ \mathbf{K}_{nm} & \mathbf{K}_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_m \\ \mathbf{u}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_m \\ \mathbf{f}_n \end{Bmatrix}. \quad (4.2)$$

Note que a Eq. (4.1) está contida em Eq. (4.2). Dessa forma pode-se aproveitar o sistema de equações obtido em uma ordem de aproximação anterior.

Outra importante vantagem da utilização de uma base hierárquica na versão  $p$  é a facilidade de forçar a continuidade no contorno inter-elementos quando estes possuem ordens diferentes. Existem dois procedimentos que permitem obter uma aproximação contínua (conforme) dos deslocamentos:

- **Regra do Máximo:** consiste em adicionar uma função de interpolação, de mesmo grau do elemento de maior ordem, ao lado que pertence ao elemento de menor ordem e que é comum aos dois elementos.
- **Regra do Mínimo:** esse procedimento baseia-se no fato de que os coeficientes das funções de interpolação hierárquicas, com exceção dos coeficientes dos valores nodais, representam *desvios de linearidade*, podendo-se, dessa forma, simplesmente eliminar a função de interpolação associada ao lado do elemento de maior grau, de modo a compatibilizar o lado comum aos elementos de ordens diferentes.

Devido a sua maior facilidade de implementação, geralmente é utilizada a *Regra do Mínimo*, apesar do inconveniente de que através dela pode-se requerer uma iteração a mais para atingir a precisão desejada. Esse mesmo procedimento pode ser empregado para impor, automaticamente, as condições de contorno homogêneas nos modos hierárquicos.

## 4.2 Escolha do Espaço de Elementos Finitos

Muitos trabalhos com elementos hierárquicos têm utilizado as funções hierárquicas 1D construídas a partir dos polinômios de Legendre, sendo facilmente estendidas para elementos quadriláteros e hexaédricos (Novotny et al. 1995). No caso de elementos hierárquicos triangulares e tetraédricos é necessária uma abordagem diferente para sua construção, não podendo simplesmente multiplicar as funções unidimensionais em outras direções. Apesar desta desvantagem, o que tem motivado muitos trabalhos no desenvolvimento de elementos triangulares e tetraédricos é a facilidade de geração automática de malhas  $h$  e  $hp$  adaptativas.

### 4.2.1 Base Hierárquica Unidimensional

As funções hierárquicas unidimensionais utilizadas nesse trabalho pertencem à família lagrangeana e são construídas a partir da integral dos polinômios de Legendre. Tais funções possuem continuidade  $C^0$  e são dadas por (Szabó & Babuška, 1991)

$$N_1 = \frac{1-\xi}{2}, \quad N_2 = \frac{1+\xi}{2} \quad \text{e} \quad N_i = \phi_{i-1}(\xi) \quad \text{com} \quad i = 3, 4, \dots, p+1, \quad (4.3)$$

onde  $\phi_j$  é definido em termos dos Polinômios de Legendre  $P_{j-1}$ , ou seja,

$$\phi_j(\xi) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{j-1}(t) dt \quad \text{com} \quad j = 2, 3, \dots \quad (4.4)$$

ou devido às propriedades dos Polinômios de Legendre, tem-se

$$\phi_j(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2(2j-1)}} [P_j(\xi) - P_{j-2}(\xi)] \quad \text{com} \quad j = 2, 3, \dots \quad (4.5)$$

Para obter as funções de interpolação hierárquicas bidimensionais e tridimensionais basta fazer o produto tensorial das funções unidimensionais acima mostradas nas outras direções naturais.

### 4.2.2 A Base Hierárquica para Triângulo de Webb & Abouchacra

No trabalho de Rossow & Katz (1978) é mostrada uma base hierárquica para triângulos, a qual se baseia na mudança de variável para um conjunto de valores nodais do

potencial e de suas derivadas primeira e de ordem superior. Como estas funções base são linearmente dependentes, a sua utilização implica em um mau condicionamento da matriz de rigidez.

Mais recentemente, foi proposto por Webb & Abouchacra (1995) um novo conjunto de funções de interpolação hierárquicas triangulares de continuidade  $C^0$ . Tais funções são linearmente independentes devido ao uso dos polinômios ortogonais de Jacobi para sua construção. Isso resulta em um melhor condicionamento da matriz de rigidez, similarmente ao que ocorre com as funções hierárquicas unidimensionais baseadas nos polinômios de Legendre (Szabó & Babuška, 1991).

Para construção desse espaço de elementos finitos é considerado um triângulo simplex mapeado em  $\xi$  e  $\eta$  (Figura 4.1), podendo-se definir três coordenadas naturais  $\zeta_1, \zeta_2$  e  $\zeta_3$ , da seguinte maneira

$$\zeta_1 = \frac{\text{Área } P23}{\text{Área } 123}, \quad \zeta_2 = \frac{\text{Área } 1P3}{\text{Área } 123} \quad \text{e} \quad \zeta_3 = \frac{\text{Área } 12P}{\text{Área } 123}; \quad (4.6)$$

onde  $0 \leq (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \leq 1$  e  $\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 1$ .

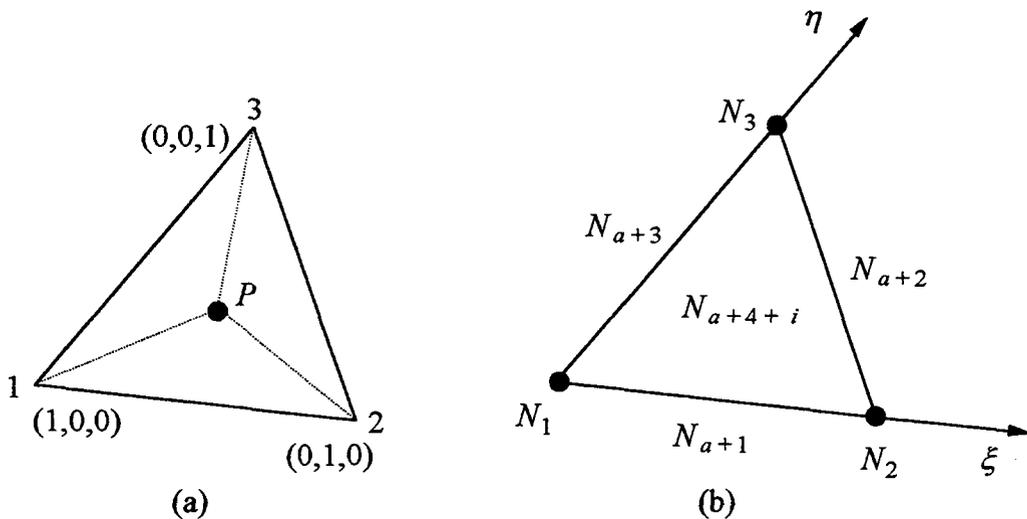


Figura 4.1: Elemento Mestre: Simplex bidimensional (a) e esquema de numeração (b).

As funções hierárquicas de Webb & Abouchacra são organizadas em três categorias: funções nodais, funções de aresta e funções de face.

- **Funções nodais**, são aquelas associadas aos vértices do triângulo.

As três primeiras funções de interpolação são dadas por

$$\begin{aligned} N_1 &= \zeta_1, \\ N_2 &= \zeta_2, \\ N_3 &= \zeta_3. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Note que estas são as funções lineares usuais para triângulos.

- **Funções de aresta**, são as funções associadas aos lados do triângulo.

As funções de interpolação associadas aos lados do triângulo, para a  $n$ -ésima ordem, são escritas da seguinte maneira

$$\begin{aligned} N_{a+1} &= \zeta_1 \zeta_2 P_{i-1}^{(2,2)}(\zeta_2 - \zeta_1), \\ N_{a+2} &= \zeta_2 \zeta_3 P_{i-1}^{(2,2)}(\zeta_3 - \zeta_2), \\ N_{a+3} &= \zeta_3 \zeta_1 P_{i-1}^{(2,2)}(\zeta_1 - \zeta_3). \end{aligned} \tag{4.8}$$

onde  $a = \frac{1}{2}p(p+1)$ ,  $p = 2, 3, \dots, n$  e  $P_i^{(\alpha,\beta)}$  é o polinômio de Jacobi, definido em uma forma recursiva como

$$P_i^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{cx + e}{b} P_{i-1}^{(\alpha,\beta)}(x) - \frac{f}{b} P_{i-2}^{(\alpha,\beta)}(x), \tag{4.9}$$

onde  $P_{-1}^{(\alpha,\beta)} = 0$ ,  $P_0^{(\alpha,\beta)} = 1$  e as constantes  $b, c, e$  e  $f$  são calculadas como

$$\begin{aligned} u &= i - 1, \\ g &= \alpha + \beta + i, \\ s &= g + u, \\ h &= s + 1, \\ t &= s - 1, \\ b &= 2igt, \\ c &= hst, \\ e &= s(\alpha^2 - \beta^2), \\ f &= 2(\alpha + u)(\beta + u)h \end{aligned} \tag{4.10}$$

- **Funções de face**, são aquelas associadas aos modos internos.

Finalmente, as funções de face são construídas como segue

$$N_{a+4+i} = \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 (1 - \zeta_3)^k P_i^{(2,2k+5)} (1 - 2\zeta_3) P_k^{(2,2)} \left( \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{1 - \zeta_3} \right), \quad (4.11)$$

onde  $k = p - 3 - i$ .

O esquema da enumeração utilizado neste trabalho para o conjunto de funções  $N_i$  (Eqs. 4.7, 4.8 e 4.11) pode ser visto na Figura 4.1b.

É importante observar que somente os coeficientes das funções hierárquicas associados aos vértices representam deslocamentos nodais, os demais graus de liberdade estão associados a *desvios de linearidade*.

Uma complicação adicional que surge quando se utiliza estas funções base é a de que existe uma incompatibilidade de sinal entre as funções de aresta ímpares comuns a dois elementos adjacentes, quando estes são numerados sempre no sentido anti-horário. Isso significa que, para obter uma malha conforme em todo o domínio, deve-se corrigir o sinal de uma das funções incompatíveis.

A forma encontrada de resolver este problema é, antes de sobrepor a matriz de um elemento, verificar, para cada lado do elemento, se as equações correspondentes às funções de aresta ímpares pertencentes ao elemento vizinho já foram sobrepostas. Caso não tenham sido, as linhas e colunas relativas às funções de aresta ímpares da matriz do elemento que está sendo sobreposto devem ser multiplicadas por  $-1$ .

Resultados da utilização desta base em problemas de flexão de placas semi-espessas podem ser vistos no trabalho de Novotny et al. (1996), onde é feita uma análise de convergência  $hp$ , bem como do fenômeno do *locking* de cisalhamento transversal em placas de Reissner-Mindlin.

# Capítulo 5

## Um Problema de Massa Mínima

Como já mencionado, no problema de otimização topológica de componentes mecânicos se necessita buscar formas que conduzam a peças de alta resistência e mínima massa respeitando certos critérios de geometria e resistência mecânica. Neste sentido, é apresentada uma forma possível de obter uma aproximação para a topologia ótima de componentes estruturais em regime elástico linear, sujeitos a um critério de massa mínima e restrições de falha plástica baseada no critério de von Mises, cuja metodologia foi primeiramente proposta por Souza de Cursi, (1994 e 95).

### 5.1 Formulação Matemática do Problema

Matematicamente, o problema de minimização da massa de um componente mecânico, destinado a transmitir esforços entre dois ou mais pontos dados, pode ser escrito como (Souza de Cursi, 1995)

$$\text{Minimize : } M = \int_{\Omega} \mu d\Omega = \mu \int_S \rho dS, \quad (5.1)$$

$$\text{Sujeito à : } \begin{cases} \sigma_{eq} \leq \bar{\sigma} \\ \rho_{\min} \leq \rho \leq H \end{cases} \quad (5.2)$$

sendo  $M$  a massa total da estrutura,  $\mu$  a massa específica,  $\sigma_{eq}$  a tensão equivalente de von Mises,  $\bar{\sigma}$  a tensão limite do material,  $\rho_{\min}$  a espessura mínima da peça e  $H$  a espessura máxima, como mostrado na Figura 5.1. Em outras palavras, as variáveis de projeto são representadas pela carta de espessura  $\rho$ , a função objetivo é a massa  $M$  da estrutura, a primeira restrição é o critério de resistência mecânica do componente e a segunda repre-

sentas as limitações geométricas. O parâmetro  $\rho$  define então a topologia da peça, ou seja, a parte de  $\Omega$  correspondente às cavidades é dada por  $\Omega_0 = \{\rho \in \Omega \mid \rho = 0\}$ . Já a parcela de  $\Omega$  que representa realmente a peça é escrita como  $\Omega_+ = \{\rho \in \Omega \mid \rho > 0\}$ .

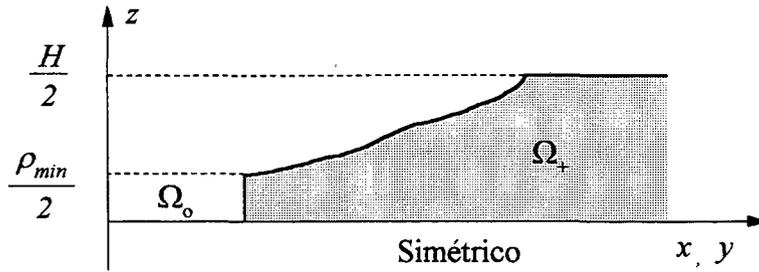


Figura 5.1: Topologia de uma peça na vizinhança de um furo.

Na Seção 2.2, o equilíbrio de um corpo submetido a um estado plano de tensões foi obtido de modo a explicitar o parâmetro geométrico  $\rho$  nas equações. Sendo assim, para obter a topologia ótima de componentes mecânicos deste tipo, pode-se utilizar o resultado do Teorema 7.4 do trabalho de Souza de Cursi (1994, pag 55), o qual fornece os valores ótimos da espessura,  $\rho^*$ , através da seguinte equação não-linear,

$$\rho^* = \text{proj}_{[0,H]} \{ \rho^* h(\sigma_{eq}^*) \}, \quad (5.3)$$

onde, para um número real  $\alpha$ , o operador  $\text{proj}_{[0,H]} \{ \alpha \}$  é a projeção ortogonal de  $\alpha$  sobre o intervalo  $[0, H]$ , ou seja,

$$\text{proj}_{[0,H]} \{ \alpha \} = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha < 0 \\ \alpha, & \text{se } \alpha \in [0, H] \\ H, & \text{se } \alpha > H \end{cases}, \quad (5.4)$$

e  $h$  é uma função tal que  $0 \leq h < 1$ , se  $\sigma_{eq}^* < \bar{\sigma}$ ; e  $h = 1$  se  $\sigma_{eq}^* = \bar{\sigma}$ , isto é,

$$h(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha \leq \alpha_{\min} \\ \alpha, & \text{se } \alpha > \alpha_{\min} \end{cases}, \quad \text{onde } \alpha_{\min} = \frac{\rho_{\min}}{\rho}. \quad (5.5)$$

Portanto, o problema pode ser visto em forma de alternativa:

- Seja  $\rho^* = 0$ , se  $\sigma_{eq}^* < \bar{\sigma}$ ; neste caso tem-se as cavidades, i.e.,  $\Omega_0$ ;
- Seja  $\rho^* > 0$ , se  $\sigma_{eq}^* = \bar{\sigma}$ ; tem-se a saturação do critério de von Mises sobre  $\Omega_+$ .

Isso significa que a topologia ótima é tal que o critério de von Mises deve estar saturado em todo o domínio (*fully stressed design condition*).

Este resultado pode ser interpretado, também, em termos das condições de Karush-Kuhn-Tucker (Bertsekas, 1995), ou seja, a derivada de  $M(\rho)$  em relação a  $\rho$  é constante e não nula. O problema é caracterizado por três restrições de desigualdade  $\rho \geq 0$ ,  $\rho \leq H$  e  $\sigma_{eq} \leq \bar{\sigma}$ . Assim, para que o ótimo exista, ao menos um dos multiplicadores de Lagrange associado às restrições deve ser não nulo e, por consequência, ao menos uma das restrições deve ser saturada. Por outro lado, se  $\rho = H$  e  $\sigma_{eq} < \bar{\sigma}$ , deve ser possível diminuir  $\rho$ , até que o critério de von Mises seja saturado.

Uma limitação da metodologia desenvolvida por Souza de Cursi (1994) é que o problema de transmissão de uma densidade de esforços (forças de corpo) fornece como solução única  $\rho^* = 0$ . De fato, se as condições de contorno do problema descrito por Eq. (2.33) são tomadas como homogênea, ou seja  $\rho \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} = 0$  em  $Q_N$  e  $\mathbf{u} = 0$  em  $Q_D$ , o conjunto de equações que descreve o fenômeno torna-se um problema de Dirichlet, ou seja,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) + \rho \mathbf{f} &= 0 & \text{em } S, \\ \mathbf{u} &= 0 & \text{em } Q_D. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Então,  $\forall k \geq 1$ , tem-se que

$$\boldsymbol{\sigma}\left(\frac{\rho}{k}\right) = \boldsymbol{\sigma}(\rho) = \boldsymbol{\sigma}. \quad (5.7)$$

ou seja, as tensões independem da espessura.

Também,  $\forall k \geq 1$ , tem-se que

$$M\left(\frac{\rho}{k}\right) = \frac{1}{k} M(\rho) \leq M(\rho). \quad (5.8)$$

Seja uma sequência de Cauchy, tal que  $\{\rho_K\} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \rho^*$ , então a Eq. (5.8) fornece,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M(\rho_K) = M(\rho^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho^* = 0. \quad (5.9)$$

Sendo assim, neste caso, é possível diminuir a espessura tanto quanto se queira, sem que o critério de resistência mecânica sature, o que fornece, portanto, a solução trivial do problema, *i.e.*  $\rho^* = 0$  (ver Eq. 5.9).

## 5.2 Algoritmo para Cálculo da Carta de Espessura

Neste trabalho, o equilíbrio escrito em uma forma abstrata, é obtido de maneira aproximada através da discretização, por elementos finitos, dos problemas elípticos de valor no contorno em análise. Isso conduz a um problema onde a Eq. (5.3) deve, também, ser satisfeita no sistema discreto, ou seja, para cada elemento finito  $K$  da estrutura, tem-se,

$$\rho_K^* = \text{proj}_{[0,H]} \{ \rho^* h(\sigma_{eq}^*) \}_K \quad (5.10)$$

Na Eq. (5.10), a carta de espessura ótima elementar,  $\rho_K^*$ , pode ser caracterizada como um ponto fixo de  $h$ . Assim,  $\rho_K^*$  é solução de uma equação do tipo algébrica definida em cada elemento finito, ou seja,

$$\rho_K^* - \rho_K^* [h(\sigma_{eq}^*)]_K = 0 \quad \text{ou} \quad \rho_K^* - \rho_K^* \left( \frac{\sigma_{eq}^*}{\bar{\sigma}} \right)_K^n = 0, \quad \text{para } n = 1/2, 1, 2, \dots \quad (5.11)$$

Esse resultado sugere a utilização de métodos numéricos para obter, de maneira aproximada, a carta de espessura, bem como de diferentes escolhas de  $h$  na Eq. (5.10).

Uma forma possível de calcular  $\rho_K^*$  de forma aproximada é mediante o Método da Relaxação que resulta no seguinte algoritmo:

### Algoritmo do Ponto Fixo

Seja uma espessura inicial  $\rho_K^0$ , uma tolerância  $tol$  e um número máximo de iterações  $maxiter$  fornecidos, então para um dado fator de relaxação  $w > 0$ , tem-se

$$\rho_K^{m+1} = (1 - w) \rho_K^m + w \rho_K^m \left( \frac{\sigma_{eq}^m}{\bar{\sigma}} \right)_K^n \quad (5.12)$$

sendo que o método converge quando  $(\sigma_{eq}^m)_K = \bar{\sigma} \pm tol$  ou pára se  $m = maxiter$ .

### Fim do Algoritmo

No trabalho de Novotny et al. (1997) é proposta uma forma mais sofisticada para resolução aproximada da Eq. (5.3), a qual é baseada no Método de Newton. Muito embora esse algoritmo forneça uma convergência quadrática (no Método do Ponto Fixo tem-se convergência linear), ele mostrou-se extremamente custoso, devido à necessidade do cálculo de sensibilidade para montagem da matriz jacobiana.

### 5.3 Identificação das Cavidades

Para criar os furos, não basta apenas eliminar os elementos cuja espessura está abaixo da mínima através do operador projeção definido em Eq. (5.4). Isso pode provocar o surgimento de contornos tipo *dentes de serra*, indesejáveis no processo de concepção de componentes mecânicos (ver Figura 5.2a). Neste sentido, é proposta uma metodologia de identificação sistemática das cavidades, o que permite obter contornos bastante suaves e bem definidos.

Esta metodologia consiste, primeiramente, em identificar células na malha que são definidas como a composição de todos elementos que compartilham um dado nó em comum, como pode ser visto Figura 5.2b. Em seguida, a cada nó, que é o centro de uma célula, atribui-se um valor de espessura através de algum critério (ver Seção 6.1), ou seja, para o  $i$ -ésimo nó, tem-se uma espessura nodal associada  $\bar{\rho}_i^*$ . Finalmente, compara-se esse valor nodal com a espessura mínima,  $\rho_{\min}$ , definida pelo usuário e, caso  $\bar{\rho}_i^* \leq \rho_{\min}$ , elimina-se a célula, dando lugar aos furos na peça (ver Figura 5.2c).

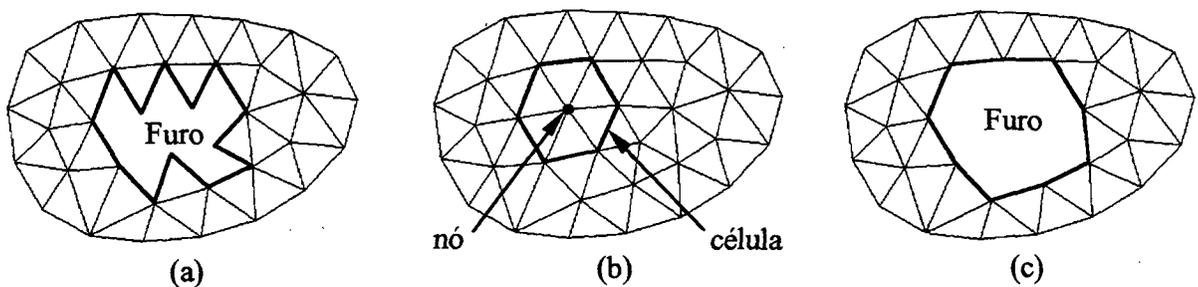


Figura 5.2: Identificação das cavidades: Furo tipo *dentes de serra* (a), conceito de célula (b) e furo desejado (c).

Sendo assim, através desta técnica é possível identificar sistematicamente, tanto as cavidades como o novo contorno da peça de maneira barata e bastante eficiente, sem o surgimento de *dentes de serra* na topologia final da peça.

Por outro lado, uma vez identificada a célula que deve ser retirada para dar lugar às cavidades, basta eliminar as equações associadas ao nó central da mesma, de modo a obter um sistema de equações não singular, tornando o algoritmo mais estável.

## 5.4 Resultados Numéricos

Para verificar os conceitos aqui apresentados, são resolvidos numericamente alguns exemplos clássicos. Os resultados obtidos são comparados, quando possível, com soluções analíticas para a condição de saturação do critério de von Mises sobre todo o domínio. Nos exemplos que seguem, o componente estrutural é feito em aço de densidade  $\mu = 7800 \text{ kg/m}^3$ , módulo de Young  $E = 210 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ . Além disso, é considerado um limite elástico do material  $\bar{\sigma} = 200 \text{ N/mm}^2$ , uma tolerância  $tol = 2\%$  de  $\bar{\sigma}$ , uma espessura máxima  $H = \infty$ , um fator de relaxação  $w = 1$  e  $n = 1$  (ver Eq. 5.12).

### 5.4.1 Barra Submetida a Tração Simples

O cálculo da espessura ótima de uma barra submetida a tração simples uniformemente distribuída é realizado. Considerando a simetria do problema, a barra modelada na Figura 5.3a. é discretizada como 902 elementos finitos lineares, assim como pode ser visto na Figura 5.3b. A dimensão máxima do componente é  $a \times b$ , onde  $a = 50 \text{ mm}$  e  $b = 100 \text{ mm}$ , a carta de espessura inicial é constante e dada por  $\rho^0 = 4 \text{ mm}$  e o carregamento distribuído é  $q = 400 \text{ N/mm}$ .

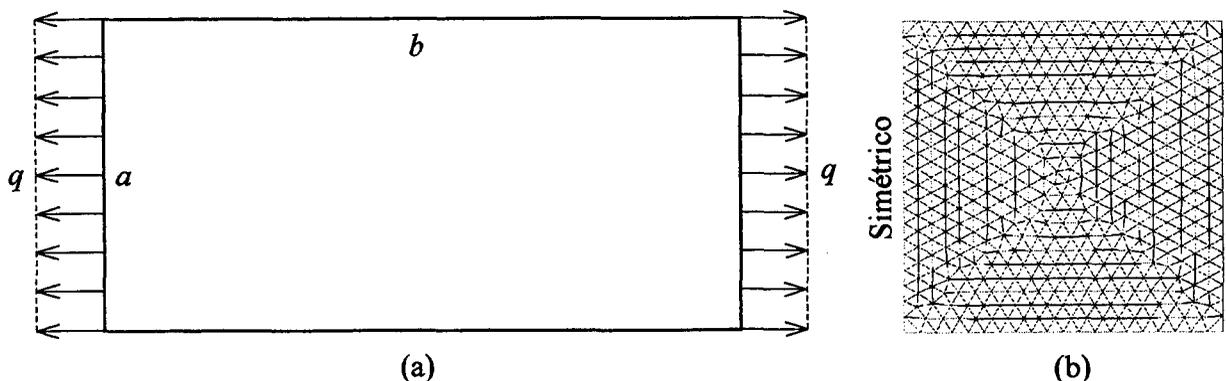


Figura 5.3: Barra submetida a tração simples: Modelo (a) e malha (b).

A solução analítica para a espessura ótima pode ser facilmente calculada como  $\rho^* = q/\bar{\sigma}$ . Neste caso, tem-se que  $\rho^* = 2 \text{ mm}$  e o processo iterativo converge em uma simples

iteração para  $\rho^1 = 2 \text{ mm}$ , o que está de acordo com a solução analítica do problema. Esse exemplo, apesar de simples, mostra que o método converge rapidamente para a solução ótima.

### 5.4.2 Viga Curta Simplesmente Apoiada

Nesta Seção, o projeto de uma viga curta simplesmente apoiada, submetida a uma força concentrada no centro é realizado. Considerando a simetria do problema, a viga modelada na Figure 5.4a é discretizada com 902 elementos finitos lineares, como pode ser visto na Figura 5.4b. A dimensão máxima é  $a \times b$ , onde  $a = 50 \text{ mm}$  e  $b = 100 \text{ mm}$ , a espessura inicial é dada por  $\rho^0 = 4 \text{ mm}$  e a força concentrada é  $F = 5000 \text{ N}$ .

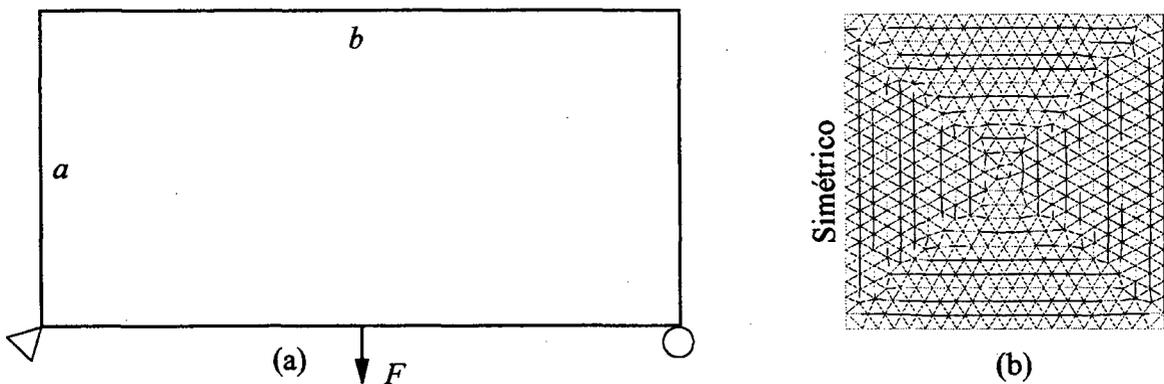


Figura 5.4: Viga curta simplesmente apoiada: Modelo (a) e malha (b).

No decorrer do processo iterativo são adotadas várias espessuras mínimas,  $\rho_{\min}$ , de modo a obter não apenas uma solução possível para o problema em análise. De fato, na Figura 5.5 podem ser vistos os resultados obtidos após o processo de otimização, onde é possível identificar três configurações distintas, embora factíveis, para o componente estrutural em análise. No entanto, as três soluções são conceitualmente similares, onde todas se caracterizam por um arco reforçado através de barras.

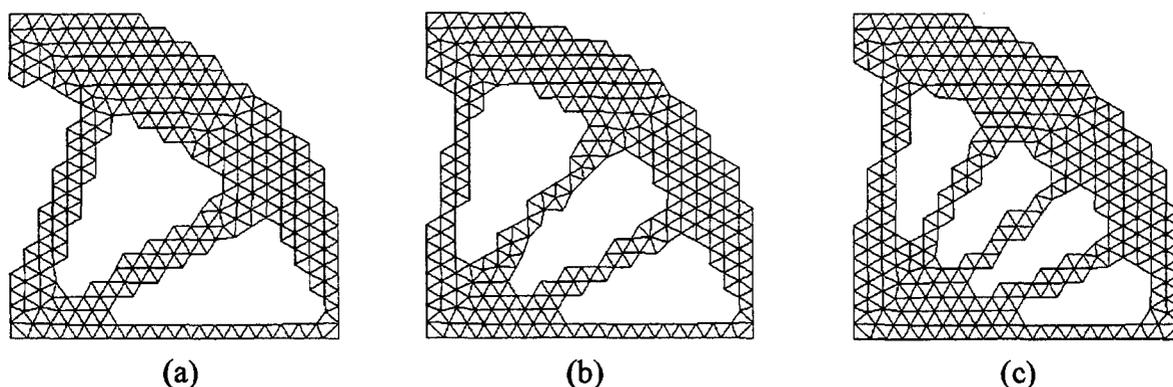


Figura 5.5: Possíveis soluções: Arco reforçado por duas (a), três (b) e quatro (c) barras.

## 5.5 Comentários Adicionais

Neste Capítulo, é apresentada uma formulação que permite determinar a topologia ótima de componentes estruturais em regime elástico linear e estado plano de tensões, sujeitos a um critério de massa mínima e restrições de falha plástica de von Mises. O Método da Relaxação mostrou-se eficiente do ponto de vista de convergência quando utilizado na resolução da equação não-linear que fornece a carta de espessura ótima da peça.

O caso analisado na Seção 5.4.2 mostra claramente que o problema abordado é de otimização não-convexa, portanto, o algoritmo desenvolvido pode fornecer mais de uma solução possível para um mesmo problema (mínimos locais), salvo em casos extremamente simples, tal como o analisado na Seção 5.4.1. Assim, cabe ao engenheiro escolher adequadamente os parâmetros de otimização, sobretudo  $\rho_{\min}$ , de modo a obter uma solução satisfatória.

Uma desvantagem da metodologia de otimização topológica aqui apresentada, bem como de outras fundamentadas no corte dos elementos finitos que não contribuem estruturalmente, é que tem-se uma topologia resultante extremamente grosseira. Sendo assim, no Capítulo 6 será mostrado como a técnica  $h$  adaptativa pode vir a ser utilizada para melhorar de forma alternativa a geometria do componente mecânico.

## Capítulo 6

# Estratégia $h$ Adaptativa na Otimização Topológica

Como visto no Capítulo 5 (Seção 5.4), as técnicas de otimização topológica conduzem a geometrias bastante grosseiras. Neste sentido, é proposta uma forma alternativa para melhorar a geometria da peça obtida via otimização topológica mediante a identificação do novo contorno e posterior refino  $h$  adaptativo nessa região de modo a obter a forma final do componente. Em outras palavras, a estratégia  $h$  adaptativa, normalmente utilizada no controle de erro de discretização, é agora empregada para melhor representar a geometria da peça no processo iterativo de otimização topológica.

### 6.1 O Estimador $Z^2$ Modificado no Problema de Otimização Topológica

Quando o problema de otimização topológica é discretizado, ou seja, resolvido para cada elemento finito, o resultado obtido pode ser bastante comprometido em termos de qualidade numérica no que diz respeito ao cálculo das tensões como na representação da geometria otimizada, devido à utilização de malhas grosseiras.

Uma forma imediata e evidente de resolver esse problema é empregar malhas bastante refinadas desde o início do processo. No entanto, essa metodologia, além de ser extremamente custosa computacionalmente e pouco eficiente, pode tornar o problema instável, pois à cada elemento finito  $K$  está associado uma variável de projeto  $\rho_K$ .

Outra maneira é refinar a malha nos locais onde o erro de aproximação é grande

(estratégias adaptativas convencionais) ou onde a geometria do problema otimizado esteja mal representada ou ainda em ambos os casos.

Sendo assim, neste trabalho se propõem uma forma de identificar a nova fronteira da peça de maneira sistemática e guiar um refinamento  $h$  adaptativo nessa região de modo a melhorar a geometria otimizada.

Isso é alcançado mediante uma modificação no estimador de erro de Zienkiewicz & Zhu, o qual é utilizado como um *indicador de salto* que auxilia na identificação do novo contorno e possibilita o refinamento adaptativo nesta região.

Inspirado no trabalho de Zienkiewicz & Zhu (1987), é definido o escalar *salto*  $s$  como,

$$s^2 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_h)^T (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_h) d\Omega. \quad (6.1)$$

onde,  $\boldsymbol{\rho}$  e  $\boldsymbol{\rho}_h$  são os vetores que representam a carta de espessura exata e aproximada, respectivamente, cujas componentes são os valores de espessura no baricentro de cada elemento.

Substituindo  $\boldsymbol{\rho}$  por  $\boldsymbol{\rho}^*$  na Eq. (6.1) e fazendo uma projeção desse último nas funções base, ou seja,  $\boldsymbol{\rho}^* = \mathbf{N}\bar{\boldsymbol{\rho}}^*$ , onde  $\bar{\boldsymbol{\rho}}^*$  denota o vetor de espessuras nodais, tem-se uma forma aproximada para a Eq. (6.1), *i.e.*

$$s^2 \approx \int_{\Omega} (\mathbf{N}\bar{\boldsymbol{\rho}}^* - \boldsymbol{\rho}_h)^T (\mathbf{N}\bar{\boldsymbol{\rho}}^* - \boldsymbol{\rho}_h) d\Omega. \quad (6.2)$$

A minimização da Eq. (6.2) em relação aos valores de espessuras nodais  $\bar{\boldsymbol{\rho}}^*$  resulta no seguinte sistema de equações,

$$\mathbf{m}\bar{\boldsymbol{\rho}}^* = \mathbf{d}, \quad (6.3)$$

sendo  $\mathbf{m}$  a matriz massa de densidade unitária dado pela Eq. (3.11) e o vetor  $\mathbf{d}$  escrito, como

$$\mathbf{d} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\rho}_h d\Omega. \quad (6.4)$$

Similarmente ao trabalho de Zienkiewicz & Zhu (1987), tem-se o parâmetro  $\eta_{ad}$  que fornece uma informação do tamanho novo tamanho do elemento em função do valor do *salto* calculado, tal que,

$$\eta_{ad} = \frac{s_{ad}}{s} = \frac{\sqrt{m} s_{ad}^K}{s}, \quad (6.5)$$

$$s_{ad}^K = \eta_{ad} \frac{s}{\sqrt{m}}, \quad (6.6)$$

onde  $K$  é o  $K$ -ésimo elemento e  $m$  denota o número total de elementos da malha.

Dessa forma, pode-se definir o parâmetro de enriquecimento local da malha como

$$\xi = \frac{s^K}{s_{ad}^K}. \quad (6.7)$$

Sendo o novo tamanho de elemento devido ao *salto* calculado por

$$h_n = \frac{h}{\xi}. \quad (6.8)$$

Assim, é possível desencadear um refino  $h$  adaptativo da malha em função da carta de espessura. No entanto, como esse resultado não está matematicamente bem posto, nada garante que essa metodologia seja capaz de controlar o erro de discretização do problema de forma satisfatória.

Neste sentido, o refino  $h$  adaptativo é utilizado apenas para auxiliar na identificação da geometria otimizada, com o intuito de dispensar uma posterior fase de otimização de forma do componente. Isso é conseguido, mediante uma modificação do conceito da carta de espessura, dando lugar à *carta de espessura binária*.

## 6.2 Carta de Espessura Binária

Note que o *salto*  $s$  está associado apenas com a representação da geometria discretizada. Assim, para forçar que o refino ocorra somente na borda da peça, necessita-se redefinir a carta de espessura da seguinte maneira:

- Se  $\rho_K > 0$ , então faça  $\rho_K = 1$ ; caso contrário,  $\rho_K = 0$ ;
- Se  $s_K = 0$ , então faça  $\xi = 1$ .

A essa nova carta de espessura dá-se o nome de *carta de espessura binária*.

No princípio isso pode parecer estranho, mas quando a *carta de espessura binária* é utilizada no cálculo do *salto*, o parâmetro  $\eta_{ad}$  fornece uma estimativa bastante precisa de

quão menor os elementos devem ficar no contorno da peça. Além disso, na região onde  $\rho > 0$ , a topologia da malha é preservada.

Uma outra vantagem dessa metodologia é que o refino ocorre de maneira uniforme no contorno do modelo otimizado, *i.e.*, nessa região o tamanho dos elementos distribuem-se de maneira homogênea, identificando a nova geometria da peça de modo barato e preciso.

É notório que o cálculo de tensões melhora mediante a utilização desta técnica. No entanto, é importante observar que essa melhoria não é necessariamente a ótima, como aquela apresentada nos trabalhos de Babuška et al. (1997), Zienkiewicz & Zhu (1987), Oden et al. (1989) e no Capítulo 7 deste trabalho. Apesar disto, acredita-se que através de um enriquecimento  $p$  e/ou  $hp$  adaptativo na última iteração do problema se consegue uma precisão satisfatória, tanto na definição da topologia como no cálculo de tensões. Isto será discutido no último Capítulo deste trabalho.

### 6.3 Algoritmo para Identificação da Nova Geometria

Necessita-se, agora, estabelecer uma maneira de desencadear o refino  $h$  adaptativo no processo de otimização topológica de modo a permitir uma identificação precisa da nova geometria. A estratégia proposta consiste nos seguintes passos:

1. Resolver o problema de otimização topológica tal como apresentado no Capítulo 5;
2. Fornecer  $\eta_{ad}$ ;
3. Com auxílio da carta de espessura binária, calcular o salto  $s$  entre dois elementos adjacentes, o que conduz a duas situações distintas:
  - (a) Caso  $s > 0$ , tem-se que a interface desses elementos é parte integrante do novo contorno da peça. Então, através da Eqs. (6.5, 6.6 e 6.7), respectivamente, calcula-se o novo tamanho do elemento,  $h_n$ , sendo  $h_n < h$ , de modo a forçar o refino no contorno da peça otimizada;
  - (b) Caso  $s = 0$ , congela-se a malha fazendo  $\xi = 1$ ;
4. Voltar ao item 1 até obter uma geometria satisfatória.

Note que não existe um critério de parada para o método, cabendo ao engenheiro decidir intuitivamente se a geometria resultante em cada iteração é satisfatória. De qualquer modo, os experimentos numéricos realizados nesse trabalho indicam que, para  $\eta_{ad} = 0.1$ , necessita-se repetir o procedimento acima descrito entre três e quatro vezes, para chegar a um bom resultado, no sentido de obter uma clara identificação da geometria.

## 6.4 Resultados Numéricos

Com o intuito de ilustrar a metodologia desenvolvida no presente trabalho são resolvidos numericamente alguns problemas. Os resultados obtidos são comparados, quando possível, com soluções analíticas para a condição de saturação do critério de von Mises no domínio.

Nos exemplos que seguem, o componente estrutural é feito em aço de densidade  $\mu = 7800 \text{ kg/m}^3$ , módulo de Young  $E = 210 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ . Além do mais, é considerado um limite elástico do material  $\bar{\sigma} = 200 \text{ N/mm}^2$ , uma tolerância  $tol = 2\%$  de  $\bar{\sigma}$ , uma espessura máxima  $H = \infty$ , um fator de relaxação  $w = 1$  e  $n = 1$ . Em todos os casos, o refino  $h$  da malha é desencadeado com  $\eta_{ad} = 0.1$ , sendo realizadas 4 iterações até atingir a forma final do componente mecânico, com exceção apenas do exemplo mostrado na Seção 6.4.5, onde são feitas 3 iterações.

### 6.4.1 Projeto de uma Barra

O projeto de uma barra submetida a um carregamento uniformemente distribuído é realizado. A dimensão máxima permitida do componente a ser projetado é  $a \times b$ , onde  $a = 50 \text{ mm}$  e  $b = 100 \text{ mm}$ , a carta de espessura inicial é constante e dada por  $\rho^0 = 4 \text{ mm}$  e o carregamento distribuído é  $q = 400 \text{ N/mm}$ , aplicado sobre o contorno  $c$  do domínio, onde  $c = 20 \text{ mm}$ , tal como mostrado na Figura 6.1.

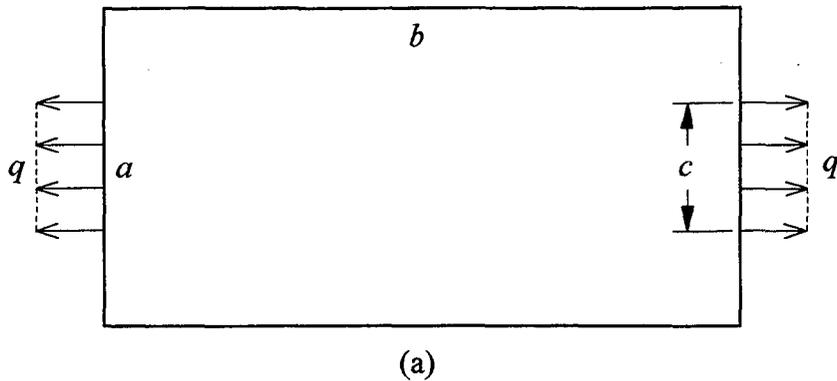


Figura 6.1: Projeto de uma barra: Modelo empregado.

Considerando a simetria do problema, a barra modelada na Figura 6.1 é discretizada com 902 elementos finitos lineares, assim como pode ser visto na Figura 6.2a. O resultado obtido após otimização topológica é apresentado na Figura 6.2b, onde é possível identificar uma barra cuja dimensão é aproximadamente  $b \times c$ .

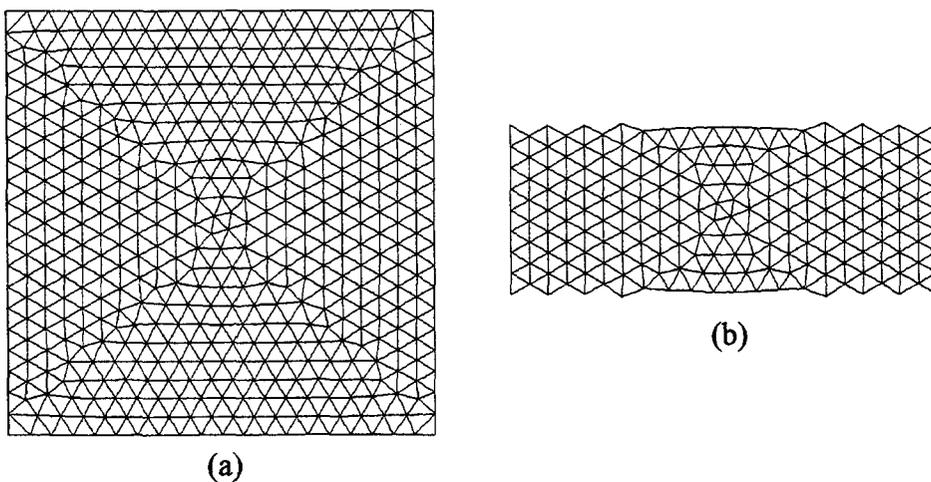


Figura 6.2: Topologia final: Malha (a) e peça otimizada (b).

Utilizando o procedimento  $h$  adaptativo para identificar a nova geometria (ver Figura 6.3a), tem-se a forma final da peça, assim como mostrado na Figura 6.3b.

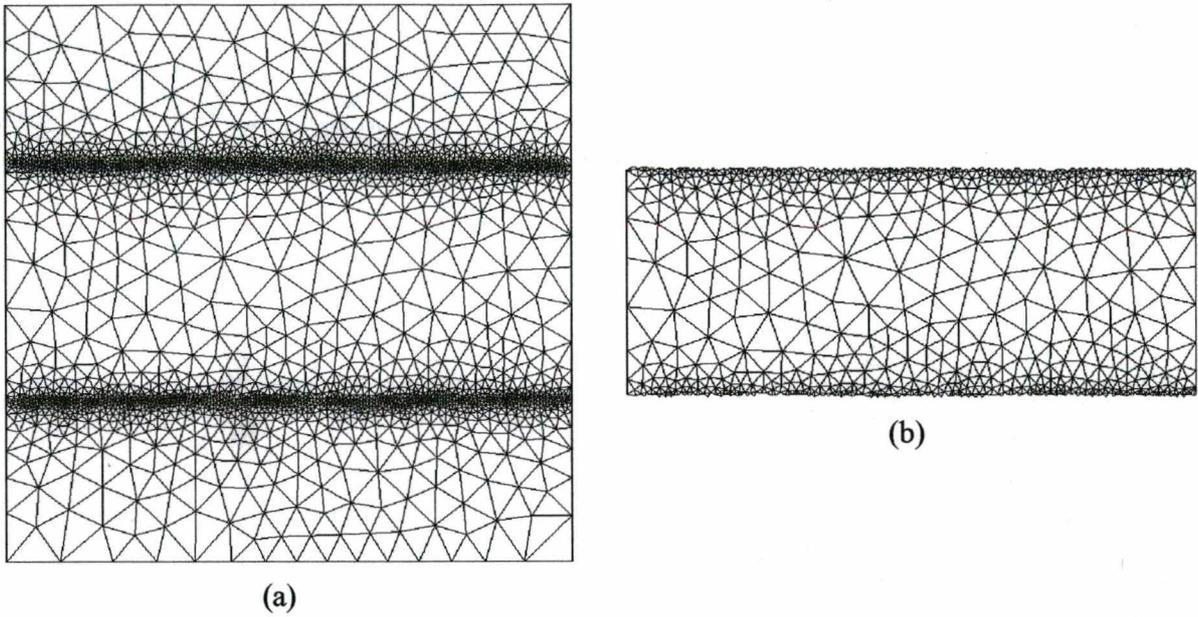


Figura 6.3: Forma final: Malha  $h$  (a) e peça otimizada (b).

A solução analítica para a espessura ótima pode ser facilmente calculada como  $\rho^* = q/\bar{\sigma}$ . Neste caso, tem-se que  $\rho^* = 2 \text{ mm}$  e o processo iterativo converge para  $\rho_n \approx 2 \text{ mm}$  (ver Figura 6.4). A condição de saturação do critério de von Mises, atingida ao final do processo iterativo, é mostrada na Figura 6.5.

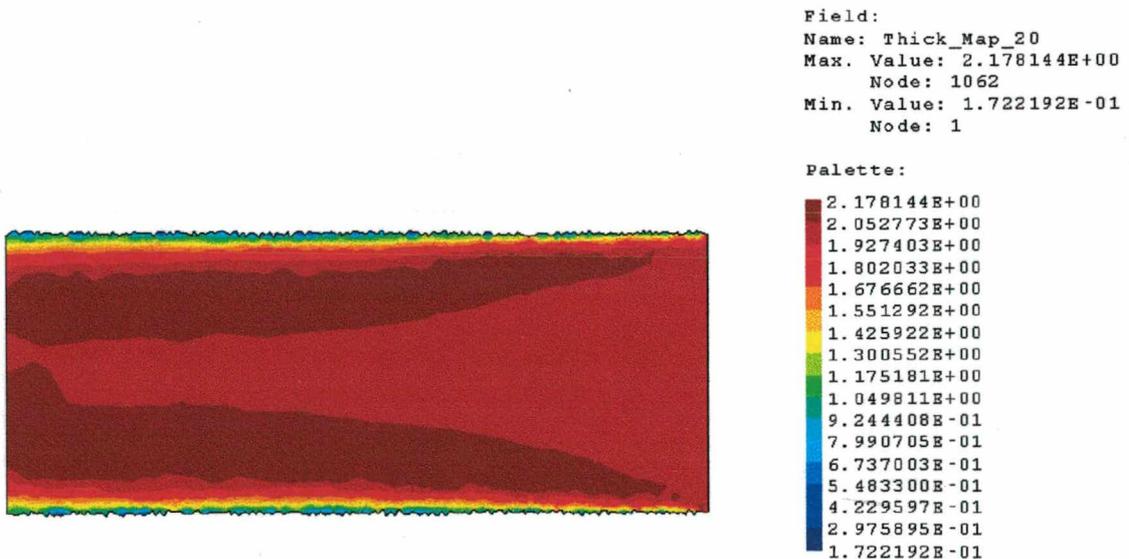


Figura 6.4: Carta de espessuras.

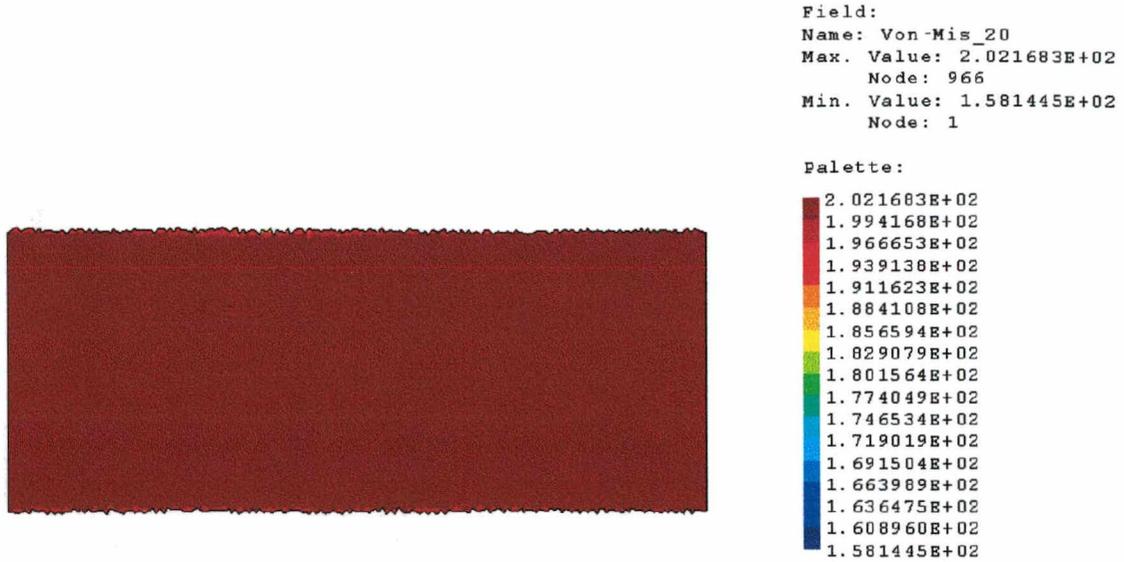


Figura 6.5: Tensão equivalente de von Mises.

### 6.4.2 Projeto de uma Viga Curta

Neste exemplo é realizado o projeto de uma viga curta simplesmente apoiada, submetida a uma força concentrada no centro. O modelo empregado é o mesmo da Seção 5.4.2, o qual pode ser visto na Figura 5.4.

Considerando a simetria do problema, a viga modelada na Figura 5.4 é discretizada com 902 elementos finitos, assim como pode ser visto na Figura 6.6a. O resultado obtido após otimização topológica é apresentado na Figura 6.6b, onde tem-se uma possível solução, caracterizada por um arco reforçado por barras.

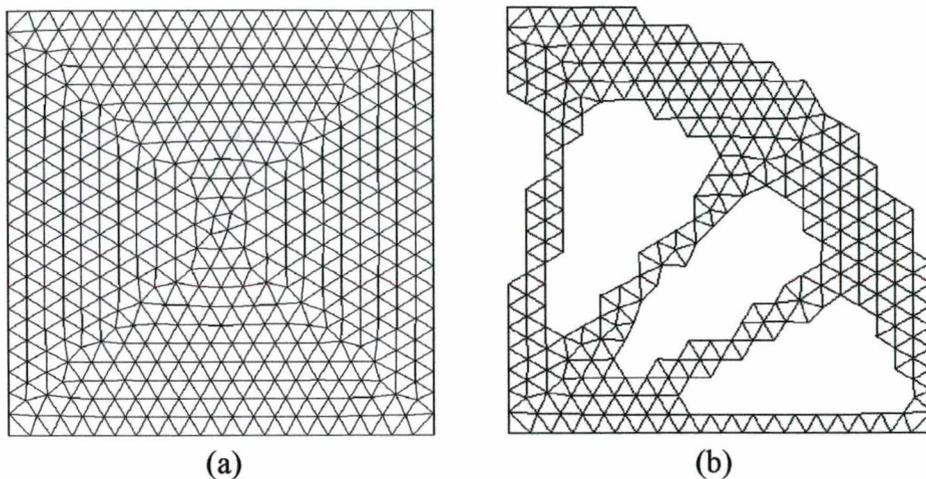


Figura 6.6: Topologia final: Malha (a) e peça otimizada (b).

Mediante estratégia  $h$  adaptativa (ver Figura 6.7a), chega-se à forma final do componente, o qual pode ser visto na Figura 6.7b.

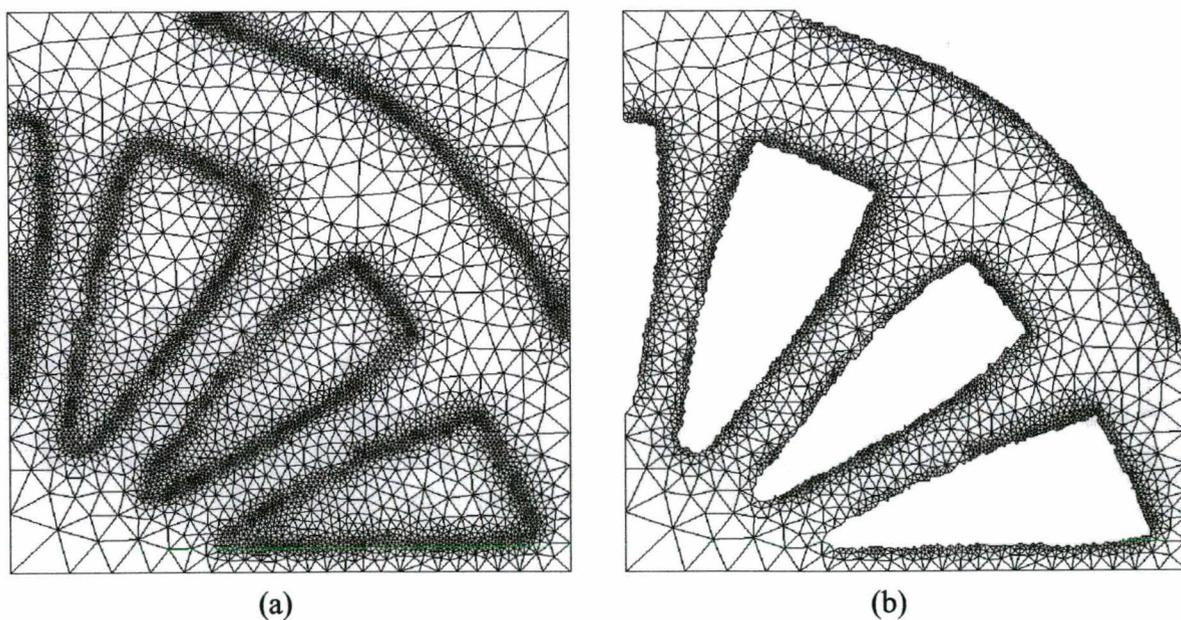


Figura 6.7: Forma final: Malha  $h$  (a) e peça otimizada (b).

Nas Figuras 6.8 e 6.9 tem-se, respectivamente, a carta de espessura e a tensão equivalente de von Mises saturada em todo o domínio.

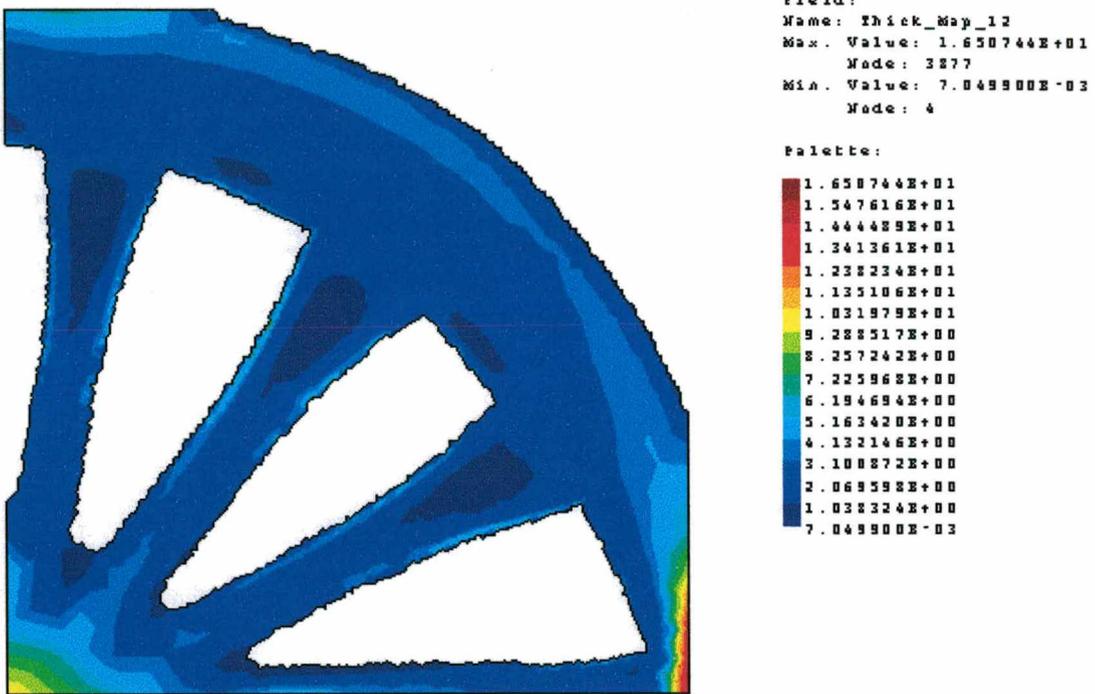


Figura 6.8: Carta de espessura.

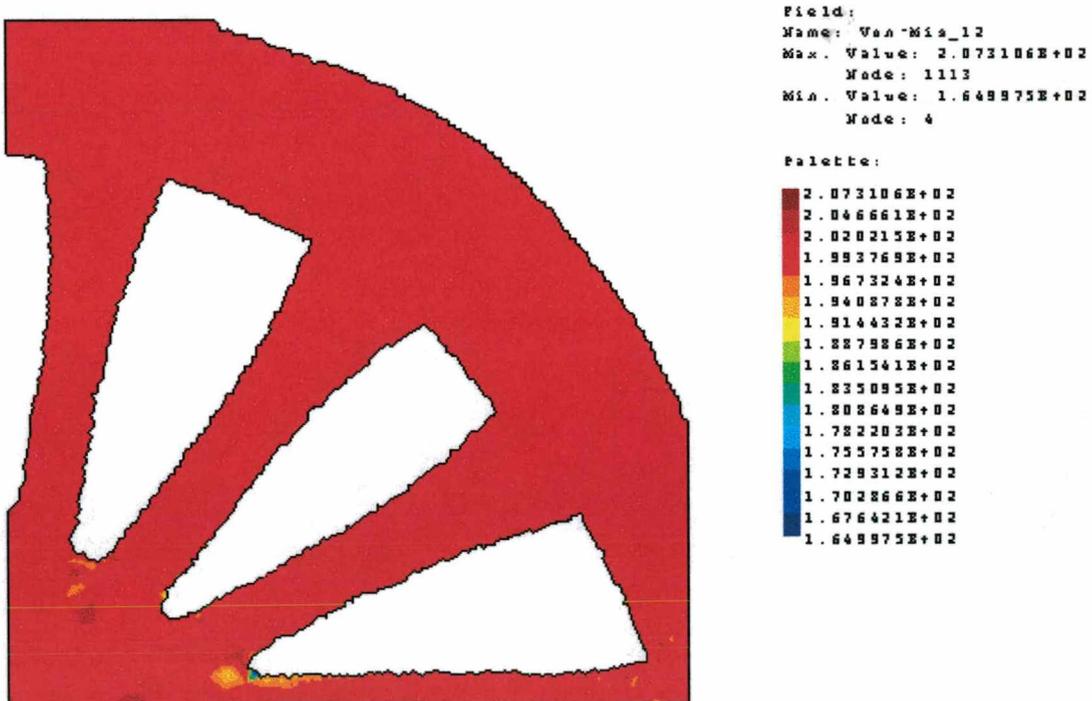


Figura 6.9: Tensão equivalente de von Mises.

O contorno da viga curta pode então ser visto na Figura 6.10, onde é mostrado o modelo completo obtido ao final do processo iterativo.

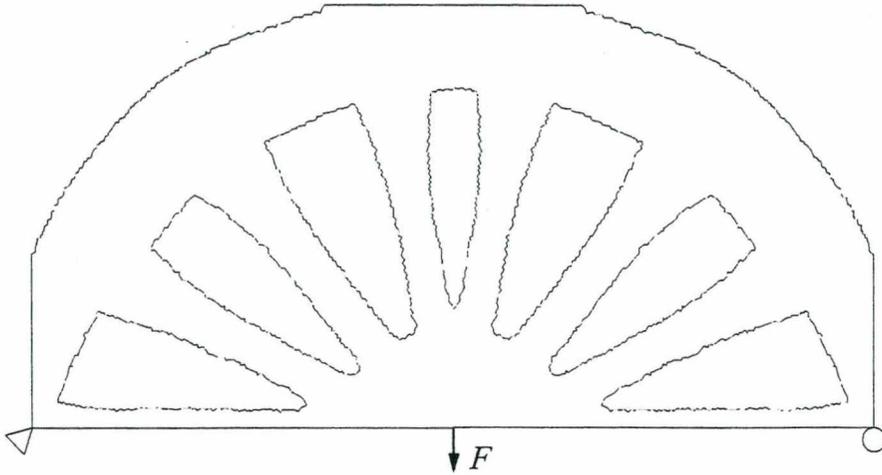


Figura 6.10: Projeto de uma viga curta: Contorno obtido.

### 6.4.3 Projeto de uma Treliça Plana

Aqui, o projeto de uma treliça plana é realizado. A dimensão máxima do componente a ser otimizado (ver Figura 6.11) é dada  $a \times b$ , onde  $a = 50 \text{ mm}$  e  $b = 150 \text{ mm}$ , a espessura inicial é  $\rho^0 = 4 \text{ mm}$  e a força concentrada é  $F = 5000 \text{ N}$ , aplicada no centro da viga.

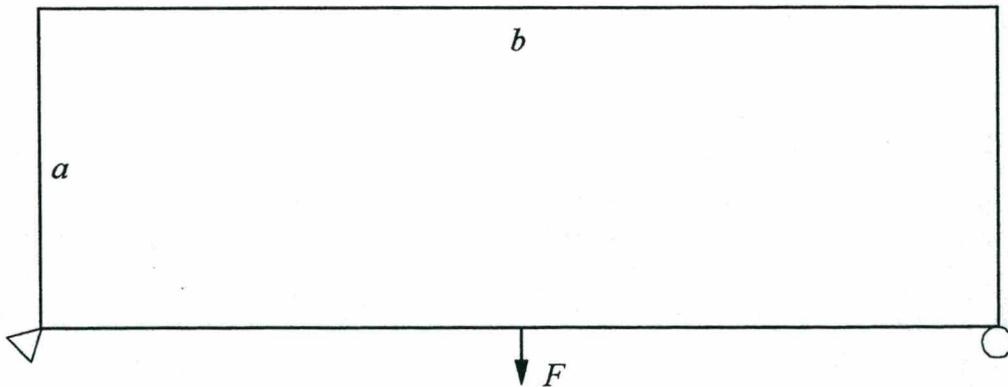


Figura 6.11: Projeto de uma treliça plana: Modelo empregado.

O componente modelado na Figura 6.11 é discretizado com 1362 elementos finitos, considerando a simetria do problema, sendo que a malha inicial é mostrada na Figura 6.12a. Uma possível solução, obtida após processo de otimização topológica é mostrada na Figura 6.12b, onde nota-se uma treliça plana claramente caracterizada.

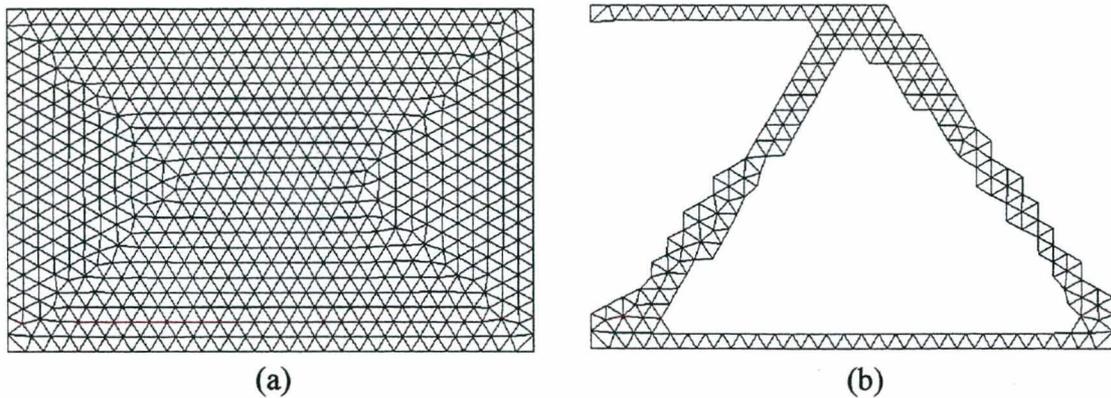


Figura 6.12: Topologia final: Malha (a) e peça otimizada (b).

Utilizando o procedimento  $h$  adaptativo para identificar a nova geometria (ver Figura 6.13a) se obtém a forma final da peça tal como mostrada na Figura 6.13b.

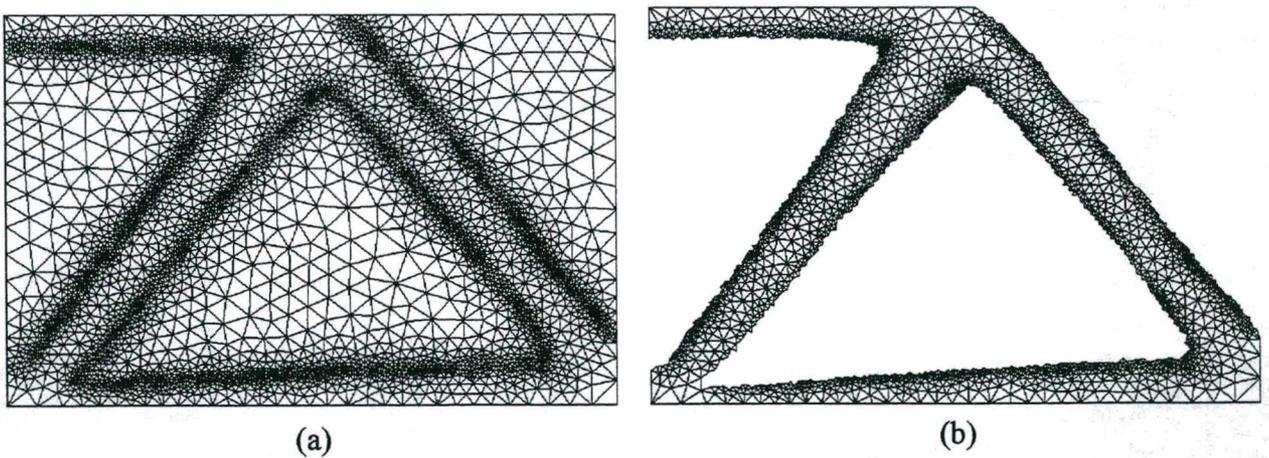


Figura 6.13: Forma final: Malha  $h$  (a) e peça otimizada (b).

A carta de espessura bem como a de tensão equivalente de von Mises, obtidas ao final do processo iterativo, podem ser vistas nas Figuras 6.14 e 6.15, respectivamente. Através da análise da Figura 6.15, é possível verificar a condição de saturação das tensões em todo o domínio.

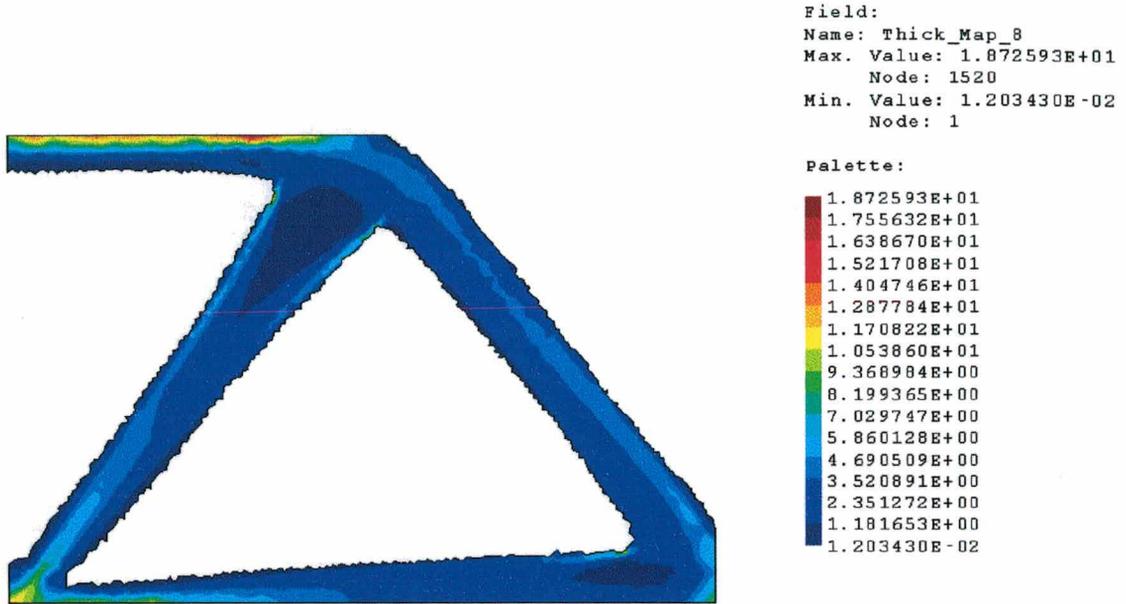


Figura 6.14: Carta de espessura.

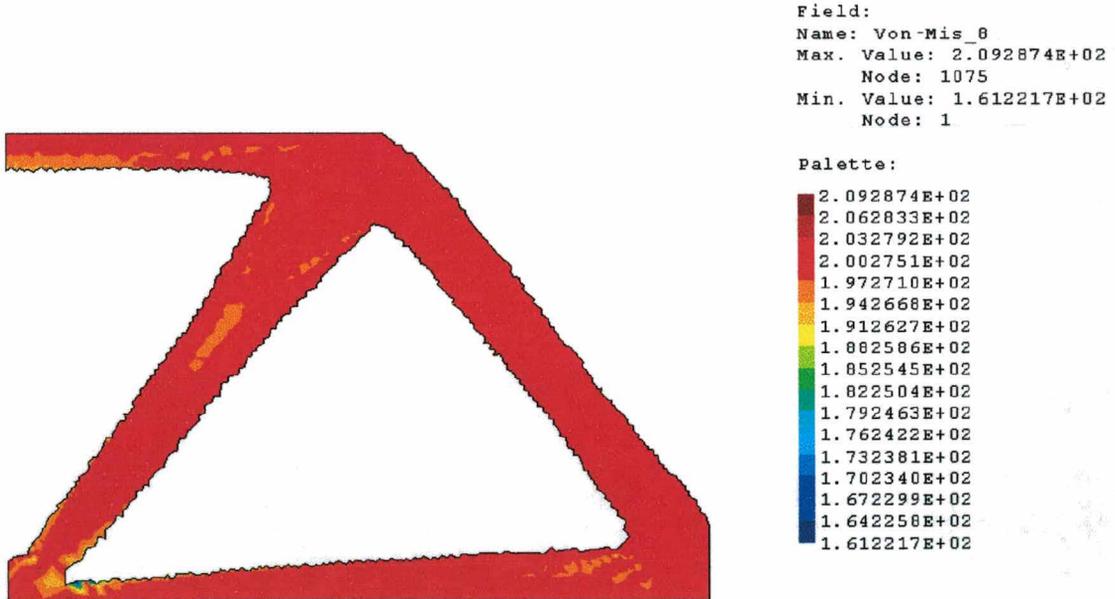


Figura 6.15: Tensão equivalente von Mises.

O contorno completo da treliça plana obtida ao final do processo iterativo é mostrado na Figura 6.16.

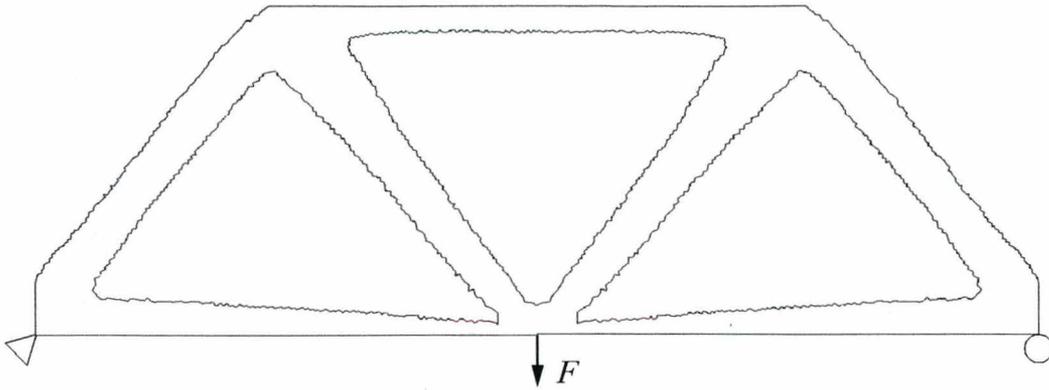


Figura 6.16: Projeto de uma treliça plana: Contorno obtido.

### 6.4.4 Projeto de uma Viga

Um caso bastante comum de projeto consiste em determinar a topologia de um componente mecânico que possui algum tipo de restrição quanto a sua forma final. Assim, na Figura 6.17 tem-se uma viga simplesmente apoiada, submetida a uma força concentrada no centro, onde os furos exemplificam tais restrições (passagem de cabos, dutos, etc.). As dimensões do componente são  $a = 40 \text{ mm}$ ,  $b = 240 \text{ mm}$ ,  $c = 30 \text{ mm}$  e  $d = 20 \text{ mm}$ , a espessura inicial é dada por  $\rho^0 = 4 \text{ mm}$  e a força concentrada é de  $F = 2000 \text{ N}$ .

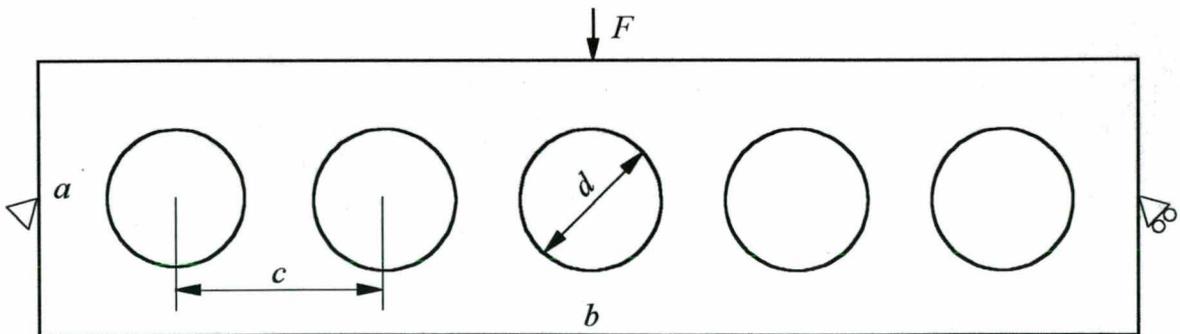


Figura 6.17: Projeto de uma viga: Modelo empregado.

Considerando a simetria do problema em análise, a viga (Figura 6.17) é discretizada com 1358 elementos finitos, como pode ser visto na Figura 6.18a. O resultado obtido após processo de otimização topológica é mostrado na Figura 6.18b, onde é possível visualizar uma possível solução para o problema.

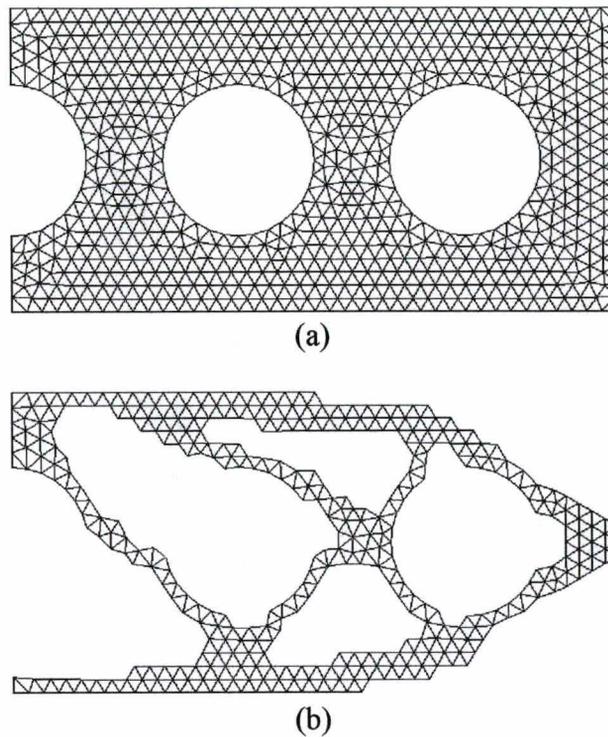
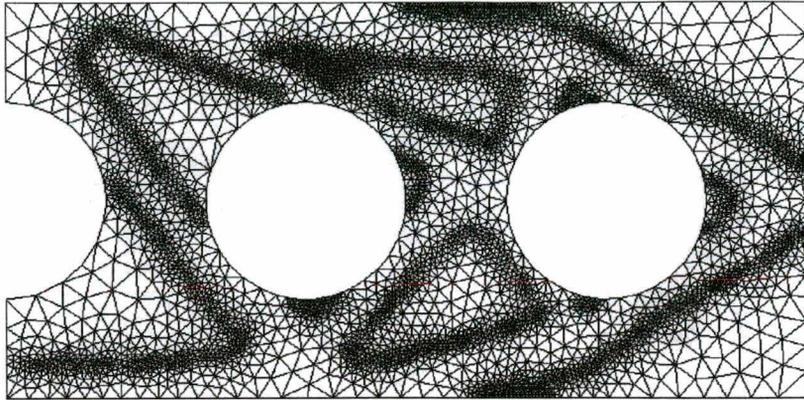
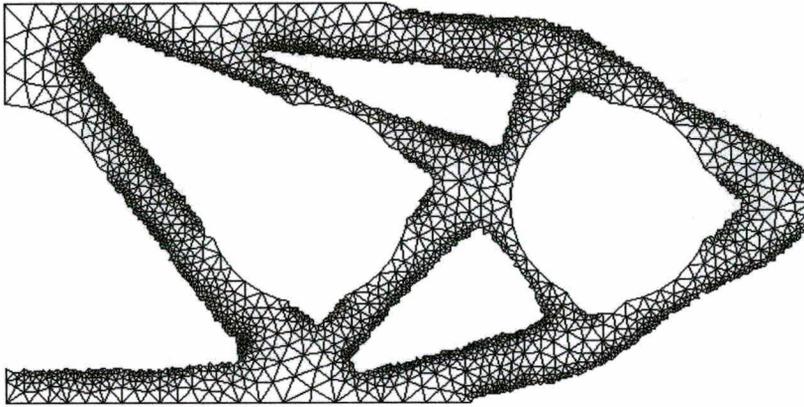


Figura 6.18: Topologia final: Malha (a) e peça otimizada (b).

Mediante estratégia  $h$  adaptativa (ver Figura 6.19a) se obtém a forma final da peça, a qual pode ser vista na Figura 6.19b.



(a)



(b)

Figura 6.19: Forma Final: Malha  $h$  (a) e peça otimizada (b).

Na Figura 6.20 é apresentada a carta de espessura obtida ao final do processo iterativo, onde se nota uma concentração da massa em torno dos furos previamente colocados. A condição de saturação do critério de von Mises para a mesma situação é mostrada na Figura 6.21.

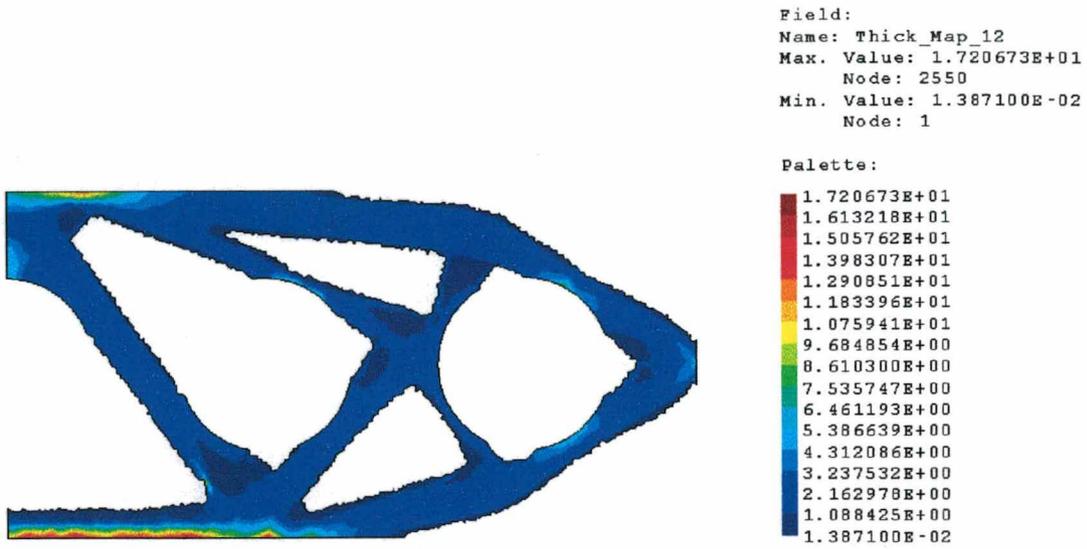


Figura 6.20: Carta de espessura.

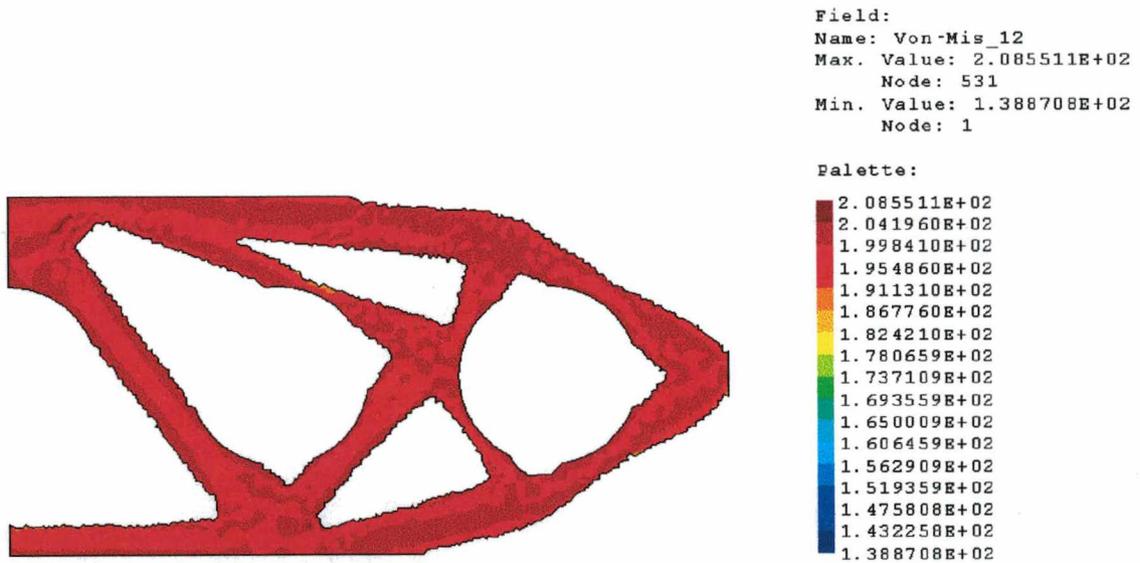


Figura 6.21: Tensão equivalente de von Mises.

Na Figura 6.22 é mostrado o contorno completo da viga obtida ao final do processo iterativo.

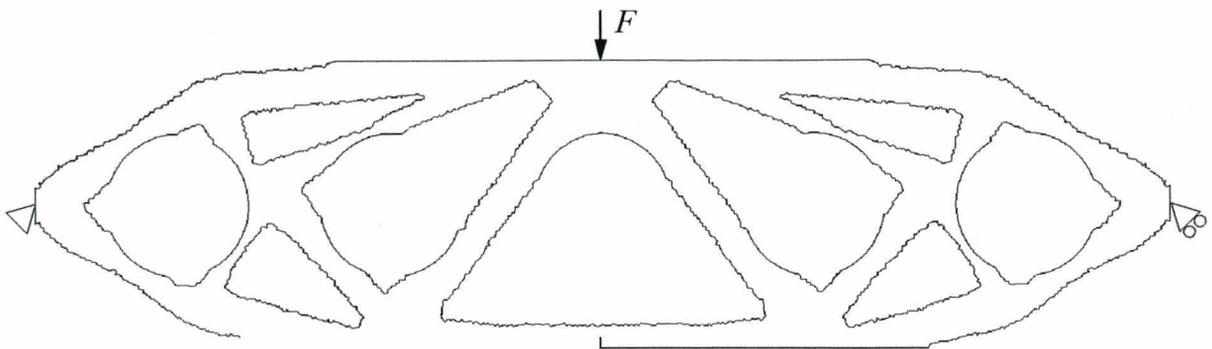


Figura 6.22: Projeto de uma viga: Contorno obtido.

### 6.4.5 Projeto de uma Bicicleta

Este exemplo mostra como a otimização topológica e adaptatividade  $h$  podem ser combinadas para revisar o projeto estrutural de um produto clássico e já consagrado: uma bicicleta.

Na Figura 6.23 é apresentado o *lay-out* de uma bicicleta comum sobreposta à configuração inicial a ser otimizada. O desenho da bicicleta, bem como o estado de carregamento ao qual a mesma está submetida, foram extraídos do trabalho de Rasmussen et al. (1992).

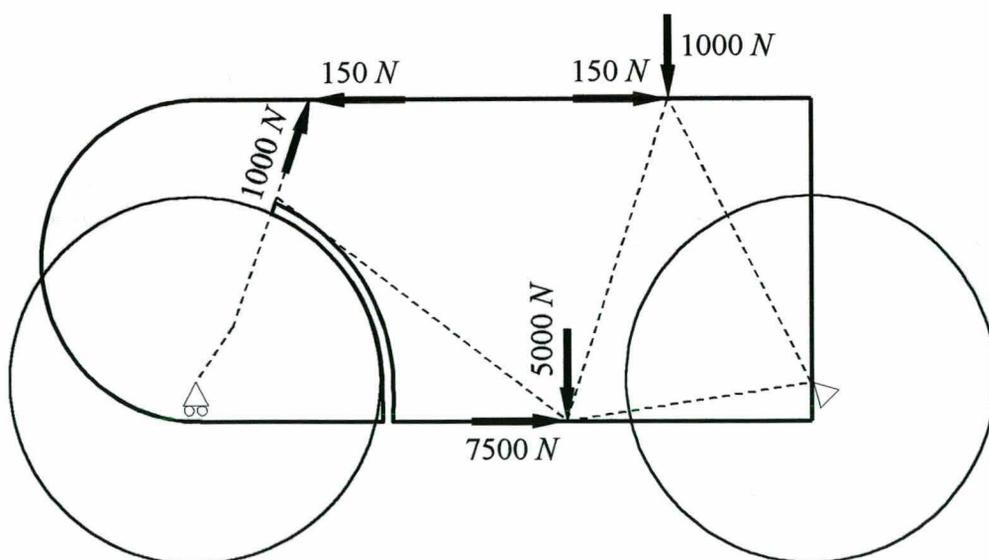


Figura 6.23: Projeto de uma bicicleta: Modelo empregado.

A malha utilizada para discretizar o domínio de concepção pode ser vista na Figura 6.24a. Já na Figura 6.24b é mostrado o resultado obtido após o processo de otimização topológica, mas sem refino  $h$ .

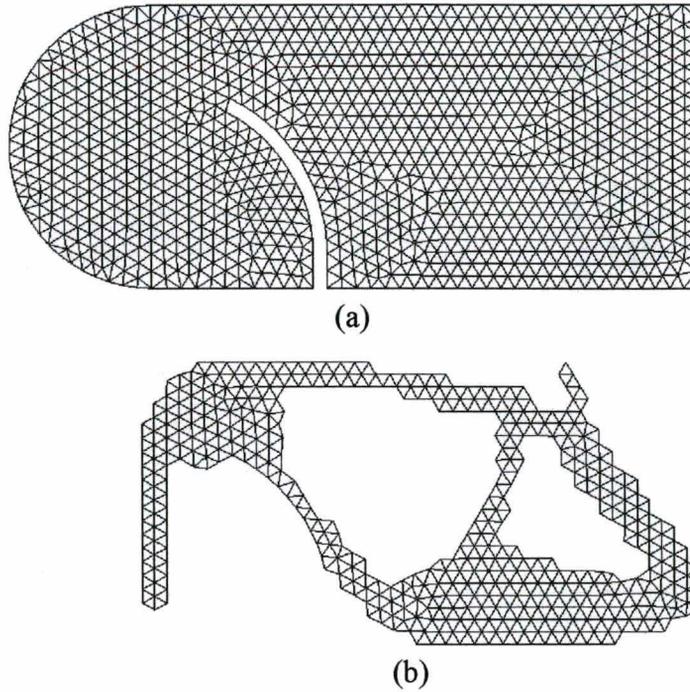
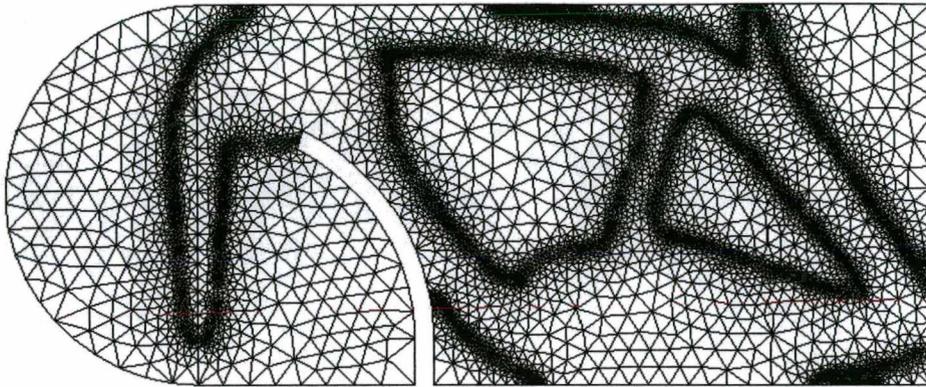
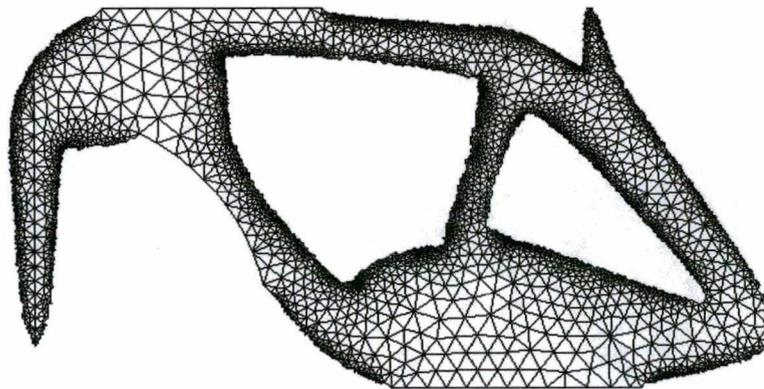


Figura 6.24: Topologia final: Malha (a) e estrutura otimizada (b).

A forma final da bicicleta obtida via refino  $h$  da malha (Figura 6.25a) pode ser vista na Figura 6.25b, onde se tem a estrutura da bicicleta sensivelmente diferente da concepção clássica (Figura 6.23).



(a)



(b)

Figura 6.25: Forma final: Malha  $h$  (a) e configuração otimizada (b).

Nas Figuras 6.26 e 6.27 tem-se, respectivamente, a carta de espessura e a tensão equivalente de von Mises saturada em todo o domínio.

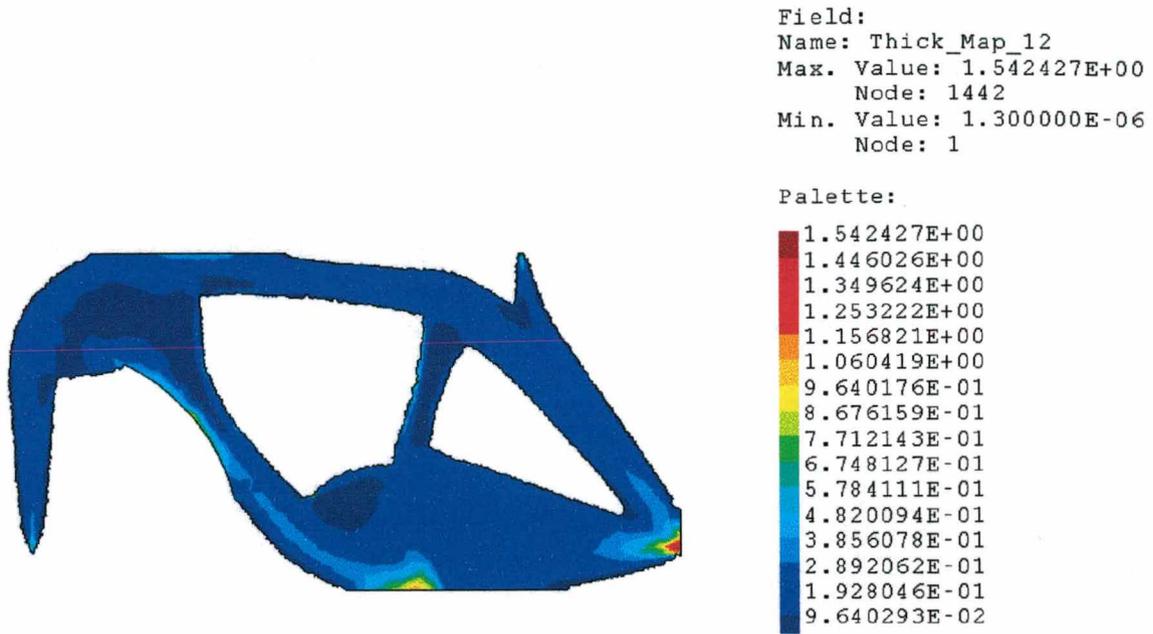


Figura 6.26: Carta de espessura

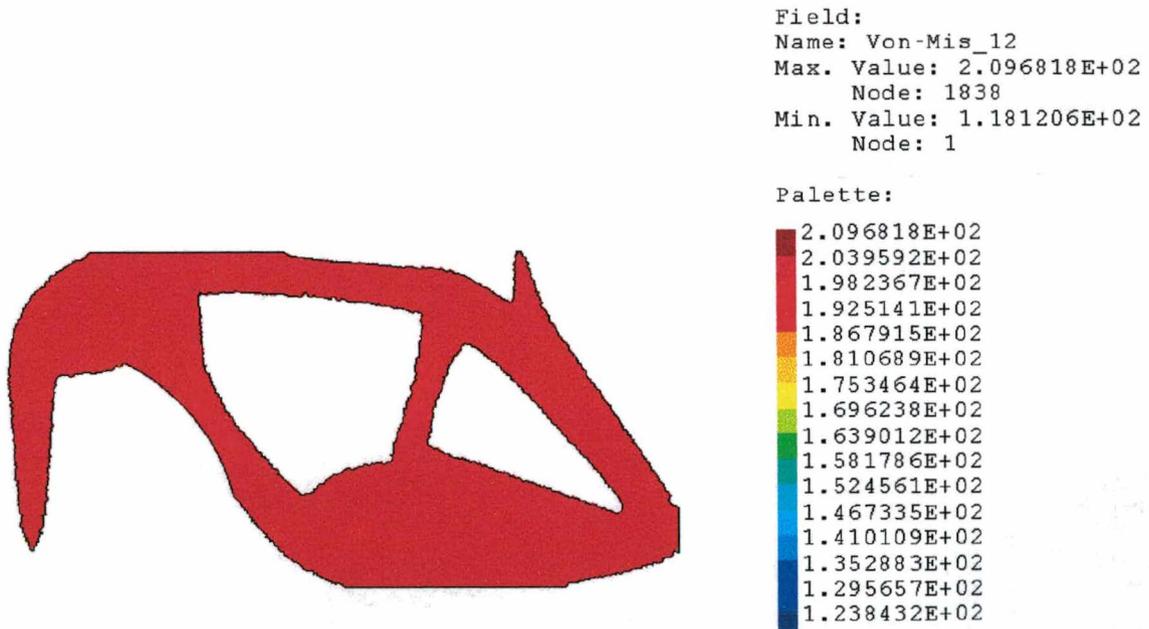


Figura 6.27: Tensão equivalente de von Mises.

Uma nova configuração para a bicicleta é então proposta (ver Figura 6.28), onde não houve necessidade de realizar um pós-processamento da solução (parametrização da geometria e posterior otimização de forma).

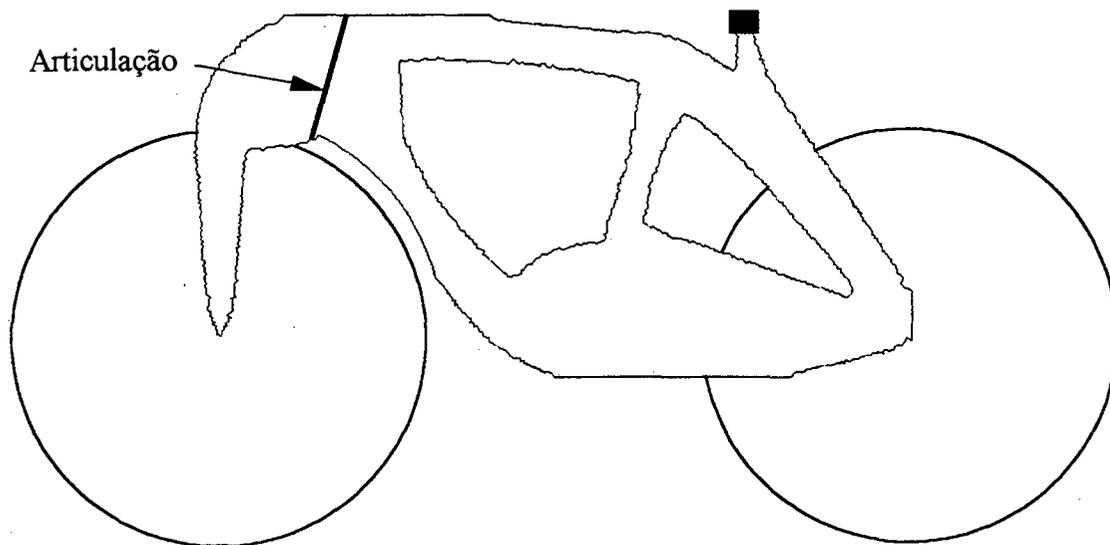


Figura 6.28: Projeto de uma bicicleta: Solução final.

Seria interessante, ainda, estudar a viabilidade de projetar esta bicicleta, por exemplo, através de estruturas tubulares. Neste caso, a topologia obtida fornece informação de como deve-se posicionar os tubos (ver Figura 6.29). No entanto, esta última proposta de solução exige ainda análises posteriores para determinar as seções transversais dos tubos.

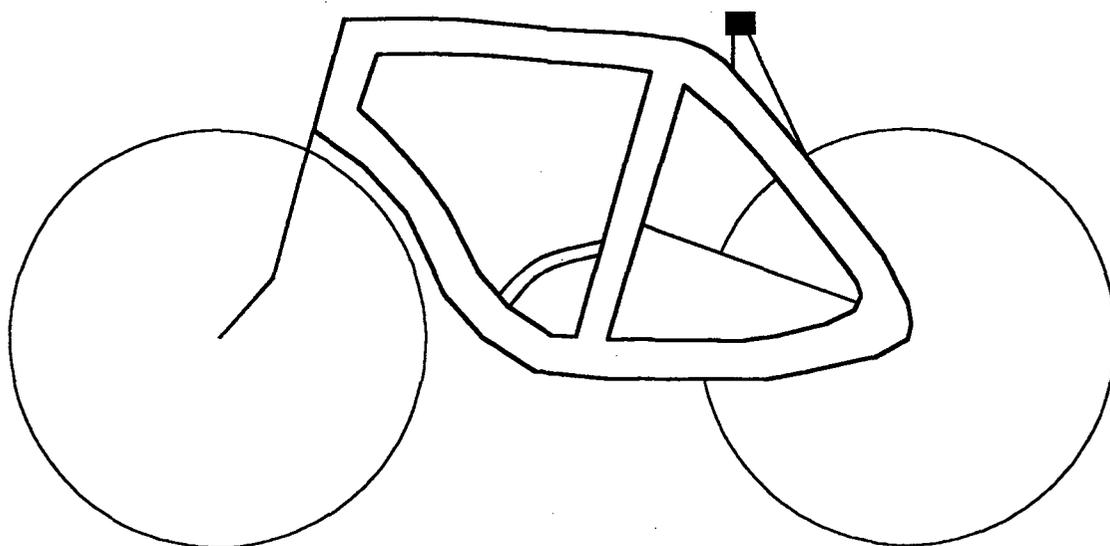


Figura 6.29: Projeto de uma bicicleta: Solução alternativa.

A Figura 6.30 mostra a solução obtida por Rasmussen et al. (1992) através de otimização topológica convencional, a qual é bastante similar a obtida neste trabalho antes do refino  $h$  adaptativo (Figura 6.24b).

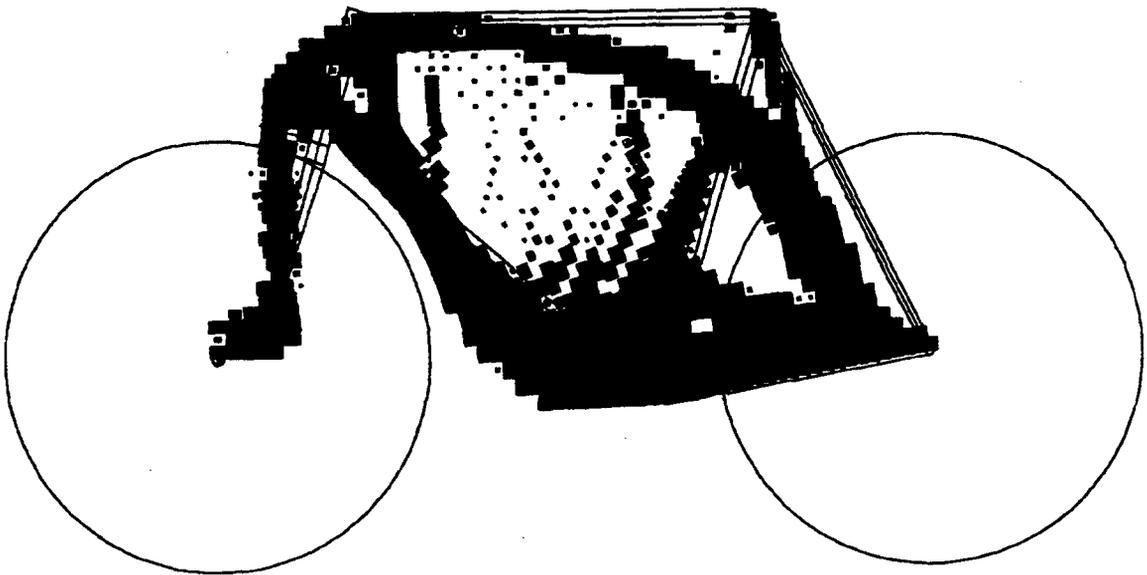


Figura 6.30: Solução possível dada por Rasmussen et al. (1992).

Na Figura 6.31 tem-se uma proposta de solução obtida através da parametrização da topologia dada pela Figura 6.30 e posterior otimização de forma (Rasmussen et al., 1992). Neste caso nota-se uma semelhança bastante grande entre esta solução e a obtida após refino  $h$  adaptativo (ver Figura 6.28), onde não houve necessidade de lançar mão de algum tipo de pós-processamento.

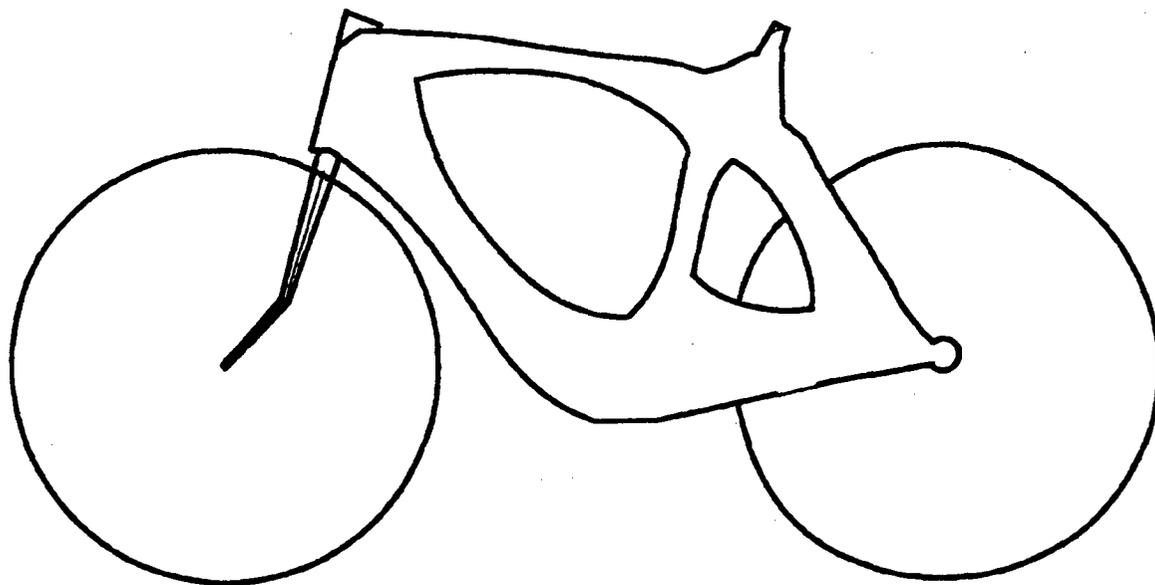


Figura 6.31: Solução final proposta por Rasmussen et al. (1992).

É importante mencionar ainda que ambas as soluções propostas por Rasmussen et al. (1992) não fornecem nenhuma idéia de profundidade do modelo, ou seja, a espessura é constante. Contrário à metodologia aqui apresentada, onde é possível identificar a carta de espessura (ver Figura 6.26), fornecendo, portanto, uma noção tridimensional do componente. Sendo assim, o projetista pode utilizar esta valiosa informação de modo a auxiliá-lo no projeto final do produto.

As propostas de soluções apresentadas neste trabalho (Figura 6.28) e por Rasmussen et al. (1992) - Figura 6.31 - assemelham-se muito ao desenho clássico da bicicleta (Figura 6.23). Isso era esperado, já que este último é resultado de muitos anos de experiência em projeto de veículos deste tipo.

## 6.5 Comentários Adicionais

A técnica de refino *h* adaptativo é utilizada para melhorar consideravelmente o cálculo de tensões, bem como a geometria da peça otimizada mediante a identificação da nova fronteira e posterior refino da malha nessa região. O conceito da *carta de espessura*

*binária* é apresentado, o qual permite induzir o refino no contorno do modelo otimizado de modo que nessa região, o tamanho dos elementos distribuem-se de maneira homogênea, identificando, portanto, a nova geometria da peça.

Além do mais, pode-se concluir que mediante o uso de técnicas de refino  $h$  adaptativo é possível identificar a geometria da peça otimizada de forma precisa e barata, sem a necessidade de desencadear um processo de otimização de forma, o que tornaria o problema mais custoso computacionalmente. Através dos métodos adaptativos evita-se, ainda, que haja um refinamento desnecessário nas regiões de menor interesse do domínio. Outra importante vantagem dessas estratégias é que, com elas, possíveis erros de discretização decorrentes da falta de experiência ou desconhecimento do problema específico são significativamente reduzidos no processo iterativo.

É importante mencionar ainda que, como nos exemplos mostrados é utilizada uma espessura máxima  $H = \infty$ , é possível que em alguns deles a premissa *ad hoc* de estado plano de tensões tenha sido violada localmente. No entanto, em geral esse problema ocorre na presença de singularidades, onde o Método dos Elementos Finitos não é capaz de representar adequadamente o fenômeno. Sendo assim, na prática pode-se utilizar uma espessura máxima  $H$  limitada ou, como é comum, deve-se simplesmente rejeitar os resultados obtidos via elementos finitos na vizinhança das singularidades e fazer uma análise local nestas regiões através de alguma técnica.

## Capítulo 7

# Projeto Ótimo de Malhas $hp$ Adaptativas

Existem várias formas de desencadear um refino  $hp$  adaptativo de uma malha de elementos finitos. Uma delas, e a mais utilizada, consiste em fazer, primeiramente, um refino  $h$  adaptativo da malha até captar as singularidades, caso estas estejam presentes no problema analisado. Em seguida é realizado um refino  $p$  uniforme até atingir uma precisão pré-estabelecida. Essa metodologia, apesar de simples, é de elevado custo computacional.

Outra maneira é projetar, sob algum critério, os parâmetros  $h$  e  $p$  em cada iteração do problema, até atingir uma precisão aceitável. Nesta última linha, destacam-se os trabalhos de Guo & Babuška (1986) e de Rachowicz et al. (1989).

No primeiro, é feito um refino  $p$  adaptativo onde a solução é suave e, na presença de singularidades, procura-se criar uma sequência de malhas  $hp$ , onde o tamanho  $h$  dos elementos diminuem em uma dada progressão geométrica no sentido da singularidade, cuja razão depende da intensidade desta, enquanto a ordem polinomial  $p$  dos elementos cresce linearmente no sentido contrário, sendo a ordem do elemento, onde ocorre a singularidade, sempre maior ou igual à ordem do elemento adjacente. A essa metodologia dá-se o nome de *malha  $hp$  ótima verdadeira* (Babuška et al. 1997). O inconveniente desta técnica é que na região do domínio onde a solução é não-singular, um refino  $p$  puro pode não ser a melhor opção de estratégia. Além do mais, como a topologia da malha é preservada nesta região, a solução possível de ser obtida fica fortemente dependente da discretização inicial, pois não é praticável enriquecer a base de elementos finitos aumentando-se a ordem dos

polinômios indefinidamente, devido a problemas de instabilidades numérica.

Já o trabalho de Rachowicz et al. (1989) fundamenta-se na minimização do erro para um dado número de equações fixo, o que conduz a um problema onde os parâmetros  $h$  e  $p$  são projetados **isoladamente**, através de uma análise das taxas de convergência do método dos elementos finitos. Em outras palavras, essa última estratégia pode ser sintetizada na seguinte conjectura (Babuška et al. 1997): *Entre duas malhas, em uma sequência de sucessivos refinamentos  $hp$ , a mudança do erro por incremento do número de equações é maximizada.* É importante ressaltar ainda que, sob certas condições, essa metodologia conduz às *malhas  $hp$  ótimas verdadeiras* de Babuška et al. (1997). O inconveniente dessa abordagem é que para atingir uma precisão satisfatória é necessário um número elevado de iterações. Além do mais, o limite de erro não é colocado de forma explícita no algoritmo, o que, por questões práticas, torna o método pouco interessante.

Devido a isso, propõem-se uma estratégia de projeção **simultânea** dos parâmetros  $h$  e  $p$ . Isso é conseguido mediante a resolução de um problema de otimização, onde busca-se minimizar o número de equações para um limite de erro pré-estabelecido. Essa abordagem coloca os parâmetros  $h$  e  $p$  explicitamente nas equações, o que conduz a um algoritmo baseado na resolução aproximada de uma equação algébrica não-linear, a qual fornece os valores ótimos dos parâmetros  $h$  e  $p$ . Dessa forma, o usuário fornece um limite de erro de discretização e então o processo iterativo é desencadeado de modo a obter a malha ótima (ou quase ótima), no sentido de minimizar o número de equações que envolve o problema em consideração e ao mesmo tempo satisfazer a tolerância pré-estabelecida pelo usuário, de maneira barata e bastante precisa, vindo de encontro, portanto, a um problema de engenharia.

## 7.1 Projeto da Malha Ótima

Neste trabalho é mostrada uma forma possível de obter a projeção simultânea dos parâmetros  $h$  e  $p$ , mediante a resolução de um problema de minimização do número de equações para um dado limite de erro fixo. Matematicamente, esse problema de busca do

ótimo pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\text{Minimize :} \quad N(h_n, p_n) = C \int_{\Omega} n(h_n, p_n)_{\Omega} d\Omega, \quad (7.1)$$

$$\text{Sujeito à :} \quad \|e(h_n, p_n)\|_{H^1(\Omega)} = \|e_{ad}\|_{H^1(\Omega)}, \quad (7.2)$$

onde  $e_{ad}$  é o erro de aproximação admissível,  $N(h_n, p_n)$  é o número de graus de liberdade total do problema,  $C$  é uma constante positiva que depende da geometria do problema,  $n(h_n, p_n)$  representa a densidade de graus de liberdade e  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  denota a norma no espaço  $H^1(\Omega)$ .

Experimentos numéricos indicam que a densidade de graus de liberdade  $n(h_n, p_n)$  está associada aos parâmetros  $h_n$  e  $p_n$  da seguinte maneira,

$$n(h_n, p_n) = \left(\frac{p_n}{h_n}\right)^{\alpha}, \quad (7.3)$$

onde  $\alpha = 1$  para problemas unidimensionais e  $\alpha = 2$  para problemas bidimensionais.

No problema de otimização, adotou-se trabalhar com restrições de igualdade para permitir tanto refino como desrefino da malha. Além do mais, neste caso esta hipótese simplifica ainda mais o problema.

No trabalho de Rachowicz et al. (1989) demonstra-se que, em alguns casos, uma condição de otimalidade da malha é atingida através da equidistribuição do erro em todo o domínio. Assim, neste trabalho é adotada essa condição como premissa básica, de modo que a restrição no problema de mínimo (Eq. 7.2) é reescrita como

$$\begin{aligned} \|e(h_n, p_n)\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \sum_K \|e^K(h_n, p_n)\|_{H^1(K)}^2 \\ &= m \|e^K(h_n, p_n)\|_{H^1(K)}^2 = m \|e_{ad}^K\|_{H^1(K)}^2, \end{aligned} \quad (7.4)$$

onde  $m$  é o número total de elementos finitos e  $K$  indica o  $K$ -ésimo elemento da malha.

Dessa forma, tem-se que a restrição (Eq. 7.4) pode ser escrita para cada elemento finito como,

$$\|e^K(h_n, p_n)\|_{H^1(K)} = \|e_{ad}^K\|_{H^1(K)}. \quad (7.5)$$

Similarmente, a função objetivo apresentada na Eq. (7.1) também pode ser escrita em

termos do  $K$ -ésimo elemento finito, *i.e.*

$$N(h_n, p_n) = C \sum_K \int_K n(h_n, p_n)_K dK. \quad (7.6)$$

Como  $C$  é uma constante positiva e as operações de soma e integração são lineares, o problema de otimização (Eqs. 7.1 e 7.2) pode ser reescrito para o  $K$ -ésimo elemento da seguinte maneira

$$\text{Minimize :} \quad n(h_n, p_n)_K = \left( \frac{p_n}{h_n} \right)^\alpha, \quad (7.7)$$

$$\text{Sujeito à :} \quad \|e^K(h_n, p_n)\|_{H^1(K)} = \|e_{ad}^K\|_{H^1(K)}. \quad (7.8)$$

A partir deste ponto é necessário associar a restrição do problema (Eq. 7.8) aos parâmetros  $h_n$  e  $p_n$ , de modo a obter uma formulação que os envolva explicitamente.

Uma estimativa *a priori* do erro de interpolação no elemento  $K$  é dado pelo Teorema 2.1 do trabalho de Oden et al. (1989). No entanto, sabe-se que no Método dos Elementos Finitos o erro de discretização (Eq. 3.1) se comporta exatamente da mesma forma que o erro de interpolação, a menos de um termo de *poluição* e uma constante que, também, independe dos parâmetros  $h$  e  $p$ . Tem-se, portanto, uma estimativa *a priori* do erro de discretização, dado pelo seguinte Teorema:

**Theorem 1** *Sejam uma constante  $C > 0$ , que independe do tamanho  $h$  e da ordem polinomial  $p$  do elemento, e uma função  $\mathbf{u} \in H^r(K)$ , onde  $r > 1$  está associado à regularidade da solução. Então, para famílias de malhas uniformes ou quase-uniformes com  $h \rightarrow 0$ , tem-se que*

$$\|e^K(h, p)\|_{H^1(K)} \leq Ch^{\mu-1}p^{-(r-1)} \|\mathbf{u}\|_{H^r(K)} + \text{poluição}, \quad (7.9)$$

sendo  $\mu = \min(p + 1, r)$ .

O resultado do Teorema 1 (Eq. 7.9) pode ser escrito, também, em termos da norma-energia do erro admissível para os novos parâmetros da malha ( $h_n$  e  $p_n$ ), como

$$\|e^K(h_n, p_n)\|_{H^1(K)} = \|e_{ad}^K\|_{H^1(K)} \leq Ch_n^{\mu_n-1}p_n^{-(r-1)} \|\mathbf{u}\|_{H^r(K)} + \text{poluição}, \quad (7.10)$$

onde  $\mu_n = \min(p_n + 1, r)$ .

Desprezando os termos de poluição e dividindo a Eq. (7.9) por Eq. (7.10), tem-se

$$\frac{\|e^K(h, p)\|_{H^1(K)}}{\|e^K(h_n, p_n)\|_{H^1(K)}} = \frac{\|e^K(h, p)\|_{H^1(K)}}{\|e_{ad}^K\|_{H^1(K)}} = \frac{h^{\mu-1}}{h_n^{\mu-1}} \left(\frac{p}{p_n}\right)^{-(r-1)} = \xi. \quad (7.11)$$

Note que, como a constante  $C$  independente dos parâmetros  $h$  e  $p$ , ela desaparece na Eq. (7.11).

Rearranjando a Eq. (7.11), obtém-se

$$h_n = \left[ \frac{h^{\mu-1}}{\xi} \left(\frac{p_n}{p}\right)^{(r-1)} \right]^{1/(\mu-1)}. \quad (7.12)$$

Finalmente, como a restrição está escrita em termos dos parâmetros  $h_n$  e  $p_n$ , o problema de otimização com restrição (Eqs. 7.7 e 7.8) pode ser transformado em um problema de otimização sem restrição, apenas substituindo a Eq. (7.12) na função objetivo (Eq. 7.7), resultando em,

$$\text{Minimize : } n(p_n)_K = \left\{ \frac{p_n}{\left[ \frac{h^{\mu-1}}{\xi} \left(\frac{p}{p_n}\right)^{-s} \right]^{1/(\mu-1)}} \right\}^\alpha, \text{ onde } s = r - 1. \quad (7.13)$$

A condição necessária de primeira ordem para o ótimo é que a primeira derivada da Eq.(7.13) em relação a  $p_n$  seja nula, isto é,

$$\frac{d}{dp_n} n(p_n)_K = 0. \quad (7.14)$$

No entanto, ainda não é possível obter a derivada (7.14), pois a dependência de  $\mu_n$  em relação à regularidade  $r$  ou da ordem polinomial  $p_n$  está associada ao tipo de refino ( $h$ ,  $p$  ou  $hp$ ) e a cada problema em análise, mais especificamente da presença ou não de singularidades, bem como das intensidades destas.

A seguir, são discutidos os casos específicos para cada tipo de refino  $h$ ,  $p$  ou  $hp$  e regularidade da solução.

### 7.1.1 Malha $h$

Neste caso, a ordem polinomial  $p_n$  é tomada constante, ou seja,  $p_n = p$  e é realizado um refino  $h$  adaptativo na malha. Assim, a Eq.(7.12) toma os seguintes formatos:

i - Se  $p > s$ , então  $\mu = s + 1$ , logo

$$\xi = \left( \frac{h}{h_n} \right)^s \quad \text{ou} \quad h_n = \frac{h}{\xi^{1/s}}. \quad (7.15)$$

ii - Se  $p \leq s$ , então  $\mu = p + 1$ , logo

$$\xi = \left( \frac{h}{h_n} \right)^p \quad \text{ou} \quad h_n = \frac{h}{\xi^{1/p}}. \quad (7.16)$$

Este é o resultado já obtido por Zienkiewicz & Zhu (1987). De fato, o problema de ótimo desaparece, dado que satisfazendo simultaneamente ambas as condições  $p_n = p$  e Eq. (7.11), o valor das variáveis  $h_n$  e  $p_n$  ficam univocamente determinados. Portanto, para obter uma equidistribuição do erro em todo o domínio, basta satisfazer qualquer uma das restrições (Eqs. 7.15 e 7.16), dependendo da classe do problema em análise.

### 7.1.2 Malha $p$

Aqui, fixa-se o tamanho do elemento  $h_n = h$  e trabalha-se em termos da ordem polinomial  $p_n$ , ou seja, o objetivo é realizar um refino  $p$  adaptativo, sem variar o tamanho dos elementos da malha. Sendo assim, a Eq.(7.12) é reescrita com:

i - Se  $p > s$  e  $p_n > s$ , então  $\mu = s + 1$  e  $\mu_n = s + 1$ , portanto

$$\xi = \left( \frac{p_n}{p} \right)^s \quad \text{ou} \quad p_n = \xi^{1/s} p. \quad (7.17)$$

ii - Se  $p < s$  e  $p_n > s$ , então,  $\mu = p + 1$  e  $\mu_n = s + 1$ , sendo assim

$$\xi = \frac{1}{h^{(s-p)}} \left( \frac{p_n}{p} \right)^s \quad \text{ou} \quad p_n = \xi^{1/s} p h^{(p-s)/s}. \quad (7.18)$$

iii - Se  $p \leq s$  e  $p_n \leq s$ , então  $\mu = p + 1$  e  $\mu_n = p_n + 1$ , logo

$$\xi = \frac{1}{h^{(p_n-p)}} \left( \frac{p_n}{p} \right)^s \quad \text{ou} \quad p_n = \xi^{1/s} p h^{(p_n-p)/s}. \quad (7.19)$$

iv - Se  $p > s$  e  $p_n < s$ , então  $\mu = s + 1$  e  $\mu_n = p_n + 1$ , desta forma

$$\xi = \frac{1}{h^{(p_n-s)}} \left( \frac{p_n}{p} \right)^s \quad \text{ou} \quad p_n = \xi^{1/s} p h^{(p_n-s)/s}. \quad (7.20)$$

Note que, neste caso, assim como no anterior, basta satisfazer as restrições (Eqs. 7.17, 7.18, 7.19 e 7.20), dependendo da regularidade da solução, para obter uma equidistribuição do erro na malha. Novamente o problema de ótimo, tal como formulado neste trabalho, torna-se impraticável, uma vez que, satisfazendo as condições  $h_n = h$  e Eq. (7.11), fixa-se os valores das variáveis  $h_n$  e  $p_n$ .

### 7.1.3 Malha $hp$

Finalmente, é discutido o refino  $hp$  adaptativo, onde os parâmetros  $h_n$  e  $p_n$  podem variar livremente no processo de projeto da malha. Então, da Eq. (7.12) tem-se:

i - Se  $p > s$  e  $p_n > s$ , então  $\mu = s + 1$  e  $\mu_n = s + 1$ , portanto

$$\xi = \left( \frac{p_n h}{h_n p} \right)^s \quad \text{ou} \quad h_n = \frac{p_n h}{\xi^{1/s} p}. \quad (7.21)$$

ii - Se  $p < s$  e  $p_n > s$ , então  $\mu = p + 1$  e  $\mu_n = s + 1$ , sendo assim

$$\xi = h^p \left( \frac{p_n}{h_n p} \right)^s \quad \text{ou} \quad h_n = \left( \frac{h^p}{\xi} \right)^{1/s} \frac{p_n}{p}. \quad (7.22)$$

Nas duas primeiras situações, onde a regularidade da solução é baixa ( $s < p_n$ ), não é possível resolver o problema de ótimo tal como proposto no presente trabalho, pois ao substituir essas restrições (Eqs. 7.21 e 7.22) na função objetivo (Eq. 7.7), a mesma ficará constante. Desta forma, sugere-se fixar  $p_n$  e fazer um refino  $h$  (Seção 7.1.1), ou vice-versa, isto é, fixar  $h_n$  e fazer um refino  $p$  (Seção 7.1.2), dependendo da regularidade da solução.

iii - Se  $p \leq s$  e  $p_n \leq s$ , então  $\mu = p + 1$  e  $\mu_n = p_n + 1$ , logo

$$\xi = \frac{h^p}{h_n^{p_n}} \left( \frac{p_n}{p} \right)^s \quad \text{ou} \quad h_n = \left[ \frac{h^p}{\xi} \left( \frac{p_n}{p} \right)^s \right]^{1/p_n}. \quad (7.23)$$

Substituindo essa restrição na função objetivo (Eq. 7.13), tem-se

$$n(p_n)_K = \left\{ \frac{p_n}{\left[ \frac{h^p}{\xi} \left( \frac{p_n}{p} \right)^s \right]^{1/p_n}} \right\}^\alpha. \quad (7.24)$$

iv - Se  $p > s$  e  $p_n < s$ , então  $\mu = s + 1$  e  $\mu_n = p_n + 1$ , portanto

$$\xi = \frac{h^s}{h_n^{p_n}} \left( \frac{p_n}{p} \right)^s \quad \text{ou} \quad h_n = \left[ \frac{h^s}{\xi} \left( \frac{p_n}{p} \right)^s \right]^{1/p_n}. \quad (7.25)$$

Fazendo o mesmo procedimento mostrado anteriormente, vem

$$n(p_n)_K = \left\{ \frac{p_n}{\left[ \frac{h^s}{\xi} \left( \frac{p_n}{p} \right)^s \right]^{1/p_n}} \right\}^\alpha. \quad (7.26)$$

Nos dois últimos casos, é possível calcular a derivada em relação a  $p_n$  das Eqs. (7.24 e 7.26) mediante a Eq. (7.14) de modo a obter uma condição necessária de primeira ordem para os valores ótimos de  $p_n$ , os quais podem ser substituídos nas Eqs. (7.23 e 7.25), dependendo do caso, para obter o tamanho do novo elemento  $h_n$ .

Uma limitação desta metodologia (e de outras que se baseiam nas propriedades de convergência do MEF) é que deve-se conhecer *a priori* o espaço em que se encontra a solução, o que cria no usuário uma forte dependência em relação ao conhecimento prévio do problema específico em análise. Sendo assim, propõem-se uma maneira alternativa para formular o problema de otimização, de modo a eliminar essa dependência no processo adaptativo, *i.e.*:

**Lemma 2** *Sejam  $p = s$ ,  $\mu = p + 1$ ,  $\mu_n = p_n + 1$  e considerando a Eq.(7.12), tem-se,*

$$\xi = \frac{1}{h_n^{p_n}} \left( \frac{p_n h}{p} \right)^p \quad \text{ou} \quad h_n = \frac{1}{\xi^{1/p_n}} \left( \frac{p_n h}{p} \right)^{p/p_n}. \quad (7.27)$$

**Proof. Imediata** ■

Note que essa modificação na restrição do problema de ótimo é bastante severa, no entanto as premissas aqui adotadas fornecem:

**Lemma 3** *Sejam  $p = s$ ,  $\mu = p + 1$ ,  $\mu_n = p_n + 1$  e considerando a função objetivo (Eq. 7.7) e o resultado do Lemma 2 (Eq. 7.27), tem-se a densidade de graus de liberdade dada por*

$$n(p_n)_K = \left\{ \frac{p_n}{\frac{1}{\xi^{1/p_n}} \left( \frac{p_n h}{p} \right)^{p/p_n}} \right\}^\alpha = \left\{ \frac{p_n \xi^{1/p_n}}{\left( \frac{p_n h}{p} \right)^{p/p_n}} \right\}^\alpha. \quad (7.28)$$

**Proof. Imediata** ■

A função objetivo dada pela Eq. (7.28), que estabelece a relação entre a nova ordem polinomial  $p_n$  e a densidade de graus de liberdade  $n(p_n)_K$ , pode ser melhor visualizada através da Figura 7.1, tanto para refino (Figura 7.1a), como para desrefino (Figura 7.1b) da malha.

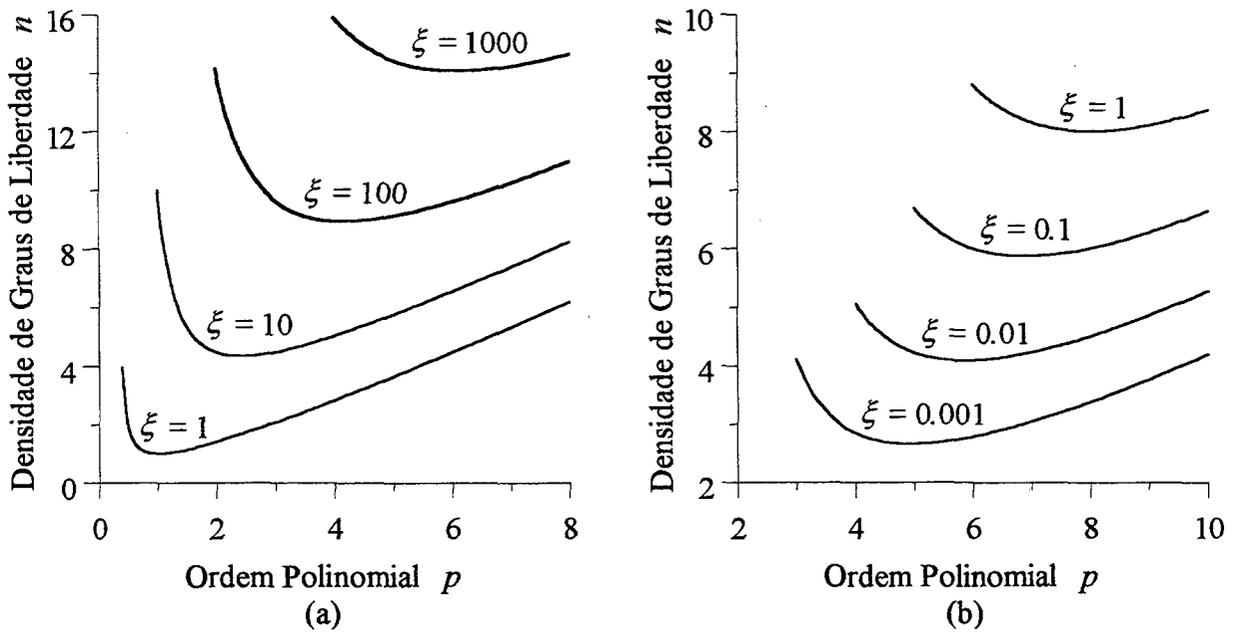


Figura 7.1: Função objetivo para vários valores de  $\xi$  e  $h = 1$ : Refino para  $p = 1$  (a) e desrefino para  $p = 8$  (b).

Finalmente, pode-se demonstrar que o problema de otimização aqui analisado consiste em resolver uma equação algébrica não-linear, independente de  $s$  e  $\alpha$ , que fornece os valores ótimos de  $p_n$  e, conseqüentemente, de  $h_n$ . Esse resultado é dado pelo seguinte Teorema:

**Theorem 4** *Sejam  $p = s$ ,  $\mu = p + 1$  e  $\mu_n = p_n + 1$ . Então, uma condição necessária e suficiente para o ótimo (mínimo da Eq. 7.28) que não depende da regularidade da solução,  $r$ , e nem da dimensão do problema em análise,  $\alpha$ , pode ser escrita como*

$$p_n - p - \ln \xi + p \ln \left( \frac{p_n h}{p} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad p_n = \varphi(p_n), \quad (7.29)$$

onde  $\varphi(p_n)$  é dada por

$$\varphi(p_n) = p + \ln \xi - p \ln \left( \frac{p_n h}{p} \right). \quad (7.30)$$

**Proof.** Substituindo o resultado do Lemma 3 (Eq. 7.28) em Eq. (7.14), tem-se

$$\frac{d}{dp_n} n(p_n)_K = \left[ \frac{\alpha}{(p_n)^2} \right] \left[ \frac{p_n \xi^{1/p_n}}{\left( \frac{p_n h}{p} \right)^{p/p_n}} \right]^\alpha \left[ p_n - p - \ln \xi + p \ln \left( \frac{p_n h}{p} \right) \right] = 0. \quad (7.31)$$

Note que, tanto o primeiro como o segundo termo da Eq. (7.31), obviamente fornecem uma solução trivial do problema de otimização, ou seja  $p \rightarrow \infty$  ou  $\xi \rightarrow 0$ . Dessa forma, somente o terceiro termo, que não depende de  $\alpha$  e nem de  $r$ , permite identificar uma solução não-trivial dada pela Eq. (7.29).

Derivando a Eq.(7.29) em relação a  $p_n$ , resulta

$$1 + \frac{p}{p_n} > 0. \quad (7.32)$$

Portanto, devido à convexidade da Eq. (7.28), o Teorema está demonstrado ■

A partir do resultado do Teorema 4 (Eq. 7.29) tem-se que a ordem polinomial  $p_n$  pode ser caracterizada como um ponto fixo de  $\varphi(p_n)$ . Assim, o problema de otimização, tal como formulado, consiste apenas em resolver para cada elemento finito a seguinte equação algébrica não-linear,

$$p_n - \varphi(p_n) = 0. \quad (7.33)$$

Esse resultado sugere a utilização de métodos numéricos para obter de maneira aproximada a ordem polinomial  $p_n$ , a qual deve ser posteriormente utilizada para calcular o novo tamanho do elemento  $h_n$  através da Eq.(7.27).

Uma forma possível de calcular  $p_n$  de forma aproximada é mediante o Método da Relaxação que resulta no seguinte algoritmo:

#### Algoritmo Ponto Fixo

Seja uma ordem polinomial inicial  $p$ , uma tolerância  $tol$  e um número máximo de iterações  $maxiter$  fornecidos, então para um dado fator de relaxação  $w > 0$ , tem-se

$$p_n^{m+1} = (1 - w) p_n^m + w \varphi(p_n^m), \quad (7.34)$$

sendo que o método converge quando a tolerância  $tol$  é atingida ou pára se  $m = maxiter$ .

**Fim do Algoritmo**

A rigor, este problema é de otimização inteira ( $p_n$  deve ser um número inteiro). No entanto, é definido o parâmetro  $\bar{p}_n$  como o inteiro mais próximo de  $p_n$ , o qual é efetivamente utilizado no enriquecimento das funções de interpolação em cada elemento e no cálculo de  $h_n$ . Isto é bastante aceitável devido ao comportamento estável apresentado pela função objetivo (ver Figura 7.1).

Os valores ótimos de  $p_n$  dados pela Eq. (7.29) e  $h_n$  calculados através de  $\bar{p}_n$  pela Eq. (7.27), para  $h = 1$  e vários  $\xi$ , podem ser vistos na Tabela 7.1. Note que no caso de refino ( $\xi > 1$ ) se tem uma variação grande em  $p_n$ , enquanto que  $h_n$  é mantido em torno do valor 0.43. No caso de desrefino ( $\xi < 1$ ), é possível observar que  $p_n$  diminui lentamente, enquanto  $h_n$  sofre variações maiores àquelas encontradas no caso que  $\xi > 1$ . Conclui-se assim que a metodologia aqui proposta procura criar malhas com refino mais forte em  $p$ . Este fato está de acordo com a teoria matemática do MEF já que, em problemas regulares, as maiores taxas de convergência são atingidas através de um refinamento  $p$  (Szabó & Babuška, 1991).

Tabela 7.1: Valores ótimos de  $p_n$ ,  $\bar{p}_n$  e  $h_n$ , para  $h = 1$  e vários  $\xi$ .

	Refino ( $\xi > 1$ e $p = 1$ )					Desrefino ( $\xi < 1$ e $p = 8$ )				
$\xi$	1	10	100	1000	10000	1	0.1	0.01	0.001	0.0001
$p_n$	1.00	2.42	4.18	6.10	8.12	8.00	6.89	5.87	4.94	4.11
$\bar{p}_n$	1	2	4	6	8	8	7	6	5	4
$h_n$	1.00	0.447	0.447	0.426	0.410	1.00	1.19	1.47	1.88	2.50

Um último detalhe a ser observado é que a norma-energia do erro, por se tratar de uma quantidade absoluta, não é a melhor maneira de trabalhar no controle de erro. Não obstante, no trabalho de Zienkiewicz & Zhu (1987) é apresentado um parâmetro denominado  $\eta_{ad}$  que quantifica o erro global máximo de forma relativa, isto é

$$\eta_{ad} = \frac{\|\mathbf{e}_{ad}\|_{H^1(\Omega)}}{\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}}. \quad (7.35)$$

Como não se conhece a norma-energia da solução,  $\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}$ , é necessário reescrevê-la em termos de  $\|\mathbf{u}_{hp}\|_{H^1(\Omega)}$  e  $\|\mathbf{e}\|_{H^1(\Omega)}$ .

A partir das Eqs. (3.1 e 2.17), a norma-energia da solução exata,  $\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}$ , pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \|\mathbf{u}_{hp} + \mathbf{e}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &= B(\mathbf{u}_{hp} + \mathbf{e}, \mathbf{u}_{hp} + \mathbf{e}) \\ &= B(\mathbf{u}_{hp}, \mathbf{u}_{hp}) + B(\mathbf{e}, \mathbf{e}) + 2B(\mathbf{u}_{hp}, \mathbf{e}). \end{aligned} \quad (7.36)$$

Devido a ortogonalidade do erro  $\mathbf{e}$  em relação ao espaço das variações admissíveis discretizado  $V_{hp} \equiv U_{hp}$  (ver final da Seção 2.3), tem-se que,

$$B(\mathbf{u}_{hp}, \mathbf{e}) = 0 \quad \forall \mathbf{u}_{hp} \in U_{hp} \equiv V_{hp}. \quad (7.37)$$

Portanto, a norma-energia da solução exata  $\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} &= (B(\mathbf{u}_{hp}, \mathbf{u}_{hp}) + B(\mathbf{e}, \mathbf{e}))^{1/2} \\ &= \left( \|\mathbf{u}_{hp}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\mathbf{e}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Substituindo a Eq. (7.38) em (7.35), tem-se o erro relativo global máximo admissível,  $\eta_{ad}$ , em termos de  $\|\mathbf{u}_{hp}\|_{H^1(\Omega)}$  e  $\|\mathbf{e}\|_{H^1(\Omega)}$ , ou seja

$$\eta_{ad} = \frac{\|\mathbf{e}_{ad}\|_{H^1(\Omega)}}{\left( \|\mathbf{u}_{hp}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\mathbf{e}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}}. \quad (7.39)$$

Utilizando-se a premissa de que haja uma equidistribuição do erro em todos os elementos da malha, a equação (7.39) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \eta_{ad} &= \frac{\left( m \|\mathbf{e}_{ad}^K\|_{H^1(K)}^2 \right)^{1/2}}{\left( \|\mathbf{u}_{hp}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\mathbf{e}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}} \\ &= \frac{\sqrt{m} \|\mathbf{e}_{ad}^K\|_{H^1(K)}}{\left( \|\mathbf{u}_{hp}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\mathbf{e}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}}, \\ \|\mathbf{e}_{ad}^K\|_{H^1(K)} &= \eta_{ad} \frac{\left( \|\mathbf{u}_{hp}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\mathbf{e}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}}{\sqrt{m}}. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Por fim, pode-se calcular a norma-energia do erro admissível no  $K$ -ésimo elemento,  $\|\mathbf{e}_{ad}^K\|_{H^1(K)}$ , a partir do parâmetro  $\eta_{ad}$  o qual deve ser fornecido pelo usuário e  $\|\mathbf{e}\|_{H^1(\Omega)}$  é obtido através de estimadores robustos.

## 7.2 Um Refino *hp* Adaptativo

No método *hp* adaptativo, necessita-se gerar malhas adaptativas de elementos finitos, o que tem motivado muitos trabalhos de desenvolvimento de algoritmos para geração automática de malhas. Atualmente, pode-se mencionar dois procedimentos fundamentais para a discretização não estruturada de domínios arbitrários, quais sejam, por partição dos elementos originais (Rachowicz et al. 1989) ou por re-geração total ou parcial da malha (Fancello, 1993).

Os algoritmos de partição de elementos em geral possuem baixo custo computacional e, como a posição dos nós originais permanece inalterada, permitem a utilização de técnicas iterativas de solução, fazendo-se uma rápida projeção da solução na nova malha. Uma considerável desvantagem desta técnica é a perda do controle da geometria, limitada sempre à aproximação obtida com a malha original. Por outro lado, esta técnica não permite diminuir o número de graus de liberdade nas regiões onde o erro é menor do que o admissível.

Por sua vez, os métodos de re-geração da malha permitem um maior controle da geometria e dos graus de liberdade envolvidos no problema. Sendo assim, neste trabalho é utilizado um algoritmo baseado na re-geração total da malha via método frontal (ver Seção 8.2), também conhecido como *remeshing* adaptativo (Zienkiewics & Zhu, 1987).

É importante mencionar que, neste trabalho, para aproximar a variável primal  $u$  no enriquecimento  $p$ , são utilizadas bases hierárquicas 1D construídas a partir da integral dos polinômios de Legendre, tal como mostrado na Seção 4.2.1. Entretanto, o enriquecimento das funções de interpolação de cada elemento produz, nos casos 2D e 3D, malhas não-conformes que devem ser compatibilizadas através de alguma técnica, impedindo a utilização de códigos comuns de análise por elementos finitos (Novotny et al. 1995).

A estratégia para desencadear um refino *hp* da malha dependerá, basicamente, se a solução for singular, embora tratável pelo Método dos Elementos Finitos convencional, *i.e.*  $0 < s < 1$ , ou regular o suficiente a permitir o emprego da metodologia de otimização proposta neste trabalho, ou seja, se  $s = p \geq 1$ .

### 7.2.1 Problemas Regulares ( $s \geq 1$ )

Neste caso, é utilizado o *remeshing* adaptativo de Zienkiewics & Zhu. Este procedimento, consiste em associar a cada elemento da malha um valor da nova ordem polinomial,  $p_n$ , calculada pela Eq. (7.29) e do novo tamanho,  $h_n$ , dado por Eq. (7.27). A partir desta última informação, calcula-se um número inteiro  $N_L \geq 1$ , que mais se aproxima de  $A_L$ , sendo este último dado por

$$A_L = \int_0^1 \frac{1}{h_n(x)} dx. \quad (7.41)$$

A posição dos novos nós  $i$ ,  $1 \leq i \leq N_L$  (os nós  $i = 0$  e  $i = N_L + 1$  correspondem aos nós inicial e final, respectivamente) é calculada encontrando  $\lambda_i$ , tal que,

$$i = \int_0^{\lambda_i} \frac{1}{h_n(x)} dx. \quad (7.42)$$

Finalmente, projeta-se a ordem polinomial,  $p_n$ , na nova malha. No presente trabalho é feita uma extrapolação linear dos valores de  $p_n$  de cada elemento para os nós da malha antiga, em seguida é feita uma média aritmética desses valores nodais encontrados e, então, projeta-se esses valores médios no baricentro dos elementos da malha nova.

Uma vez que se utiliza o *remeshing* adaptativo para gerar a nova malha *hp* adaptativa, não é possível aproveitar diretamente o sistema de equações obtido em uma iteração anterior, devendo ser, então, reconstruído em cada iteração. Isso ainda se justifica, porque através da metodologia de otimização aqui desenvolvida espera-se obter uma apreciável redução no número de iterações necessárias para alcançar a malha ótima, em relação a outras estratégias de refino *hp* adaptativo, tal como a proposta por Rachowicz et al. (1989). Por outro lado, nada impede a construção de malhas aninhadas de modo a tornar possível o aproveitamento, de maneira direta, do sistema de equações resolvido anteriormente.

### 7.2.2 Problemas Singulares ( $0 < s < 1$ )

No caso de problemas que apresentem singularidades na solução (trincas, vértices, mudança abrupta no carregamento, condição de contorno ou propriedades materiais, etc.)

é necessário um tratamento especial, já que a metodologia aqui desenvolvida não se aplica diretamente a esta classe de problemas. Ocorre que, a premissa adotada no Teorema 4, *i.e.*  $s = p$ , passa a ser uma condição muito forte, visto que a regularidade em problemas singulares, passíveis de análise via MEF convencional, é tal que  $0 < s < 1$ .

Sendo assim, utiliza-se a metodologia das *malhas hp ótimas verdadeiras* de Babuška et. al (1997) na vizinhança da singularidade, a qual é indiscutivelmente a melhor técnica de controle de erro nesta região. Para construir tais malhas geométricas, é adotada uma lei de crescimento dos elementos em progressão geométrica (P.G.) de razão  $Q$ , no sentido contrário à singularidade, ou seja,

$$h_n (1 + Q + Q^2 + \dots + Q^{N_c}) = h, \quad (7.43)$$

onde,  $h$  é o tamanho do elemento no qual ocorre a singularidade (soma do termos da P.G.),  $h_n$  é o tamanho do novo elemento a ser gerado sobre a singularidade (primeiro termo da P.G.) e  $N_c$  é o número de camadas (elementos) a serem gerados em torno da singularidade.

Dessa forma,  $h_n$  é calculado considerando um refino adaptativo  $h$  puro (Eq. 7.15) e, para um dado  $Q > 1$ , calcula-se  $N_c$  da seguinte maneira,

$$N_c = \frac{\log \left[ 1 - \frac{h}{h_n} (1 - Q) \right]}{\log Q} - 1. \quad (7.44)$$

Como o objetivo deste trabalho é testar uma formulação que possa ser estendida diretamente a problemas de valor no contorno bidimensionais e/ou tridimensionais, é adotada uma razão fixa de  $Q = 4$ . Isso se deve a limitações na geração de malhas em 2D e 3D ( $Q > 4$  pode provocar excessivas distorções na malha em um processo de *remeshing*). Já a regularidade da solução é fixa em  $s = 1/2 < p$ , pois supõe-se que o usuário conheça apenas as regiões de ocorrência de singularidades, mas não a intensidade destas (o que, para o engenheiro analista, é bastante razoável).

No caso da distribuição da ordem polinomial dos elementos na região singular, é utilizada uma lei de crescimento linear a partir do segundo elemento adjacente à singularidade, tal que,  $\{p_n\} = \{1, 2, \dots, N_c\}$ . Para o elemento onde ocorre a singularidade, arbitra-se

uma ordem polinomial  $p_n = N_c + 1$ . Sendo assim, a distribuição da ordem polinomial na região singular deve ser tal que,  $\{p_n\} = \{N_c + 1, 1, 2, \dots, N_c\}$ , no sentido contrário à singularidade.

### 7.2.3 Algoritmo de Refinamento *hp*

A estratégia *hp* desenvolvida neste trabalho permite tanto refino, como desrefino da malha. No caso de desrefino, a ordem polinomial pode variar livremente dentro da faixa  $1 \leq p_n \leq 8$ . Já o tamanho dos elementos, quando  $h_n > 1.3 h$ , podem crescer, no máximo, segundo a seguinte relação,

$$h_n := \frac{2hh_n}{h + h_n} \quad (7.45)$$

Esse amortecimento é introduzido apenas para evitar excessivas distorções da malha (Fancello, 1993).

Uma forma, aqui adotada para atingir o limite de erro admissível  $\eta_{ad}$  (Eq. 7.35) no problema de otimização, consiste em dividir esse parâmetro em incrementos dentro de cada iteração. Isso é realizado mediante a definição de um novo parâmetro  $\bar{\eta}_{ad}$ , ou seja,

$$\bar{\eta}_{ad} = (\eta_{ad})^{\sqrt{iter/niter}}, \quad (7.46)$$

onde *niter* é o número total de iterações no processo adaptativo e *iter* é a *i*-ésima iteração. Deste modo  $\bar{\eta}_{ad}$  é interpretado como o limite de erro admissível em cada iteração *iter*.

Finalmente, o procedimento proposto no presente trabalho para desencadear o refino *hp* adaptativo consiste nos seguintes passos:

1. Fornecer  $\eta_{ad}$  e *niter*.
2. Enquanto  $iter \leq niter$  desencadeia-se o processo adaptativo propriamente dito, ou seja, para  $\bar{\eta}_{ad} \geq \eta_{ad}$ :
  - (a) Identifica-se os elementos que possuem nós singulares e desencadeia-se um refino *hp* adaptativo sobre estes segundo o critério da *malha hp ótima verdadeira*

de Babuška, et. al (1997), ou mais especificamente, tal como apresentado na seção 7.2.2.

- (b) Nas demais regiões, supõe-se que a solução seja regular. Desta maneira, faz-se uma projeção simultânea dos parâmetros  $h$  e  $p$  através da metodologia descrita na seção 7.1.3. A partir desta informação, faz-se uma regeneração total da malha de modo que esta contenha as informações no novo tamanho  $h_n$  e da nova ordem polinomial  $p_n$  do elemento, tal como proposto na seção 7.2.1.
3. Quando  $iter = niter$ , tem-se que  $\bar{\eta}_{ad} = \eta_{ad}$  e, após uma última análise da malha obtida nos itens (a) e/ou (b), o método pára. Neste momento espera-se ter alcançado o limite de erro pré-estabelecido.

### 7.3 Resultados Numéricos

Para ilustrar a estratégia de refino  $hp$  adaptativo proposta neste trabalho, é resolvido numericamente o seguinte problema elíptico de valor no contorno

$$\frac{d^2u}{dx^2} + f(x) = 0, \quad x \in \Omega = (0, 1), \quad u(0) = g_0 \quad \text{e} \quad u(1) = g_1 \quad (7.47)$$

sendo que  $f(x)$  é escolhido de maneira tal a provocar grandes variações locais na solução  $u(x)$  da Eq. (7.47) devido a singularidades ou gradientes elevados, haja vista que, para funções muito suaves, o esquema de otimização aqui desenvolvido conduz a refinamentos  $p$  puro.

Em todos os casos, o refino  $hp$  é desencadeado a partir de uma malha uniforme com 10 elementos lineares, sendo que o refinamento  $hp$  adaptativo é desencadeado considerando que a solução exata  $u(x)$  seja conhecida explicitamente.

Nos exemplos que seguem, é feita uma análise comparativa entre a estratégia  $hp$  aqui desenvolvida com a metodologia apresentada por Rachowicz et al. (1989), em termos de taxas de convergência e número de iterações necessárias para atingir um mesmo limite de erro.

### 7.3.1 Exemplo 1

Neste exemplo, considera-se  $g_0 = 0$ ,  $g_1 = 0$  e uma excitação  $f(x)$  tal que

$$f(x) = 2\alpha \left[ \frac{1}{1 + \alpha^2 (x - x_0)^2} + \frac{\alpha^2 (x - x_0) (1 - x)}{[1 + \alpha^2 (x - x_0)^2]^2} \right] \quad (7.48)$$

Logo, a solução  $u(x)$  é dada por

$$u(x) = (1 - x) [\tan^{-1} \alpha (x - x_0) + \tan^{-1} \alpha x_0] \quad (7.49)$$

Para  $x_0 = 4/9$  e  $\alpha = 50$ , tem-se uma função  $u(x)$  suave, no entanto com altos gradientes em  $x = 4/9$ .

Os resultados obtidos podem ser vistos na Figura 7.2, onde são apresentadas as taxas de convergência obtidas por Rachowicz et al. (1989) e através do processo de otimização desenvolvido neste trabalho para 3, 4 e 5 iterações. Comparando ambas as metodologias, observa-se um comportamento bastante similar em termos de taxas de convergência. No entanto, através da presente formulação atinge-se o limite de erro estabelecido com um número bastante reduzido de iterações.

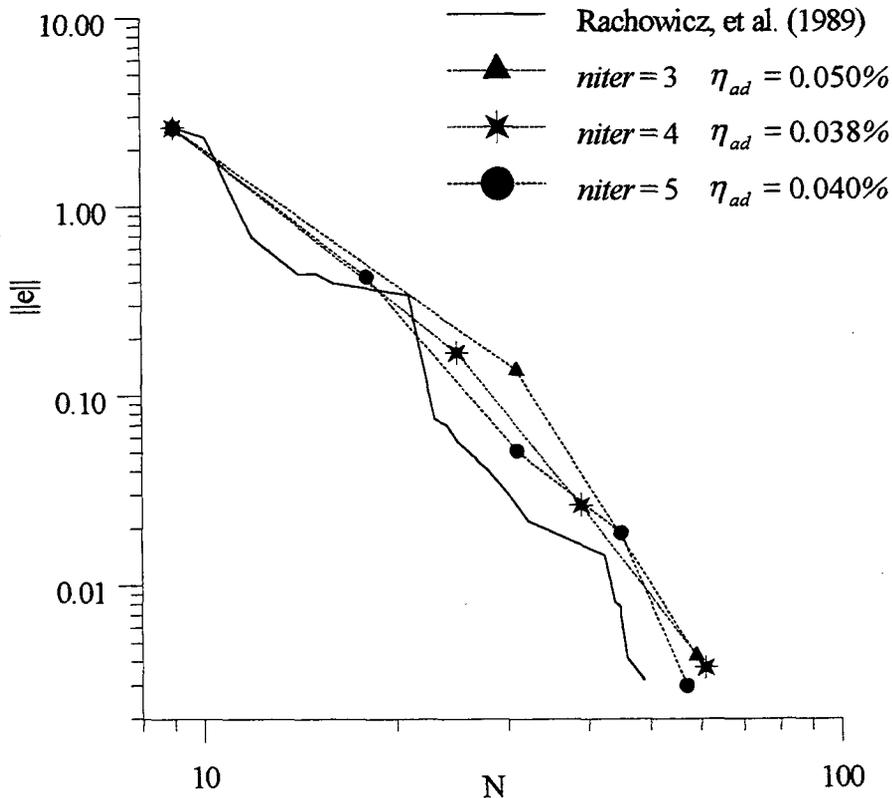


Figura 7.2: Convergência *hp*.

Na Figura 7.3 é apresentada a malha *hp* obtida após o processo iterativo para  $niter = 4$ . Nesse caso tem-se um refinamento *hp* concentrado em torno do ponto  $x = 4/9$ . O que era esperado, visto que nesta região ocorrem elevados gradientes da solução.

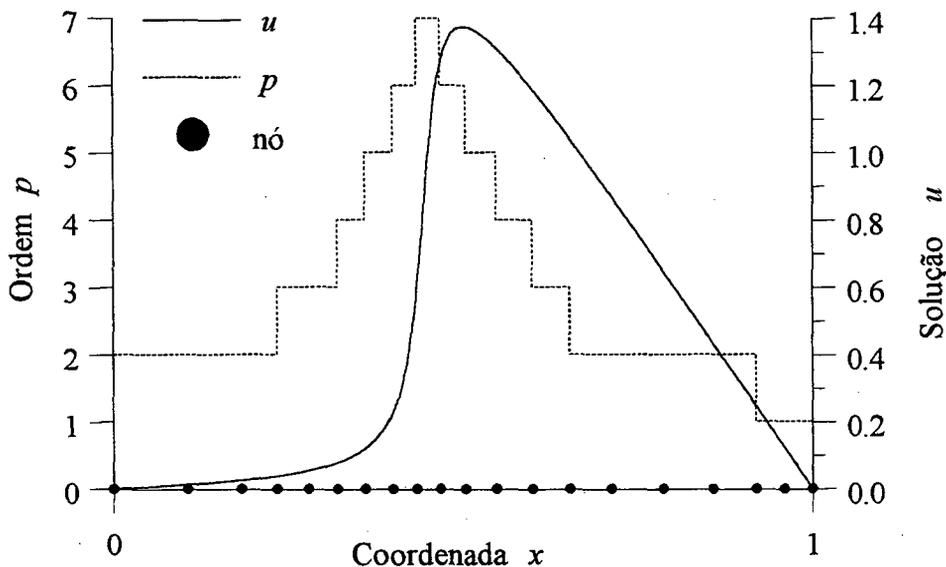


Figura 7.3: Malha *hp* final para  $niter = 4$ .

### 7.3.2 Exemplo 2

Aqui, analisa-se o mesmo problema do Exemplo 1, mas com  $\alpha = 200$ . Embora a função continue suave, tem-se gradientes ainda mais elevados em  $x = 4/9$ .

Na Figura 7.4 são apresentadas as taxas de convergência obtidas por Rachowicz et al. (1989) e através da metodologia aqui proposta para 3, 4 e 5 iterações. Fazendo-se uma análise comparativa entre as duas metodologias, nota-se que, no início do processo iterativo as taxas de convergência são preservadas até que, através da estratégia aqui proposta, um nó é posicionado na vizinhança de  $x = 4/9$ , onde ocorrem altos gradientes da solução ocasionando um sensível aumento das taxas de convergência. Esse fato se deve ao *remeshing* utilizado neste trabalho que, apesar da aleatoriedade na regeneração da malha, o processo adaptativo conduz a um aumento do número de elementos na região de altos

gradientes. Isso aumenta a probabilidade de um novo nó ser gerado em uma coordenada  $x \approx 4/9$ .

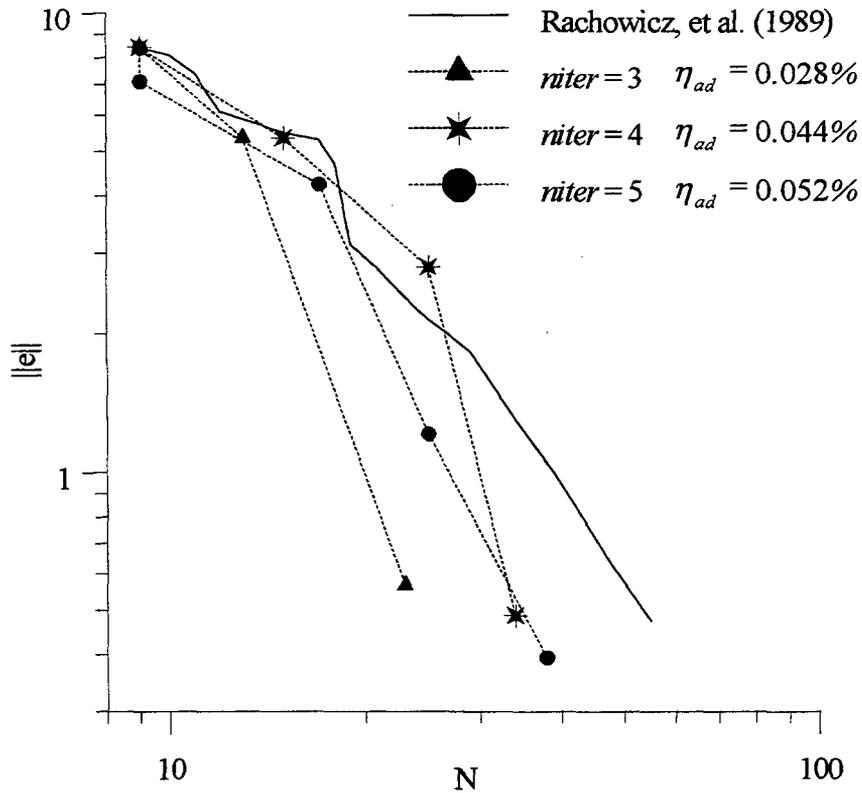


Figura 7.4: Convergência *hp*.

A Figura 7.5 mostra a malha *hp* obtida ao final do processo iterativo para  $niter = 4$ . Neste caso tem-se um refinamento *hp* concentrado em torno do ponto  $x = 4/9$  onde ocorre os elevados gradientes da solução. Note que existe um nó posicionado em  $x \approx 4/9$ , o que provocou as elevadas taxas de convergência mostradas na Figura 7.5.

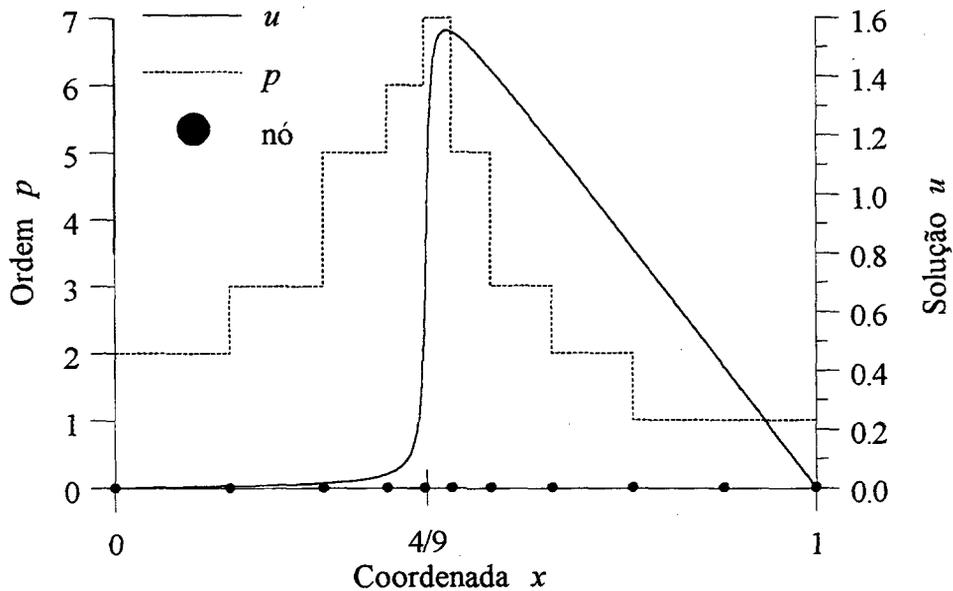


Figura 7.5: Malha *hp* final para *niter* = 4.

### 7.3.3 Exemplo 3

Neste último exemplo, tem-se que,  $g_0 = 0$ ,  $g_1 = 1$  e a excitação  $f(x)$  é dada por

$$f(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} \tag{7.50}$$

Portanto, a solução  $u(x)$  é tal que

$$u(x) = x^\alpha \tag{7.51}$$

e, sendo  $\alpha = 0.6$ , tem-se uma singularidade no problema em  $x = 0$ . No entanto, a norma-energia da solução é limitada, ou seja,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \equiv \|u\|_E \equiv \left\| \frac{du}{dx} \right\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_0^1 \frac{du}{dx} dx} = \frac{\alpha}{\sqrt{2\alpha - 1}} < \infty, \quad \text{se } \alpha < \frac{1}{2} \tag{7.52}$$

A Figura 7.6 mostra os resultados obtidos em termos de taxas de convergência, tanto para a metodologia proposta por Rachowicz et al. (1989) como para a estratégia de refino *hp* aqui apresentada para 3, 4 e 5 iterações. Mediante uma análise comparativa entre ambas metodologias, nota-se um comportamento bastante similar em termos de taxas de convergência. No entanto, através da metodologia aqui proposta, tem-se uma

redução bastante apreciável do número de iterações necessárias para atingir a precisão pré-estabelecida.

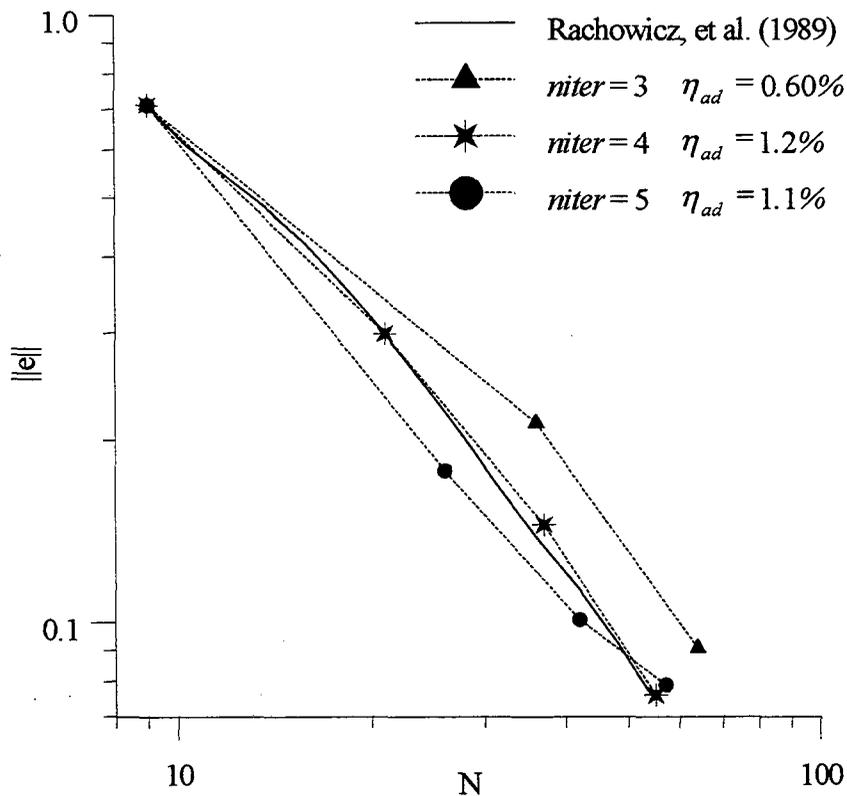


Figura 7.6: Convergência  $hp$ .

Nota-se que na região singular (em torno do ponto  $x = 0$ ) é desencadeado um refino  $hp$  segundo a metodologia de Babuška et al. (1997). No restante do domínio é utilizada a metodologia proposta neste trabalho para determinar os parâmetros  $h$  e  $p$ . A Figura 7.7 mostra a malha  $hp$  obtida ao final do processo iterativo para  $niter = 4$ .

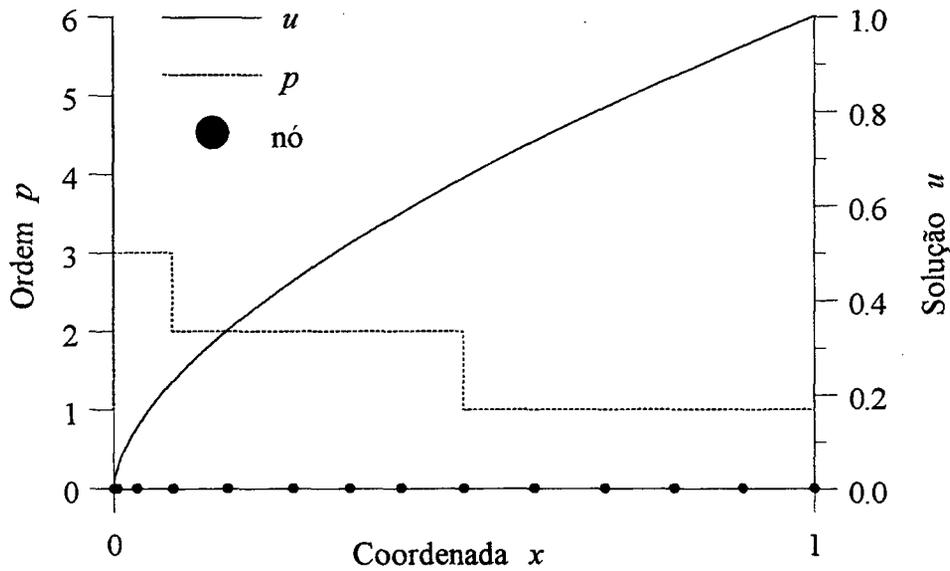


Figura 7.7: Malha *hp* final para *niter* = 4.

Como o refino é extremamente localizado em  $x = 0$ , nas Figuras 7.8 e 7.9 as malhas finais são mostradas através de *zoom* de  $4 \times 10^6$  e  $2/3 \times 10^8$  vezes, respectivamente, de modo a tornar possível a visualização da distribuição da ordem polinomial, bem como do tamanho dos elementos em torno da singularidade.

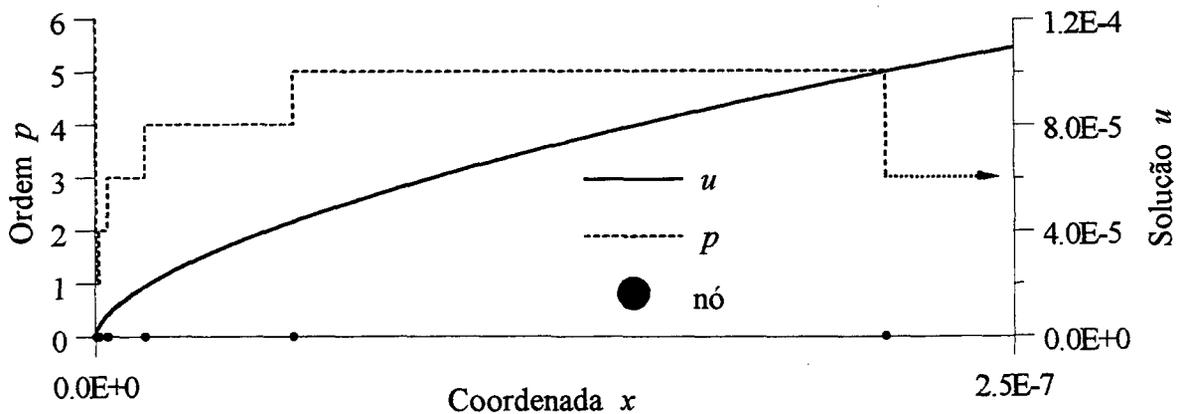


Figura 7.8: Malha *hp* final para *niter* = 4: *Zoom* de  $4 \times 10^6$  vezes.

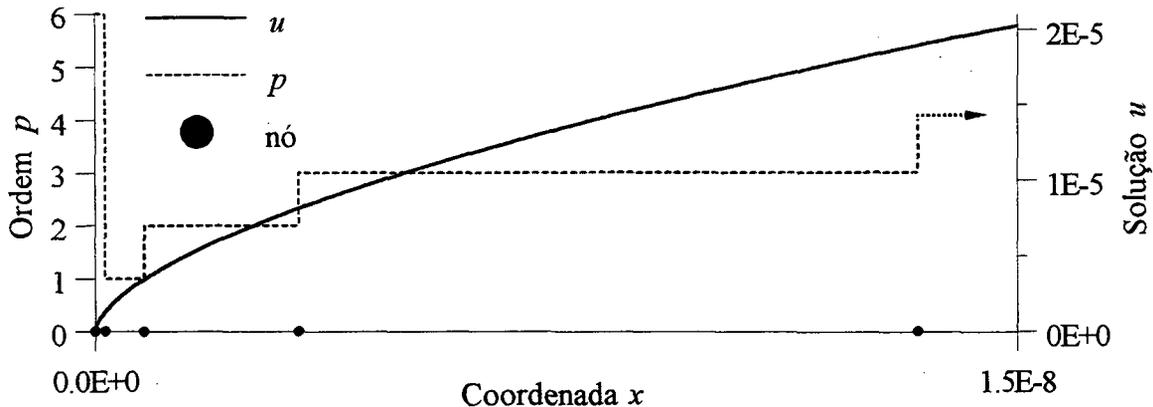


Figura 7.9: Malha *hp* final para  $niter = 4$ : Zoom de  $2/3 \times 10^8$  vezes.

## 7.4 Comentários Adicionais

Neste Capítulo é proposta uma nova estratégia de refino *hp* adaptativo, onde os parâmetros  $h$  e  $p$  são projetados simultaneamente em cada iteração do problema. Neste sentido, o problema de ótimo é estabelecido mediante um critério de minimização do número de equações para um dado limite de erro fixo. A abordagem apresentada neste trabalho conduz a um problema de otimização onde o limite de erro e os parâmetros  $h$  e  $p$  aparecem explicitamente nas equações. Como as equações são obtidas analiticamente para cada elemento, o método resulta em uma equação algébrica não-linear que fornece os valores ótimos dos parâmetros  $h$  e  $p$ . Assim, é sugerido um algoritmo de otimização, fundamentado na resolução aproximada desta equação através do método do ponto fixo.

Uma condição necessária e suficiente para o ótimo, tal como proposto neste trabalho, é estabelecida para cada elemento. Todavia, este resultado não pode ser estendido diretamente à toda a malha, razão pela qual, no momento, a questão da unicidade da solução é deixada em aberto.

Para desencadear o refino *hp* da malha, adota-se um processo de *remeshing* que permite desvincular, quase totalmente, o processo adaptativo da discretização inicial do problema. Isto diminui ainda mais a responsabilidade do engenheiro analista em relação ao conhecimento prévio do problema (ver exemplo 2 da Seção 7.3). O inconveniente é que

através desta metodologia não é possível aproveitar o sistema de equações obtido em uma iteração anterior de maneira direta. Entretanto, nada impede a utilização da estratégia *hp* aqui desenvolvida em conjunto com outras filosofias de refinamento *hp* adaptativos, inclusive àquelas fundamentadas na construção de malhas aninhadas de modo a permitir o aproveitamento total do sistema de equações em cada iteração (Demkowicz et al. 1989).

Como o objetivo deste trabalho é testar uma formulação que possa ser estendida diretamente a problemas de valor no contorno bidimensionais (e/ou tridimensionais) e que, por questões práticas, não exija do usuário o conhecimento específico dos espaços onde se encontram a solução do problema em análise. Aqui são adotadas várias hipóteses simplificativas que podem conduzir a malhas que não sejam ótimas, tal como definido por Babuška et al. (1997). No entanto, apesar de detectada uma sensível superestimação do limite de erro global admissível  $\eta_{ad}$ , os resultados obtidos se mostram bastante satisfatórios do ponto de vista de independência do analista no processo adaptativo, de taxas de convergência e, sobretudo, em relação à redução do número de iterações necessárias para atingir uma precisão pré-estabelecida comparada a outras estratégias de refinamento *hp* (Rachowicz et al. 1989). Esse fato é de grande importância em análise adaptativa, visto que uma substancial redução do número de equações e das iterações necessárias para resolver o problema, resulta em uma diminuição efetiva dos custos computacionais dispendidos em um processo adaptativo. Além disso, considerando-se situações práticas reais, os resultados numéricos obtidos com apenas 3 iterações são considerados muito satisfatórios.

# Capítulo 8

## Aspectos Computacionais

O problema da implementação computacional de novos procedimentos em um programa de Elementos Finitos visando aproveitar a estrutura computacional já existente pode se tornar extremamente trabalhoso quando se utiliza uma filosofia de programação procedural.

Neste sentido, a filosofia de programação orientada a objetos fornece uma estrutura de trabalho que induz o programador a desenvolver seus códigos de forma modular, organizando o trabalho em classes. Esta particularidade, quando devidamente utilizada, oferece um maior controle no gerenciamento de grandes estruturas computacionais na atualização do código e na incorporação de novos procedimentos.

### 8.1 Programação Orientada a Objetos

A característica fundamental das linguagens orientadas a objetos consiste em fornecer ao programador uma série de ferramentas para estruturar, ordenar e modularizar seus códigos. Isso pode ser conseguido agrupando-se, numa mesma entidade, um conjunto de dados e métodos (funções) sobre estes dados, sendo estas estruturas de dados denominadas *classes*. Assim, *classe* é a definição de uma estrutura complexa de dados e *objeto* é uma instância da mesma.

Existem três propriedades fundamentais que caracterizam uma linguagem orientada a objetos, quais sejam, *encapsulamento*, *herança* e *polimorfismo* (Fancello, 1993).

- **Encapsulamento**

A programação orientada a objetos permite encapsular conjuntos específicos de dados e métodos, formando entidades auto-suficientes denominadas classes. Toda interação entre o objeto e o resto do sistema é efetuada através de mensagens. Quando um objeto recebe uma mensagem, os métodos executam a operação associadas a esta atuando sobre os dados da classe. Portanto, a organização dos dados, sua estrutura, posição física na memória e detalhes de implementação são alheios ao código que utiliza o objeto. Se a mensagem que ativa o método de um determinado objeto não é alterada, a implementação do mesmo pode ser modificada com total independência do resto do programa. Por outro lado, a invisibilidade dos dados de um objeto por parte do resto do código, proporciona confiabilidade dos resultados e facilidade de manutenção.

- **Herança**

Definida uma classe, a mesma pode ser utilizada para construir *classes herdadas* que têm acesso a todos os dados e métodos de sua antecessora. Sendo assim, quando um objeto recebe uma mensagem, a classe da qual este objeto é uma instância procura entre seus métodos aquele que corresponde à mensagem. Caso este não seja achado, a procura continua na sua antecessora, repetindo-se o processo até o método ser localizado.

- **Polimorfismo**

O polimorfismo é a capacidade de se usar o mesmo nome para métodos distintos, implementados em diferentes níveis de uma hierarquia de classes. Nesse caso, o método pode ter uma finalidade específica em cada classe. Assim o polimorfismo é a propriedade de um programa orientado a objetos de discernir, dentre o métodos homônimos, aquele que deve ser executado. Através desta característica, uma única mensagem pode ser enviada a todos os membros de uma família de classes, cada uma respondendo de forma particular através de seu próprio método.

## 8.2 ACDPOOP & ACDPFEM, 2D ARANHA e ACDPTOP

Neste trabalho são exploradas as potencialidades oferecidas pela filosofia de programação orientada a objetos mediante a utilização dos recursos já existentes no ACDPOOP (Guimarães & Feijóo, 1989), ACDPFEM (Feijóo et al., 1991) e 2D ARANHA (Fancello, 1993) e a implementação de novos procedimentos (classes) compatíveis com estes, de modo a desenvolver uma estrutura computacional, neste caso o programa ACDPTOP, capaz de gerenciar a natural complexidade das informações inerentes a versões adaptativas do Método dos Elementos Finitos, bem como do problema de otimização topológica em elasticidade plana. Esta classe de problemas tem a característica de apresentar uma apreciável diferença na estrutura de dados em relação a um programa convencional de Elementos Finitos. Portanto, a filosofia de programação aqui utilizada se mostra especialmente atraente quando empregada a problemas desta natureza.

### • ACDPOOP & ACDPFEM

O *Ambiente Computacional para Desenvolvimento de Programas Orientados a Objetos* (ACDPOOP) dispõe de procedimentos específicos para gerenciamento de objetos, tanto na memória do computador como em arquivos, facilitando a tarefa de construir um banco de dados para utilizar de forma racional a máquina (Guimarães & Feijóo, 1989). Já o *Ambiente Computacional para Desenvolvimento de Programas de Elementos Finitos* (ACDPFEM) procura fornecer algumas facilidades ao programador no desenvolvimento e incorporação de novos elementos finitos e procedimentos associados a estes (Feijóo et al., 1991).

### • 2D ARANHA

Para triangularização dos domínios bidimensionais, neste trabalho é utilizado o gerador de malhas 2D ARANHA (Fancello, 1993), o qual baseia-se em técnicas *não estruturadas frontais*. A denominação *não estruturada* provém do fato de que a malha não é resultado

de um mapeamento prévio com estrutura e topologia fixas e sim pelo preenchimento do domínio de interesse pelos elementos finitos. O termo *frontal* indica que a incorporação dos elementos dentro da geometria se produz seguindo uma frente de geração que se propaga pelo interior do domínio.

- **ACDPTOP**

O código *Ambiente Computacional para Desenvolvimento de Programas em Otimização Topológica* (ACDPTOP), desenvolvido neste trabalho, contém todos os procedimentos necessários para montagem e resolução de um problema de otimização topológica em elasticidade plana utilizando a versão  $h$  adaptativa do Método dos Elementos Finitos.

Durante o processo iterativo, esta estrutura computacional permite identificar a nova fronteira da peça de maneira sistemática e realizar o refino adaptativo da malha nessa região, de modo a melhorar, além do cálculo de tensões, a própria geometria otimizada.

É importante ressaltar ainda que, devido à característica modular dos procedimentos implementados neste trabalho, a aplicabilidade da estrutura computacional desenvolvida não se limita apenas à otimização topológica e adaptabilidade em elasticidade plana, sendo facilmente estendida a outras classes de problemas.

# Capítulo 9

## Conclusões Finais & Sugestões

No presente trabalho são desenvolvidos dois temas centrais naturalmente complementares, quais sejam: adaptatividade  $h$  na otimização topológica (Capítulo 6) e projeto ótimo de malhas  $hp$  adaptativas (Capítulo 7). Sendo assim, neste último Capítulo é dada uma visão breve e global do trabalho, bem como é proposta uma forma de acoplar ambas as metodologias ora citadas. Além do mais, sugere-se alguns caminhos que podem ser seguidos de modo a tornar a estrutura computacional aqui desenvolvida mais geral e mais aplicável a situações físicas reais.

### 9.1 Conclusões Finais

Neste trabalho é inicialmente apresentada uma metodologia alternativa para melhorar a representação da geometria de uma peça otimizada mediante a identificação da nova fronteira e posterior refino  $h$  da malha nessa região. Desta forma, a técnica de refino  $h$  adaptativo é utilizada como ferramenta no processo de otimização topológica.

Os resultados mostrados na Seção 6.4 confirmam que é possível chegar à forma final da peça de maneira sistemática e barata, sem a necessidade de desencadear um processo de otimização de forma, o que implica na parametrização da nova geometria obtida através do processo de otimização topológica. Essa tarefa de identificação de parâmetros pode vir a ser extremamente complexa, a tal ponto que, muitas vezes, é realizada de forma quase artesanal pelo engenheiro projetista. No entanto, quando se leva em conta questões de manufaturabilidade da peça, por exemplo, a metodologia aqui desenvolvida não elimina

uma provável etapa de parametrização da nova geometria. Embora forneça mais subsídios para realizar tal tarefa.

A *carta de espessura binária* permite induzir o refino no contorno do modelo otimizado, identificando, portanto, a nova geometria da peça de maneira sistemática. É notório, também, que as tensões que ocorrem no contorno do componente são em geral as mais críticas. Assim, a técnica de refino  $h$  adaptativo induzido artificialmente nesta região melhora consideravelmente o cálculo das tensões nos pontos de maior interesse.

Em seguida, a teoria de otimização é utilizada como ferramenta no projeto de malhas  $hp$  adaptativas. Assim, é formulado um problema de ótimo de modo a tornar possível a projeção simultânea dos parâmetros  $h$  e  $p$  da malha em cada iteração do problema de maneira simples e pouco custosa computacionalmente.

No decorrer do trabalho, são adotadas hipóteses simplificativas que conduzem a uma formulação que não exige do usuário o conhecimento específico da regularidade da solução do problema em análise e que pode ser diretamente estendida a problemas bidimensionais e tridimensionais. Embora essas simplificações possam levar a malhas que não sejam ótimas, os exemplos apresentados na Seção 7.3 mostram que as taxas de convergência são preservadas e observa-se ainda uma apreciável redução no número de iterações necessárias para atingir uma precisão pré-estabelecida, diminuindo, assim, os custos computacionais envolvidos em um processo auto-adaptativo.

Em síntese, os resultados obtidos através da metodologia desenvolvida no Capítulo 7 se mostram bastante satisfatórios do ponto de vista de independência do analista no processo adaptativo, de taxas de convergência e, sobretudo, em relação à redução do número de iterações necessárias para atingir o limite de erro especificado comparada a outras estratégias de refinamento  $hp$  adaptativo (Rachowicz et al. 1989).

## 9.2 Sugestões

Um caminho natural para dar sequência a este trabalho, consiste em acoplar a estratégia de refino  $hp$  aqui desenvolvida à técnica de otimização topológica apresentada no

Capítulo 6, ou ainda a outras metodologias de projeto e análise de componentes mecânicos e da mecânica do contínuo em geral. Assim, no primeiro caso tem-se a Estratégia *hp* Adaptativa na Otimização Topológica (ver Figura 9.1).

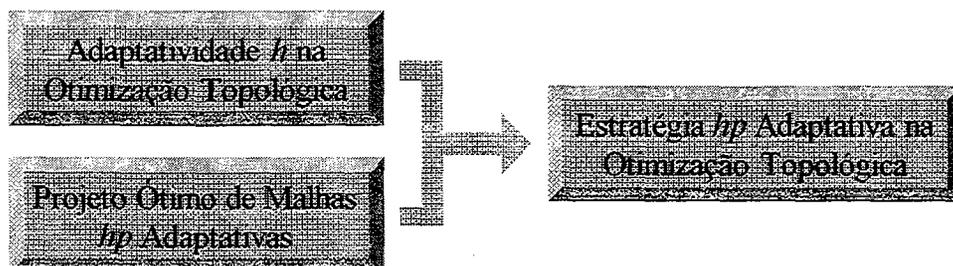


Figura 9.1: Uma proposta para continuidade do trabalho.

Sendo assim, uma forma possível de acoplar ambas as metodologias desenvolvidas neste trabalho consiste em, primeiramente, obter a topologia ótima do componente mecânico tal como mostrado no Capítulo 6. Em seguida, desencadear um refino *hp* adaptativo da malha, como proposto no Capítulo 7, mas sem permitir um desrefino *h* da malha, de modo a preservar a topologia da peça. Por último, recalcular a carta de espessura até obter a saturação do critério de von Mises.

Para guiar um refino *hp* adaptativo necessita-se ainda fazer um estudo mais aprofundado de técnicas de estimativa de erro *a posteriori* de discretização. Os estimadores de erro baseados no Método dos Resíduos em Elementos (Oden et al. 1989) e modificações destes (Duarte, 1991) são particularmente eficientes para as versões *p* e *hp* adaptativas do MEF. Outra importante melhoria, é a implementação de métodos iterativos para resolução do sistema de equações, tais como o Método de Gradientes Conjugados e o de Jacobi.

Como continuidade deste trabalho, sugere-se também, trabalhar com estruturas tipo placas e cascas. Isso aumentaria muito a gama de aplicações em problemas práticos de engenharia. Acredita-se ainda que a extensão deste trabalho a sólidos tridimensionais seja possível, embora não direta. Isso se deve ao fato de que, o parâmetro geométrico  $\rho$  não aparece explicitamente nas equações de equilíbrio de estruturas deste tipo. Então haveria necessidade de encontrar formas alternativas de embutir  $\rho$  nestas equações.

# Bibliografia

- [1] Babuška, I.; Strouboulis, T. & Copps, K. (1997) - ***hp* Optimization of Finite Elements Approximations: Analysis of the Optimal Mesh Sequences in One Dimension**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 150, p. 89-108.
- [2] Babuška, I. & Suri, M. (1990) - **The *p* and *hp* Versions of the Finite Elements Methods, an Overview**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 80, p. 5-26.
- [3] Bendsøe, M.P.; Diaz, A. & Kikuchi, N. (1993) - **Topology and Generalized Layout Optimization of Structure**, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, U.S.A.
- [4] Bertsekas, D. P. (1995) - **Nonlinear Programming**, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, U.S.A.
- [5] Chen, W.F. & Han, D.J. (1988) - **Plasticity for Structural Engineers**, Springer-Verlag, New York, U.S.A.
- [6] Demkowicz, L.; Oden, J.T.; Rachowicz, W. & Hardy, O. (1989) - **Toward a Universal *hp* Adaptive Finite Element Strategy - Part1. Constrained Approximation and Data Structure**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 77, p. 79-112.

- [7] Diaz, A. & Kikuchi, N. (1992) - **Solution to Shape and Topology Eigenvalue Optimization Problem Using a Homogenization Method**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 35, p. 1487-1502.
- [8] Dhatt, G. & Touzot G. (1984) - **Une Présentation de la Méthode des Éléments Finis**, Maloine S.A., France.
- [9] Duarte, C.A.M. (1991) - **Estudo da versão  $p$  do Método dos Elementos Finitos para Problemas de Elasticidade e de Potencial**, Dissertação de Mestrado, GRANTE/EMC/UFSC, Florianópolis - SC.
- [10] Dunavant, D.A. (1985) - **High Degree Efficient Symmetrical Gaussian Quadrature Rules for the Triangle**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 21, p. 1129-1148.
- [11] Fancello, E.A. (1993) - **Análise de Sensibilidade, Geração Adaptativa de Malhas e o Método dos Elementos Finitos na Otimização de Forma em Problemas de Contato e Mecânica da Fratura**, Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro - RJ.
- [12] Feijóo, R.A.; Guimarães, A.C.S. & Fancello, E.A. (1991) - **Algumas Experiencias en la Programación Orientada por Objetos y su Aplicación en el Método de los Elementos Finitos**, Relatório de Pesquisa e Desenvolvimento do Laboratório Nacional de Computação Científica, N° 15/91, Rio de Janeiro - RJ.
- [13] Fish, J. (1992) - **The  $s$  Version of the Finite Element Method**, Computer and Structures, vol. 43 p. 539-547.
- [14] Guimarães, A.C.S. & Feijóo, R.A. (1989) - **ACDP: Um Ambiente Computacional para Desenvolvimento de Programas**, Relatório de Pesquisa e Desenvolvimento do Laboratório Nacional de Computação Científica, N° 027/89, Rio de Janeiro - RJ.

- [15] Guo, B. & Babuška, I. (1986) - **The  $h$ ,  $p$  and  $hp$  Versions of the Finite Elements Methods in 1 Dimension, Parts I, II and III**, Numerical Meth., vol. 48, p. 577-683.
- [16] Hinton, E. & Campbell, J.S. (1974) - **Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Square Method**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 8, p. 461-480.
- [17] Hughes, T.J.R. (1987) - **The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**, Prentice-Hall International, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A.
- [18] Kolmogorov, A.N. & Fomin, S. V., (1970) - **Introductory Real Analysis**, Dover Publications, Inc., New York, U.S.A.
- [19] Muñoz P.A.R. (1994) - **Desenvolvimentos na Aplicação do Método da Função de Green Local Modificado a Problemas de Placa de Mindlin**, Dissertação de Mestrado, GRANTE/EMC/UFSC, Florianópolis - SC.
- [20] Novotny, A.A. & Fancello, E.A. (1998) - **Um Refinamento  $h$ ,  $p$  e  $hp$  Adaptativo na Análise de Flexão de Placas Semi-Espessas**, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, vol. 14.1, p. 25-48, Barcelona, Espanha.
- [21] Novotny, A.A.; Luersen, M.A.; Fancello, E.A. & Selke, C.A.C. (1995) - **A  $p$ -Adaptive Refinement for Thick Plate Finite Element Analysis**, XIII COBEM - Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Belo Horizonte - MG.
- [22] Novotny, A.A.; Souza de Cursi, J.E. & Pagnacco, E. (1997) - **A 2D Elasticity Topological Optimization Design**, XVIII CILAMCE - Congresso Ibero Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, Brasília - DF.

- [23] Oden, T.J. & Carey, G.F. (1983) - **Finite Elements Mathematical Aspects**, vol. 4 in the Texas Finite Element Series. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., U.S.A.
- [24] Oden, T.J. & Reddy, J.N. (1976) - **An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements**, John Wiley & Sons, Co., New York, U.S.A.
- [25] Rasmussen, J.; Lund, E. & Birker, T. (1992) - **Collection of Exemples: CAOS Optimization System**, Special Report n°. 13, Institute of Mechanical Engineering, Aalborg University, Denmark.
- [26] Oden, J.T.; Demkowicz, L.; Rachowicz, W. & Westermann, T.A. (1989) - **Toward a Universal *hp* Adaptive Finite Element Strategy - Part2. A Posteriori Error Estimation**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 77, p. 113-180.
- [27] Rachowicz, W.; Oden, J.T. & Demkowicz, L. (1989) - **Toward a Universal *hp* Adaptive Finite Element Strategy - Part3. Design of *hp* Meshes**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 77, p. 181-212.
- [28] Reddy, J.N. (1984) - **Energy and Variational Methods in Applied Mechanics**, John Wiley & Sons, Co., New York, U.S.A.
- [29] Souza de Cursi, J. E. (1994) - **Allégement d'une Pièce Élastique Homogène Soumise à des Contraintes Planes**, Rapport de Recherche n°. 1/94, L.M.R - Rouen, France.
- [30] Souza de Cursi, J. E. (1995) - **Fast Topological Design in 2D Elasticity**, Developments in Computational Techniques for Structural Engineering, BHV Topping, 313-322, U.K.
- [31] Szabó, B. & Babuška, I. (1991) - **Finite Element Analysis**, John Wiley & Sons, Co., New York, U.S.A.

- 
- [32] Webb, J.P. & Abouchacra, R. (1995) - **Hierarchal Triangular Elements Using Orthogonal Polynomials**, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, p. 245-257.
- [33] Zienkiewicz, O.C. & Zhu, J.Z. (1987) - **A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis**, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, p. 337-357.