

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÕES DO MÉTODO DA FUNÇÃO
DE GREEN LOCAL MODIFICADO À EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

CARLO GIUSEPPE FILIPPIN

FLORIANÓPOLIS, DEZEMBRO DE 1992

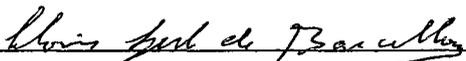
DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÕES DO MÉTODO DA FUNÇÃO
DE GREEN LOCAL MODIFICADO À EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

CARLO GIUSEPPE FILIPPIN

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

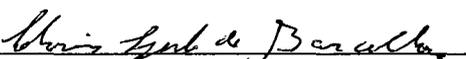
MESTRE EM ENGENHARIA

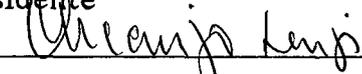
ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO PROJETO
E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

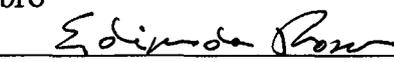

CLOVIS SPERB DE BARCELLOS - Ph.D.
Orientador

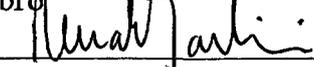

BEREND SNOEIJER - Dr. Ing.
Coordenador do Curso

BANCA EXAMINADORA


CLOVIS SPERB DE BARCELLOS - Ph.D.
Presidente


ARCANJO LENZI - Ph.D.
Membro


EDISON DA ROSA - Dr. Eng.
Membro


RENATO BARBIERI - Dr. Eng.
Membro

"Se você construir castelos no ar, seu trabalho não está perdido;
é ali que eles devem ficar.
Agora coloque os alicerces debaixo deles."

Thoreau

*Aos meus pais, Bruno e Roza, e irmã, Carla.
Per Eloisa, con amore e con tutte le stelle del cielo.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Clovis Sperb de Barcellos pela orientação, formação, interesse e paciência empenhadas durante a realização deste trabalho.

Agradeço ao Prof. Renato Barbieri que, atuando informalmente como co-orientador, muito me auxiliou e contribuiu para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço a Roberto Dalledone, Marcelo, Agenor e Pablo pelas contribuições dadas a este trabalho.

Agradeço a todos os colegas e amigos que proporcionaram um ambiente de trabalho incentivador e agradável, especialmente a Álvaro, Isolene (Sula), Jucélio, Marco Antonio (Ipira), Ricardo Borges, Rogério (Rato) e Tancredo.

Expresso meus agradecimentos à CAPES pelo suporte financeiro destinado a esta pesquisa.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS	ix
LISTA DE TABELAS	xi
RESUMO	xiii
ABSTRACT	xiv
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 FORMULAÇÕES NUMÉRICAS	2
1.2 O MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO (MLGFM)	2
1.3 DESENVOLVIMENTOS E APLICAÇÕES DO MLGFM	3
1.4 OBJETIVO DO TRABALHO	5
1.5 MELHORAMENTOS APLICADOS AOS MÉTODOS NUMÉRICOS MAIS UTILIZADOS PARA A RESOLUÇÃO DO AUTOPROBLEMA DINÂMICO	6
1.5.1 Investigações no Método de Elementos Finitos	6
1.5.2 Investigações no Método de Elementos de Contorno	7
2 O MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO	9
2.1 FORMULAÇÃO DO MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO (MLGFM)	10
2.2 FORMALISMO DO MLGFM	11
2.3 FORMULAÇÃO NUMÉRICA	15
2.3.1 Discretização e Aproximação Numérica	15
2.3.2 Determinação das Projeções da Função de Green	20
2.4 CONCLUSÕES	27

3 IMPLEMENTAÇÃO DO MLGFM PARA EQUAÇÕES HIPERBÓLICAS	28
3.1 PARTICULARIZAÇÃO DO MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO (MLGFM) PARA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ	29
3.1.1 O Problema de Vibrações Livres	29
3.1.2 Equações Governantes	30
3.1.3 O Problema de Vibrações Livres em Membranas	32
3.2 APLICAÇÕES DO MLGFM AO PROBLEMA DE VIBRAÇÕES LIVRES EM MEMBRANAS E CAVIDADES ACUSTICAMENTE RÍGIDAS	34
3.3 FORMULAÇÕES NUMÉRICAS	37
3.3.1 Discretização e Aproximação Numérica	37
3.3.2 Aproximação Direta das Matrizes de Green	40
3.4 IMPOSIÇÕES DE CONDIÇÕES DE CONTORNO	44
3.4.1 Condições de Contorno de Dirichlet Homogêneas	44
3.4.2 Condições de Contorno de Neumann Homogêneas	45
3.4.3 Condições de Contorno Mistas Homogêneas	47
4 RESULTADOS NUMÉRICOS	48
4.1 ELEMENTOS FINITOS E DE CONTORNO	49
4.2 O PROBLEMA DE AUTOVALOR/AUTOVETOR	52
4.3 APLICAÇÕES	53
4.3.1 Generalidades	53
4.3.2 Membranas Elásticas com Bordas Fixas	53
Aplicação 01: Avaliação da Influência do Parâmetro k_0	54
Aplicação 02: Avaliação da Influência da Distorção de Malha	56
Aplicação 03: Membrana Retangular	58
Aplicação 04: Membrana em "L"	62
Aplicação 05: Membrana Elíptica	63
Aplicação 06: Membrana em "H"	65
Aplicação 07: Membrana Circular com Bordas Fixas	66
Aplicação 08: Membrana Quadrada	68
Aplicação 09: Membrana Triangular	72
Aplicação 10: Membrana Rômbica	73
4.3.3 Cavidades Acusticamente Rígidias	78
Aplicação 11: Cavidade Retangular	79
Aplicação 12: Cavidade Circular	86
Aplicação 13: Tubo de Impedância	87
Aplicação 14: Cavidade Trapezoidal	92
Aplicação 15: Cavidade Retangular	93

	viii
4.3.4 Membrana Elástica com Bordas Fixas e Bordas Livres	95
Aplicação 16: Membrana Circular	95
Aplicação 17: Membrana Retangular com uma Borda Livre	97
Aplicação 18: Membrana Retangular com uma Borda Fixa	101
Aplicação 19: Membrana Retangular com duas Bordas Opostas Livres e duas Fixas	105
Aplicação 20: Membrana Retangular com duas Bordas Adjacentes Livres e duas Fixas	109
Aplicação 21: Membrana Rômbica com duas bordas opostas livres e duas Fixas	113
Aplicação 22: Membrana retangular com orifício retangular	118
4.4 CONCLUSÕES	119
5 ANÁLISE EXPERIMENTAL DE CONVERGÊNCIA	120
5.1 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA	121
5.2 RESULTADOS NUMÉRICOS	121
5.2.1 Membrana Elástica	121
5.2.2 Cavidade Acusticamente Rígida	128
6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES	135
REFERÊNCIAS	138
APÊNDICE	145

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 : Discretização do Domínio	17
Figura 4.1 : Elemento Isoparamétrico e Elemento "Mestre"	50
Figura 4.2 : Sistema Natural de Coordenadas Unidimensional	51
Figura 4.3 : Elemento Insoparamétrico Quadrático [73]	51
Figura 4.4 : Aplicação 01	56
Figura 4.5 : Aplicação 02: Distorção da Malha	57
Figura 4.6 : Aplicação 03: Membrana Retangular	58
Figura 4.7 : Modos 1, 2, 3 e 4 para Membrana Retangular	59
Figura 4.8 : Modos 5, 6, 7 e 8 para Membrana Retangular	60
Figura 4.9 : Modos 9 e 10 para Membrana Retangular	61
Figura 4.10: Aplicação 04: Membrana em "L"	63
Figura 4.11: Aplicação 05: Membrana Elíptica	64
Figura 4.12: Aplicação 06: Membrana em "H"	66
Figura 4.13: Aplicação 07: Membrana Circular	67
Figura 4.14: Aplicação 08: Membrana Quadrada	69
Figura 4.15: Modos 1, 2, 3, 4 e 5 para Membrana Quadrada	70
Figura 4.16: Modos 6, 7, 8, 9 e 10 para Membrana Quadrada	71
Figura 4.17: Aplicação 09: Membrana Triangular	73
Figura 4.18: Aplicação 10: Membrana Rômbica	78
Figura 4.19: Aplicação 10: Cavidade Retangular	80
Figura 4.20: Modos 1, 2, 3 e 4 para Cavidade Retangular	81
Figura 4.21: Modos 5, 6 e 7 para Cavidade Retangular	82
Figura 4.22: Modos 8, 9, 10 e 11 para Cavidade Retangular	83
Figura 4.23: Modos 12, 13 e 14 para Cavidade Retangular	84
Figura 4.24: Modos 15, 16 e 17 para Cavidade Retangular	85
Figura 4.25: Aplicação 12: Cavidade Circular	86
Figura 4.26: Aplicação 13: Tubo de Impedância	88
Figura 4.27: Modos 2, 3 e 4 para Tubo de Impedância	89
Figura 4.28: Modos 5, 6 e 7 para Tubo de Impedância	90
Figura 4.29: Modos 8, 9 e 10 para Tubo de Impedância	91
Figura 4.30: Aplicação 14: Cavidade Trapezoidal	92
Figura 4.31: Aplicação 15: Cavidade Retangular	94
Figura 4.32: Aplicação 16: Membrana Circular	96
Figura 4.33: Aplicação 17: Membrana Retangular com uma Borda Livre	97
Figura 4.34: Modos 1 e 2 para Membrana com uma Borda Livre	98
Figura 4.35: Modos 3, 4, 5 e 6 para Membrana com uma Borda Livre	99
Figura 4.36: Modos 7, 8, 9 e 10 para Membrana com uma Borda Livre	100
Figura 4.37: Aplicação 18: Membrana Retangular com uma Borda Fixa	101

Figura 4.38: Modos 1 e 2 para Membrana com uma Borda Fixa	102
Figura 4.39: Modos 3, 4, 5 e 6 para Membrana com uma Borda Fixa	103
Figura 4.40: Modos 7, 8, 9 e 10 para Membrana com uma Borda Fixa	104
Figura 4.41: Aplicação 19: Membrana Retangular com Duas Bordas Opostas Livres e Duas Fixas	105
Figura 4.42: Modos 1 e 2 para Membrana com duas Bordas Opostas Livres e duas Fixas	106
Figura 4.43: Modos 3, 4, 5 e 6 para Membrana com duas Bordas Opostas Livres e duas Fixas	107
Figura 4.44: Modos 7, 8, 9 e 10 para Membrana com duas Bordas Opostas Livres e duas Fixas	108
Figura 4.45: Aplicação 20: Membrana Retangular com duas Bordas Adjacentes Livres e duas Fixas	109
Figura 4.46: Modos 1 e 2 para Membrana com duas Bordas Adjacentes Livres e duas Fixas	110
Figura 4.47: Modos 3, 4, 5 e 6 para Membrana com duas Bordas Adjacentes Livres e duas Fixas	111
Figura 4.48: Modos 7, 8, 9 e 10 para Membrana com duas Bordas Adjacentes Livres e duas Fixas	112
Figura 4.49: Aplicação 21: Membrana Rômbica com duas Bordas Opostas Adjacentes Livres e duas Fixas	113
Figura 4.50: Aplicação 22: Membrana retangular com orifício Retangular	118
Figura 5.1 : Convergência p - (1x1 - 5x5)	124
Figura 5.2 : Convergência p - (6x6 - 10x10)	125
Figura 5.3 : Convergência h - ($p=1$ - $p=5$)	126
Figura 5.4 : Convergência h - ($p=6$ - $p=10$)	127
Figura 5.5 : Convergência p - (1x1 - 5x5)	131
Figura 5.6 : Convergência p - (6x6 - 10x10)	132
Figura 5.7 : Convergência h -	133

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 : Elementos Finitos e de Contorno	60
Tabela 4.2 : Verificação de Influência do Parâmetro k_0	64
Tabela 4.3 : Distorção da Malha	67
Tabela 4.4 : Frequências Naturais (rad/s)- Membrana Retangular	69
Tabela 4.5 : Frequências Naturais (rad/s)- Membrana em "L"	71
Tabela 4.6 : Membrana Elíptica	73
Tabela 4.7 : Membrana em Forma de "H" (rad/s)	74
Tabela 4.8 : Membrana Circular (rad/s)	76
Tabela 4.9 : Membrana Quadrada (rad/s)	78
Tabela 4.10: Membrana Triangular (rad/s)	80
Tabela 4.11: Autovalores de Membrana Rômbica com $\theta = 15^\circ$ (rad/s)	74
Tabela 4.12: Autovalores de Membrana Rômbica com $\theta = 30^\circ$ (rad/s)	74
Tabela 4.13: Autovalores de Membrana Rômbica com $\theta = 45^\circ$ (rad/s)	75
Tabela 4.14: Autovalores de Membrana Rômbica com $\theta = 60^\circ$ (rad/s)	76
Tabela 4.15: Autovalores de Membrana Rômbica com $\theta = 75^\circ$ (rad/s)	77
Tabela 4.16: Frequências Naturais (Hz) - Cavidade Retangular	83
Tabela 4.17: Cavidade Circular - Frequências naturais (Hz)	85
Tabela 4.18: Tubo de Impedância - Frequências naturais (Hz)	86
Tabela 4.19: Cavidade Trapezoidal - Frequências naturais (Hz)	88
Tabela 4.20: Cavidade Retangular - Frequências naturais (Hz)	89
Tabela 4.21: Membrana Circular - Frequências naturais (Hz)	92
Tabela 4.22: Membrana Retangular com uma Borda livre - Frequências naturais (rad/s)	93
Tabela 4.23: Membrana Retangular com uma Borda Fixa	96
Tabela 4.24: Membrana Retangular com Duas Bordas Opostas Livres e Duas Fixas Frequências naturais (rad/s)	97
Tabela 4.25: Membrana Retangular com Duas Bordas Adjacentes livres e Duas Fixas Frequências naturais (rad/s)	98
Tabela 4.26: Autovalores de Membrana Rômbica com duas Bordas Livres e duas Fixas com $\theta = 15^\circ$ (rad/s)	114
Tabela 4.27: Autovalores de Membrana Rômbica com duas Bordas Livres e duas Fixas com $\theta = 30^\circ$ (rad/s)	114
Tabela 4.28: Autovalores de Membrana Rômbica com duas Bordas Livres e duas Fixas com $\theta = 45^\circ$ (rad/s)	115
Tabela 4.29: Autovalores de Membrana Rômbica com duas Bordas Livres e duas Fixas com $\theta = 60^\circ$ (rad/s)	116
Tabela 4.30: Autovalores de Membrana Rômbica com duas Bordas Livres e duas Fixas com $\theta = 75^\circ$ (rad/s)	117

Tabela 4.31: Membrana Retangular com orifício retangular - Frequências naturais (rad/s)	100
Tabela 5.1 : Convergência p - e h - para Membranas Elásticas	105
Tabela 5.2 : Convergência p - e h - para Cavidades Acusticamente Rígidas	112

RESUMO

Todo método numérico necessita de um constante desenvolvimento e aprimoramento para estar atualizado com as novas formulações teóricas desenvolvidas e novos recursos de "hardware". Apresenta-se, então, aqui, o desenvolvimento e aplicação do Método da Função de Green Local Modificado para a resolução da equação de Helmholtz, equação da onda. Tem-se, com isso, mais uma etapa na implementação deste novo método numérico para a solução de problemas do contínuo.

O Método da Função de Green Local Modificado é um método novo, podendo ser visto como uma extensão do Método de Elementos de Contorno de Galerkin. Porém, não há necessidade do conhecimento de uma solução fundamental de forma explícita, visto que a função de Green é aproximada pelo Método de Elementos Finitos. Portanto, é um método híbrido na sua concepção.

A aplicação do Método da Função de Green Local Modificado à equação de Helmholtz vem resolver problemas de vibração livre em membranas e em cavidades acusticamente rígidas, desde que aplicadas as condições de contorno de Dirichlet e Neumann, respectivamente; o problema de vibração livre de uma membrana com uma porção do contorno livre e outra fixa pode ser resolvido com a imposição de condição de contorno mista. Estes problemas já foram extensamente estudados através dos Métodos de Elementos de Contorno e de Elementos Finitos. São mostrados resultados comparados com soluções analíticas bem como com resultados obtidos por outras técnicas numéricas. É feita uma análise experimental de convergência, tanto p - como h -, mostrando as tendências da solução mediante estes tipos de refinamento da discretização aplicada.

ABSTRACT

Numerical methods need continued development and improvement to be updated with new theoretical formulations and new hardware features. Then, here are presented both development and applications of Modified Local Green's Function Method to solve the Helmholtz's equation (wave equation). So, one has performed an additional step on the implementation of this new numerical method to solve continuum's problems.

Modified Local Green's Function Method can be seen as an extension of the Galerkin Boundary Element Method, but avoiding the requirement of the knowledge of the explicit form of a fundamental solution, since the Green's function is approximated by the Finite Element Method, and the evaluation of singular integrals.

Applications of Modified Local Green's Function Method to Helmholtz's equation solves membranes free vibration problems and acoustically hard cavities wave propagation problems, when Dirichlet and Neumann boundary conditions are applied, respectively. Free vibration problems of a membrane which has a boundary portion free and another boundary portion fixed can be solved by applying mixed boundary conditions. These problems were hardly studied by Boundary Element Method and Finite Element Method. Results are shown and compared with analytical solutions and with others numerical techniques results. An experimental p - and h -convergence analysis is made showing the solution tendencies of these types of refinement.

1 INTRODUÇÃO

A maioria dos problemas reais da mecânica do meio contínuo, formulados em termos de um conjunto de equações diferenciais sob condições de contorno e condições iniciais apropriadas, são caracterizados por uma complexidade geométrica e de constituição material, apresentando, em alguns casos, não-linearidades geométrica e material. Portanto, soluções analíticas desses problemas são praticamente impossíveis de serem obtidas, propiciando o desenvolvimento de métodos numéricos para a determinação de uma solução aproximada do problema. Essa solução aproximada será tão mais precisa quanto mais próximo da realidade esteja o modelo matemático utilizado para a construção do método numérico. Um método numérico é do tipo diferencial ou integral, ou seja, de formulação fraca ou forte, dependendo da formulação numérica, se esta precede ou segue a integração das equações governantes.

1.1 FORMULAÇÕES NUMÉRICAS.

Os métodos numéricos mais utilizados são o Método de Diferenças Finitas (FDM) [33,16], o Método de Elementos Finitos (FEM) [24,27,13,21,12] e o Método de Elementos de Contorno (BEM) [17,4,15]. Os métodos FDM e FEM são do tipo diferencial, enquanto o BEM é do tipo integral. O FDM transforma as equações diferenciais em equações algébricas, válidas em um conjunto de pontos no domínio. O FEM descreve o domínio como um conjunto de subdomínios ou elementos finitos, conectados através de nós e reproduzindo, aproximadamente, o comportamento daquela porção do domínio pela satisfação, na média, das equações de equilíbrio ou movimento e atendendo condições de compatibilidade de deslocamentos nas interfaces dos elementos. O BEM, como o FEM, requer uma discretização do meio, porém apenas do seu contorno, reduzindo, portanto, a dimensão do problema em uma unidade e, conseqüentemente, o número de equações necessárias é sensivelmente menor. Quando as funções incógnitas que aparecem na formulação integral são relacionadas com as variáveis físicas do problema, o método de elementos de contorno é dito direto; alternativamente, as equações integrais podem ser formuladas em termos de funções incógnitas análogas a uma forma fraca, fornecendo o método semi-direto. Quando as equações integrais são expressas em termos de uma solução fundamental das equações diferenciais originais, distribuída em uma densidade específica sobre os contornos da região de interesse, o método é dito indireto. Logo, o estabelecimento de formulações integrais requer o conhecimento prévio de uma solução fundamental do operador diferencial do problema, no caso do método indireto, ou de uma relação de reciprocidade, no direto.

Paralelamente ao desenvolvimento de cada método numérico em si, procurando melhorar suas características e suprir suas deficiências, desenvolvem-se estruturas visando a unificação dos métodos de elementos finitos e de contorno, pela investigação de formulações integrais que sejam compactas e que apresentem apenas singularidades fracas. Com esse intuito foi desenvolvido o Método da Função de Green Local Modificado (Modified Local Green Function Method - MLGFM).

1.2 O MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO (MLGFM).

O Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) surge com os trabalhos de BARCELLOS & SILVA (1987)[11] e SILVA (1988)[71], como uma extensão do método de elementos de contorno de Galerkin [8]. O método foi estruturado com base no Método da Função de Green Local (LGFM), desenvolvido e aplicado por BURNS (1975)[20], HORAK & DORNING (1977)[47], LAWRENCE (1979)[56], HORAK (1980)[46] e DORNING (1981)[29]. Burns aplicou o LGFM para o problema multidimensional de difusão de nêutrons; Horak desenvolveu o LGFM para a solução de problemas de condução de calor e de escoamentos incompressíveis e Lawrence

apresenta o LGFM para o problema de difusão de nêutrons. Como o LGFM emprega a técnica de integração transversa, que transforma o operador diferencial parcial do problema em um operador diferencial ordinário, as formulações ficam restritas a domínios que possuam contornos que coincidam com linhas de coordenadas ortogonais.

Barcellos e Silva modificaram o LGFM, gerando o MLGFM, com o operador adjunto do problema e a aplicação do Método de Elementos Finitos (FEM) como método residual, para aproximar de forma direta as matrizes resultantes da transformação dos operadores integrais em operadores discretos, matrizes de Green, sem o conhecimento prévio de uma solução fundamental, no caso, da função de Green. Obtém-se, assim, valores nodais das projeções da função de Green na base do espaço de elementos finitos. Por essa formulação, as funções de Green empregadas não necessitam ser disponíveis analiticamente e podem ser resolvidos problemas para os quais não existam soluções fundamentais. Com as projeções da função de Green, valores da função nos pontos nodais, o problema de contorno é resolvido pelo Método de Elementos de Contorno de Galerkin. A discretização do domínio e do contorno produz integrais suficientemente regulares, sem singularidades, onde processos convencionais de integração numérica podem ser aplicados, como a integração gaussiana [54,1]. Em essência, o Método da Função de Green Local Modificado é um método integral que utiliza o Método de Elementos Finitos para determinar automaticamente projeções da função de Green para um sistema de equações de contorno e de domínio.

1.3 DESENVOLVIMENTOS E APLICAÇÕES DO MLGFM.

A primeira aplicação do MLGFM foi apresentada no trabalho de Barcellos & Silva (1987), onde foi resolvido o problema de potencial, equação de Poisson, representado por membranas elásticas, quadradas e circulares, sob condições de contorno de Dirichlet e mista. Foram utilizados elementos quadráticos isoparamétricos de 8 nós para obter as matrizes de Green e elementos de contorno isoparamétricos quadráticos para aproximar as equações integrais. Ótimos resultados, tanto para potencial quanto para fluxo, foram obtidos utilizando-se malhas grosseiras. Em seguida, Silva (1988) utilizou o MLGFM para resolver o problema de hastes delgadas e o de vigas de Bernoulli, sob situações diversas, como sob cargas concentradas, descontinuidade de rigidez e várias condições de contorno, apresentando ótimos resultados comparados com soluções analíticas. Nestes casos, foi empregado o método de colocação para a obtenção das matrizes de Green, já que para os modelos unidimensionais os contornos ficam reduzidos a pontos. Silva desenvolveu, também, o MLGFM para o estudo de membranas elásticas não homogêneas. Os resultados numéricos foram obtidos empregando-se elementos finitos quadráticos isoparamétricos de 8 nós, no domínio, e elementos quadráticos isoparamétricos unidimensionais, no contorno. Esses resultados foram comparados com resultados obtidos por elementos

finitos e elementos de contorno, bem como com soluções analíticas, mostrando boa precisão.

Recentemente, BARBIERI & BARCELLOS (1991)[9] apresentaram uma revisão do formalismo do método, resolvendo o problema potencial para domínios bidimensionais e tridimensionais. BARCELLOS & BARBIERI (1991)[10] ilustraram a aplicabilidade do MLGFM para a solução de problemas de potencial em domínios que apresentam singularidades. Para esse tipo de problema, foram usadas malhas com elementos convencionais, elementos lagrangeanos quadráticos para o domínio e elementos quadráticos unidimensionais para o contorno. Próximo à singularidade, a malha desenvolvia-se em progressão geométrica. BARBIERI & BARCELLOS (1991) [8] descreveram, também, como resolver problemas de potencial em meios não homogêneos, que não podem ser resolvidos diretamente pelo método de elementos de contorno, devido a inexistência de uma solução fundamental disponível. Resultados numéricos foram comparados com os do FEM. Para obter-se uma comparação com o BEM foi resolvido um problema onde as propriedades do meio eram descontínuas por partes, já que este tipo de problema tem solução via BEM, demonstrando notável semelhança de resultados. Foram usadas funções de interpolação quadráticas, tanto no domínio quanto no contorno. BARBIERI & BARCELLOS (1991)[7] estenderam o MLGFM para o modelo de placa de Mindlin, mostrando que o fenômeno de "locking" não ocorre. Os resultados, obtidos a partir de elementos isoparamétricos quadráticos e cúbicos, foram comparados com resultados encontrados pelo FEM e BEM mostrando boa concordância. MACHADO & BARCELLOS (1992)[57] investigaram a aplicabilidade do MLGFM para placas laminadas ortotrópicas, usando elementos lagrangeanos quadráticos no domínio e elementos de contorno quadráticos, e novamente não foi observado "locking". Resultados numéricos foram comparados com os do FEM, mostrando-se precisos. FILIPPIN, BARBIERI & BARCELLOS (1992)[31] apresentaram o desempenho do MLGFM para problemas de potencial, tanto estático quanto dinâmico (análise modal), verificando experimentalmente as taxas de convergência. Para a análise estática foram empregados elementos de até 25 nós (quarta ordem), e para a análise dinâmica até 81 nós (oitava ordem).

Finalmente, BARBIERI (1992)[6] desenvolveu e aplicou o MLGFM para uma vasta gama de problemas da mecânica do contínuo. Para problemas de potencial foram usados elementos lagrangeanos quadrangulares de 4, 8, 9 e 16 nós e triangular de 3 nós. Correspondentes elementos de contorno foram empregados. Problemas de potencial para meios homogêneos foram resolvidos e os resultados comparados com outras técnicas numéricas, bem como taxas experimentais de convergência, tanto h - quanto p -, foram determinadas. Foram resolvidos, também, problemas singulares, problemas em meio não homogêneo, problemas de escoamento potencial, problemas axissimétricos e de torsão de eixos; foram feitas comparações com resultados anteriores do MLGFM. O método "HRZ" (COOK (1989)[24]), um procedimento efetivo para produzir uma matriz massa diagonal, usando somente os termos da diagonal da matriz massa consistente escalonados de modo que a massa total do

elemento seja preservada, foi investigado visando diminuir espaço de memória e tempo de *cpu*, mostrando-se perfeitamente aplicável. Problemas tridimensionais foram resolvidos utilizando-se elementos hexaédricos isoparamétricos quadráticos no domínio e elementos quadrangulares isoparamétricos quadráticos no contorno. Nota-se superconvergência nodal de fluxo e potencial. Barbieri realizou as primeiras aplicações do MLGFM para resolver problemas da elasticidade bidimensional. Portanto, fez-se a análise de vigas em balanço, tanto retas como curvas, de tubos de parede espessa e de placa retangular com furo circular, empregando-se elementos quadrangulares isoparamétricos quadráticos e cúbicos. Os resultados foram comparados com soluções analíticas e numéricas. Determinou-se, também, o fator de intensidade de tensões para trincas, utilizando-se malhas em progressão geométrica. Problemas axissimétricos foram analisados, com a solução dos problemas de placa circular com carregamento uniformemente distribuído e de cascas esféricas, espessas e semi-espessas, com pressão interna. Nestas aplicações também se verificou superconvergência nodal de deslocamentos e esforços. O MLGFM implementado para o modelo de placa de Mindlin também demonstrou superconvergência nodal de deslocamento e esforços. Foi notada a inexistência do fenômeno de travamento ("locking") e reduzida sensibilidade à distorção de malha. Taxas experimentais de convergência h - e p - foram determinadas. Para as aplicações numéricas foram empregados elementos lagrangeanos quadráticos de 4, 9, 16 e 25 nós. Elementos de contorno correspondentes foram utilizados; todos os elementos seguem formulações de deslocamentos. Barbieri apresentou exemplos de placa engastada e de placa simplesmente apoiada; de viga em balanço resolvida com elementos de placa; de placa simplesmente apoiada com carregamento senoidal; de placa circular engastada e de placa de Morley. Em todas as aplicações realizadas com o MLGFM, foram empregados nós duplos nos pontos de descontinuidade de condições de contorno e/ou da normal, na malha representativa da discretização do contorno.

1.4 OBJETIVOS DO TRABALHO.

Dando-se continuidade ao desenvolvimento e aplicações do Método da Função de Green Local Modificado, o presente trabalho tem por objetivo desenvolver e empregar o MLGFM para a análise dinâmica de estruturas, especificamente membranas elásticas e cavidades acústicas, sob o ponto de vista da análise modal, ou seja, resolvendo-se um problema de autovalor/autovetor para a determinação das frequências e modos naturais de vibração. Primeiramente é apresentada uma revisão detalhada do formalismo do método; em seguida, o método é implementado para equações hiperbólicas, mostrando-se a obtenção das matrizes de inércia para as equações integrais, bem como a montagem do problema algébrico de autovalor/autovetor. Para tanto, são consideradas três situações quanto às condições de contorno: condição de contorno de Dirichlet homogênea, condição de contorno de Neumann homogênea e condição de contorno mista homogênea. O MLGFM é, então, aplicado à

equação de Helmholtz, resolvendo-se problemas de vibração livre de membranas elásticas e de ondas em cavidades acusticamente rígidas, conforme as condições de contorno impostas. Análise experimental de convergência, tanto h - quanto p - é realizada. Para tal, implementa-se elementos lagrangeanos quadrangulares de primeira à décima ordem, ou seja, de 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 e 121 nós. O problema de autovalor/autovetor é resolvido pelo método de iteração subespacial, visto que todas as matrizes envolvidas são positiva definidas e simétricas. Analisa-se, ainda, o comportamento do método quanto à distorção de malha e verifica-se a constância de resposta com a variação do parâmetro intrínseco à formulação. Os resultados numéricos são comparados com soluções analíticas e com resultados obtidos pelos métodos de elementos finitos e de elementos de contorno.

1.5 MELHORAMENTOS APLICADOS AOS MÉTODOS NUMÉRICOS MAIS UTILIZADOS PARA A RESOLUÇÃO DO AUTOPROBLEMA DINÂMICO.

1.5.1 Investigações no Método de Elementos Finitos.

A análise dinâmica de estruturas pelo método de elementos finitos convencional introduz imprecisões adicionais na solução, que não estão presentes na análise estática. Estas imprecisões provêm da formulação do elemento e devido à condensação estática. Os erros, em ambos os casos, são causados pela desconsideração de termos dependentes da frequência nas funções que relacionam os deslocamentos em cada ponto da estrutura com os deslocamentos em certos pontos fixos, nós na formulação do elemento finito e nós "mestres" na condensação estática.

GUPTA (1973-84)[38-44] desenvolveu uma formulação de elemento finito para análise modal de estruturas onde as funções de interpolação dependem da frequência natural de vibração. Isto resulta em matrizes de inércia e de rigidez dependentes da frequência, que não é conhecida *a priori*. A matriz das funções de interpolação é, então, expandida em séries, resultando em um problema de autovalor/autovetor quadrático, para o caso de vibrações livres, que pode ser resolvido pela combinação de sequência de Sturm com técnicas de iteração inversa. Recentemente, GMUER (1990)[36] apresentou uma técnica de iteração subespacial inversa para a solução desse tipo de autoproblema. FRICKER (1983)[35], usando a expansão das funções de interpolação dependentes da frequência de vibração em séries, implementou uma condensação usando matrizes de rigidez dinâmicas calculadas em frequências fixas, semelhante à condensação estática. MILSTED & HUTCHINSON (1974)[60] apresentaram a solução de problemas de vibração em membranas com o uso de elementos finitos, onde o deslocamento transversal de um elemento quadrilateral arbitrário é aproximado por um polinômio de quatro termos mais um número arbitrário de termos trigonométricos. LADEVEZE & PELLE (1989) [55] propuseram um

novo método numérico para a obtenção de valores superiores e inferiores ao valor nominal da frequência natural de vibração. Esse método está associado com uma nova formulação, formulação estática, para um problema de autovalor, baseada em um novo quociente R_s , denominado " quociente de Rayleigh estático", construído a partir de um operador de Green.

1.5.2 Investigações no Método de Elementos de Contorno.

O método de elementos de contorno tem sido empregado com sucesso na solução de problemas tanto em regime permanente quanto em regime transiente. BESKOS (1987)[14] fez uma revisão do BEM para a solução de problemas dinâmicos da elasticidade linear, bem como de outros métodos de elementos de contorno não convencionais, como o esquema híbrido que resulta de uma combinação de elementos finitos com elementos de contorno. Quando aplicado à solução de problemas de vibração livre, o BEM pode ser classificado em duas categorias: método das raízes de determinante e método da transformação integral de domínio. A maioria dos trabalhos de aplicação do BEM para problemas de autovalor situa-se na categoria do método das raízes de determinante, como os trabalhos de TAI & SHAW (1974)[74], VIVOLI & FILIPPI (1974)[75], DeMEY (1976)[25,26], HUTCHINSON (1978,1985) [48,49] e SHAW (1979)[69], para a equação de Helmholtz. O maior inconveniente desta categoria de aplicação do BEM é o fato de que as soluções fundamentais são complexas, envolvendo funções de Hankel com a frequência de vibração como argumento, produzindo problemas de autovalor não algébricos. Isso ocorre porque a análise de vibrações livres tem sido feita da mesma maneira que para vibrações forçadas, pela sucessiva aplicação de diferentes frequências forçadas a um sistema sem amortecimento até que ocorra ressonância. O uso de soluções fundamentais reais não é efetivo porque estas soluções não satisfazem a condição de radiação de Sommerfeld.

Na categoria de método da transformação integral, a integral de domínio da equação é transformada em integral de contorno pela aplicação do teorema da divergência. Como todas as integrais da equação são, agora, relacionadas ao contorno, a equação integral é reduzida a um problema de autovalor/autovetor algébrico. Este método foi proposto por NARDINI & BREBBIA (1982)[62] e BREBBIA & NARDINI (1985)[18], onde as equações integrais somente precisam ser computadas onde estas são independentes da frequência. Esse procedimento, denominado "Dual Reciprocity Method (DRM)", utiliza soluções fundamentais estáticas, independentes da frequência. O método apresentado por AHMAD & BANERJEE (1986)[2] tem alguma similaridade com aquele proposto por Nardini e Brebbia. Este, "Particular Integral Method (PIM)", utiliza uma função densidade fictícia para aproximar as forças de inércia e, então, usa o conceito de funções complementares e integrais particulares para resolver as equações diferenciais resultantes. Depois, BANERJEE, AHMAD & WANG (1988)[5] implementaram a formulação com elementos isoparamétricos avançados com

integração auto-adaptativa com controle automático de erro. Porém, os métodos DRM e PIM requerem a inversão de uma matriz para a obtenção do problema de autovalor. ALI, RAJAKUMAR & YUNUS (1991)[3] propuseram uma técnica que elimina a inversão de matriz nesses métodos. Com base no método proposto por Nardini e Brebbia, KANARACHOS & PROVATIDIS (1991)[51] discutiram formulações diferentes para a matriz massa para o BEM, matriz massa "consistente" e "inconsistente", onde a formulação "consistente" utiliza as mesmas funções de interpolação e funções peso tanto para os termos estáticos quanto para os dinâmicos.

KATSIKADELIS & SAPOUNTZAKIS (1988)[52] determinaram as frequências e modos de vibração de membranas por um método que consiste na determinação numérica da função de Green para a equação de Laplace utilizando o BEM, e subsequentemente na dedução da representação integral da solução do problema, que envolve um potencial desconhecido na integral de domínio. Empregando integração gaussiana para a integral de domínio e uma técnica de colocação, é obtido um sistema homogêneo de equações algébricas lineares com respeito às deflexões nos pontos de Gauss. A integração de domínios com formas arbitrárias é feita por um método denominado "Finite Sector Method (FSM)". NOWAK (1988)[63], BREBBIA (1989)[19] e NOWAK & BREBBIA (1989)[64] desenvolveram o "Multiple Reciprocity Method (MRM)" no método de elementos de contorno para converter integrais de domínio em correspondentes integrais de contorno, utilizando soluções fundamentais de alta ordem do operador de Laplace. O método foi aplicado para análise transiente de transferência de calor e à equação de Poisson e de Helmholtz. Depois, KAMIYA & ANDOH (1991) [50] apresentaram um novo e robusto esquema de elementos de contorno para analisar o problema de autovalor/autovetor oriundo da equação de Helmholtz, baseado na combinação do método MRM, da equação característica e de uma técnica eficiente para a determinação de autovalores. HONG (1991)[45] apresentou um método de elementos de contorno modificado, "Modified Boundary Element Method (MBEM)", no qual o contorno é dividido em partes regulares e irregulares, e a função de Green é forçada a satisfazer as mesmas condições de contorno homogêneas que a função potencial satisfaz no contorno regular. O intervalo de integração das equações é reduzido aos contornos irregulares.

2 O MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO

A formulação abstrata do MLGFM, com o formalismo matemático e formulação variacional, partindo de uma relação de reciprocidade genérica, pode ser encontrada no trabalho de Silva (1988)[71] e, mais detalhadamente, no de Barbieri (1992) [6], onde são discutidas as condições de existência e unicidade da solução e o formalismo para a implementação numérica. Porém, faz-se necessário, aqui, que se especifique e caracterize o espaço onde o método é definido para que se possa desenvolver o formalismo do método, vendo-se com transparência todo o rigor matemático envolvido, sabendo que este se situa fora do escopo do presente trabalho.

2.1 FORMULAÇÃO DO MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO (MLGFM).

Denota-se por Ω um domínio aberto, limitado, no espaço \mathbb{R}^n , com contorno $\partial\Omega$ suficientemente regular, ou seja, um contorno que admite a existência do vetor normal em quase todos os pontos, exceto, possivelmente, em conjuntos de medida nula.

A formulação de Elementos de Contorno [17], utiliza funções definidas em espaços de Hilbert $H^m(\Omega)$ com valores no contorno. Estes valores são usados para determinar os do domínio. Então, os espaços de funções apropriadas devem permitir extensões ao contorno, isto é, devem possuir a propriedade do traço. Um espaço de Hilbert $H^m(\Omega)$ tem a propriedade do traço se satisfizer as seguintes condições, [65]:

- (i) $H^m(\Omega)$ estiver denso e continuamente contido em $U(\Omega)$ e $U(\Omega)$ tiver uma topologia mais fraca que $H^m(\Omega)$, $H^m(\Omega) \subset U(\Omega)$;
- (ii) $U(\Omega)$ for um espaço pivotal, ou seja,

$$H(\Omega) \subset U(\Omega) = U'(\Omega) \subset H'(\Omega) \quad (2.1)$$

onde $U'(\Omega)$ e $H'(\Omega)$ são os espaços duais topológicos de $U(\Omega)$ e $H(\Omega)$ respectivamente, isto é, os espaços dos funcionais lineares contínuos sobre $U(\Omega)$ e $H(\Omega)$, [66];

- (iii) existir um mapeamento linear $\gamma: H(\Omega) \rightarrow \partial H(\Omega)$, onde o operador linear γ mapeia o espaço $H(\Omega)$ sobre outro espaço de Hilbert $\partial H(\Omega)$, tal que o núcleo de γ , H_0 , seja denso em U , ou seja,

$$H_0 = \ker(\gamma) \quad (2.2a)$$

$$H_0 \subset U = U' \subset H_0' \quad (2.2b)$$

sendo as inclusões densas e contínuas.

O espaço $\partial H(\Omega)$ corresponde a um espaço de valores de contorno, com o operador γ levando os elementos de $H(\Omega)$, definidos em Ω , para $\partial\Omega$. O operador γ é denominado "operador traço". Para uma função $u(x)$ definida em um espaço de Hilbert $H^m(\Omega)$, o operador traço é definido por

$$\gamma_j u(x) \equiv \left. \frac{\partial^j u(x)}{\partial n^j} \right|_{\partial\Omega} \quad (2.3)$$

$\forall x \in \partial\Omega, u(x) \in \Omega, 0 \leq j \leq m-1$

$$\gamma \equiv (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}) \quad (2.4)$$

e esses componentes são as derivadas normais em $\partial\Omega$ de ordem menor que m , onde n é a normal ao contorno $\partial\Omega$ no ponto x . Então, γ_j é um mapeamento linear e contínuo de $H^m(\Omega)$ em $H^{m-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$

$$\gamma_j : H^m(\Omega) \rightarrow H^{m-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \quad (2.5)$$

com m podendo assumir valores inteiros ou fracionários [64].

2.2 FORMALISMO DO MLGFM.

Seja o problema linear genérico, um sistema de equações diferenciais, na forma

$$A[u(x)] = b(x) \quad (2.6)$$

em Ω , com condições de contorno prescritas e contorno $\partial\Omega$ suficientemente regular, onde existe uma solução única que depende continuamente das condições de contorno e da excitação, caracterizando um problema bem posto. Nesta representação, $A(\cdot)$ é um operador diferencial linear, $u(x)$ é um vetor deslocamento generalizado e $b(x)$ é um vetor força generalizado.

O MLGFM é um método integral com estrutura semelhante à do método de elementos de contorno indireta, porém com as variáveis diretamente relacionadas a fenômenos físicos. Tem-se, então, um problema adjunto correspondente para uma excitação do tipo função Delta de Dirac¹, $\delta(P,Q)$, na forma

$$A^*[G(P,Q)] = \delta(P,Q)I \quad (2.7)$$

com I como o tensor identidade, $\delta(P,Q)$ a função Delta de Dirac e $G(P,Q)$ o tensor solução fundamental, onde G_{ij} representa o deslocamento generalizado na direção i de um ponto $Q \in \Omega$, devido a uma força generalizada unitária aplicada na direção j no ponto $P \in \Omega$, e $A^*(\cdot)$ é o operador adjunto de $A(\cdot)$.

Multiplicando-se a equação (2.6) por $G(P,Q)^t$ e a equação (2.7) por $u^t(x)$, tem-se:

$$G(P,Q)^t A[u(x)] = G(P,Q)^t b(x) \quad (2.8)$$

e

¹ $\delta(x,\xi) = 0, \forall x \neq \xi$ e $\int_{\Omega} u(x)\delta(x,\xi)d\Omega(x) = u(\xi)$

$$u'(x)A^*[G(P,Q)] = u'(x)\delta(P,Q)I = \delta(P,Q)u'(x) \quad (2.9)$$

Subtraindo-se a equação (2.8) do transposto da equação (2.9), resulta:

$$[A^*[G(P,Q)]]'u(x) - G(P,Q)'A[u(x)] = u(x)\delta(P,Q) - G(P,Q)'b(x) \quad (2.10)$$

que rearranjada fica:

$$u(x)\delta(P,Q) = G(P,Q)'b(x) + [A^*[G(P,Q)]]'u(x) - G(P,Q)'[A[u(x)]] \quad (2.11)$$

Localizando-se um sistema de coordenadas no ponto $Q \in \Omega$, a integração da equação (2.11) no domínio, agora Ω_p fornece a solução, como sendo:

$$\int_{\Omega} u(P)\delta(P,Q)d\Omega_p = \int_{\Omega} G(P,Q)'b(P)d\Omega_p + \int_{\Omega} [A^*[G(P,Q)]]'u(P)d\Omega_p - \int_{\Omega} G(P,Q)'[A[u(P)]]d\Omega_p \quad (2.12)$$

que levando-se em conta as propriedades da função Delta de Dirac, fica:

$$u(Q) = \int_{\Omega} G(P,Q)'b(P)d\Omega_p + \int_{\Omega} [A^*[G(P,Q)]]'u(P)d\Omega_p - \int_{\Omega} G(P,Q)'[A[u(P)]]d\Omega_p \quad (2.13)$$

Aplicando-se o teorema de Gauss [30] às duas últimas parcelas da equação (2.13), resulta:

$$\int_{\Omega} [A^*[G(P,Q)]]'u(P)d\Omega_p = - \int_{\partial\Omega} [N^*[G(p,Q)]]'u(p)d\partial\Omega_p + B(u(P),G(P,Q)) \quad (2.14)$$

e

$$\int_{\Omega} G(P,Q)'[A[u(P)]]d\Omega_p = - \int_{\partial\Omega} G(p,Q)'[N[u(p)]]d\partial\Omega_p + B(G(P,Q),u(P)) \quad (2.15)$$

onde $B(u,G)$ é a forma bilinear associada ao operador $A(\cdot)$, e $d\partial\Omega_p$ representa um elemento infinitesimal de contorno $\partial\Omega$ com o ponto $p \in \partial\Omega$ e $N(\cdot)$ e $N^*(\cdot)$ são os operadores de Neumann associados a $A(\cdot)$ e $A^*(\cdot)$, respectivamente. Substituindo as equações (2.14) e (2.15) na equação (2.13), vem:

$$\begin{aligned}
u(Q) = & \int_{\Omega} G(P,Q)' b(P) d\Omega_p + \\
& - \int_{\partial\Omega} [N^*[G(p,Q)]]' u(p) d\partial\Omega_p + B(u(P), G(P,Q)) + \\
& + \int_{\partial\Omega} G(p,Q)' [N[u(p)]] d\partial\Omega_p - B(G(P,Q), u(P))
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Com a definição de operador adjunto [23], ou seja,

$$(Tf, g) = (f, g^*) \tag{2.17}$$

sendo T um operador sobre um conjunto D em um espaço \mathfrak{R} , que mapeia D em \mathfrak{R} , então $g^* = T^* g$ e T^* é o operador adjunto de T , tem-se:

$$B(f, g) = (Tf, g) = (f, T^* g) \tag{2.18}$$

Então,

$$B(u(P), G(P, Q)) = B(G(P, Q), u(P)) \tag{2.19}$$

portanto:

$$\begin{aligned}
u(Q) = & \int_{\Omega} G(P,Q)' b(P) d\Omega_p - \\
& - \int_{\partial\Omega} [N^*[G(p,Q)]]' u(p) d\partial\Omega_p + \int_{\partial\Omega} G(p,Q)' [N[u(p)]] d\partial\Omega_p
\end{aligned} \tag{2.20}$$

O tensor $G(P, Q)$ representa uma solução fundamental da equação (2.7). A equação (2.20) representa uma formulação direta de elementos de contorno (formulação integral), [17]. Portanto, o tensor $G(P, Q)$, como solução fundamental, apresenta irregularidade no caso unidimensional e singularidade nos casos bidimensionais e tridimensionais, dificultando o cálculo numérico das integrais da equação (2.20), mesmo que seja conhecida a expressão matemática de $G(P, Q)$. A singularidade dessas integrais é agravada pela presença do operador de Neumann, aplicado sobre $G(p, Q)$. Para compactar e melhorar a regularidade da solução, tornando o processo numérico mais eficiente, [71], transforma-se a solução fundamental $G(P, Q)$ em uma função de Green, que é a solução da equação (2.7) atendendo a apropriadas condições de contorno previamente estabelecidas. Portanto, para uma maior conveniência, soma-se e subtrai-se a quantidade

$$G(p,Q)'[N'[u(p)]] = [N'[G(p,Q)]]'u(p) \quad (2.21)$$

na equação (2.20). Logo,

$$u(Q) = \int_{\Omega} G(P,Q)'b(P)d\Omega_p - \int_{\partial\Omega} [(N^*+N')G(p,Q)]'u(p)d\partial\Omega_p + \int_{\partial\Omega} G(p,Q)'[(N+N')[u(p)]]d\partial\Omega_p \quad (2.22)$$

que é a expressão de onde parte a concepção do MLGFM.

Uma forma apropriada para o operador N' é a de um operador constante, ou seja

$$N' = k_i \quad (2.23)$$

onde k_i é uma constante real não nula, com k_i podendo ou não ser diferente de k_j para $i \neq j$. É mais conveniente utilizar-se $k_i = k_j$. Os valores numéricos para k_i devem ser arbitrados de forma a manter um bom condicionamento numérico do sistema final de equações.

Para se atingir o objetivo de transformar $G(P,Q)$ em uma função de Green faz-se necessário o estabelecimento de condições de contorno. A condição de contorno mais apropriada é a condição de contorno homogênea para a função de Green:

$$(N^*+N')G(p,Q) = 0 \quad (2.24)$$

Portanto, a solução $u(Q)$ fica:

$$u(Q) = \int_{\Omega} G(P,Q)'b(P)d\Omega_p + \int_{\partial\Omega} G(p,Q)'[(N+N')[u(p)]]d\partial\Omega_p \quad (2.25)$$

Porém, a integral de contorno na equação (2.25) apresenta derivadas de $u(p)$ no sentido do traço, inconvenientes para a análise numérica. Define-se, então, uma nova quantidade $F(p)$ como:

$$F(p) = (N+N')[u(p)] \quad (2.26)$$

Logo, a solução $u(Q)$, em uma forma mais apropriada, sem derivadas da função de Green e de $u(p)$, fica:

$$u(Q) = \int_{\Omega} G(P,Q)'b(P)d\Omega_p + \int_{\partial\Omega} G(p,Q)'F(p)d\partial\Omega_p \quad (2.27)$$

que fornece valores de $u(Q)$ para $Q \in \Omega$, ou seja, é a equação integral que representa

a solução do problema no domínio. Como as funções envolvidas no problema foram definidas em espaços de Hilbert que permitem extensões ao contorno, ou seja, que possuem a propriedade do traço, isto é:

$$u(q) = \lim_{Q \rightarrow q} u(Q) \quad (2.28)$$

obtém-se a equação integral que define o problema no contorno $\partial\Omega$:

$$u(q) = \int_{\Omega} G(P,q)' b(P) d\Omega_p + \int_{\partial\Omega} G(p,q)' F(p) d\partial\Omega_p \quad (2.29)$$

As equações (2.27) e (2.29) compõem o sistema de equações integrais que representam o problema completamente. As condições de contorno são incluídas através do operador de Dirichlet e da quantidade $F(p)$. As condições de contorno de Dirichlet são automaticamente incluídas na definição do espaço das funções admissíveis, espaço de Hilbert com a propriedade do traço, [66]. As condições de contorno de Neumann, Cauchy-Robin e mistas são representadas pela quantidade $F(p)$, [6]. Contudo, $F(p) = (N+N')u(p)$ representa a "reação/fluxo" real do problema, $Nu(p)$, e uma "reação/fluxo" fictícia, $N'u(p)$. Quando existirem porções do contorno com condições essenciais homogêneas, é conveniente definir valores de k_i apenas nestas porções, para evitar um pós-processamento dos resultados. Nos demais casos de condições de contorno deve ser efetuado um simples pós-processamento.

2.3 FORMULAÇÃO NUMÉRICA.

2.3.1 DISCRETIZAÇÃO E APROXIMAÇÃO NUMÉRICA.

A formulação original do MLGFM proposta por Silva [71], propunha a partição do domínio em subdomínios e o método era desenvolvido para apenas um subdomínio. BARBIERI (1992) [6] também considera a partição de domínio, porém, aplica o método para todo o domínio, ou seja, para todos os subdomínios simultaneamente. Portanto, o domínio Ω pode ser subdividido em m subdomínios, Ω^k , $k=1, \dots, m$ e

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^m \overline{\Omega^k} \quad (2.30)$$

onde $\overline{\Omega^k}$ é o fechamento do subdomínio Ω^k e

$$\Omega' \cap \Omega' = \emptyset \quad (2.31)$$

Como o Método de Elementos Finitos é empregado para se obter a aproximação da função de Green no domínio, cada subdomínio é discretizado em f elementos finitos. As interfaces dos subdomínios devem ter a mesma discretização, ou seja, o mesmo número de elementos e função de interpolação de mesmo grau. Portanto, é possível se interpolar qualquer quantidade y , que tenha comportamento suave, sobre o subdomínio Ω^k com funções de interpolação locais do Método de Elementos Finitos, como:

$$y = [\Psi] \{y\} \quad (2.32)$$

onde y_i representa o valor da quantidade y medida no nó i da malha de elementos finitos, com $i=1, \dots, nd$, sendo nd o número total de nós da malha de elementos finitos do subdomínio, e $[\Psi]$ é a matriz das funções de interpolação de domínio,

$$[\Psi] = [\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \dots \ \psi_{nd}] \quad (2.33)$$

Para a resolução do sistema de equações integrais, divide-se o contorno $\partial\Omega^k$ de cada subdomínio Ω^k em c elementos de contorno. As funções de interpolação de contorno, ϕ_j , são o traço das funções de interpolação de domínio, ψ_j . Uma quantidade y é interpolada no contorno como

$$y = [\Phi] \{y\} \quad (2.34)$$

onde y_i representa o valor da quantidade y medida no nó i da malha de elementos de contorno, com $i=1, \dots, nc$ e nc é o número total de nós da malha de elementos de contorno do subdomínio, e $[\Phi]$ é a matriz das funções de interpolação de contorno,

$$[\Phi] = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \dots \ \phi_{nc}] \quad (2.35)$$

A malha de elementos de contorno emprega, se necessário, nós duplos em pontos que apresentam descontinuidade de condições de contorno e/ou de geometria, ou seja, da normal. Esta malha utiliza elementos de contorno correspondentes aos elementos finitos utilizados na malha discretizadora do domínio, isto é, elementos com funções de interpolação de mesmo grau. Para a variável de campo $u(p)$ é necessário que haja esta correspondência, entre a ordem das funções de interpolação da malha de elementos finitos, malha de domínio, com a malha de elementos de contorno, malha de contorno. Contudo, a variável de fluxo $f(p)$ pode ser expressa em termos de um outro conjunto de funções de interpolação linearmente independentes, caso seja mais vantajoso.

Considerando, agora, o domínio sem ser particionado, ou seja,

$\Omega = \Omega^1$, apenas um subdomínio (Figura 2.1). Expandem-se, então, as quantidades $u(Q)$, $u(q)$, $b(P)$ e $F(p)$ pelas funções de interpolação, como no FEM:

$$u(Q) = [\Psi(Q)] \{u\}^D \quad (2.36)$$

$$b(P) = [\Psi(P)] \{b\} \quad (2.37)$$

$$F(p) = [\Phi(p)] \{f\} \quad (2.38)$$

$$u(q) = [\Phi(q)] \{u\}^C \quad (2.39)$$

com $\{u\}^D$ e $\{u\}^C$ representando os valores nodais de deslocamento generalizado u no domínio e no contorno, respectivamente; $\{b\}$ e $\{f\}$ representando valores nodais de forças de corpo generalizadas e de reações generalizadas, respectivamente.

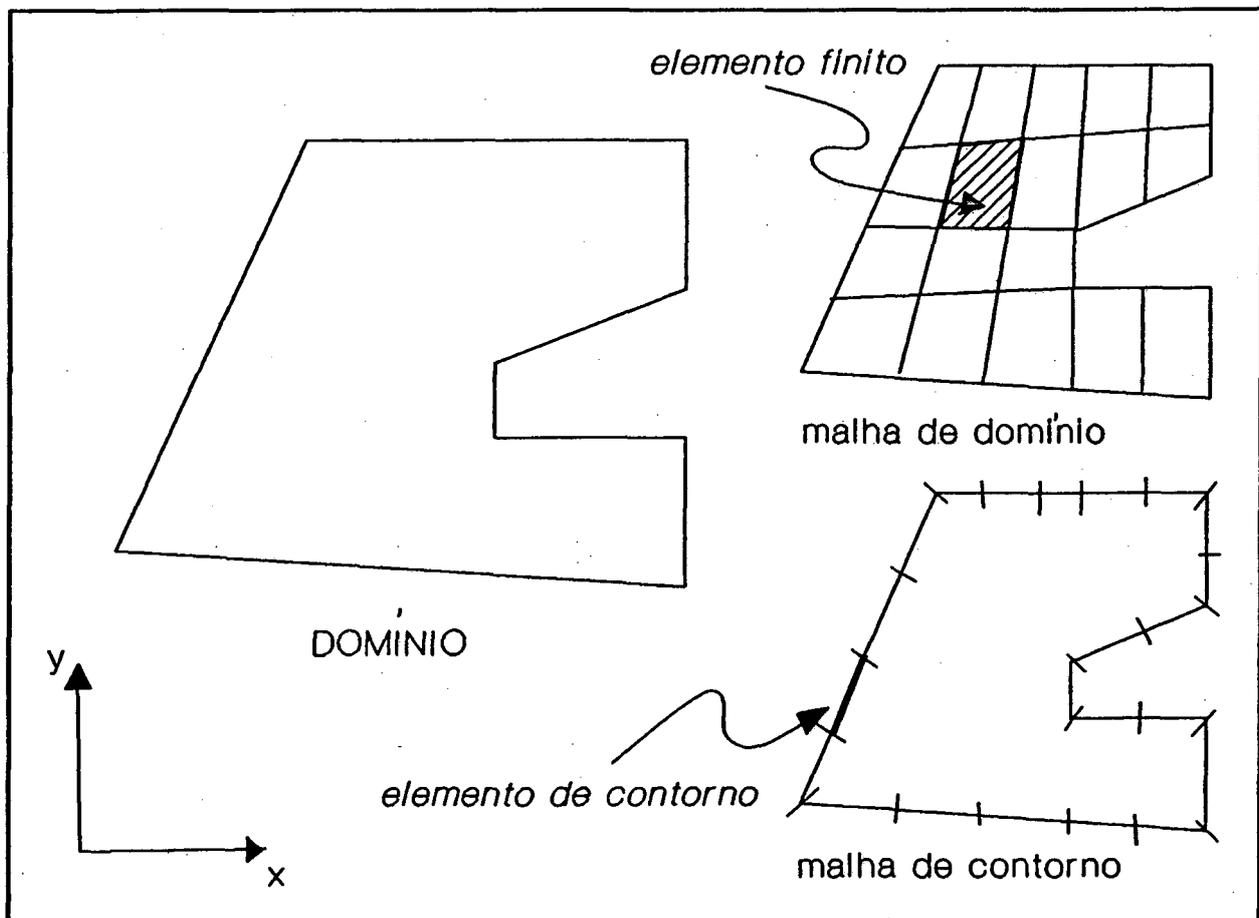


Figura 2.1: Discretização do domínio.

A equação (2.27), aplicada a cada elemento em que foi

discretizado o domínio, fica reescrita como:

$$[\Psi(Q)]\{u\}^D = \int_{\Omega} G(P,Q)'[\Psi(P)]\{b\} d\Omega_P + \int_{\partial\Omega} G(p,Q)'[\Phi(p)]\{f\} d\partial\Omega_p \quad (2.40)$$

Como os valores $\{b\}$ e $\{f\}$ são valores nodais, portanto constantes, não necessitam estar submetidos ao operador integral. Então:

$$[\Psi(Q)]\{u\}^D = \int_{\Omega} G(P,Q)'[\Psi(P)]d\Omega_P\{b\} + \int_{\partial\Omega} G(p,Q)'[\Phi(p)]d\partial\Omega_p\{f\} + R \quad (2.41)$$

A equação (2.41) representa a solução do problema de forma aproximada, já que todas as quantidades envolvidas foram expandidas em um número finito de nós, ou seja, em um número finito de graus de liberdade. Portanto, a expressão (2.41) apresenta um resíduo, R . Utilizando-se um método de resíduos ponderados, faz-se com que este resíduo seja nulo no sentido da média. Aplicando-se o Método de Galerkin [19,76], faz-se uma projeção ortogonal do resíduo sobre um conjunto de funções linearmente independentes, as funções de interpolação de elementos finitos Ψ_p , aplicando o produto interno definido no espaço de Hilbert. Portanto, faz-se a projeção ortogonal de $u(Q)$ sobre $[\Psi(Q)]$. Então:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\Psi(Q)]'[\Psi(Q)]d\Omega_Q\{u\}^D &= \int_{\Omega} [\Psi(Q)]' \int_{\Omega} G(P,Q)'[\Psi(P)]d\Omega_P d\Omega_Q\{b\} + \\ &+ \int_{\Omega} [\Psi(Q)]' \int_{\partial\Omega} G(p,Q)'[\Phi(p)]d\partial\Omega_p d\Omega_Q\{f\} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Escrevendo em uma forma sintetizada, fica;

$$A\{u\}^D = B\{f\} + C\{b\} \quad (2.43)$$

onde

$$A = \int_{\Omega} [\Psi(Q)]'[\Psi(Q)]d\Omega_Q \quad (2.44)$$

$$B = \int_{\Omega} [\Psi(Q)]' \int_{\partial\Omega} G(p,Q)'[\Phi(p)]d\partial\Omega_p d\Omega_Q \quad (2.45)$$

$$C = \int_{\Omega} [\Psi(Q)]' \int_{\Omega} G(P,Q)'[\Psi(P)]d\Omega_P d\Omega_Q \quad (2.46)$$

Escrevendo as projeções da função de Green

$$G_d(P)^t = \int_{\Omega} [\Psi(Q)]^t G(P,Q)^t d\Omega_Q \quad (2.47)$$

$$G_d(p)^t = \int_{\Omega} [\Psi(Q)]^t G(p,Q)^t d\Omega_Q \quad (2.48)$$

que serão obtidas pelo Método de Elementos Finitos, pode-se reescrever as matrizes B e C como:

$$B = \int_{\partial\Omega} G_d(p)^t [\Phi(p)] d\partial\Omega_p \quad (2.49)$$

$$C = \int_{\Omega} G_d(P)^t [\Psi(P)] d\Omega_P \quad (2.50)$$

Considerando, agora, a equação (2.29), aplicada a cada elemento em que foi discretizado o contorno, em termos das quantidades expandidas, vem:

$$[\Phi(q)] \{u\}^C = \int_{\Omega} G(P,q)^t [\Psi(P)] d\Omega_P \{b\} + \int_{\partial\Omega} G(p,q)^t [\Phi(p)] d\partial\Omega_p \{f\} \quad (2.51)$$

Aplicando o Método de Galerkin à equação (2.51), porém fazendo, agora, a projeção de $u(q)$ ortogonal ao subespaço das funções de interpolação de contorno, $[\Phi(q)]$, vem:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]^t [\Phi(q)] d\partial\Omega_q \{u\}^C &= \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]^t \int_{\Omega} G(P,q)^t [\Psi(P)] d\Omega_P d\partial\Omega_q \{b\} + \\ &+ \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]^t \int_{\partial\Omega} G(p,q)^t [\Phi(p)] d\partial\Omega_p d\partial\Omega_q \{f\} \end{aligned} \quad (2.52)$$

que em uma forma mais compacta, fica:

$$D \{u\}^C = E \{f\} + F \{b\} \quad (2.53)$$

onde:

$$D = \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]^t [\Phi(q)] d\partial\Omega_q \quad (2.54)$$

$$E = \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]^t \int_{\partial\Omega} G(p,q)^t [\Phi(p)] d\partial\Omega_p d\partial\Omega_q \quad (2.55)$$

$$F = \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]^t \int_{\Omega} G(P,q)^t [\Psi(P)] d\Omega_p d\partial\Omega_q \quad (2.56)$$

onde as projeções de Green são:

$$G_c(P)^t = \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]^t G(P,q)^t d\partial\Omega_q \quad (2.57)$$

$$G_c(p)^t = \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]^t G(p,q)^t d\partial\Omega_q \quad (2.58)$$

As matrizes E e F podem, então, ser reescritas como:

$$E = \int_{\partial\Omega} G_c(p)^t [\Phi(p)] d\partial\Omega_p \quad (2.59)$$

$$F = \int_{\Omega} G_c(P)^t [\Psi(P)] d\Omega_p \quad (2.60)$$

2.3.2 DETERMINAÇÃO DAS PROJEÇÕES DA FUNÇÃO DE GREEN.

A pedra angular do MLGFM é a determinação das projeções da função de Green $G_d(P)$, $G_d(p)$, $G_c(P)$ e $G_c(p)$, sem o conhecimento da mesma. Para tal, resolve-se pelo Método de Elementos Finitos dois problemas associados:

Problema 1

$$A^* G(P,Q) = \delta(P,Q) \mathbf{I} \quad (2.61)$$

$$(N^* + N') G(p,Q) = \mathbf{0} \quad (2.62)$$

para todo $P, Q \in \Omega$ e $p \in \partial\Omega$.

Problema 2

$$A^* G(P,q) = \mathbf{0} \quad (2.63)$$

$$(N^* + N')G(p,q) = \delta(p,q)I \quad (2.64)$$

para todo $P \in \Omega$; $p, q \in \partial\Omega$.

Projetando o Problema 1 no subespaço gerado pelas funções de interpolação de domínio, isto é, multiplicando-se a equação (2.61) por $[\Psi(Q)]$ e integrando no domínio, mantendo o ponto P fixo, vem:

$$A^* \int_{\Omega} G(P,Q)[\Psi(Q)]d\Omega_Q = \int_{\Omega} \delta(P,Q)[\Psi(Q)]d\Omega_Q = [\Psi(P)] \quad (2.65)$$

onde a integral do lado esquerdo representa a projeção da função de Green $G_d(P)$. Logo:

$$A^* G_d(P) = [\Psi(P)] \quad (2.66)$$

Portanto o Problema 1 que envolvia a função de Green sob uma excitação do tipo Delta de Dirac foi transformado em outro que envolve a projeção da função de Green excitada por funções convencionais de elementos finitos, com continuidade $C^0(\Omega)$, fornecendo como solução um tensor $G_d(P)$ mais suave que $G(P,Q)$.

Analogamente, multiplicando-se a equação (2.62) por $[\Psi(Q)]$ e integrando no domínio, tem-se:

$$(N^* + N') \int_{\Omega} G(p,Q)[\Psi(Q)]d\Omega_Q = 0 \quad (2.67)$$

ou, identificando-se a projeção da função de Green, $G_d(p)$,

$$(N^* + N')G_d(p) = 0 \quad (2.68)$$

Os tensores $G_d(P)$ e $G_d(p)$ têm a forma:

$$G_d(P) = \int_{\Omega} G(P,Q)[\Psi(Q)]d\Omega_Q = [g_{d_1}(P) \ g_{d_2}(P) \ g_{d_3}(P) \ \dots \ g_{d_m}(P)] \quad (2.69)$$

com

$$g_{d_j}(P) = \int_{\Omega} G(P,Q)\Psi_j(Q)d\Omega_Q \quad (2.70)$$

e

$$G_d(p) = \int_{\Omega} G(p,Q)[\Psi(Q)]d\Omega_Q = [g_{d_1}(p) \ g_{d_2}(p) \ g_{d_3}(p) \ \dots \ g_{d_m}(p)] \quad (2.71)$$

com

$$g_{d_j}(p) = \int_{\Omega} G(p,Q) \psi_j(Q) d\Omega_Q \quad (2.72)$$

As equações (2.70) e (2.72) representam a j -ésima componente da projeção da função de Green $G(P,Q)$ e $G(p,Q)$, respectivamente, na base que define o espaço de elementos finitos $\mathcal{F}(h,p)$, onde h define o maior diâmetro externo entre os elementos da malha e p o grau do polinômio interpolador, [6].

Então, pode-se reescrever as equações (2.61) e (2.62) como:

$$A^* g_{d_j}(P) = \psi_j(P) \quad (2.73)$$

$$(N^* + N') g_{d_j}(p) = 0 \quad (2.74)$$

com $j=1,\dots,nd$.

Repetindo-se o procedimento para o Problema 2, porém projetando-o, agora, no subespaço gerado pelas funções de interpolação de contorno, ou seja, multiplicando a equação (2.63) por $[\Phi(q)]$ e integrando no contorno $\partial\Omega$, mantendo o ponto p fixo, tem-se:

$$A^* \int_{\Omega} G(P,q) [\Phi(q)] d\partial\Omega_q = 0 \quad (2.75)$$

onde se observa a projeção da função de Green $G_c(P)$, resultando em

$$A^* G_c(P) = 0 \quad (2.76)$$

Para a equação (2.64) vem:

$$(N^* + N') \int_{\partial\Omega} G(p,q) [\Phi(q)] d\partial\Omega_q = \int_{\partial\Omega} \delta(p,q) [\Phi(q)] d\partial\Omega_q = [\Phi(p)] \quad (2.77)$$

onde, identificada a projeção da função de Green $G_c(p)$, fica:

$$(N^* + N') G_c(p) = [\Phi(p)] \quad (2.78)$$

Os tensores $G_c(P)$ e $G_c(p)$ têm a forma:

$$G_c(P) = \int_{\partial\Omega} G(P,q) [\Phi(q)] d\partial\Omega_q = [g_{c_1}(P) \ g_{c_2}(P) \ g_{c_3}(P) \ \dots \ g_{c_{nd}}(P)] \quad (2.79)$$

com

$$g_{c_j}(P) = \int_{\partial\Omega} G(P,q) \phi_j(q) d\partial\Omega_q \quad (2.80)$$

e

$$G_c(p) = \int_{\partial\Omega} G(p,q) [\Phi(q)] d\partial\Omega_q = [g_{c_1}(p) \ g_{c_2}(p) \ g_{c_3}(p) \ \dots \ g_{c_{nc}}(p)] \quad (2.81)$$

com

$$g_{c_j}(p) = \int_{\partial\Omega} G(p,q) \phi_j(q) d\partial\Omega_q \quad (2.82)$$

representando a j -ésima componente da projeção da função de Green $G(P,q)$ e $G(p,q)$, respectivamente, na base definida sobre o contorno, ou seja, funções de interpolação de grau p definidas como traço das funções de interpolação que formam a base $\mathcal{F}(h,p)$, [6].

Portanto, pode-se escrever as equações (2.63) e (2.64) como:

$$A^* g_{c_j}(P) = 0 \quad (2.83)$$

$$(N^* + N') g_{c_j}(p) = \phi_j(p) \quad (2.84)$$

com $j=1, \dots, nc$.

Então, os dois problemas associados são reescritos como:

Problema 1*

$$A^* G_d(P) = [\Psi(P)] \quad (2.85)$$

$$(N^* + N') G_d(p) = 0 \quad (2.86)$$

para todo $P \in \Omega$; $p \in \partial\Omega$.

Problema 2*

$$A^* G_c(P) = 0 \quad (2.87)$$

$$(N^* + N') G_c(p) = [\Phi(p)] \quad (2.88)$$

para todo $P \in \Omega$; $p \in \partial\Omega$.

Como as projeções da função de Green são contínuas, a aproximação no domínio usando as funções de interpolação de elementos finitos é possível, resultando:

$$g_{d_i}(P) = [\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \dots \ \psi_{nd}] [g_{d_{1i}} \ g_{d_{2i}} \ g_{d_{3i}} \ \dots \ g_{d_{nd}}]^t \quad (2.89)$$

ou

$$g_{d_i}(P) = [\Psi(P)] \{G^{DP}\}_i \quad (2.90)$$

com g_{dik} representando o valor da i -ésima componente da projeção $G_d(P)$ no nó k , e

$$\{G^{DP}\}_i = [g_{d_{1i}} \ g_{d_{2i}} \ g_{d_{3i}} \ \dots \ g_{d_{nd}}]^t \quad (2.91)$$

De maneira análoga, tem-se:

$$g_{d_i}(p) = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \dots \ \phi_{nc}] [g_{d_{1i}} \ g_{d_{2i}} \ g_{d_{3i}} \ \dots \ g_{d_{nc}}]^t \quad (2.92)$$

ou

$$g_{d_i}(p) = [\Phi(p)] \{G^{DP}\}_i \quad (2.93)$$

e

$$\{G^{DP}\}_i = [g_{d_{1i}} \ g_{d_{2i}} \ g_{d_{3i}} \ \dots \ g_{d_{nc}}]^t \quad (2.94)$$

para a aproximação de $g_{di}(p)$.

Para $g_{ci}(P)$, vem

$$g_{c_i}(P) = [\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \dots \ \psi_{nd}] [g_{c_{1i}} \ g_{c_{2i}} \ g_{c_{3i}} \ \dots \ g_{c_{nd}}]^t \quad (2.95)$$

ou

$$g_{c_i}(P) = [\Psi(P)] \{G^{CP}\}_i \quad (2.96)$$

e

$$\{G^{CP}\}_i = [g_{c_{1i}} \ g_{c_{2i}} \ g_{c_{3i}} \ \dots \ g_{c_{nd}}]^t \quad (2.97)$$

Finalmente, para $g_{ci}(p)$, tem-se:

$$g_{c_i}(p) = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \dots \ \phi_{nc}] [g_{c_{1i}} \ g_{c_{2i}} \ g_{c_{3i}} \ \dots \ g_{c_{nc}}]^t \quad (2.98)$$

ou

$$g_{c_i}(p) = [\Phi(p)] \{G^{CP}\}_i \quad (2.99)$$

e

$$\{G^{CP}\}_i = [g_{c_{ii}} \ g_{c_{ia}} \ g_{c_{ib}} \ \dots \ g_{c_{inc}}]^t \quad (2.100)$$

Portanto, pode-se escrever, de maneira compacta:

$$G_d(P) = [\Psi(P)]G^{DP} \quad (2.101)$$

$$G_c(P) = [\Psi(P)]G^{CP} \quad (2.102)$$

$$G_d(p) = [\Phi(p)]G^{Dp} \quad (2.103)$$

$$G_c(p) = [\Phi(p)]G^{Cp} \quad (2.104)$$

onde G^{DP} , G^{Dp} , G^{CP} e G^{Cp} são tensores obtidos dos valores nodais de $G_d(P)$, $G_d(p)$, $G_c(P)$ e $G_c(p)$, respectivamente, com o uso do Galerkin-FEM aplicado aos problemas associados, [6].

Para operadores auto-adjuntos, $A(\cdot) \equiv A^*(\cdot)$, pode-se determinar funcionais para os problemas 1^* e 2^* , $\mathcal{J}(G_d)$ e $\mathcal{J}(G_c)$, cuja minimização também resulta nas projeções da função de Green. Estes podem ser encontrados em [6]. Com estas projeções, têm-se os sistemas de equações:

$$[K + K^*][G^{DP}] = [M] \quad (2.105)$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez convencional de elementos finitos e $[K^*]$ é a matriz proveniente da modificação introduzida quando o operador N' é especificado no contorno, e vale:

$$[K^*] = \int_{\partial\Omega} [\Phi(P)]^t [N'[\Phi(P)]] d\partial\Omega \quad (2.106)$$

A matriz $[M]$ pode ser vista como a matriz massa formal com densidade unitária,

$$[M] = \int_{\Omega} [\Psi(P)]^t [\Psi(P)] d\Omega \quad (2.107)$$

a partir do problema 1^* , e

$$[K + K^*][G^{Cp}] = [m] \quad (2.108)$$

com $[m]$ escrita como

$$[m] = \int_{\partial\Omega} [\Phi(p)]^t [\Phi(p)] d\partial\Omega \quad (2.109)$$

Justapondo-se os dois sistemas, vem:

$$[K + K^*] [G^{DP} | G^{CP}] = [M | m] \quad (2.110)$$

que tem como solução os valores nodais das projeções da função de Green $G_d(P)$ e $G_c(P)$. Os valores de $G_d(p)$ e $G_c(p)$ também são obtidos, já que são o traço dos anteriores.

Rescrevendo as matrizes B , C e F como

$$B = \int_{\partial\Omega} \int_{\Omega} [\Phi(p)]^t G(p, Q)^t [\Psi(Q)] d\Omega_p d\partial\Omega_q \quad (2.111)$$

$$C = \int_{\Omega} \int_{\Omega} [\Psi(Q)]^t G(P, Q)^t [\Psi(P)] d\Omega_Q d\Omega_P \quad (2.114)$$

$$F = \int_{\partial\Omega} \int_{\Omega} [\Psi(Q)]^t G(p, Q)^t [\Phi(p)] d\Omega_Q d\partial\Omega_p \quad (2.113)$$

verifica-se que C é uma matriz simétrica e que $B = F^t$.

Das equações (2.57), (2.102) e (2.111), é possível escrever:

$$B = \int_{\Omega} [\Psi(P)]^t [\Psi(P)] d\Omega_P G^{CP} \quad (2.114)$$

ou melhor,

$$B = F^t = A G^{CP} \quad (2.115)$$

Das equações (2.47), (2.101) e (2.112), vem:

$$C = \int_{\Omega} [\Psi(P)]^t [\Psi(P)] d\Omega_P G^{DP} \quad (2.116)$$

ou

$$C = A G^{DP} \quad (2.117)$$

Reescrevendo a matriz E como:

$$E = \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]^t G(p, q)^t [\Phi(p)] d\partial\Omega_q d\partial\Omega_p \quad (2.118)$$

e com as equações (2.58) e (2.104), vem:

$$E = [G^{CP}]^t \int_{\partial\Omega} [\Phi(p)]^t [\Phi(p)] d\partial\Omega_p \quad (2.119)$$

que fica:

$$E = [G^{CP}]^t D \quad (2.120)$$

As matrizes A e D são as matrizes gramianas de domínio e de contorno, respectivamente, e são facilmente obtíveis por integração numérica.

Da equação (2.43) escreve-se:

$$A \{u\}^D = A G^{CP} \{f\} + A G^{DP} \{b\} \quad (2.121)$$

e, portanto:

$$\{u\}^D = G^{CP} \{f\} + G^{DP} \{b\} \quad (2.122)$$

Logo, os deslocamentos no domínio são obtidos sem a inversão da matriz A .

2.4 CONCLUSÕES.

A estrutura analítica do MLGFM é paralela à do método original, LGFM. Entretanto, a aproximação de quantidades no MLGFM pode ser aplicada a domínios com contorno arbitrário, em oposição ao LGFM, que é restrito a domínios cujo contorno segue linhas coordenadas ortogonais. A generalidade do método é devido essencialmente à utilização de funções de interpolação finitas junto com um princípio variacional para a determinação dos coeficientes das matrizes de Green.

A facilidade de cálculo das matrizes envolvidas é explicada pela aproximação da função de Green e, também, do termo que envolve o operador de Neumann.

Portanto, o MLGFM pode ser visto como uma técnica relativamente simples e precisa para a análise de problemas genéricos, onde outras técnicas necessitam recorrer a formulações complexas para a resolução destes problemas ou, mesmo, são impossibilitadas de resolvê-los.

3 IMPLEMENTAÇÃO DO MLGFM PARA EQUAÇÕES HIPERBÓLICAS

O estudo do problema de propagação de ondas em meios contínuos consiste da análise de uma equação hiperbólica, que, genericamente, escreve-se:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \quad (3.1)$$

ou, compactamente,

$$\square^2 u(x,t) = f(x,t) \quad (3.2)$$

onde

$$\square^2 (\cdot) = \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial t^2} \quad (3.3)$$

é o operador hiperbólico, e a equação (3.1) é comumente conhecida como a equação da onda, onde a constante "a" caracteriza o meio no qual a onda se propaga.

Como o presente trabalho se destina à análise de problemas de potencial sob o ponto de vista de análise modal, e, mais especificamente, na equação de Helmholtz para domínios bidimensionais, deduz-se, aqui, a equação da onda para o movimento transversal em membranas.

3.1 PARTICULARIZAÇÃO DO MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO (MLGFM) PARA A EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ.

3.1.1 O problema de vibrações livres.

O estudo de vibrações livres em estruturas revela as frequências naturais de vibração, bem como os respectivos modos de vibração. A menor frequência de vibração é denominada, especificamente, de frequência fundamental da estrutura, e as demais como harmônicos desta. Para sistemas discretos existem tantas frequências de vibração quantos são os graus de liberdade da estrutura. Para meios contínuos, o número de graus de liberdade é infinito e, para uma solução aproximada, é determinado pela discretização aplicada ao meio.

Para a análise dinâmica de uma estrutura, buscando as frequências naturais de vibração, as forças externas aplicadas à mesma devem ser nulas. Portanto, a equação (3.1) se reduz a:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.4)$$

ou

$$\square^2 u(x,t) = 0 \quad (3.5)$$

onde $\square^2 (\cdot)$ é o operador hiperbólico.

Considerando-se, agora, que o campo de deslocamento $u(x,t)$ seja um movimento harmônico do tipo

$$u(x,t) = v(x)e^{-i\omega t} \quad (3.6)$$

onde ω é uma frequência natural de vibração, então a derivada temporal na equação (3.4) fica:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 [v(x)e^{-i\omega t}]}{\partial t^2} = -\omega^2 v(x)e^{-i\omega t} \quad (3.7)$$

ou

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 u(x,t) \quad (3.8)$$

Portanto, a equação (3.4) fica, agora:

$$\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \omega^2 v(x) = 0 \quad (3.9)$$

que é a equação de Helmholtz. De uma maneira mais compacta, vem:

$$Hv(x) = 0 \quad (3.10)$$

onde

$$H(\cdot) = \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial x^2} + \kappa(\cdot) \quad (3.11)$$

é o operador de Helmholtz.

Logo, a determinação das frequências naturais de vibração e respectivos modos recai na solução de um autop problema do tipo da equação (3.9).

3.1.2 EQUAÇÕES GOVERNANTES.

Considere-se uma membrana flexível genérica, constituída de um material não-homogêneo com densidade superficial $\rho(x,y)$ ocupando um domínio aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ situado em um plano xy de um sistema de coordenadas cartesianas xyz , e que possui como contorno uma curva plana $\partial\Omega$, fechada. A membrana está sob a ação de uma tensão $T(x,y)$ aplicada ao longo do contorno, $\partial\Omega$. O contorno está transversalmente fixo ou elasticamente restrito. Forças transversais externas atuam com densidade superficial $f(x,y,t)$ no interior Ω da membrana e densidade linear $\xi(s,t)$ no contorno $\partial\Omega$; o contorno está sujeito a forças elásticas transversais com módulo de rigidez $k(s)$, onde t representa o tempo e s é um comprimento de arco.

Pelo princípio de Hamilton, requer-se que o funcional [52]

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} T \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \rho(x,y) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - f(x,y,t) w \right\} dx dy dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} \left[\frac{1}{2} k(s) w^2 - \xi(s,t) w \right] ds dt \quad (3.12)$$

tenha um valor estacionário [30], com $\delta w=0$ nos instantes t_1 e t_2 , ou seja,

$$\delta I = 0 \quad (3.13)$$

sendo $w=w(x,y,t)$ o deslocamento normal no plano xy .

Com operações do cálculo variacional e integração por partes, obtém-se:

$$-T \nabla^2 w + f = -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.14)$$

em Ω ,

$$T \frac{\partial w}{\partial n} + kw = \xi \quad (3.15)$$

em $\partial\Omega_1$ e

$$w = \bar{w} \quad (3.16)$$

em $\partial\Omega_2$, onde $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 = \partial\Omega$.

Portanto, a equação (3.14) pode ser posta na forma

$$\square^2 w(P,t) = -f(P,t) \quad (3.17)$$

para $P \in \Omega$, com

$$\square^2(\cdot) = -T \nabla^2(\cdot) + \rho \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial t^2} \quad (3.18)$$

As equações (3.15) e (3.16) representam as condições de contorno, na forma

$$\mathcal{L}[w(p,t)] = \xi \quad (3.19)$$

para $p \in \partial\Omega$, e $\mathcal{L}[(\cdot)]$ é combinação linear dos operadores de contorno definidos por

$$Tr[(\cdot)] \quad (3.20)$$

$$\text{Tr} \left[T(p) \frac{\partial(\cdot)}{\partial n} \right] \quad (3.21)$$

Portanto

$$\mathfrak{L}[(\cdot)] = \text{Tr} \left[T(p) \frac{\partial(\cdot)}{\partial n} \right] + k \text{Tr}[(\cdot)] \quad (3.22)$$

onde $\partial(\cdot)/\partial n$ é o operador derivada normal e

$$\text{Tr}[g(p)] = \lim_{P \rightarrow p} g(P) \quad (3.23)$$

é o operador traço, conforme definido no capítulo anterior. O operador (3.20) aplica condições de contorno de Dirichlet, e o (3.21) condições de contorno de Neumann. Consequentemente, o operador (3.22) aplica condições de contorno de Cauchy.

3.1.3 O Problema de Vibrações Livres em Membranas.

Para a solução do problema de vibrações livres em membranas, considera-se, nas equações (3.14) e (3.15), $f=0$ e $\xi=0$. Portanto:

$$-T \nabla^2 w(x,t) = -\rho(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.24)$$

em Ω ,

$$T \frac{\partial w(x,t)}{\partial n} + k w(x,t) = 0 \quad (3.25)$$

em $\partial\Omega_1$,

$$w(x,t) = \overline{w(x,t)} \quad (3.26)$$

em $\partial\Omega_2$, onde $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 = \partial\Omega$.

Considerando-se, ainda, que a solução da equação (3.24) é da forma $W(x,t) = w(x)e^{-i\omega t}$, onde ω representa uma frequência natural de vibração, vem:

$$-T \nabla^2 w(x) e^{-i\omega t} = +\rho(x) \omega^2 w(x) e^{-i\omega t} \quad (3.27)$$

em Ω ,

$$T \frac{\partial [w(x)e^{-i\omega t}]}{\partial n} + kw(x)e^{-i\omega t} = 0 \quad (3.28)$$

em $\partial\Omega_1$,

$$w(x) = \overline{w(x)} \quad (3.29)$$

em $\partial\Omega_2$.

Como a solução fica desacoplada do tempo, obtém-se um problema espacial, como:

$$-T\nabla^2 w(x) = +\rho(x)\omega^2 w(x) \quad (3.30)$$

em Ω ,

$$T \frac{\partial w(x)}{\partial n} + kw(x) = 0 \quad (3.31)$$

em $\partial\Omega_1$,

$$w(x) = \overline{w(x)} \quad (3.32)$$

em $\partial\Omega_2$.

Admitindo, agora, que as equações (3.31) e (3.32) sejam postas na forma da equação (3.11) vem:

$$-\nabla^2 w(x) - \frac{\rho}{T} \omega^2 w(x) = 0 \quad (3.33)$$

em Ω e

$$\alpha w(x) + \beta \frac{\partial w(x)}{\partial n} = 0 \quad (3.34)$$

em $\partial\Omega$, onde n é a normal orientada para fora da membrana no contorno $\partial\Omega$ e $\beta=T/k$. Para valores de k muito grandes, ou seja, $\beta \rightarrow 0$ com $k \rightarrow \infty$, a equação (3.34) representa condição de contorno de Dirichlet. Para $\beta=1$ e $\alpha \neq 0$, tem-se a condição de contorno de lados elasticamente suportados. Para $\alpha=0$, tem-se condição de contorno de Neumann.

A equação (3.33) é, então, uma equação de Helmholtz,

$$Hw(x) = 0 \quad (3.35)$$

onde pode-se dividir o operador de Helmholtz em um operador de Laplace, $\nabla^2(\cdot)$, e

um operador escalar, $\rho\omega^2 / T(\cdot)$.

3.2 Aplicação do MLGFM ao Problema de Vibrações Livres em Membranas e Cavidades Acusticamente Rígidas.

O problema de vibração livre em cavidades acusticamente rígidas, ou seja, impermeáveis ao fluxo sonoro, é regido pela equação de Helmholtz sob condição de contorno de Neumann homogênea. Portanto, os problemas de vibração livre em membranas e em cavidades acusticamente rígidas são matematicamente idênticos, a menos das condições de contorno impostas.

Parte-se da equação governante do problema de vibração livre de uma membrana, equação de Helmholtz,

$$-\nabla^2[w(P)] - \frac{\omega^2}{a^2}w(P) = 0 \quad (3.36)$$

onde

$$a^2 = \frac{T}{\rho} \quad (3.37)$$

para o problema de vibração livre de membranas elásticas, e

$$a^2 = c \quad (3.38)$$

para o problema de vibração livre em cavidades acústicas, com condições de contorno prescritas conforme a equação (3.34). Introdz-se o problema adjunto correspondente ao operador laplaceano

$$-\nabla^2[w(P)] = 0 \quad (3.39)$$

com $P \in \Omega$, na forma

$$-\nabla^{2*}[G(P,Q)] = \delta(P,Q) \quad (3.40)$$

com $P, Q \in \Omega$, onde $\delta(P,Q)$ é uma distribuição Delta de Dirac e $G(P,Q)$ é uma solução fundamental. $G_{i,j}$ representa o deslocamento transversal de um ponto $Q \in \Omega$, devido a uma força generalizada unitária aplicada no ponto $P \in \Omega$ e $\nabla^{2*}(\cdot)$ é o operador adjunto do operador laplaceano $\nabla^2(\cdot)$.

Multiplicando-se a equação (3.36) por $G(P,Q)$ e a equação (3.40) por $w(P)$, vem:

$$-G(P,Q)\nabla^2[w(P)] - G(P,Q)\frac{\omega^2}{a^2}w(P) = 0 \quad (3.41)$$

$$-w(P)\nabla^{2*}[G(P,Q)] = w(P)\delta(P,Q) \quad (3.42)$$

Subtraindo-se a equação (3.41) da equação (3.42), resulta:

$$w(P)\delta(P,Q) = -w(P)\nabla^{2*}[G(P,Q)] + G(P,Q)\nabla^2[w(P)] + G(P,Q)\frac{\omega^2}{a^2}w(P) \quad (3.43)$$

Integrando-se a equação (3.43) no domínio, Ω_p , com relação a um sistema de coordenadas localizado no ponto $Q \in \Omega$, tem-se a solução para o deslocamento transversal, como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w(P)\delta(P,Q)d\Omega_p &= - \int_{\Omega} w(P)\nabla^{2*}[G(P,Q)]d\Omega_p + \\ &+ \int_{\Omega} G(P,Q)\nabla^2[w(P)]d\Omega_p + \int_{\Omega} G(P,Q)\frac{\omega^2}{a^2}w(P)d\Omega_p \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde, com as propriedades da função Delta de Dirac, vem:

$$\begin{aligned} w(Q) &= - \int_{\Omega} w(P)\nabla^{2*}[G(P,Q)]d\Omega_p + \int_{\Omega} G(P,Q)\nabla^2[w(P)]d\Omega_p + \\ &+ \int_{\Omega} G(P,Q)\frac{\omega^2}{a^2}w(P)d\Omega_p \end{aligned} \quad (3.45)$$

Aplicando-se o teorema de Gauss às duas primeiras parcelas da equação (3.45), vem:

$$\int_{\Omega} w(P)\nabla^{2*}[G(P,Q)]d\Omega_p = \int_{\partial\Omega} w(P)\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_p}d\partial\Omega_p - \int_{\Omega} \nabla [G(P,Q)] \cdot \nabla [w(P)]d\Omega_p \quad (3.46)$$

e

$$\int_{\Omega} G(P,Q)\nabla^2[w(P)]d\Omega_p = \int_{\partial\Omega} G(P,Q)\frac{\partial w(P)}{\partial n_p}d\partial\Omega_p - \int_{\Omega} \nabla [w(P)] \cdot \nabla [G(P,Q)]d\Omega_p \quad (3.47)$$

onde $\partial(\cdot)/\partial n_p$ é a derivada normal. Substituindo as equações (3.46) e (3.47) na equação (3.48), resulta:

$$\begin{aligned}
w(Q) = & - \int_{\partial\Omega} w(P) \frac{\partial G(p,Q)}{\partial n_p} d\partial\Omega_p + \int_{\Omega} \nabla [G(P,Q)] \cdot \nabla [w(P)] d\Omega_p + \\
& + \int_{\partial\Omega} G(p,Q) \frac{\partial w(p)}{\partial n_p} d\partial\Omega_p - \int_{\Omega} \nabla [w(P)] \cdot \nabla [G(P,Q)] d\Omega_p + \\
& + \int_{\Omega} G(P,Q) \frac{\omega^2}{a^2} w(P) d\Omega_p
\end{aligned} \tag{3.48}$$

onde, simplificando-se, vem:

$$\begin{aligned}
w(Q) = & - \int_{\partial\Omega} w(P) \frac{\partial G(p,Q)}{\partial n_p} d\partial\Omega_p + \int_{\partial\Omega} G(p,Q) \frac{\partial w(p)}{\partial n_p} d\partial\Omega_p + \\
& + \int_{\Omega} G(P,Q) \frac{\omega^2}{a^2} w(P) d\Omega_p
\end{aligned} \tag{3.49}$$

A função $G(P,Q)$ representa uma solução fundamental da equação (3.40). Para que $G(P,Q)$ venha a ser uma função de Green, estabelecem-se apropriadas condições de contorno. Portanto, soma-se e subtrai-se a quantidade

$$k_o G(p,Q) w(p) = k_o w(p) G(p,Q) \tag{3.50}$$

na equação (3.49), resultando

$$\begin{aligned}
w(Q) = & - \int_{\partial\Omega} w(P) \left[k_o G(p,Q) + \frac{\partial G(p,Q)}{\partial n_p} \right] d\partial\Omega_p + \\
& + \int_{\partial\Omega} G(p,Q) \left[k_o w(p) + \frac{\partial w(p)}{\partial n_p} \right] d\partial\Omega_p + \int_{\Omega} G(P,Q) \frac{\omega^2}{a^2} w(P) d\Omega_p
\end{aligned} \tag{3.51}$$

A constante k_o representa, aqui, o operador arbitrário N' apresentado na formulação do método.

As condições de contorno para a função de Green são aquelas estabelecidas na proposição do problema, equação (3.34), na forma:

$$k_o G(p,Q) + \frac{\partial G(p,Q)}{\partial n_p} = 0 \tag{3.52}$$

Então, a solução fica:

$$w(Q) = \int_{\partial\Omega} G(p,Q) \left[k_o w(p) + \frac{\partial w(p)}{\partial n_p} \right] d\partial\Omega_p + \int_{\Omega} G(P,Q) \frac{\omega^2}{a^2} w(P) d\Omega_p \tag{3.53}$$

Como a integral no contorno da equação (3.53) envolve derivadas de $w(p)$ no sentido do traço, dificultando o seu tratamento numérico, define-se uma nova quantidade $F(p)$ como:

$$F(p) = \left[k_o w(p) + \frac{\partial w(p)}{\partial n_p} \right] \quad (3.54)$$

Portanto, a representação do deslocamento transversal $w(Q)$ fica:

$$w(Q) = \int_{\partial\Omega} G(p,Q) F(p) d\partial\Omega_p + \int_{\Omega} G(P,Q) \frac{\omega^2}{a^2} w(P) d\Omega_P \quad (3.55)$$

que define valores para $w(Q)$ com $Q \in \Omega$. Aplicando a propriedade do traço, ou seja,

$$w(q) = \lim_{Q \rightarrow q} w(Q) \quad (3.56)$$

obtem-se a representação para o deslocamento transversal $w(q)$ com $q \in \partial\Omega$,

$$w(q) = \int_{\partial\Omega} G(p,q) F(p) d\partial\Omega_p + \int_{\Omega} G(P,q) \frac{\omega^2}{a^2} w(P) d\Omega_P \quad (3.57)$$

Então, o problema de vibração livre em membranas e cavidades acusticamente rígidas é completamente formulado pelas equações (3.55) e (3.57). As condições de contorno podem ser introduzidas diretamente através do traço dos deslocamentos ou da quantidade $F(p)$.

3.3 FORMULAÇÃO NUMÉRICA.

3.3.1 Discretização e Aproximação Numérica.

O Método de Galerkin junto com as funções de interpolação de elementos finitos é aplicado para resolver numericamente o sistema de equações integrais formado pelas equações (3.55) e (3.57). Para uma dada malha de elementos finitos, existe, associada a cada nó Q_i , uma função $\psi_i(Q)$ definida em Ω , chamada função de interpolação global. No contorno, existe, associada a cada nó q_i , uma função similar $\phi_i(q)$ definida em $\partial\Omega$. Então, as variáveis do problema podem ser expressas como:

$$w(Q) = [\Psi(Q)] \{w\}^D \quad (3.58)$$

$$w(P) = [\Psi(P)] \{w\}^D \quad (3.59)$$

$$F(p) = [\Phi(p)] \{f\} \quad (3.60)$$

$$w(q) = [\Phi(q)] \{w\}^C \quad (3.61)$$

com $\{w\}^D$ e $\{w\}^C$ representando os valores nodais de deslocamento transversal w no domínio Ω e no contorno $\partial\Omega$, respectivamente; $\{f\}$ representa valores nodais de forças de reação no contorno.

Aplicando a equação (3.55) a cada elemento em que foi discretizado o domínio, fica:

$$[\Psi(Q)] \{w\}^D = \int_{\partial\Omega} G(p,Q) [\Phi(p)] d\partial\Omega_p \{f\} + \frac{\omega^2}{a^2} \int_{\Omega} G(P,Q) [\Psi(P)] d\Omega_P \{w\}^D \quad (3.62)$$

Como todas as quantidades envolvidas foram expandidas em um número finito de nós e, conseqüentemente, em um número finito de graus de liberdade e o problema real apresenta infinitos graus de liberdade, a equação (3.62) equaciona a um resíduo. Aplicando, portanto, o Método de Galerkin faz-se uma projeção ortogonal do resíduo sobre o subespaço gerado pelas funções de interpolação de elementos finitos. Assim:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\Psi(Q)]^t [\Psi(Q)] d\Omega_Q \{w\}^D &= \int_{\Omega} [\Psi(Q)]^t \int_{\partial\Omega} G(p,Q) [\Phi(p)] d\partial\Omega_p d\Omega_Q \{f\} + \\ &+ \frac{\omega^2}{a^2} \int_{\Omega} [\Psi(Q)]^t \int_{\Omega} G(P,Q) [\Psi(P)] d\Omega_P d\Omega_Q \{w\}^D \end{aligned} \quad (3.63)$$

Escrevendo na forma de equação matricial, fica:

$$A \{w\}^D = B \{f\} + \omega^2 C \{w\}^D \quad (3.64)$$

onde

$$A = \int_{\Omega} [\Psi(Q)]^t [\Psi(Q)] d\Omega_Q \quad (3.65)$$

$$B = \int_{\Omega} [\Psi(Q)]^t \int_{\partial\Omega} G(p,Q) [\Phi(p)] d\partial\Omega_p d\Omega_Q \quad (3.66)$$

$$C = \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} [\Psi(Q)]^t \int_{\Omega} G(P,Q) [\Psi(P)] d\Omega_P d\Omega_Q \quad (3.67)$$

apresentam exatamente a mesma forma daquelas matrizes definidas no capítulo anterior. Portanto, vê-se que as forças de inércia são realmente tratadas como forças de corpo, na matriz C .

Para as projeções da função de Green como:

$$G_d(P) = \int_{\Omega} [\Psi(Q)]' G(P, Q) d\Omega_Q \quad (3.68)$$

$$G_d(p) = \int_{\Omega} [\Psi(Q)]' G(p, Q) d\Omega_Q \quad (3.69)$$

as matrizes B e C ficam:

$$B = \int_{\partial\Omega} G_d(p) [\Phi(p)] d\partial\Omega_p \quad (3.70)$$

$$C = \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} G_d(P) [\Psi(P)] d\Omega_P \quad (3.71)$$

Aplicando agora a equação (3.57) a cada elemento em que foi discretizado o contorno, vem:

$$[\Phi(q)] \{w\}^C = \int_{\partial\Omega} G(p, q) [\Phi(p)] d\partial\Omega_p \{f\} + \frac{\omega^2}{a^2} \int_{\Omega} G(P, q) [\Psi(P)] d\Omega_P \{w\}^D \quad (3.72)$$

Aplicando-se o Método de Galerkin à equação (3.72), projetando-a no subespaço gerado pelas funções de interpolação de contorno, $[\Phi(q)]$, vem:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]' [\Phi(q)] d\partial\Omega_q \{w\}^C &= \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]' \int_{\partial\Omega} G(p, q) [\Phi(p)] d\partial\Omega_p d\partial\Omega_q \{f\} + \\ &+ \frac{\omega^2}{a^2} \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]' \int_{\Omega} G(P, q) [\Psi(P)] d\Omega_P d\partial\Omega_q \{w\}^D \end{aligned} \quad (3.73)$$

que em forma matricial, fica:

$$D \{w\}^C = E \{f\} + \omega^2 F \{w\}^D \quad (3.74)$$

onde

$$D = \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]' [\Phi(q)] d\partial\Omega_q \quad (3.75)$$

$$E = \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]^t \int_{\partial\Omega} G(p,q) [\Phi(p)] d\partial\Omega_p d\partial\Omega_q \quad (3.76)$$

$$F = \frac{1}{a^2} \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]^t \int_{\Omega} G(P,q) [\Psi(P)] d\Omega_p d\partial\Omega_q \quad (3.77)$$

novamente apresentando a mesma forma das equações correspondentes do capítulo anterior.

Fazendo as projeções da função de Green como:

$$G_c(P) = \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]^t G(P,q) d\partial\Omega_q \quad (3.78)$$

$$G_c(p) = \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]^t G(p,q) d\partial\Omega_q \quad (3.79)$$

as matrizes E e F ficam:

$$E = \int_{\partial\Omega} G_c(p) [\Phi(p)] d\partial\Omega_p \quad (3.80)$$

$$F = \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} G_c(P) [\Psi(P)] d\Omega_p \quad (3.81)$$

3.3.2 Aproximação Direta das Matrizes de Green.

Das seis matrizes envolvidas nas equações integrais que definem o problema, equações (3.65) e (3.74), as matrizes A e D são matrizes massa formais, respectivamente, ao domínio e ao contorno. As demais envolvem projeções da função de Green, $G_d(P)$, $G_d(p)$, $G_c(P)$ e $G_c(p)$, e podem ser calculadas diretamente, sem a explicitação da função de Green. Para a obtenção dessas projeções, resolve-se pelo Método de Elementos Finitos dois problemas associados:

Problema 1

$$-\nabla^2 [G(P,Q)] = \delta(P,Q) \quad (3.82)$$

com condição de contorno

$$k_o G(p,Q) + \frac{\partial G(p,Q)}{\partial n_p} = 0 \quad (3.83)$$

com $P, Q \in \Omega$ e $p \in \partial\Omega$, que é o problema associado à equação integral de domínio;

Problema 2

$$-\nabla^{2*} [G(P,q)] = 0 \quad (3.84)$$

com condição de contorno

$$k_o G(p,q) + \frac{\partial G(p,q)}{\partial n_p} = \delta(p,q) \quad (3.85)$$

com $P \in \Omega$ e $p, q \in \partial\Omega$, que é o problema associado à equação integral de contorno.

Projetando o Problema 1 no subespaço gerado pelas funções de interpolação de domínio, ou seja, multiplicando-se as equações (3.82) e (3.83) por $[\Psi(Q)]$ e integrando no domínio Ω , mantendo-se o ponto P fixo, vem:

$$-\nabla^{2*} \left[\int_{\Omega} G(P,Q) [\Psi(Q)] d\Omega_Q \right] = \int_{\Omega} \delta(P,Q) [\Psi(Q)] d\Omega_Q = [\Psi(P)] \quad (3.86)$$

e

$$\int_{\Omega} \left[k_o G(p,Q) + \frac{\partial G(p,Q)}{\partial n_p} \right] [\Psi(Q)] d\Omega_Q = 0 \quad (3.87)$$

onde, evidenciando os operadores k_o e o de Neumann associado na equação (3.87), tem-se:

$$\left(k_o + \frac{\partial(\cdot)}{\partial n_p} \right) \int_{\Omega} G(p,Q) [\Psi(Q)] d\Omega_Q = 0 \quad (3.88)$$

Identifica-se, nas equações (3.86) e (3.88), as projeções da função de Green $G_d(P)$ e $G_d(p)$. Logo, escreve-se o Problema 1 como:

Problema 1*

$$-\nabla^{2*} G_d(P) = [\Psi(P)] \quad (3.89)$$

$$k_o G_d(p) + \frac{\partial G_d(p)}{\partial n_p} = 0 \quad (3.90)$$

De maneira análoga para o Problema 2, projetando-o no subespaço gerado pelas funções de interpolação de contorno, ou seja, multiplicando as equações (3.84) e (3.85) por $[\Phi(q)]$ e integrando no contorno $\partial\Omega$, mantendo o ponto p fixo, vem:

$$-\nabla^{2*} \left[\int_{\partial\Omega} G(P,q) [\Phi(q)] d\partial\Omega_q \right] = 0 \quad (3.91)$$

e

$$\int_{\partial\Omega} \left[k_o G(p,q) + \frac{\partial G(p,q)}{\partial n_p} \right] [\Phi(q)] d\partial\Omega_q = \int_{\partial\Omega} \delta(p,q) [\Phi(q)] d\partial\Omega_q = [\Phi(p)] \quad (3.92)$$

Colocando-se em evidência os operadores k_o e o de Neumann associado, na equação (3.92), vem:

$$\left(k_o + \frac{\partial(\cdot)}{\partial n_p} \right) \int_{\partial\Omega} G(p,q) [\Phi(q)] d\partial\Omega_q = [\Phi(p)] \quad (3.93)$$

Identifica-se, então, nas equações (3.91) e (3.93), as projeções da função de Green G_c (P) e G_c (p). Portanto, o Problema 2 pode ser posto como:

Problema 2*

$$-\nabla^{2*} G_c(P) = 0 \quad (3.94)$$

$$k_o G_c(p) + \frac{\partial G_c(p)}{\partial n_p} = [\Phi(p)] \quad (3.95)$$

Visto que as projeções da função de Green são contínuas, estas podem ser expandidas através das mesmas funções de interpolação de elementos finitos, resultando:

$$G_d(P) = [\Psi(P)] \underline{G}^{DP} \quad (3.96)$$

$$\underline{G}_c(P) = [\Psi(P)] \underline{G}^{CP} \quad (3.97)$$

$$\underline{G}_d(p) = [\Phi(p)] \underline{G}^{Dp} \quad (3.98)$$

$$\underline{G}_c(p) = [\Phi(p)] \underline{G}^{Cp} \quad (3.99)$$

onde \underline{G}^{DP} , \underline{G}^{Dp} , \underline{G}^{CP} e \underline{G}^{Cp} são tensores obtidos dos valores nodais de $G_d(P)$, $G_d(p)$, $G_c(P)$ e $G_c(p)$, respectivamente, com o uso do Método de Elementos Finitos aplicado aos problemas associados, Problema 1* e Problema 2*.

Com essas projeções, tem-se o sistema de equações

$$[\underline{K} + \underline{K}^*] [\underline{G}^{DP}] = [\underline{M}] \quad (3.100)$$

a partir do Problema 1*, onde $[\underline{K}]$ é a matriz de rigidez convencional de elementos finitos e $[\underline{K}^*]$ é a matriz proveniente da modificação introduzida pelo parâmetro k_o quando especificado no contorno. Então:

$$[\underline{K}^*] = \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]' k_o [\Phi(q)] d\partial\Omega \quad (3.101)$$

ou seja,

$$[\underline{K}^*] = k_o [\underline{m}] \quad (3.102)$$

onde $[\underline{m}]$ é a matriz massa convencional com densidade unitária (matriz grammiana) no contorno,

$$[\underline{m}] = \int_{\partial\Omega} [\Phi(q)]' [\Phi(q)] d\partial\Omega \quad (3.103)$$

A matriz $[\underline{M}]$ é a matriz massa formal com densidade unitária (matriz grammiana) no domínio,

$$[\underline{M}] = \int_{\Omega} [\Psi(Q)]' [\Psi(Q)] d\Omega \quad (3.104)$$

Portanto,

$$[\underline{K} + k_o \underline{m}] [\underline{G}^{DP}] = [\underline{M}] \quad (3.105)$$

A partir do Problema 2*, vem:

$$[\mathbf{K} + k_0 \mathbf{m}] [\mathbf{G}^{CP}] = [\mathbf{m}] \quad (3.106)$$

Justapondo-se os dois sistemas, fica:

$$[\mathbf{K} + k_0 \mathbf{m}] [\mathbf{G}^{DP} | \mathbf{G}^{CP}] = [\mathbf{M} | \mathbf{m}] \quad (3.107)$$

cuja solução fornece os valores nodais das projeções da função de Green, $G_d(P)$ e $G_c(P)$. Os valores $G_d(p)$ e $G_c(p)$ são obtidos como traço das projeções anteriores.

Apesar das matrizes B , C , E e F poderem ser obtidas sem a inversão da matriz A , conforme demonstrado no capítulo anterior, na formulação do problema de autovalor/autovetor estas matrizes permanecerão na sua forma inicial para facilitar a compreensão da imposição das condições de contorno. Portanto, o problema fica descrito pelo sistema de equações matriciais:

$$\mathbf{A}\{\mathbf{w}\}^D = \mathbf{B}\{\mathbf{f}\} + \omega^2 \mathbf{C}\{\mathbf{w}\}^D \quad (3.108)$$

$$\mathbf{D}\{\mathbf{w}\}^C = \mathbf{E}\{\mathbf{f}\} + \omega^2 \mathbf{F}\{\mathbf{w}\}^D \quad (3.109)$$

3.4 IMPOSIÇÃO DE CONDIÇÕES DE CONTORNO.

3.4.1 Condições de Contorno de Dirichlet Homogêneas.

Como as condições de contorno de Dirichlet são automaticamente incluídas na definição do espaço de funções admissíveis, espaço de Hilbert com a propriedade do traço, estas são impostas ao problema de autovalor/autovetor já montado, tendo o deslocamento $w(Q)$ como argumento.

Então, resolvendo-se o sistema formado pelas equações (3.108) e (3.109) por substituição, isola-se as forças de reação na equação (3.109), como:

$$\{\mathbf{f}\} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{D}\{\mathbf{w}\}^C - \omega^2 \mathbf{E}^{-1} \mathbf{F}\{\mathbf{w}\}^D \quad (3.110)$$

e substitui-se na equação (3.108), obtendo-se:

$$\mathbf{A}\{\mathbf{w}\}^D = \mathbf{B} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{D}\{\mathbf{w}\}^C - \omega^2 \mathbf{B} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{F}\{\mathbf{w}\}^D + \omega^2 \mathbf{C}\{\mathbf{w}\}^D \quad (3.111)$$

Fazendo a matriz

$$J = BE^{-1}D \quad (3.112)$$

expandida de maneira que tenha a mesma dimensão da matriz A , com a inclusão de linhas e colunas com zeros, e fazendo a matriz

$$L = BE^{-1}F \quad (3.113)$$

a equação (3.111) fica:

$$\{[A - J] + \omega^2[C - L]\} \{w\}^D = \{0\} \quad (3.114)$$

Este é o problema de autovalor/autovetor generalizado correspondente ao problema de vibração livre em uma membrana homogênea sob tensão constante com as bordas fixas. Sua solução fornece os quadrados das frequências naturais de vibração $\underline{\omega}_i^2$ e os correspondentes modos de vibração, w_{ij} , com $i=1, n_d - n_c$ e $j=1, n_d$, onde n_d representa o número de nós em que foi discretizado o domínio e n_c o número de nós em que foi discretizado o contorno.

As condições de contorno de Dirichlet são impostas especificando-se $\{w\}^D$ nulo nas posições correspondentes aos nós do contorno. Praticamente, significa eliminar as equações do autoproblema correspondentes a esses nós. Essas equações são linhas e colunas das matrizes do autoproblema, e estão ordenadas segundo a numeração da discretização de domínio. Portanto, os autovetores somente terão componentes não nulas nos nós internos, isto é, naqueles que não pertencem ao contorno.

3.4.2 Condições de Contorno de Neumann Homogêneas.

As condições de contorno de Neumann são aplicadas através da quantidade $F(p)$, visto que esta quantidade representa as reações/fluxos reais e fictícios do problema. Na expressão para $F(p)$,

$$F(p) = \left[k_o w(p) + \frac{\partial w(p)}{\partial n_p} \right] \quad (3.115)$$

aplica-se a condição de reação/fluxo nulo no contorno, condição de Neumann homogênea, fazendo

$$\frac{\partial w(p)}{\partial n_p} = 0 \quad (3.116)$$

Como o parâmetro k_o somente deve ser especificado em nós do contorno sob condição de Dirichlet homogênea, k_o deveria, aqui, ser nulo, resultando em

$$F(p) = 0 \quad (3.117)$$

Porém, esta imposição acarreta em problemas de mau condicionamento numérico, já que vários códigos computacionais para a solução de problemas de autovalor/autovetor não detectam o movimento de corpo rígido, que é o modo com frequência de vibração nula, que ocorre sob este tipo de condição de contorno, que não apresenta unicidade de solução, necessitando de uma condição de ortogonalidade para que a solução seja definida. Portanto, faz-se necessário que se especifique um valor para k_o em todos os nós do contorno, quando este estiver, apenas, sob condição de Neumann homogênea. O valor para este parâmetro, nesta situação, deve ser tão pequeno quanto possível, da ordem de 10^{-06} , para que não ocorra uma descaracterização da condição de contorno do problema. Mesmo assim o problema numérico não fica muito bem condicionado, exigindo a utilização de precisão expandida. O fato da especificação de um parâmetro arbitrário neste caso não caracteriza uma dependência paramétrica, visto que após estabelecido o valor para este parâmetro não há necessidade de alterá-lo para outros problemas sob mesmas condições de contorno. Logo, a condição de contorno de Neumann homogênea fica imposta fazendo-se:

$$\{f\} = k_o \{w\}^C \quad (3.118)$$

Substituindo a equação (3.118) na equação (3.109), vem:

$$D\{w\}^C = k_o E\{w\}^C + \omega^2 F\{w\}^D \quad (3.119)$$

ou

$$\{w\}^C = \omega^2 [D - k_o E]^{-1} F\{w\}^D \quad (3.120)$$

Substituindo a equação (3.118) na equação (3.108), vem:

$$A\{w\}^D = k_o B\{w\}^C + \omega^2 C\{w\}^D \quad (3.121)$$

Agora, substituindo a equação (3.120) na equação (3.121), obtém-se:

$$A\{w\}^D = \omega^2 k_o B [D - k_o E]^{-1} F\{w\}^D + \omega^2 C\{w\}^D \quad (3.122)$$

ou

$$A\{w\}^D = \omega^2 [k_o B [D - k_o E]^{-1} F + C] \{w\}^D \quad (3.123)$$

Fazendo

$$P = k_0 B [D - k_0 E]^{-1} F + C \quad (3.124)$$

tem-se

$$[A - \omega^2 P] \{w\}^D = \{0\} \quad (3.125)$$

que é o problema de autovalor/autovetor generalizado correspondente ao problema de vibração livre em uma cavidade acusticamente rígida, ou seja, com as paredes impermeáveis ao fluxo sonoro. A solução fornece os autovalores como os quadrados das frequências naturais de vibração, ω_i^2 , e os correspondentes autovetores como os modos de vibração, w_{ij} , com $i, j = 1, n_d$, onde n_d representa o número de nós em que foi discretizado o domínio. Vê-se que as condições de contorno foram automaticamente impostas através da quantidade $\{f\}$.

3.4.3 Condições de Contorno Mistas Homogêneas.

As condições de contorno mistas homogêneas representam situações onde parte do contorno está sujeita a condições de Dirichlet homogêneas e parte a condições de Neumann homogêneas. Portanto, a maneira como estas condições são impostas é similar à das anteriores, ou seja, onde houver condição de contorno essencial esta será automaticamente incluída na definição do espaço de funções admissíveis; onde houver condição de contorno natural, esta será imposta através da quantidade $\{f\}$. Deve-se, então, efetuar uma partição do contorno para que se possa tratar cada porção de maneira adequada. Esta partição se reflete nas equações governantes como, também, uma partição das matrizes envolvidas. Cada equação matricial é desmembrada em duas, uma representando a porção do contorno sob condição de contorno Dirichlet e outra representando a porção sob condição de contorno de Neumann. Após as devidas manipulações, obtém-se um autoproblema generalizado que já traz implícitas todas as informações pertinentes às condições de contorno. Portanto, sua solução fornece, como antes, as frequências e modos naturais de vibração da estrutura. Todo o desenvolvimento deste processo de particionamento pode ser encontrado com detalhes no Apêndice.

Da maneira como foi formulada, a imposição de condições de contorno mista pode ser realizada nó a nó, isto é, é possível especificar-se uma condição de contorno diferente, essencial ou natural, para cada nó do contorno. Deve-se, porém, utilizar nós duplos quando houver mudança das condições de contorno.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Após estabelecida a formulação numérica em que é discretizado um modelo matemático do problema físico, aqui a modelagem de membranas elásticas e cavidades acusticamente rígidas pela equação de Helmholtz, cabe determinar de que maneira esta discretização é realizada. Conforme exposto, o domínio em questão é discretizado por uma malha de elementos finitos, utilizados para a solução de problemas para a obtenção da aproximação de uma função de Green, satisfazendo a equação diferencial e as condições de contorno impostas. O contorno do objeto de análise é, também, discretizado por elementos de contorno, que são o traço da malha de elementos finitos (o contorno é a "borda" do domínio), utilizados para a aproximação numérica do sistema de equações integrais em que foi transformado o modelo matemático obtido (de maneira similar ao procedimento empregado no Método de Elementos de Contorno de Galerkin).

Pelo fato da malha de elementos de contorno ser o traço da malha de

elementos finitos, a escolha de um determinado elemento finito implica, necessariamente, na adoção de um elemento de contorno correspondente para a avaliação do campo potencial (aqui, os deslocamentos transversais nodais da membrana). Para o campo de fluxo/tração (aqui, a tração nas bordas da membrana) é possível o emprego de elementos de contorno que não sejam correspondentes aos elementos finitos adotados. Portanto, o campo $\{w\}$ deve ser no contorno o traço do campo $\{w\}$ no domínio; o campo $\{f\}$ pode ser descrito por funções de interpolação distintas desde que tenha os mesmos nós, por exemplo funções de interpolação singulares. Em todas as aplicações realizadas foram utilizadas malhas no contorno com elementos correspondentes aqueles empregados na discretização do domínio. Tal procedimento é computacionalmente mais simples e até mais natural, já que é necessário fazer duas discretizações diferentes. Aparentemente, o emprego de uma interpolação de maior ordem para o campo fluxo/tração que o campo de deslocamentos talvez não trouxesse melhoria considerável nos resultados.

Em síntese, o processo de discretização do problema tem as mesmas características daquele empregado no Método de Elementos Finitos. Cabe ressaltar que as malhas empregadas para a resolução de problemas pelo Método da Função de Green Local Modificado são mais pobres que aquelas empregadas, porventura, no Método de Elementos Finitos, mantendo-se a precisão dos resultados.

4.1 ELEMENTOS FINITOS E DE CONTORNO

Os elementos escolhidos foram elementos isoparamétricos com funções de interpolação lagrangeanas, bidimensionais para as malhas de domínio, e unidimensionais para as malhas de contorno. Como foi, também, realizada uma análise experimental de convergência p - e h - para o método, foi tomada uma família de elementos lagrangeanos, desde lineares até de décima ordem, conforme a Tabela 4.1. Sabe-se que estes não são os melhores elementos para uma análise de convergência, sendo ideais aqueles de base hierárquica.

Elementos isoparamétricos foram estudados primeiramente por ZIENKIEWICZ (1977)[77], e o nome "isoparamétrico" vem do fato de que as mesmas funções que descrevem a geometria são usadas para interpolar variações espaciais de uma função no elemento. A formulação isoparamétrica utiliza um mapeamento do elemento de malha em um elemento padrão ("mestre"), utilizando um sistema de coordenadas adimensionalizado (sistema natural de coordenadas), conforme Figura 4.1.

Os elementos isoparamétricos são de continuidade C^0 e tem os nós equidistantes. Os elementos de contorno utilizados para a aproximação das equações integrais são elementos isoparamétricos unidimensionais e têm a função de interpolação no ponto nodal $\xi = i$ expressa por

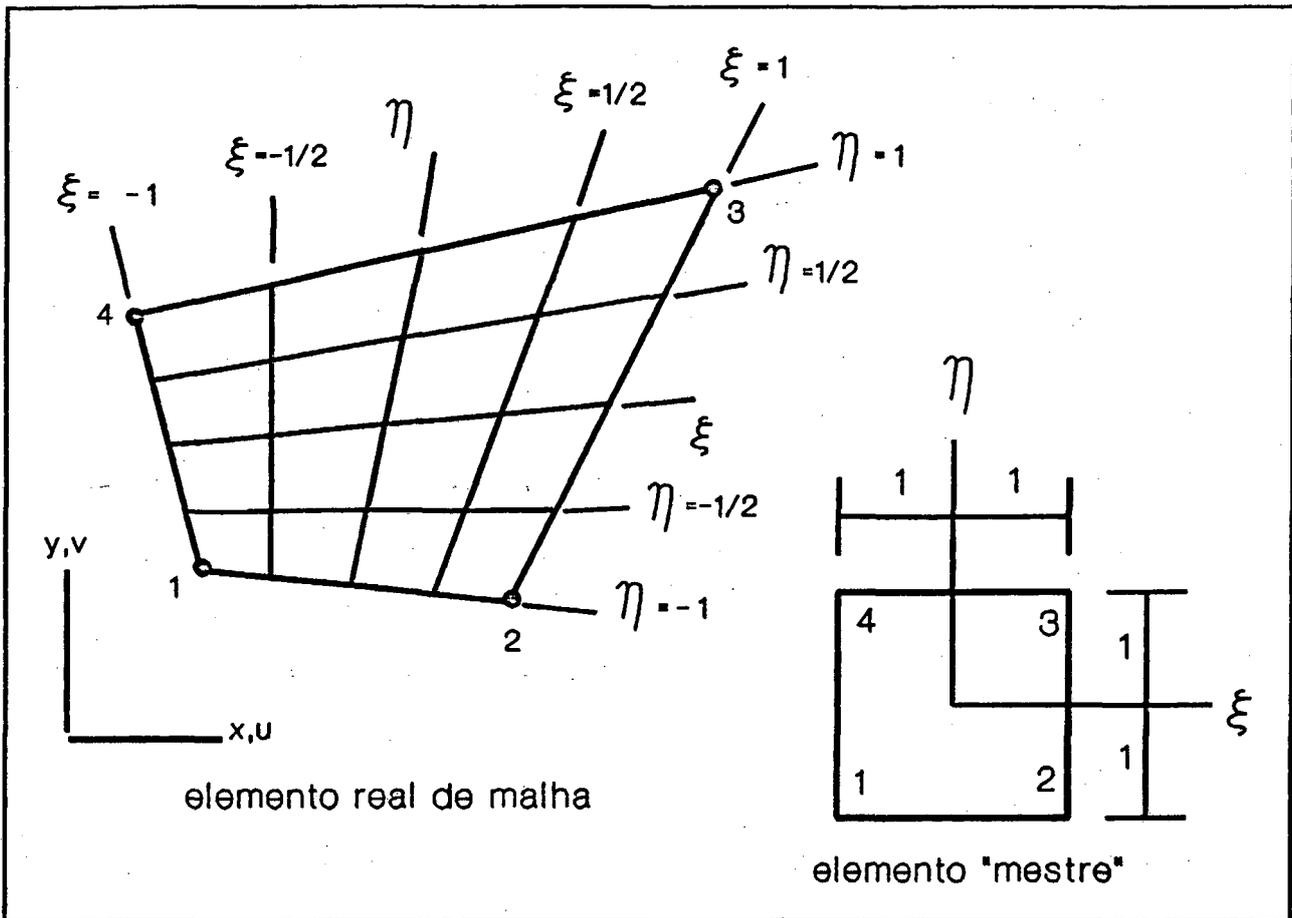


Figura 4.1: Elemento isoparamétrico e elemento "mestre".

$$N_i(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(2j-n-1) - (n-1)\xi}{2(j-i)} \quad (4.1)$$

onde n é o número de nós do elemento e as funções N_i são polinômios de Lagrange de grau $n-1$, em relação à coordenada natural ξ do elemento mestre, conforme Figura 4.2.

Os elementos finitos empregados na discretização do domínio para a obtenção das projeções da função de Green são elementos isoparamétricos quadrangulares e têm a função de interpolação no ponto nodal (ξ, η) expressa por

$$N_{ij}(\xi, \eta) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{(2k-n-1) - (n-1)\xi}{2(k-i)} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n \frac{(2l-n-1) - (n-1)\eta}{2(l-j)} \quad (4.2)$$

onde n é a raiz quadrada do número de nós do elemento (ou o número de nós em cada uma das direções ξ e η) e as funções N_{ij} são produtos de polinômios de Lagrange de grau $n-1$ nas direções ξ e η . A Figura 4.3 mostra um elemento de 2ª ordem.

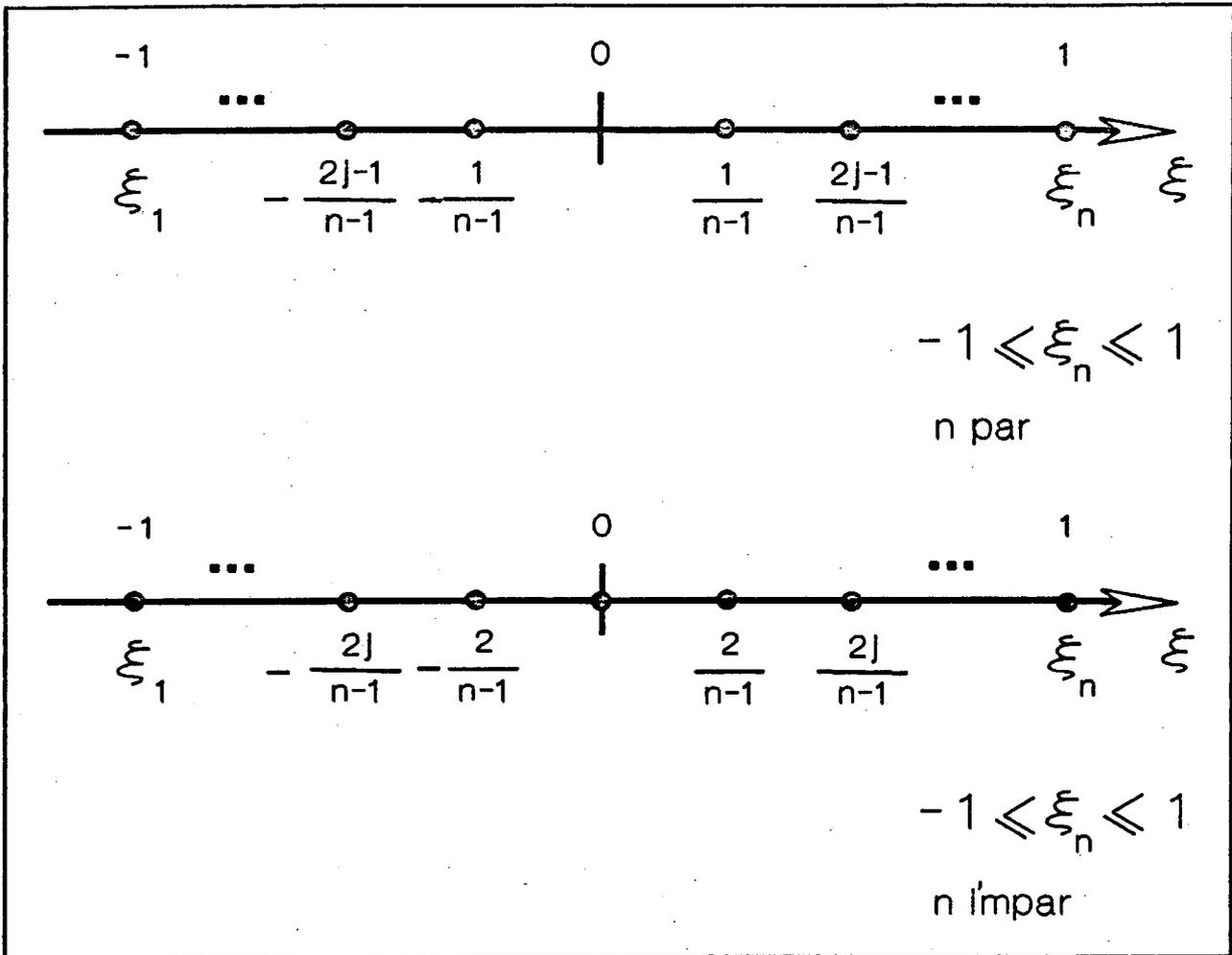


Figura 4.2: Sistema natural de coordenadas unidimensional.

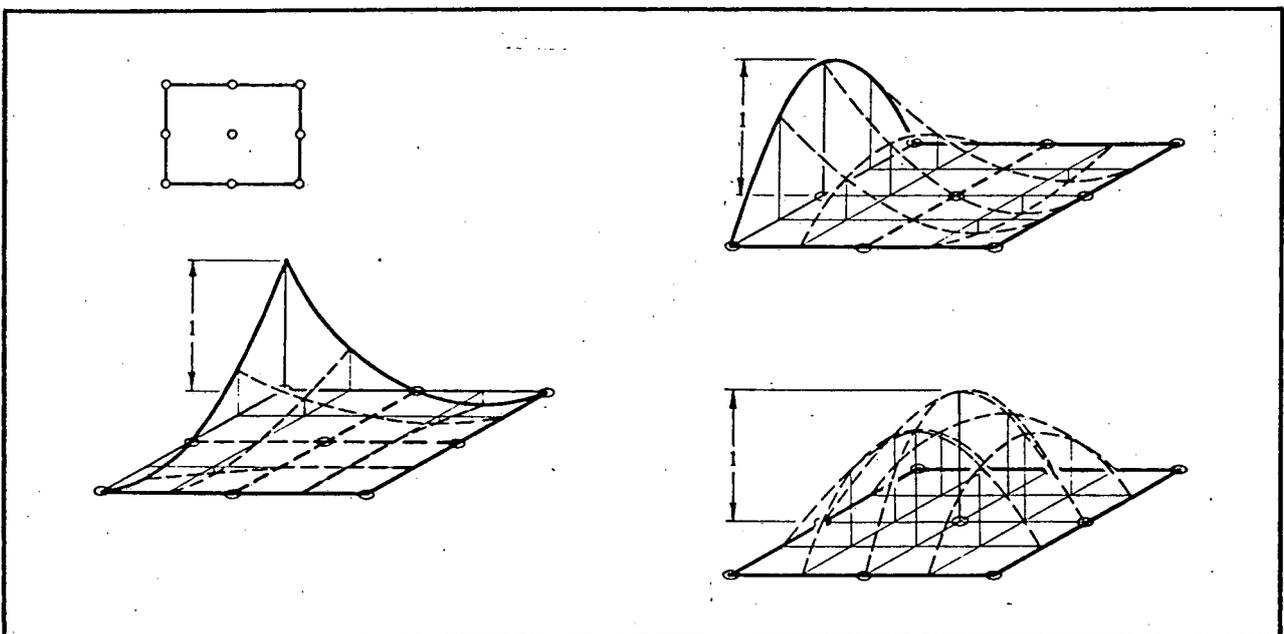


Figura 4.3: Elemento isoparamétrico cuadrático [73].

Tabela 4.1: Elementos Finitos e de Contorno.

Ordem do elemento	Número de nós	
	Elemento finito	Elemento de contorno
1ª ordem	4	2
2ª ordem	9	3
3ª ordem	16	4
4ª ordem	25	5
5ª ordem	36	6
6ª ordem	49	7
7ª ordem	64	8
8ª ordem	81	9
9ª ordem	100	10
10ª ordem	121	11

4.2 O PROBLEMA DE AUTOVALORES / AUTOVETORES

Após equacionado o problema de autovalor/autovetor cabe resolvê-lo por algum método numérico. O método empregado neste trabalho é o Método da Iteração Subespacial, onde se itera sobre subespaços até convergir a um subespaço que contém as melhores aproximações dos modos de vibração de menor energia, correspondendo às menores frequências naturais de vibração. O Método da Iteração Subespacial é um método preciso, porém lento quando um número muito grande de autovalores / autovetores são solicitados.

O equipamento utilizado para a execução do código computacional desenvolvido foi um Intergraph I 200 (Microvax) do Grante/UFSC e um Convex C 210, do NPD/UFSC. O Microvax, pela sua arquitetura, caracteriza-se por ser um equipamento muito preciso, propiciando a obtenção de bons resultados quando se buscou uma análise de convergência de método. O Convex se caracteriza por ter uma grande capacidade de processamento de operações algébricas, mostrando-se muito útil nas situações onde a discretização aplicada ao problema resultava em um número muito grande de equações a serem resolvidas, mas com precisão inferior à do Microvax.

4.3 APLICAÇÕES

4.3.1 Generalidades

As aplicações efetuadas visam, primeiramente, validar o procedimento desenvolvido, e cobrir uma variada gama de geometrias e condições de contorno suscetíveis de ocorrer em situações reais. São resolvidas geometrias simples, a maioria apresentando soluções analíticas, e, também, geometrias menos convencionais, onde não há solução analítica. Os resultados obtidos são comparados com as soluções exatas, sempre que estas existirem, e com soluções aproximadas apresentadas em outros trabalhos.

Portanto, são apresentados resultados para frequências naturais de vibração de membranas elásticas com todas as bordas fixas, que corresponde a condição de contorno de Dirichlet; com algumas bordas fixas e outras livres, condição de contorno mista (as bordas fixas correspondem à condição de contorno de Dirichlet e as livres à condição de contorno de Neumann). Também são apresentadas frequências naturais de ondas em cavidades acusticamente rígidas (impermeáveis ao fluxo sonoro), correspondendo a condições de contorno de Neumann.

Como primeira aplicação, cabe verificar a não dependência paramétrica em relação ao parâmetro arbitrário k_0 , envolvido na formulação, para evitar o surgimento de fluxos fictícios como resultado. A formulação potencial estática já não apresenta esta dependência, que ocorre no método original, no Método da Função de Green Local, desenvolvido por Burns, Horak e Dorning. Portanto, é de se esperar, como realmente acontece, que aqui, na formulação potencial dinâmica, esta dependência não ocorra.

4.3.2 Membranas Elásticas com Bordas Fixas

Apresenta-se, aqui, aplicações do MLGFM para a obtenção das frequências naturais de vibração de membranas elásticas com bordas fixas, representadas pela equação de Helmholtz, sob condições de contorno de Dirichlet homogêneas em todos os nós do contorno. Os resultados mostram a validação do método para esta condição e exprimem sua precisão quando comparados com soluções analíticas e outras soluções numéricas. Os valores para as frequências naturais são expressos em forma adimensionalizada

$$\Omega_{m,n} = \omega a \sqrt{\frac{\rho}{T}} \quad (4.3)$$

em rad/s, ou

$$\Omega_{m,n} = \frac{1}{2\pi} \omega a \sqrt{\frac{\rho}{T}} \quad (4.4)$$

em Hz, onde ω^2 é o autovalor obtido do problema de autovalor/autovetor, a é uma dimensão característica da geometria em questão, ρ é a densidade superficial da membrana e T é a tensão aplicada à membrana. As expressões acima serão empregadas conforme a forma de apresentação dos resultados utilizados para comparação. O erro calculado entre a solução obtida e a solução analítica ou, porventura, outra solução numérica, é obtido na norma l_ω

Aplicação 01: Avaliação da influência do parâmetro k_σ

Considere-se uma membrana elástica retangular, com as bordas fixas, estendendo-se por um domínio $\Omega = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$, conforme Figura 4.4. Os resultados para a primeira e segunda frequências naturais de vibração são apresentados e faz-se uma variação do valor de k_σ de $\pm 10^{-08}$ até $\pm 10^{+08}$, mostrando a pequena ou quase nenhuma alteração dos resultados com a variação de k_σ . Isso mostra a não dependência paramétrica do método. Os valores são mostrados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Verificação da influência do parâmetro k_σ

k_σ	1º autovalor	2º autovalor
$- 10^{+08}$	13,3846242347081	23,7846772463068
$- 10^{+07}$	13,3846242347081	23,7846772463068
$- 10^{+06}$	13,3846242347081	23,7846772463068
$- 10^{+05}$	13,3846242347081	23,7846772463068
$- 10^{+04}$	13,3846242347081	23,7846772463068
$- 10^{+03}$	13,3846242347081	23,7846772463068
$- 10^{+02}$	13,3846242347081	23,7846772463068
$- 10^{+01}$	13,3846242347081	23,7846772463068
$- 10^{+00}$	13,3846242347081	23,7846772463068
$- 10^{-01}$	13,3846242347081	23,7846772463074
$- 10^{-02}$	13,3846242347050	23,7846772463068

k_0	1º autovalor	2º autovalor
$- 10^{-03}$	13,3846242343863	23,7846772463051
$- 10^{-04}$	13,3846242444296	23,7846772463322
$- 10^{-05}$	13,3846261040475	23,7846772458104
$- 10^{-06}$	13,3847560686320	23,7846772463351
$- 10^{-07}$	13,3888469837250	23,7846770108522
$- 10^{-08}$	9,23164030272365	23,7842921641985
10^{-08}	15,9913941873655	23,7516869950405
10^{-07}	13,3905290147836	23,7846770848532
10^{-06}	13,3849902674642	23,7846772450788
10^{-05}	13,3846245230098	23,7846772459941
10^{-04}	13,3846241735049	23,7846772463360
10^{-03}	13,3846242346605	23,7846772463044
10^{-02}	13,3846242347079	23,7846772463067
10^{-01}	13,3846242347080	23,7846772463068
10^{+00}	13,3846242347081	23,7846772463068
10^{+01}	13,3846242347081	23,7846772463068
10^{+02}	13,3846242347081	23,7846772463068
10^{+03}	13,3846242347081	23,7846772463068
10^{+04}	13,3846242347081	23,7846772463068
10^{+05}	13,3846242347081	23,7846772463068
10^{+06}	13,3846242347081	23,7846772463068
10^{+07}	13,3846242347081	23,7846772463068
10^{+08}	13,3846242347081	23,7846772463068

Pela análise dos resultados percebe-se que, realmente, k_0 não pode assumir os valores tendendo a zero. Também, vê-se que valores para k_0 entre -1,0 e +1,0 não são recomendáveis, já que é a faixa de valores onde os resultados apresentam uma ligeira variação. Portanto a formulação potencial dinâmica do MLGFM

para análise modal apresenta mau condicionamento restrito a um pequeno intervalo.

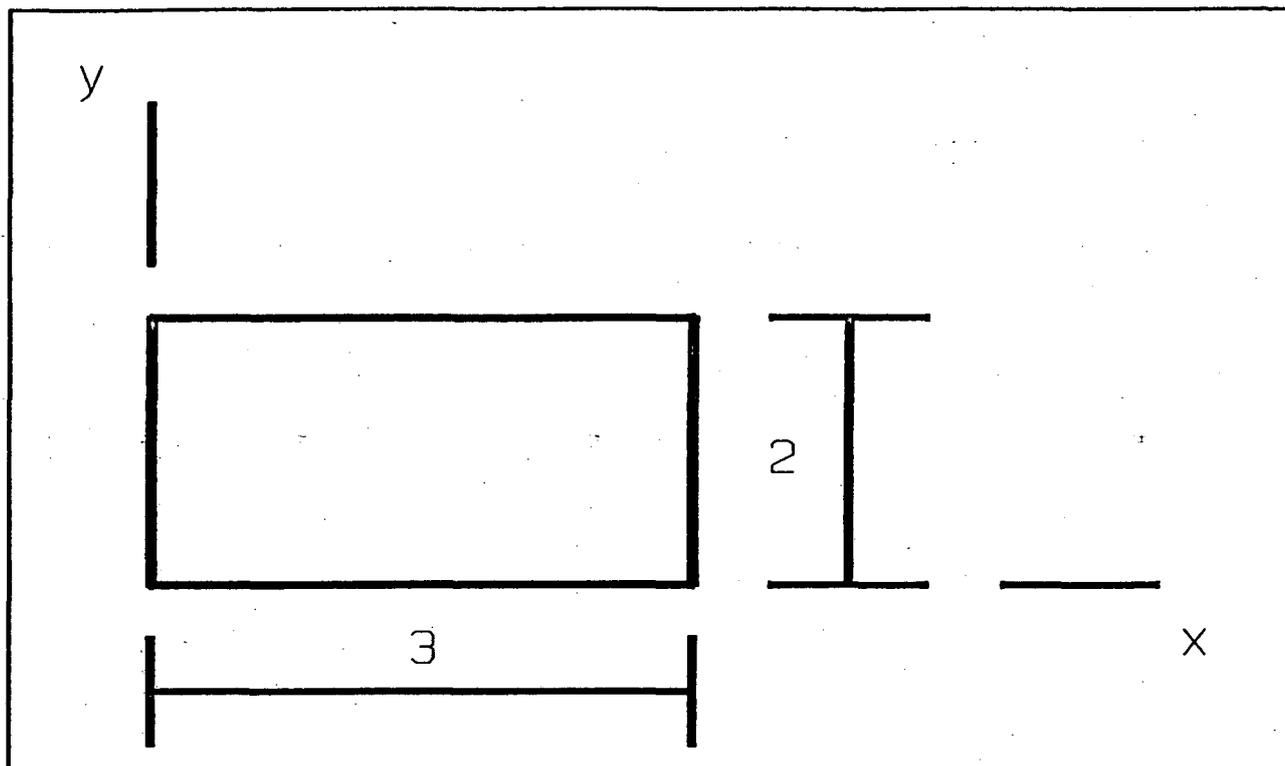


Figura 4.4

Aplicação 02: Avaliação da influência da distorção de malha.

Uma segunda aplicação visa analisar a sensibilidade dos resultados à distorção de malha. Para esta análise considera-se uma membrana elástica quadrada, com as bordas fixas, estendendo-se por um domínio $\Omega = \{(x,y) ; 0 \leq x,y \leq 9\}$, discretizado por três malhas de 3×3 elementos finitos lineares, quadráticos e cúbicos, respectivamente, e elementos de contorno correspondentemente lineares, quadráticos e cúbicos. Em cada malha, promoveu-se uma distorção, girando-se o elemento central de 45° , conforme Figura 4.5. Os resultados são mostrados na Tabela 4.3. Tendo em vista os resultados para as três malhas, uniformes e distorcidas, pode-se afirmar que a formulação é sensível à distorção de malha. Porém esta sensibilidade é diminuída para elementos de maior ordem. Portanto, para geometrias irregulares, onde não se pode evitar a distorção dos elementos, sugere-se o emprego de elementos de ordem mais elevada ou um refino seletivo naquelas regiões onde a distorção é maior.

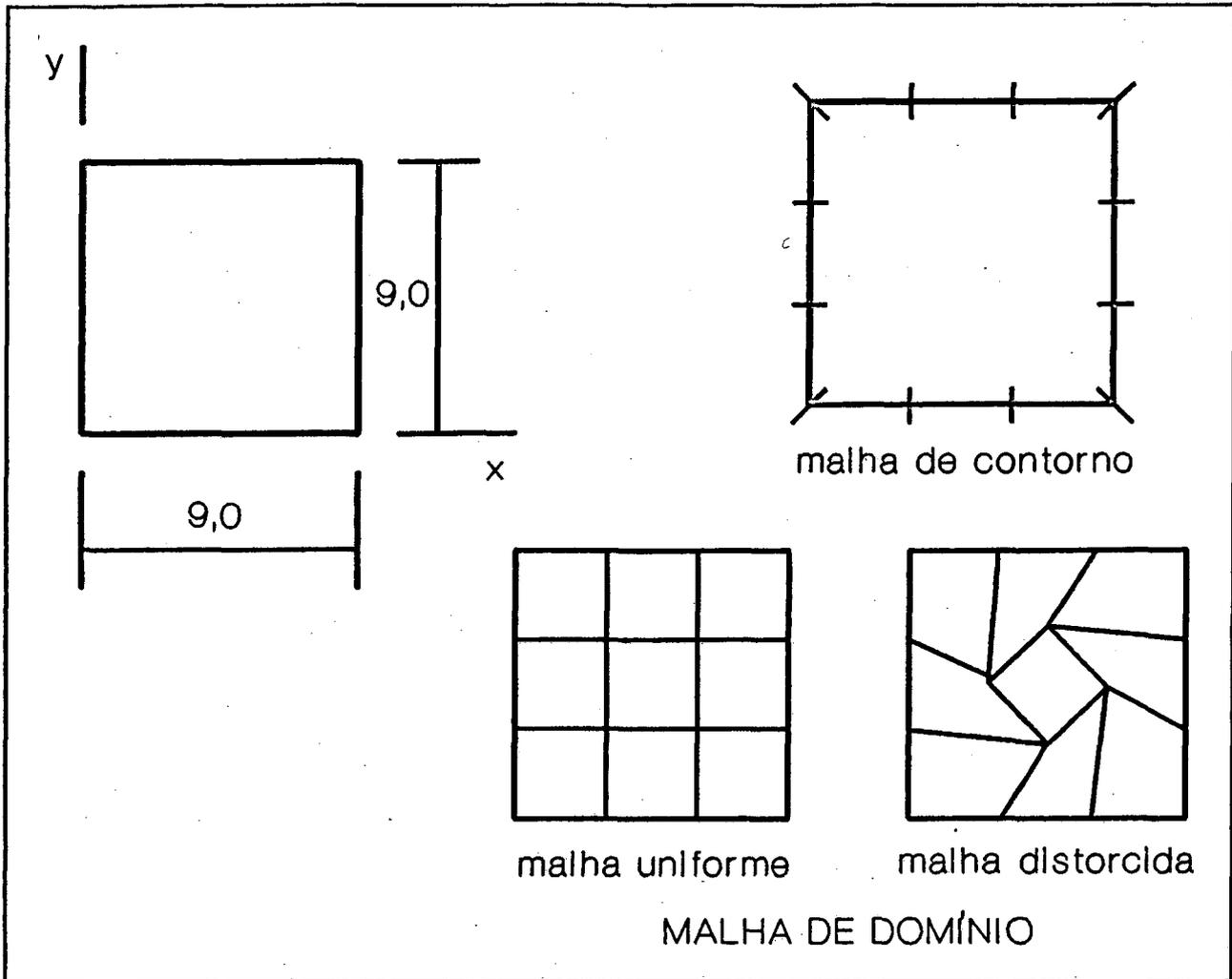


Figura 4.5: Distorção da malha.

Tabela 4.3: Distorção de malha.

malha		1ª frequência (rad/s)		2ª frequência (rad/s)	
		MLGFM	erro (%)	MLGFM	erro (%)
elementos lineares	uniforme	4,64758	4,607	8,04984	14,590
	distorcida	5,04524	13,560	9,74945	38,790
elementos quadráticos	uniforme	4,44639	0,079	7,08719	0,888
	distorcida	4,45306	0,229	7,10583	1,115
elementos cúbicos	uniforme	4,44291	0,000626	7,02684	0,0288
	distorcida	4,44317	0,00656	7,03697	0,173

Aplicação 03: Membrana Retangular.

Resultados numéricos para uma membrana retangular a x b, onde a = [0; 8,5] e b = [0; 12], conforme Figura 4.6, foram obtidos com uma discretização do domínio feita com uma malha de 3 x 4 elementos finitos cúbicos isoparamétricos para o cálculo das projeções da função de Green, e uma malha de 14 elementos de contorno cúbicos isoparamétricos para aproximar as equações integrais. Os resultados são mostrados na Tabela 4.4, sendo comparados com a solução exata,

$$\Omega_{m,n} = \Pi \left[n^2 + m^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.5)$$

com $m, n = 1, 2, 3, \dots$, e com os resultados mostrados por KATSIKADELIS & SAPOUNTZAKIS (1988)[52], obtidos por um método que consiste na determinação numérica da função de Green para a equação de Laplace utilizando o BEM, e, subseqüentemente, na dedução da representação integral da solução do problema, que envolve um potencial desconhecido na integral de domínio. Os resultados estão na forma $\Omega_{m,n} = \omega a (\rho/T)^{1/2}$, onde $a = 8,5$ e $(\rho/T)^{1/2} = 1,0$. O erro é medido em relação à solução analítica, na norma l_∞ . Os 10 primeiros modos de vibração são mostrados nas Figuras 4.7, 4.8 e 4.9.

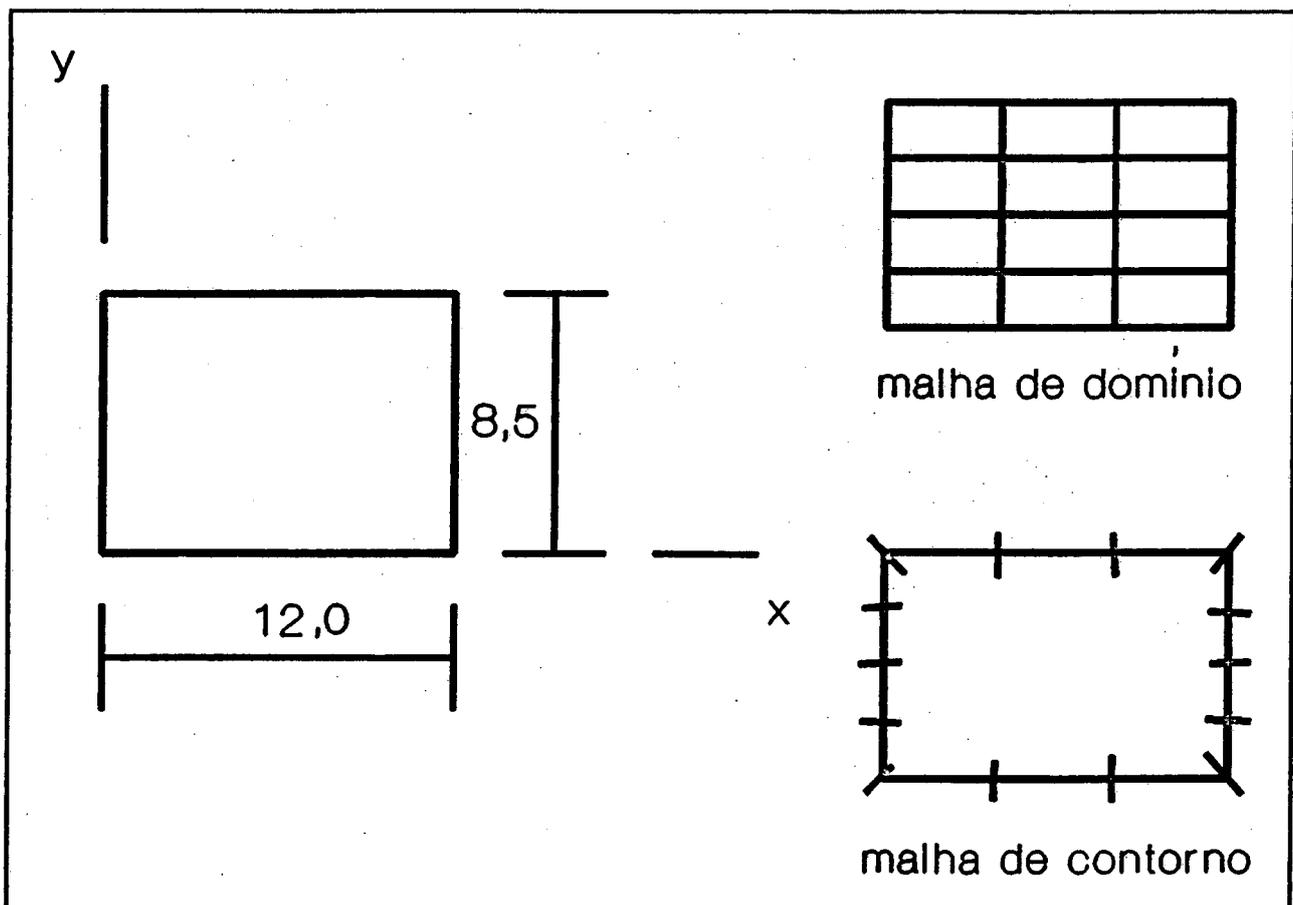


Figura 4.6: Membrana retangular.

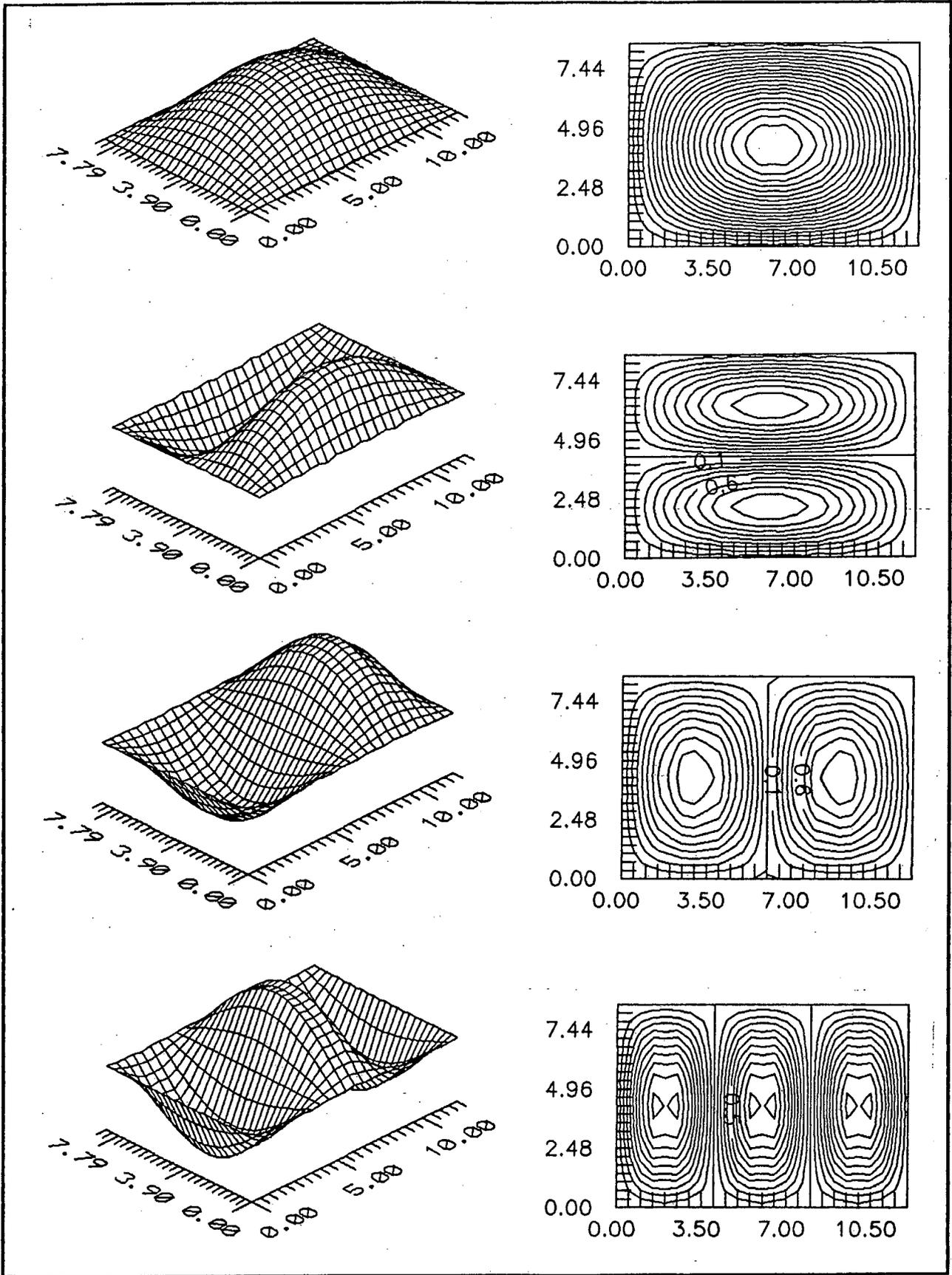


Figura 4.7: Modos 1, 2, 3 e 4 para membrana retangular.

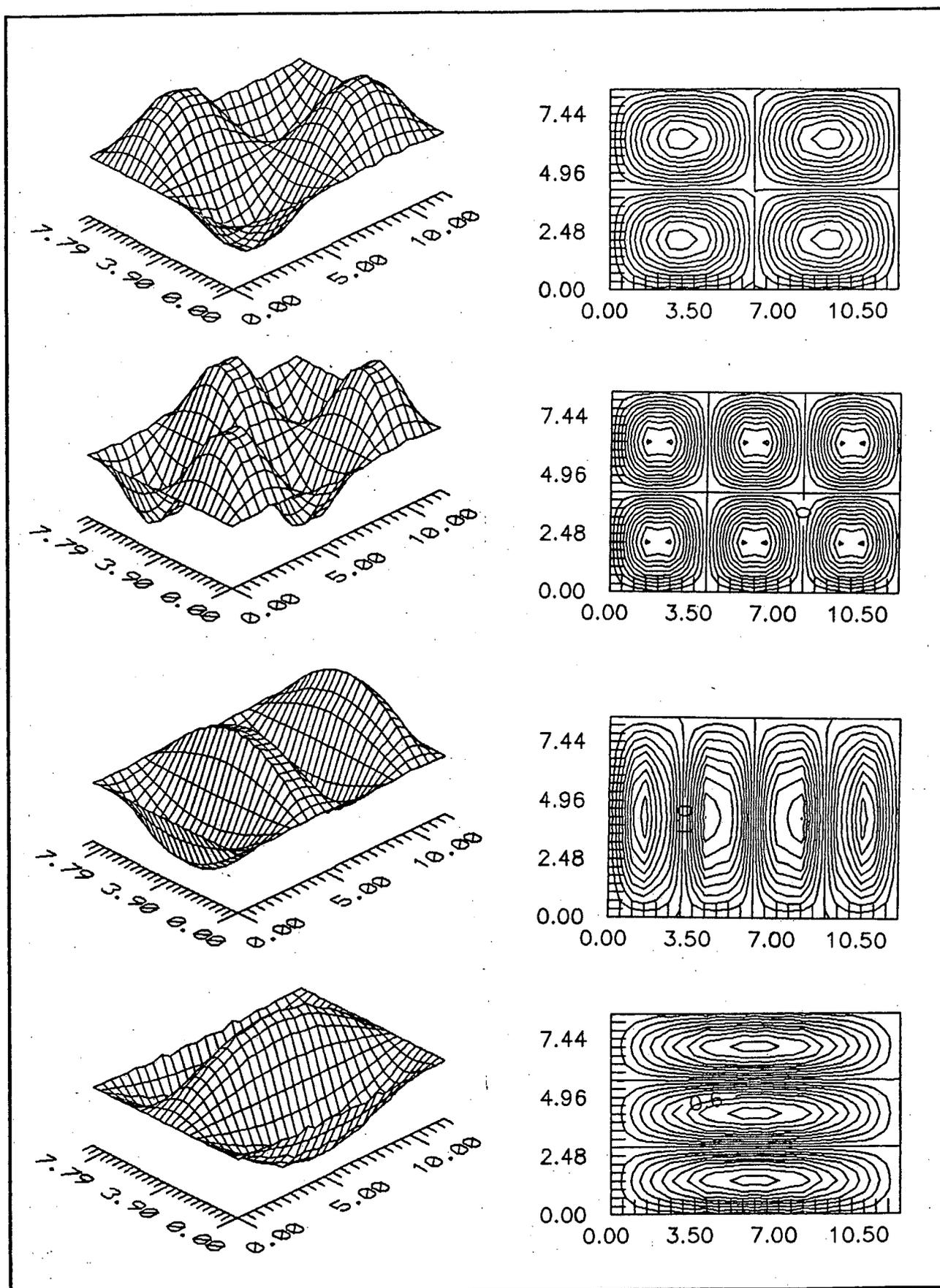


Figura 4.8: Modos 5, 6, 7 e 8 para membrana retangular.

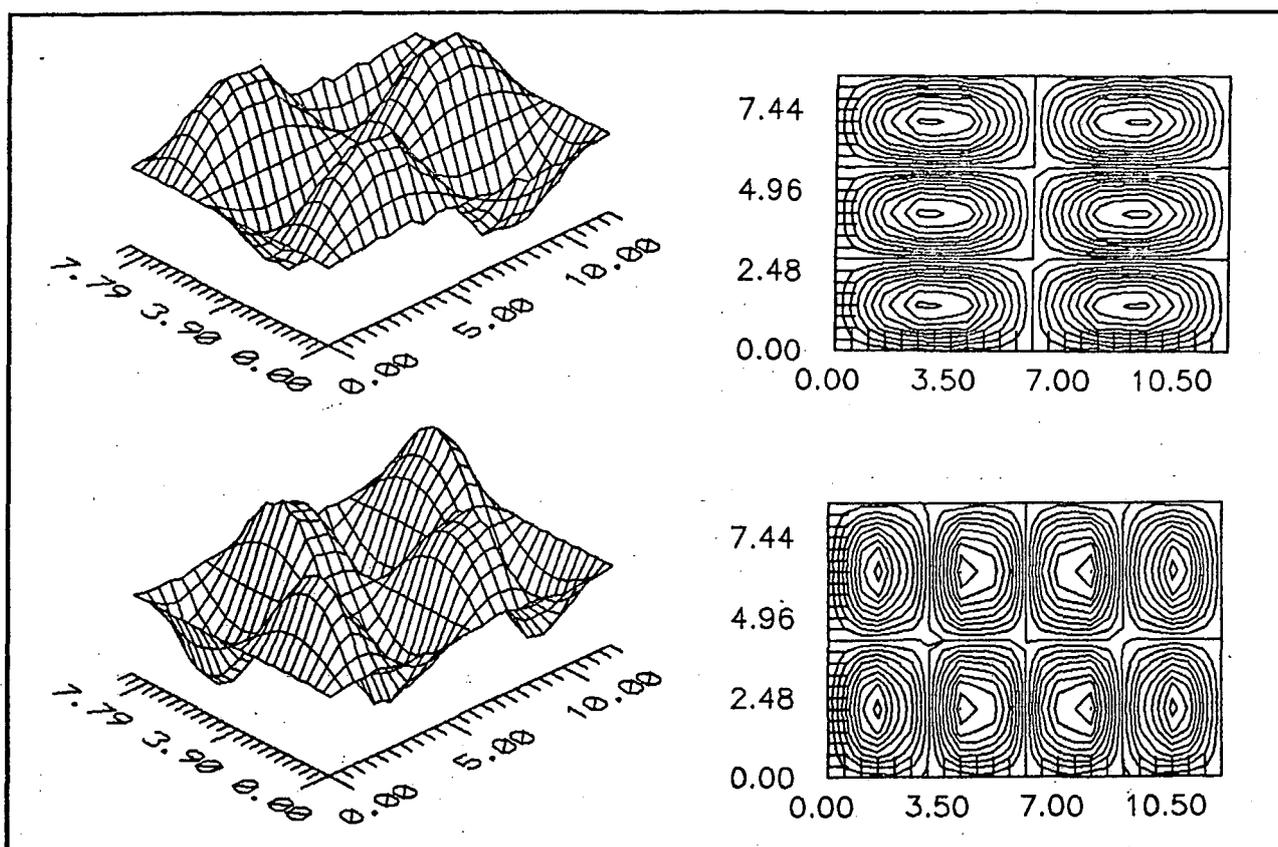


Figura 4.9: Modos 9 e 10 para membrana retangular.

Tabela 4.4: Frequências naturais (rad/s) – membrana retangular.

$\Omega_{m,n}$	analítica	Katsikadelis[52]	MLGFM	erro (%)
$\Omega_{1,1}$	3,850	3,849	3,850	0,0004
$\Omega_{2,1}$	5,448	5,446	5,448	0,0047
$\Omega_{1,2}$	6,666	6,665	6,668	0,0318
$\Omega_{3,1}$	7,378	7,355	7,382	0,0517
$\Omega_{2,2}$	7,700	7,693	7,702	0,0261
$\Omega_{3,2}$	9,168	9,145	9,172	0,0538
$\Omega_{4,1}$	9,439	9,368	9,495	0,5858
$\Omega_{1,3}$	9,684	9,650	9,744	0,6238
$\Omega_{2,3}$	10,423	10,409	10,479	0,5400
$\Omega_{4,2}$	10,895	10,914	10,945	0,4518

Aplicação 04: Membrana em L.

Este problema tem sido usado por vários autores como um caso padrão para testar soluções numéricas, devido ao vértice reentrante. Como o problema não apresenta solução analítica, toma-se como referência os valores calculados por FOX, HENRICI & MOLER (1967) [34], bem como aqueles obtidos por KATSIKADELIS & SAPOUNTZAKIS (1988)[52], com o uso do Método de Elementos de Contorno, por LAVEDEZE & PELLE (1979)[55], e por MILSTED & HUTCHINSON (1974)[60], com o uso de elementos finitos onde o deslocamento transversal de um elemento quadrilateral arbitrário é aproximado por um polinômio de quatro termos mais um número arbitrário de termos trigonométricos (denominado "56T"). A membrana, mostrada na Figura 4.10, tem lados medindo $2a$ de comprimento, já que os resultados são expostos de forma adimensionalizada, $\Omega_n = \omega a(\rho/T)^{1/2}$, com $a=1,0$ e $(\rho/T)^{1/2} = 1,0$, na Tabela 4.5, onde o erro é calculado em relação aos resultados de Fox et alli, na norma l_∞ . A discretização utilizada foi de 3 elementos finitos quárticos isoparamétricos para o domínio e 8 elementos de contorno quárticos isoparamétricos.

Tabela 4.5: Frequências naturais (rad/s) - membrana em L

Ω_n	Fox	Katsikadelis	Lavedeze	Milsted	MLGFM	erro (%)
Ω_1	3,1048	3,101	3,110	3,1147	3,1100	0,1677
Ω_2	3,8984	3,896	3,885	3,8996	3,8988	0,0121
Ω_3	4,4429	4,438	4,430	4,4428	4,4432	0,0068
Ω_4	5,4334	5,423	5,460	5,4401	5,4366	0,0588
Ω_5	5,6491	5,617	5,695	5,6660	5,6619	0,2256
Ω_6	6,4401	6,399	6,435	6,4498	6,4741	0,5278
Ω_7	6,7044	6,677	6,640	6,7074	6,7471	0,6379
Ω_8	7,0248	7,020	7,085	7,0248	7,0619	0,5284
Ω_9	7,0248	7,051	7,085	7,0248	7,0619	0,5284
Ω_{10}	7,5306	7,486	7,730	7,5419	7,5637	0,4400

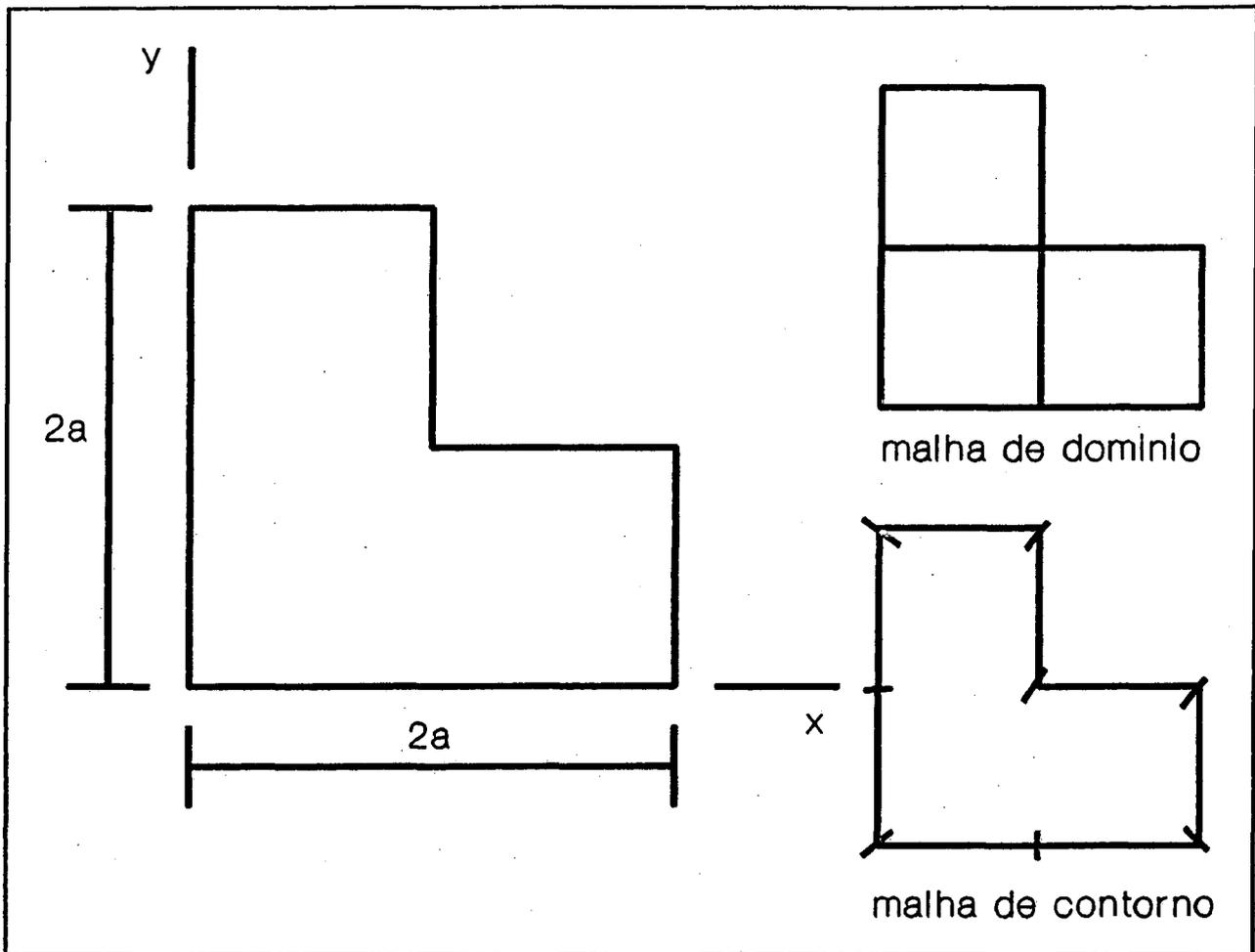


Figura 4.10: Membrana em " L ".

Aplicação 05: Membrana Elíptica.

Resultados numéricos obtidos para uma membrana elíptica com relação entre semi-eixos $b/a = 1,6$, conforme Figura 4.11, são comparados com os resultados obtidos por KATSIKADELIS & SAPOUNTZAKIS (1988)[52]. A partição do domínio foi efetuada com 12 elementos finitos quárticos isoparamétricos de 25 nós, e a de contorno com 8 elementos de contorno quárticos isoparamétricos de 5 nós. Os resultados, mostrados na Tabela 4.6, são postos na forma $\Omega_n = \omega a(\rho/T)^{1/2}$, onde, aqui, $a = 5,0$ e $(\rho/T)^{1/2} = 1,0$.

Tabela 4.6: Membrana elíptica.

Ω_n	Katsikadelis [51]	MLGFM
Ω_1	1,9988	1,9992
Ω_2	2,8078	2,8094
Ω_3	3,5132	3,5137
Ω_4	3,6609	3,6692
Ω_5	4,2462	4,2486
Ω_6	4,5373	4,5544
Ω_7	5,0194	5,0214
Ω_8	5,0380	5,0732

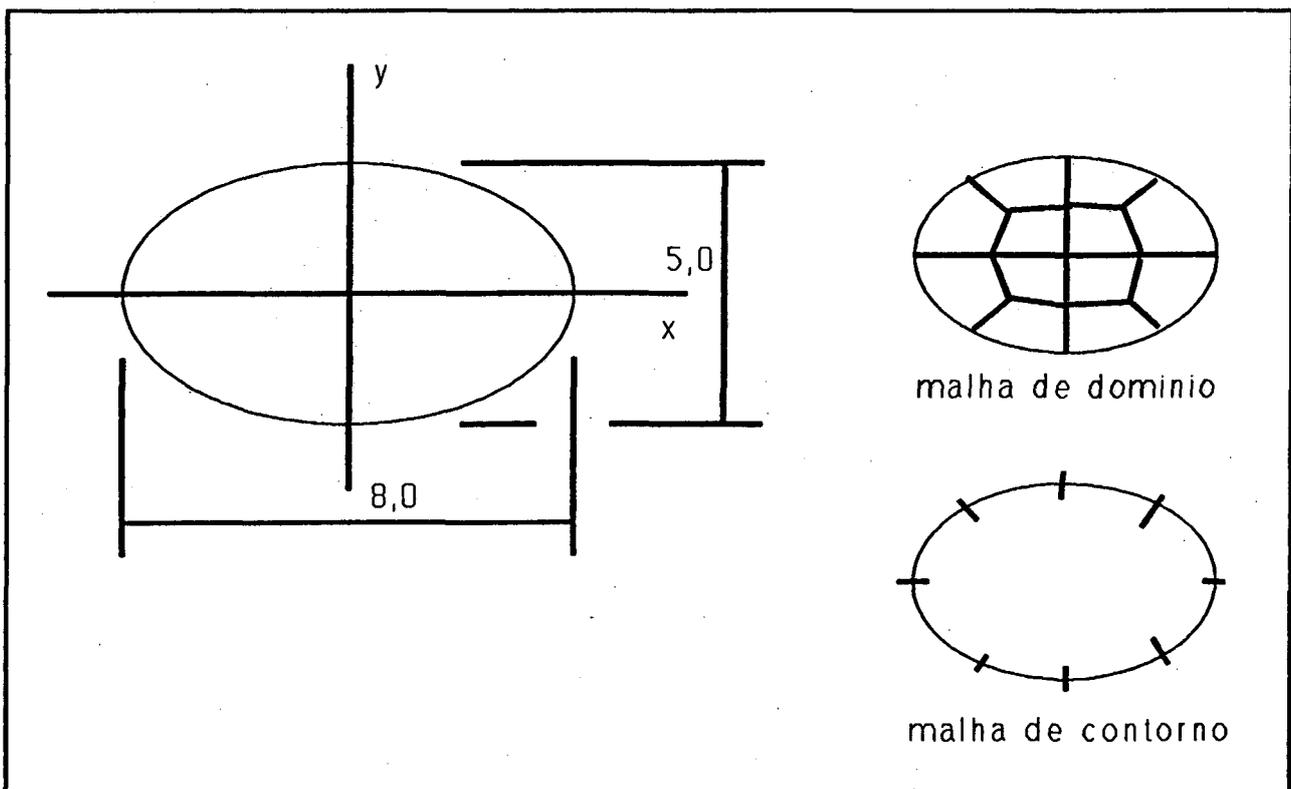


Figura 4.11: Membrana elíptica.

Aplicação 06: Membrana em " H " .

A análise pelo método dos elementos finitos de uma membrana em forma de "H", conforme mostra a Figura 4.12, é difícil devido aos quatro cantos reentrantes que impedem a correta estimativa das frequências naturais. MILSTED & HUTCHINSON (1974) [60] fornecem valores para as três menores frequências correspondentes a modos apresentando simetria com respeito aos eixos coordenados que passam pelo centro da membrana, e comparando-os com aqueles obtidos por DONNELLY (1969)[28]. Milsted e Hutchinson utilizam o FEM onde o deslocamento transversal de um elemento quadrilátero arbitrário é aproximado por um polinômio de quatro termos mais um número arbitrário de termos trigonométricos. O problema é aqui resolvido utilizando-se duas malhas de 7 elementos: uma com elementos finitos cúbicos isoparamétricos para aproximar a Função de Green e 16 elementos de contorno cúbicos isoparamétrico para discretizar as equações integrais; outra com elementos finitos quárticos isoparamétricos e, também, 16 elementos de contorno quárticos. Não é utilizada a técnica de nós duplos nos cantos. Os resultados são apresentados na Tabela 4.7, onde $a = 1,0$ e $(\rho/T)^{\frac{1}{2}} = 1,0$.

Tabela 4.7: Membrana em forma de "H" (rad/s).

Ω_n	DONNELLY	MILSTED	MLGFM (4°)	MLGFM (3°)
Ω_1	7,7330	7,7842	7,7809	7,8859
Ω_2	8,5517	-	8,5965	8,6997
Ω_3	13,9276	-	13,9615	14,0889
Ω_4	13,9316	-	13,9650	14,0992
Ω_5	14,305	14,320	14,3112	14,5991
Ω_6	-	-	17,7196	18,0202
Ω_7	19,739	19,751	19,7395	20,0000
Ω_8	-	-	24,8866	25,5800
Ω_9	-	-	26,5179	27,0626
Ω_{10}	-	-	26,5545	27,0988

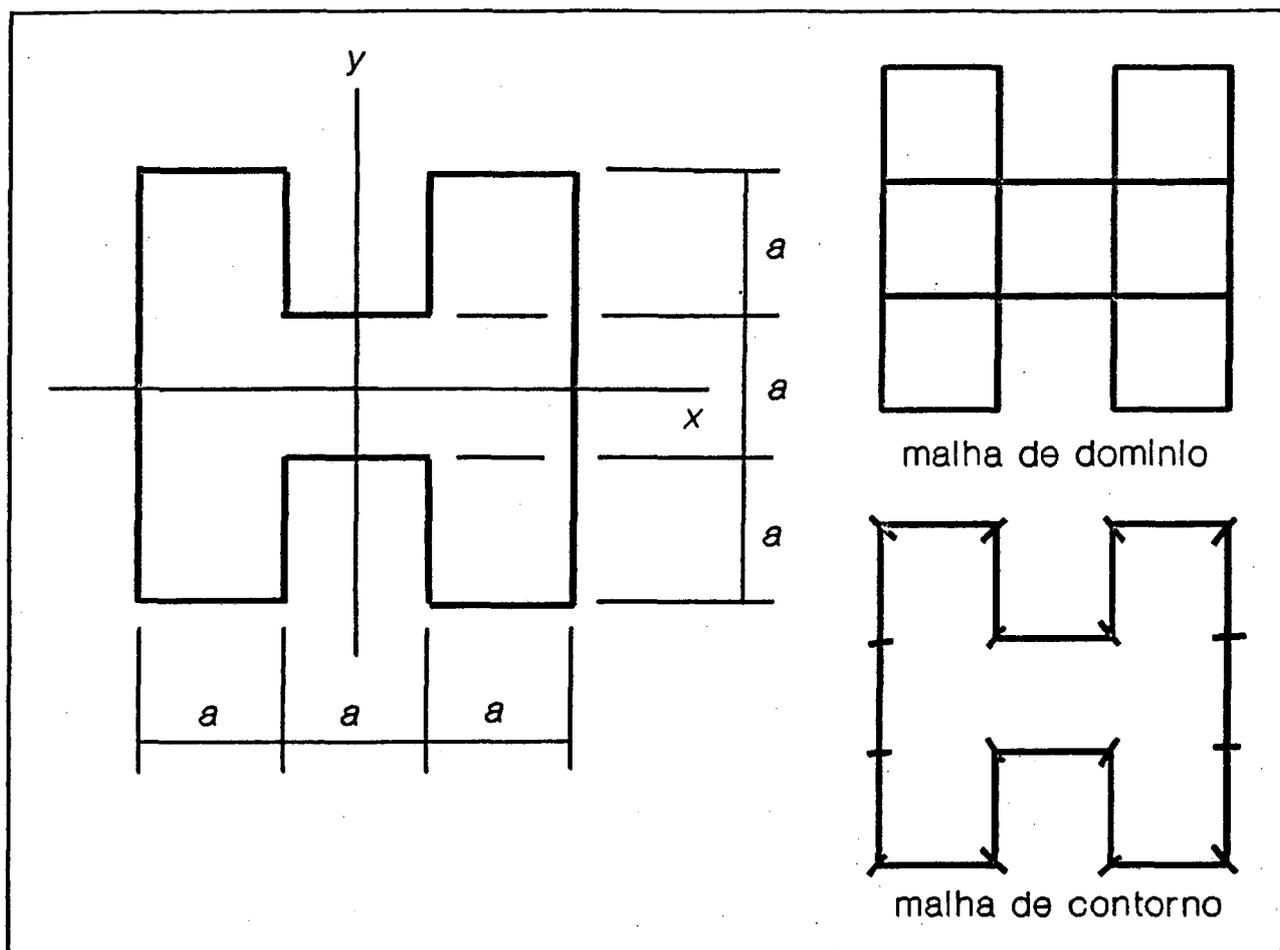


Figura 4.12: Membrana em "H".

Aplicação 07: Membrana circular.

Uma membrana circular definida por pontos $p \equiv (x,y) \in \Omega \equiv (x^2 + y^2 < 144)$ e $p \equiv (x,y) \in \partial\Omega \equiv (x^2 + y^2 = 144)$, foi discretizada por 12 elementos finitos quadráticos e por 8 elementos de contorno quadráticos. Adotou-se $\rho/T = 1,0$ e $a=12,0$; a solução analítica é

$$\omega_{nm} = \beta_{nm} \sqrt{\frac{\rho}{T}} \quad (4.6)$$

onde β_{nm} são os zeros das funções de Bessel J_m . Os resultados são comparados com a solução analítica e com aqueles apresentados por KATSIKADELIS & SAPOUNTZAKIS (1988)[52], que emprega o Método de Elementos de Contorno utilizando quatro setores, cada qual empregando 80 elementos de contorno e 25 pontos de Gauss - Radau para computar as integrais de domínio, e com os resultados apresentados por MILSTED & HUTCHINSON (1974)[60], que empregaram elementos finitos quadrangulares com termos

trigonométricos e elementos de contorno para melhor modelar o domínio circular. Os resultados são apresentados na Tabela 4.8, com os erros calculados em relação à solução analítica. A Figura 4.13 ilustra o domínio circular.

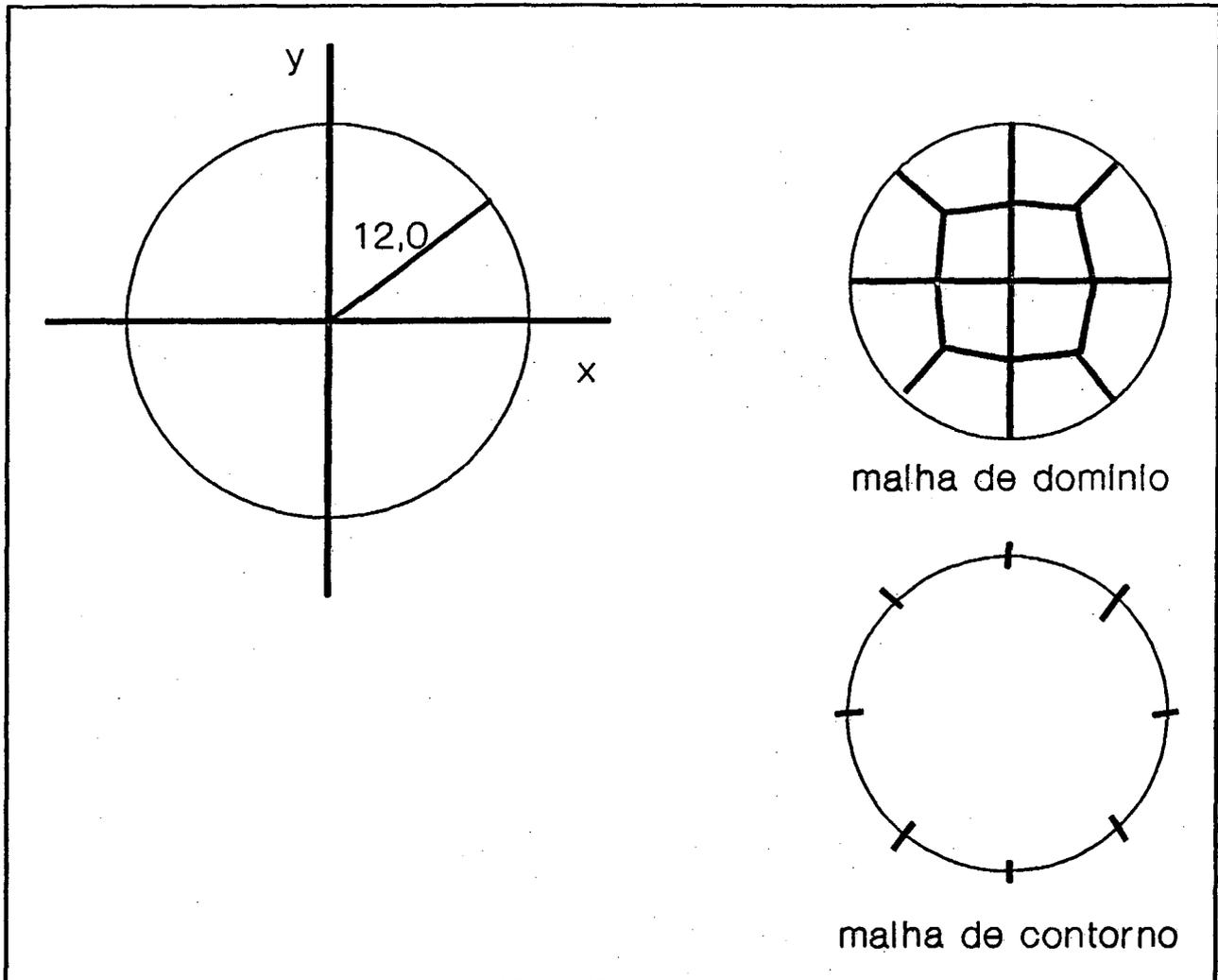


Figura 4.13: Membrana circular.

Tabela 4.8: Membrana circular (rad/s).

$\Omega_{m,n}$	analítica	Milsted	Katsikadelis	MLGFM	erro (%)
$\Omega_{0,1}$	2,40482	2,418	2,4040	2,40492	0,00416
$\Omega_{1,1}$	3,83171	3,818	3,8317	3,83184	0,00339
$\Omega_{1,1}$	3,83171	3,818	-	3,83184	0,00339
$\Omega_{2,1}$	5,13562	4,975	5,1316	5,13605	0,00837

$\Omega_{m,n}$	analítica	Milsted	Katsikadelis	MLGFM	erro (%)
$\Omega_{2,1}$	5,13562	5,189	-	5,13615	0,01032
$\Omega_{0,2}$	5,52007	5,584	5,4901	5,52038	0,00561
$\Omega_{3,1}$	6,38016	6,460	6,3583	6,38162	0,02288
$\Omega_{3,1}$	6,38016	6,460	-	6,38162	0,02288
$\Omega_{1,2}$	7,01559	7,129	6,9616	7,01608	0,00698
$\Omega_{1,2}$	7,01559	7,129	-	7,01608	0,00698

Aplicação 08: Membrana Quadrada.

Um bom método para a solução de problemas de autovalor / autovetor deve ser capaz de captar autovalores duplos. Para verificar a capacidade do método de solução do problema de autovalor utilizado, Método da Iteração Subespacial, resolve-se o problema de uma membrana quadrada definida sobre o domínio $\Omega_c = [0,1] \times [0,1]$. Uma membrana quadrada apresenta frequências naturais aos pares. Foi efetuada uma discretização com uma malha composta de 2×2 elementos finitos quárticos e 8 elementos de contorno quárticos. Os valores para os parâmetros da membrana são $\rho/T = 1,0$ e $a = 1,0$. A solução analítica é

$$\Omega_{n,m} = \sqrt{\frac{\rho}{T}} \pi (n^2 + m^2)^{1/2} \quad (4.7)$$

Os resultados são comparados com a solução analítica e com resultados numéricos apresentados por LAVEZE & PELLE (1989)[55], que utilizaram 400 elementos finitos triangulares para a formação da malha. Os erros são calculados em relação à solução analítica na norma l_∞ . Os valores são mostrados na Tabela 4.9 e a geometria na Figura 4.14. Os 10 primeiros modos de vibração são mostrados nas Figuras 4.15, 4.16 .

Tabela 4.9: Membrana quadrada (rad/s).

$\Omega_{m,n}$	analítica	LAVEZE	MLGFM	erro (%)
$\Omega_{1,1}$	0,70711	0,707	0,70711	0,000065
$\Omega_{2,1}$	1,11803	1,114	1,11804	0,000599

$\Omega_{m,n}$	analítica	LAVEDEZE	MLGFM	erro (%)
$\Omega_{1,2}$	1,11803	1,114	1,11804	0,000599
$\Omega_{2,2}$	1,41421	1,409	1,41422	0,000732
$\Omega_{3,1}$	1,58114	1,576	1,58482	0,2330
$\Omega_{1,3}$	1,58114	1,577	1,58482	0,2330
$\Omega_{3,2}$	1,80277	1,794	1,80601	0,1795
$\Omega_{2,3}$	1,80277	1,794	1,80601	0,1795
$\Omega_{4,1}$	2,06155	2,053	2,12261	2,9619
$\Omega_{1,4}$	2,06155	2,053	2,12261	2,9619

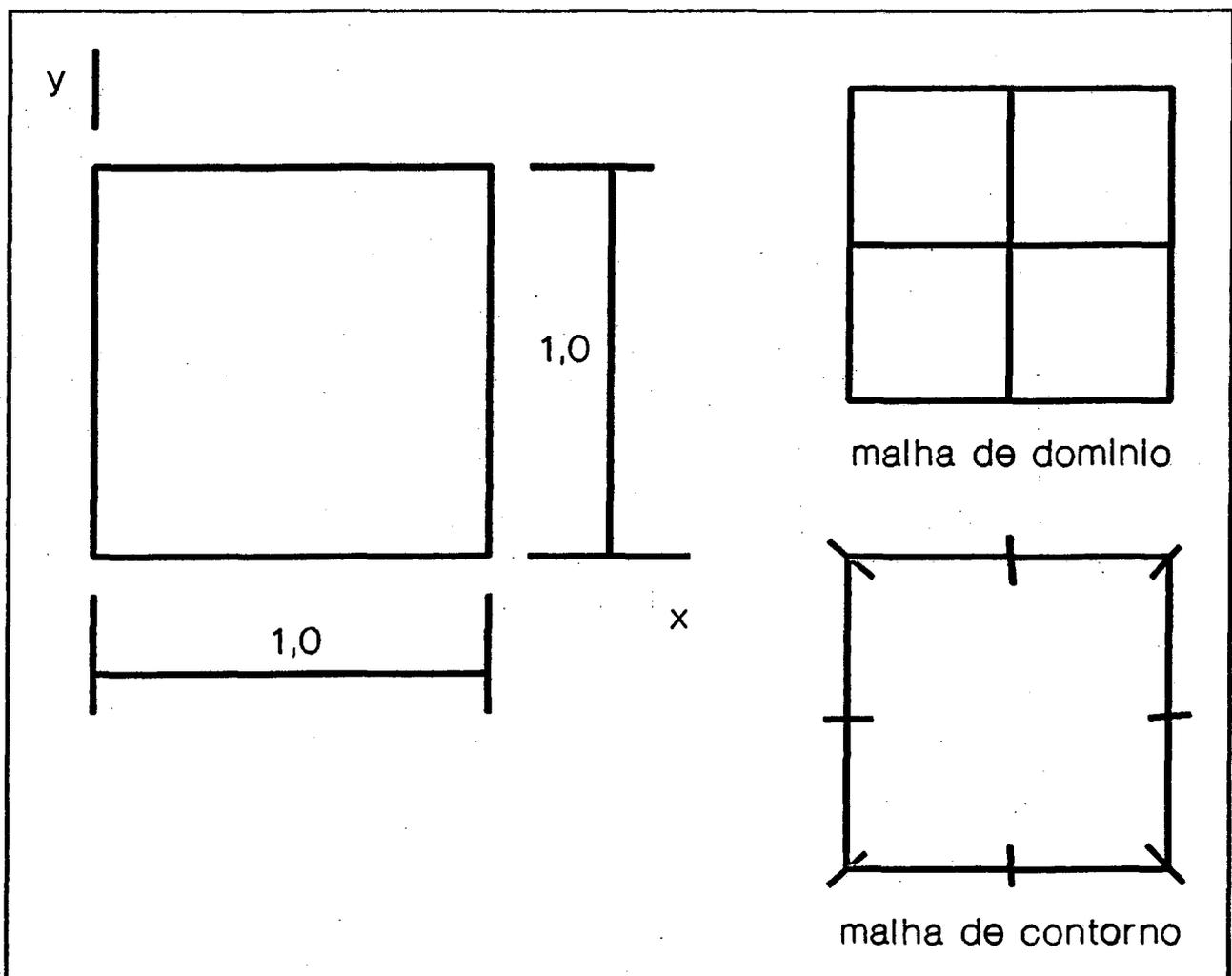


Figura 4.14: Membrana quadrada.

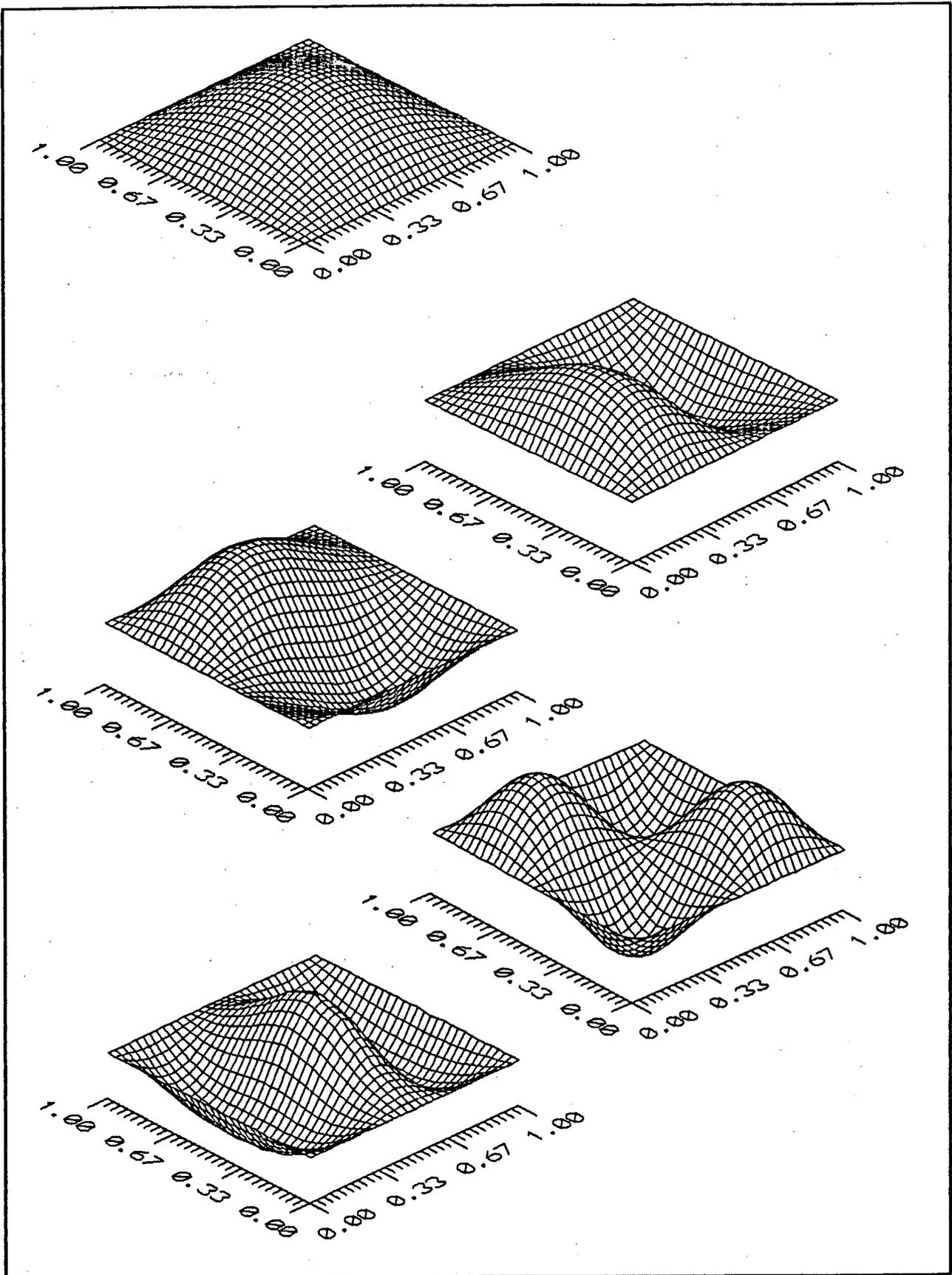


Figura 4.15: Modos 1, 2, 3, 4 e 5 para membrana quadrada.

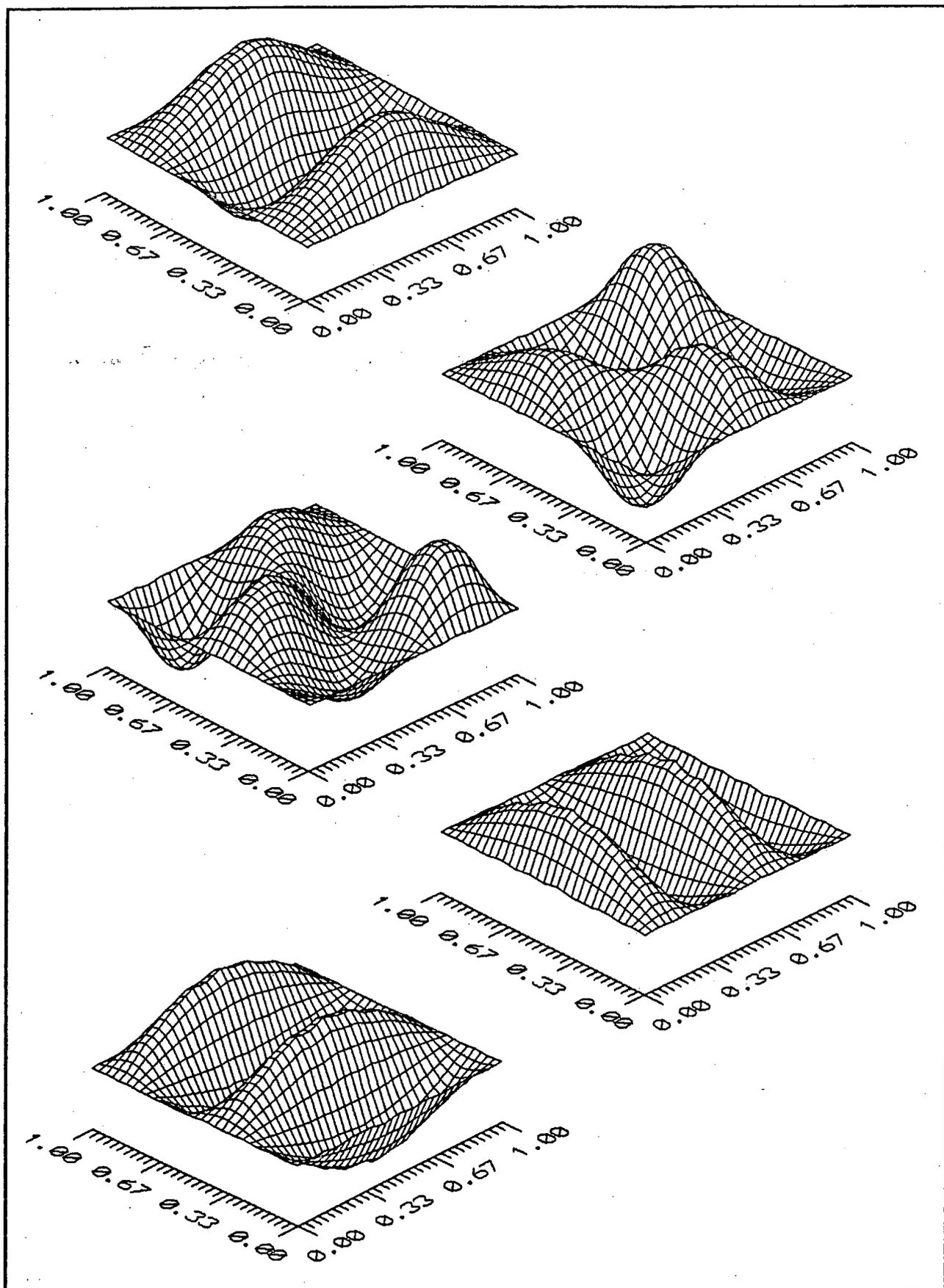


Figura 4.16: Modos 6, 7, 8, 9 e 10 para membrana quadrada.

Aplicação 09: Membrana Triangular.

Resultados numéricos para a membrana triangular mostrada na Figura 4.17 foram obtidos pela discretização do domínio com duas malhas: uma composta por 7 elementos finitos cúbicos e outra com 7 elementos finitos quárticos. Elementos de contorno correspondentes são utilizados. Os resultados são colocados na Tabela 4.10 onde são comparados com valores tomados como exatos computados a partir de uma forma fechada por MORSE & FESHBACH (1953)[61], bem como com resultados numéricos obtidos por Milsted & Hutchinson, por técnicas já mencionadas, empregando uma malha com 61 pontos nodais, e por Katsikadelis & Sapountzakis, pela técnica de elemento de contorno, utilizando 6 setores (células de domínio). Os resultados aqui obtidos mostram-se aceitáveis para aplicações práticas, porém são piores que aqueles obtidos pelo Método de Elementos Finitos ou de Elementos de Contorno. Este fato é explicado pela grande distorção da malha quando se emprega elementos quadrangulares para aproximar um domínio triangular, visto que a formulação apresenta sensibilidade a grandes distorções de malha. Portanto, resultados melhores poderiam ter sido obtidos com o emprego de elementos de maior ordem, como já mencionado.

Tabela 4.10: Membrana triangular (rad/s).

$\Omega_{m,n}$	exato	MILSTED	KATSIKADELIS	MLGFM (3°)	MLGFM (4°)
$\Omega_{1,1}$	7,024	7,031	7,024	7,0428	7,0146
$\Omega_{2,1}$	9,934	9,994	9,932	9,9724	10,0653
$\Omega_{1,2}$	11,327	11,342	11,324	11,3894	11,4433
$\Omega_{3,1}$	12,953	12,998	12,929	13,1564	13,0460
$\Omega_{2,2}$	14,049	14,110	13,989	14,2308	14,2945
$\Omega_{1,3}$	15,708	15,791	15,632	15,9874	15,8274
$\Omega_{4,1}$	16,019	16,054	15,852	16,4357	16,2697
$\Omega_{3,2}$	16,918	17,148	16,736	17,4903	17,3637
$\Omega_{2,3}$	18,318	18,522	18,261	18,9689	18,8111
$\Omega_{5,1}$	19,120	19,610	19,048	19,7624	19,5331

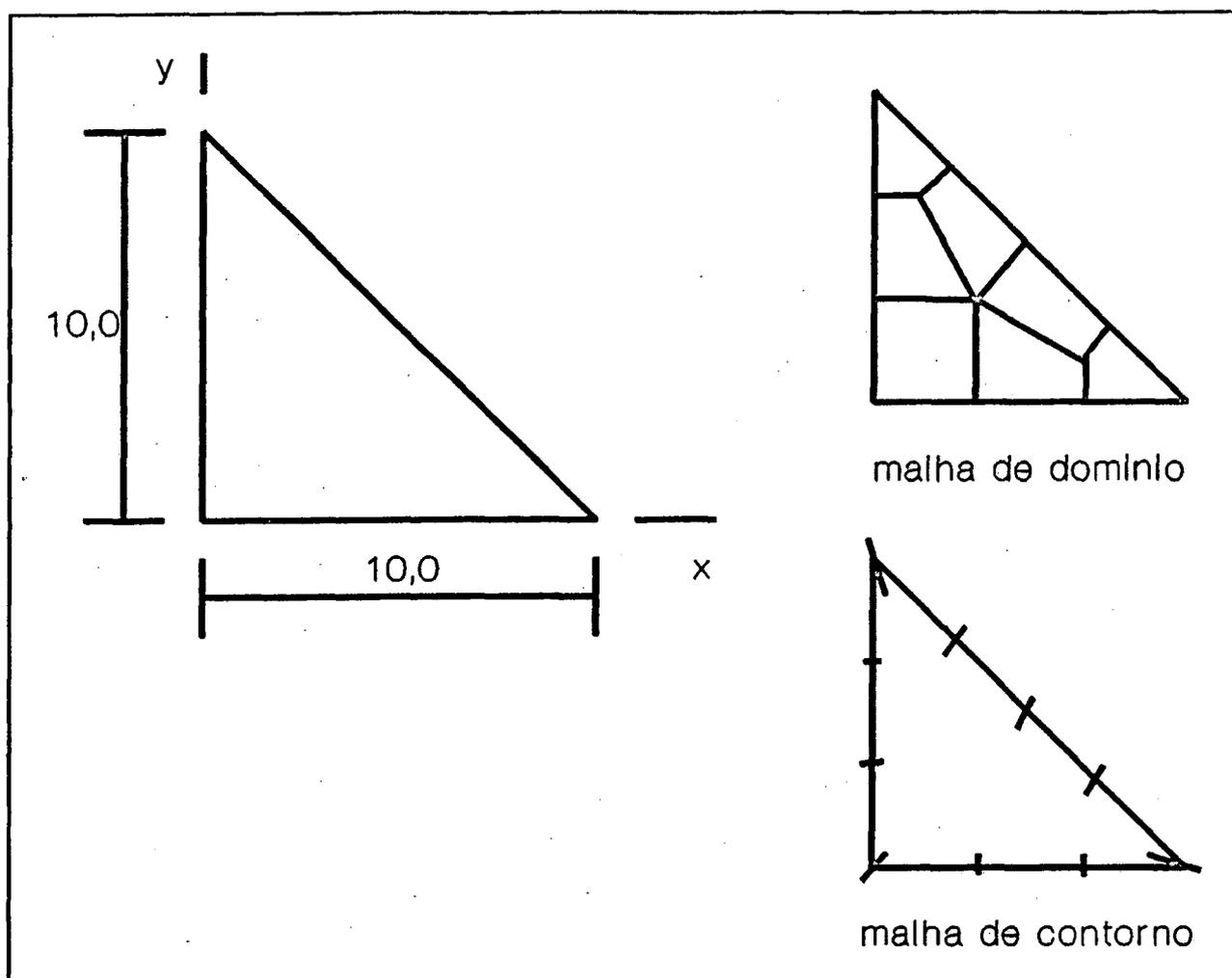


Figura 4.17: Membrana triangular.

Aplicação 10: Membrana rômbrica.

Resultados numéricos para os autovalores de uma membrana rômbrica foram obtidos com a discretização do domínio com apenas um elemento finito de oitava ordem (81 nós) e quatro elementos de contorno, também de oitava ordem. Foram consideradas cinco geometrias que se diferenciam pelo valor do ângulo θ , medido entre o eixo y e o lado do losango, conforme a Figura 4.18. O lado do losango mede 1,0 unidade de comprimento e o ângulo θ assume os valores 15° , 30° , 45° , 60° e 75° . Os valores calculados são comparados com alguns resultados obtidos por STADTER (1966) [72] que utilizou o método desenvolvido por Fox [34] para a obtenção de aproximações superiores e inferiores para os autovalores de uma membrana rômbrica sob vibração livre. Os valores apresentados por Stadter correspondem aos modos com simetria em relação ao centro da membrana. Os autovalores são apresentados nas Tabelas 4.11, 4.12, 4.13, 4.14 e 4.15, na forma λ/π^2 .

Tabela 4.11: Autovalores de membrana rômica com $\theta = 15^\circ$ (rad/s).

λ/π^2	STADTER		MLGFM
	inferior	superior	
1	2,1137	2,1163	2,1144
2	-	-	4,8841
3	-	-	5,6848
4	7,9960	8,0286	8,0088
5	-	-	10,5384
6	11,018	11,072	11,0332
7	-	-	12,2099
8	-	-	14,5924
9	17,036	17,225	17,1705
10	-	-	18,3307
11	-	-	18,6973
12	-	-	20,9559
13	-	-	22,8020
14	-	-	23,2124
15	-	-	27,7221
16	-	-	28,7156

Tabela 4.12: Autovalores de membrana rômica com $\theta = 30^\circ$ (rad/s).

λ/π^2	STADTER		MLGFM
	inferior	superior	
1	2,5210	2,5307	2,5228
2	-	-	5,3333
3	-	-	7,2662

λ/π^2	STADTER		MLGFM
	inferior	superior	
4	8,4807	8,5365	8,4940
5	-	-	12,4506
6	-	-	12,4531
7	14,186	14,416	14,2336
8	-	-	17,2528
9	17,076	17,340	17,2935
10	-	-	21,6141
11	-	-	23,8084
12	-	-	23,8157
13	-	-	24,0523
14	26,620	27,896	27,8126
15	-	-	31,7349
16	-	-	32,0346

Tabela 4.13: Autovalores de membrana rômica com $\theta = 45^\circ$ (rad/s).

λ/π^2	STADTER		MLGFM
	inferior	superior	
1	3,5170	3,5491	3,5211
2	-	-	6,7153
3	10,143	10,257	10,1596
4	-	-	10,8491
5	-	-	14,3014
6	-	-	17,0985
7	-	-	18,9603

λ/π^2	STADTER		MLGFM
	inferior	superior	
8	22,039	22,631	22,2555
9	-	-	23,1889
10	-	-	25,1367
11	29,541	32,971	31,4235
12	-	-	33,0647
13	-	-	33,2824
14	-	-	36,7998
15	-	-	43,7961
16	-	-	44,7881

Tabela 4.14: Autovalores de membrana rômica com $\theta = 60^\circ$ (rad/s).

λ/π^2	STADTER		MLGFM
	inferior	superior	
1	6,3150	6,4365	6,3257
2	-	-	10,6362
3	14,940	15,272	15,0026
4	-	-	20,2321
5	-	-	20,9229
6	25,126	26,918	26,7373
7	-	-	30,2608
8	-	-	36,0554
9	-	-	40,2769
10	-	-	43,6923
11	-	-	50,6804

λ/π^2	STADTER		MLGFM
	inferior	superior	
12	-	-	54,9312
13	-	-	62,1169
14	-	-	71,3352
15	-	-	72,6262
16	-	-	83,1687

Tabela 4.15: Autovalores de membrana rômica com $\theta = 75^\circ$ (rad/s).

λ/π^2	STADTER		MLGFM
	inferior	superior	
1	20,165	21,041	20,2745
2	-	-	29,1286
3	36,252	39,531	38,5419
4	-	-	51,8153
5	-	-	71,1262
6	-	-	73,7535
7	-	-	99,5436
8	-	-	100,8696
9	-	-	133,4569
10	-	-	144,0846
11	-	-	168,1019
12	-	-	185,6073
13	-	-	212,0270
14	-	-	240,4173
15	-	-	251,9022
16	-	-	307,6812

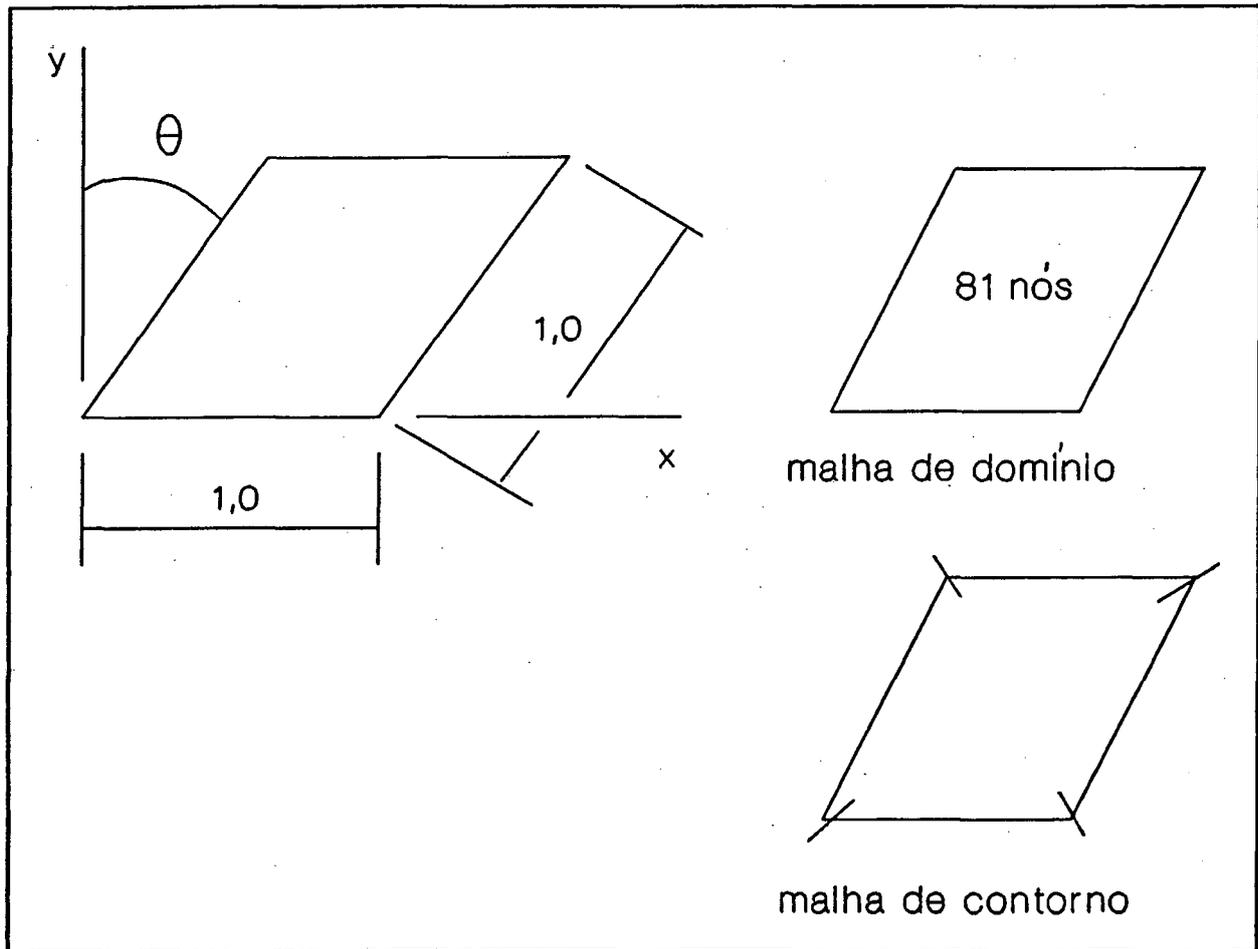


Figura 4.18: Membrana rômica.

4.3.3 Cavidades Acusticamente Rígidas.

Frequências naturais de propagação de ondas em cavidades bidimensionais acusticamente rígidas são obtidas pelo Método da Função de Green Local Modificado. Esta condição corresponde à equação de Helmholtz submetida a condições de contorno de Neumann em todos os nós do contorno. Os valores calculados e comparados com soluções analíticas e outros resultados numéricos validam a formulação para esta situação. Os valores para as frequências naturais são expressos na forma

$$\Omega_{m,n} = \omega a c \quad (4.8)$$

em rad/s ou

$$\Omega_{m,n} = \frac{1}{2\pi} \omega a c \quad (4.9)$$

em Hz onde ω^2 é o autovalor obtido do problema de autovalor / autovetor, a é uma dimensão característica da geometria em questão e c é a velocidade de propagação do som no meio. O erro calculado entre a solução obtida e a solução analítica ou outra solução numérica é tomado na norma l_ω

Aplicação 11: Cavidade Retangular.

As frequências naturais em uma cavidade retangular com paredes acusticamente rígidas (impermeáveis ao fluxo sonoro) são obtidas e comparadas com a solução analítica,

$$\Omega_{m,n} = \Pi \left[n^2 + m^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.10)$$

com $m,n = 0,1,2,3,\dots$. Os resultados são postos na forma $\Omega_{m,n} = \omega a c$, onde a cavidade tem dimensões $a = [0 ; 1,414]$ e $b = [0 ; 1,732]$, conforme Figura 4.19, com $c = 340$ m/s. A discretização aplicada ao domínio foi efetuada com 3×3 elementos finitos cúbicos isoparamétricos de 16 nós e com 12 elementos de contorno cúbicos isoparamétricos de 4 nós. Os resultados são mostrados na Tabela 4.16, com os erros calculados na norma l_ω em relação à solução analítica. As Figuras 4.20, 4.21, 4.22, 4.23 e 4.24 mostram os 17 primeiros modos de vibração.

Tabela 4.16: Frequências naturais (Hz)- cavidade retangular

$\Omega_{m,n}$	analítica	MLGFM	erro (%)
$\Omega_{0,0}$	0,0000	1,9841	-
$\Omega_{1,0}$	872,1339	872,1428	0,0010
$\Omega_{0,1}$	1068,1415	1068,1510	0,0009
$\Omega_{1,1}$	1378,9647	1378,9763	0,0008
$\Omega_{2,0}$	1744,2678	1744,8946	0,0359
$\Omega_{2,1}$	2045,3354	2045,8739	0,0263
$\Omega_{0,2}$	2136,2830	2137,0500	0,0359

$\Omega_{m,n}$	analítica	MLGFM	erro (%)
$\Omega_{1,2}$	2307,4494	2308,1618	0,0309
$\Omega_{3,0}$	2616,4017	2617,1309	0,0279
$\Omega_{2,2}$	2757,9296	2758,9192	0,0359
$\Omega_{3,1}$	2826,0368	2826,7148	0,0240
$\Omega_{0,3}$	3204,4245	3205,3170	0,0278

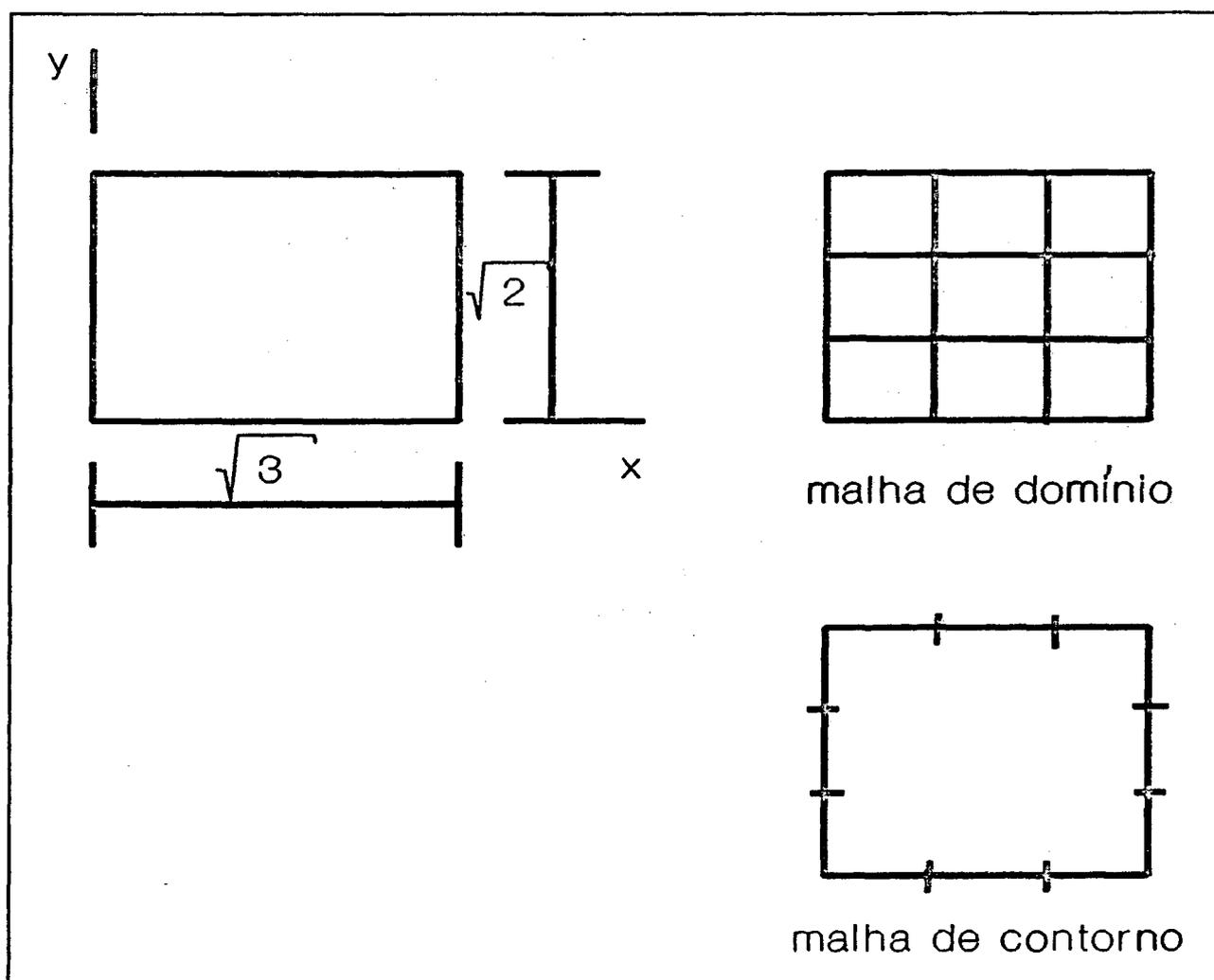


Figura 4.19: Cavidade retangular.

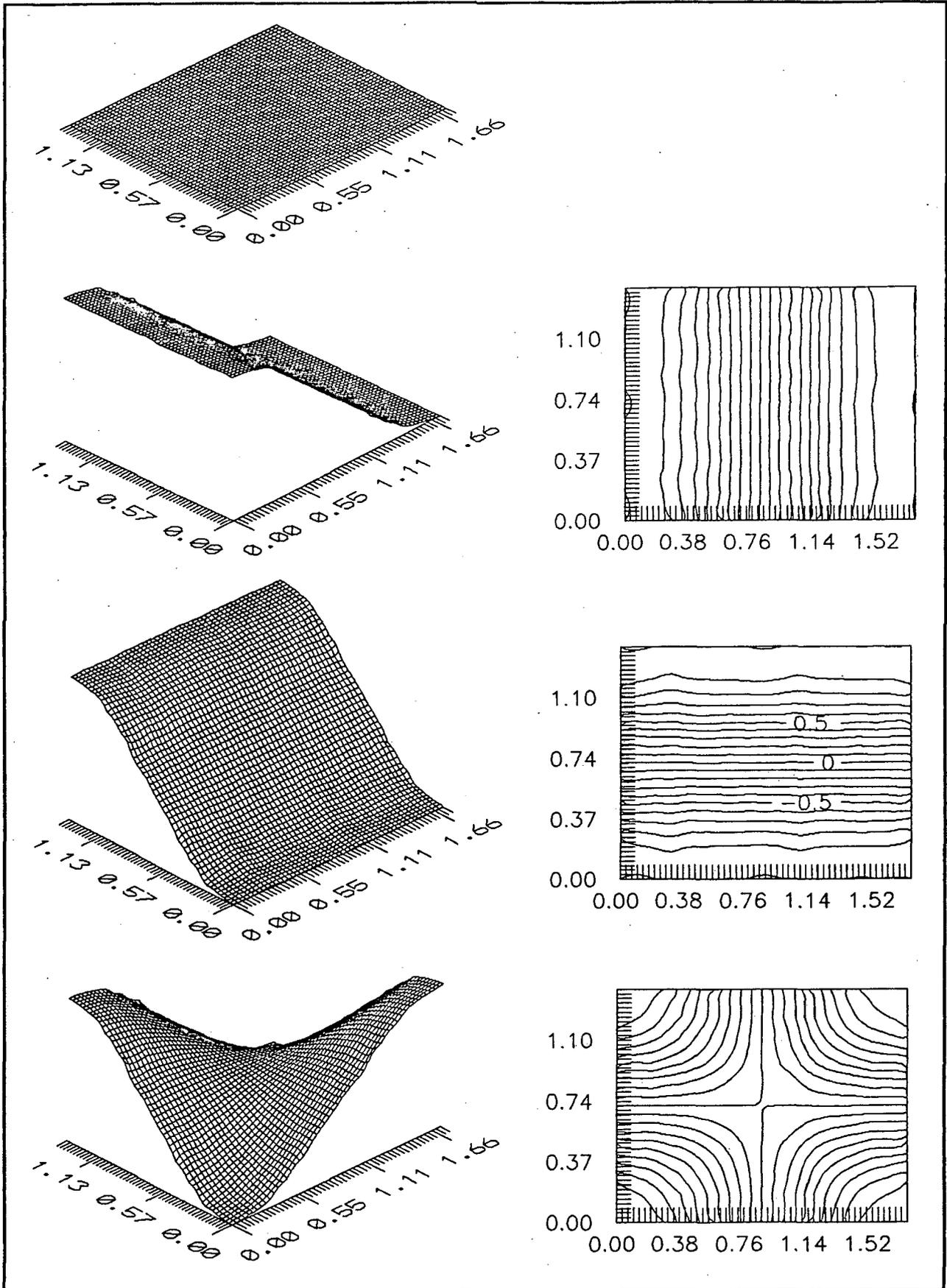


Figura 4.20: Modos 1, 2, 3 e 4 para cavidade retangular.

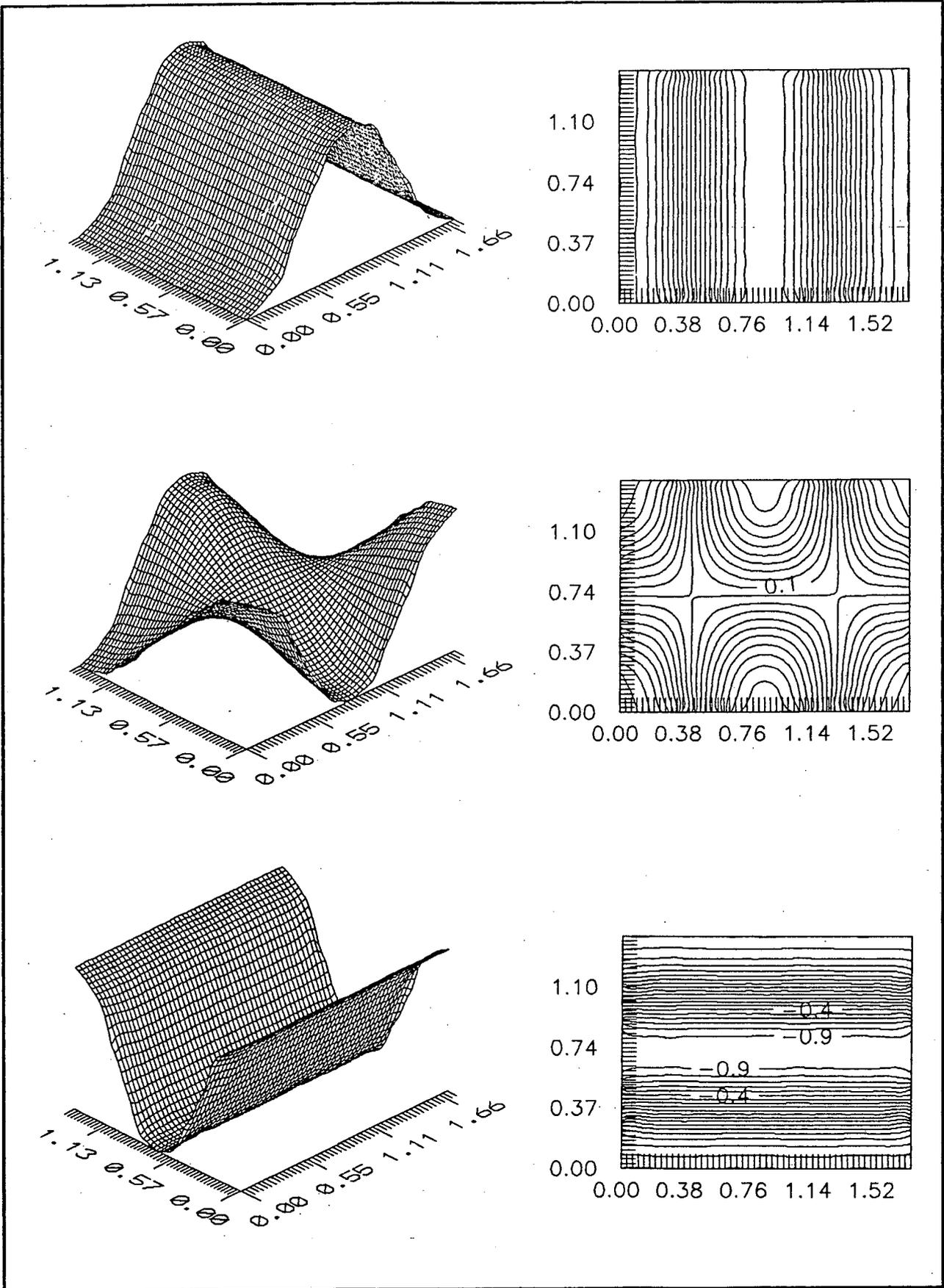


Figura 4.21: Modos 5, 6 e 7 para cavidade retangular.

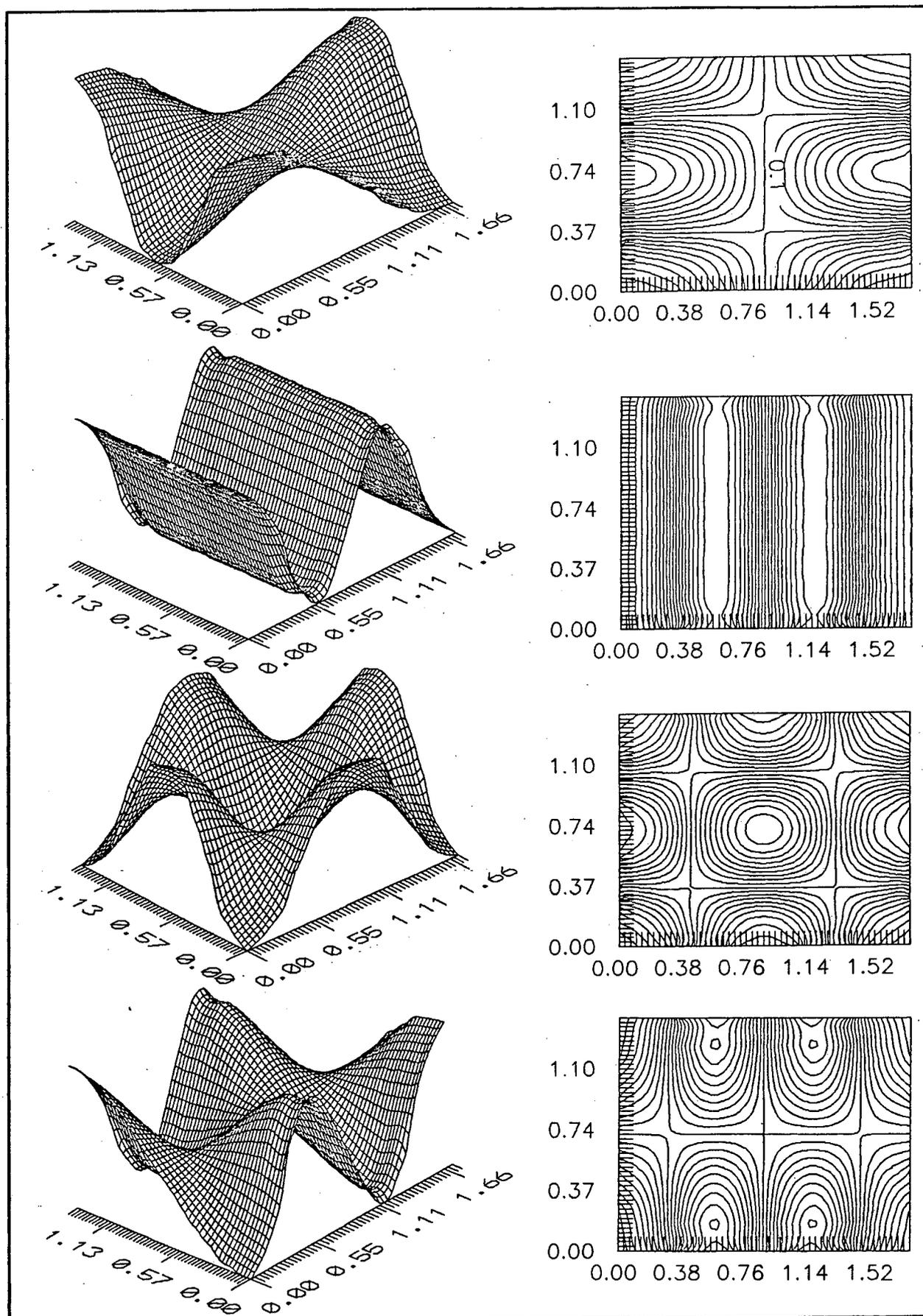


Figura 4.22: Modos 8, 9, 10 e 11 para cavidade retangular.

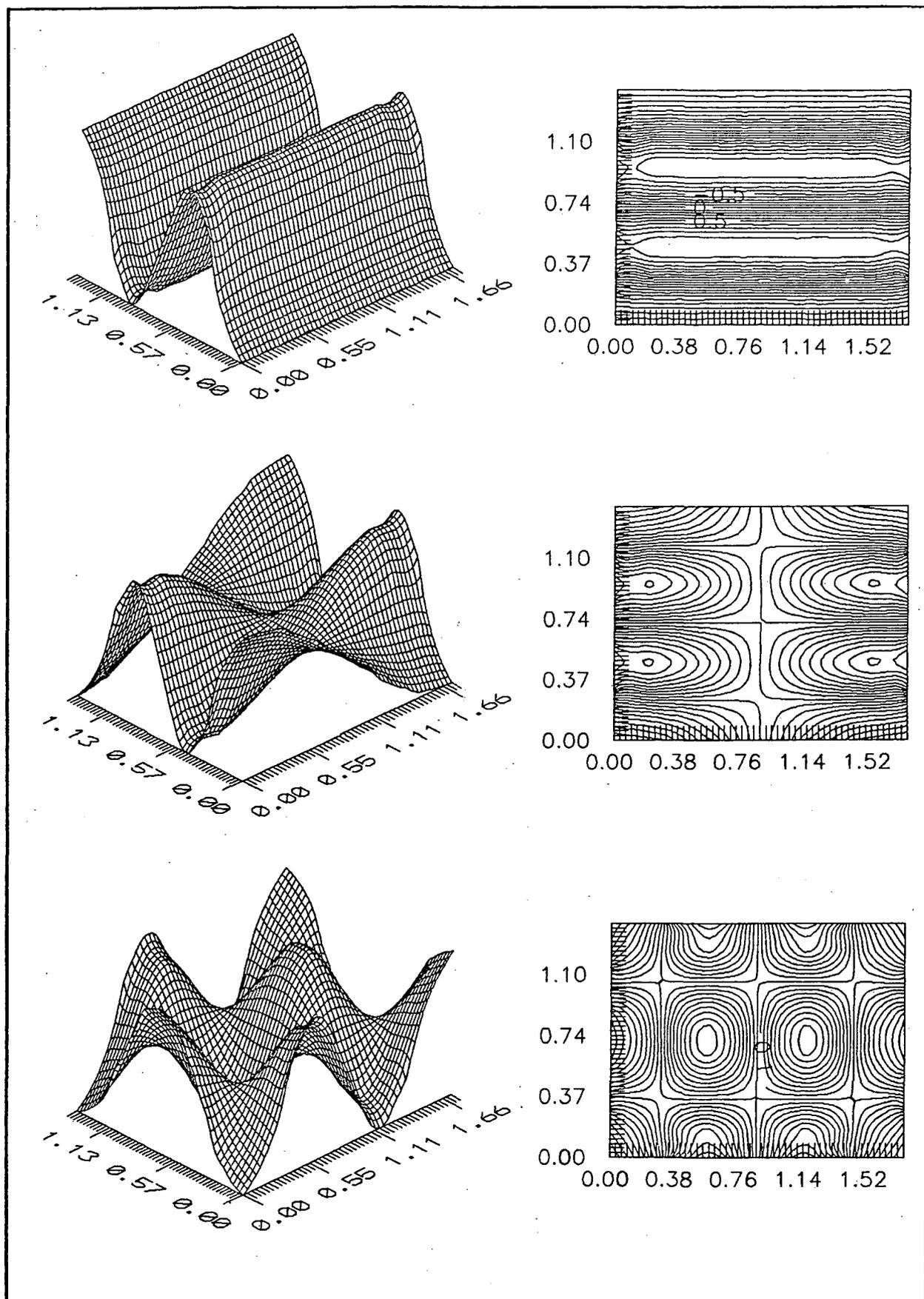


Figura 4.23: Modos 12, 13 e 14 para cavidade retangular.

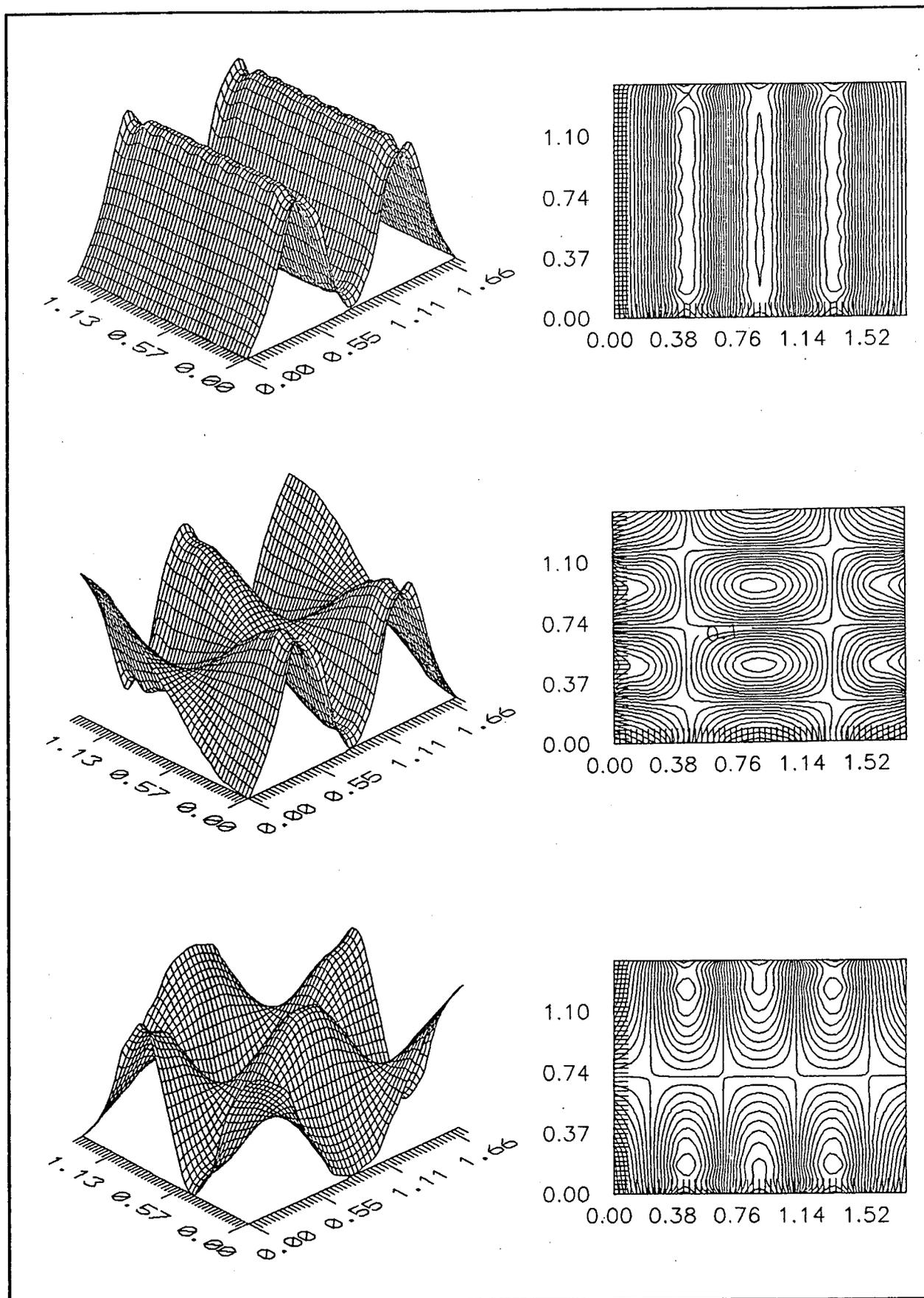


Figura 4.24: Modos 15, 16 e 17 para cavidade retangular.

Aplicação 12: Cavidade Circular.

A solução teórica para as frequência naturais de ondas em uma cavidade circular são dadas pela equação característica

$$J'_m(ka) = 0 \quad (4.11)$$

com $m = 0, 1, 2, \dots$ e $J'_m(\)$ sendo a primeira derivada da função de Bessel de primeiro tipo e m -ésima ordem. São apresentados valores para estas frequências obtidas pelo MLGFM, que são, também, comparadas com resultados numéricos obtidos por ALI, RAJAKUMAR & YUNUS (1991)[3], pelo Método de Elementos de Contorno, empregando 36 elementos lineares, depois quadráticos; o mesmo trabalho apresenta resultados via Método de Elementos Finitos, empregando uma malha com 216 elementos. Os resultados foram obtidos com uma discretização do domínio circular, definido por $P=(x,y) \in \Omega \equiv (x^2 + y^2 < 144)$ e $p=(x,y) \in \partial\Omega \equiv (x^2 + y^2 = 144)$, por 12 elementos finitos quadráticos e 8 elementos de contorno correspondentes, mostrada na Figura 4.25, e são mostrados na Tabela 4.17. Os parâmetros característicos para o problema são: $a = 12$, $c = 340$ m/s.

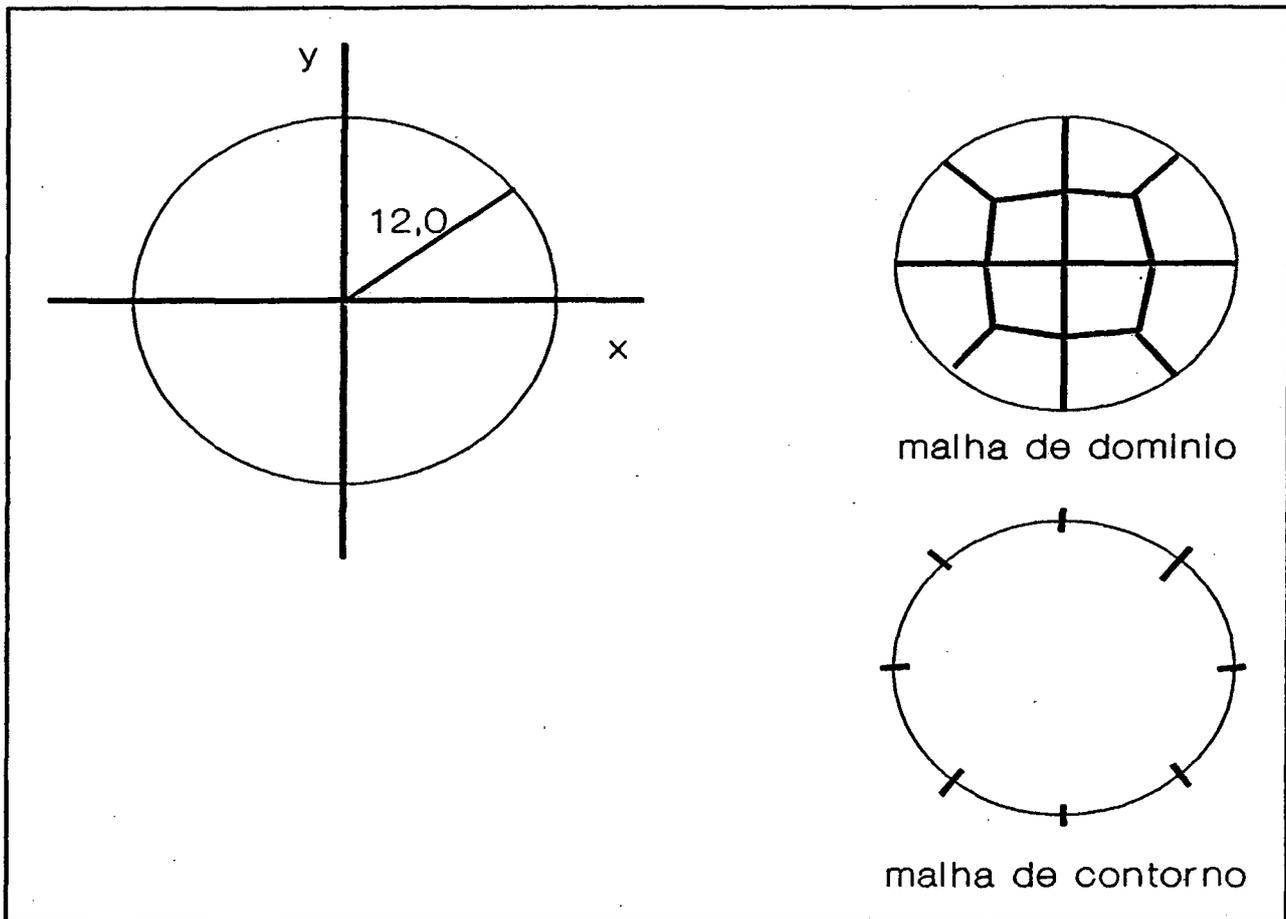


Figura 4.25: Cavidade circular.

Tabela 4.17: Cavidade circular - frequências naturais (Hz).

Ω_n	analítica	FEM	ALI (I)	ALI (II)	MLGFM	erro (%)
Ω_1	99,63	100,02	101,50	101,27	99,63	0,000
Ω_2	99,63	100,02	101,50	101,27	99,63	0,000
Ω_3	165,27	166,33	172,23	171,45	165,27	0,000
Ω_4	165,27	166,33	172,23	171,45	165,28	0,009
Ω_5	207,34	209,40	221,97	221,97	207,35	0,008
Ω_6	227,34	229,88	243,66	242,42	227,37	0,014
Ω_7	227,34	229,88	243,66	242,42	227,37	0,014

Aplicação 13: Tubo de Impedância.

Nesta aplicação são calculadas as frequências naturais da propagação de ondas em um tubo de impedância, de comprimento 40 m e diâmetro 2 m, conforme a Figura 4.26. O mesmo problema foi usado por ALI, RAJAKUMAR & YUNUS (1991)[3] para obter as frequências naturais pelo Método de Elementos de Contorno, empregando 16 elementos ao longo do comprimento e 2 ao longo da largura. O tubo apresenta extremidade confeccionada com o mesmo material do corpo do tubo, configurando uma cavidade acusticamente rígida. Aqui foram empregados 16 elementos finitos cúbicos e os correspondentes elementos de contorno. Tomou-se $a = 40$ e $c = 340$ m/s. Compararam-se os resultados, apresentados na Tabela 4.18, com aqueles obtidos por Elementos de Contorno e com a solução teórica, sendo esta empregada no cálculo do erro. Os 9 primeiros modos de vibração (do 2º ao 10º) são apresentados nas Figuras 4.27, 4.28 e 4.29.

Tabela 4.18: Tubo de impedância (Hz).

modo	analítica	ALI	MLGFM	erro (%)
2	4,25	4,26	4,25	$0,5671 \times 10^{-02}$
3	8,50	8,53	8,50	$0,1417 \times 10^{-02}$
4	12,75	12,91	12,75	$0,6481 \times 10^{-03}$

modo	analítica	ALI	MLGFM	erro (%)
5	17,00	17,30	17,00	$0,4657 \times 10^{-03}$
6	21,25	-	21,25	$0,6535 \times 10^{-03}$
7	25,50	-	25,50	$0,1418 \times 10^{-02}$
8	29,75	-	29,75	$0,3242 \times 10^{-02}$
9	34,00	-	34,00	$0,6916 \times 10^{-02}$
10	38,25	-	38,25	$0,1361 \times 10^{-01}$

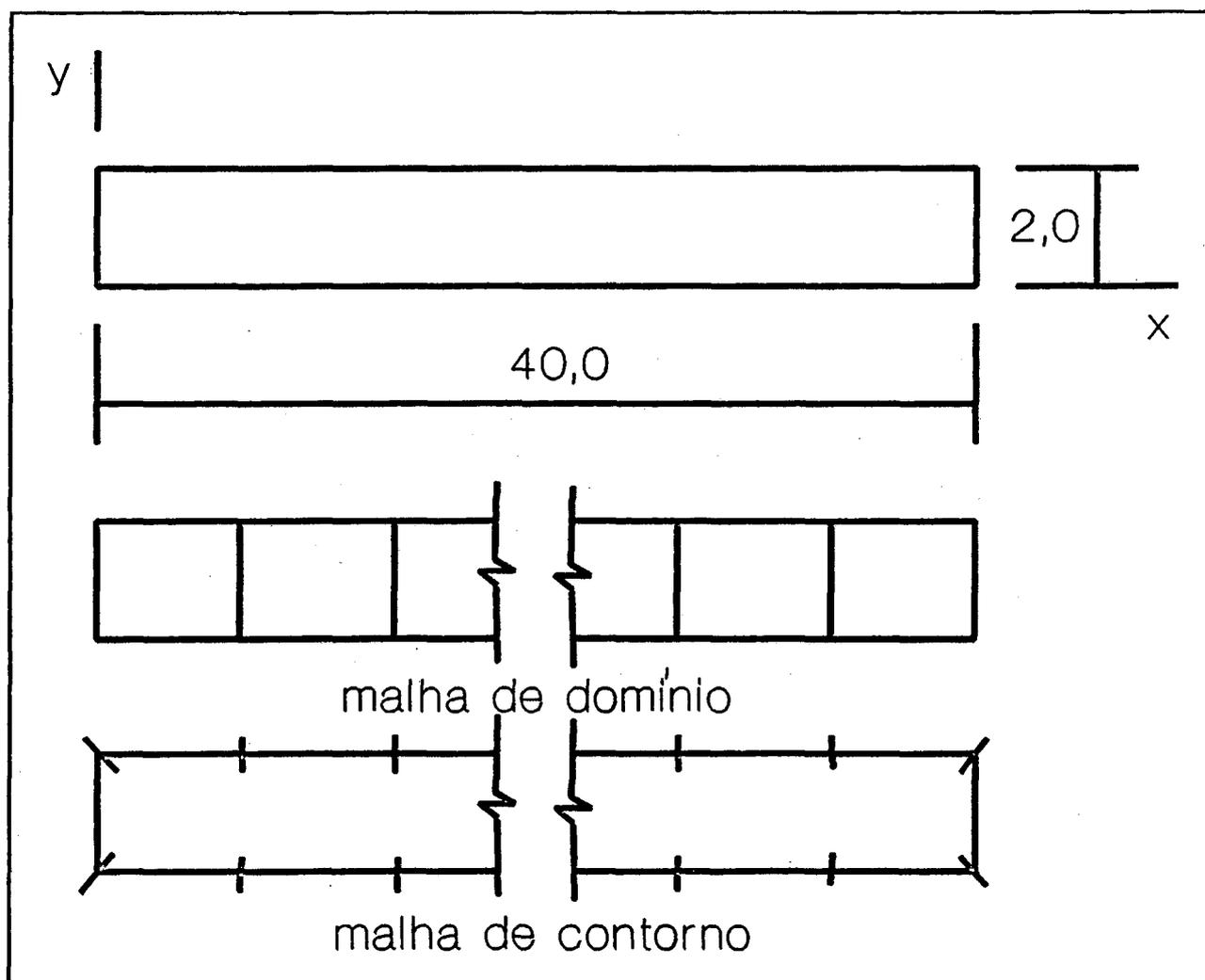


Figura 4.26: Tubo de impedância.

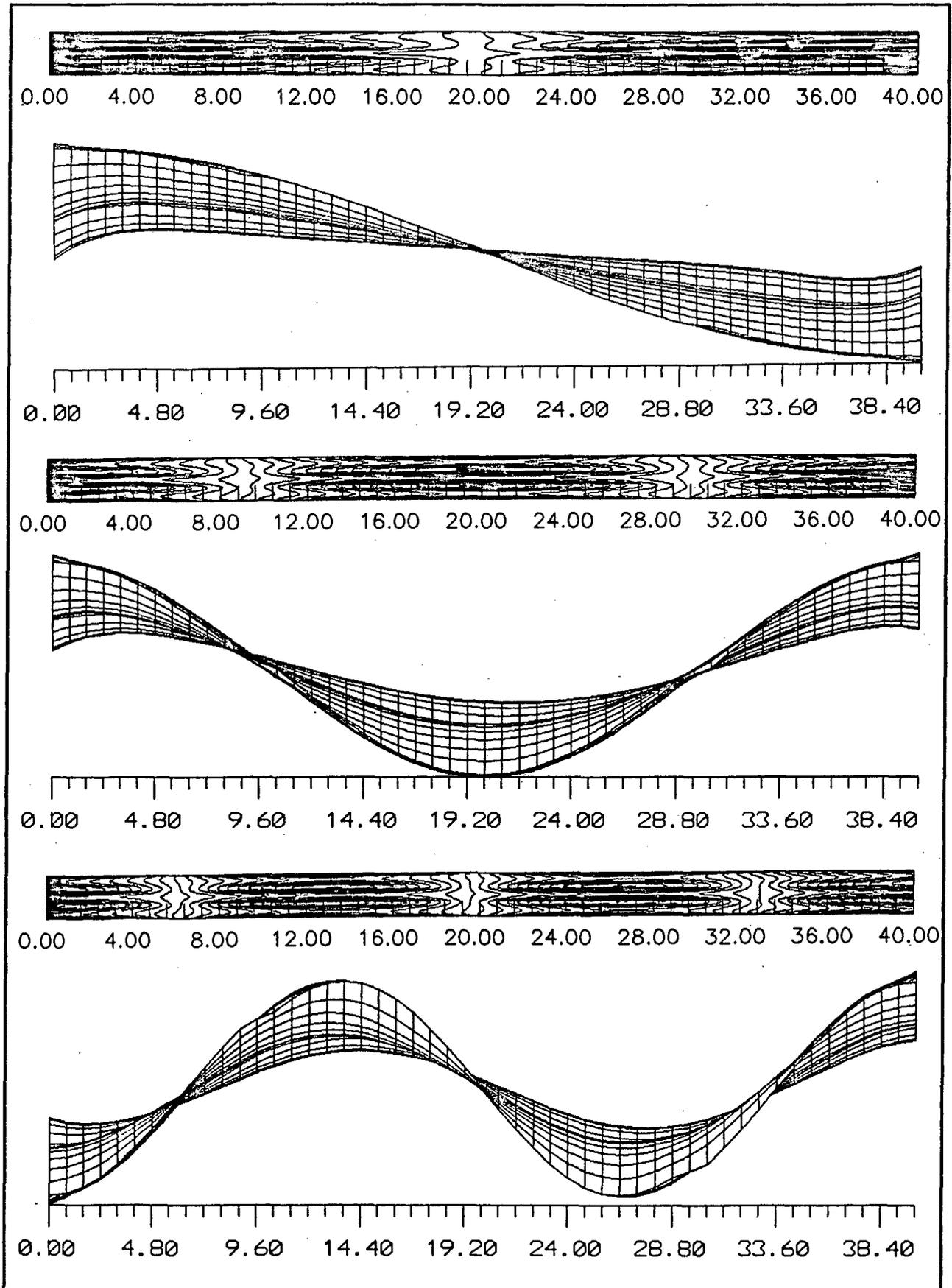


Figura 4.27: Modos 2, 3 e 4 para tubo de impedância.

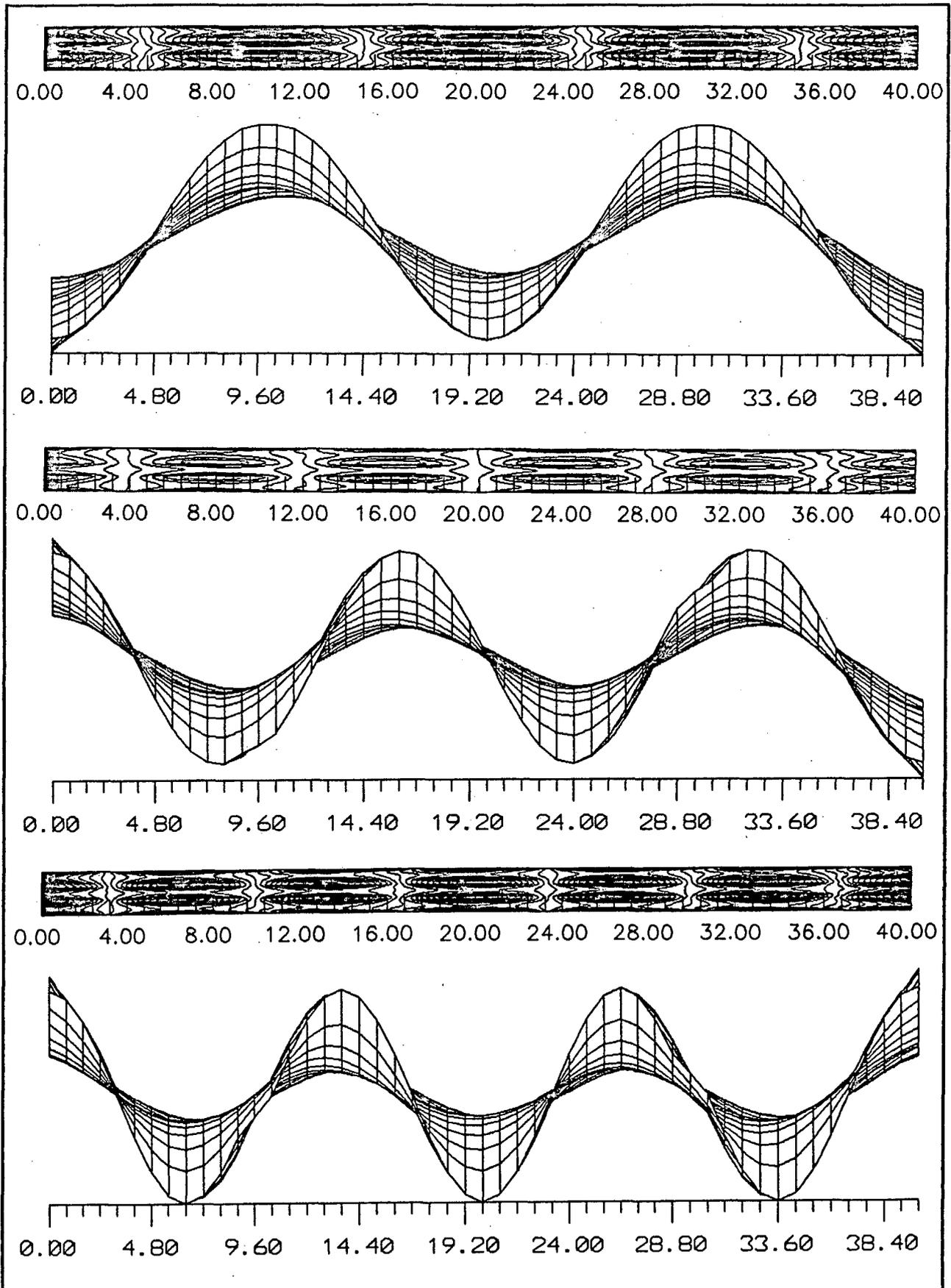


Figura 4.28: Modos 5, 6 e 7 para tubo de impedância.

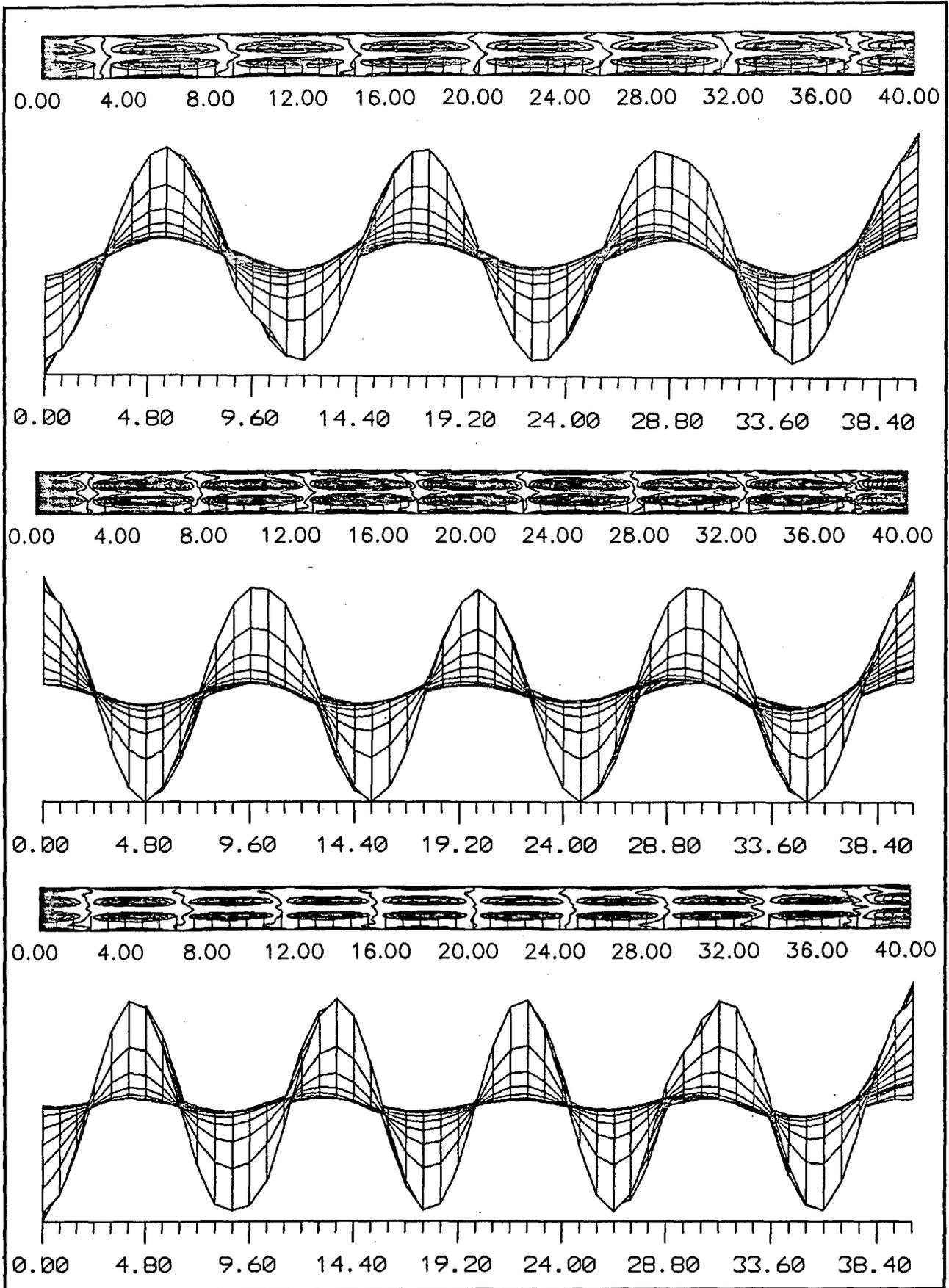


Figura 4.29: Modos 8, 9 e 10 para tubo de impedância.

Aplicação 14: Cavityde Trapezoidal.

O problema de propagação livre de ondas em uma cavityde trapezoidal com paredes acusticamente rígidas (impermeáveis ao fluxo sonoro), conforme mostra a Figura 4.30, foi resolvido pelo Método de Elementos Finitos, bem como experimentalmente, por SHUKU & ISHIHARA (1973)[70]. O mesmo problema foi resolvido por ALI, RAJAKUMAR & YUNUS (1991)[3] com uma técnica de elementos de contorno baseada no Método da Reciprocidade Dual (DRM), e Método Integral Particular (PIM), sob dois procedimentos: sem pontos internos ao domínio, e com 9 pontos internos. O mesmo problema foi resolvido pelo MLGFM utilizando-se apenas um elemento finito no domínio e 4 elementos de contorno, todos de sexta ordem. Os resultados são mostrados na Tabela 4.19, com o erro calculado em relação à solução experimental, onde $c = 340$ m/s.

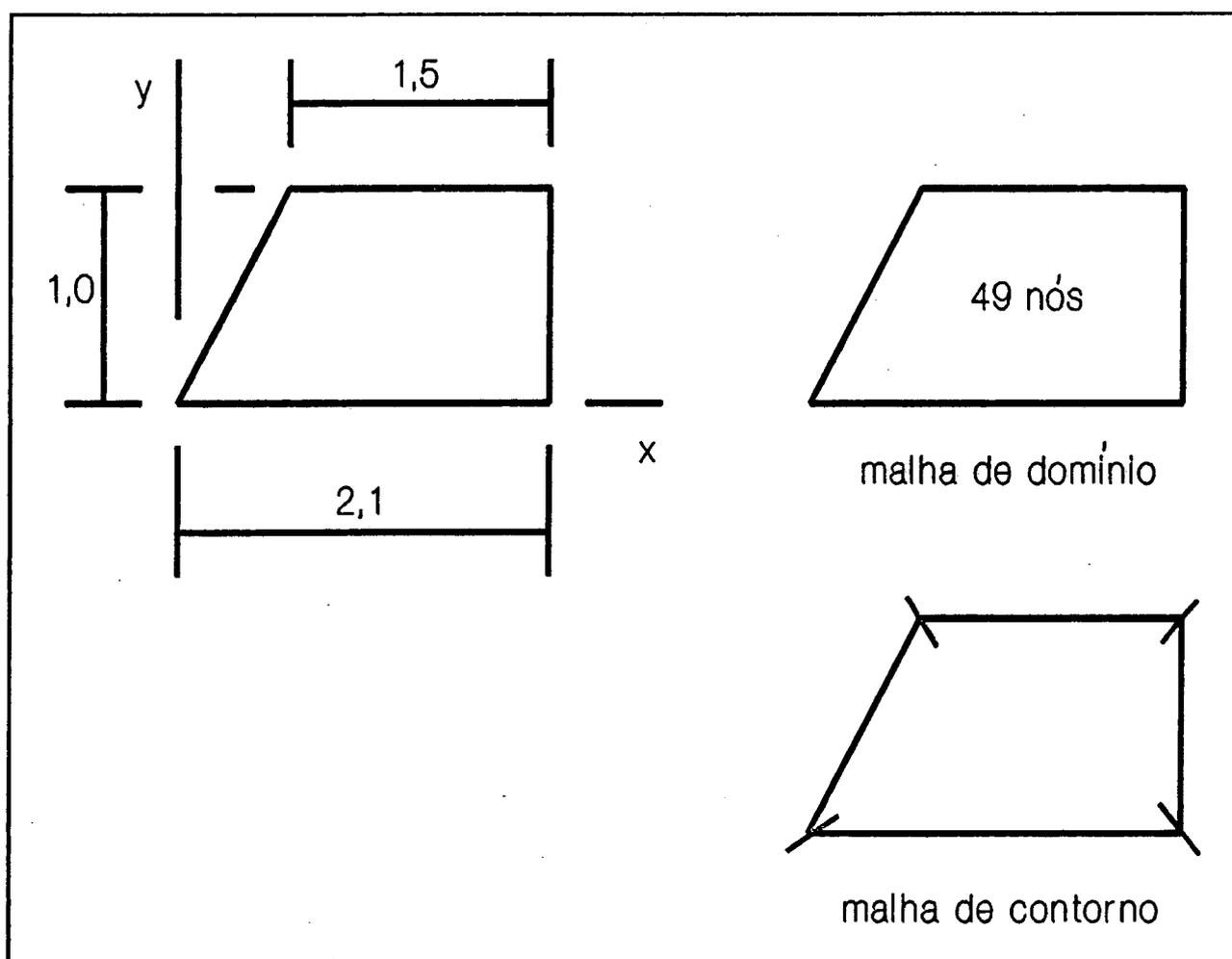


Figura 4.30: Cavityde trapezoidal.

Tabela 4.19: Cavidade trapezoidal – frequências naturais (Hz).

Ω_n	SHUKU		ALI		MLGFM	erro (%)
	FEM	Exper.	s/ P.I.	9 P.I.		
Ω_1	92,5	93	93,7	92,9	92,47	-0,57
Ω_2	162,5	164	169,3	165,0	162,17	-1,11
Ω_3	179,1	182	187,6	182,3	178,61	-1,86
Ω_4	-	-	-	-	209,86	-
Ω_5	-	-	-	-	243,24	-
Ω_6	-	-	-	-	291,90	-

Aplicação 15: Cavidade Retangular.

Uma cavidade retangular acusticamente rígida, de dimensões 1,1 m × 2,5 m é modelada com uma malha de 50 elementos finitos lineares e 30 elementos de contorno, também lineares, conforme a Figura 4.31. O mesmo problema foi resolvido por KANARACHOS & PROVATIDIS (1987)[51] pelo Método de Elementos de Contorno, analisando a *performance* de diferentes formulações para a matriz massa; empregou a mesma malha para obter resultados pelo Método de Elementos Finitos, para comparação, e 2 malhas para o Método de Elementos de Contorno: uma com 60 graus de liberdade e outra de 120 graus de liberdade. Os resultados são postos na Tabela 4.20, com o erro em relação à solução analítica,

$$\omega^2 = \pi^2 c^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (4.12)$$

A velocidade do som no meio adotada foi $c = 1$ m/s.

Analisando-se os resultados obtidos, verifica-se que os erros cometidos aplicando-se o MLGFM com elementos lineares foram praticamente os mesmos encontrados na solução com o Método de Elementos Finitos. Portanto, sugere-se evitar o emprego do MLGFM com elementos lineares, visto que não há uma melhora nos resultados em relação ao Método de Elementos Finitos, havendo, porém, um acréscimo no esforço computacional dispensado para a resolução do mesmo problema.

Tabela 4.20: Cavidade retangular - frequências naturais (Hz).

ω_n^2	solução		erro (%)			
	exata	MLGFM	BEM (60 gl)	BEM (120 gl)	FEM	MLGFM
ω_2^2	1,5791	1,5922	1,39	1,26	0,82	0,82
ω_3^2	6,3165	6,5270	6,33	6,09	3,43	3,33
ω_4^2	8,1567	8,4284	12,71	12,46	3,31	3,33
ω_5^2	9,7358	10,0206	7,21	6,86	2,89	2,92
ω_6^2	14,2122	14,9554	10,93	10,17	5,16	5,22
ω_7^2	14,4732	15,2921	19,83	18,58	5,63	5,65
ω_8^2	22,3689	23,7205	13,75	12,31	6,03	6,04
ω_9^2	25,2662	28,7284	33,20	30,91	13,71	13,70

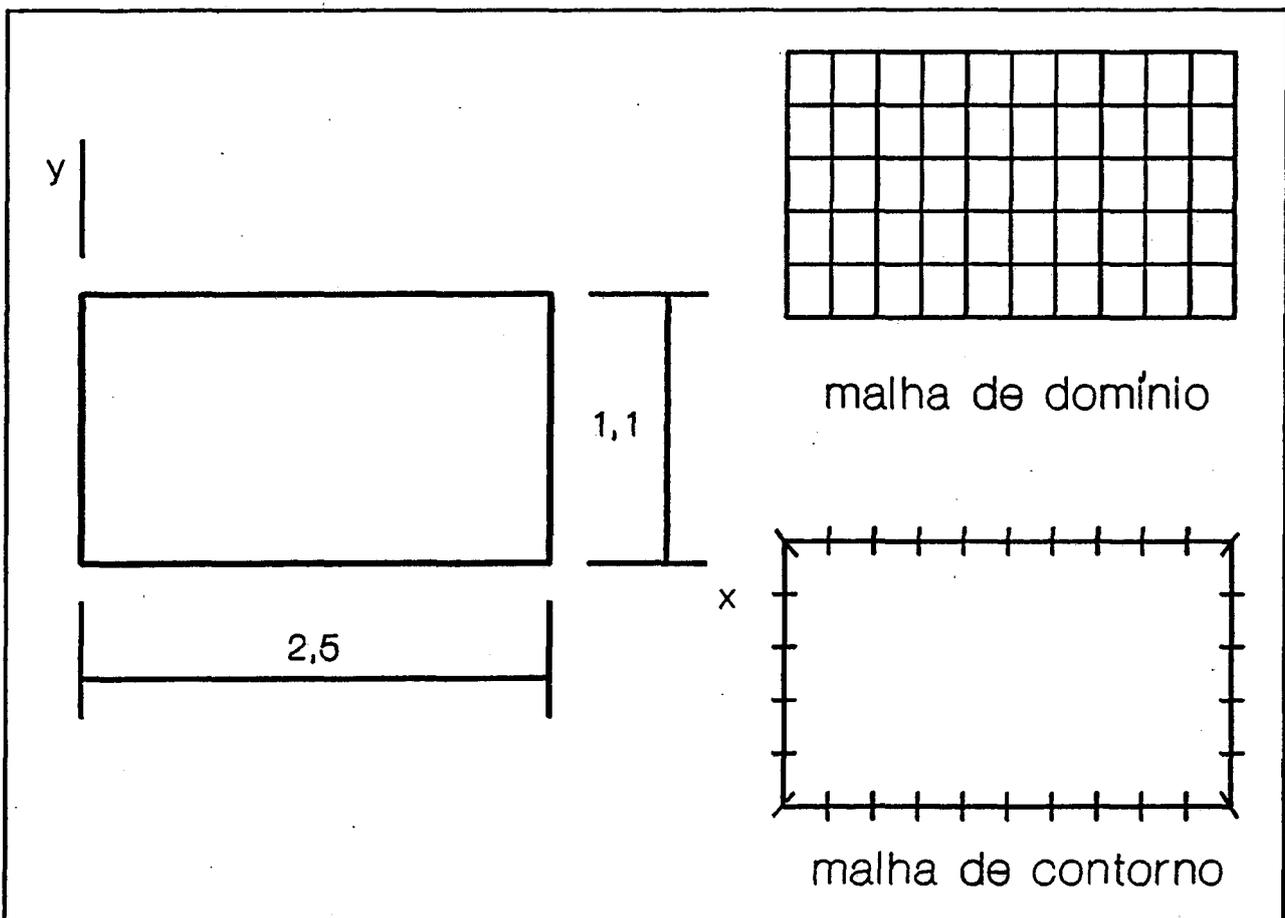


Figura 4.31: Cavidade Retangular.

4.3.4 Membranas Elásticas com Bordas Fixas e Bordas Livres.

A equação de Helmholtz sob condições de contorno mistas, parte do contorno sob condição de contorno de Dirichlet homogêneas e parte sob condição de contorno de Neumann homogênea, é o modelamento matemático de membranas com alguma parte da borda fixa e outra livre, respectivamente. Como prática usual em elementos de contorno, neste caso faz-se necessário o emprego de nós duplos nas posições onde ocorre mudança de condições de contorno. São apresentadas apenas aplicações que têm soluções analíticas, com domínio retangular e domínio circular fazendo uso de condições de simetria.

Aplicação 16: Membrana Circular.

Visando o emprego de condições de contorno mistas, resolve-se o problema de uma membrana circular com a borda fixa, situação com condição de contorno de Dirichlet. Porém tomando-se os eixos coordenados com origem no centro da membrana, faz-se uso da simetria em relação a estes eixos e, portanto, aplicam-se condições de contorno mistas. Os eixos de simetria, agora, devem apresentar condições de contorno de Neumann. A geometria é a mesma daquele problema da *aplicação 07*, com a quarta parte da membrana modelada com 3 elementos finitos quadráticos e o contorno com 6 elementos de contorno quadráticos, conforme Figura 4.32. Nós duplos são usados nas posições onde ocorre mudanças das condições de contorno. São captados, porém, apenas os modos que apresentam a mesma simetria utilizada na modelagem geométrica. Os resultados são apresentados na Tabela 4.21.

Tabela 4.21: Membrana circular - frequências naturais (rad/s).

$\Omega_{m,n}$	analítica	MLGFM	erro (%)
$\Omega_{0,1}$	2,40482	2,40492	0,00405
$\Omega_{2,1}$	5,13562	5,13605	0,00847
$\Omega_{0,2}$	5,52008	5,52038	0,00544
$\Omega_{4,1}$	7,58834	7,59255	0,05552
$\Omega_{2,2}$	8,41724	8,42278	0,06582

$\Omega_{m,n}$	analítica	MLGFM	erro (%)
$\Omega_{0,3}$	8,65373	8,65915	0,06262
$\Omega_{6,1}$	9,93611	9,96405	0,28125
$\Omega_{7,1}$	11,08637	11,08971	0,03014
$\Omega_{0,4}$	11,79153	11,70861	0,70321
$\Omega_{8,1}$	12,22509	11,88233	2,80374
$\Omega_{5,2}$	12,33860	12,27837	0,48811
$\Omega_{6,2}$	13,58929	13,69563	0,78252

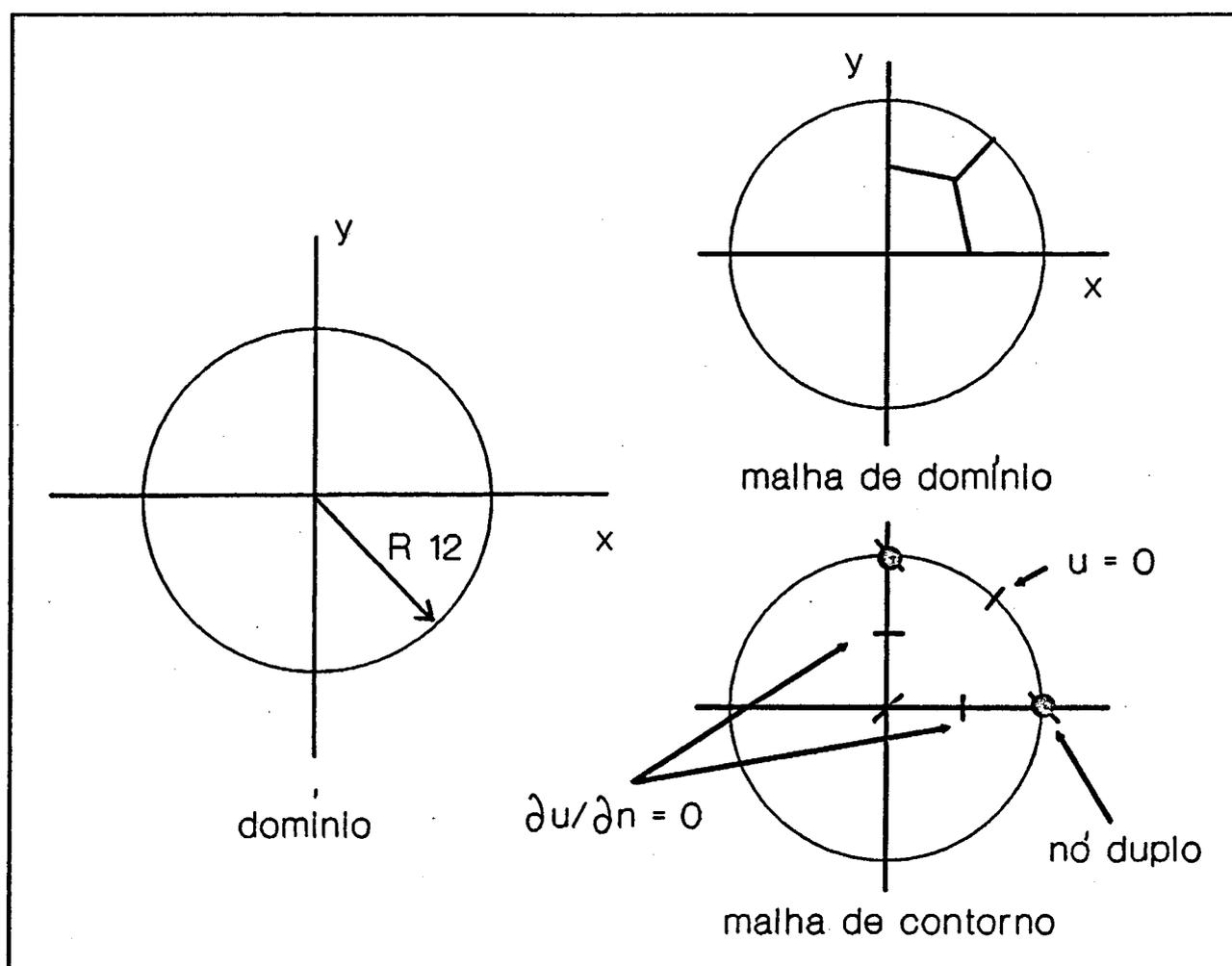


Figura 4.32: Membrana circular.

Aplicação 17: Membrana retangular com uma borda livre.

Modela-se uma membrana retangular com dimensões $[0; 1,5] \times [0,1]$ com uma malha composta por apenas um elemento finito de sexta ordem e quatro elementos de contorno de sexta ordem. A membrana apresenta três lados fixos e um livre, caracterizando condição de contorno mista. Utilizam-se nós duplos nos cantos, onde ocorre mudança nas condições de contorno, conforme Figura 4.33. Os resultados são apresentados na Tabela 4.22. Os 10 primeiros modos de vibração são mostrados nas Figuras 4.34, 4.35 e 4.36. A solução analítica é

$$\Omega_{m,n} = \pi \left(\frac{m^2}{4M^2} + \frac{n^2}{L^2} \right)^{1/2} \quad (4.13)$$

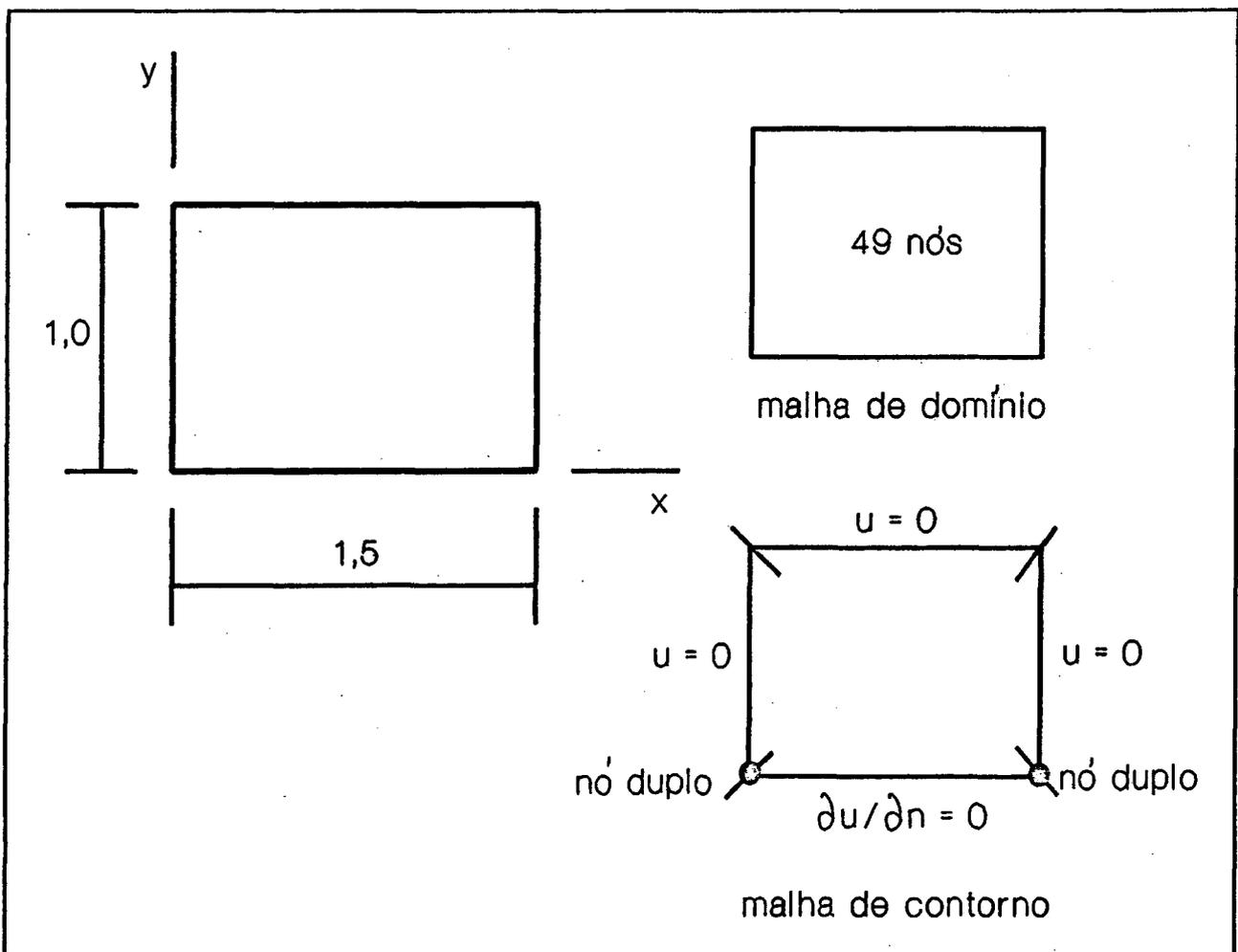


Figura 4.33: Membrana retangular com uma borda livre.

Tabela 4.22: Membrana retangular com uma borda livre-freqüências naturais (rad/s).

$\Omega_{m,n}$	analítica	MLGFM	erro (%)
$\Omega_{1,1}$	6,85389	6,85389	$-0,5344 \times 10^{-05}$
$\Omega_{2,1}$	20,01336	20,02364	$0,5137 \times 10^{-01}$
$\Omega_{1,3}$	26,59310	26,59340	$0,1141 \times 10^{-02}$
$\Omega_{2,3}$	39,75257	39,76316	$0,2663 \times 10^{-01}$
$\Omega_{3,1}$	41,94582	42,10012	0,3679
$\Omega_{3,3}$	61,68503	61,83963	0,2506
$\Omega_{1,5}$	66,07152	66,24906	0,2687
$\Omega_{4,1}$	72,65126	79,41882	9,315
$\Omega_{2,5}$	79,23099	91,57782	15,580
$\Omega_{4,3}$	92,39047	101,49529	9,855

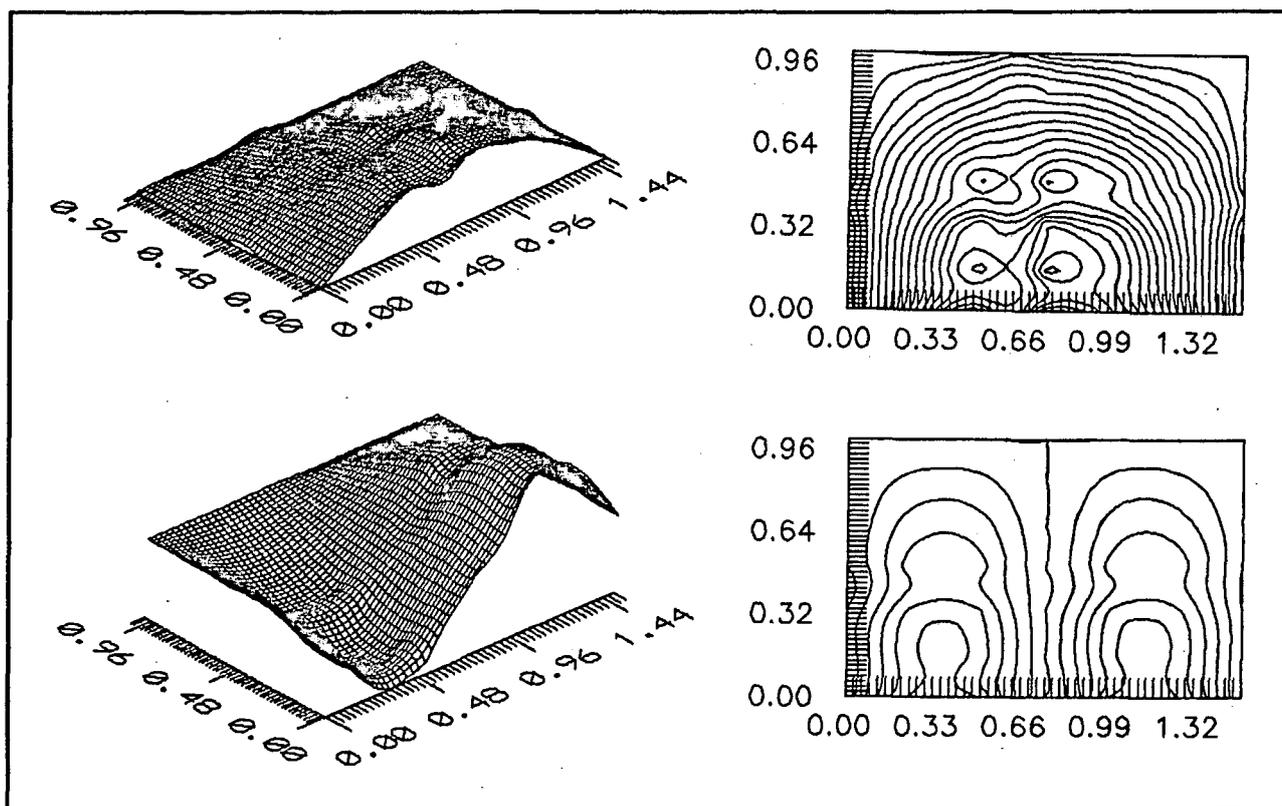


Figura 4.34: Modos 1 e 2 para membrana com uma borda livre.

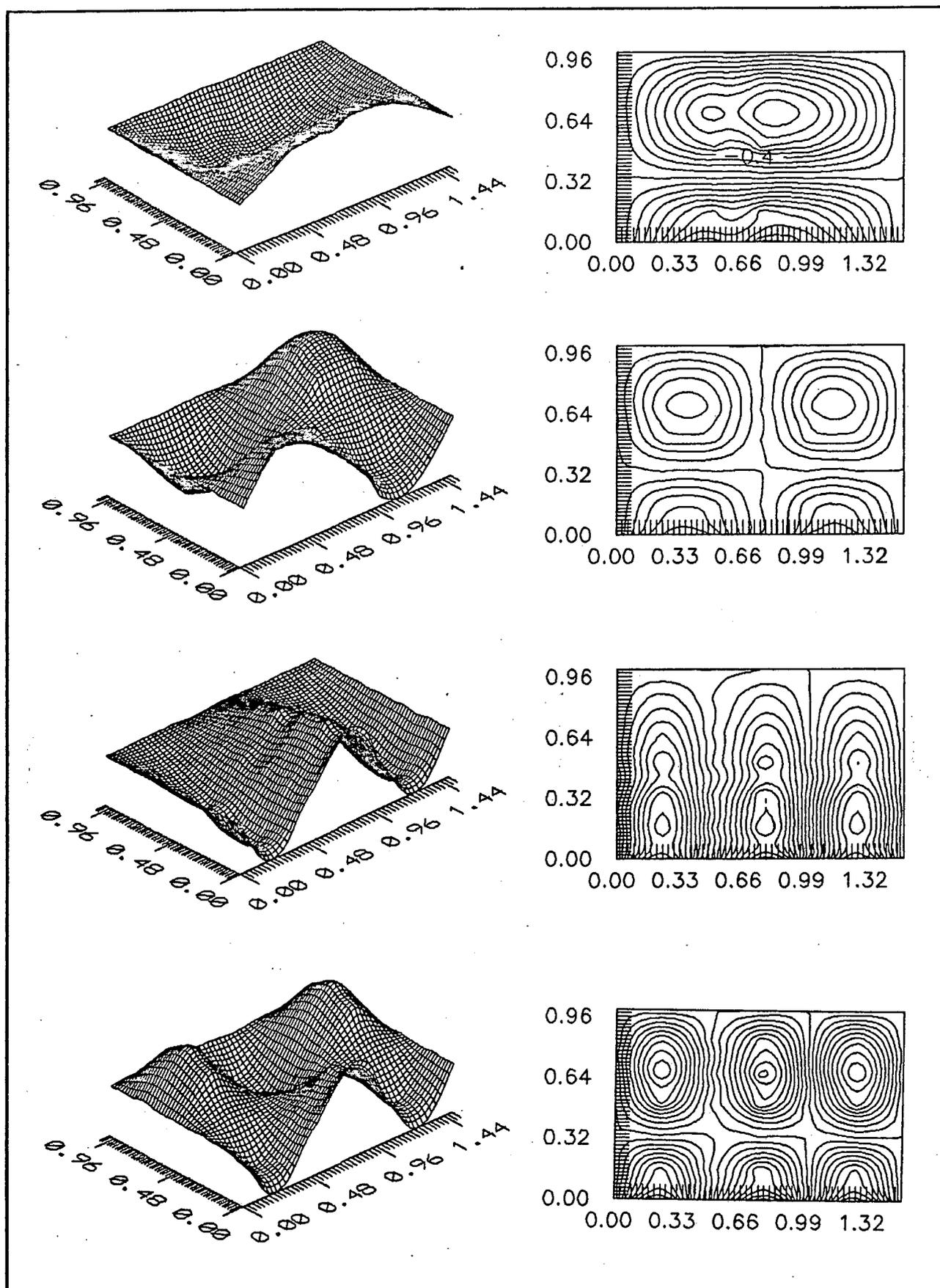


Figura 4.35: Modos 3, 4, 5 e 6 para membrana com uma borda livre.

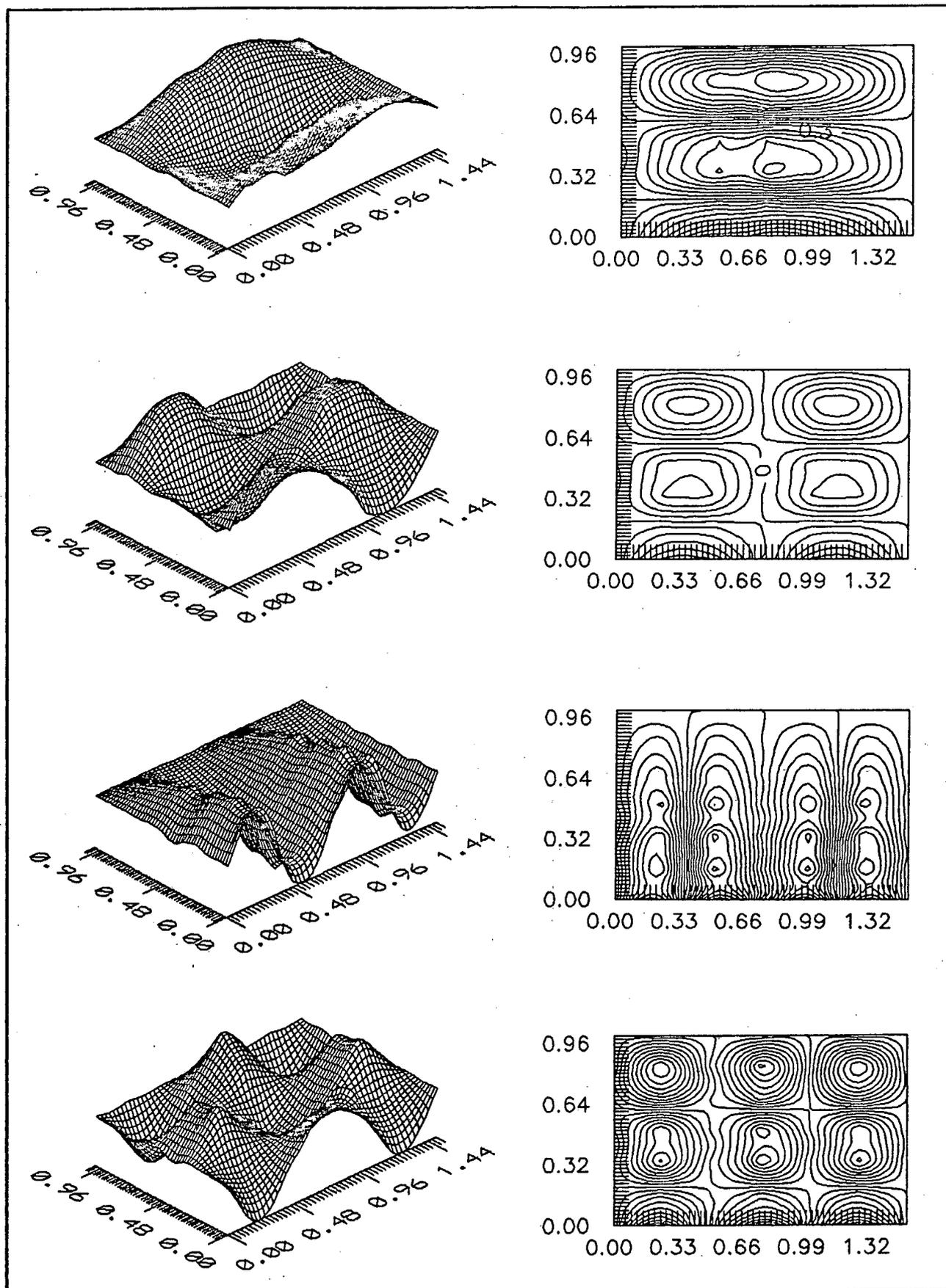


Figura 4.36: Modos 7, 8, 9 e 10 para membrana com uma borda livre.

Aplicação 18: Membrana retangular com uma borda fixa.

Este problema é o mesmo problema da *aplicação 17*, porém, aqui, a membrana apresenta apenas um lado fixo e os outros três lados livres. A discretização empregada foi, também, de um elemento finito no domínio e quatro elementos de contorno, todos de sexta ordem, conforme a Figura 4.37. Foram empregados nós duplos nos vértices onde há mudança nas condições de contorno. Os resultados são apresentados na Tabela 4.23. Os 10 primeiros modos de vibração são mostrados nas Figuras 4.38, 4.39 e 4.40. A solução analítica é

$$\Omega_{m,n} = \pi \left(\frac{m^2}{4M^2} + \frac{n^2}{L^2} \right)^{1/2} \quad (4.14)$$

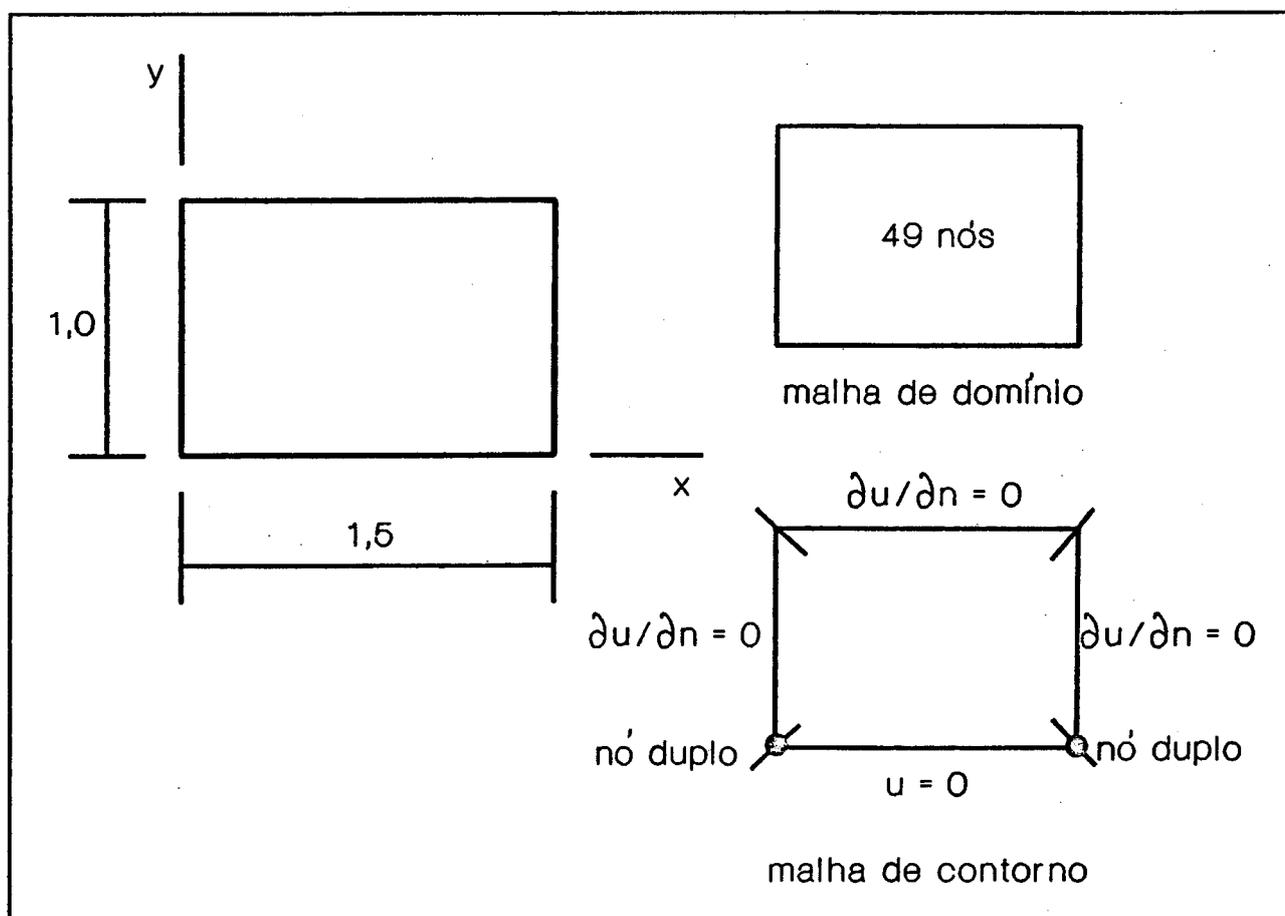


Figura 4.37: Membrana retangular com uma borda fixa.

Tabela 4.23: Membrana retangular com uma borda fixa (rad/s).

$\Omega_{m,n}$	analítica	MLGFM	erro (%)
$\Omega_{0,1}$	2,46740	2,46740	$-0,5562 \times 10^{-05}$
$\Omega_{1,1}$	6,85389	6,85389	$0,1133 \times 10^{-04}$
$\Omega_{2,1}$	20,01336	20,01395	$0,2925 \times 10^{-02}$
$\Omega_{0,3}$	22,20661	22,20691	$0,1367 \times 10^{-02}$
$\Omega_{1,3}$	26,59310	26,59341	$0,1145 \times 10^{-02}$
$\Omega_{2,3}$	39,75257	39,75346	$0,2237 \times 10^{-02}$
$\Omega_{3,1}$	41,94582	43,01205	2,542
$\Omega_{3,3}$	61,68503	61,86257	0,2878
$\Omega_{0,5}$	61,68503	62,75156	1,729
$\Omega_{1,5}$	66,07152	66,24906	0,2687

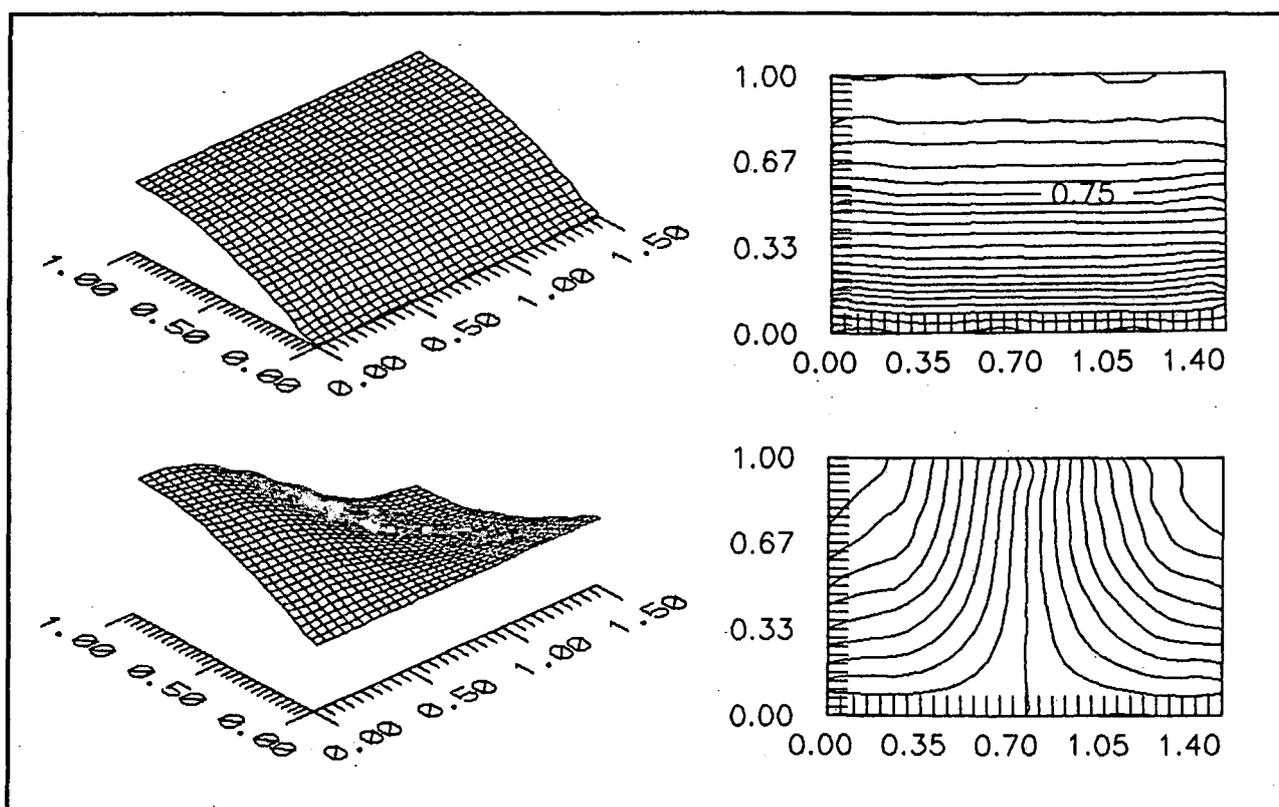


Figura 4.38: Modos 1 e 2 para membrana com uma borda fixa.

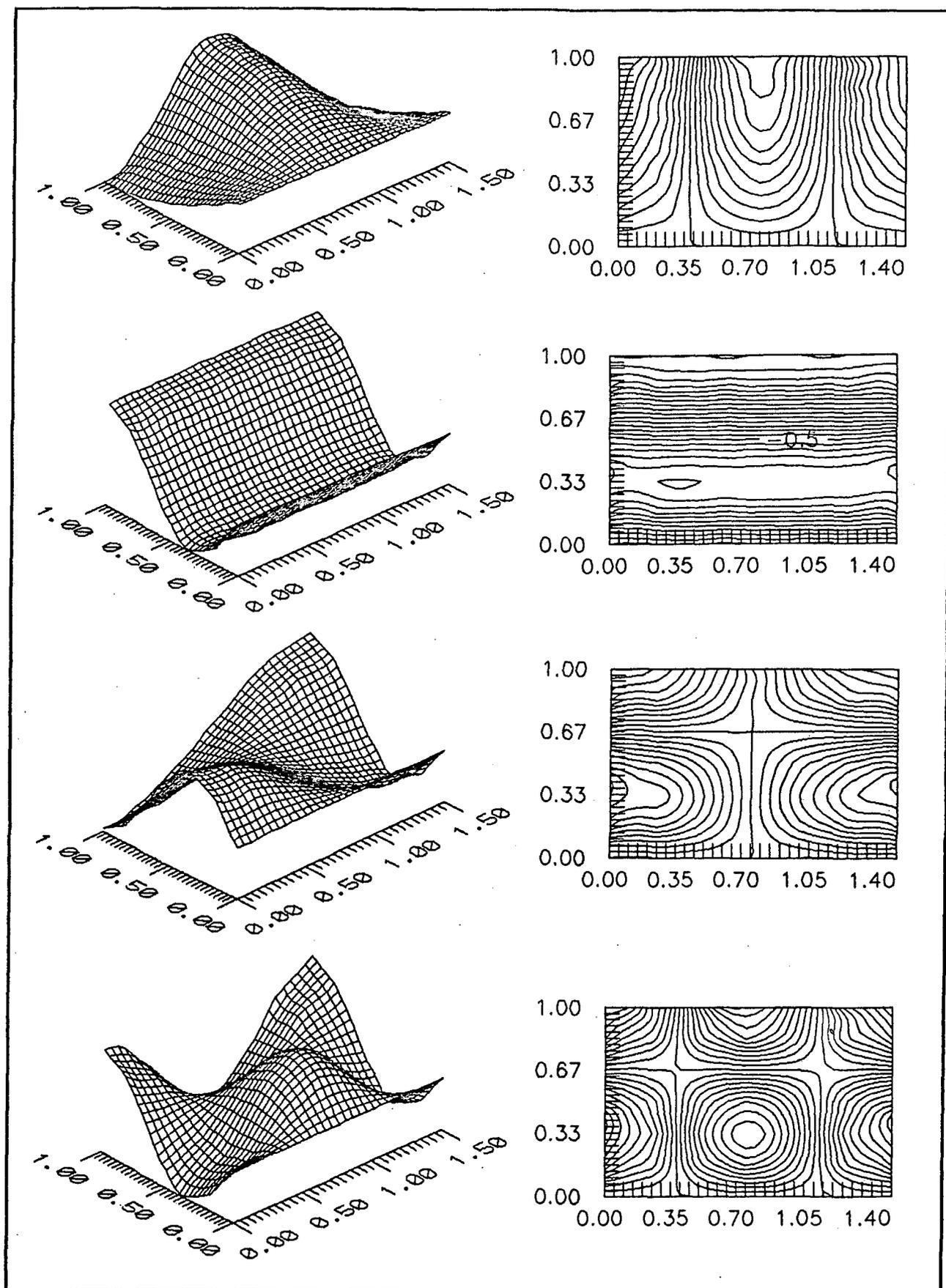


Figura 4.39: Modos 3, 4, 5 e 6 para membrana com uma borda fixa.

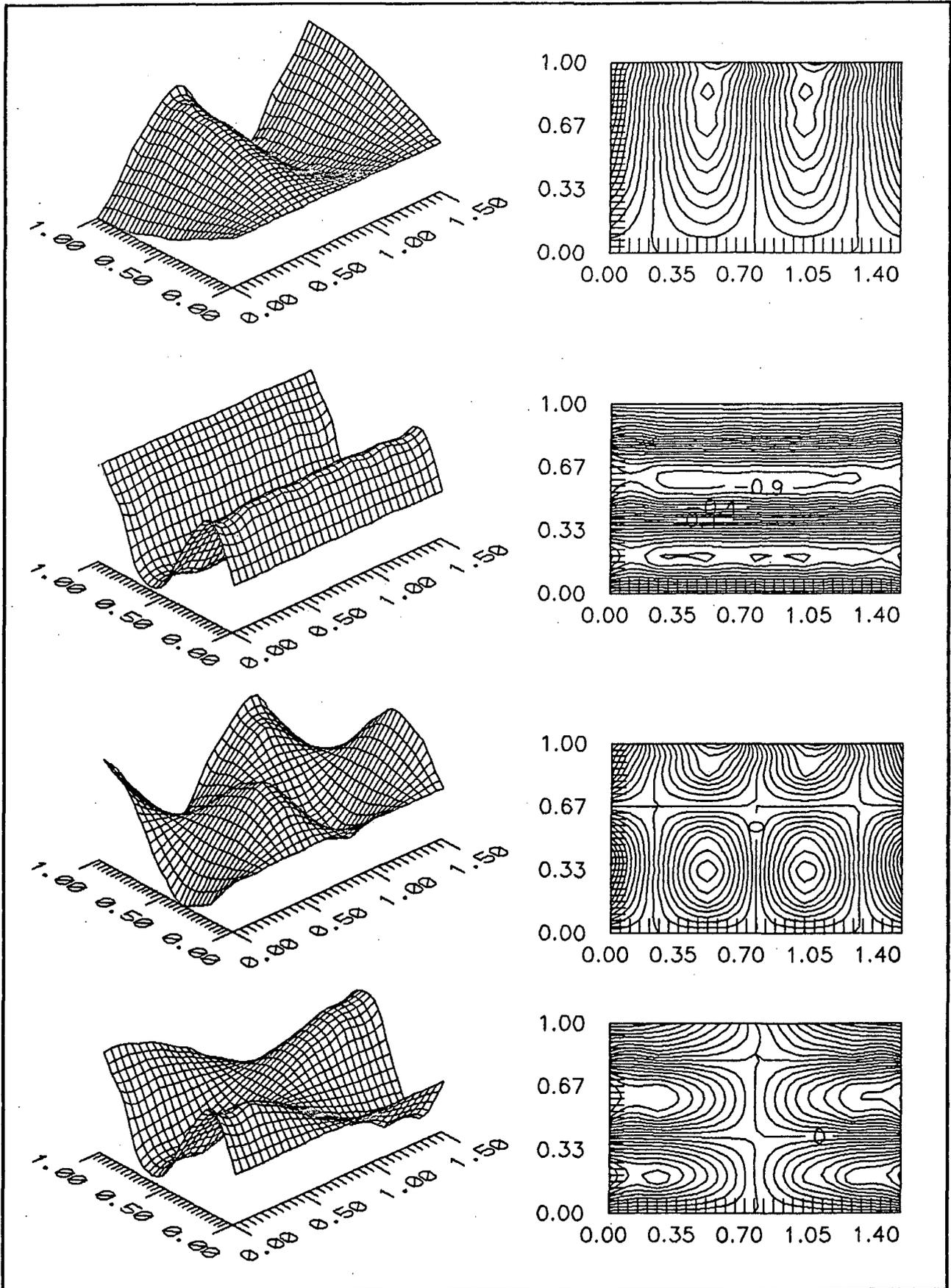


Figura 4.40: Modos 7, 8, 9 e 10 para membrana com uma borda fixa.

Aplicação 19: Membrana retangular com duas bordas opostas livres e duas fixas.

Similar ao problema anterior, a mesma membrana, com a mesma malha, Figura 4.41, apresenta, aqui, duas bordas opostas sujeitas a condições de contorno de Neumann e as outras duas sob condição de contorno de Dirichlet. Os resultados são expostos na Tabela 4.24 e comparados com a solução analítica. Os 10 primeiros modos de vibração são apresentados nas Figuras 4.42, 4.43 e 4.44. A solução analítica é

$$\Omega_{m,n} = \pi \left(\frac{n^2}{M^2} + \frac{m^2}{L^2} \right)^{1/2} \quad (4.15)$$

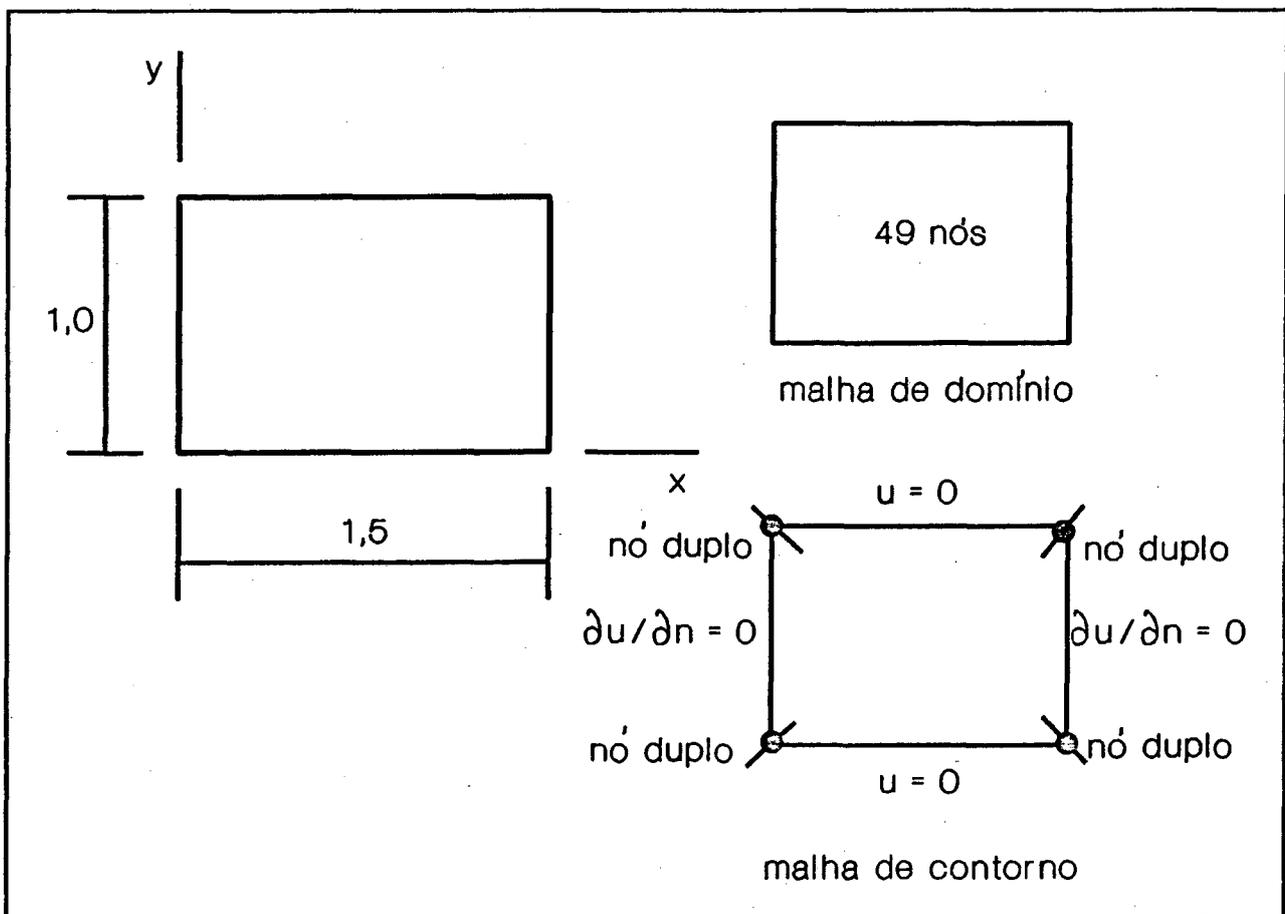


Figura 4.41: Membrana retangular com duas bordas livres e duas fixas.

Tabela 4.24: Membrana retangular com duas bordas opostas livres e duas fixas - frequências naturais (rad/s).

$\Omega_{m,n}$	analítica	MLGFM	erro (%)
$\Omega_{0,1}$	9,86960	9,86961	$0,6233 \times 10^{-04}$
$\Omega_{1,1}$	14,25609	14,25611	$0,9632 \times 10^{-04}$
$\Omega_{2,1}$	27,41557	27,41617	$0,2183 \times 10^{-02}$
$\Omega_{0,2}$	39,47842	39,50156	$0,5861 \times 10^{-01}$
$\Omega_{1,2}$	43,86491	43,88806	$0,5277 \times 10^{-01}$
$\Omega_{3,1}$	49,34802	50,41426	2,161
$\Omega_{2,2}$	57,02438	57,04811	$0,4162 \times 10^{-01}$
$\Omega_{3,2}$	78,95684	80,04621	1,380
$\Omega_{4,1}$	80,05346	84,49948	5,554
$\Omega_{0,3}$	88,82644	89,17363	0,3909

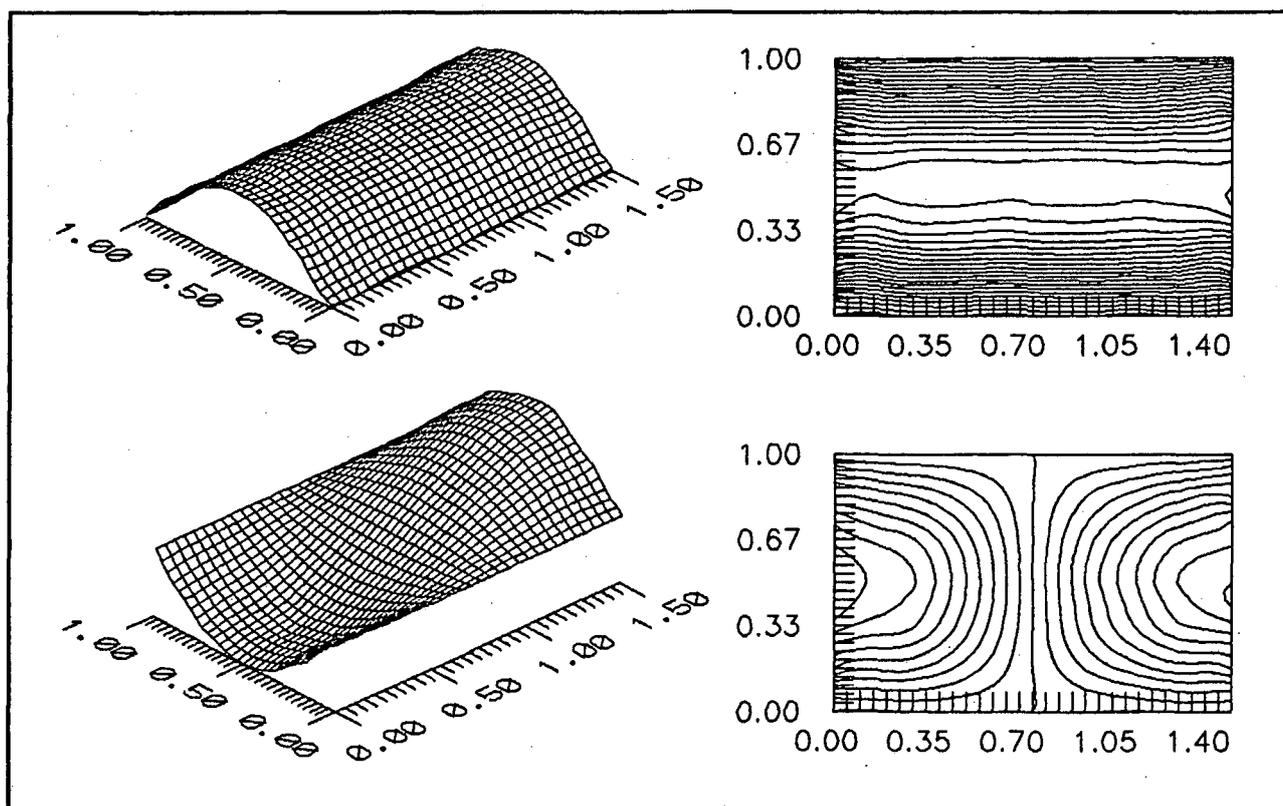


Figura 4.42: Modos 1 e 2 para membrana com duas bordas opostas livres e duas fixas.

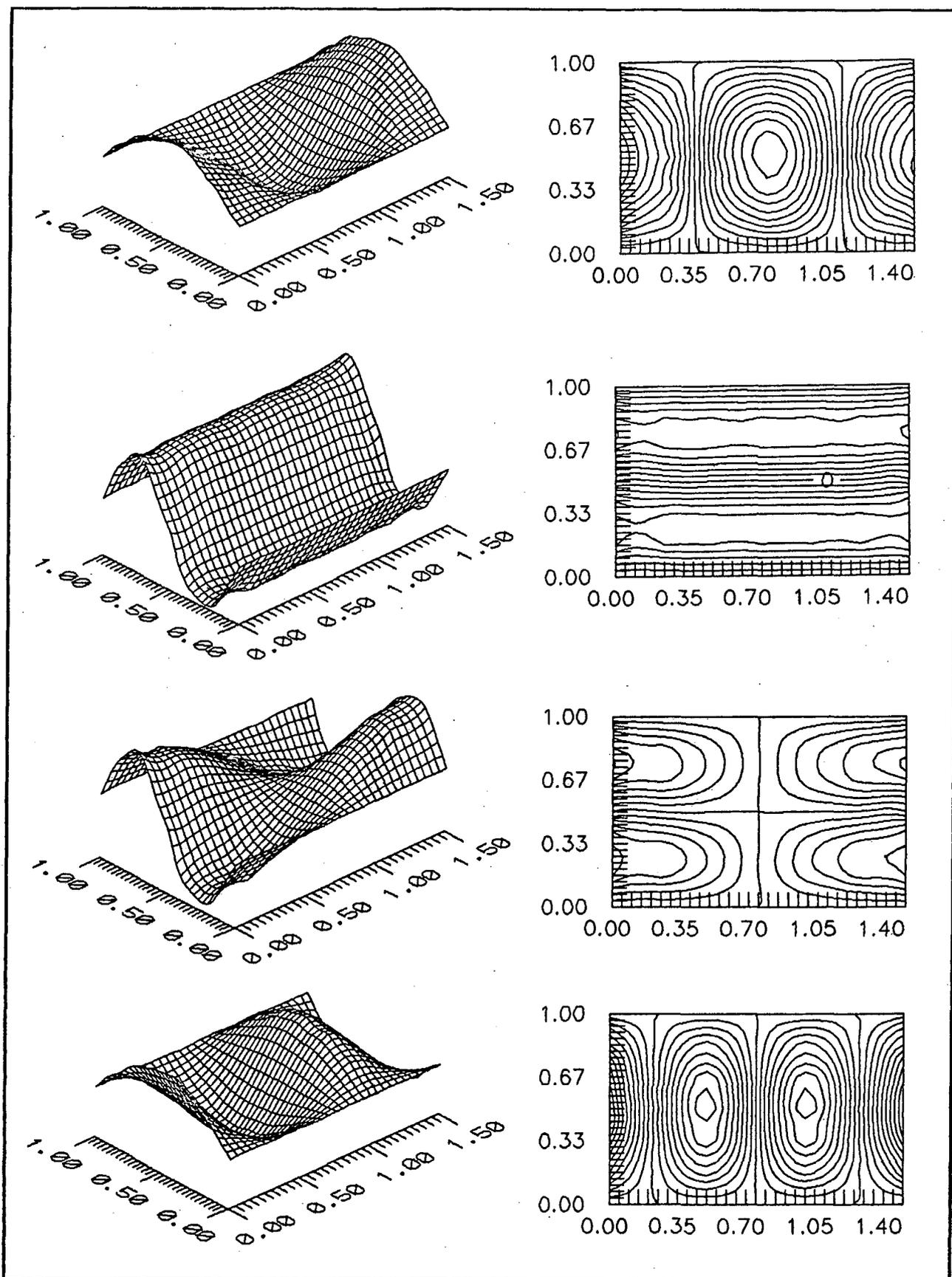


Figura 4.43: Modos 3, 4, 5 e 6 para membrana com duas bordas opostas livres e duas fixas.

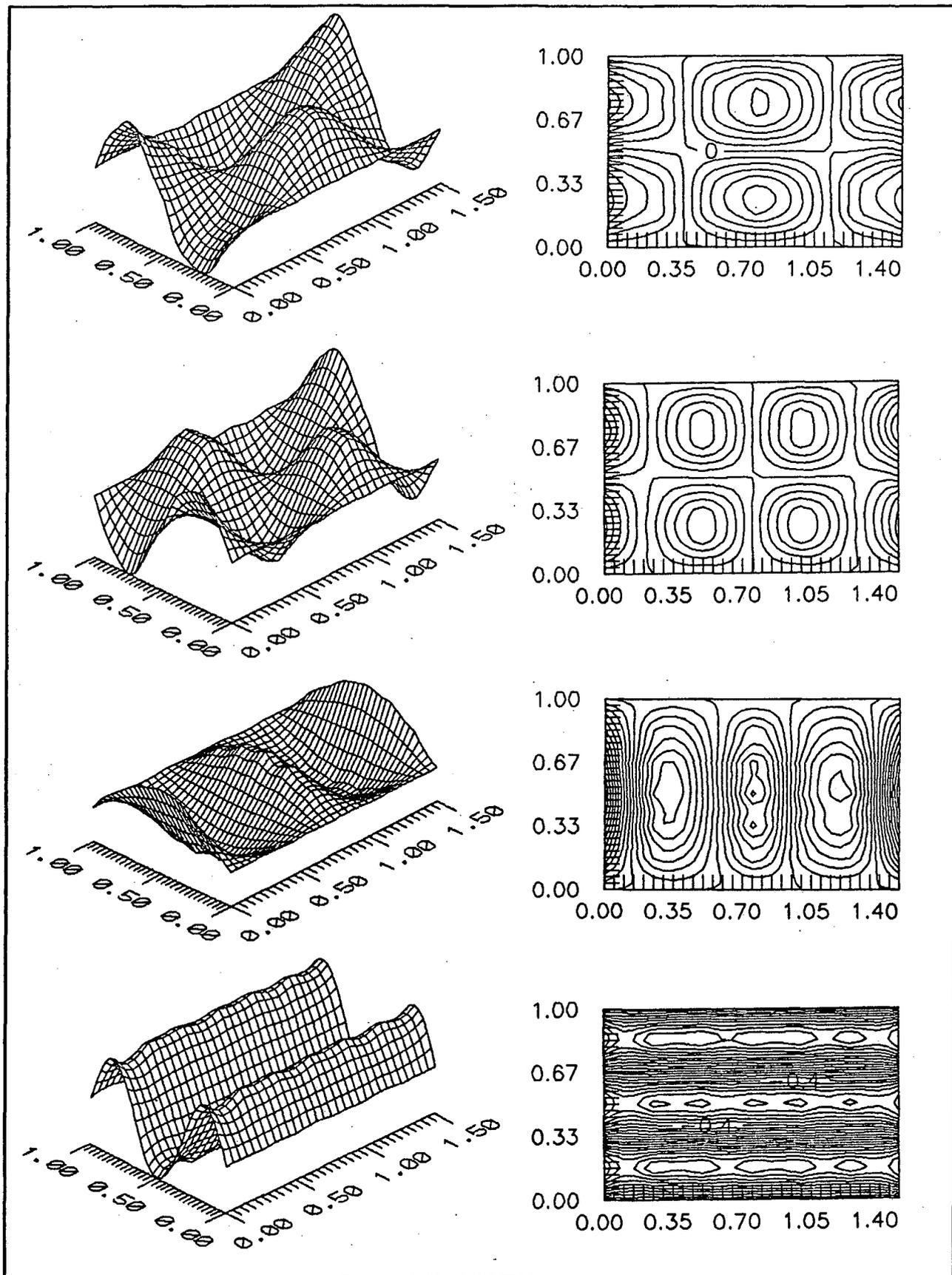


Figura 4.44: Modos 7, 8, 9 e 10 para membrana com duas bordas opostas livres e duas fixas.

Aplicação 20: Membrana retangular com duas bordas adjacentes livres e duas fixas.

O mesmo problema anterior, agora com a membrana fixa em duas bordas adjacentes e livre nas outras duas, com a mesma discretização, é apresentado na Figura 4.45. Na Tabela 4.25 veêm-se os resultados comparados com a solução analítica. Nas Figuras 4.46, 4.47 e 4.48 são apresentados os 10 primeiros modos de vibração. A solução analítica é

$$\Omega_{m,n} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{n^2}{M^2} + \frac{m^2}{L^2} \right)^{1/2} \quad (4.16)$$

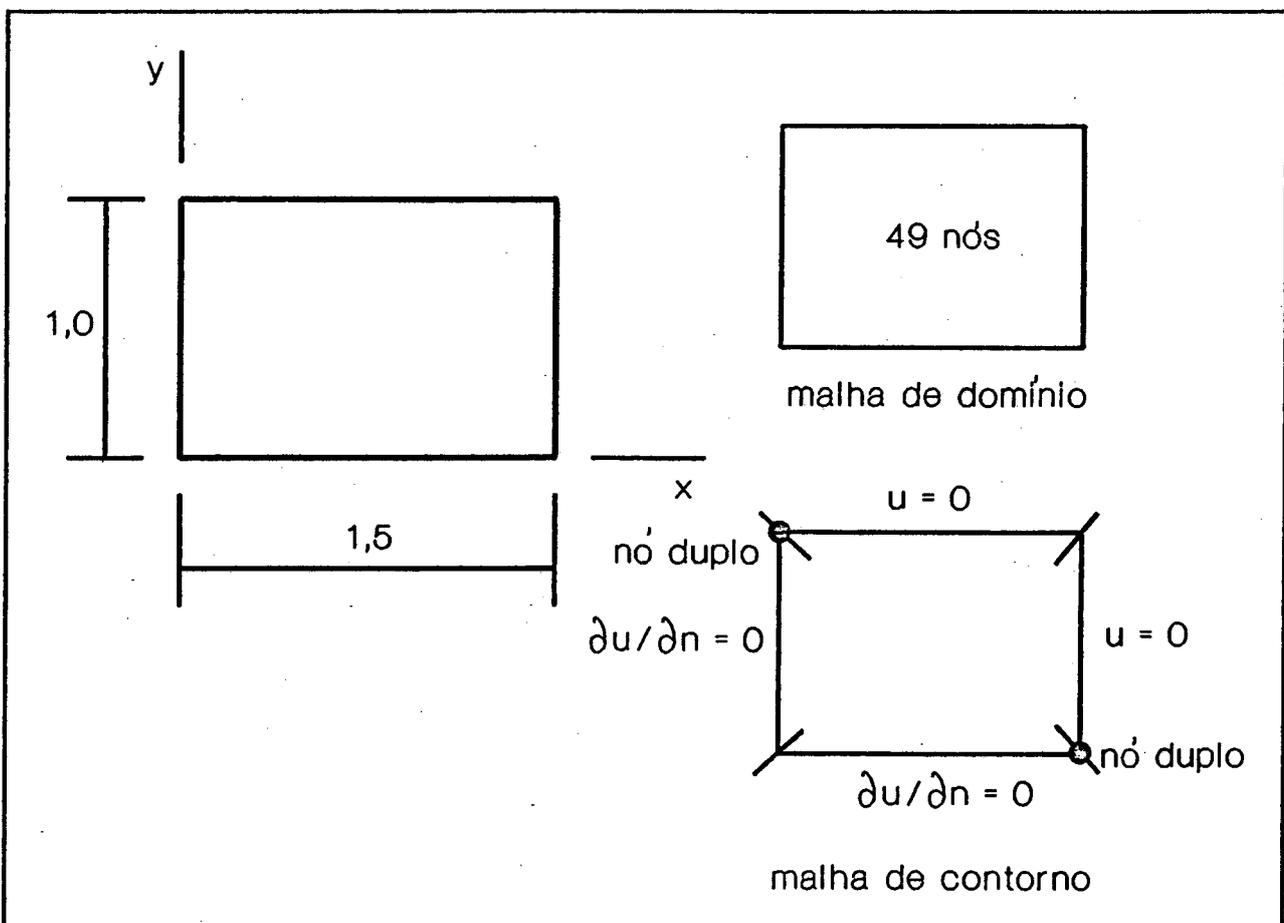


Figura 4.45: Membrana retangular com duas bordas adjacentes livres e duas fixas.

Tabela 4.25: Membrana retangular com duas bordas adjacentes fixas e duas livres (rad/s).

$\Omega_{m,n}$	analítica	MLGFM	erro (%)
$\Omega_{1,1}$	3,56402	3,56404	$0,4247 \times 10^{-03}$
$\Omega_{3,1}$	12,33700	12,33715	$0,1217 \times 10^{-02}$
$\Omega_{1,3}$	23,30322	23,30355	$0,1369 \times 10^{-02}$
$\Omega_{5,1}$	29,88297	29,96189	0,2641
$\Omega_{3,3}$	32,07621	32,07667	$0,1415 \times 10^{-02}$
$\Omega_{5,3}$	49,62218	49,70140	0,1597
$\Omega_{7,1}$	56,20192	59,00380	4,985
$\Omega_{1,5}$	62,78165	62,95921	0,2828
$\Omega_{3,5}$	71,55463	71,73232	0,2483
$\Omega_{7,3}$	75,94113	78,74331	3,690

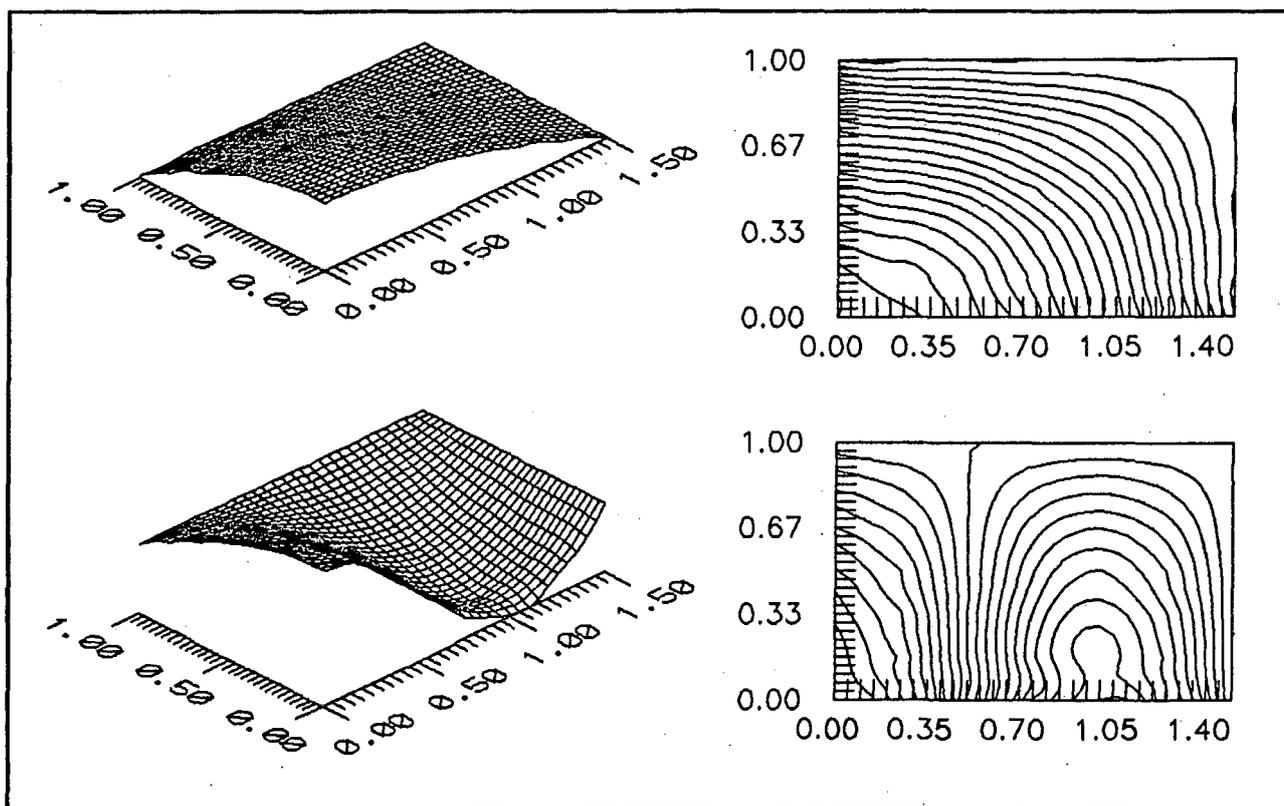


Figura 4.46: Modos 1 e 2 para membrana com duas bordas adjacentes livres e duas fixas.

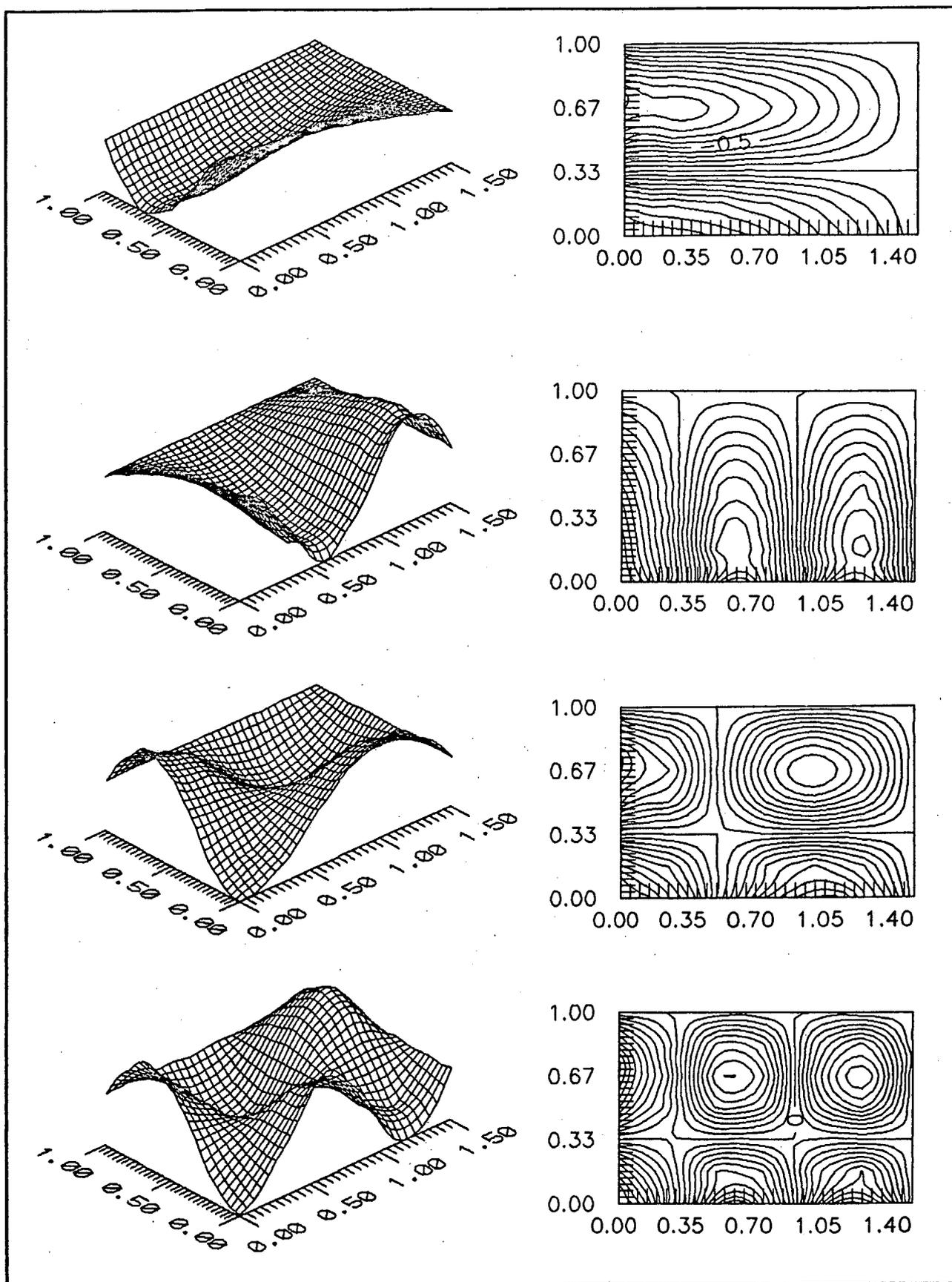


Figura 4.47: Modos 3, 4, 5 e 6 para membrana com duas bordas adjacentes livres e duas fixas.

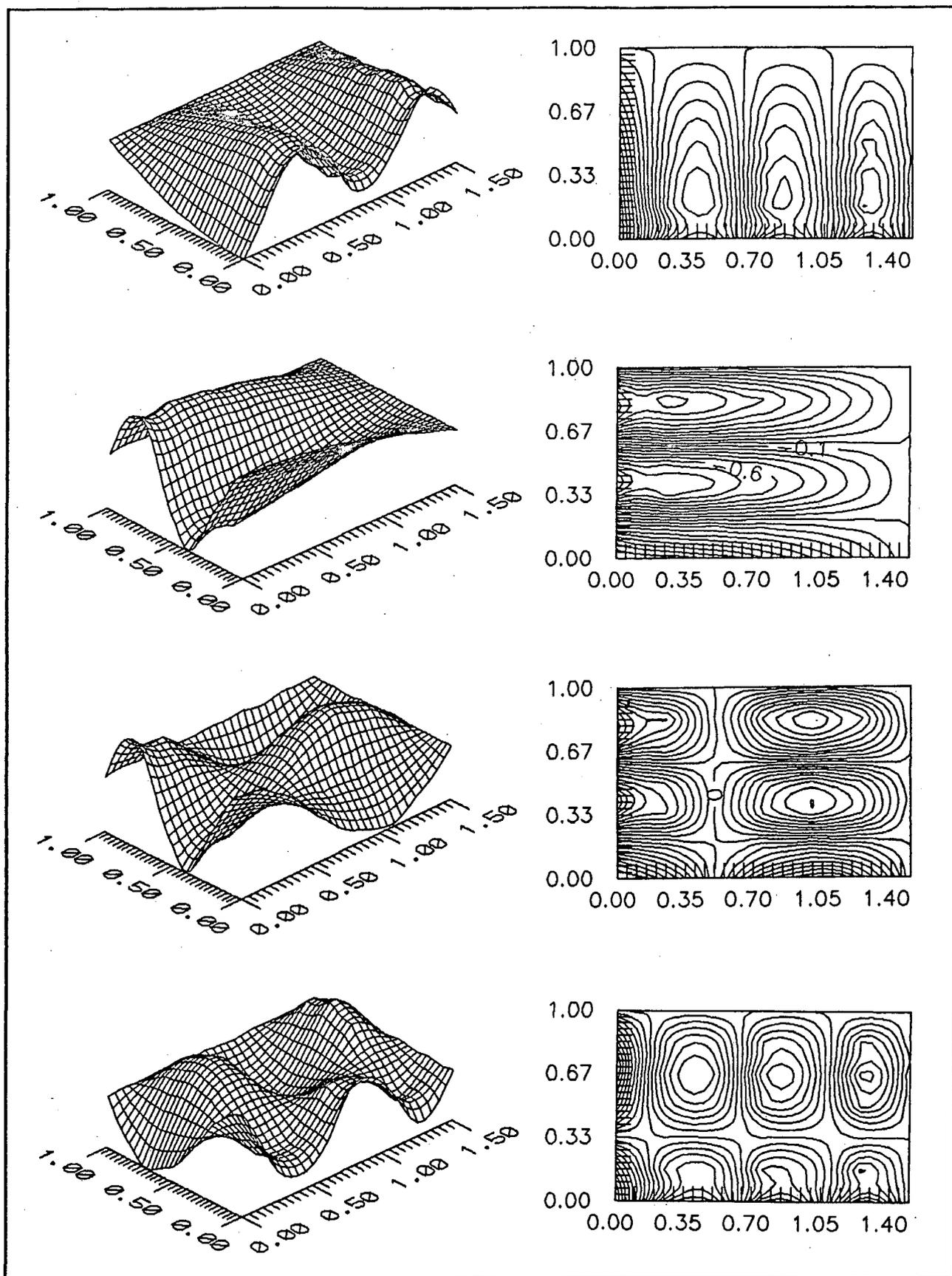


Figura 4.48: Modos 7, 8, 9 e 10 para membrana com duas bordas adjacentes livres e duas fixas.

Aplicação 21: Membrana rômica com duas bordas opostas livres e duas fixas.

Resultados numéricos para os autovalores de uma membrana rômica com duas bordas opostas livres e duas fixas foram obtidos com a discretização do domínio com apenas um elemento finito de oitava ordem (81 nós) e quatro elementos de contorno, também de oitava ordem. Foram consideradas cinco geometrias que se diferenciam pelo valor do ângulo θ , medido entre o eixo y e o lado do losango, que mede 1,0 unidade de comprimento, conforme a Figura 4.49. O ângulo θ assume os valores 15° , 30° , 45° , 60° e 75° . Os valores calculados são comparados com alguns resultados obtidos por STADTER (1966)[72] que utilizou o método desenvolvido por Fox [34] para a obtenção de aproximações superiores e inferiores para os autovalores que apresentavam simetria em relação ao centro da membrana. Os autovalores são apresentados nas Tabelas 4.26, 4.27, 4.28, 4.29 e 4.30, na forma λ/π^2 .

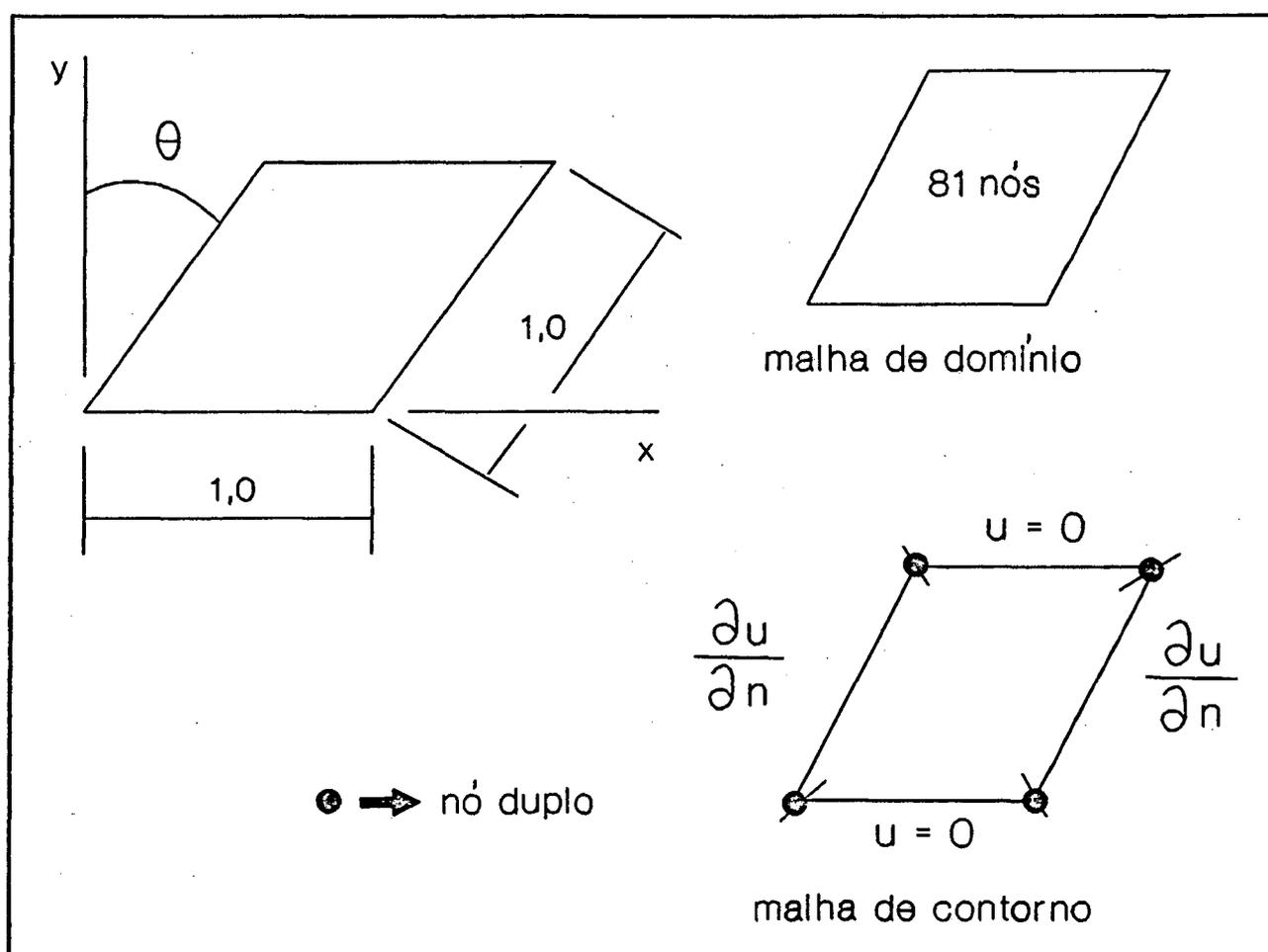


Figura 4.49: Membrana rômica com duas bordas opostas livres e duas fixas.

Tabela 4.26: Autovalores de membrana rômica com duas bordas livres e duas fixas com $\theta = 15^\circ$ (rad/s).

λ/π^2	STADTER		MLGFM
	inferior	superior	
1	1,0301	1,0806	1,0505
2	-	-	2,0628
3	-	-	4,2389
4	4,6092	4,8526	4,7183
5	5,5775	5,9283	5,6992
6	-	-	7,8268
7	9,1966	9,8215	9,5154
8	-	-	10,3933
9	-	-	11,0374
10	11,638	12,519	12,0210
11	14,047	15,612	14,4848
12	-	-	16,5855
13	16,598	18,633	17,5498
14	-	-	17,9693
15	18,096	19,553	18,5952
16	-	-	20,7271

Tabela 4.27: Autovalores de membrana rômica com duas bordas livres e duas fixas com $\theta = 30^\circ$ (rad/s).

λ/π^2	STADTER		MLGFM
	inferior	superior	
1	1,1820	1,3220	1,2286
2	-	-	2,2855
3	-	-	4,8214

λ/π^2	STADTER		MLGFM
	inferior	superior	
4	4,6585	5,1547	5,0550
5	6,8002	7,7875	7,0493
6	-	-	7,9378
7	9,8390	12,276	10,7822
8	-	-	11,7257
9	12,217	13,185	12,5541
10	-	-	13,7697
11	-	-	16,5397
12	15,443	19,846	16,5750
13	-	-	19,8500
14	-	-	20,5641
15	-	-	23,3585
16	-	-	23,5254

Tabela 4.28: Autovalores de membrana rômica com duas bordas livres e duas fixas com $\theta = 45^\circ$ (rad/s).

λ/π^2	STADTER		MLGFM
	inferior	superior	
1	1,5474	1,9137	1,6537
2	-	-	2,8132
3	5,2513	6,2262	5,4764
4	-	-	6,7366
5	-	-	9,2138
6	9,3235	11,860	9,6824
7	-	-	12,0756

λ/π^2	STADTER		MLGFM
	inferior	superior	
8	10,970	15,799	14,3099
9	-	-	17,0974
10	15,710	19,025	17,1400
11	-	-	19,9031
12	-	-	21,6434
13	-	-	23,1505
14	-	-	25,2075
15	-	-	30,6568
16	-	-	31,4435

Tabela 4.29: Autovalores de membrana rômica com duas bordas livres e duas fixas com $\theta = 60^\circ$ (rad/s).

λ/π^2	STADTER		MLGFM
	inferior	superior	
1	2,5046	3,6533	2,8027
2	-	-	4,1860
3	6,9881	9,5382	7,4362
4	-	-	9,6209
5	-	-	13,9330
6	-	-	14,7681
7	-	-	18,0436
8	-	-	18,7924
9	-	-	25,1866
10	-	-	26,2051
11	-	-	30,3348
12	-	-	34,0380

λ/π^2	STADTER		MLGFM
	inferior	superior	
13	-	-	39,1700
14	-	-	39,7617
15	-	-	48,2918
16	-	-	49,7231

Tabela 4.30: Autovalores de membrana rômica com duas bordas livres e duas fixas com $\theta = 75^\circ$ (rad/s).

λ/π^2	STADTER		MLGFM
	inferior	superior	
1	6,8038	13,043	8,2264
2	-	-	10,0942
3	-	-	16,0302
4	14,233	27,428	19,3937
5	-	-	27,6824
6	-	-	34,9070
7	-	-	48,4175
8	-	-	51,5240
9	-	-	62,1812
10	-	-	70,0582
11	-	-	91,1395
12	-	-	93,1926
13	-	-	131,1442
14	-	-	131,3592
15	-	-	135,3738
16	-	-	160,9404

Aplicação 22: Membrana retangular com orifício retangular.

Apresentam-se frequências naturais de vibração de uma membrana retangular com um orifício central, também retangular, conforme Figura 4.50. O problema apresenta condição de contorno mista, onde a borda externa está sujeita a condição de contorno de Dirichlet e a borda interna está sob condição de contorno de Neumann. Como as bordas são disjuntas não há necessidade do emprego de nós duplos. Utilizou-se uma discretização composta de uma malha de 10 elementos finitos quárticos para a aproximação da função de Green e 20 elementos de contorno correspondentes para a discretização das equações integrais. Adotou-se o parâmetro $a = 12,0$ e o valor $(\rho/T)^{1/2} = 1,0$. Os valores para as seis primeiras frequências naturais de vibração são mostradas na Tabela 4.31.

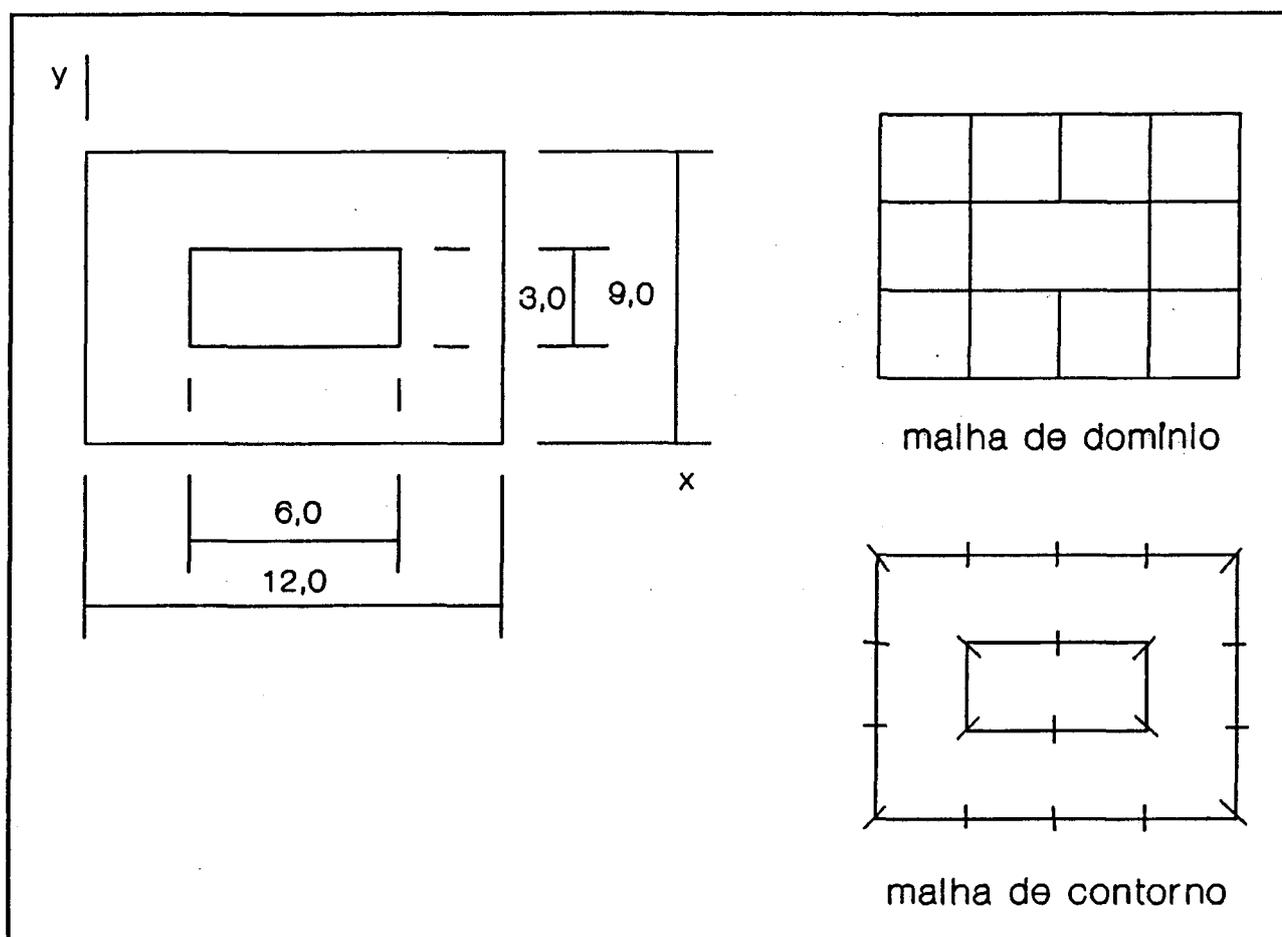


Figura 4.50: Membrana retangular com orifício retangular.

Tabela 4.31: Membrana retangular com orifício retangular (rad/s).

Ω_n	Frequência (s ⁻¹)
Ω_1	6,9056
Ω_2	7,4720
Ω_3	7,9096
Ω_4	9,4553
Ω_5	9,7526
Ω_6	11,9376

4.4 CONCLUSÕES.

Frequências naturais de vibração livre de membranas elásticas e cavidades acusticamente rígidas podem ser obtidas pelo Método da Função de Green Local Modificado com boa precisão. Não aparecem dificuldades semelhantes àquelas que podem ocorrer em certos problemas quando resolvidos pelo Método de Elementos Finitos ou pelo Método de Elementos de Contorno. Diversas geometrias sujeitas a quaisquer condições de contorno podem ser modeladas. Deve-se, porém, tomar certas precauções quando do modelamento de geometrias mais complexas, evitando a excessiva distorção dos elementos. Nestas situações a escolha de elementos de ordem elevada é bastante recomendável. A opção por elementos lineares não é interessante, já que os valores dos erros obtidos com o MLGFM são praticamente idênticos aqueles conseguidos com o Método de Elementos Finitos, para a mesma malha. Neste caso o esforço computacional com o MLGFM é maior em relação ao FEM.

Resultados para os modos de vibração também foram obtidos porém não expostos neste trabalho. Estes resultados serão apresentados em trabalhos futuros.

Condições de contorno não homogêneas, tanto de Dirichlet quanto de Neumann, podem ser implementadas sem grandes dificuldades. Portanto, a extensão da presente formulação para a solução de problemas de vibração livre em elasticidade linear e placas é a sucessão natural para este trabalho.

5 ANÁLISE EXPERIMENTAL DE CONVERGÊNCIA

Conforme exposto no Capítulo 4, foi implementada uma família de elementos finitos e elementos de contorno isoparamétricos, com funções de interpolação lagrangeanas. Esta família compõe-se de elementos quadrangulares a partir de elementos lineares até elementos de décima ordem. Portanto, é interessante que se examine a convergência dos resultados quando, para um mesmo problema, se aprimora ou a ordem do polinômio interpolador ou o grau de refinamento da malha aplicada para a discretização do problema em questão. Esta análise é útil no sentido de se estimar o comportamento das taxas de convergência para o método, visando sua aplicação com técnicas adaptativas. É sabido que tais técnicas são melhor empregadas com o uso de elementos hierárquicos, com função de interpolação como polinômios de Hermite. Porém, a fácil implementação dos elementos lagrangeanos e o conhecimento

de características de seu desempenho justificam o seu emprego nesta análise, já que este não é o objetivo principal do trabalho.

5.1 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA

A análise de convergência para o método foi realizada utilizando-se um problema simples, com solução analítica conhecida, evitando a inclusão de dificuldades de caráter particular a determinados tipos de problemas, visando avaliar apenas o comportamento da formulação. Os resultados são expostos em forma de convergência p -, variando-se o grau do polinômio interpolador mantendo-se a mesma malha, e em forma de convergência h -, onde se mantém a ordem do elemento e varia-se a malha, refinando-a. O refinamento da malha empregado é regular e a malha é uniforme. Em relação a uma malha inicial 1×1 o refinamento é aninhado, onde os pontos nodais da malha original permanecem na mesma posição na malha refinada. Os refinamentos, tanto p como h foram feitos até que o problema continuasse solucionável pelos equipamentos disponíveis. O código computacional desenvolvido não está otimizado, dificultando a avaliação dos tempos de execução do mesmo.

5.2 RESULTADOS NUMÉRICOS

O problema empregado para análise de convergência, tanto para a condição de contorno do Dirichlet quanto para a condição de contorno de Neumann, foi uma geometria retangular com dimensões $[0; 1,414] \times [0; 1,000]$, onde, portanto, $a = 1,414$. Foram escolhidas dimensões onde a razão de aspecto, dimensão menor em relação a dimensão maior, fosse um número irracional, para evitar o aparecimento de modos com frequências iguais, para que não fosse incluída nenhuma característica particular na análise.

5.2.1 Membrana Elástica.

Aplicando-se condições de contorno de Dirichlet ao problema, tem-se uma membrana elástica com as bordas fixas, onde adota-se $(\rho/T)^{\frac{1}{2}} = 1,0$. Neste caso, não é possível utilizar-se uma malha 1×1 com elementos lineares, já que como todos os nós do contorno têm valores prescritos não há nós internos para obtenção de resultados. Apresentam-se resultados apenas para a primeira frequência natural de vibração, com refinamentos p e h . O valor exato para a primeira frequência natural é $5,4413981 \text{ s}^{-1}$. Os valores são mostrados na Tabela 5.1 e Figuras 5.1 e 5.2.

Tabela 5.1: Convergência p - e h - para membrana elástica.

h	p	n° de nós	MLGFM	erro (%)
1,000 (1 x 1)	2	9	5,4772256	0,658
	3	16	5,4772256	0,658
	4	25	5,4414381	$0,736 \times 10^{-03}$
	5	36	5,4414381	$0,736 \times 10^{-03}$
	6	49	5,4413981	$0,172 \times 10^{-06}$
	7	64	5,4413981	$0,172 \times 10^{-06}$
	8	81	5,4413981	$0,785 \times 10^{-11}$
	9	100	5,4413981	$0,299 \times 10^{-11}$
	10	121	5,4413981	$0,298 \times 10^{-09}$
0,500 (2 x 2)	1	9	6,0000000	10,27
	2	25	5,4618257	0,375
	3	49	5,4417697	$0,683 \times 10^{-02}$
	4	81	5,4414018	$0,683 \times 10^{-04}$
	5	121	5,4413981	$0,431 \times 10^{-06}$
	6	169	5,4413981	$0,187 \times 10^{-08}$
	7	225	5,4413981	$0,554 \times 10^{-11}$
	8	289	5,4413981	$0,124 \times 10^{-11}$
0,333 (3 x 3)	1	16	5,6920998	4,607
	2	49	5,4456988	$0,790 \times 10^{-01}$
	3	100	5,4414323	$0,629 \times 10^{-03}$
	4	169	5,4413982	$0,276 \times 10^{-05}$
	5	256	5,4413981	$0,276 \times 10^{-05}$
	6	361	5,4413981	$0,278 \times 10^{-05}$
	7	484	5,4413981	$0,278 \times 10^{-05}$

h	p	n° de nós	MLGFM	erro (%)
0,250 (4 x 4)	1	25	5,5821077	2,586
	2	81	5,4427913	$0,256 \times 10^{-01}$
	3	169	5,4414043	$0,114 \times 10^{-03}$
	4	289	5,4413981	$0,250 \times 10^{-05}$
0,200 (5 x 5)	1	36	5,5312901	1,652
	2	121	5,4419752	$0,106 \times 10^{-01}$
	3	256	5,4413997	$0,273 \times 10^{-04}$
	4	441	5,4413981	$0,547 \times 10^{-05}$
0,167 (6 x 6)	1	49	5,5037502	1,146
	2	169	5,4416781	$0,515 \times 10^{-02}$
	3	361	5,4413986	$0,734 \times 10^{-05}$
0,143 (7 x 7)	1	64	5,4871727	0,8412
	2	225	5,4415498	$0,278 \times 10^{-02}$
	3	484	5,4413983	$0,124 \times 10^{-05}$
0,125 (8 x 8)	1	81	5,4764260	0,6437
	2	289	5,4414872	$0,164 \times 10^{-02}$
0,111 (9 x 9)	1	100	5,4764260	0,6437
	2	361	5,4414538	$0,102 \times 10^{-02}$
0,100 (10 x 10)	1	121	5,4690643	0,5084
	2	441	5,4414347	$0,670 \times 10^{-03}$

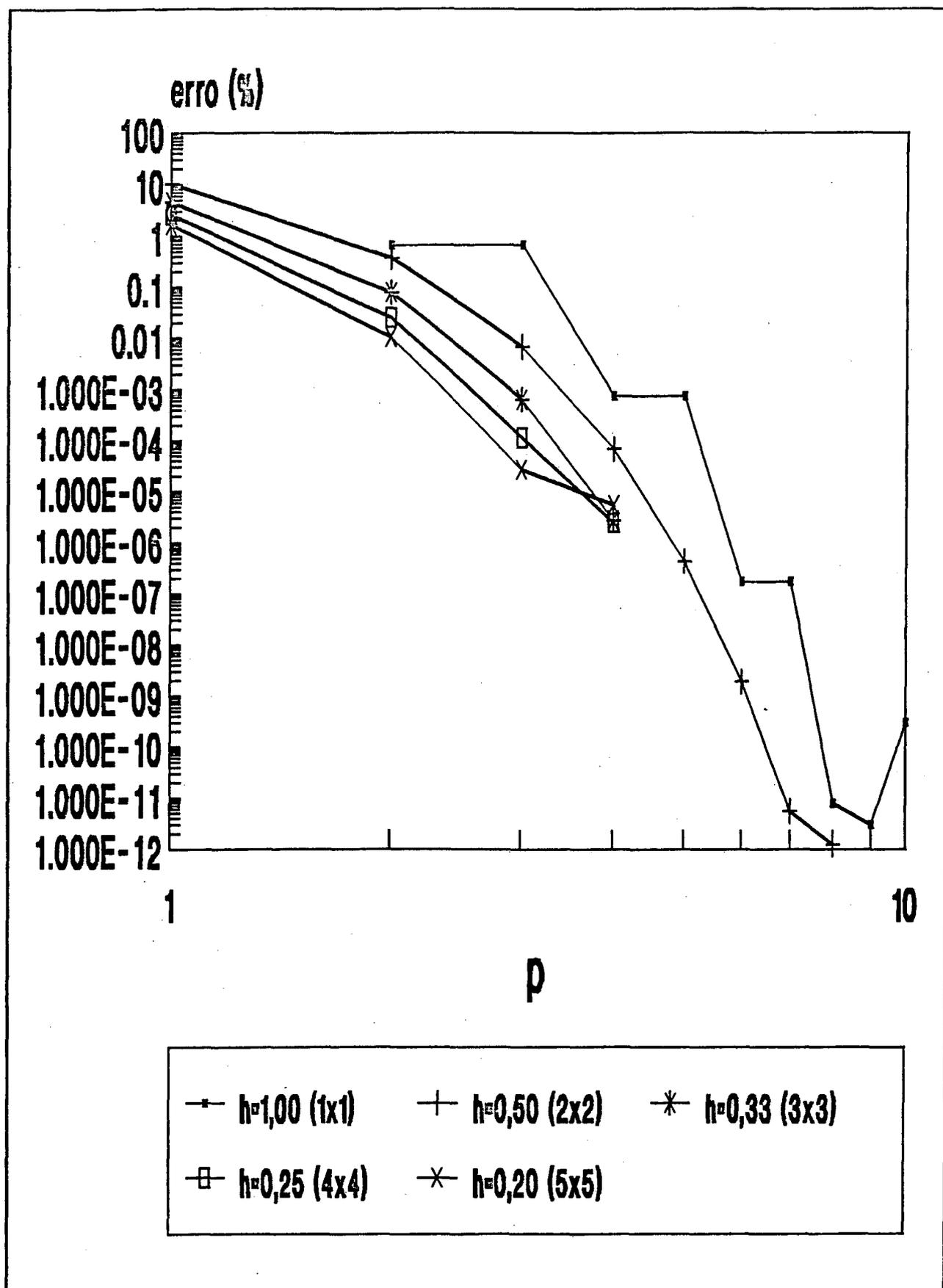


Figura 5.1: Convergência p - (1x1 - 5x5).

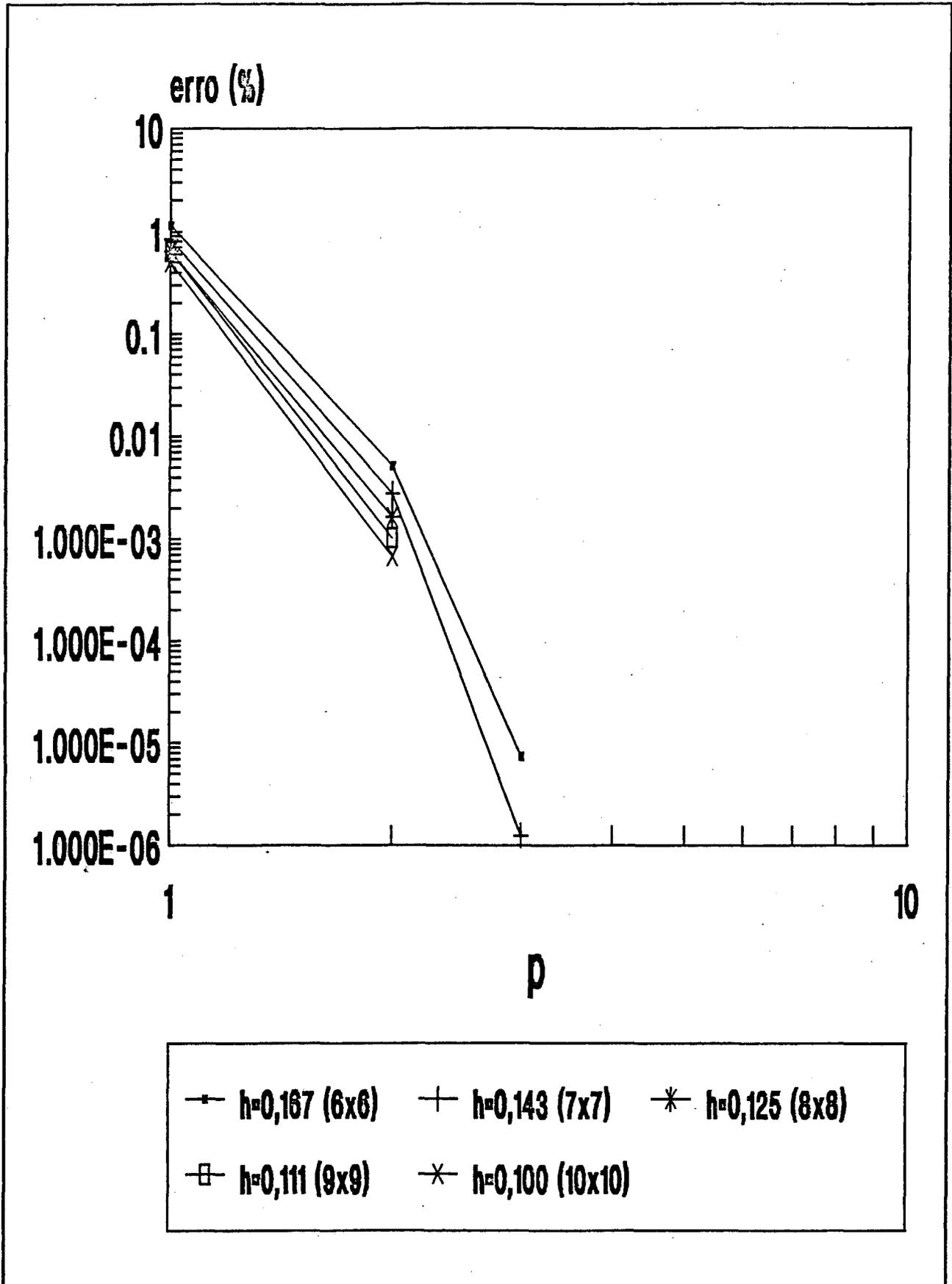


Figura 5.2: Convergência p - (6x6 - 10x10)

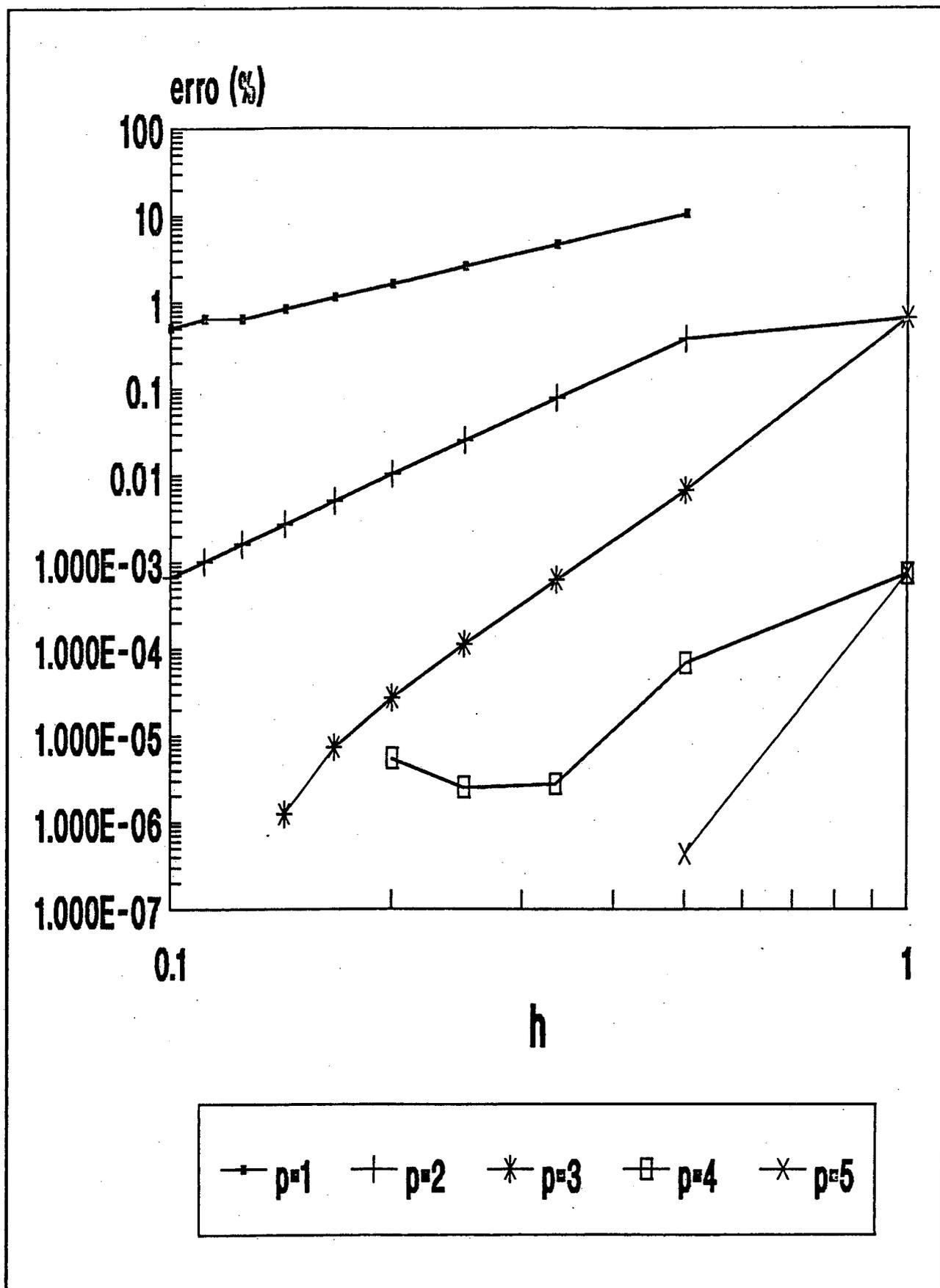
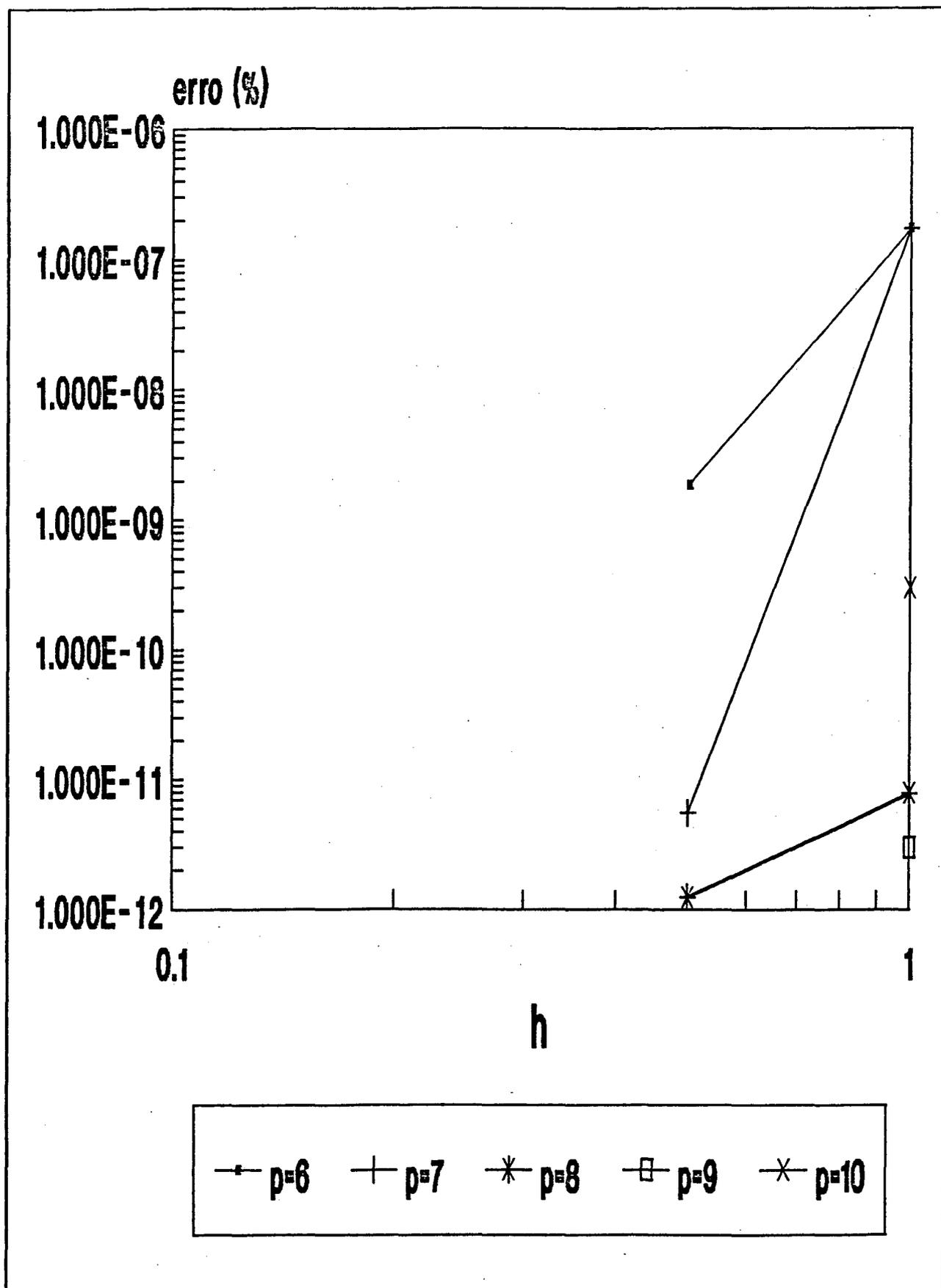


Figura 5.3: Convergência h - ($p=1 - p=5$).

Figura 5.4: Convergência h - ($p=6 - p=10$).

5.2.2 Cavidade Acusticamente Rígida.

Aplicando-se condições de contorno de Neumann ao problema, tem-se uma cavidade acusticamente rígida, com paredes impermeáveis ao fluxo sonoro, onde adota-se $c = 340$ m/s como velocidade de propagação do som no meio. Apresentam-se resultados apenas para a primeira frequência natural de ondas, com refinamento p - e h -. Os valores são mostrados na Tabela 5.2 e comparados com a solução analítica que é π s⁻¹. As curvas de convergência p -, para enriquecimento da ordem das funções de interpolação para malhas uniformes, desde $h = 1$ (malha 1x1) até $h = 0,1$ (malha 10x10), são mostradas nas Figuras 5.5 e 5.6. A curva de convergência h -, para refino sucessivo da malha com elementos de primeira ordem até elementos de décima ordem, é mostrada na Figura 5.7.

Tabela 5.2: Convergência p - e h -, cavidade acusticamente rígida.

h	p	n° de nós	MLGFM	erro (%)
1,000 (1 x 1)	1	4	3,4641047	10,27
	2	9	3,4641059	10,27
	3	16	3,1424710	0,279x10 ⁻⁰¹
	4	25	3,1424725	0,280x10 ⁻⁰¹
	5	36	3,1416001	0,234x10 ⁻⁰³
	6	49	3,1416014	0,277x10 ⁻⁰³
	7	64	3,1416024	0,306x10 ⁻⁰³
	8	81	3,1416037	0,349x10 ⁻⁰³
	9	100	3,1416051	0,393x10 ⁻⁰³
	10	121	3,1416064	0,434x10 ⁻⁰³
0,500 (2 x 2)	1	9	3,4641072	10,27
	2	25	3,1533932	0,376
	3	49	3,1418165	0,712x10 ⁻⁰²
	4	81	3,1416068	0,446x10 ⁻⁰³
	5	121	3,1416073	0,465x10 ⁻⁰³

h	p	n° de nós	MLGFM	erro (%)
	6	169	3,1416100	$0,550 \times 10^{-03}$
	7	225	3,1416127	$0,636 \times 10^{-03}$
	8	289	3,1416154	$0,772 \times 10^{-03}$
	9	361	3,1416181	$0,808 \times 10^{-03}$
0,333 (3 x 3)	1	16	3,2863430	4,608
	2	49	3,1440863	$0,794 \times 10^{-01}$
	3	100	3,1416271	$0,109 \times 10^{-02}$
	4	169	3,1416115	$0,596 \times 10^{-03}$
	5	256	3,1416154	$0,722 \times 10^{-03}$
	6	361	3,1416195	$0,851 \times 10^{-03}$
0,250 (4 x 4)	1	25	3,2228414	2,586
	2	81	3,1424117	$0,267 \times 10^{-01}$
	3	169	3,1416163	$0,750 \times 10^{-03}$
	4	289	3,1416181	$0,808 \times 10^{-03}$
0,200 (5 x 5)	1	36	3,1935044	1,652
	2	121	3,1419446	$0,112 \times 10^{-01}$
	3	256	3,1416191	$0,838 \times 10^{-03}$
0,167 (6 x 6)	1	49	3,1776069	1,146
	2	169	3,1417771	$0,587 \times 10^{-02}$
	3	361	3,1416238	$0,990 \times 10^{-03}$
0,143 (7 x 7)	1	64	3,1680385	0,842
	2	225	3,1416238	$0,990 \times 10^{-03}$
0,125 (8 x 8)	1	81	3,1618365	0,644
	2	289	3,1416750	$0,262 \times 10^{-02}$

h	p	n° de nós	MLGFM	erro (%)
0,111 (9 x 9)	1	100	3,1575889	0,509
	2	361	3,1416598	$0,213 \times 10^{-02}$
0,10(10x10)	1	121	3,1545532	0,412

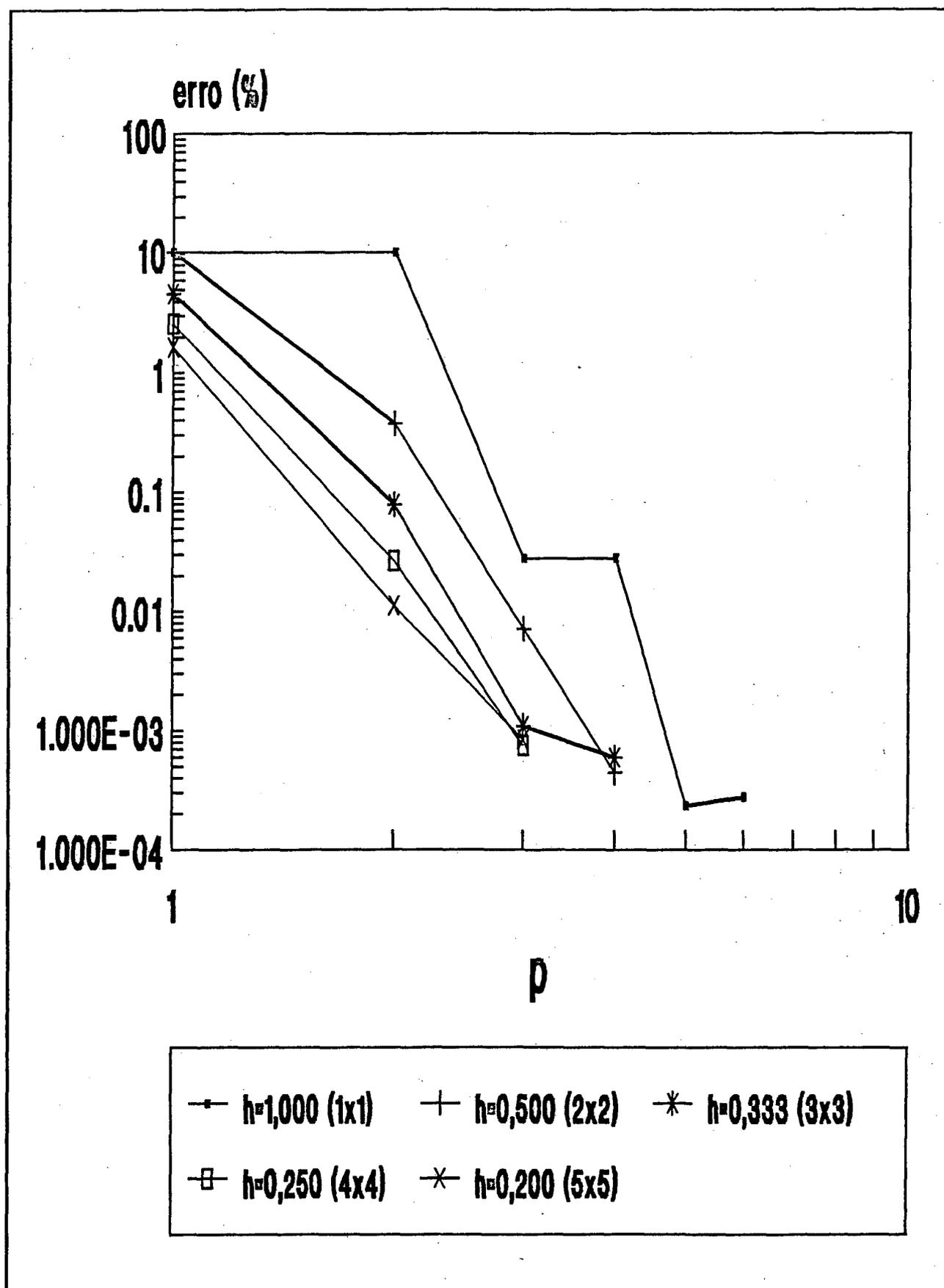
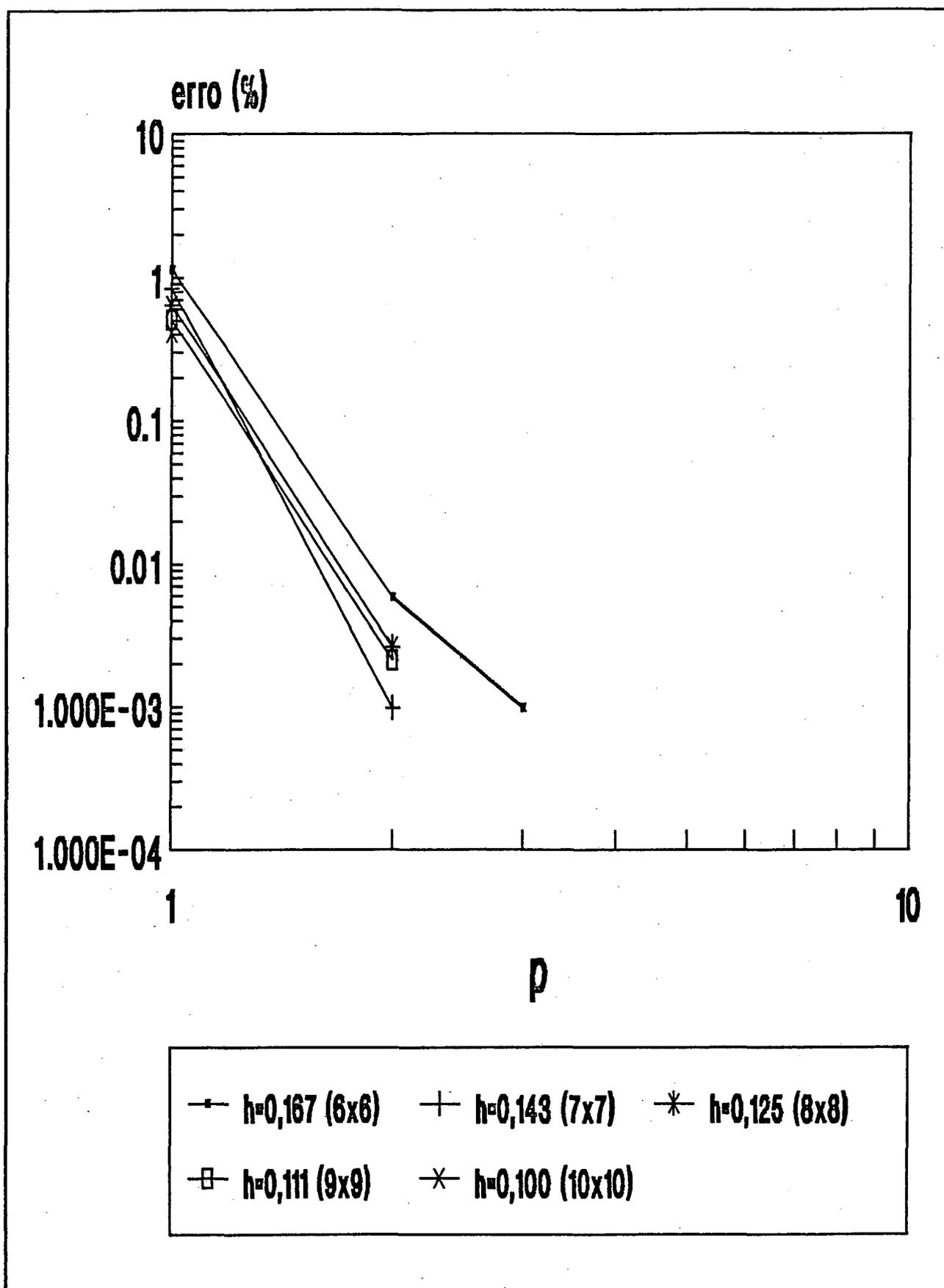


Figura 5.5: Convergência p -, (1x1 - 5x5).

Figura 5.6: Convergência p -, (6x6 - 10x10).

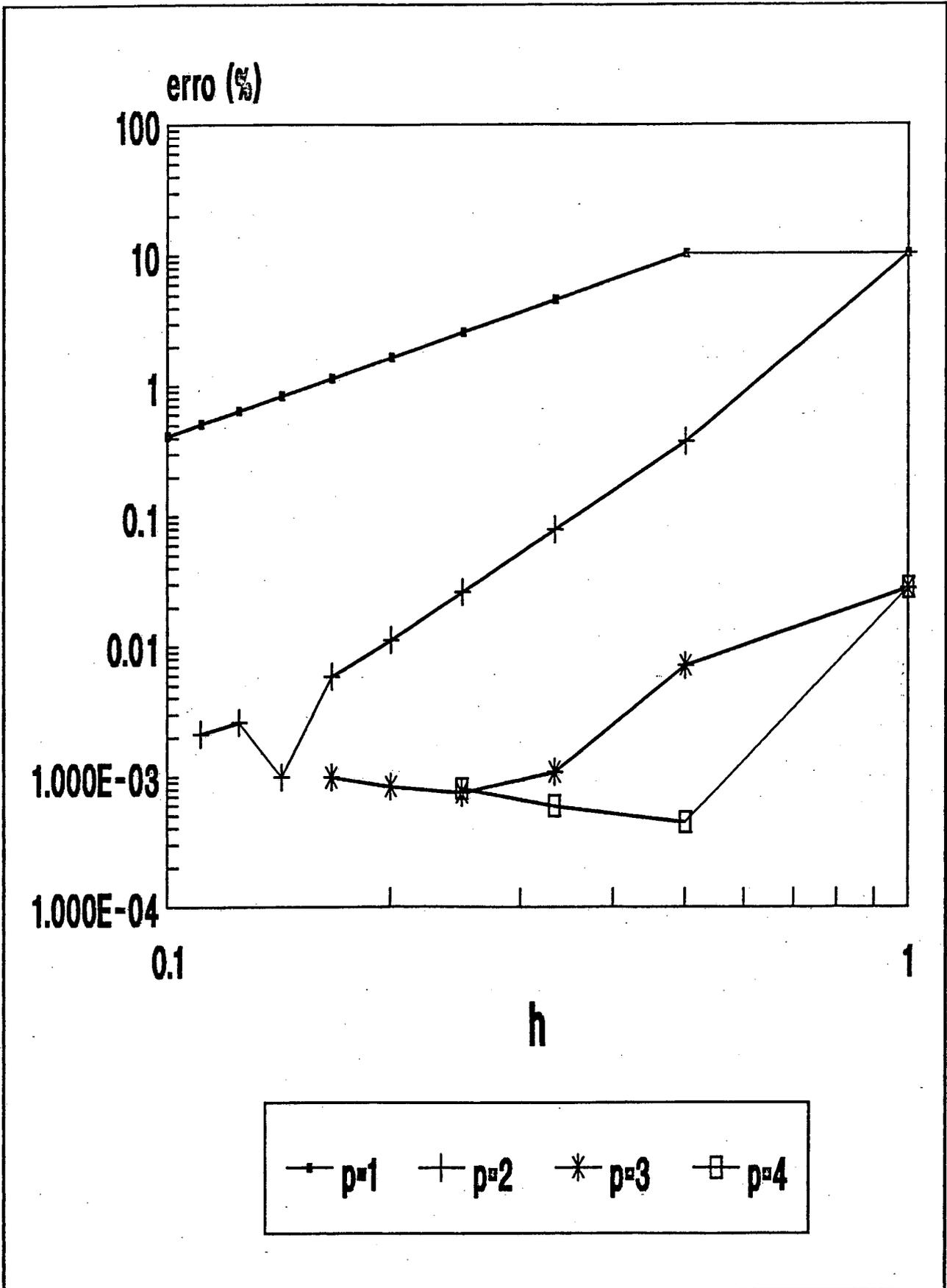


Figura 5.7: Convergência h -.

Analisando-se os resultados percebe-se que a precisão destes, em alguns casos, atinge um "teto", a partir do qual não se consegue melhora nos valores mesmo com enriquecimento da malha. Este fato é explicado por dois fatores: a precisão do equipamento e a regularidade do problema. Primeiro, como nota-se na Tabela 5.1 e na Figura 5.2 para a curva correspondente a $p = 4$, os resultados que atingem uma precisão com erro da ordem de até 10^{-11} % foram obtidos com o Intergraph I 200 (MicroVax) e aqueles que estão limitados em erro de 10^{-05} %, com o Convex C 210; este fato está associado com a arquitetura do equipamento, onde o MicroVax apresenta uma precisão maior em operações de ponto flutuante. Segundo, como o problema é bem comportado, sua solução é bastante regular, atingindo precisão elevada com pequeno enriquecimento de malha. Aliando estes dois fatores, tem-se um limite numérico para os resultados. Porém, este limite para a precisão dos resultados não os inviabiliza, visto que a precisão obtida é extremamente satisfatória para problemas reais. Apenas não foi possível mostrar que a solução numérica do problema aproxima-se cada vez mais da solução exata com o enriquecimento/refino da malha, em todas as situações, já que com erros da ordem de 10^{-11} % se capta a solução exata com 12 casas decimais precisas, onde são tomados dados com 15 casas decimais.

Analisando-se as Figuras 5.1 e 5.3, notam-se patamares onde os resultados permanecem constantes com o enriquecimento da malha. Este fato se deve à paridade da solução do problema em relação ao elemento empregado na análise. Para modos de vibração que são simétricos em relação aos eixos coordenados, como o primeiro modo para uma geometria quadrangular regular (modo "bolha"), não há melhoria nos resultados quando se enriquece o polinômio interpolador de segundo para terceiro grau, visto que um polinômio cúbico é ímpar. Portanto somente ocorre melhoria quando se aplica uma interpolação quártica, onde, agora, tal polinômio contribui para a aproximação da solução. A mesma situação ocorre quando se enriquece a malha de funções quárticas para funções de quinto grau, ou de sexto grau para sétimo grau, e assim sucessivamente. Quando a malha apresenta algum refino, esta dependência da paridade da solução tende a desaparecer, para o primeiro modo, permanecendo, porém, nos subsequêntes que apresentem alguma simetria com os eixos cartesianos (FILIPPIN, BARBIERI & BARCELLOS (1992)[30]).

As curvas referentes às taxas experimentais de convergências obtidas sugerem um comportamento bastante bom para o desempenho do MLGFM aliado a técnicas adaptativas, visto que para tais técnicas, com o objetivo de se trabalhar sempre com malha ótima, os refinamentos e/ou enriquecimentos da malha tendem a apresentar um comportamento melhor que este aqui mostrado.

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O desenvolvimento do Método da Função de Green Local Modificado para a equação de Helmholtz foi a primeira aplicação do método para análise dinâmica, particularmente para a análise modal. Os resultados obtidos validam o procedimento e enfatizam a presença de superconvergência nodal para os autovalores (frequências naturais), como já acontece na análise estática. Esta superconvergência precisa, ainda, ser explorada e necessita de um estudo matemático mais aprofundado.

Outra característica percebida na análise dos resultados é o fato de que o refinamento da malha, tanto p - como h -, melhora sensivelmente os resultados. Não há uma formulação matemática para a estimativa de erro para o Método da Função de Green Local Modificado, porém os valores obtidos para a análise experimental de convergência sugerem taxas semelhantes ou melhores que aquelas apresentadas pelo Método de Elementos Finitos.

Um aspecto pertinente à formulação do método, que também aparece na análise dinâmica, é a possibilidade de sua aplicação em meios onde não existe solução fundamental, de modo que o Método da Função de Green Local Modificado tem uma grande aplicação onde o Método de Elementos de Contorno tradicional ainda não se aplica.

A sensibilidade à distorção dos elementos da malha se faz presente, sendo, porém, amenizada com o emprego de elementos de maior ordem, que, pela existência de superconvergência nodal, compensam a ligeira perda de precisão devido à distorção. Deve-se, entretanto, evitar a excessiva distorção para que não se incorra em subintegração muito acentuada do elemento, devido ao Jacobiano tornar-se uma função de ordem elevada. O emprego de elementos lineares não fornece resultados melhores que aqueles obtidos pelo Método de Elementos Finitos. Portanto a sua utilização não é recomendada.

A obtenção das frequências naturais de vibração em geometrias que apresentam certas peculiaridades, como cantos reentrantes, por exemplo, apresentam alguma dificuldade para a solução pelo Método de Elementos Finitos ou pelo Método de Elementos de Contorno, necessitando de certos artifícios para a sua aplicação. Empregando o Método da Função de Green Local Modificado estes problemas são tratados de maneira semelhante aqueles mais regulares, sem que estas peculiaridades apresentem dificuldade.

O bom desempenho do método para a solução de problemas sob condição de contorno mista auxilia na resolução de problemas de análise dinâmica (análise modal) onde o contorno apresente este tipo de condição, com alguns graus de liberdade sob condição de contorno de Dirichlet e outros sob condição de contorno de Neumann, como ocorre em vibração de placas e cascas.

Como sugestões, pode-se enumerar alguns tópicos a serem desenvolvidos que podem se basear neste trabalho:

- vibração livre em problemas da elasticidade bidimensional e tridimensional;
- vibração livre em placas e cascas;
- vibração forçada e inclusão de amortecimento;
- análise transiente;
- propagação de ondas em domínios tri-dimensionais;
- propagação de ondas em meios não-homogêneos;
- vibração livre em placas laminadas;
- emprego de funções de interpolação de base hierárquica;
- aplicação de técnicas adaptativas;
- desenvolvimento de subestruturação.

Há, ainda, inúmeros temas a serem abordados pelo Método da Função de Green Local Modificado, como análise plástica e elasto-plástica, análise de não-linearidades geométrica e de material, aplicações em mecânica dos fluidos, entre outros.

Portanto, conclui-se que o Método da Função de Green Local

Modificado é uma técnica eficiente, e que apresenta um grau de desenvolvimento que propicia o seu crescimento como método numérico e o seu aperfeiçoamento para que possa ser empregado com mais ênfase naqueles pontos onde os demais falham. Esse método, que teoricamente pode ser empregado a todos os problemas do meio contínuo, foi apenas aplicado a certos meios não tendo até o momento falhado em nenhum caso.

REFERÊNCIAS

- [1] ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I.A., *Handbook of Mathematical Functions*, 5th Edition, Dover Publications, New York, 1968.
- [2] AHMAD, S. & BANERJEE, P.K., "Free Vibration Analysis by BEM Using Particular Integrals", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 112, No.7, pp.682-695, 1986.
- [3] ALI, A., RAJAKUMAR, C. & YUNUS, S.M., "On the Formulation of the Acoustic Boundary Element Eigenvalue Problems", *Int. J. for Numerical Method in Engineering*, Vol. 31, pp.1271-1282, 1991.
- [4] BANERJEE, P.K. & BUTTERFIELD, R., *Boundary Element Methods in Engineering Science*, McGraw-Hill Book, London, 1981.
- [5] BANERJEE, P.K., AHMAD, S. & WANG, H.C., "A New BEM Formulation for the Acoustic Eigenfrequency Analysis", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, pp.1299-1309, 1988.

- [6] BARBIERI, R., *Desenvolvimento e Aplicação do Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) para Problemas do Meio Contínuo*, Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina (Ph.D. Thesis), 1992.
- [7] BARBIERI, R. & BARCELLOS, C.S., "A Modified Local Green's Function Technique for the Mindlin's Plate Problem", in BEM 13 (Ed. Brebbia, C.A. and Gipson, G.), pp.551-565, *Proceedings of the 13th Boundary Element International Conference*, 1991, Computational Mechanics Publications and Elsevier Applied Science, Southampton and London, 1991.
- [8] BARBIERI, R. & BARCELLOS, C.S., "Non-homogeneous Potential Field Solution by the Modified Local Green's Function Method (MLGFM)", *Eng. Analysis with Boundary Elements*, (to appear in).
- [9] BARBIERI, R. & BARCELLOS, C.S., "Solução do Problema Potencial pelo Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM)", in COBEM, *Anais do 11^o Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, 1991.
- [10] BARCELLOS, C.S. & BARBIERI, R., "Solution of Singular Potential Problem by the Modified Local Green's Function Method (MLGFM), in BEM 13 (Ed. Brebbia, C.A. and Gipson, G.), pp. 851-862, *Proceedings of the 13th Boundary Element International Conference*, 1991, Computational Mechanics Publications and Elsevier Applied Science, Southampton and London, 1991.
- [11] BARCELLOS, C.S. & SILVA, L.H.M., "Elastic Membrane Solution by a Modified Local Green's Function Method", in BETECH 87 (Ed. Brebbia, C.A. e Venturini, W.S.), *Proceedings of the Int. Conf. on Boundary Element Technology*, Southampton, England, 1987, Comp. Mech. Publ., 1987.
- [12] BATHE, K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1982.
- [13] BECKER, E.B., CAREY, G.F. & ODEN, J.T., *Finite Element - An Introduction*, Volume I, Prentice-Hall, New Jersey, 1981.
- [14] BESKOS, D.E., "Boundary Element Methods in Dynamic Analysis", *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 40, No. 1, pp.1-23, 1987.
- [15] BESKOS, D.E., *Boundary Element Methods in Mechanics*, Volume 3 in *Computational Methods in Mechanics*, Elsevier Science Publishers, Netherlands, 1987.
- [16] BOTHA, J.F. & PINDER, G.F., *Fundamental Concepts in the Numerical Solution of Differential Equations*, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [17] BREBBIA, C.A., *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, 2nd edition, London, 1984.
- [18] BREBBIA, C.A. & NARDINI, D., "The Solution of Parabolic and Hyperbolic Problems Using an Alternative Boundary Element Formulation", in BEM 7 (Ed. Brebbia, C.A. and Maier, G.), pp.387-397, *Proceedings of the 7th Boundary Element International Conference*, Lake Como, Italy, 1985, Springer-Verlag, 1985.

- [19] BREBBIA, C.A., "On Two Different Methods for Transforming Domain Integrals to the Boundary", in BEM 11 (Ed. Brebbia, C.A. and Connor, J.J.), pp.59-74, *Proceedings of the 11th Boundary Element International Conference*, 1989, Computational Mechanics Publications and Springer-Verlag, 1989.
- [20] BURNS, T.J., *The Partial Current Balance Method: a Local Green's Function Technique for the Numerical Solution of Multidimensional Neutron Diffusion Problems*, Urbana, University of Illinois (Ph.D. Thesis), 1975.
- [21] CAREY, G.F. & ODEN, J.T., *Finite Elements - A Second Course*, Volume II, Prentice-Hall, New Jersey, 1983.
- [22] CHUNG, T.J., *Finite Element Analysis in Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, New York, 1978.
- [23] COLLATZ, L., *Functional Analysis and Numerical Mathematics*, Academic Press, New York, 1966.
- [24] COOK, R.D., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, 3rd Edition, New York, 1989.
- [25] DEMEY, G., "Calculation of Eigenvalues of the Helmholtz Equation by an Integral Equation", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol.10, pp.59-66, 1976.
- [26] DEMEY, G., "A Simplified Integral Equation Method for the Calculation of the Eigenvalues of the Helmholtz Equation", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, pp.1340-1342, 1976.
- [27] DHATT, G. & TOUZOT, G., *The Finite Element Method Displayed*, John Wiley & Sons, Norwich, 1984.
- [28] DONNELLY, J.D.P., "Eigenvalues of Membranes with Reentrant Corners", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 6, No. 1, pp. 47-61, 1969.
- [29] DORNING, J.J., "A Review of Green's Function Methods in Computational Fluid Mechanics", *Joint ANS/ENS Int. Topical Meeting on Advances in Mathematical Methods for Solution of Nuclear Engineering Problems*, Munich, 1981.
- [30] DYM, C.L. & SHAMES, I.H., *Solid Mechanics - A Variational Approach*, McGraw-Hill, New York, 1973.
- [31] FILIPPIN, C.G., BARBIERI, R. & BARCELLOS, C.S., "Numerical Results for h- and p- Convergences for the Modified Local Green's Function Method", in *Proceedings of the BETECH 92 7th International Conference on Boundary Element Technology*, Eds. Brebbia, C.A. & Ingber, M.S., Computational Mechanics Publications and Elsevier Applied Science, pp. 887-904, Albuquerque, USA, 1992.
- [32] FILIPPIN, C.G., BARBIERI, R., MACHADO, R.D. & BARCELLOS, C.S., "O Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) Aplicado a Problemas da Mecânica do Contínuo. Parte III - Problemas Regidos pela Equação de Helmholtz", in *Anais do XIII CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para a Engenharia*, Eds. Santos, M.T.G., Creus,

- G.J., Awruch, A.M. & Groehs, A.G., pp. 258-267, 1992.
- [33] FLETCHER, C.A.J., *Computational Galerkin Method*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [34] FOX, L., HENRICI, P. & MOLER, C., "Approximations and Bounds for Eigenvalues of Elliptic Operators", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 4, no. 1, pp. 89-102, 1967.
- [35] FRICKER, A.J., "A New Approach to the Dynamic Analysis of Structures Using Fixed Frequency Dynamic Stiffness Matrices", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, pp.1111-1129, 1983.
- [36] GMUER, T.E.C., "A Subspace Forward Iteration Method for Solving the Quadratic Eigenproblem Associated with FDE Formulation", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 29, pp.935-951, 1990.
- [37] GRAFF, K.F., *Wave Motions in Elastic Solids*, Universities Press, Belfast, 1975.
- [38] GUPTA, K.K., "Solution of Quadratic Matrix Equation for Free Vibration Analysis of Structures", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 6, pp.129-135, 1973.
- [39] GUPTA, K.K., "On a Finite Dynamic Element Method for Free Vibration Analysis of Structures", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 9, pp.105-120, 1976.
- [40] GUPTA, K.K., "Development of a Finite Dynamic Element for Free Vibration Analysis of Two-dimensional Structures", *Int. J. for numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, pp.1311-1327, 1978.
- [41] GUPTA, K.K., "Finite Dynamic Element Formulation for a Plane Triangular Element", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 14, pp.1431-1448, 1979.
- [42] GUPTA, K.K., "Development of a Unified Numerical Procedure for Free Vibration Analysis of Structures", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, pp.187-198, 1981.
- [43] GUPTA, K.K., "Numerical Formulation for a Higher Order Plane Finite Dynamic Element", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol.20, pp.1407-1414, 1984.
- [44] GUPTA, K.K., "Development of a Solid Hexahedron Finite Dynamic Element", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, pp.2143-2150, 1984.
- [45] HONG, W., "Computation of Electromagnetic Field Boundary Value Problems by Using a Modified Boundary Element Method", in BEM 13 (Ed. Brebbia, C.A. & Gipson, G.), *Proceedings of the 13th Boundary Element International Conference*, 1991, Computational Mechanics Publications and Elsevier Applied Science, Southampton and London, 1991.
- [46] HORAK, W.C., *Local Green's Function Techniques for the Solution of Heat Conduction and Incompressible Fluid Flow Problems*, Urbana, University of Illinois (Ph.D. Thesis), 1980.

- [47] HORAK, W.C. & DORNING, J.J., "A Local Green's Function Method for the Numerical Solution of Heat Conduction and Fluid Flow Problems", *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 64, pp.192-207, 1977.
- [48] HUTCHINSON, J.R., "Determination of Membrane Vibrational Characteristics by the Boundary Integral Equation Methods", *Recent Advances in Boundary Element Methods*, Ed. Brebbia, C.A., pp.301-316, Pentech Press, London, England, 1978.
- [49] HUTCHINSON, J.R., "An Alternative BEM Formulation Applied to Membrane Vibration", in BEM 7 (Ed. Brebbia, C.A. and Maier, G.), pp.6-13 - 6-25, *Proceedings of the 7th Boundary Element International Conference*, Lake Como, Italy, 1985, Springer-Verlag, 1985.
- [50] KAMIYA, N. & ANDOH, E., "Robust Boundary Element Scheme for Helmholtz Eigenvalue Equation", in BEM 13 (Ed. Brebbia, C.A. and Gipson, G.), pp.839-850, *Proceedings of the 13th Boundary Element International Conference*, 1991, Computational Mechanics Publications and Elsevier Applied Science, Southampton and London, 1991.
- [51] KANARACHOS, A. & PROVATIDIS, Ch., "Performance of Mass Matrices for the BEM Dynamic Analysis of Wave Propagation Problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.63, pp.155-165, 1987.
- [52] KATSIKADELIS, J.T. & SAPOUNTZAKIS, E.J., "An Approach to the Vibration Problem of Homogeneous, Non-homogeneous and Composite Membranes Based on the Boundary Element Method", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, pp.2439-2455, 1988.
- [53] KREIDER, D.L. et alli, *Introdução à Análise Linear*, Volume 3, Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1972.
- [54] LACHAT, J.C. & WATSON, J.O., "Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations: a Formulation for Three-dimensional Elastostatics", *Int. J. Num. Meth. in Engng.*, Vol.10, pp.991-1005, 1976.
- [55] LADEVEZE, P. & PELLE, J.P., "Accuracy in Finite Element Computation for Eigenfrequencies", *Int. J. for Numerical Method in Engineering*, Vol. 28, pp.1929-1949, 1989.
- [56] LAWRENCE, R.D., *A Nodal Green's Function Method for Multidimensional Neutron Diffusion Calculations*, Urbana, University of Illinois (Ph.D. Thesis), 1979.
- [57] MACHADO, R.D. & BARCELLOS, C.S., "A First Modified Local Green's Function Method Approach to Orthotropic Laminated Plates", *Proceedings CADCOMP 92, Computer Aided Design for Composite Materials Technology*, Eds. S.G. Advani, W.R. Plain, W.P. de Wilde, J.W. Gillespie, Jr. e O.H. Griffin, Jr., Computational Mechanics Publications e Elsevier Applied Science, pp. 405-417, Delaware, USA, 1992.
- [58] MALVERN, L.E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, New Jersey, 1969.

- [59] MEIROVITCH, L., *Analytical Methods in Vibrations*, The Macmillan Company, New York, 1967.
- [60] MILSTED, M.G. & HUTCHINSON, J.R., "Use of Trigonometric Terms in the Finite Element Method with Applications to Vibrating Membranes", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.32, pp.327-346, 1974.
- [61] MORSE, P.M. & FESHBACH, H., *Methods of Theoretical Physics*, Vol. 1, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [62] NARDINI, D. & BREBBIA, C.A., "A New Approach to Free Vibration Analysis Using Boundary Elements", in BEM 4 (Ed. Brebbia, C.A.), pp.313-326, *Proceedings of the 4th Boundary Element International Conference*, Southampton, England, 1982, Springer-Verlag, 1982.
- [63] NOWAK, A.J., "Temperature Fields in Domains with Heat Sources Using Boundary Only Formulations", in BEM 10 (Ed. Brebbia, C.A.), pp.233-247, *Proceedings of the 10th Boundary Element International Conference*, 1988, Vol. 2, Springer-Verlag, 1988.
- [64] NOWAK, A.J. & BREBBIA, C.A., "Solving Helmholtz Equation by Boundary Elements Using the Multiple Reciprocity Method", *Computers and Experiments in Fluid Flow*, (Ed. Carlomagno, G.M. and Brebbia, C.A.), pp.267-270, Computational Mechanics Publications and Springer-Verlag, 1989.
- [65] ODEN, J.T. & CAREY, G.F., *Finite Elements - Mathematical Aspects*, Vol. IV, Prentice-Hall, New Jersey, 1983.
- [66] ODEN, J.T. & REDDY, J.N., *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*, John Wiley & Sons, New York, 1976.
- [67] REID, J.K. & WALSH, J.E., "An Elliptic Eigenvalue Problem for a Reentrant Region", *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, Vol. 13, No. 3, pp. 837-850, 1965.
- [68] ROSENBERG, R.M., *Analytical Dynamics of Discrete Systems*, Plenum Press, 2nd edition, New York, 1977.
- [69] SHAW, R.P., "Boundary Integral Equation Methods Applied to Wave Problems", *Developments in Boundary Element Methods*, Ed. Banerjee, P.K. and Butterfield, R., Vol. 1, pp.121-153, Elsevier Applied Science Publishers, London, England, 1979.
- [70] SHUKU, T. & ISHIHARA, K., "The Analysis of the Acoustic Field in Irregularly Shaped Rooms by the Finite Element Method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 29(1), pp.67-76, 1973.
- [71] SILVA, L.H.M., *Novas Formulações Integrais para Problemas da Mecânica*, Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina (Ph.D. Thesis), 1988.
- [72] STADTER, J.T., "Bounds to Eigenvalues of Rhombical Membranes", *J. SIAM Applied Mathematics*, Vol. 14, No. 2, pp. 324-341, 1966.
- [73] STAKGOLD, I., *Green's Functions and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons, New York, 1979.

- [74] TAI, G.R.C. & SHAW, R.P., "Helmholtz Equation Eigenvalue and Eigenmodes for Arbitrary Domains", *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 56, pp.796-804, 1974.
- [75] VIVOLI, J. & FILIPPI, P., "Eigenfrequencies of Thin Plates and Layer Potentials", *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 97, pp.1127-1248, 1974.
- [76] ZIENKIEWICZ, O.C. & MORGAN, K., *Finite Elements and Approximation*, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [77] ZIENKIEWICZ, O.C., *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, London, 1977.

APÊNDICE

A imposição de condições de contorno mistas homogêneas é feita em cada porção do contorno de maneira correspondente ao tipo da condição a que esta porção está sujeita. Assim, a parte do contorno sob condição de Dirichlet tem a condição de contorno automaticamente incluída na definição do espaço de funções admissíveis; a condição de contorno de Neumann é imposta, na parte do contorno correspondente, através da quantidade $\{f\}$. O contorno é particionado, numericamente, em duas partes: uma relativa à condição de contorno de Dirichlet e outra à condição de contorno de Neumann, mesmo que fisicamente o contorno tenha mais de duas porções com condições de contorno não contíguas. Isso significa que cada nó é tratado de maneira independente; as duas partes em que foi dividido o contorno contêm todos os nós do contorno submetidos às mesmas condições, respectivamente. Porém, cada vez que ocorre uma mudança de condição de contorno, o nó que se situa na interface entre os dois trechos deve ser tratado como nó duplo. Trata-se, então,

as equações governantes do problema, equações (3.108) e (3.109), desmembradas em duas, uma para os nós sob condição de contorno de Dirichlet e outra para nós sob condição de contorno de Neumann. Escreve-se as matrizes envolvidas nas equações na forma $[M]_{m \times n}$, onde $m \times n$ representa a dimensão da matriz $[M]$, com m, n assumindo os símbolos d para representar uma dimensão correspondente ao número de nós sujeitos à condição de Dirichlet, n para condição de Neumann, m_d representando o número total de nós no domínio e m_c o número total de nós no contorno. Para o vetor $\{u\}$, adota-se as letras p e d para identificar valores prescritos e desconhecidos, respectivamente. Como o vetor $F(p)$ é escrito conforme a equação (2.26),

$$F(p) = (N + N') [u(p)] \quad (\text{A.1})$$

quando se impõe condições de contorno de Neumann tem-se:

$$N[u(p)] = 0 \quad (\text{A.2})$$

Como o operador N' somente é aplicado nas porções do contorno sob condições de contorno de Dirichlet, dever-se-ia ter

$$F(p) = 0 \quad (\text{A.3})$$

Porém, com esta imposição, que é teoricamente correta, ocorre mau condicionamento das matrizes do autoproblema. Para contornar esse inconveniente, adota-se um valor para N' suficientemente pequeno, de modo que o autoproblema possa ser resolvido sem alterar substancialmente os resultados. Portanto,

$$F(p) = N' \{u_d\}^c \quad (\text{A.4})$$

Então, têm-se:

$$\begin{bmatrix} [D_1]_{d \times d} & [D_2]_{d \times n} \\ [D_3]_{n \times d} & [D_4]_{n \times n} \end{bmatrix}_{m_c \times m_c} \begin{Bmatrix} \{u_p\}_d^c \\ \{u_d\}_n \end{Bmatrix}_{m_c} = \begin{bmatrix} [E_1]_{d \times d} & [E_2]_{d \times n} \\ [E_3]_{n \times d} & [E_4]_{n \times n} \end{bmatrix}_{m_c \times m_c} \begin{Bmatrix} \{F_d\}_d^c \\ N' \{u_d\}_n \end{Bmatrix}_{m_c} - \omega^2 \begin{bmatrix} [H_1]_{d \times m_d} \\ [H_2]_{n \times m_d} \end{bmatrix}_{m_c \times m_d} \{u\}_{m_d}^D \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{bmatrix} [A_1]_{dxd} & [A_2]_{dx(m_d-d)} \\ [A_3]_{(m_d-d)xd} & [A_4]_{(m_d-d)x(m_d-d)} \end{bmatrix}_{m_d \times m_d} \cdot \begin{Bmatrix} \{u_p\}_d \\ \{u_d\}_{(m_d-d)} \end{Bmatrix}_{m_d}^D = \begin{bmatrix} [B_1]_{dxd} & [B_2]_{dxn} \\ [B_3]_{(m_d-d)xd} & [B_4]_{(m_d-d)xn} \end{bmatrix}_{m_d \times m_c} \cdot \begin{Bmatrix} \{F_d\}_d \\ N'\{u_d\}_n \end{Bmatrix}_{m_c}^C - \omega^2 \begin{bmatrix} [G_1]_{dxm_d} \\ [G_2]_{(m_d-d)xm_d} \end{bmatrix}_{m_d \times m_d} \{u\}_{m_d}^D \quad (A.6)$$

Da primeira parte da equação (A.5), vem:

$$[D_1]_{dxd} \{u_p\}_d + [D_2]_{dxn} \{u_d\}_n = [E_1]_{dxd} \{F_d\}_d + [E_2]_{dxn} N' \{u_d\}_n - \omega^2 [H_1]_{dxm_d} \{u\}_{m_d}^D \quad (A.7)$$

isolando-se $\{F_d\}_d$ tem-se:

$$\{F_d\}_d = [E_1]_{dxd}^{-1} [[D_1]_{dxd} \{u_p\}_d + [D_2]_{dxn} \{u_d\}_n - [E_2]_{dxn} N' \{u_d\}_n + \omega^2 [H_1]_{dxm_d} \{u\}_{m_d}^D] \quad (A.8)$$

Da segunda parte, vem:

$$[D_3]_{nxd} \{u_p\}_d + [D_4]_{nxn} \{u_d\}_n = [E_3]_{nxd} \{F_d\}_d + [E_4]_{nxn} N' \{u_d\}_n - \omega^2 [H_2]_{nxm_d} \{u\}_{m_d}^D \quad (A.9)$$

Substituindo-se a equação (A.8) na equação (A.9), tem-se:

$$[D_3]_{nxd} \{u_p\}_d + [D_4]_{nxn} \{u_d\}_n = [E_3]_{nxd} [E_1]_{dxd}^{-1} [[D_1]_{dxd} \{u_p\}_d + [D_2]_{dxn} \{u_d\}_n - [E_2]_{dxn} N' \{u_d\}_n + \omega^2 [H_1]_{dxm_d} \{u\}_{m_d}^D] + [E_4]_{nxn} N' \{u_d\}_n - \omega^2 [H_2]_{nxm_d} \{u\}_{m_d}^D \quad (A.10)$$

que reagrupada fica:

$$\begin{aligned}
& \{ [D_4]_{nxn} - [E_3]_{nxd} [E_1]_{dxd}^{-1} [[D_2]_{dxn} - N' [E_2]_{dxn}] - N' [E_4]_{nxn} \} \{u_d\}_n = \\
& = [E_3]_{nxd} [E_1]_{dxd}^{-1} [[D_1]_{dxd} \{u_p\}_d + \omega^2 [H_1]_{dxm_d} \{u\}_{m_d}^D] - \\
& - [D_3]_{nxd} \{u_p\}_d - \omega^2 [H_2]_{nxm_d} \{u\}_{m_d}^D \quad (A.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} [A_1]_{dxd} & [A_2]_{dx(m_d-d)} \\ [A_3]_{(m_d-d)xd} & [A_4]_{(m_d-d)x(m_d-d)} \end{bmatrix}_{m_d \times m_d} \cdot \begin{Bmatrix} \{u_p\}_d \\ \{u_d\}_{(m_d-d)} \end{Bmatrix}_{m_d}^D = \begin{bmatrix} [B_1]_{dxd} & [B_2]_{dxn} \\ [B_3]_{(m_d-d)xd} & [B_4]_{(m_d-d)xn} \end{bmatrix}_{m_d \times m_c} \cdot \begin{Bmatrix} \{F_d\}_d \\ N'\{u_d\}_n \end{Bmatrix}_{m_c}^C - \omega^2 \begin{bmatrix} [G_1]_{dxm_d} \\ [G_2]_{(m_d-d)xm_d} \end{bmatrix}_{m_d \times m_d} \{u\}_{m_d}^D \quad (A.6)$$

Da primeira parte da equação (A.5), vem:

$$\begin{aligned} [D_1]_{dxd} \{u_p\}_d + [D_2]_{dxn} \{u_d\}_n &= [E_1]_{dxd} \{F_d\}_d + [E_2]_{dxn} N' \{u_d\}_n - \\ &- \omega^2 [H_1]_{dxm_d} \{u\}_{m_d}^D \end{aligned} \quad (A.7)$$

isolando-se $\{F_d\}_d$ tem-se:

$$\begin{aligned} \{F_d\}_d &= [E_1]_{dxd}^{-1} \{ [D_1]_{dxd} \{u_p\}_d + [D_2]_{dxn} \{u_d\}_n - [E_2]_{dxn} N' \{u_d\}_n + \\ &+ \omega^2 [H_1]_{dxm_d} \{u\}_{m_d}^D \} \end{aligned} \quad (A.8)$$

Da segunda parte, vem:

$$\begin{aligned} [D_3]_{nxd} \{u_p\}_d + [D_4]_{nxd} \{u_d\}_n &= [E_3]_{nxd} \{F_d\}_d + [E_4]_{nxd} N' \{u_d\}_n - \\ &- \omega^2 [H_2]_{nxd} \{u\}_{m_d}^D \end{aligned} \quad (A.9)$$

Substituindo-se a equação (A.8) na equação (A.9), tem-se:

$$\begin{aligned} [D_3]_{nxd} \{u_p\}_d + [D_4]_{nxd} \{u_d\}_n &= [E_3]_{nxd} [E_1]_{dxd}^{-1} \{ [D_1]_{dxd} \{u_p\}_d + [D_2]_{dxn} \{u_d\}_n \\ &- [E_2]_{dxn} N' \{u_d\}_n + \omega^2 [H_1]_{dxm_d} \{u\}_{m_d}^D \} + [E_4]_{nxd} N' \{u_d\}_n - \omega^2 [H_2]_{nxd} \{u\}_{m_d}^D \end{aligned} \quad (A.10)$$

que reagrupada fica:

$$\begin{aligned} &\{ [D_4]_{nxd} - [E_3]_{nxd} [E_1]_{dxd}^{-1} [D_2]_{dxn} - N' [E_2]_{dxn} - N' [E_4]_{nxd} \} \{u_d\}_n = \\ &= [E_3]_{nxd} [E_1]_{dxd}^{-1} \{ [D_1]_{dxd} \{u_p\}_d + \omega^2 [H_1]_{dxm_d} \{u\}_{m_d}^D \} - \\ &- [D_3]_{nxd} \{u_p\}_d - \omega^2 [H_2]_{nxd} \{u\}_{m_d}^D \end{aligned} \quad (A.11)$$

Isolando-se $\{u_d\}_n$ vem:

$$\begin{aligned} \{u_d\}_n &= \{[D_4]_{n \times n} - [E_3]_{n \times d} [E_1]_{d \times d}^{-1} [[D_2]_{d \times n} - N' [E_2]_{d \times n}] - N' [E_4]_{n \times n}\}^{-1} \\ & \{[E_3]_{n \times d} [E_1]_{d \times d}^{-1} [[D_1]_{d \times d} \{u_p\}_d + \omega^2 [H_1]_{d \times m_d} \{u\}_{m_d}^D\} - \\ & - [D_3]_{n \times d} \{u_p\}_d - \omega^2 [H_2]_{n \times m_d} \{u\}_{m_d}^D \end{aligned} \quad (A.12)$$

Substituindo-se, agora, a equação (A.12) na equação (A.8), vem:

$$\begin{aligned} \{F_d\}_d &= [E_1]_{d \times d}^{-1} \{[D_1]_{d \times d} \{u_p\}_d + [[D_2]_{d \times n} N' [E_2]_{d \times n}] [[D_4]_{n \times n} - \\ & - [E_3]_{n \times d} [E_1]_{d \times d}^{-1} [[D_2]_{d \times n} N' [E_2]_{d \times n}] - N' [E_4]_{n \times n}]^{-1} [[E_3]_{n \times d} [E_1]_{d \times d}^{-1} \cdot \\ & \cdot [[D_1]_{d \times d} \{u_p\}_d + \omega^2 [H_1]_{d \times m_d} \{u\}_{m_d}^D] - [D_3]_{n \times d} \{u_p\}_d - \\ & - \omega^2 [H_2]_{n \times m_d} \{u\}_{m_d}^D\} + \omega^2 [H_1]_{d \times m_d} \{u\}_{m_d}^D \end{aligned} \quad (A.13)$$

Faz-se:

$$[M_1]_{n \times n} = [[D_4]_{n \times n} - [E_3]_{n \times d} [E_1]_{d \times d}^{-1} [[D_2]_{d \times n} N' [E_2]_{d \times n}] - N' [E_4]_{n \times n}]^{-1} \quad (A.14)$$

$$[M_2]_{n \times d} = [M_1]_{n \times n} [E_3]_{n \times d} [E_1]_{d \times d}^{-1} \quad (A.15)$$

$$[M_3]_{d \times d} = [E_1]_{d \times d}^{-1} [[D_2]_{d \times n} - N' [E_2]_{d \times n}] [M_2]_{n \times d} \quad (A.16)$$

$$[M_4]_{d \times n} = [E_1]_{d \times d}^{-1} [[D_2]_{d \times n} - N' [E_2]_{d \times n}] [M_1]_{n \times n} \quad (A.17)$$

Substituindo-se as equações (A.14 - A.17) na equação (A.12), vem:

$$\begin{aligned} \{u_d\}_n &= [M_2]_{n \times d} [D_1]_{d \times d} \{u_p\}_d + \omega^2 [M_2]_{n \times d} [H_1]_{d \times m_d} \{u\}_{m_d}^D - \\ & - [M_1]_{n \times n} [D_3]_{n \times d} \{u_p\}_d - \omega^2 [M_1]_{n \times n} [H_2]_{n \times m_d} \{u\}_{m_d}^D \end{aligned} \quad (A.18)$$

ou melhor:

$$\begin{aligned} \{u_d\}_n &= [[M_2]_{dx d} [D_1]_{dx d} - [M_1]_{n x n} [D_3]_{n x d}] \{u_p\}_d + \\ &+ \omega^2 [[M_2]_{n x d} [H_1]_{d x m_d} - [M_1]_{n x n} [H_2]_{n x m_d}] \{u\}_{m_d}^D \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Faz-se, agora:

$$[Q_1]_{n x d} = [M_2]_{n x d} [D_1]_{dx d} - [M_1]_{n x n} [D_3]_{n x d} \quad (\text{A.20})$$

$$[Q_2]_{n x m_d} = [M_2]_{n x d} [H_1]_{d x m_d} - [M_1]_{n x n} [H_2]_{n x m_d} \quad (\text{A.21})$$

Portanto, substituindo-se as equações (A.20) e (A.21) na equação (A.19), vem:

$$\{u_d\}_n = [Q_1]_{dx d} \{u_p\}_d + \omega^2 [Q_2]_{n x m_d} \{u\}_{m_d}^D \quad (\text{A.22})$$

Substituindo, agora, as equações (A.14 - A.17) na equação (A.13), vem:

$$\begin{aligned} \{F_d\}_d &= [E_1]_{dx d}^{-1} [D_1]_{dx d} \{u_p\}_d + [M_3]_{dx d} [D_1]_{dx d} \{u_p\}_d + \\ &+ \omega^2 [M_3]_{dx d} [H_1]_{d x m_d} \{u\}_{m_d}^D - [M_4]_{d x n} [D_3]_{n x d} \{u_p\}_d - \\ &- \omega^2 [M_4]_{d x n} [H_2]_{n x m_d} \{u\}_{m_d}^D + \omega^2 [E_1]_{dx d}^{-1} [H_1]_{d x m_d} \{u\}_{m_d}^D \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

ou melhor:

$$\begin{aligned} \{F_d\}_d &= [[E_1]_{dx d}^{-1} [D_1]_{dx d} + [M_3]_{dx d} [D_1]_{dx d} - [M_4]_{d x n} [D_3]_{n x d}] \{u_p\}_d + \\ &+ \omega^2 [[M_3]_{dx d} [H_1]_{d x m_d} - [M_4]_{d x n} [H_2]_{n x m_d} + [E_1]_{dx d}^{-1} [H_1]_{d x m_d}] \{u\}_{m_d}^D \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Faz-se:

$$[Q_3]_{dx d} = [E_1]_{dx d}^{-1} [D_1]_{dx d} + [M_3]_{dx d} [D_1]_{dx d} - [M_4]_{d x n} [D_3]_{n x d} \quad (\text{A.25})$$

$$[Q_4]_{d x m_d} = [M_3]_{dx d} [H_1]_{d x m_d} - [M_4]_{d x n} [H_2]_{n x m_d} + [E_1]_{dx d}^{-1} [H_1]_{d x m_d} \quad (\text{A.26})$$

Substituindo-se as equações (A.25) e (A.26) na equação (A.24):

$$\{F_d\}_d = [Q_3]_{dx d} \{u_p\}_d + \omega^2 [Q_4]_{d x m_d} \{u\}_{m_d}^D \quad (\text{A.27})$$

Substituindo-se, agora, as equações (A.22) e (A.27) na equação (A.6), vem:

$$\begin{bmatrix} [A_1]_{dxd} & [A_2]_{dx(m_d-d)} \\ [A_3]_{(m_d-d)xd} & [A_4]_{(m_d-d)x(m_d-d)} \end{bmatrix}_{m_d \times m_d} \begin{Bmatrix} \{u_p\}_d \\ \{u_d\}_{(m_d-d)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [B_1]_{dxd} & [B_2]_{dxn} \\ [B_3]_{(m_d-d)xd} & [B_4]_{(m_d-d)xn} \end{bmatrix}_{m_d \times m_c} \begin{Bmatrix} \{u\}_m \\ \{u\}_n \end{Bmatrix} \quad (A.28)$$

$$\begin{bmatrix} [Q_3]_{dxd} \{u_p\}_d + \omega^2 [Q_4]_{dxm_d} \{u\}_{m_d}^D \\ N' [Q_1]_{nxd} \{u_p\}_d + \omega^2 N' [Q_2]_{nxm_d} \{u\}_{m_d}^D \end{bmatrix}_{m_c \times m_d} - \omega^2 \begin{bmatrix} [G_1]_{dxm_d} \\ [G_2]_{(m_d-d)xm_d} \end{bmatrix}_{m_c \times m_d} \{u\}_m^D$$

Rearranjando, fica:

$$\begin{bmatrix} [A_1]_{dxd} & [A_2]_{dx(m_d-d)} \\ [A_3]_{(m_d-d)xd} & [A_4]_{(m_d-d)x(m_d-d)} \end{bmatrix}_{m_d \times m_d} \begin{Bmatrix} \{u_p\}_d^D \\ \{u_d\}_{m_d-d} \end{Bmatrix}_{m_d} = \begin{bmatrix} [B_1]_{dxd} & [B_2]_{dxn} \\ [B_3]_{(m_d-d)xd} & [B_4]_{(m_d-d)xn} \end{bmatrix}_{m_d \times m_c} \begin{Bmatrix} \{u\}_m \\ \{u\}_n \end{Bmatrix} \quad (A.29)$$

$$\begin{bmatrix} [Q_3]_{dxd} & [Q_4]_{dxm_d} \\ N' [Q_1]_{nxd} & N' [Q_2]_{nxm_d} \end{bmatrix}_{m_c \times (d+m_d)} \begin{Bmatrix} \{u_p\}_d \\ \omega^2 \{u\}_{m_d}^D \end{Bmatrix}_{d+m_d} - \omega^2 \begin{bmatrix} [G_1]_{dxm_d} \\ [G_2]_{(m_d-d)xm_d} \end{bmatrix}_{m_c \times m_d} \{u\}_m^D$$

Rearranjando novamente, vem:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} [A_1]_{dxd} & [A_2]_{dx(m_d-d)} \\ [A_3]_{(m_d-d)xd} & [A_4]_{(m_d-d)x(m_d-d)} \end{bmatrix}_{m_d \times m_d} \begin{Bmatrix} \{u_p\}_d \\ \{u_d\}_{m_d-d} \end{Bmatrix}_{m_d}^D = \\
& = \begin{bmatrix} [B_1]_{dxd} [Q_3]_{dxd} + N' [B_2]_{dxn} [Q_1]_{nxd} \\ [B_3]_{(m_d-d)xd} [Q_3]_{dxd} + N' [B_4]_{(m_d-d)xn} [Q_1]_{nxd} \\ [B_1]_{dxd} [Q_4]_{dxm_d} + N' [B_2]_{dxn} [Q_2]_{nxm_d} \\ [B_3]_{(m_d-d)xd} [Q_4]_{dxm_d} + N' [B_4]_{(m_d-d)xn} [Q_2]_{nxm_d} \end{bmatrix}_{m_d \times (d+m_d)} \begin{Bmatrix} \{u_p\}_d \\ \omega^2 \{u\}_{m_d}^D \end{Bmatrix}_{d+m_d} - \\
& - \omega^2 \begin{bmatrix} [G_1]_{dxm_d} \\ [G_2]_{(m_d-d)xm_d} \end{bmatrix}_{m_d \times m_d} \{u\}_{m_d}^D
\end{aligned} \tag{A.30}$$

Montando-se o problema de autovalor/autovetor:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} [A_1]_{dxd} - [B_1]_{dxd} [Q_3]_{dxd} - N' [B_2]_{dxn} [Q_1]_{nxd} & [A_2]_{dx(m_d-d)} \\ [A_3]_{(m_d-d)xd} - [B_3]_{(m_d-d)xd} [Q_3]_{dxd} - N' [B_4]_{(m_d-d)xn} [Q_1]_{nxd} & [A_4]_{(m_d-d)x(m_d-d)} \end{bmatrix} \cdot \\
& \cdot \begin{Bmatrix} \{u_p\}_d \\ \{u_d\}_{m_d-d} \end{Bmatrix}_{m_d}^D \\
& - \omega^2 \begin{bmatrix} [B_1]_{dxd} [Q_4]_{dxm_d} + N' [B_2]_{dxn} [Q_2]_{nxm_d} - [G_1]_{dxm_d} \\ [B_3]_{(m_d-d)xd} [Q_4]_{dxm_d} + N' [B_4]_{(m_d-d)xn} [Q_2]_{nxm_d} - [G_2]_{(m_d-d)xm_d} \end{bmatrix}_{m_d \times m_d} \\
& \cdot \{u\}_{m_d}^D = \{0\}_{m_d}
\end{aligned} \tag{A.31}$$

Este problema é um autoproblema generalizado do tipo

$$\{ [K] - \omega^2 [M] \} \{u\} = \{0\} \quad (\text{A.32})$$

trazendo implícitas todas as informações referentes a imposição das condições de contorno. Os nós duplos introduzidos no modelo estão aqui representados por duas equações referentes ao mesmo nó da malha. Para a solução numérica da equação de Helmholtz para domínios bi-dimensionais, onde se tem apenas um grau de liberdade por nó da malha, cada equação do problema representa um grau de liberdade e o respectivo nó. As condições de contorno de Dirichlet são impostas, como anteriormente, no problema de autovalor já montado. Resolvendo-se este problema, como antes, pelo método da iteração subespacial, tem-se como autovalores e autovetores os quadrados das frequências e modos naturais de vibração, respectivamente.