

MARCELO MALDANER

**Obtenção do Fator de Intensidade de  
Tensão pelo Método da Função de Green  
Local Modificado**

Florianópolis  
1993



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

# **Obtenção do Fator de Intensidade de Tensão pelo Método da Função de Green Local Modificado**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade Federal de Santa Catarina, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia – Área de Concentração: Análise e Projeto Mecânico.

**Orientador:** Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D.

Marcelo Maldaner

Florianópolis  
1993

Catálogo na fonte pela Biblioteca Universitária da  
Universidade Federal de Santa Catarina

M244o Maldaner, Marcelo.  
UFSC Obtenção do fator de intensidade de tensão pelo método  
PEMC da função de Green local modificado [dissertação]  
/ Marcelo Maldaner ; orientador, Clovis Sperb de Barcellos.  
- Florianópolis, SC, 2009.  
148 f.: il., tabs., grafs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia mecânica. 2. Fratura. 3. Função de Green.  
4. Falha. 5. Fator de intensidade de tensão. 6. Elementos  
finitos. 7. Elementos de contorno. I. Barcellos, Clovis  
Sperb de. II. Universidade Federal de Santa Catarina.  
Programa de Pós-Graduação. em Engenharia Mecânica. III.  
Título.

CDU 621

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

# Obtenção do Fator de Intensidade de Tensão pelo Método da Função de Green Local Modificado

**Marcelo Maldaner**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

**MESTRE EM ENGENHARIA**

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA  
sendo aprovada em sua forma final.

---

Eduardo Alberto Fancello, D. Sc.  
Coordenador do POSMEC

**BANCA EXAMINADORA**

---

Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D.  
Orientador

---

Edison da Rosa, Dr. Eng.  
Membro

---

Renato Barbieri, Dr. Eng.  
Membro



# Agradecimentos

À CAPES pelo indispensável suporte financeiro durante a realização deste trabalho.

Agradeço ao Prof. Clovis Sperb de Barcellos que tomou possível a realização deste trabalho através de seu apoio e orientação.

Agradeço, especialmente, aos meus pais que propiciaram o embasamento necessário para chegar ao desenvolvimento desta dissertação, com apoio moral e financeiro, e aos meus irmãos que, também, nunca negaram qualquer auxílio.

Aos amigos Barbieri, Filippin, Jucélio, Marco, Pablo, Rato e Tancredo que ofereceram seu apoio, muitas vezes crucial ao andamento da dissertação, e a todos os outros colegas e amigos que, mesmo indiretamente, ajudaram no desenvolvimento desta.

Ao amigo Ivan pelo apoio necessário à reflexão desta versão final. E, principalmente, à minha mulher Adriana pela paciência e incentivo.





# Resumo

O fator de intensidade de tensão é de extrema importância na análise de falha, mecânica da fratura e fadiga, metodologia usada quando o custo é elevado e a segurança imprescindível. No cálculo do fator de intensidade de tensão, vários métodos têm sido utilizados e, entre eles, tem-se os Métodos dos Elementos Finitos e de Contorno, o primeiro necessita um grande refino na malha, elevando o custo computacional, e o segundo, cujo refino é bastante reduzido, pode representar melhor a singularidade no extremo da trinca por ser um método de característica mista, mas necessita o conhecimento prévio da solução fundamental, restringindo sua aplicação. O Método da Função de Green Local Modificado é apresentado, aqui, como uma nova ferramenta e pode ser comparado com o Método Direto de Elementos de Contorno de Galerkin, possuindo a característica mista mas não a restrição acima, pois a solução fundamental, a função de Green, é aproximada nodalmente com elementos finitos.

Assim, como primeira parte, apresenta-se a formulação do método para elementos não isoparamétricos, aproveitando a característica mista, juntamente com revisões da elasticidade e da mecânica da fratura. Uma verificação do método, com elementos convencionais, resolvendo problemas com trinca é efetuada como segunda parte, assim como, a apresentação de desenvolvimentos no método relacionados à dependência paramétrica e o custo computacional. Apresenta-se, também, alguns elementos especiais de trinca adaptados ao método, com seus respectivos resultados e, por fim, uma comparação entre eles.



# Abstract

The stress intensity factor is of paramount importance at failure analysis, fatigue and fracture mechanics, this methodology is used when the cost is high and the safety essential. In this way, a lot of methods have been used and, among of them, one has the Finite Element and the Boundary Element methods, the first needs a fine mesh getting a high computational cost and the second, with a not so fine mesh, can take a better representation of the singularities at the crack tip because its mixed characteristic, but it needs the previous know of the fundamental solution, restricting its applications. The modified Local Green's Function Method is introduced here as a new one and can be compared with the Galerkin Direct Boundary Element Method, keeping the mixed characteristic but the restriction above, since the fundamental solution, the Green's function, is nodally approximated by finite elements.

So, as a first portion, one introduces the method for non isoparametric elements, taking advantage of the hybrid characteristic, together with elasticity and fracture mechanics revisions. A method's valuation, with usual elements, by solving crack problems is made as a second portion, as well as the method features related with the parametric dependence and computational cost. One shows some crack elements are also shown together within solutions and, at last, but not least a comparison of themselves.



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Considerações Iniciais . . . . .	1
1.2 O Método da Função de Green Local Modificado (MFGLM) . . . . .	3
1.3 O MEF na Mecânica da Fratura . . . . .	8
1.4 O MEC na Determinação do $K$ . . . . .	11
1.5 Objetivos do Trabalho . . . . .	12
<b>2 O MFGLM Aplicado à Fratura Elástica</b>	<b>15</b>
2.1 Introdução . . . . .	15
2.2 Elasticidade Linear . . . . .	15
2.2.1 Elasticidade Plana . . . . .	21
2.3 Aplicação do MFGLM . . . . .	24
2.3.1 Definição do Problema . . . . .	24
2.3.2 Aproximação da Função de Green . . . . .	29
2.3.3 Projeções da Função de Green . . . . .	33
2.3.4 Equações Finais . . . . .	38
2.4 Mecânica da Fratura . . . . .	40
<b>3 Análise e Desenvolvimento no MFGLM</b>	<b>47</b>
3.1 Operador Auxiliar . . . . .	47
3.2 Melhorias no Algoritmo . . . . .	53
3.3 Elementos Finitos e de Contorno . . . . .	57
3.3.1 Família de Elementos Lagrangeanos . . . . .	59
3.3.2 Família de Elementos Serendipity . . . . .	62
3.3.3 Elementos Triangulares . . . . .	63
3.4 Resultados Numéricos . . . . .	66
3.4.1 Casos Teste . . . . .	66
3.5 Resultados . . . . .	68
3.5.1 Convergência $h$ . . . . .	73
3.5.2 Convergência $p$ . . . . .	76
<b>4 Elementos Especiais</b>	<b>79</b>
4.1 <i>Quarter-Point</i> . . . . .	79

4.1.1	Elemento <i>Quarter-Point</i> Quadrático . . . . .	81
4.1.2	Elemento <i>Quarter-Point</i> Generalizado . . . . .	84
4.1.3	Resultados Numéricos . . . . .	85
4.2	Família de Elementos de Akin . . . . .	90
4.2.1	Formulação dos Elementos Singulares . . . . .	90
4.2.2	Exemplos . . . . .	93
4.2.3	Integração Numérica . . . . .	95
4.2.4	Resultados . . . . .	97
4.3	Família de Elementos de Stern . . . . .	100
4.3.1	Elementos Triangulares Singulares . . . . .	101
4.3.2	Elementos de Contorno Singulares com a Teoria de Stern . . . . .	108
4.3.3	Integração dos Elementos de Stern . . . . .	109
4.3.4	Resultados . . . . .	112
4.4	Família de Elementos de Contorno Especiais . . . . .	116
4.4.1	Elementos de Contorno Bidimensionais . . . . .	116
4.4.2	Elementos de Contorno Tridimensionais Singulares . . . . .	119
4.4.3	Resultados . . . . .	122
4.5	Comparações Entre os Elementos Especiais . . . . .	123
<b>5</b>	<b>Conclusão e Sugestões</b>	<b>131</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>134</b>
<b>A</b>	<b>Integração Analítica para o Elemento Quadrático da Família de Stern</b>	<b>145</b>

# Lista de Figuras

2.1	Representação do problema. . . . .	18
2.2	Os dois casos da elasticidade plana. . . . .	21
2.3	Discretização de uma célula $k$ . . . . .	30
2.4	Placa infinita trincada sob tração - Geometria de Griffith . . . . .	40
2.5	Modelo de Watergaard . . . . .	41
2.6	Modos de abertura da trinca . . . . .	42
2.7	Trinca elíptica em uma placa infinita . . . . .	44
3.1	Problemas real e auxiliares . . . . .	49
3.2	Representação antiga (a) e nova (b) da matriz de rigidez auxiliar. . . . .	51
3.3	Mapeamento isoparamétrico. . . . .	58
3.4	Elemento quadrático de contorno com coordenada natural $\xi$ . . . . .	59
3.5	Elemento lagrangeano plano. . . . .	60
3.6	Elementos lagrangeanos: (a) linear, (b) quadrático e (c) cúbico. . . . .	61
3.7	Triângulo de Pascal. . . . .	61
3.8	Elementos serendipity quadrático (a) e cúbico (b). . . . .	62
3.9	Funções de interpolação para os elementos quadráticos das famílias serendipity e lagrangeano. . . . .	63
3.10	Coordenadas de área. . . . .	64
3.11	Elementos triangulares: (a) linear, (b) quadrático e (c) cúbico. . . . .	65
3.12	Caso 1: (a) problema e (b) condições de contorno. . . . .	67
3.13	Caso 2: (a) problema e (b) condições de contorno. . . . .	67
3.14	Discretizações para os elementos quadráticos. . . . .	68
3.15	Discretizações com elementos triangulares. . . . .	68
3.16	Malhas com refino extra, elementos lineares. . . . .	70
3.17	Resultados preliminares - parte 1. . . . .	70
3.18	Resultados preliminares - parte 2. . . . .	71
3.19	Comparação entre os métodos de deslocamento e de tensão. . . . .	72
3.20	Convergência $h$ para o elemento quadrangular linear. . . . .	73
3.21	Convergência $h$ para o elemento serendipity quadrático. . . . .	74
3.22	Convergência $h$ para o elemento lagrangeano quadrático. . . . .	74
3.23	Convergência $h$ para o elemento lagrangeano cúbico. . . . .	75
3.24	Convergência $h$ para o elemento lagrangeano quártico. . . . .	75
3.25	Convergência $p$ com 2 elementos finitos. . . . .	76
3.26	Convergência $p$ com 8 elementos finitos. . . . .	77

4.1	Malha com elementos <i>quarter-point</i> . . . . .	80
4.2	Elementos utilizados: (a) elemento serendipity para o domínio e (b) elemento quadrático para o contorno. . . . .	82
4.3	Elemento <i>quarter-point</i> cúbico. . . . .	85
4.4	Elementos <i>quarter-point</i> para o contorno. . . . .	86
4.5	Elementos finitos singulares. . . . .	86
4.6	Resultados com elementos singulares <i>quarter-point</i> . . . . .	87
4.7	Malha de finitos com elementos colapsados. . . . .	88
4.8	Discretização do contorno, próximo ao extremo da trinca. . . . .	89
4.9	Função $R(\xi, \eta)$ para o elemento lagrangeano quadrático, $\lambda = \frac{1}{2}$ . . . . .	92
4.10	Elementos triangular linear (a), quadrático (b) e quadrangular linear (c). . . . .	93
4.11	Resultados com elementos de Akin. . . . .	99
4.12	Resultados com elementos de Akin. . . . .	100
4.13	Sistema de coordenadas para a família de Stern. . . . .	102
4.14	Família de elementos triangulares de Stern. . . . .	103
4.15	Funções de interpolação do elemento de contorno para a família de elementos finitos de Stern. . . . .	109
4.16	Divisão de um elemento quadrangular em dois triangulares. . . . .	113
4.17	Resultados com elementos de Stern. . . . .	113
4.18	Funções de interpolação para o elemento de contorno singular de dois nós. . . . .	119
4.19	Elemento singular de contorno 3D. . . . .	120
4.20	Elemento de contorno 3D aplicado como elemento finito. . . . .	121
4.21	Elemento singular de contorno 3D linear. . . . .	122
4.22	Resultados com o elemento de Tanaka e Itoh [88]. . . . .	123
4.23	Discretização do domínio com elementos triangulares. . . . .	124
4.24	Comparação em uma malha com elemento finitos triangulares quadráticos. . . . .	124
4.25	Comparação em uma malha com elementos lagrangeanos quadráticos. . . . .	125
4.26	Comparação com elementos serendipity de oito nós. . . . .	126
4.27	Malha de elementos finitos com elementos lagrangeanos cúbicos. . . . .	127
4.28	Comparação com elementos lagrangeanos quárticos. . . . .	128
4.29	Comparação com elementos lagrangeanos quánticos. . . . .	128
4.30	Comparação em uma discretização linear. . . . .	129



# Lista de Tabelas

3.1	Dependência paramétrica. . . . .	52
3.2	Malhas usadas na Figura 3.17. . . . .	69
4.1	Extrapolação por dois pontos de deslocamento. . . . .	89
4.2	Deslocamentos nas bordas dos elementos. . . . .	95
4.3	Extrapolação no elemento de Akin. . . . .	99
4.4	Coordenadas nodais para os elementos de Stern. . . . .	104
4.5	Extrapolação por dois pontos de deslocamento M1 $-l/a = 0,5$ e M2 $-l/a = 0,2$ . . . . .	115



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Considerações Iniciais

A necessidade da teoria da Mecânica da Fratura surgiu em meados do século XVIII, quando vários acidentes, muitas vezes fatais, ocorriam frequentemente com trens, navios, pontes pênsil e outros que utilizavam o aço como material estrutural. A causa dos acidentes era, na maioria, devido ao aparecimento de trincas por fadiga que se propagavam até o rompimento da estrutura, mesmo com um carregamento muito abaixo do limite previsto durante o projeto. A Mecânica da Fratura teve importância também quando materiais de alta resistência, e com baixa tenacidade, apareceram. Outra metodologia muito importante, diretamente ligada à Mecânica da Fratura, é a Análise de Fadiga que estuda o processo de formação de trincas devido às variações de carga sobre o equipamento.

O projeto estrutural acabou por englobar as práticas acima, usando-as para determinar qual a tensão nominal que pode solicitar o material sem provocar falhas durante o período de vida útil previsto. Essa metodologia de projeto tem como objetivo o projeto de estruturas minimizando o efeito de uma possível trinca ou, se esta for esperada, prever o comportamento desta em serviço.

A análise de falha é particularmente importante quando o custo da peça (ou estrutura) é elevado ou quando a segurança deve ser garantida. Para o primeiro caso a determinação do tamanho da trinca admissível para o qual não ocorre a falha total da estrutura, é realizada. A segurança é garantida verificando, por exemplo, a velocidade de crescimento da trinca, definindo uma frequência necessária para a inspeção da fratura.

A origem das trincas não se limita à fadiga, durante a fabricação de um componente o surgimento de imperfeições é inevitável mesmo com um excelente controle de qualidade. Como exemplos de onde normalmente surgem falhas, que podem dar origem a uma trinca e possível falha do equipamento, tem-se, entre outros, processos de soldagem, fundição e tratamentos técnicos. É, então, muito importante definir o tamanho de falhas pré-existentes permitindo que não altere a performance do equipamento.

O comportamento de uma trinca durante a fase de propagação até a falha é quantificado pela Mecânica da Fratura. Com este fim, foi derivado o fator de intensidade de tensão ( $K$ ) para corpos elásticos lineares, isotrópicos e de material homogêneo, com trincas estacionárias. Este fator  $K$  quantifica a magnitude de tensão que está ocorrendo na região mais afetada, no extremo da trinca, e está diretamente ligado à Mecânica da Fratura Elástica Linear, isto é, deve ser utilizado na análise de fraturas frágeis, onde o efeito de plastificação é muito pequeno. Porém, com o auxílio do raio de plastificação, este também pode ser utilizado quando a plastificação não é desprezível, desde que não seja muito grande.

Um limite para o fator  $K$  também é definido, o fator crítico  $K_C$  que quando atingido ocorre a propagação da trinca. Sob o estado plano de deformações  $K_C$  se torna particularmente importante, como uma característica exclusiva do material e é a tenacidade à fratura do material ( $K_{IC}$ ). Sua determinação segue normas rígidas descritas pela ASTM (American Society for Testing and Materials).

Para o cálculo de  $K$  várias soluções analíticas foram propostas, entre estas se tem: funções tensão de Westergaard, funções tensão complexas [69], funções de Green e funções peso. Demonstrações dessas soluções podem ser encontradas no trabalho de Sih [80]. Essas soluções são a base para a Mecânica da Fratura porque contém os campos de tensões e deslocamentos próximos ao extremo da trinca, utilizados em outras soluções.

As soluções analíticas têm como vantagem satisfazer exatamente a todas as condições de contorno do problema. Porém, seu desenvolvimento é possível apenas para algumas geometrias específicas. Outros meios para obter  $K$  apareceram, os métodos experimentais e os numéricos. A análise experimental possui elevado custo e não permite verificar a peça em trabalho, o que dificulta bastante a sua viabilização de maneira prática e efetiva. Os métodos numéricos fornecem resultados para qualquer geometria, os principais são: método de colocação de contorno, equações integrais e métodos

consagrados como o Método de Elementos Finitos (MEF) e de Contorno (MEC). Agora, é proposto com este trabalho a utilização de um novo método, o qual vem apresentando excelentes resultados em várias áreas, o Método da Função de Green Local Modificado (MFGLM).

A seguir, encontra-se uma história geral do MFGLM, mostrando sua origem e os principais desenvolvimentos na MFEL bidimensional, com o MEF e o MEC.

## 1.2 O Método da Função de Green Local Modificado (MFGLM)

A transformação de um problema físico em um sistema de equações, diferenciais ou integrais, é amplamente usado pela engenharia. Para a solução destas formulações matemáticas criadas surgiram os métodos numéricos, onde os mais usados devido à versatilidade e facilidade no uso são o Método de Diferenças Finitas (MDF), o Método de Volumes Finitos (MVF) e o Método de Elementos Finitos (MEF) na solução de sistemas de equações diferenciais, e o Método de Elementos de Contorno (MEC) nas equações integrais.

Com o desenvolvimento do MEC surgiu o desejo de se obter formulações integrais compactas e que apresentassem apenas singularidades fracas, evitando os problemas na implementação numérica devido às singularidades, existentes no método. Assim, Burns [24], com um processo de reciprocidade, desenvolveu um método integral que aplicou na solução do problema multi dimensional de difusão de nêutrons. Neste, foi empregada a nível local uma função de Green apropriada, obtida com o Método da Função de Green na sua forma matemática, para a solução de equações diferenciais. A representação integral obtida é semelhante à da formulação integral indireta do MEC, mas as singularidades presentes são todas fracas. As aplicações ficaram restritas a domínios de geometria simples, onde os resultados obtidos são bons quando comparados com outros métodos numéricos, se mostraram 4 a 5 vezes mais eficiente. Burns sugeriu uma idéia de como aproximar a função de Green, sem a necessidade da determinação prévia desta, interessante para problemas com geometria complexa.

Horak e Doming [51, 52] e Horak [50], com base no trabalho de Burns [24], desenvolveram o Método da Função de Green Local (MFGL) para a solução de problemas de condução de calor e escoamento incompressíveis. Nos problemas de condução de calor seguiram a mesma sequência de

Burns, utilizando uma relação de reciprocidade definida localmente. A discretização do problema foi, como em Burns, realizada com o uso do método dos resíduos ponderados. Para os problemas de escoamento incompressível fizeram uso da técnica de integração transversa para determinar o tensor de Green. Novamente, os resultados obtidos foram superiores aos obtidos por outros métodos numéricos, entretanto, esses resultados possuem uma dependência paramétrica elevada, dificultando sua aplicação prática e sua aplicação ficou restrita a domínios que possuam contornos coincidentes às linhas de coordenada, devido à integração transversa.

O MFGL foi aplicado por Lawrence [60] para problemas de difusão de nêutrons, que empregou a integração transversa para facilitar a obtenção da função de Green apropriada ao problema, limitando o método a domínios que permitam a subdivisão do domínio em subdomínios retangulares.

Os excelentes resultados obtidos com o MFGL são devido às suas formulações integrais possuírem singularidades do tipo fracas, mas seu uso na solução de problemas de geometria genérica não foi possível pois o domínio deve ter contornos ortogonais, limitando as aplicações, e, ainda, a dependência paramétrica dificultou o uso deste método.

Esses problemas geométricos foram resolvidos por Barcellos e Silva [13] e Silva [81] que, seguindo a idéia proposta por Burns [24] desenvolveram o Método da Função de Green Local Modificado (MFGLM) tendo a versatilidade de poder ser utilizado em qualquer domínio, podendo, então, ser utilizado na Mecânica dos Sólidos. A integração transversa é eliminada e a função de Green é aproximada com o MEF, chegando a valores nodais da projeção desta sobre o espaço gerado pelas funções de interpolação de elementos finitos. Dessa forma, o conhecimento prévio da função de Green não é necessário e o método pode ser aplicado a qualquer geometria. A dependência paramétrica, encontrada no MFGL, é menos significativa no MFGLM.

Barcellos e Silva [13] apresentaram resultados com o MFGLM para o problema de membrana elástica, sobre a equação de Poisson. Elementos serendipity de oito nós e elementos de contorno quadráticos foram utilizados nas discretizações de domínio e contorno, respectivamente. Verificaram a precisão do método, comparando com o MEF e o MEC, e o comportamento deste quando há descontinuidade nas condições de contorno, os resultados foram muito satisfatórios. A insensibilidade do método quanto à variação no parâmetro também foi verificada.

Silva [81] apresentou um estudo detalhado do método e o aplicou, além do problema de

membrana elástica, nos problemas de haste delgada e vigas de Bernoulli, para estes casos as matrizes de Green foram obtidas com o método da colocação, já que o contorno para domínios unidimensionais são pontos. Os problemas foram testados com várias condições de contorno e os resultados comparados com o MEF e o MEC, mostrando uma precisão elevada.

O MFGLM foi recentemente aplicado a problemas mais elaborados, sendo possível dessa forma uma avaliação mais consistente do método. Um fato importante, que pode diferenciar os trabalhos realizados a partir deste ponto dos trabalhos realizados por Barcellos e Silva [13] e Silva [81], é que originalmente a função de Green definida localmente, isto é, o domínio é discretizado em "células" com condições de contorno adequadas. Estas células de Green podem ser discretizadas por elementos finitos, que podem conter apenas um elemento e, dessa forma, cada elemento finito aproxima uma função de Green apropriada para cada célula. Porém, outro caso extremo é utilizar apenas uma célula na discretização do domínio, e esta discretizada com um número qualquer de elementos. Este segundo caso é usado nos trabalhos seguintes e, desde que a função de Green não é definida localmente, mas para o domínio como um todo, o MFGLM poderia perder a nomenclatura "Local", entretanto, manter a nomenclatura original é importante pois nada impede que se use um número maior de células.

Uma aplicação do método na solução de problemas de placa, utilizando o modelo de Mindlin, foi realizado por Barbieri e Barcellos [4]. As discretizações continham elementos finitos lagrangeanos quadráticos e cúbicos, com seus respectivos elementos de contorno, quadráticos e cúbicos. Os processos de integração para o elemento finito cúbico usaram quadratura 4x4, integração cheia, e para o elemento quadrático a técnica de integração seletiva, isto é, integração reduzida (2x2). Para a parcela de cisalhamento e cheia (3x3) na parcela de flexão. Os resultados obtiveram excelente precisão, tanto para as tensões quanto deslocamentos, mesmo quando a relação entre a largura e a espessura da placa atingiu  $10^6$ .

Barcellos e Barbieri [10] apresentaram resultados obtidos com o MFGLM para problemas singulares de potencial, com a singularidade proveniente da geometria ou de descontinuidades nas condições de contorno. Discretizando com elementos quadráticos encontraram uma taxa de convergência  $h$  semelhante à obtida Para o MEF. Notaram também uma oscilação do fluxo próximo à singularidade, como ocorre no MEC quando este tipo de singularidade é presente.

Pela primeira vez, com Barbieri e Barcellos [7], o método é testado para um problema onde não se dispõe de uma função de Green, ou de uma solução fundamental para a aplicação do MEC. Aplicaram o MFGLM para problemas de potencial não homogêneos, alguns resultados são comparados com o MEF e, mais uma vez, os resultados se mostraram muito satisfatórios.

Barbieri e Barcellos [5] realizaram uma revisão do formalismo do MFGLM e apresentaram o método como uma extensão do MEC de Galerkin. Para demonstrar a capacidade do método, soluções para problemas de potencial, bi e tridimensionais, foram mostrados.

Novamente a aplicabilidade do MFGIM é comprovada onde não é possível se obter resultados com o MEC, ou seja, quando não é conhecida a solução fundamental para o problema. Esta comprovação foi, com o trabalho de Machado e Barcellos [63], investigada sobre o problema de placas laminadas ortotrópicas, com modelos da teoria de deformação cisalhante de primeira ordem, utilizando elementos lagrangeanos quadráticos, onde a técnica de integração seletiva foi adotada. A precisão foi comparada com soluções obtidas por outros métodos.

Filippin *et al.* [38] apresentaram o desempenho do método na análise dinâmica, análise modal, e estática em problemas de potencial, onde as taxas de convergência  $p$  e  $h$  foram verificadas experimentalmente. Os elementos utilizados foram de ordem até  $p = 4$ , para a análise estática, e  $p = 8$ , para a dinâmica. Verificaram que as taxas de convergência são melhores que as obtidas pelo MEF, principalmente com elementos de alta ordem.

Uma análise mais detalhada do MFGLM surge com a tese de Barbieri [3], a qual apresenta a formulação matemática e o formalismo do método com aplicações em problemas potenciais, da elastoestática e de placas de Mindlin. Em todas as aplicações notou uma super convergência nasal. Nos problemas de potencial os resultados foram bons mesmo com singularidade e são destacados problemas axisimétricos, tridimensionais e com propriedades não homogêneas. Obteve também taxas de convergência experimentais  $h$  e  $p$  com resultados próximos aos do MEF. Na elastoestática, com particular importância no desenvolvimento deste trabalho, obteve o fator de intensidade de tensão para problemas com trinca, utilizando o método das tensões. Também resolveu problemas com concentração de tensão obtendo resultados melhores que os obtidos com o MEF. Analisou também o efeito de distorção de malhas. Para placas de Mindlin os resultados não foram menos satisfatórios e o problema de travamento não foi observado nos casos testados. Aplicou ainda o método HRZ para obter



as matrizes gramianas, com o intuito de reduzir o tempo gasto no cálculo das projeções da função de Green, obtendo resultados, da mesma forma, excelentes para os problemas potenciais.

Barcellos *et al.* [11] apresentaram uma revisão atualizada e bem detalhada do formalismo do MFGLM com base nas equações da elastoestática. O desempenho numérico do método é comprovado em Barcellos *et al.* [12] com as seguintes aplicações: tubo circular sujeito a um gradiente térmico, cascas esféricas com pressão interna, placa circular isotrópica engastada, placa laminada não simétrica e determinação das frequências naturais de vibração de uma membrana “H” e de propagação de ondas em cavidade acústica. Dessa forma, todas as conclusões já apresentadas puderam ser lembradas e comprovadas.

Maldaner e Barcellos [66] obtiveram resultados para problemas da Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL) bidimensional, com a utilização do método dos deslocamentos. Os elementos usados nas discretizações do domínio e do contorno foram os elementos lagrangeanos lineares, quadráticos e cúbicos. Os fatores de intensidade de tensão, obtidos nodalmente, são comparados com uma solução analítica e observaram excelentes resultados, mesmo com malhas grosseiras, se comparadas às normalmente presentes nas soluções com o MEF.

Barbieri *et al.* [8], aplicaram o MFGLM para a elastoestática bidimensional e resolveram problemas com concentração de tensão e problemas axissimétricos, comparando com soluções obtidas por finitos e contorno. Machado *et al.* [64] apresentaram resultados para os problemas de placas laminadas ortotrópicas não simétricas, com wna teoria de ordem superior. Filippin *et al.* [40] aplicaram o método à equação de Helmholtz, resolvendo os problemas de propagação livre de ondas em cavidades acusticamente rígidas, cavidade retangular, e de vibração livre em membranas elásticas retangular, em “L” e elíptica.

Filippin *et al.* [40], com o MFGLM, resolveram problemas representados pela equação de Helmholtz com condições de contorno Dirichlet e/ou Neumann. A precisão obtida é elevada mesmo para frequências altas.

A tese de Machado [63] fornece o desenvolvimento do método na solução de placas ortotrópicas de materiais compostos, onde a ausência de uma solução fundamental não foi problema para o MFGLM. Uma análise abstrata e variacional do método, com o formalismo, é apresentada. As teorias de placa utilizadas são de ordem simples e superior, sendo que com a segunda foram resolvidos pro-

blemas de laminados não simétricos. Uma grande quantidade de exemplos são apresentados e, como já era esperado, os resultados são muito bons.

Filippin [38] aplicou o MFGLM à equação de Helmholtz e resolveu problemas de vibração livre em membranas e a propagação de ondas em cavidades acusticamente rígidas, obtendo modos e frequências de vibração. Vários exemplos são apresentados que comprovam a capacidade do método. Análise experimental de convergências  $p$  e  $h$  também foi realizada e, para tanto, Filippin implementou elementos lagrangeanos de ordem até  $p = 10$ . O comportamento do método quanto à distorção da malha também foi verificado, assim como a dependência paramétrica para os problemas citados trazendo variação apenas para resultados quando o parâmetro é muito próximo a zero, devido ao mau condicionamento numérico.

Barbieri *et al.* [9] apresentaram pela primeira vez resultados da aplicação do método a problemas de casca, para qualquer forma e com deformação cisalhante considerada. O problema de uma casca cilíndrica suportando seu peso próprio, sobre diafragmas planos e rígidos nas extremidades, é apresentado. Também é mostrado o caso de um cilindro curto engastado nas extremidades sob pressão interna. Em ambos os casos os resultados foram superiores aos obtidos com o MEF.

Barbieri e Barcellos [6] apresentaram uma revisão do MFGLM aplicado à placa de Mindlin e resolveram alguns problemas: placa retangular simplesmente apoiada, placa circular engastada, placa circular com espessura variável e viga engastada sob flexão. Verificaram a não existência de *locking* e a sensibilidade à distorção da malha. Uma análise de convergência  $h$  e uma comparação com o MEF foram realizadas.

### 1.3 O MEF na Mecânica da Fratura

Nesta seção, está presente uma revisão sobre as principais técnicas utilizadas com o Método dos Elements Finitos na solução dos problemas da Mecânica da Fratura, basicamente sobre o cálculo do fator de intensidade de tensão. É importante ressaltar que nem todos os trabalhos mencionados a seguir receberam uma análise aprofundada, o que ocorre também na seção a seguir, pois o objetivo aqui é apenas de se adquirir uma visão geral e no decorrer do trabalho, quando é interessante, encontram-se análises mais aprofundadas.

Assim, das pesquisas sobre como obter o fator de intensidade de tensão com o MEF, surgem algumas técnicas. Chan, Tuba e Wilson [27] mostraram em seu trabalho que o fator  $K$  pode ser obtido dos deslocamentos, ou tensões, fornecidos pelo MEF, calculado com os campos analíticos. Os valores de  $K$ , obtidos nodalmente, podem ser extrapolados para o extremo da trinca, são os métodos do deslocamento e da tensão. Rooke [78] sugeriu o cálculo de  $K$  com o uso da integral de linha, ou integral  $J$ . Irwin [55] propôs o método da energia, onde  $K$  está relacionado com a taxa de energia de deformação perdida ( $G$ ), obtida pela variação do tamanho da trinca. Essas técnicas não solucionaram totalmente o problema, pois os elementos finitos não conseguem representar o campo de deslocamentos próximo ao extremo da trinca, e surgiram, então, os elementos especiais.

Um dos primeiros elementos especiais possui a trinca em seu interior, proposto por Wilson [95], e tem a fonna circular com seu centro na extremidade da trinca, que se estende radialmente no elemento. Problemas de compatibilidade existem mas podem, de certa forma, serem controlados.

Byskov [25] desenvolveu um elemento baseado nas funções de Muskhelishvili [69], com um número de nós na periferia muito elevado, porque o número de séries da expansão utilizado é elevado. Este elemento também engloba a trinca em sua forma e a compatibilidade também complica o uso deste elemento.

Elementos com apenas um nó no extremo da trinca podem ser construídos, sendo a extremidade da trinca envolvida por uma série de elementos. Elementos triangulares deste tipo foram desenvolvidos por Tracy [90] utilizando os campos obtidos por Wilson [95] tal que, radialmente, o deslocamento varia com  $(r)^{1/2}$ , e circunferencialmente varia de forma linear. Os elementos triangulares são obtidos pelo colapso de um elemento quadrangular linear. Tracey recomendou o uso de elementos quadrangulares de transição especiais, para serem usados em conjunto.

Blackburn [19] introduziu os elementos triangulares de três e seis nós tendo a componente  $(r)^{1/2}$  no campo de deslocamentos. Na mesma época, Plan, Tong e Luk [75] desenvolveram os elementos singulares híbridos, baseados nas distribuições de tensão e deslocamento próximas ao extremo da trinca, que tem como vantagem o cálculo direto do fator  $K$ , tido como uma variável global. Não possui compatibilidade com os elementos adjacentes, porém isto pode ser evitado usando um princípio variacional modificado.

Elementos similares aos híbridos foram propostos por Benzley [17], representando a singu-

laridade com elementos finitos isoparamétricos convencionais, com uma formulação generalizada tal que qualquer singularidade pode ser tratada, adicionando termos apropriados ao que fornecem a singularidade adequada. Esses elementos enriquecidos também são incompatíveis, problema reduzido com o uso de elementos de transição. Outro problema é que a integração deve ter no mínimo uma quadratura de Gauss  $7 \times 7$ .

Todos os elementos criados até então são complicados e possuem problemas de compatibilidade, não passando em um *patch-test* [28]. Finalmente, surgiu um elemento muito simples que satisfaz todas as condições necessárias, porque a formulação é mantida a mesma do elemento serendipity de oito nós. Este elemento foi proposto, independentemente, por Hanshell e Shaw [46] e Barsoum [14, 15] e representa a singularidade quando os nós centrais laterais são posicionados a um quarto da largura do elemento. Mais tarde essa técnica foi transferida a outros elementos, como o triangular de seis nós, com resultados bons, porém não tanto quanto um elemento finito híbrido [16], mas muito mais simples.

Outros elementos compatíveis foram desenvolvidos por Akin [1] que, a partir de uma potência  $W^\lambda (0 < \lambda < 1)$ , onde  $W$  é uma função local, modificou as funções de interpolação de elementos convencionais. A implementação da família de elementos é simples, mas não sua integração pois estes não satisfazem à condição de deformação constante.

Stern e Becker [86], modificando o campo de deslocamentos do elemento de Blackburn [19], geraram um elemento triangular de seis nós compatível que satisfaz as condições necessárias a um *patch-test*. Uma quadratura especial que fornece integração exata ao elemento foi criada, e a técnica expandida a uma família de elementos singulares, Stern [85].

Recentemente, Tsamasphyros e Giannakopoulos [91] propuseram a geração de elementos singulares com o uso de mapeamento conforme, apresentaram a transformação para o elemento plano de oito nós, quadrangular. Heylger e Kriz [48] usaram a idéia de elemento enriquecido e a estenderam a uma formulação híbrida.

Métodos alternativos para o cálculo do  $K$  também são sugeridos, Sinclair e Mullan [82] forneceram um processo similar ao método da superposição, de implementação fácil e que utiliza pouco tempo computacional.

## 1.4 O MEC na Determinação do $K$

O primeiro a analisar os problemas da Mecânica da Fratura com o Método dos Elementos de Contorno (MEC) foi Cruse [30], que apresentou problemas de singularidade devido à degeneração do sistema de equações, na formulação elástica. Essa degeneração ocorre na integral dos esforços que se anula quando as duas faces da trinca coincidem. O objetivo se tomou, então, eliminar este problema surgindo várias propostas.

Uma das primeiras soluções foi usar funções de Green especiais (Snyder e Cruse [84]), mas a técnica é restrita para geometrias simples e bidimensionais. Como vantagens do uso dessas funções é que a trinca não precisa ser modelada, sendo incluída na formulação, e o fator de intensidade de tensão é obtido diretamente.

Cruse [31] propôs uma formulação de equações integrais de tração de alta ordem, nos quais o problema de degeneração não ocorre. Desenvolvendo esta idéia, Crouch [29] obtém o método dos deslocamentos descontínuos, onde o modelo é obtido pela superposição de determinada solução fundamental sobre a superfície da trinca.

Um detalhamento matemático do problema foi realizado por Cruse [32], que também fez novas considerações sobre o uso das funções de Green e propôs novas alternativas. Uma destas é o modelamento da trinca como um chanfro, isto é, o modelo possui um pequeno espaço separando as superfícies da trinca, eliminando o problema de degeneração mas afetando a fidelidade do modelo, reduzindo a precisão. A outra técnica é modelar apenas uma face da trinca, ou seja, fazendo uso da simetria, quando esta existir, pois caso contrário não pode ser aplicada, restringindo muito o uso da técnica.

Uma idéia mais recente é usar subregiões no modelo, cada face pode estar representada em uma subregião evitando a degeneração. Este é o método do domínio múltiplo fornecido por Blandford *et al.* [20]. O único problema deste método é a necessidade de ligamento dessas regiões. Tem vantagens como a facilidade na aplicação em trincas de materiais compostos.

Segundo Beskos [18], as técnicas mais utilizadas, devido às qualidades, são o modelamento com múltiplas regiões e o método dos deslocamentos descontínuos.

Recentemente, Gray [42] apresentou uma técnica que supera as até então apresentadas. A

técnica faz uso de uma equação integral adicional, que expressa as condições de contorno na trinca. Como a solução fundamental é derivada duplamente na equação, surgem integrais hipersingulares, as quais são avaliadas por um processo de limite, onde, na média, a singularidade é anulada. Uma das vantagens deste método é a simplicidade da discretização, facilitando a aplicação em problemas cujo crescimento da trinca é analisado, pois nestes é necessária a reconstrução da malha a cada passo, inviabilizando, por exemplo, o método dos domínios múltiplos.

O Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD) é aplicado à fratura por Portela *et al.* [76]. As equações duais são a equação integral do MEC para deslocamento e a equação para tração, onde cada uma é aplicada sobre uma face da trinca, podendo resolver problemas mistos com apenas uma discretização. Vários resultados são apresentados, com o fator intensidade de tensão estimado pela integral  $J$ .

O uso de elementos especiais também teve grande desenvolvimento no MEC. O elemento *quarter-point* foi usado no trabalho de Blandford *et al.* [20] em conjunto com o método do domínio múltiplo. Martinez e Dominguez [68] sugeriram o uso de uma função especial para a tração no elemento *quarter-point*, criando o elemento *quarter-point* de tração. Watson [92] tratou os problemas bidimensionais unicamente com o uso de funções de interpolação Hermitianas cúbicas.

O MEC teve um maior desenvolvimento na Mecânica da Fratura para problemas tridimensionais, já que nestes o MEF se torna muito caro e para os problemas bidimensionais seu desenvolvimento é bastante avançado.

Elementos de contorno especiais 2D e 3D podem ser encontrados no trabalho de Ezawa e Okamoto [37], baseados no elemento de Barsoum (*quarter-point*). Uma família de elementos de contorno mais elaborada foi proposta por Tanaka e Itoh [88] que usam funções de interpolação distintas para a geometria, o deslocamento e a tração, onde a singularidade da derivada do deslocamento e a singularidade da tensão podem ser variadas independentemente.

## 1.5 Objetivos do Trabalho

O desenvolvimento do MFGLM tem sido grande nos últimos anos, como pôde ser visto anteriormente. Assim, o objetivo principal deste trabalho, seguindo a linha de pesquisa do método,

é verificar a capacidade deste na estimativa do fator de intensidade de tensão, fornecendo uma nova alternativa para os problemas da Mecânica da Fratura Elástica Linear. Essa verificação é realizada com elementos convencionais, assim como, com elementos especiais já de uso no MEF e no MEC.

Na análise com elementos convencionais são implementados novos elementos, finitos e de contorno, na formulação elastoestática, são estes: elementos finitos quadrangulares lagrangeanos de até 49 nós, o elemento finito serendipity de oito nós e elementos triangulares de ordem até cúbica, com os respectivos elementos de contorno. Dessa forma, uma análise de convergência experimental é realizada, tanto para  $p$  quanto  $h$ .

Como elementos singulares são implementados uma família de elementos utilizando a técnica do elemento *quarter-point*, as famílias de elementos de Akin e de Stern e um elemento singular desenvolvido para o MEC, adaptado ao MFGLM. Este último elemento singular é não-isoparamétrico e, então, uma formulação não-isoparamétrica do MFGLM é desenvolvida, onde a interpolação da geometria e dos campos de deslocamento e tração são realizados distintamente. A apresentação dessa formulação e revisões da elasticidade linear e da MFEL, bidimensionais, fazem parte da primeira etapa deste trabalho.

Uma análise da dependência paramétrica nesta aplicação também está incluída, onde são comparadas as possíveis formas de se introduzir o operador auxiliar na formulação. Independente do problema de trincas, é apresentado um novo algoritmo numérico para o MFGLM, aplicado à elastoestática, que tem como vantagens a melhora no condicionamento numérico das matrizes, redução do espaço de memória necessário e redução do custo computacional ou tempo de trabalho para a solução.





## Capítulo 2

# O MFGLM Aplicado à Fratura Elástica

### 2.1 Introdução

Neste capítulo é apresentada a formulação do Método da Função de Green Local Modificado (MFGLM) aplicado à elastoestática bidimensional, para posterior utilização no cálculo do fator de intensidade de tensão  $K$ , como solução de problemas da mecânica da fratura. Assim, primeiramente, é feita uma revisão da elasticidade linear, apresentando os operadores usados na formulação do método, desenvolvida na sequência. Também se faz presente uma revisão da mecânica da fratura elástica linear (MFEL).

### 2.2 Elasticidade Linear

A teoria da elasticidade está designada a tratar explicitamente uma resposta especial (resposta elástica) dos materiais devido a determinado esforço aplicado, onde em todo ponto  $P$ , pertencente ao corpo contínuo, as tensões dependem somente da deformação simultânea na vizinhança próxima ao ponto  $P$ , em todo tempo. Esta teoria, quando comparada à mecânica do contínuo, pode ser considerada como uma teoria empírica [21].

Se após a aplicação das forças sobre o corpo, com a respectiva deformação, estas forem retiradas e o corpo se recuperar em sua forma original, o material deste corpo é dito idealmente elástico [67]. E, ainda, se a relação entre o estado de tensão e o de deformação for linear, para uma

dada temperatura, este é chamado de um material elástico linear. A teoria correspondente é, então, a teoria da elasticidade linear. Os materiais estruturais geralmente têm um comportamento aproximado a esta teoria se as deformações forem suficientemente pequenas.

Para a solução dos problemas da elasticidade linear, com pequenos deslocamentos, temos um sistema composto de quinze equações. Segundo Malvern [67] são estas:

a) Três equações de movimento

$$\sigma_{ji,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.1)$$

b) Seis equações da lei de Hooke

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (2.2)$$

c) Seis equações geométricas

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.3)$$

onde  $(\cdot)_{,i}$  é a derivada parcial em relação à coordenada  $x_i$ ,  $\sigma_{ij}$  são as componentes do tensor de tensão e  $\varepsilon_{ij}$  do tensor de deformação,  $u_i$  e  $b_i$  são componentes dos vetores deslocamento e força de corpo, respectivamente,  $\rho$  é a densidade do material,  $\ddot{u}_i$  representa a aceleração,  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker ( $\delta_{ij} = 0$  se  $i \neq j$  e  $\delta_{ij} = 1$  se  $i = j$ ) e  $\lambda$  e  $G$  são as constantes de Lamé. Estas se relacionam com o módulo de Young ( $E$ ) e coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) por

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{e} \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.4)$$

O sistema de equações diferenciais lineares dados por (2.1)-(2.3) é válido para materiais isotrópicos e isotérmicos, isto é, onde os efeitos da temperatura podem ser desprezados (isotérmico) e possui as mesmas propriedades elásticas em todas as direções (isotrópico).

Particularizando para a elastoestática, ou seja, para corpos e em equilíbrio estático ( $\ddot{u}_i$  é nulo), tem-se em (2.1) que o termo à direita da igualdade ( $\rho \ddot{u}_i$ ) é nulo. Esta condição pode ser aplicada

quando a velocidade de carregamento é muito baixa, podendo-se desprezar os efeitos inerciais. Então, as equações (2.1) tomam a forma das equações de equilíbrio

$$\sigma_{ji,j} + b_i = 0 \quad (2.5)$$

As condições de contorno, para o sistema de quinze equações, poder ser de quatro tipos:

1. Condições de contorno de Dirichlet, ou de deslocamento, onde o vetor deslocamento é prescrito no contorno,  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ .
2. Condições de contorno de Neumann, ou de tração, onde as trações de superfície são prescritas, no contorno,  $\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}$ . Sendo  $\mathbf{t}_j = \sigma_{ij}\mathbf{n}_i$  e  $\mathbf{n}_i$  as componentes de  $\hat{\mathbf{n}}$ , o vetor unitário normal à superfície, no ponto de aplicação de  $\mathbf{t}$ .
3. Condições de contorno mistas, quando os dois casos anteriores ocorrem simultaneamente em um mesmo corpo. Podem ocorrer de duas maneiras:
  - O contorno é dividido em parcelas, duas ou mais, que contenham condições de contorno de Dirichlet ou Neumann, distintamente.
  - Em cada ponto do contorno é prescrito  $\mathbf{u}_i$  ou  $\mathbf{t}_i$  distintos para cada grau de liberdade (g.d.l.), mas nunca distintos no mesmo g.d.l.
4. Condições de contorno de Cauchy, ou apoio elástico, quando os deslocamentos e trações devem satisfazer uma expressão do tipo  $a\mathbf{u} + b\mathbf{t} = c$ , sobre uma determinada região do contorno.

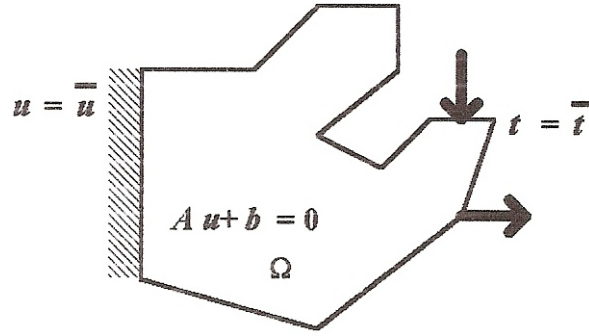
Pode-se agora resolver o sistema de equações acima, porém para obter as 15 incógnitas (6 tensões, 6 deformações e 3 deslocamentos) o trabalho é bastante oneroso. Existem várias maneiras de formular o problema em um número menor de equações, pode-se, por exemplo, reduzir este sistema na equação de Navier substituindo (2.3) em (2.2), a nova equação indicial para as tensões obtida é substituída na equação de movimento, equilíbrio para a elastoestática (2.5), assim

$$(\lambda + G)\mathbf{u}_{k,ik} + G\mathbf{u}_{i,kk} + b_i = 0 \quad (2.6)$$

com condições de contorno:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= \bar{\mathbf{u}}_i && \text{sobre } \partial\Omega_1 \\ \lambda \mathbf{u}_{k,k} \mathbf{n}_i + G(\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i}) \mathbf{n}_j &= \bar{\mathbf{t}}_i && \text{sobre } \partial\Omega_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

para o contorno  $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ , Figura 2.1.



**Figura 2.1:** Representação do problema.

Vetorialmente, a equação de Navier fica

$$(\lambda + G)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + G\nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{b} = 0 \quad (2.8)$$

com as condições de contorno de deslocamento e tração dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{e} \quad \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\hat{\mathbf{n}} + G(\mathbf{u}\vec{\nabla} + \vec{\nabla}\mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{t}} \quad (2.9)$$

A unicidade da solução,  $\sigma$  e  $\varepsilon$ , é comprovada supondo que a equação de equilíbrio é satisfeita, no estado inicial não deformado, detalhes desta prova podem ser encontrados em Malvern [67].

A equação de Navier também pode ser obtida através de qualquer princípio variacional, por exemplo, o Princípio da Mínima Energia Potencial onde se deseja o vetor deslocamentos  $\mathbf{u}(x)$  que minimize o funcional  $U(\mathbf{u})$ , Konkov [59],

$$U(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \mathbf{u}_{i,j} C_{ijkl} \mathbf{u}_{k,l} - b_i \mathbf{u}_i \right) d\Omega - \int_{\partial\Omega_2} \bar{\mathbf{t}}_i \mathbf{u}_i d\partial\Omega - \int_{\partial\Omega_1} \mathbf{t}_i \bar{\mathbf{u}}_i d\partial\Omega \quad (2.10)$$

No funcional, a primeira parcela da integral de domínio representa a energia de deformação

do corpo elástico, a segunda o trabalho realizado pelas forças de corpo, e as integrais de contorno o trabalho realizado pelas forças e deslocamentos de superfície.

As equações (2.8) e (2.9) podem ser reescritas em uma forma mais adequada para a aplicação do Método da Função de Green Local Modificado, Barbieri [3]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{u} &= \mathbf{b} && \text{em } \Omega \\ \mathbf{N}\mathbf{u} &= \bar{\mathbf{t}} && \text{sobre } \partial\Omega_2 \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} && \text{sobre } \partial\Omega_1 \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde  $\mathbf{A}$  é um operador diferencial e  $\mathbf{N}$  é o operador de Neumann, estes operadores podem ser obtidos na forma matricial do desenvolvimento das equações (2.5), (2.2) e (2.3). Para isto, considerando os tensores de deformação e tensão simétricos, estes podem ser transformados em vetores:

$$\begin{aligned} \varepsilon^t &= \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{yz} \quad \varepsilon_{xz}\} \\ \sigma^t &= \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xz}\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Re-escrevendo as equações com os vetores, na forma matricial, vem:

- Equações de equilíbrio:

$$\partial^t \sigma + \mathbf{b} = 0 \quad (2.13a)$$

onde

$$\partial^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.13b)$$

- Equações geométricas:

$$\partial \mathbf{u} = \varepsilon \quad (2.14)$$

- Equações da lei de Hooke generalizada:

$$\mathbf{C}\varepsilon = \sigma \quad (2.15a)$$

onde  $\mathbf{C}$  é a matriz das constantes elásticas ( $C_{\alpha\beta}$ ), simétrica para um material elástico linear e, quando o meio é isotrópico, tem a seguinte forma:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (2.15b)$$

Assim para se chegar na forma matricial do operador  $\mathbf{A}$  (2.11) basta resolver a multiplicação

$$\mathbf{A} = \partial^t \mathbf{C} \partial \quad (2.16)$$

e, assim,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \eta \frac{\partial^2}{\partial x^2} + G\nabla^2 & \eta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \eta \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \eta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \eta \frac{\partial^2}{\partial y^2} + G\nabla^2 & \eta \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \eta \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} & \eta \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & \eta \frac{\partial^2}{\partial z^2} + G\nabla^2 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

onde  $\eta$  representa a soma das constantes de Lamé ( $\lambda + G$ ), e  $\nabla$  é o operador gradiente, tal que

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right\} \quad \text{e} \quad \nabla^2 = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \quad (2.18)$$

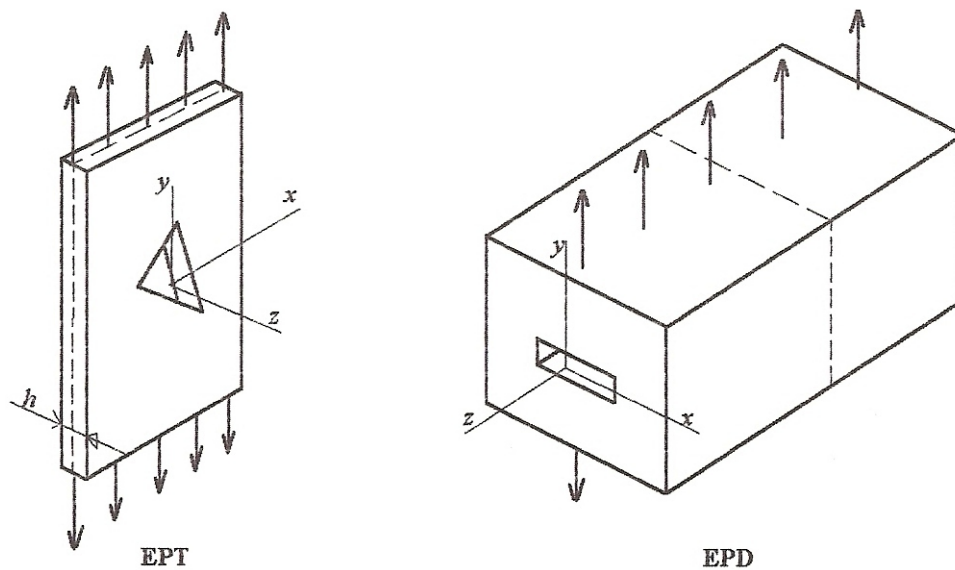
O operador de Newmann  $\mathbf{N}$  pode ser obtido desenvolvendo a equação (2.9), chegando-se em

$$\begin{bmatrix} \eta n_x + G\hat{\mathbf{n}}\nabla & Gn_y \frac{\partial}{\partial y} + \lambda n_y \frac{\partial}{\partial y} & Gn_z \frac{\partial}{\partial x} + \lambda n_x \frac{\partial}{\partial z} \\ Gn_x \frac{\partial}{\partial y} + \lambda n_y \frac{\partial}{\partial x} & \eta n_y + G\hat{\mathbf{n}}\nabla & Gn_z \frac{\partial}{\partial y} + \lambda n_y \frac{\partial}{\partial z} \\ Gn_x \frac{\partial}{\partial z} + \lambda n_z \frac{\partial}{\partial x} & Gn_y \frac{\partial}{\partial z} + \lambda n_z \frac{\partial}{\partial y} & \eta n_z + G\hat{\mathbf{n}}\nabla \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Tem-se, então, os operadores na forma matricial para a elasticidade tridimensional.

### 2.2.1 Elasticidade Plana

Há casos em que é possível uma simplificação do problema supondo que em alguma direção (por exemplo  $z$ ) não ocorrem mudanças nas distribuições de tensão e deformação que existem no plano ortogonal à direção (plano  $x - y$ ), teoria plana. Para esta simplificação dois casos podem ser definidos: o estado plano de deformação (EPD) e o plano de tensão (EPT). A Figura 2.2 mostra dois exemplos onde a teoria plana pode ser aplicada.



**Figura 2.2:** Os dois casos da elasticidade plana.

A) EPD – Um corpo está no estado plano de deformação, paralelo ao plano ( $x - y$ ), se as componentes do deslocamento na direção  $z$  forem nulas,  $u_z = 0$ , e se as componentes  $u_x$  e  $u_y$  forem somente funções de  $x$  e  $y$ . Assim, a formulação básica fica:

- Equações de equilíbrio:

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + b_x = 0$$

$$\sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + b_y = 0 \tag{2.20}$$

$$b_z = 0$$

- Equações da lei de Hooke:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \lambda e + 2G\varepsilon_{xx} \\
\sigma_{yy} &= \lambda e + 2G\varepsilon_{yy} \\
\sigma_{zz} &= \lambda e = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\
\sigma_{xy} &= 2G\varepsilon_{xy} \\
\sigma_{xz} &= \sigma_{yz} = 0
\end{aligned} \tag{2.21}$$

onde  $e$  é a deformação cúbica dada por  $e = u_{x,x} + u_{y,y}$ .

- Equações geométricas:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= u_{x,x} \\
\varepsilon_{yy} &= u_{y,y} \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}(u_{x,y} + u_{y,x}) \\
\varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Os operadores para o EPD podem ser obtidos da forma apresentada anteriormente, redefinindo os vetores como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^t &= \{u_x \quad u_y\} & \boldsymbol{\varepsilon}^t &= \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{xy}\} \\
\mathbf{b}^t &= \{b_x \quad b_y\} & \boldsymbol{\sigma}^t &= \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy}\}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\partial^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

$$\mathbf{C}_{EPD} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

$$\mathbf{A}_{EPD} = \left\{ \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right\}^2 \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \tag{2.26}$$



$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \eta n_x + G\hat{\mathbf{n}}\nabla & Gn_y \frac{\partial}{\partial x} + \lambda n_y \frac{\partial}{\partial y} \\ Gn_x \frac{\partial}{\partial y} + \lambda n_x \frac{\partial}{\partial x} & \eta n_y + G\hat{\mathbf{n}}\nabla \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

B) EPT – Se as componentes de tensão  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{zx}$  e  $\sigma_{zy}$  forem nulas e as outras componentes independentes de  $z$ . As equações de equilíbrio são idênticas ao caso plano de deformação, assim como as equações da Lei de Hooke, porém com  $\sigma_{zz}$  nulo. Nas equações geométricas a alteração está em  $\varepsilon_{zz}$  que não é nulo, mas

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\nu}{\nu - 1} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (2.28)$$

Para sermos mais rigorosos na aproximação da distribuição plana de tensão, devemos observar que as tensões devem ser médias sobre a espessura, estado plano de tensões generalizado, e cada componente de tensão é obtida da integração desta sobre a espessura, em uma placa fina (Figura 2.2).

$$\bar{\sigma}_{ij}(x, y) = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij}(x, y, z) dz \quad (2.29)$$

Supõe-se que todos os carregamentos e soluções são simétricos, e que  $\sigma_{zx}$  e  $\sigma_{zy}$  se anulam nas superfícies  $z = \pm \frac{h}{2}$  e ainda que  $\sigma_{zz}$  é nulo em qualquer posição. Deve-se, então, sempre interpretar as tensões, deformações e deslocamentos das equações como médias no EPT (Boresi [21]).

Os únicos operadores que se diferenciam do EPD são:

$$\mathbf{C}_{EPT} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

$$\mathbf{A}_{EPT} = \left( \frac{E}{1 - \nu^2} \right)^2 \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

A partir de agora o problema (2.11) está bem definido, com os operadores necessários conhecidos, e a solução pode então ser obtida com o Método da Função de Green Local Modificado, demonstrado a seguir.

## 2.3 Aplicação do MFGLM

É apresentado aqui o desenvolvimento do MFGLM para a solução de sistemas de equações diferenciais lineares com determinadas condições de contorno. Como em (2.11), onde  $A$  é o operador diferencial do problema, no caso a elastoestática, e  $\mathbf{N}$  é o operador de Neumann associado, ambos obtidos na seção anterior.

Uma análise abstrata e variacional, com um formalismo matemático genérico e aprofundado do método, onde são discutidas a existência e a unicidade da solução, pode ser encontrada nos trabalhos de Silva [81], Barbieri [3] e Machado [63]. Este trabalho se limita ao desenvolvimento, na elastoestática, para a aplicação do método na mecânica da fratura elástica linear (MFEL).

### 2.3.1 Definição do Problema

O MFGLM deve ser capaz de resolver um sistema de equações diferenciais lineares (2.11) em  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , um domínio aberto e limitado, com condições de contorno aplicadas no contorno  $\partial\Omega$ , suficientemente regular, isto é, admite a existência de um vetor normal em quase todos os pontos, exceto em conjuntos de medida nula, problema bem posto.

Outro fator importante é que as funções, definidas em  $\Omega$ , devem pertencer a um espaço de Hilbert  $\mathbb{H}^m$  que permitam suas extensões ao contorno, isto é, devem possuir a "propriedade do traço" (Oden e Reddy [71]), para permitir um tratamento apropriado no contorno. Define-se assim, sobre  $\mathbb{H}^m$ , o operador traço,  $\gamma$ :

$$\gamma_j = \left. \frac{\partial^j u(x)}{\partial n^j} \right|_{\partial\Omega}, \quad 0 \leq j \leq m-1 \quad (2.32)$$

onde  $n^j$  representa a componente  $j$  da normal sobre o contorno  $\partial\Omega$ .

Para prosseguir na formulação do método é importante, antes, observar que o funcional  $U(\mathbf{u})$  (2.10) pode ser re-escrito na forma

$$U(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - F(\mathbf{u}) \quad (2.33a)$$

onde a forma bilinear  $B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  é

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} u_{i,j} C_{ijkl} v_{k,l} d\Omega \quad (2.33b)$$

e  $F(\mathbf{u})$  o funcional

$$F(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} b_i u_i d\Omega + \int_{\partial\Omega_2} \bar{t}_i u_i d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega_1} t_i \bar{u}_i d\partial\Omega \quad (2.33c)$$

As variáveis  $u$  e  $v$  da forma bilinear estão relacionadas a dois estados, um real ( $u$ ) e outro auxiliar ( $v$ ). O estado real é aquele que se deseja determinar e o auxiliar é escolhido visando melhorar as características de regularidade do sistema (Beskos [18]), no Método dos Elementos de Contorno o estado auxiliar é resultante da solução fundamental. Horak [50] propõe, com o MFGLM, a utilização de uma função de Green apropriada na definição do estado auxiliar. Deixando, por hora,  $v$  como uma solução do estado auxiliar, aqui definido com o problema adjunto com excitação do tipo delta de Dirac aplicada no domínio,

$$\mathbf{A}^* v(P, Q) = \delta(P, Q) \mathbf{I} \quad (2.34)$$

onde  $\mathbf{A}^*$  é o operador adjunto correspondente a  $\mathbf{A}$ , sendo  $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$ , pois  $\mathbf{A}$  é um operador auto-adjunto, Barbieri [3].  $\delta(P, Q)$  é a função delta de Dirac,  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade e  $\mathbf{v}(P, Q)$  é o tensor solução fundamental isto é,  $v_{ij}$  representa o "deslocamento generalizado" na direção  $i$  de qualquer ponto  $Q \in \Omega$ , "ponto campo", devido a uma "força generalizada" unitária aplicada no  $P \in \Omega$ , "ponto fonte", e direção  $j$ .

Pré-multiplicando a equação (2.11) por  $\mathbf{v}(P, Q)^t$  e a equação (2.34) por  $\mathbf{u}(P)^t$ , obtém-se

$$\mathbf{v}(P, Q)^t \mathbf{A} \mathbf{u}(P) = \mathbf{v}(P, Q)^t \mathbf{b}(P) \quad (2.35)$$

$$\mathbf{u}(P)^t \mathbf{A}^* \mathbf{v}(P, Q) = \delta(P, Q) \mathbf{u}(P)^t \mathbf{I} = \delta(P, Q) \mathbf{u}(P)^t \quad (2.36)$$

Subtraindo agora a equação (2.35) do transposto de (2.36) temos

$$[\mathbf{A}^* \mathbf{v}(P, Q)]^t \mathbf{u}(P) - \mathbf{v}(P, Q)^t \mathbf{A} \mathbf{u}(P) = \delta(P, Q) \mathbf{u}(P) - \mathbf{v}(P, Q)^t \mathbf{b}(P) \quad (2.37)$$

que rearranjando fica

$$\delta(P, Q) \mathbf{u}(P) = \mathbf{v}(P, Q)^t \mathbf{b}(P) + [\mathbf{A}^* \mathbf{v}(P, Q)]^t \mathbf{u}(P) - \mathbf{v}(P, Q)^t \mathbf{A} \mathbf{u}(P) \quad (2.38)$$

Com o sistema de coordenadas fixo em  $P \in \Omega$ , integra-se a equação (2.38) sobre o domínio  $\Omega_P$ , transfoemando-a na expressão

$$\int_{\Omega} \delta(P, Q) \mathbf{u}(P) d\Omega_P = \int_{\Omega} \{ \mathbf{v}(P, Q)^t \mathbf{b}(P) + [\mathbf{A}^* \mathbf{v}(P, Q)]^t \mathbf{u}(P) - \mathbf{v}(P, Q)^t \mathbf{A} \mathbf{u}(P) \} d\Omega_P \quad (2.39)$$

Levando em conta as propriedades da função delta de Dirac,  $\delta(P, Q)$ :

$$\delta(P, Q) = 0 \quad \forall P \neq Q \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} \delta(P, Q) \mathbf{u}(P) d\Omega_P = \mathbf{u}(Q) \quad (2.40)$$

a integração à esquerda da equação (2.39) pode ser substituída por  $u(Q)$ . E aplicando o teorema de Gauss (Dym e Shames [36]) às duas ultimas parcelas à direita da equação (2.39), resulta (Filippin [38]):

$$\int_{\Omega_P} [\mathbf{A}^* \mathbf{v}(P, Q)]^t \mathbf{u}(P) d\Omega_P = B(\mathbf{u}(P, Q), \mathbf{v}(P, Q))_{\mathcal{L}} - \int_{\partial\Omega} [\mathbf{N}\mathbf{v}(p, Q)]^t \mathbf{u}(p) d\partial\Omega_p \quad (2.41)$$

$$\int_{\Omega} -\mathbf{v}(P, Q)^t \mathbf{A} \mathbf{u}(P) d\Omega_P = B(\mathbf{u}(P, Q), \mathbf{v}(P, Q))_{\mathcal{H}} - \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}(p, Q)^t \mathbf{N}\mathbf{u}(p) d\partial\Omega_p \quad (2.42)$$

onde  $\mathbf{N}^*$  é o operador de Neumann associado ao operador adjunto, que está definido e é igual a  $\mathbf{N}$ , já que  $\mathbf{A}$  é auto-adjunto.  $\partial\Omega_p$  representa um arco correspondente a  $p$  no contorno e  $B(\cdot, \cdot)$  é a forma bilinear associada ao operador  $\mathbf{A}$ , satisfaz (Barbieri [3]):

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathcal{L}} &= \langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L} \\ B(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathcal{H}} &= \langle \mathbf{A}^* \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle & \forall \mathbf{u} \in \mathcal{H} \end{aligned} \quad (2.43)$$

sendo  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{H}$  os espaços de Hilbert que contém  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$ , respectivamente.

Com a definição do operador adjunto (Luemberger [61])

$$\langle \mathbf{A}^* \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{A} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \quad (2.44)$$

conclui-se que as formas bilineares em (2.43) são equivalentes. Voltando com (2.41) e (2.42) à equação (2.39) as formas bilineares, sendo iguais, anulam-se entre si e a nova equação é expressa por

$$\mathbf{u}(Q) = \int_{\Omega} \mathbf{v}(P, Q)^t \mathbf{b}(P) d\Omega_p - \int_{\partial\Omega} [\mathbf{N} \mathbf{v}(p, Q)]^t \mathbf{u}(p) d\partial\Omega_p + \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}(p, Q)^t \mathbf{N} \mathbf{u}(p) d\partial\Omega_p \quad (2.45)$$

O tensor  $\mathbf{v}(P, Q)$ , como solução de (2.34), apresenta singularidade fraca e, dessa forma, admitindo que a expressão matemática de  $\mathbf{v}(P, Q)$  fosse conhecida, a integração numérica para a equação (2.45) seria árdua. Essa singularidade é agravada pela presença do operador de Neumann nos integrandos. Então, para regularizar os integrandos, adota-se como solução fundamental uma função de Green com apropriadas condições de contorno pré-estabelecidas. Para permitir uma aproximação dessa função de Green ao problema é adotado um operador auxiliar simétrico  $\mathbf{N}'$ , de tal forma que

$$\mathbf{v}(p, Q)^t \mathbf{N} \mathbf{u}(p) = [\mathbf{N}' \mathbf{v}(p, Q)]^t \mathbf{u}(p) \quad (2.46)$$

Somando e subtraindo a quantidade acima na equação (2.45) tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(Q) = & \int_{\Omega} \mathbf{v}(P, Q)^t \mathbf{b}(P) d\Omega_p - \int_{\partial\Omega} [(\mathbf{N}^* + \mathbf{N}') \mathbf{v}(p, Q)]^t \mathbf{u}(p) d\partial\Omega_p \\ & + \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}(p, Q)^t [(\mathbf{N} + \mathbf{N}') \mathbf{u}(p)] d\partial\Omega_p \end{aligned} \quad (2.47)$$

Para transformar  $\mathbf{v}(P, Q)$  na função de Green a seguinte condição de contorno deve ser satisfeita:

$$(\mathbf{N}^* + \mathbf{N}') \mathbf{v}(p, Q) = 0 \quad (2.48)$$

que levada à equação (2.47) e trocando  $\mathbf{v}(P, Q)$  por  $\mathbf{G}(P, Q)$ , para representar a função de Green,

vem

$$\mathbf{u}(Q) = \int_{\Omega} \mathbf{G}(P, Q)^t \mathbf{b}(P) d\Omega_p + \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(p, Q)^t [(\mathbf{N} + \mathbf{N}')\mathbf{u}(p)] d\partial\Omega_p \quad (2.49)$$

É interessante notar que  $\mathbf{N}'\mathbf{u} = 0$  o operador auxiliar  $\mathbf{N}'$  não influencia no resultado final da análise. Assim, uma escolha apropriada para este operador é um tensor diagonal, tal que

$$\mathbf{N}' = \alpha k_i \quad \text{e} \quad \alpha = \begin{cases} 1 & \text{para } p \in \partial^k \\ 0 & \text{para } p \in \frac{\partial\Omega}{\partial\Omega^k} \end{cases} \quad (2.50)$$

onde  $k_i$  é uma constante real não nula, sendo que  $k_i$  pode ou não ser diferente de  $k_j$  para  $i \neq j$ , e  $\partial\Omega^k$  é a parcela do contorno onde  $\mathbf{u}(p) = 0$ , isto é, onde as condições de contorno são do tipo Dirichlet homogêneas. Mais detalhes sobre este operador são fornecidos no capítulo três, deste trabalho.

Outro fato de importância é que a integral de contorno da equação (2.49) possui derivadas de  $\mathbf{u}(p)$  no sentido do traço, tornando esta inadequada para a análise numérica. Para eliminar este inconveniente, pode-se definir uma nova variável  $\mathbf{F}(p)$  como

$$\mathbf{F}(p) = (\mathbf{N} + \mathbf{N}')\mathbf{u}(p) \quad (2.51)$$

A substituição de (2.51) em (2.49) resulta na expressão para os deslocamentos generalizados no domínio, a seguir.

$$\mathbf{u}(Q) = \int_{\Omega} \mathbf{G}(P, Q)^t \mathbf{b}(P) d\Omega_p + \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(p, Q)^t \mathbf{F}(p) d\partial\Omega_p \quad (2.52)$$

Esta equação fornece a solução no domínio para o problema (2.11) e apresenta integrais de comportamento muito melhor que as da expressão (2.47), pois não possuem derivadas de  $\mathbf{G}(\cdot, \cdot)$  ou de  $\mathbf{F}(\cdot)$ . Também é interessante notar que (2.52) é idêntica à decorrente do Método Direto de Elementos de Contorno (MDEC), porém no MDEC é usual desenvolver as integrações em relação aos “pontos campo”, e não em relação aos “pontos fonte” como neste trabalho (Machado [63]).

Para obter o sistema que fornece a solução para o contorno seria necessário resolver, como realizado no domínio, um estado auxiliar, agora obtido pela aplicação da função delta de Dirac no

contorno, ou seja, uma excitação do tipo delta de Dirac no contorno,

$$\mathbf{A}^* \mathbf{G}(P, q) = 0, \quad (\mathbf{N}^* + \mathbf{N}') \mathbf{G}(p, q) = \delta(p, q) \quad \forall P \in \Omega \quad \text{e} \quad p, q \in \partial\Omega \quad (2.53)$$

Contudo, foi admitido que os espaços de Hilbert utilizados possuem a propriedade do traço, isto é, pode-se aplicar o operador traço, definido como

$$\mathbf{u}(q) = \gamma \mathbf{u}(Q) = \lim_{Q \rightarrow q} \mathbf{u}(Q) \quad (2.54)$$

na expressão (2.52), encontrando

$$\mathbf{u}(q) = \int_{\Omega} \mathbf{G}(P, q)^t \mathbf{b}(P) d\Omega_p + \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(p, q)^t \mathbf{F}(p) d\partial\Omega_p \quad (2.55)$$

As condições de contorno são incluídas através do operador  $\gamma$  e da variável  $\mathbf{F}(\cdot)$ . Sendo que as condições do tipo Neumann são representadas por  $\mathbf{F}(\cdot)$  e as do tipo Dirichlet são absorvidas diretamente pelo traço de  $\mathbf{u}(Q)$ , e estão incluídas em  $\mathbf{u}(q)$ .

O problema está completamente definido pelos sistemas de equações integrais (2.52) e (2.55), sem que tenham sido feitas aproximações de nenhum tipo.

### 2.3.2 Aproximação da Função de Green

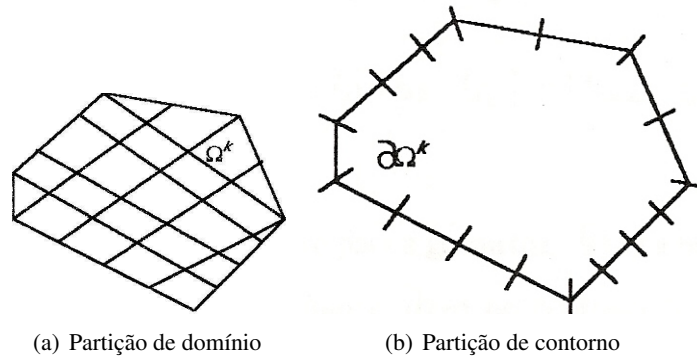
A partir de agora estes sistemas serão aproximados com funções de interpolação sobre o domínio e o contorno discretizados. A discretização do domínio pode ser feita em células, subdomínios, e estas em NEL elementos (Silva [81]). Estes elementos são os elementos utilizados no Método dos Elementos Finitos. O contorno de cada célula é dividido em NELC elementos, agora elementos de contorno, com a única restrição de que as funções de interpolação destes sejam o traço das funções de interpolação dos elementos finitos no contorno. Então para uma quantidade suficientemente regular e interior à célula,

$$y = \Psi \mathbf{y} \quad \text{com} \quad \Psi = \{\Psi_1 \quad \Psi_2 \quad \dots \quad \Psi_{ntn}\} \quad (2.56)$$

e, se  $y$  estiver no contorno,

$$y = \Phi \mathbf{y} \quad \text{com} \quad \Phi = \{\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \dots \quad \Phi_{ntnc}\} \quad (2.57)$$

onde  $\mathbf{y}$  é o vetor que contém os valores nodais de  $y$ , no domínio ou no contorno,  $\Psi$  e  $\Phi$  são os vetores das funções de interpolação do domínio ( $\Psi_i$ ) e do contorno ( $\Phi_i$ ), respectivamente, e  $ntn$  e  $ntnc$  são os números de nós nas discretizações do domínio e do contorno.



**Figura 2.3:** Discretização de uma célula  $k$ .

A única diferença entre as discretizações, do domínio e do contorno, é a possibilidade de se usar "nó duplo" na discretização do contorno, capacidade herdada do MEC.

A seqüência da formulação, considerando um número qualquer de células, é encontrada na tese de Silva [81]. O uso de apenas uma célula para modelar o domínio foi introduzido por Barberi [3], em ambos os trabalhos as discretizações foram feitas com elementos de Filippin [38] também apresentam formulações com elementos isoparamétricos, para apenas uma célula. Aqui são utilizados elementos não-isoparamétricos, ou seja, as funções de interpolação para as trações, deslocamentos ou geometria podem ser quaisquer, distintas entre si, prática muito usada no MEC. A seguir são definidas as interpolações necessárias, para a elasticidade linear plana,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(P) &= \Psi(P)\{x_i\} & \forall P \in \Omega \\ \mathbf{u}(P) &= \tilde{\Psi}(P)\{u_i\} & \forall P \in \Omega \\ \mathbf{u}(p) &= \tilde{\Phi}(p)\{u_i\} & \forall p \in \partial\Omega \\ \mathbf{t}(p) &= \Xi(P)\{t_i\} & \forall p \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.58a)$$



que matricialmente ficam,

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Psi_1 & 0 & \Psi_2 & 0 & \cdots & \Psi_{ntn} & 0 \\ 0 & \Psi_1 & 0 & \Psi_2 & \cdots & 0 & \Psi_{ntn} \end{bmatrix} = \{x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ \cdots \ x_{ntn} \ y_{ntn}\}^t \\
 \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_1 & 0 & \tilde{\Psi}_2 & 0 & \cdots & \tilde{\Psi}_{ntn} & 0 \\ 0 & \tilde{\Psi}_1 & 0 & \tilde{\Psi}_2 & \cdots & 0 & \tilde{\Psi}_{ntn} \end{bmatrix} = \{u_{x1} \ u_{y1} \ u_{x2} \ u_{y2} \ \cdots \ u_{x \ ntn} \ u_{y \ ntn}\}^t \\
 \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_1 & 0 & \tilde{\phi}_2 & 0 & \cdots & \tilde{\phi}_{ntnc} & 0 \\ 0 & \tilde{\phi}_1 & 0 & \tilde{\phi}_2 & \cdots & 0 & \tilde{\phi}_{ntnc} \end{bmatrix} = \{u_{x1} \ u_{y1} \ u_{x2} \ u_{y2} \ \cdots \ u_{x \ ntnc} \ u_{y \ ntnc}\}^t \\
 \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \cdots & \varphi_{ntnc} & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & \cdots & 0 & \varphi_{ntnc} \end{bmatrix} = \{u_{x1} \ u_{y1} \ u_{x2} \ u_{y2} \ \cdots \ u_{x \ ntnc} \ u_{y \ ntnc}\}^t
 \end{aligned} \tag{2.58b}$$

onde  $\Psi(P)$  é a matriz das funções de interpolação para a geometria,  $\tilde{\Psi}(P)$  a matriz com funções de interpolação para os deslocamentos no domínio e  $\tilde{\Phi}(p)$  no contorno, e  $\Xi(p)$  contém as funções de interpolação para as trações que são necessárias somente no contorno. O vetor  $\mathbf{x}(P)$  possui as coordenadas geométricas do ponto,  $\mathbf{u}(\cdot)$  e  $\mathbf{t}(\cdot)$  as componentes do deslocamento e da tração para pontos do domínio ou do contorno. Os valores nodais das coordenadas geométricas, deslocamentos e trações são representados, respectivamente, pelos vetores  $\{x_i\}$ ,  $\{u_i\}$  e  $\{t_i\}$ .

Utilizando estas funções de interpolação para a aproximação das equações integrais, discretiza-se os valores

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}(Q) &= \tilde{\Psi}(Q)\mathbf{u}^D \quad \forall Q \in \Omega \\
 \mathbf{u}(q) &= \tilde{\Phi}(q)\mathbf{u}^C \quad \forall q \in \Omega \\
 \mathbf{b}(P) &= \Psi(P)\mathbf{b} \quad \forall P \in \Omega \\
 \mathbf{F}(p) &= \Xi(p)\mathbf{f} \quad \forall p \in \Omega
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

onde  $\mathbf{u}^D$  e  $\mathbf{u}^C$  representam os valores nodais do "deslocamento generalizado"  $\mathbf{u}(\cdot)$ , no domínio e no contorno, respectivamente.  $\mathbf{b}$  representa os valores nodais da "força de corpo generalizada" e  $\mathbf{f}$  os valores nodais das "reações generalizadas".

Dessa forma, a equação (2.52) pode ser re-escrita como

$$\tilde{\Psi}(Q)\mathbf{u}^D = \int_{\Omega} \mathbf{G}(P, Q)^t \Psi(P) \mathbf{b} d\Omega_p + \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(p, Q)^t \Xi(p) \mathbf{f} d\partial\Omega_p + \mathbf{R}_D \quad (2.60)$$

que representa a solução aproximada no domínio, para um número de elementos não infinito. O erro da aproximação está representado pelo resíduo  $\mathbf{R}_D$  que é anulado na média com o Método de Galerkin (Cook [28]), isto é, o resíduo é projetado ortogonalmente sobre o espaço gerado pelas funções peso  $W_i$ ,

$$\int_{\Omega} W_i R_D d\Omega = 0 \quad (2.61)$$

Com as funções peso, são escolhidas as próprias funções de interpolação do domínio para os deslocamentos,  $\tilde{\Psi}(Q)$ . A solução para o domínio, com a aplicação do Método de Galerkin, fica

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{\Psi}(Q)^t \tilde{\Psi}(Q) d\Omega_Q \mathbf{u}^D &= \int_{\Omega} \tilde{\Psi}(Q)^t \int_{\Omega} \mathbf{G}(P, Q)^t \Psi(P) d\Omega_P d\Omega_Q \mathbf{b} \\ &+ \int_{\Omega} \tilde{\Psi}(Q)^t \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(p, Q)^t \Xi(p) d\partial\Omega_p d\partial\Omega_Q \mathbf{f} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Da mesma forma, fazendo a projeção da solução da solução no contorno,  $\mathbf{u}(q)$ , sobre o espaço gerado pelas funções de interpolação do contorno para os deslocamentos,  $\tilde{\Phi}(q)$ . A equação (2.55) é re-escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \tilde{\Phi}(q)^t \tilde{\Phi}(q) d\partial\Omega_q \mathbf{u}^C &= \int_{\partial\Omega} \tilde{\Phi}(q)^t \int_{\Omega} \mathbf{G}(P, q)^t \Psi(P) d\Omega_P d\partial\Omega_q \mathbf{b} \\ &= + \int_{\partial\Omega} \tilde{\Phi}(q)^t \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(p, q)^t \Xi(p) d\partial\Omega_p d\partial\Omega_q \mathbf{f} \end{aligned} \quad (2.63)$$

As equações (2.62) e (2.63) podem ser re-escritas em uma forma mais compacta:

$$\mathbf{A}\mathbf{u}^D = \mathbf{B}\mathbf{f} + \mathbf{C}\mathbf{b} \quad (2.64)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{u}^C = \mathbf{E}\mathbf{f} + \mathbf{F}\mathbf{b} \quad (2.65)$$

onde

$$\mathbf{A} = \int_{\Omega} \tilde{\Psi}(Q)^t \tilde{\Psi}(Q) d\Omega_Q \quad (2.66)$$

$$\mathbf{B} = \int_{\Omega} \int_{\partial\Omega} \tilde{\Psi}(Q)^t \mathbf{G}(p, Q)^t \Xi(p) d\partial\Omega_p d\partial\Omega_Q \quad (2.67)$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \tilde{\Psi}(Q)^t \mathbf{G}(P, Q)^t \Psi(P) d\Omega_P d\Omega_Q \quad (2.68)$$

$$\mathbf{D} = \int_{\partial\Omega} \tilde{\Phi}(q)^t \tilde{\Phi}(q) d\partial\Omega_q \quad (2.69)$$

$$\mathbf{E} = \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \tilde{\Phi}(q)^t \mathbf{G}(p, q)^t \Xi(p) d\partial\Omega_p d\partial\Omega_q \quad (2.70)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\partial\Omega} \int_{\Omega} \tilde{\Phi}(q)^t \mathbf{G}(P, q)^t \Psi(P) d\Omega_P d\partial\Omega_q \quad (2.71)$$

As matrizes gramianas  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{D}$  são facilmente obtidas pois envolvem apenas funções de interpolação, são comparáveis às matrizes massa de densidade unitária. Já as matrizes  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{F}$  fazem necessário o conhecimento da função, ou tensor, de Green por envolverem produtos destas com funções de interpolação, como ocorre no MFGL. Se a função for conhecida o procedimento computacional continua sem problemas. Caso ela não seja de conhecimento prévio a função de Green deveria ser primeiramente aproximada para então prosseguir os cálculos, entretanto o MFGLM promove um meio não convencional para a solução deste problema, onde as aproximações são obtidas diretamente, de forma explícita.

### 2.3.3 Projeções da Função de Green

Definindo  $\mathbf{G}_d$  como a projeção da função de Green sobre o espaço gerado pelas funções de interpolação de domínio, dependentes do “ponto fonte” ( $P \in \Omega$ ), no caso as funções que interpolam as forças de corpo, isto é, as funções  $\Psi(P)$  do mapeamento geométrico. A projeção  $\mathbf{G}_c$  é sobre o contorno, ou melhor, sobre o espaço gerado pelas funções de interpolação de contorno, dependentes também do “ponto fonte” ( $p \in \partial\Omega$ ), sendo as funções  $\Xi(p)$  que aproximam as trações. Essas projeções são definidas como

$$\mathbf{G}_d(Q) = \int_{\Omega} \mathbf{G}(P, Q)^t \Psi(P) d\Omega_P \quad (2.72)$$

$$\mathbf{G}_d(q) = \int_{\Omega} \mathbf{G}(P, q)^t \boldsymbol{\Psi}(P) d\Omega_p \quad (2.73)$$

$$\mathbf{G}_c(Q) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(p, Q)^t \boldsymbol{\Xi}(p) d\partial\Omega_p \quad (2.74)$$

$$\mathbf{G}_c(q) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(p, q)^t \boldsymbol{\Xi}(p) d\partial\Omega_p \quad (2.75)$$

Essas matrizes que dependem do conhecimento da função de Green podem, então, ser escritas em função de suas projeções,

$$\mathbf{B} = \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\Psi}}(Q)^t \mathbf{G}_c(Q) d\Omega_Q \quad (2.76)$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\Psi}}(Q)^t \mathbf{G}_d(Q) d\Omega_Q \quad (2.77)$$

$$\mathbf{E} = \int_{\partial\Omega} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(q)^t \mathbf{G}_c(q) d\partial\Omega_q \quad (2.78)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\partial\Omega} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(q)^t \mathbf{G}_d(q) d\partial\Omega_q \quad (2.79)$$

A determinação das projeções da função de Green é a etapa mais importante na criação do MFGLM, realizada, conforme Barcellos e Silva [13], pela utilização do Método dos Elementos Finitos na resolução de dois problemas associados, equações (2.34), (2.48) e (2.53), que, levando em consideração a simetria da função de Green, são re-escritas abaixo.

- Problema 1:

$$\mathbf{A}^* \mathbf{G}(P, Q)^t = \delta(P, Q) \mathbf{I} \quad (2.80a)$$

$$(\mathbf{N}^* + \mathbf{N}') \mathbf{G}(P, q)^t = 0, \quad \forall P, Q \in \Omega \quad \text{e} \quad q \in \partial\Omega \quad (2.80b)$$

- Problema 2:

$$\mathbf{A}^* \mathbf{G}(p, Q)^t = 0 \quad (2.81a)$$

$$(\mathbf{N}^* + \mathbf{N}') \mathbf{G}(p, q)^t = \delta(p, q), \quad \forall Q \in \Omega \quad \text{e} \quad p, q \in \partial\Omega \quad (2.81b)$$

Projetando a função de Green sobre o espaço gerado pelas funções de interpolação de do-

mínio, ou seja, pós-multiplicando (2.80) por  $\Psi(P)$  e integrando em relação a  $\Omega_p$ , encontra-se:

$$\mathbf{A}^* \int_{\Omega} \mathbf{G}(P, Q)^t \Psi(P) d\Omega_p = \int_{\Omega} \delta(P, Q) \Psi(P) d\Omega_p \quad (2.82a)$$

$$(\mathbf{N}^* + \mathbf{N}') \int_{\Omega} \mathbf{G}(P, q)^t \Psi(P) d\Omega_p = 0 \quad (2.82b)$$

Levando em consideração as propriedades da função delta de Dirac e as equações (2.72) e (2.74), temos

$$\mathbf{A}^* \mathbf{G}_d(Q) = \Psi(Q) \quad (2.83a)$$

$$(\mathbf{N}^* + \mathbf{N}') \mathbf{G}_d(q) = 0 \quad (2.83b)$$

Da mesma forma para o problema 2, projetando a função de Green no espaço gerado pelas funções de interpolação de contorno de tração, ou, pós-multiplicando a equação (2.81) por  $\Xi(p)$  e integrando em  $\partial\Omega_p$ , vem

$$\mathbf{A}^* \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(p, Q)^t \Xi(p) d\partial\Omega_p = 0 \quad (2.84a)$$

$$(\mathbf{N}^* + \mathbf{N}') \int_{\partial\Omega} \mathbf{G}(p, q)^t \Xi(p) d\partial\Omega_p = \int_{\partial\Omega} \delta(p, q) \Xi(p) d\partial\Omega_p \quad (2.84b)$$

então

$$\mathbf{A}^* \mathbf{G}_c(Q) = 0 \quad (2.85a)$$

$$(\mathbf{N}^* + \mathbf{N}') \mathbf{G}_c(q) = \Xi(q) \quad (2.85b)$$

Assim, dois novos problemas são obtidos, representados por (2.83) e (2.85), que envolvem as projeções de Green,  $\mathbf{G}_d$  e  $\mathbf{G}_c$ , em sistemas excitados pelas funções de interpolação. A troca da excitação delta de Dirac pelas funções de interpolação faz com que  $\mathbf{G}_d$  e  $\mathbf{G}_c$  sejam bem mais suaves que a própria função de Green, simplificando o tratamento numérico.

Para o cálculo de  $\mathbf{G}_d$ , com os problemas modificados, o seguinte funcional pode ser escrito

segundo Barbieri [3] e Machado [63] como:

$$J(\mathbf{G}_d) = \frac{1}{2}B(\mathbf{G}_d, \mathbf{G}_d) - B_1(\mathbf{G}_d, \Psi) + B_2(\mathbf{G}_d, \mathbf{G}_d) \quad (2.86)$$

onde as forma bilineares são, para a elasticidade,

$$B(\mathbf{G}_d, \mathbf{G}_d) = \int_{\Omega} [\mathbf{C} \partial \mathbf{G}_d(Q)]^t \partial \mathbf{G}_d(Q) d\Omega_Q \quad (2.87)$$

$$B_1(\mathbf{G}_d, \Psi) = \int_{\Omega} \mathbf{G}_d(Q)^t \Psi(Q) d\Omega_Q \quad (2.88)$$

$$B_2(\mathbf{G}_d, \mathbf{G}_d) = \int_{\partial\Omega} [\mathbf{N}' \mathbf{G}_d(q)]^t \mathbf{G}_d(q) d\partial\Omega_q \quad (2.89)$$

sendo  $\mathbf{C}$  a matriz dos coeficientes elásticos (2.25) ou (2.30),  $\partial$  é o operador derivada (2.24).

Como  $\mathbf{G}_d$  é uma função suave e contínua, esta também pode ser expandida pelas funções de interpolação

$$\mathbf{G}_d(Q) = \tilde{\Psi}(Q) \mathbf{g}^{DQ} \quad \text{e} \quad \mathbf{G}_d(q) = \tilde{\Phi}(q) \mathbf{g}^{Dq} \quad (2.90)$$

onde  $\mathbf{g}^{DQ}$  e  $\mathbf{g}^{Dq}$  são os valores nodais das projeções  $\mathbf{G}_d(Q)$  e  $\mathbf{G}_d(q)$ , respectivamente.

Matricialmente são,

$$\mathbf{g}^{DQ} = \begin{bmatrix} g_{11}^{DQ} & g_{12}^{DQ} & \cdots & g_{ntn}^{DQ} \\ g_{21}^{DQ} & g_{22}^{DQ} & \cdots & g_{ntn}^{DQ} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{g}^{Dq} = \begin{bmatrix} g_{11}^{Dq} & g_{12}^{Dq} & \cdots & g_{ntnc}^{Dq} \\ g_{21}^{Dq} & g_{22}^{Dq} & \cdots & g_{ntnc}^{Dq} \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

onde  $ntn$  é o número total de nós na malha do domínio e  $ntnc$  da malha de contorno.

Substituindo esses valores em (2.86), vem

$$J(\mathbf{G}_d) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{g}^{DQ})^t (\partial \tilde{\Psi}(Q))^t \mathbf{C} \partial \tilde{\Psi}(Q) \mathbf{g}^{DQ} d\Omega_Q \quad (2.92)$$

$$- \int_{\Omega} (\mathbf{g}^{DQ})^t (\tilde{\Psi}(Q))^t \tilde{\Psi}(Q) d\Omega_Q + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{g}^{Dq})^t (\tilde{\Phi}(q))^t \mathbf{N}' \tilde{\Phi}(q) \mathbf{g}^{Dq} d\partial\Omega_q$$

Definindo  $\mathbf{B}$  como matriz proveniente da multiplicação  $[\partial\tilde{\Psi}(Q)]$ , fica

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{1,x} & 0 & \tilde{\Psi}_{2,x} & 0 & \cdots & \tilde{\Psi}_{ntn,x} & 0 \\ 0 & \tilde{\Psi}_{1,y} & 0 & \tilde{\Psi}_{2,y} & \cdots & 0 & \tilde{\Psi}_{ntn,y} \\ \tilde{\Psi}_{1,y} & \tilde{\Psi}_{1,x} & \tilde{\Psi}_{2,y} & \tilde{\Psi}_{2,x} & \cdots & \tilde{\Psi}_{ntn,y} & \tilde{\Psi}_{ntn,x} \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

e, minimizando o funcional, tem-se

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^t \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega_Q \mathbf{g}^{DQ} - \int_{\Omega} \tilde{\Psi}(Q)^t \tilde{\Psi}(Q) d\Omega_Q + \int_{\partial\Omega} \tilde{\Phi}(q)^t \mathbf{N}' \tilde{\Phi}(q) d\partial\Omega_q \mathbf{g}^{Dq} = 0 \quad (2.94)$$

ou

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}^0] \mathbf{g}^{DQ} = \mathbf{M} \quad (2.95a)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^t \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega_Q \\ \mathbf{K}^0 &= \int_{\partial\Omega} \tilde{\Phi}(q)^t \mathbf{N}' \tilde{\Phi}(q) d\partial\Omega_q \\ \mathbf{M} &= \int_{\Omega} \tilde{\Psi}(Q)^t \tilde{\Psi}(Q) d\Omega_Q \end{aligned} \quad (2.95)$$

sendo  $\mathbf{K}$  a matriz de rigidez convencional de elementos finitos,  $\mathbf{M}$  é a matriz matriz massa unitária do domínio e  $\mathbf{K}^0$  é a matriz de rigidez adicional devido ao operador  $\mathbf{N}^t \cdot \mathbf{K}^0$  possui termos não nulos somente em graus de liberdade que contenham condições de contorno do tipo Dirichlet homogêneas (mais detalhes sobre a matriz  $\mathbf{K}^0$  são fornecidos no capítulo seguinte).

Com (2.95) a projeção da função de Green no domínio está definida, aplicando o mesmo procedimento para o problema do contorno, cálculo de  $\mathbf{G}_c$ , encontra-se o funcional

$$\begin{aligned} J(\mathbf{G}_c) &= \frac{1}{2} B(\mathbf{G}_c, \mathbf{G}_c) - B_1(\mathbf{G}_c, \Xi) + B_2(\mathbf{G}_c, \mathbf{G}_c) \\ B(\mathbf{G}_c, \mathbf{G}_c) &= \int_{\Omega} [\mathbf{C} \partial \mathbf{G}_c(Q)]^t \partial \mathbf{G}_c(Q) d\Omega_Q \\ B_1(\mathbf{G}_c, \Xi) &= \int_{\Omega} \mathbf{G}_c(q)^t \Xi(q) d\Omega_q \\ B_2(\mathbf{G}_c, \mathbf{G}_c) &= \int_{\partial\Omega} [\mathbf{N}' \mathbf{G}_c(q)]^t \mathbf{G}_c(q) d\partial\Omega_q \end{aligned} \quad (2.96)$$

e, como  $\mathbf{G}_d$ , a projeção  $\mathbf{G}_c$  também pode ser interpolada,

$$\mathbf{G}_c(Q) = \tilde{\Psi}(Q)\mathbf{g}^{CQ} \quad \text{e} \quad \mathbf{G}_c(q) = \tilde{\Phi}(q)\mathbf{g}^{Cq} \quad (2.97)$$

onde  $\mathbf{g}^{CQ}$  e  $\mathbf{g}^{Cq}$  são os valores nodais das projeções da função de Green no contorno. Substituindo no funcional e minimizando este, chega-se à

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}^0] \mathbf{g}^{CQ} = \mathbf{m} \quad (2.98)$$

com  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{K}^0$  idênticas às obtidas para o problema do domínio e  $\mathbf{m}$  sendo a matriz massa unitária do contorno.

Então, os problemas 1 e 2 são resolvidos simultaneamente e as equações (2.95) e (2.98) se resumem a

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}^0] \begin{bmatrix} \mathbf{g}^{DQ} & \mathbf{g}^{CQ} \end{bmatrix} = [\mathbf{M} \quad \mathbf{m}] \quad (2.99)$$

Obtidos  $\mathbf{g}^{DQ}$  e  $\mathbf{g}^{CQ}$  é fácil chegar a  $\mathbf{g}^{Dq}$  e  $\mathbf{g}^{Cq}$ , basta aplicar o "operador traço", que aqui significa selecionar os graus de liberdade das matrizes  $\mathbf{g}^{DQ}$  e  $\mathbf{g}^{CQ}$  que pertencem ao contorno.

### 2.3.4 Equações Finais

As matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{D}$  são facilmente obtidas de (2.66) e (2.69), e as matrizes que dependem das projeções da função de Green podem ser obtidas de

$$\mathbf{B} = \int_{\Omega} \tilde{\Psi}(Q)^t \tilde{\Psi}(Q) d\Omega_Q \mathbf{g}^{CQ} \quad (2.100)$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \tilde{\Psi}(Q)^t \tilde{\Psi}(Q) d\Omega_Q \mathbf{g}^{DQ} \quad (2.101)$$

$$\mathbf{E} = \int_{\partial\Omega} \tilde{\Phi}(q)^t \tilde{\Phi}(q) d\partial\Omega_q \mathbf{g}^{Cq} \quad (2.102)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\partial\Omega} \tilde{\Phi}(q)^t \tilde{\Phi}(q) d\partial\Omega_q \mathbf{g}^{Dq} \quad (2.103)$$

Todas as matrizes necessárias estão definidas e os sistemas de equações finais (2.64) e (2.65) podem ser resolvidos. Para a solução do contorno, os termos conhecidos (índice *con*) podem ser



separados dos desconhecidos (índices *des*), resultando no sistema

$$[\mathbf{D} \quad -\mathbf{E}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{des}^C \\ \mathbf{f}_{des} \end{Bmatrix} = [\mathbf{E} \quad -\mathbf{D}] \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{con} \\ \mathbf{u}_{con}^C \end{Bmatrix} + \mathbf{F}\mathbf{b} \quad (2.104)$$

Para uma formulação considerando os elementos finitos e de contorno isoparamétricos, algumas simplificações no cálculo das matrizes podem ser feitas: a matriz  $\mathbf{B}$  se torna o transposto da matriz  $\mathbf{F}$ , facilmente observado em

$$\mathbf{B} = \int_{\Omega} \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\Psi}(Q)^t \mathbf{G}(p, Q)^t \boldsymbol{\Phi}(p) d\partial\Omega_p d\Omega_Q \quad (2.105)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\partial\Omega} \int_{\Omega} \boldsymbol{\Phi}(q)^t \mathbf{G}(P, q)^t \boldsymbol{\Psi}(P) d\Omega_P d\partial\Omega_q \quad (2.106)$$

Independentemente se o elemento é isoparamétrico, algumas relações podem ser extraídas de (2.100-103), destacando as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{D}$ ,

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{g}^{CQ}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{g}^{DQ}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{D}\mathbf{g}^{Cq} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \mathbf{D}\mathbf{g}^{Dq} \quad (2.107)$$

Assim, a solução para o domínio com elementos isoparamétricos toma a forma:

$$\mathbf{A}\mathbf{u}^D = \mathbf{A}\mathbf{g}^{CQ}\mathbf{f} + \mathbf{A}\mathbf{g}^{DQ}\mathbf{b} \quad (2.108)$$

portanto,

$$\mathbf{u}^D = \mathbf{g}^{CQ}\mathbf{f} + \mathbf{g}^{DQ}\mathbf{b} \quad (2.109)$$

Para obter a solução no domínio basta, então, resolver o sistema (2.109) sem a necessidade da inversão da matriz  $\mathbf{A}$ , fornecendo a solução  $\mathbf{u}^D$  diretamente. Ainda, essa solução para o domínio só é calculada se desejada. Entretanto, o inverso não é possível, ou seja, a solução no contorno deve ser calculada sempre, e como primeira etapa, pois são necessários os valores do vetor  $\mathbf{f}_{des}$ .

A forma de cálculo das matrizes finais pode ser alterado, como mostra o capítulo a seguir.

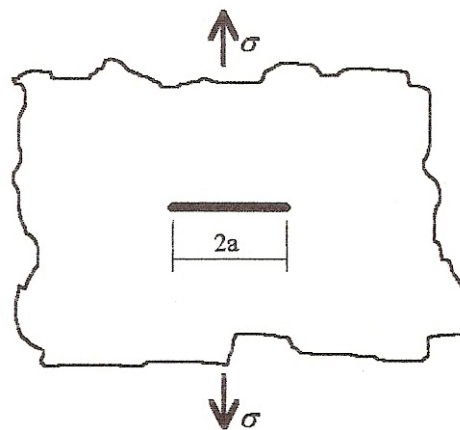
## 2.4 Mecânica da Fratura

Como o interesse deste trabalho é de analisar um novo método numérico, MLGFM, como meio de solução para problemas da mecânica da fratura, e não os vários meios de solução destes problemas, será apresentada apenas uma pequena revisão, evidenciando aqueles pontos de interesse à realização deste trabalho.

O primeiro passo dado, com o objetivo de se conseguir o valor da resistência de corpos trincados, foi o critério de Griffith [43, 44], que se baseou na idéia de que uma trinca se propaga quando a energia elástica, liberada pelo seu crescimento, é maior que a energia necessária para romper o material. Como modelo, usou uma placa infinita com uma trinca de comprimento  $2a$ , sob tração uniforme, conforme a Figura 2.4. Deste seu critério termodinâmico Griffith determinou, para o estado plano de tensões (EPT), a tensão crítica requerida para o crescimento da trinca como (Sih [80])

$$\sigma_c = \left( \frac{2E\gamma}{\pi a} \right)^{1/2} \quad (2.110)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade e  $\gamma$  é a densidade de energia de superfície,  $\gamma$  representa o consumo de energia pelo material para romper as ligações atômicas, por unidade de área rompida. Para a tensão crítica no estado plano de deformações (EPD) basta dividir  $\sigma_c$  por  $(1 - \nu^2)^{1/2}$ , sendo  $\nu$  o módulo de Poisson.



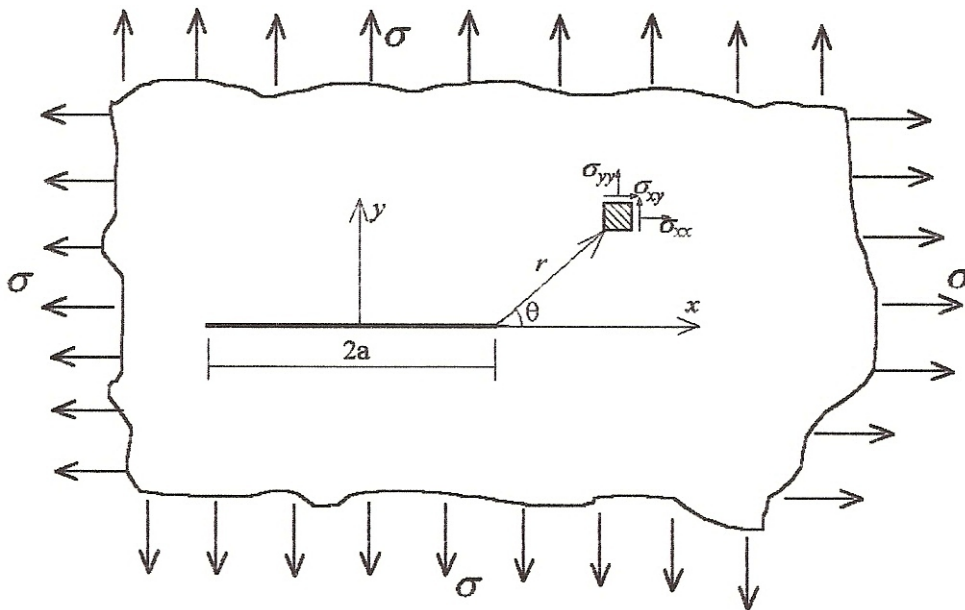
**Figura 2.4:** Placa infinita trincada sob tração - Geometria de Griffith

O critério de Griffith é uma condição necessária, mas não suficiente porque considera ape-

nas os estados inicial e final, ignorando os detalhes de como ocorreu a fratura no extremo da trinca (Knott [58]). Griffith não fazia idéia de como era o campo de tensões próximo ao extremo da trinca, obtido posteriormente por Westergaard [93]

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \dots \\ \sigma_{yy} &= \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \dots \text{ (termos não singulares)} \\ \sigma_{xy} &= \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \dots\end{aligned}\quad (2.111)$$

onde  $r$  e  $\theta$  são as coordenadas polares no extremo da trinca, para uma placa infinita sob tensão biaxial, Figura 2.5.



**Figura 2.5:** Modelo de Watergaard

Sneddom (1946) foi o primeiro a apresentar, para dois casos isolados, uma expansão do campo de tensões. Este trabalho só foi aproveitado por Irwin em 1957 e 1958 [54, 55] e Williams [94] que solução de Westergaard [93], Irwin [56] definiu o Fator de Intensidade de Tensão (FIT) como  $K = \sigma \sqrt{a}$ , mais usualmente como  $k = \sigma \sqrt{\pi a}$ , assim a tensão  $\sigma_{yy}$  para  $x = 0$  fica, por exemplo, dada

por:

$$\sigma_{yy} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} + \dots \text{(termos não singulares)} \quad (2.112)$$

A deformação da trinca pode ser separada em três modos distintos, que podem ocorrer simultaneamente ou isoladamente, dependendo das condições de contorno na trinca. Estes modos de abertura podem ser observados na Figura 2.6 e são classificados da seguinte forma:

- Modo I, ou de tração, possui simetria nos planos  $z$  e  $y$ ;
- Modo II, ou de cisalhamento, possui simetria no plano  $z$  e antissimetria no plano  $y$ ;
- Modo III, ou de torção, possui antissimetria nos planos  $z$  e  $y$ .

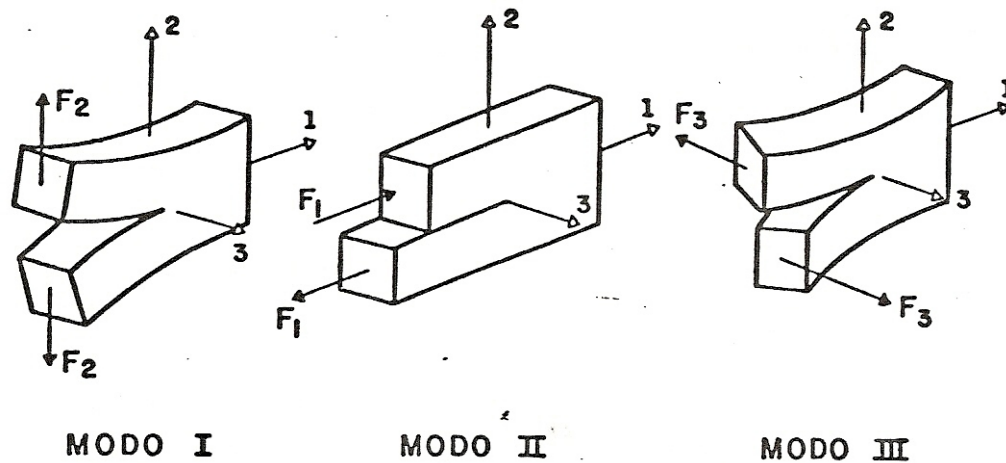


Figura 2.6: Modos de abertura da trinca

Então o FIT pode ser separado em relação aos modos ( $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$ ) e os campos de tensão e deslocamentos, desprezando os termos de maior ordem, podem ser reescritos como, segundo Paris

e Sih [73], para  $r \ll a$ ,

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\
 \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\
 \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \\
 \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\
 \sigma_{xz} &= \sigma_{yz} = 0
 \end{aligned} \tag{2.113}$$

e,

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - 2\nu + \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left( 2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\
 u_y &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left( 2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( -1 + 2\nu + \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right) \\
 u_z &= 0
 \end{aligned} \tag{2.114}$$

As equações (2.113-114) são definidas para o estado plano de deformações, para o estado plano de tensões ( $\sigma_{zz} = 0$ ), basta substituir  $\nu$  por  $\frac{\nu}{1+\nu}$ . O modo III não pertence à elasticidade plana e é apresentados separadamente,

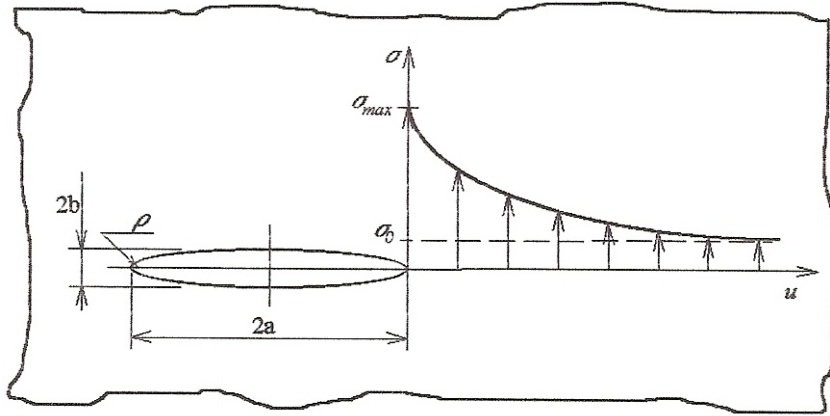
$$\begin{aligned}
 \sigma_{xz} &= \frac{K_{III}}{2\pi r} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}, & \sigma_{yz} &= \frac{K_{III}}{2\pi r} \cos \frac{\theta}{2} & \text{e} & \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0 \\
 u_z &= \frac{K_{III}}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} & \text{e} & \quad u_x = u_y = 0
 \end{aligned} \tag{2.115}$$

Uma definição mais formal para o FIT é:

$$K = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sigma_{max} \sqrt{2\pi\rho} \tag{2.116}$$

onde  $\rho$  é o menor raio de curvatura do entalhe no ponto de concentração.

É necessário lembrar aqui o fator de concentração de tensão  $K_t$  no caso de um furo elíptico em uma placa infinita sob tração uniaxial, Figura 2.7.



**Figura 2.7:** Trinca elíptica em uma placa infinita

$$K_t = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (2.117)$$

e, assim, tem-se para a tensão máxima

$$\sigma_{max} = \sigma K_t = \sigma \left( 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \quad (2.118)$$

que substituindo em (2.116) encontra-se o valor já conhecido  $K = \sigma\sqrt{\pi a}$ . O fator de intensidade de tensão pode, ainda, ser definido como

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{yy} \sqrt{2\pi r}, \quad K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{xy} \sqrt{2\pi r} \quad \text{e} \quad K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{yz} \sqrt{2\pi r} \quad (2.119)$$

Para permitir a utilização da teoria para outras configurações geométricas, define-se um fator de correção que, apesar de não depender somente da geometria, como mostra Parker [74], é normalmente chamado de fator geométrico,  $Y$ . Assim,

$$K_I = Y\sigma\sqrt{\pi a}, \quad K_{II} = Y_{II}\tau\sqrt{\pi a} \quad \text{e} \quad K_{III} = Y_{III}\tau\sqrt{\pi a} \quad (2.120)$$

onde  $\tau$  é a tensão cisalhante, adequada para cada modo.  $Y$  é adimensional enquanto  $K$  tem a unidade de tensão vezes a raiz da unidade de comprimento, por exemplo ( $\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}$ ).

O fator de intensidade de tensão fornece, dessa forma, uma forma de quantificar o nível de sollicitação que está ocorrendo no corpo, próximo ao extremo da trinca. O FIT também tem um valor limite, que quando atingido provoca o crescimento da trinca, podendo levar à ruptura da peça, este limite é a tenacidade à fratura ( $K_{IC}$ ) que na teoria de Griffith é definida por

$$K_{IC} = \sqrt{2E\gamma} \quad (2.121)$$

O valor de  $K_{IC}$  é obtido para cada material experimentalmente, de maneira muito criteriosa, no estado plano de deformações. O valor de  $K_{IC}$  é o menor valor para a tenacidade à fratura, pois para casos fora das especificações a tenacidade obtida é sempre maior que  $K_{IC}$ . Nas condições reais, fora das especificações, esse valor limite é chamado de  $K_C$  e, dessa forma, é possível garantir que não ocorrerá o crescimento da trinca, para um material perfeitamente elástico, se  $K_I < K_C$ . Por isto, o fator de intensidade de tensão estará, geralmente, relacionado à mecânica da fratura elástica linear (MFEL) e deve ser aplicado em casos de fratura frágil, isto é, quando a região de plastificação no extremo da trinca é muito pequena.

O cálculo de  $K$  numericamente pode ser feito de várias maneiras, que podem ser separadas em duas classes. A primeira técnica é calcular a variação de energia para dois tamanhos de trinca. A segunda é utilizar as equações de tensão e deslocamentos (2.114) para estimar um valor para  $K$ , esta é a mais simples e pode ser classificada basicamente em três métodos:

a) método da integral  $J$ , proposto por Rice (1968), onde o FIT é derivado de uma integral de linha, a integral  $J$ :

$$J = \int_{\Gamma} \left( U dy - \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} ds \right) \quad (2.122)$$

constante para qualquer caminho  $\Gamma$  escolhido.  $U$  é a densidade de energia de deformação,  $\mathbf{T}$  é o vetor tração definido ao longo do contorno e  $\mathbf{u}$  o vetor deslocamentos. É relacionado com  $K$  por

$$K_I = \begin{cases} (JE)^{1/2}, & \text{para o EPT} \\ \left( \frac{JE}{1-\nu^2} \right)^{1/2}, & \text{para o EPD} \end{cases} \quad (2.123)$$

b) método da tensão, calcula-se um valor para  $K$  em cada posição onde se tenha um resultado de tensão, obtido numericamente. Por exemplo, para  $\theta = 0$

$$K_I^i = \sigma_{yy}^i \sqrt{2\pi r^i} \quad \text{e} \quad K_{II}^i = \sigma_{xy}^i \sqrt{2\pi r^i} \quad (2.124)$$

onde  $i$  se refere ao nó em questão. A partir dos valores nodais  $K_I^i$  e  $K_{II}^i$  é possível uma extrapolação para  $r = 0$ .

c) método do deslocamento, semelhante ao anterior só que agora utilizando os deslocamentos nodais, para  $\theta = \pi$ :

$$K_I^i = \frac{u_y^i G}{1 - \nu} \sqrt{\frac{\pi}{2r^i}} \quad \text{e} \quad K_{II}^i = \frac{u_x^i G}{1 - \nu} \sqrt{\frac{\pi}{2r^i}} \quad (2.125)$$

e, para  $\theta = 0$

$$K_I^i = \frac{u_x^i G}{1 - 2\nu} \sqrt{\frac{2\pi}{r^i}} \quad \text{e} \quad K_{II}^i = \frac{u_y^i G}{1 - 2\nu} \sqrt{\frac{2\pi}{r^i}} \quad (2.126)$$

Os resultados obtidos com o método do deslocamento são mais precisos que com o método da tensão quando a formulação numérica está baseada em campos de deslocamentos, como é o caso do MFGLM utilizado neste trabalho. Este não é tão preciso quanto a integral  $J$ , mas sua aplicação é mais simples que esta. Assim, este é, aqui, o método adotado para cálculo do FIT.



## Capítulo 3

# Análise e Desenvolvimento no MFGLM

Algumas alterações no desenvolvimento numérico, a implementação de novos elementos e uma análise no modo de aplicação do operador auxiliar  $\mathbf{N}'$  são tópicos deste capítulo. Assim este capítulo não está necessariamente ligado à mecânica da fratura, apesar de todos os resultados numéricos apresentados serem soluções de problemas com corpos trincados.

### 3.1 Operador Auxiliar

A necessidade da escolha, por parte do usuário, de um valor para a constante  $k_i$  é uma herança do Método da Função de Green Local (MFGL), como pode ser observado nos trabalhos que originaram este método (Horak e Dorning [51] e Horak [50]) essa dependência paramétrica é um dos principais problemas. No MFGLM essa dependência continua existindo mas a sensibilidade na solução é bem menor que no seu método de origem, como é demonstrado posteriormente.

O parâmetro  $k_i$  aparece quando o operador auxiliar  $\mathbf{N}'$  é introduzido na formulação do método, que surge da necessidade de se atribuir ao problema adjunto as seguintes condições de contorno:

$$(\mathbf{N}^* + \mathbf{N}')\mathbf{G}(p, Q) = 0 \quad (3.1)$$

para transformar a variável virtual na função de Green.

Estas condições de contorno não poderiam ser aplicadas somente com o operador de Neu-

mann  $\mathbf{N}^*$ , sem o auxílio do operador  $\mathbf{N}'$ ,

$$\mathbf{N}^* \mathbf{G}(p, Q) = 0 \quad (3.2)$$

porque se teria problemas de singularidade no cálculo do tensor de Green, fornecendo um resultado não confiável provocado pelas dificuldades numéricas decorrente desta singularidade (problema de Neumann). Assim, com  $\mathbf{N}'$  são introduzidas condições de contorno de Cauchy, eliminando este inconveniente.

O operador auxiliar é acrescentado na formulação através da soma e subtração da relação

$$\mathbf{G}(p, Q) \mathbf{N}' \mathbf{u}(p) \equiv [\mathbf{N}' \mathbf{G}(p, Q)]^t \mathbf{u}(p) \quad (3.3)$$

e, para que esta seja possível é fácil observar que  $\mathbf{N}'$  deve ser um operador simétrico.

Então, tem-se  $\mathbf{N}'$  como um operador simétrico, aplicado sobre o contorno, incluído na formulação e influenciando diretamente na variável  $\mathbf{F}(p)$ ,

$$\mathbf{F}(p) = (\mathbf{N} + \mathbf{N}') \mathbf{u}(p) \quad (3.4)$$

Uma maneira de reduzir a influência do operador auxiliar é escolher  $\mathbf{N}'$  adequadamente (Barbieri [3]) tal que

$$\mathbf{N}' \mathbf{u}(p) = 0 \quad (3.5)$$

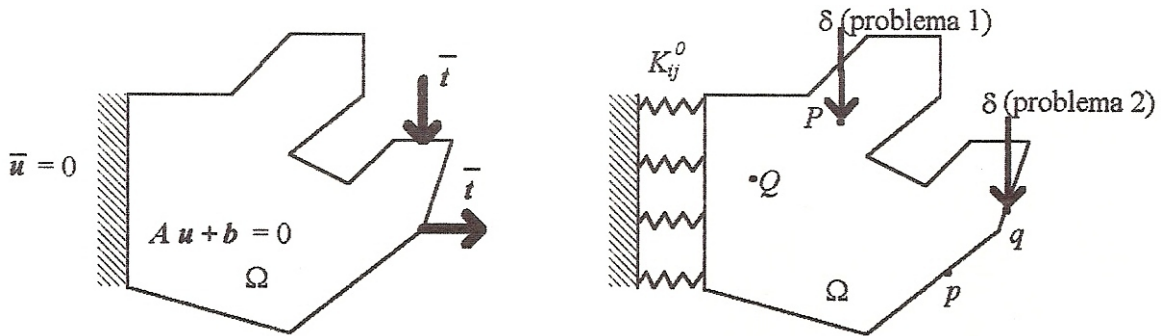
que pode ser obtido se  $\mathbf{N}'$  for aplicado apenas nos graus de liberdade que contém condição de contorno do tipo Dirichlet homogênea, ou seja, quando  $u_i(p)$  é pré-fixado como nulo para um determinado  $p \in \Omega$ . Se não fosse aplicada a condição (3.5) a solução seria obrigada a sofrer um pós-processamento. Quando esta condição não pode ser aplicada por não existir condições de contorno do tipo Dirichlet homogêneas no modelo, como pode ocorrer nos problemas de vibração livre (Filippin [38]), aplica-se

$\mathbf{N}'$  apenas em alguns graus de liberdade, de forma que sua influência seja reduzida,

$$\mathbf{N}'\mathbf{u}(p) \lll \mathbf{N}\mathbf{u}(p) \quad (3.6)$$

As equações finais de acordo com (3.5) não são, dessa forma, influenciadas pelo operador auxiliar e no cálculo das projeções da função de Green a influência é pequena.

Outra forma de se entender a aplicação do operador auxiliar com as condições anteriores, (3.5) ou (3.6), é verificar que este deve ser evitado por criar uma reação/fluxo fictícia, enquanto o operador  $\mathbf{N}$  representa a reação/fluxo real, as condições de contorno de Neumann do problema real. A reação fictícia introduz as condições de contorno de Cauchy ao problema adjunto, que pode ser vista como um apoio elástico, e as componentes da matriz de rigidez auxiliar  $\mathbf{K}^0$ , proveniente do uso do operador  $\mathbf{N}'$ , como sendo a rigidez deste apoio, ver Figura 3.1.



**Figura 3.1:** Problemas real e auxiliares

Visto isto, uma escolha adequada e muito simples para o operador auxiliar é a forma de uma matriz diagonal, que para a elasticidade plana tem a forma

$$\mathbf{N}' = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

onde  $k_x$  e  $k_y$  são constantes para as direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Foi visto no capítulo anterior que  $\mathbf{N}'$  entra no cálculo da matriz de rigidez, utilizada na

solução dos problemas auxiliares, na forma  $\mathbf{K}^0$  (2.96), como a matriz de rigidez auxiliar, obtida por

$$\mathbf{K}^0 = \int_{\partial\Omega} \Phi(q)^t \mathbf{N}' \Phi(q) d\partial\Omega_q \quad (3.8)$$

para elementos isoparamétricos.

Lembrando que  $\mathbf{N}'$  é aplicado somente onde houver condição de contorno  $\bar{\mathbf{u}} = 0$ ,  $\mathbf{K}^0$  pode ser escrito matricialmente como

$$\mathbf{K}^0 = \int_{\partial\Omega} \begin{bmatrix} \cdots & \phi_i & 0 & \cdots & \phi_j & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \phi_i & \cdots & 0 & \cdots & \phi_k & \cdots \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots & \phi_i & 0 & \cdots & \phi_j & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \phi_i & \cdots & 0 & \cdots & \phi_k & \cdots \end{bmatrix} d\partial\Omega_q \quad (3.9)$$

sendo que a dimensão da matriz que contém as funções de interpolação, em (3.9), é de duas linhas por  $ndh$  colunas ( $ndh$  é o número de g.d.l. com condições de contorno do tipo Dirichlet homogêneas),  $i$  representa um nó com  $(\bar{u}_{x_i} = 0)$  e  $(\bar{u}_{y_i} = 0)$ ,  $j$  um nó com a direção  $x$  fixa  $(\bar{u}_{x_j} = 0)$  e  $k$  com a direção  $(\bar{u}_{y_k} = 0)$ .

Para que  $\mathbf{K}^0$  possa ser somado a  $\mathbf{K}$ , deve-se ter as mesmas dimensões para ambas as matrizes, condição obtida facilmente acrescentando linhas e colunas nulas a  $\mathbf{K}^0$  onde forem necessárias.

Mais uma integração numérica é realizada se  $\mathbf{K}^0$  for calculado como em (3.9), porém  $\mathbf{N}'$  pode ser retirado da integral, pois seus termos são constantes, e a matriz massa do contorno  $\mathbf{m}$  pode ser aproveitada no cálculo. Assim, a matriz de rigidez auxiliar pode ser calculada com

$$\mathbf{K}^0 = [\mu k_j] \mathbf{m} \quad (3.10)$$

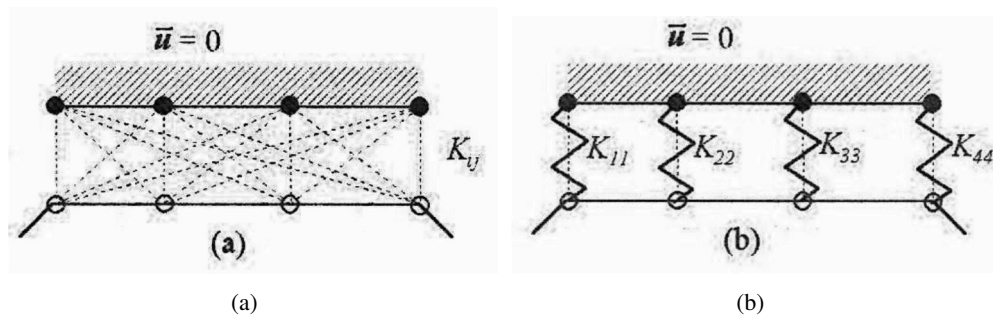
onde

$$\begin{cases} \mu = 1, & \text{se o g.d.l. } j \text{ tiver cond. de contorno } \bar{\mathbf{u}} = 0 \\ \mu = 0, & \text{em caso contrário, } k_j = k_x \text{ se } j \text{ for ímpar ou } k_j = k_y \text{ se } j \text{ for par} \end{cases}$$

Na Tabela 3.1, coluna  $[K_{ij} + K_{ij}^0]$ , é comparado o erro, em porcentagem, em relação ao parâmetro  $k$ , para a avaliação da dependência do método com relação ao parâmetro. O problema em questão é de uma placa com uma trinca central sob tração unitária, com as discretizações sendo grosseiras e o parâmetro independente da direção ( $k_x = k_y = k$ ). Na Tabela 3.1, pode-se verificar que uma variação significativa no resultado ocorre apenas para  $-0,01 < k_j < 0,01$ . Quando o parâmetro

é nulo o efeito do operador auxiliar desaparece e um resultado absurdo é obtido, comprovando a necessidade deste.

A dependência paramétrica é reduzida levemente se como matriz de rigidez auxiliar for usada uma matriz diagonal, como é apresentado originalmente por Barbieri [3], eliminando o cálculo de  $\mathbf{K}^0$ , que é a própria matriz diagonal em (3.10). Essa alteração provoca um desacoplamento entre os coeficientes da matriz de rigidez auxiliar. Visualizando novamente como um acoplamento elástico, é como se cada nó possuísse agora apenas uma mola e antes várias, como mostra a Figura 3.2, onde cada linha tracejada representa uma mola.



**Figura 3.2:** Representação antiga (a) e nova (b) da matriz de rigidez auxiliar.

Os resultados com a matriz de rigidez auxiliar diagonal também se encontram na Tabela 3.1, coluna  $[K_{ii} + K_i^0]$ , onde é fácil verificar a melhora obtida e, ainda, deve-se levar em conta que a programação é simplificada desta maneira, reduzindo o custo computacional.

A utilização de  $\mathbf{K}^0$  como uma matriz diagonal é a solução aplicada na maioria dos trabalhos, até então publicados, com o MFGLM. Barbieri [3] mostra que os resultados não variam para  $k$  variando de  $\pm 1\text{E}-6$  a  $\pm 1\text{E}+6$  ( $k \neq 0$ ), da mesma forma Filippin [38] em seus problemas de vibrações, Machado [63] observou uma pequena dependência para os problemas de placa ortotrópica, onde o parâmetro relacionado ao deslocamento transversal tem uma relação não unitária com os outros parâmetros, relacionados com as rotações.

Conclui-se então que  $k_x$  e  $k_y$  devem ser quaisquer constantes reais não nulas, desde que não comprometam o condicionamento das matrizes. Para diminuir a tendência de  $\mathbf{N}'$  provocar mal-condicionamento, principalmente quando os termos da diagonal de  $\mathbf{K}$  tem dimensões muito variadas, pode-se no lugar da soma aplicar um produto, desta forma os termos serão alterados igualmente, por

exemplo triplicados. Assim, a matriz de rigidez final é

$$\mathbf{K} = \mathbf{K} * \mathbf{K}^0, \quad \text{com}$$

$$\mathbf{K}^0 = [\mu k_j], \quad \text{onde} \begin{cases} \mu = 1, & \text{se } j \text{ for um g.d.l. com deslocamento nulo} \\ \mu = \frac{1}{k_j}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.11)$$

Na Tabela 3.1, coluna  $[K_{ii} * K_i^0]$ , podem ser vistos os resultados obtidos com a multiplicação cuja sensibilidade observada é bem reduzida. A instabilidade ocorre agora quando o parâmetro é unitário, caso em que não é alterada a matriz de rigidez. Os resultados presentes neste trabalho são obtidos com o uso desta terceira técnica.

**Tabela 3.1: Dependência paramétrica.**

Parâmetro	Erro (%)		
	$[K_{ii} + K_{ii}^0]$	$[K_{ii} + K_i^0]$	$[K_{ii} * K_i^0]$
+1.0E+99	-9.28147985788	-9.28147985788	-9.28147985788
+1.0E+8	-9.28147985788	-9.28147985788	-9.28147985788
+1.0E+6	-9.28147985788	-9.28147985788	-9.28147985788
+1.0E+4	-9.28147985788	-9.28147985788	-9.28147985788
+1.0E+2	-9.28147985788	-9.28147985788	-9.28147985788
+1.0E+1	-9.28147985788	-9.28147985788	-9.28147985788
+1.0	-9.28147985788	-9.28147985788	—
+1.0E-1	-9.28147985792	-9.28147985788	-9.28147985788
+1.0E-2	-9.28147985424	-9.28147985790	-9.28147985788
+1.0E-3	-9.28147967288	-9.28147985375	-9.28147985788
+1.0E-4	-9.28146949358	-9.28147942045	-9.28147985788
+1.0E-5	-9.28122777517	-9.28141917974	-9.28147985788
+1.0E-6	-9.30594914854	-9.27714901359	-9.28147985788
+1.0E-7	-14.7846185401	-8.80301111955	-9.28147985788
+1.0E-8	18.00222811501	13.15288012812	-9.28147985788

Obs.: Continua na página seguinte.

Continuação da Tabela 3.1

$k$	$[K_{ii} + K_{ii}^0]$	$[K_{ii} + K_i^0]$	$[K_{ii} * K_i^0]$
ZERO	—	—	-9.28147985788
-1.0E-8	1844.24886360	31.15895419497	-9.28147985788
-1.0E-7	-14.9468726524	-9.07078237509	-9.28147985788
-1.0E-6	-9.26496359265	-9.28728443412	-9.28147985788
-1.0E-5	-9.28233258441	-9.28147885002	-9.28147985788
-1.0E-4	-9.28148582847	-9.28148001303	-9.28147985788
-1.0E-3	-9.28147984626	-9.28147986221	-9.28147985788
-1.0E-2	-9.28147985844	-9.28147985788	-9.28147985788
-1.0E-1	-9.28147985788	-9.28147985788	-9.28147985788
-1.0	-9.28147985788	-9.28147985788	-9.28147985788
-1.0E+1	-9.28147985788	-9.28147985788	-9.28147985788
-1.0E+2	-9.28147985788	-9.28147985788	-9.28147985788
-1.0E+3	-9.28147985788	-9.28147985788	-9.28147985788
-1.0E+4	-9.28147985788	-9.28147985788	-9.28147985788
-1.0E+5	-9.28147985788	-9.28147985788	-9.28147985788
-1.0E+6	-9.28147985788	-9.28147985788	-9.28147985788
-1.0E+7	-9.28147985788	-9.28147985788	-9.28147985788
-1.0E+8	-9.28147985788	-9.28147985788	-9.28147985788
-1.0E+99	-9.28147985788	-9.28147985788	-9.28147985788

### 3.2 Melhorias no Algoritmo

Quando é feito um refino  $h$  concentrado em uma determinada região, por exemplo no extremo de uma trinca, alguns elementos sofrem elevada distorção, deteriorando seu coeficiente de aspecto. Este problema pode acarretar em mal condicionamento das matrizes, que no MFGLM um mal condicionamento da matriz de rigidez, ou das matrizes dos sistemas finais de equações, pode fornecer um erro numérico que é multiplicado várias vezes, pois os algebrismos envolvidos na construção dos

sistemas finais é relativamente elevado.

O mal condicionamento devido ao operador auxiliar já está, para problemas da elasticidade, parcialmente resolvido, solução apresentada na seção anterior. Então, com o objetivo inicial de melhorar o condicionamento numérico, é proposto um novo algoritmo para o cálculo numérico, onde a idéia principal é desacoplar o problema de contorno com o de domínio. Esta idéia foi aplicada apenas às equações do contorno, pois para aplicar o método dos deslocamentos no cálculo do fator intensidade de tensão (Capítulo 2.3), são suficientes os resultados para  $\theta = 0$  e  $\pi$ . Assim, tomando como ponto inicial o cálculo da projeção da função de Green no contorno com o MEF, chega-se ao sistema

$$\mathbf{K}\mathbf{g}^{\text{CQ}} = \mathbf{m}, \quad \text{onde} \quad \mathbf{K} = [\mathbf{K} + \mathbf{K}^0] \quad (3.12)$$

e  $\mathbf{m}$  é equivalente à matriz  $\mathbf{D}$ , a menos das dimensões, quando os elementos são isoparamétricos. Para que isto seja entendido, são definidas as dimensões das matrizes como:

- $m$  = número de g.d.l. da malha de domínio, com elementos finitos;
- $mc$  = número de g.d.l. da malha de contorno, com elementos de contorno;
- $mb$  = número de g.d.l. dos nós da malha de finitos que estão no contorno, borda do domínio, este será igual a  $mc$  apenas se a malha de contorno não possuir nós duplos, assim  $mb \leq mc$ .

Desta forma a matriz  $\mathbf{m}$  tem dimensões  $(m \times mc)$  e a matriz  $\mathbf{D}$   $(mc \times mc)$ , na equação (3.12)  $\mathbf{K}$  tem dimensões  $(m \times m)$  e  $\mathbf{g}^{\text{CQ}}$  tem  $(m \times mc)$ .

Separando então na equação (3.12) os graus de liberdade de bordo (índice  $b$ ) dos internos ao domínio (índice  $i$ ) resulta o sistema de equações matriciais

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bi} \\ \mathbf{K}_{ib} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_b^{\text{CQ}} \\ \mathbf{g}_i^{\text{CQ}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_b \\ \mathbf{\Theta} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

onde  $\mathbf{\Theta}$  é uma matriz nula, que surge porque  $\mathbf{m}$  é definida apenas no contorno e, conseqüentemente, os g.d.l. internos possuem termos nulos. Do sistema acima é facilmente encontrada a relação

$$\mathbf{g}_i^{\text{CQ}} = \left[ -\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ib} \right] \mathbf{g}_b^{\text{CQ}} \quad (3.14)$$



que, quando substituída em (3.13), encontra-se um sistema de equações para a solução de  $\mathbf{g}_b^{CQ}$ , independente de  $\mathbf{g}_i^{CQ}$ . É este:

$$\underbrace{\mathbf{K}_R}_{(mb \times mb)} \underbrace{\mathbf{g}_b^{CQ}}_{(mb \times mc)} = \underbrace{\mathbf{m}_b}_{(mb \times mc)}, \quad \text{onde} \quad \mathbf{K}_R = \mathbf{K}_{bb} - \mathbf{K}_{bi} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ib} \quad (3.15)$$

sendo  $\mathbf{K}_R$  a matriz de rigidez resultante.

A projeção obtida  $\mathbf{g}_b^{CQ}$  é a própria projeção  $\mathbf{g}^{Cq}$ , necessária no cálculo da matriz  $\mathbf{E}$  do sistema final de equações de contorno, se  $mb$  for igual a  $mc$ , ou seja, quando não houver nós duplos. Quando há nó duplo é necessário transformar  $\mathbf{g}_b^{CQ}$  ( $mb \times mc$ ) em  $\mathbf{g}^{Cq}$  ( $mc \times mc$ ), para isto basta duplicar as linhas de  $\mathbf{g}_b^{CQ}$  que se referem aos g.d.l. da malha de finitos correspondentes aos nós duplos da malha de contorno. Esta transformação nada mais é que a aplicação do operador traço.

Obtida a projeção, a atenção é transferida para o sistema final de equações do contorno, onde mais uma simplificação pode ser feita, para a aplicação deste trabalho, eliminando o termo  $\mathbf{F}_b$ , pois o vetor forças de corpo é normalmente nulo nos problemas da MFEL, nem possuem carregamentos internos ao domínio. Portanto, somente a projeção  $\mathbf{g}^{Cq}$  é suficiente para a nova solução do contorno, que fica simplificada em

$$\mathbf{D}\mathbf{u}^C = \mathbf{E}\mathbf{f} \quad (3.16)$$

onde  $\mathbf{E}$  é obtida de

$$\mathbf{E} = \mathbf{D}\mathbf{g}^{Cq} \quad (3.17)$$

A vantagem até agora obtida é que somente é calculada  $\mathbf{g}^{Cq}(\mathbf{g}_b^{CQ})$ , com um sistema de dimensões bem reduzidas. A projeção interna  $\mathbf{g}_i^{CQ}$  só é calculada se forem desejadas os deslocamentos no domínio, ou se houver alguma excitação interna a este. Uma inversão de matriz é necessária no cálculo da matriz de rigidez resultante, mas  $\mathbf{K}_i$  é uma matriz bem comportada, já que é parte da matriz de rigidez original, sem que tenha sofrido alterações pois  $\mathbf{N}'$  só atua no contorno.

Prosseguindo, pode-se desacoplar no sistema (3.16) os g.d.l. que contém condições de contorno de Dirichlet (índice  $D$ ) dos que contém condições de contorno tipo Neumann (índice  $N$ ). Assim,

o seguinte sistema matricial pode ser escrito:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{DD} & \mathbf{D}_{DN} \\ \mathbf{D}_{ND} & \mathbf{D}_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_D \\ \mathbf{u}_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{DD} & \mathbf{E}_{DN} \\ \mathbf{E}_{ND} & \mathbf{E}_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_D \\ \mathbf{f}_N \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

Neste sistema as matrizes  $\mathbf{D}_{DN}$  e  $\mathbf{D}_{ND}$  podem ser nulas, isto ocorre se os elementos de contorno, independentemente, não possuírem condições de contorno distintas para uma mesma direção. Esta condição pode ser aproveitada na solução de alguns casos, reduzindo os algebrismos necessários.

Os vetores desconhecidos em (3.18) são  $\mathbf{u}_N$  e  $\mathbf{f}_D$ , pois  $\mathbf{u}_N$  e  $\mathbf{f}_D$  são as condições de contorno. Resolvendo o sistema para  $\mathbf{u}_N$  é encontrada a expressão

$$\left[ \mathbf{D}_{NN} - \mathbf{E}_{ND} \mathbf{E}_{DD}^{-1} \mathbf{D}_{DD} \right] \mathbf{u}_N = \left[ \mathbf{E}_{NN} - \mathbf{E}_{ND} \mathbf{E}_{DD}^{-1} \mathbf{E}_{DN} \right] \mathbf{f}_N - \left[ \mathbf{D}_{ND} - \mathbf{E}_{ND} \mathbf{E}_{DD}^{-1} \mathbf{D}_{DD} \right] \mathbf{u}_D \quad (3.19)$$

e, verificando que  $\mathbf{u}_D$  é, para os casos deste trabalho, sempre nulo é possível reescrever

$$\mathbf{D}_R \mathbf{u}_N = \mathbf{E}_R \mathbf{f}_N \quad (3.20)$$

onde

$$\mathbf{E}_R = \mathbf{E}_{NN} - \mathbf{E}_{ND} \mathbf{E}_{DD}^{-1} \mathbf{E}_{DN} \quad \text{e} \quad \mathbf{D}_R = \mathbf{D}_{NN} - \mathbf{E}_{ND} \mathbf{E}_{DD}^{-1} \mathbf{D}_{DN} \quad (3.21)$$

Pode-se, então, calcular todos os deslocamentos no contorno, o que é suficiente para estimar um valor para o fator intensidade de tensão, pelo método dos deslocamentos. Caso os esforços também sejam desejados podem ser obtidos por

$$\mathbf{f}_D = -\mathbf{E}_{DD}^{-1} [\mathbf{D}_{DD} \mathbf{u}_D + \mathbf{D}_{DN} \mathbf{u}_N + \mathbf{E}_{DN} \mathbf{f}_N] \quad (3.22)$$

As vantagens deste segundo desacoplamento são que só é calculado o que for desejado, deslocamentos ou esforços, e que as matrizes nos sistemas tem dimensões reduzidas. Como um todo este algoritmo traz melhoras na precisão do cálculo da projeção de Green, devido ao melhoramento no condicionamento numérico, redução do tempo de computação e redução na memória necessária.

Algo semelhante pode ser feito para a solução do domínio e uma comparação entre tempos e memória utilizados, entre os algoritmos, não é apresentada porque os programas não estão em uma forma otimizada, e também, o atual está bastante simplificado para a aplicação na MFEL, o que levaria a uma comparação injusta.

### 3.3 Elementos Finitos e de Contorno

Nos capítulos anteriores foi mostrado que um problema qualquer da elasticidade linear pode ser resolvido numericamente com o MFGLM, onde são necessárias duas discretizações, uma para o domínio e outra para o contorno, nestas são utilizados elementos finitos e de contorno, respectivamente, cujas formulações usam funções de interpolação. Alguns tipos possíveis de elementos, os mais utilizados no MEF e no MEC, são brevemente revisados, levando em consideração que são de amplo conhecimento de todos. Segundo Dhatt e Touzot [33], os elementos podem ser classificados conforme: sua forma (triangulares, quadrangulares, ...), o número de graus de liberdade, as coordenadas dos nós, a definição de suas variáveis nodais, a base polinomial para a aproximação e o grau de continuidade entre elementos ( $C^0, C^1, C^2, \dots$ ).

São utilizados, neste trabalho, elementos finitos bidimensionais (planos), triangulares e quadrangulares, e elementos de contorno, também bidimensionais (elementos de linha). A continuidade entre elementos é  $C^0$ , isto é, apenas as variáveis são contínuas e não suas derivadas. As funções de interpolação são de várias famílias, para esta seção todos os elementos são isoparamétricos, isto quer dizer que possuem os mesmos parâmetros para geometria, deslocamentos e trações, ou melhor, possuem as mesmas funções de interpolação para todas as variáveis,  $\phi_i = \tilde{\phi}_i = \varphi_i$  e  $\Psi_i = \tilde{\Psi}_i$ .

Para que a convergência seja garantida, no MEF, para uma formulação baseada em deslocamentos na elasticidade (Zienkiewicz [98]), as funções de interpolação dos elementos finitos devem satisfazer as seguintes condições:

1. Deve haver continuidade para os deslocamentos nas interfaces dos elementos, a continuidade para as derivadas não é obrigatória;
2. Deve ser possível o critério da deformação constante, a derivada do campo de deslocamentos deve possuir termo constante.

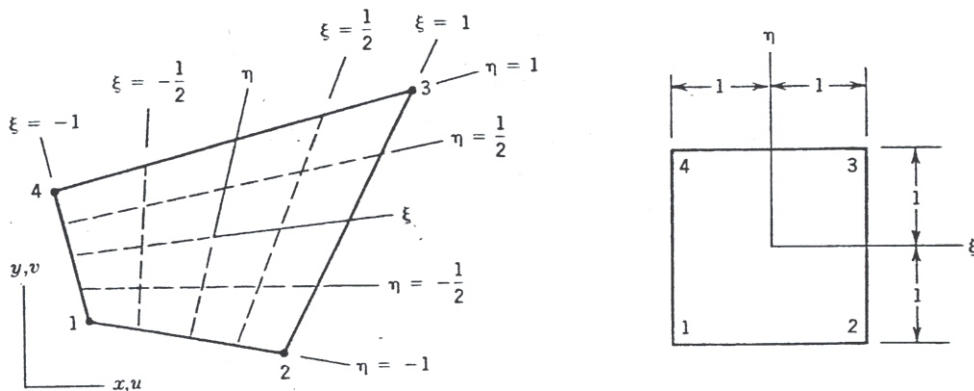
No MFGLM estas condições devem ser observadas na interpolação do domínio, pois é usado o MEF na aproximação da função de Green. Mais uma condição deve ser acrescentada no MFGLM, para cada elemento finito com pelo menos um lado no contorno deve compartilhar este lado com um elemento de contorno que seja seu "traço". Lembrando que na formulação foi considerada a possibilidade de usar o operador traço, porém fica claro que esta condição é necessária somente na interpolação dos deslocamentos:  $\tilde{\Psi}_i \rightarrow \tilde{\phi}_i$ .

Como características das funções de interpolação  $\Psi_i$  para elementos finitos de continuidade  $C^0$ , tem-se:

1.  $\Psi_i = 1$  quando  $x = x_i$  e  $\Psi_i = 0$  quando  $x = x_j$  onde  $j \neq i$ .
2. A soma de todas as funções de interpolação do elemento, em qualquer ponto interno a este, é unitária. Nos elementos com  $n$  nós:

$$\sum_{i=1}^n \Psi_i = 1 \quad (3.23)$$

Para que os elementos não tenham uma forma fixa, é conveniente usar uma formulação com coordenadas naturais ou intrínsecas, onde o elemento real é mapeado no elemento isoparamétrico. Este mapeamento pode ser observado na Figura 3.3, onde um elemento quadrangular qualquer, no espaço de coordenadas globais,  $x$  e  $y$ , é mapeado no elemento retangular isoparamétrico no espaço das coordenadas naturais,  $\xi$  e  $\eta$ .



**Figura 3.3:** Mapeamento isoparamétrico.

As funções de interpolação podem ser de várias formas, mas por enquanto são testados ape-

nas as mais usadas, que podem ser separadas em três famílias: lagrangeana, serendipity e triangular.

### 3.3.1 Família de Elementos Lagrangeanos

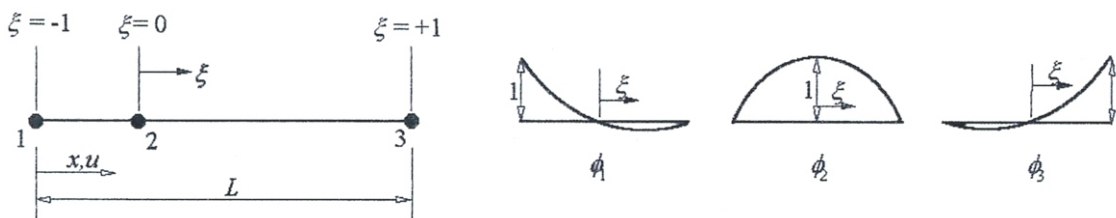
Uma maneira fácil e sistemática para obter funções de interpolação, de qualquer ordem, é pelo produto de determinados polinômios, são os polinômios de Lagrange, que podem ser aplicados a elementos quadrangulares e lineares.

A função de interpolação para um elemento de contorno com  $n$  nós é, dessa forma, fornecida por

$$\phi_i(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \quad (3.24)$$

onde  $\phi_i$  é a função de interpolação de contorno que se refere ao nó  $i$ ,  $\xi_i$  e  $\xi_j$  são coordenadas naturais do nós  $i$  e  $j$ , respectivamente.

Na Figura 3.4, um dos elementos lagrangeanos (de linha com três nós), é mostrado em conjunto com a forma de suas funções de interpolação que são quadráticas, logo, esse elemento é dito quadrático.



**Figura 3.4:** Elemento quadrático de contorno com coordenada natural  $\xi$ .

Assim, uma variável qualquer  $\alpha$ , interpolada por estas funções em  $n$  pontos (nós), possui campo

$$\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \tilde{\xi}^{i-1} = a_1 + a_2 \tilde{\xi} + a_3 \tilde{\xi}^2 + \dots + a_n \tilde{\xi}^{n-1} \quad (3.25)$$

onde  $a_i$  são as constantes generalizadas. Desta equação é fácil verificar porque o elemento com  $n$  nós se diz de ordem  $p = n - 1$ .

Como o elemento é isoparamétrico estas funções são usadas para interpolar geometria, deslocamentos e trações no contorno,

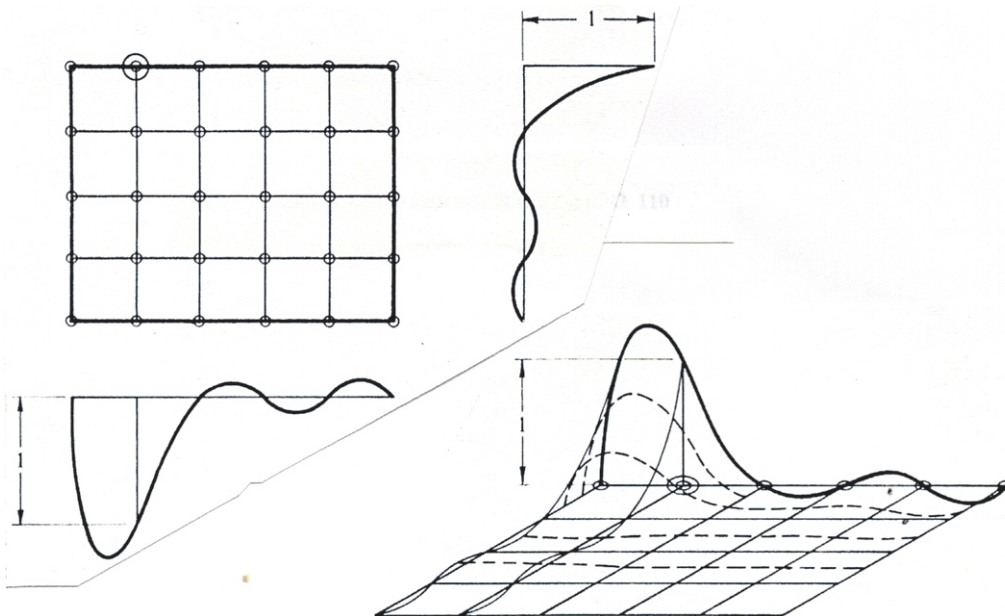
$$x = \sum \phi_i x_i \quad u = \sum \phi_i u_i \quad t = \sum \phi_i t_i \quad (3.26)$$

Para os elementos finitos as funções de interpolação podem ser obtidas pelo produto de dois polinômios de Lagrange, como em (3.24), um para cada coordenada,  $\xi$  e  $\eta$ . Então,

$$\Psi_{ij}(\xi, \eta) = L_i^n(\xi) L_j^m(\eta) \quad (3.27)$$

onde  $\Psi_{ij}$  é a função que se refere ao nó com coordenadas  $(\xi_i, \eta_j)$ , e  $L_i^n(\xi)$  e  $L_j^m(\eta)$  são os polinômios de Lagrange, que equivalem às funções de interpolação do contorno com  $n$  e  $m$  nós, respectivamente.

A Figura 3.5 mostra um exemplo de um possível elemento finito lagrangeano, mostrando que a ordem de interpolação pode ser diferente em cada direção. Nesta figura também pode ser observado que os elementos lagrangeanos de contorno são o traço dos elementos finitos, podendo ser utilizado na formulação do MFGLM.



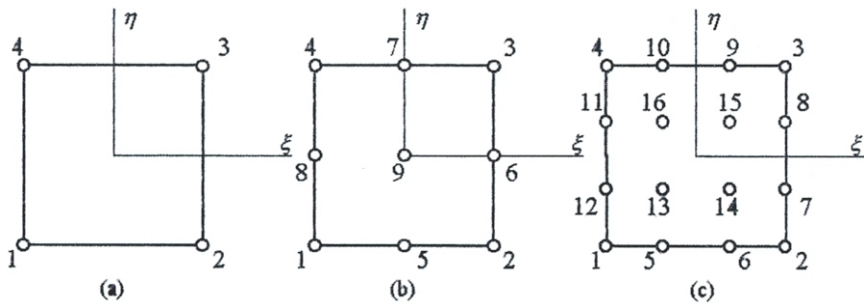
**Figura 3.5:** Elemento lagrangeano plano.

Caso a ordem de interpolação seja a mesma para cada coordenada, mais comumente usado,

as funções também. podem ser obtidas, para um elemento finito com  $n$  nós, por

$$\Psi_i(\xi, \eta) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(\xi - \xi_j)(\eta - \eta_j)}{(\xi_i - \xi_j)(\eta_i - \eta_j)} \tag{3.28}$$

Assim, o elemento finito possui uma ordem de interpolação  $p = \sqrt{n} - 1$ , podendo ser linear, quadrático, cúbico (Figura 3.6) ou outros com qualquer ordem de interpolação  $p$ .

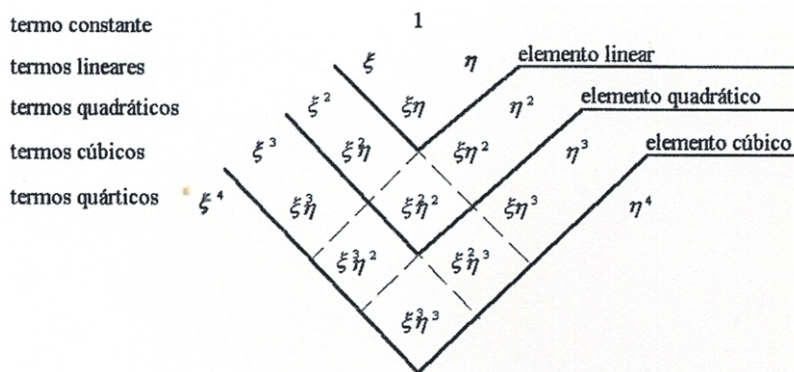


**Figura 3.6:** Elementos lagrangeanos: (a) linear, (b) quadrático e (c) cúbico.

O campo de interpolação de uma variável qualquer  $a$ , em termos das coordenadas naturais em um elemento quadrático (Figura 3.6b), é representado como

$$\alpha = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta + a_5\xi^2 + a_6\xi^2\eta + a_7\xi^2\eta^2 + a_8\xi\eta^2 + a_9\eta^2 \tag{3.29}$$

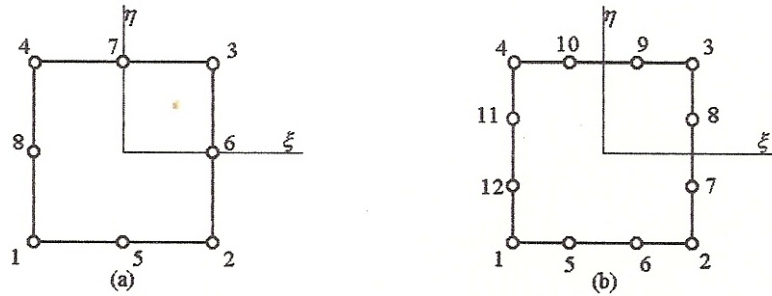
onde  $a_i$  são coordenadas generalizadas. Estes campos podem ser obtidos, para qualquer ordem, do triângulo de Pascal, apresentado na Figura 3.7.



**Figura 3.7:** Triângulo de Pascal.

### 3.3.2 Família de Elementos Serendipity

É muitas vezes conveniente que as funções dependam somente dos nós posicionados no contorno do elemento. Assim, surgiu uma família de elementos com nós somente no contorno, a família serendipity. Alguns destes elementos estão presentes na Figura 3.8.



**Figura 3.8:** Elementos serendipity quadrático (a) e cúbico (b).

Para uma interpolação linear as funções são as próprias lagrangeanas e para os elementos quadrático e cúbico as funções são obtidas por inspeção, sendo difícil a criação de elementos de alta ordem e, de acordo com Zienkiewicz [98], para o elemento quártico, quarta ordem, aparece um nó interno ao elemento e de posição central. Para o elemento serendipity quadrático (Figura 3.8), as funções de interpolação são

$$\begin{aligned}
 \Psi_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-1 - \xi - \eta) & \Psi_5 &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \\
 \Psi_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(-1 + \xi - \eta) & \Psi_6 &= \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2) \\
 \Psi_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(-1 + \xi + \eta) & \Psi_7 &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \\
 \Psi_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-1 - \xi + \eta) & \Psi_8 &= \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2)
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Uma comparação entre as funções de interpolação deste elemento e as do elemento quadrático lagrangeano pode ser vista na Figura 3.9. A função  $\Psi_9$  a mais no elemento lagrangeano, faz com que a precisão deste seja normalmente maior e que sua sensibilidade à distorção, lados curvos e posição dos nós equidistantes, seja menor. O mesmo é observado no elemento cúbico, Figura 3.8b, cujas funções de interpolação podem ser encontradas em Zienkiewicz [98].

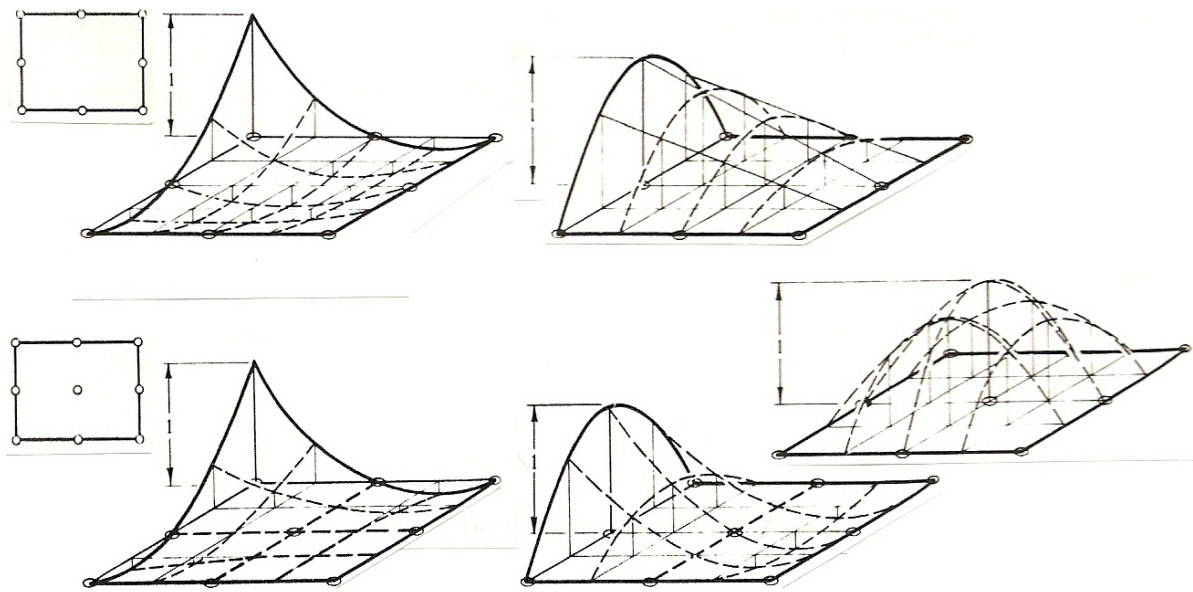
O campo para as variáveis pode ser obtido de forma similar à família lagrangeana, caminho tracejado no triângulo de Pascal Figura 3.7. O desvio dos parâmetros centrais no triângulo é devido



a eliminação dos nós centrais. Como exemplo, o campo para uma variável qualquer no elemento de oito nós é

$$\alpha = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta + a_5\xi^2 + a_6\xi^2\eta + a_7\xi^2\eta^2 + a_8\xi\eta^2 \quad (3.31)$$

Os elementos de contorno relacionados à família serendipity são os próprios elementos de contorno lagrangeanos.



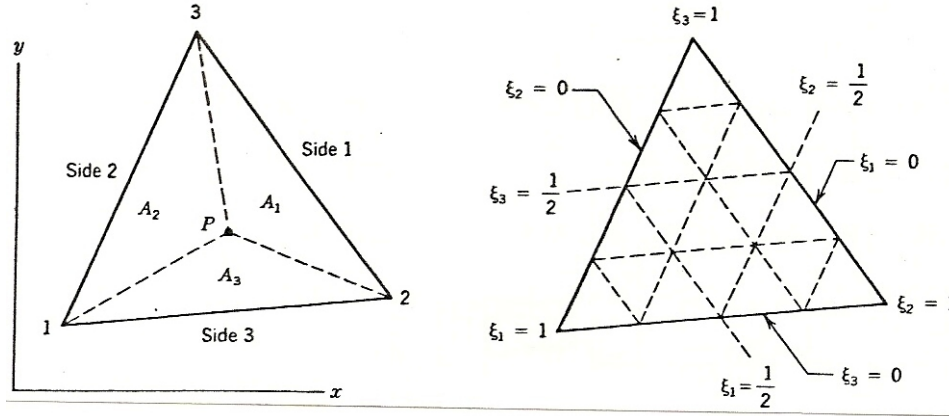
**Figura 3.9:** Funções de interpolação para os elementos quadráticos das famílias serendipity e lagrangeano.

### 3.3.3 Elementos Triangulares

O uso de elementos finitos triangulares permite uma melhor discretização de domínios irregulares, sem provocar grandes deformações nos elementos, como acontece com os elementos quadrangulares em alguns casos. As coordenadas naturais para os elementos triangulares são as coordenadas de área, coordenadas triangulares ou trilineares.

Considerando um ponto  $P$  dividindo um triângulo em três áreas ( $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ ), Figura 3.10, as coordenadas de área ( $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ ) são definidas como as razões das áreas parciais pela total  $A$ ,

$$L_1 = \frac{A_1}{A}, \quad L_2 = \frac{A_2}{A} \quad \text{e} \quad L_3 = \frac{A_3}{A} \quad (3.32)$$



**Figura 3.10:** Coordenadas de área.

Estas coordenadas são dependentes entre si e satisfazem a relação  $L_1 + L_2 + L_3 = 1$ . Podem ser relacionadas com as coordenadas naturais  $\zeta$  e  $\eta$ , cuja origem é posicionada em um dos vértices do triângulo e os eixos sobre os lados. Se o sistema de coordenadas estiver no ponto um, com  $\zeta$  sobre o lado 3 e  $\eta$  sobre o lado 2, tem-se

$$L_1 = 1 - \zeta - \eta, \quad L_2 = \zeta \quad \text{e} \quad L_3 = \eta \quad (3.33)$$

A expansão polinomial para uma variável é completa para os elementos triangulares e pode ser expressa genericamente, para qualquer ordem  $p$ , como

$$\alpha = \sum_{i=1}^n a_i L_1^q L_2^r L_3^s \quad (3.34)$$

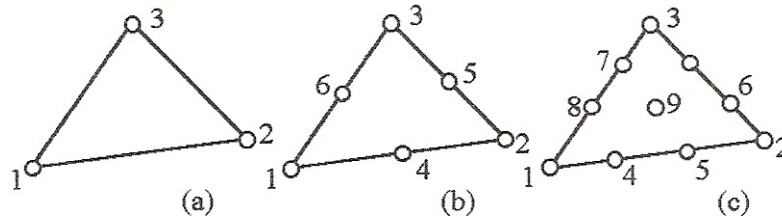
onde  $q, r$  e  $s$  são todas as  $n$  possíveis combinações que satisfaçam  $q + r + s = p$ , sendo  $n$  o número de nós, que pode ser relacionado a  $p$  por

$$n = \frac{(p+1)(p+2)}{2} \quad (3.35)$$

O primeiro elemento na Figura 3.11 é o elemento linear que também pode ser chamado de CST (*constant-strain-triangle*) no caso da elasticidade, pois as derivadas das suas funções de interpo-

lação são constantes. As funções de interpolação são dadas, simplesmente, por

$$\Psi_1 = L_1, \quad \Psi_2 = L_2 \quad \text{e} \quad \Psi_3 = L_3 \quad (3.36)$$



**Figura 3.11:** Elementos triangulares: (a) linear, (b) quadrático e (c) cúbico.

Resultados muito pobres são obtidos com estes elementos, principalmente para as tensões, necessitando um elevado número de graus de liberdade. Resultados bem melhores são obtidos com elementos triangulares quadráticos, ou LST (*linear-strain-triangle*), que possui as funções

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= L_1(2L_1 - 1) & \Psi_4 &= 4L_1L_2 \\ \Psi_2 &= L_2(2L_2 - 1) & \Psi_5 &= 4L_2L_3 \\ \Psi_3 &= L_3(2L_3 - 1) & \Psi_6 &= 4L_3L_1 \end{aligned} \quad (3.37)$$

cujas derivadas são lineares.

Para o elemento triangular cúbico presente na Figura 3.11c, onde o nó 10 está no centróide do elemento (em  $L_1 = L_2 = L_3 = \frac{1}{3}$ ), as funções são

$$\begin{aligned} \Psi_i &= \frac{1}{2}L_i(3L_i - 1)(3L_i - 2) & \text{para } i &= 1, 2 \text{ e } 3 \\ \Psi_4 &= \frac{9}{2}L_2L_1(3L_1 - 1) & \Psi_5 &= \frac{9}{2}L_1L_2(3L_2 - 1) \\ \Psi_6 &= \frac{9}{2}L_3L_2(3L_2 - 1) & \Psi_7 &= \frac{9}{2}L_2L_3(3L_3 - 1) \\ \Psi_8 &= \frac{9}{2}L_1L_3(3L_3 - 1) & \Psi_9 &= \frac{9}{2}L_3L_1(3L_1 - 1) \\ \Psi_{10} &= 27L_1L_2L_3 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Zienkiewicz[98] e Dhatt e Touzot [33] apresentaram fórmulas genéricas para as funções de interpolação de elementos triangulares, para qualquer ordem. Eliminar os nós internos dos elementos

triangulares também é possível.

Os elementos de contorno a serem utilizados em conjunto com estes elementos triangulares é, novamente, a família de elementos de contorno lagrangeana.

### 3.4 Resultados Numéricos

Realizada a implementação numérica dos elementos isoparamétricos, apresentados na seção anterior, no MFGLM se torna possível a análise de problemas da mecânica da fratura elástica linear (MFEL) bidimensional, testando a capacidade do método na solução destes. Esta análise se resume em calcular numericamente o fator de intensidade de tensão  $K$ , modos  $I$  e  $II$ , para problemas relativamente simples que possuem solução analítica. Será dada ênfase no cálculo do modo  $I$ , já que é este o mais perigoso em problemas práticos de fratura frágil, onde a falha ocorre teoricamente devido ao excesso de  $K_I (> K_C)$ .  $K_{III}$  não entra na análise porque não tem as características de um problema bidimensional.

#### 3.4.1 Casos Teste

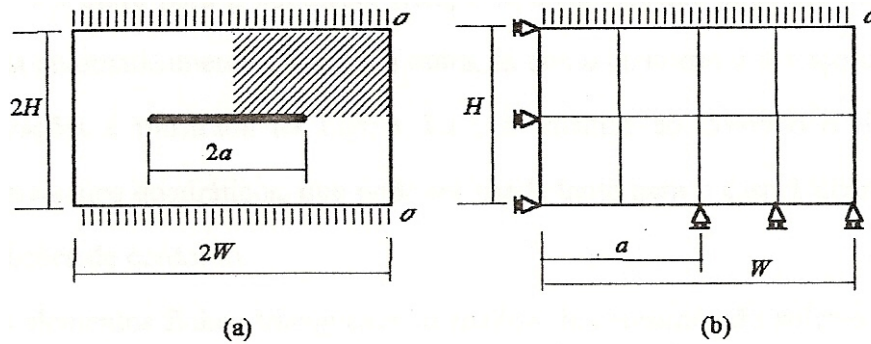
Os problemas criados para a comparação dos resultados são dois, que têm como objetivo o modo  $I$ , em ambos as características do material são as mesmas: módulo de elasticidade ( $E = 10^7$ ) e coeficiente de Poisson ( $\nu = 0,3$ ). O carregamento é representado por uma tensão de tração unitária ( $\sigma$ ), uniformemente distribuída sobre os extremos paralelos à trinca. A dimensão  $a$  da trinca também é unitária e, dessa forma, o valor do fator de intensidade de tensão para a geometria de Griffith  $K_0$ , placa infinita, vale  $\sqrt{\pi}$ .

Caso 1. O primeiro caso é uma trinca central a uma placa retangular, sob tensão de tração uniaxial e uniforme, conforme a Figura 3.12. Como o carregamento é aplicado perpendicularmente à direção da trinca o fator intensidade de tensão contém apenas o modo  $I$ ,

$$K_I = YK_0 \quad \text{e} \quad K_{II} = 0 \quad (3.39)$$

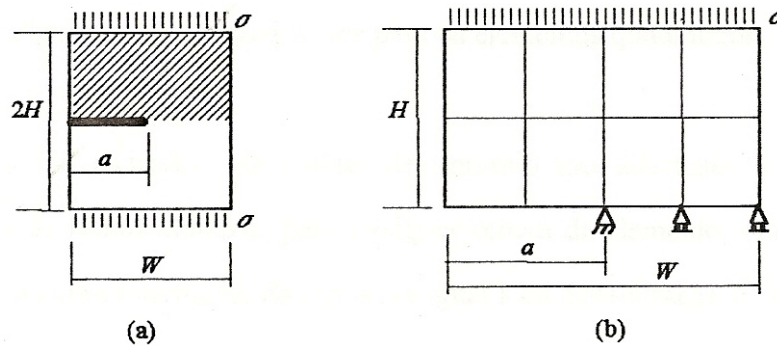
De Rooke e Cartwright [78] se pode obter uma solução analítica para o fator geométrico deste caso ( $Y_{RC} = 1,94$ ), que foi calculada por Isida [57] usando o processo de colocação de funções

complexas. Este valor é comparado com as soluções numéricas que utilizam o modelo da Figura 3.12,  $a/W = H/W = 0,5$ ; com as condições de contorno nesta apresentadas. O modelo é feito apenas para a parte hachurada devido à simetria do problema.



**Figura 3.12:** Caso 1: (a) problema e (b) condições de contorno.

Caso 2. Outro problema, clássico na MFEL, é de uma trinca lateral em uma placa tinita sob tração uniaxial Figura 3.13. As condições de contorno são aplicadas tal que não haja restrições à flexão da placa, em torno do extremo da trinca. As equações (3.39) continuam válidas pois a tração ainda é perpendicular à direção de propagação da trinca.

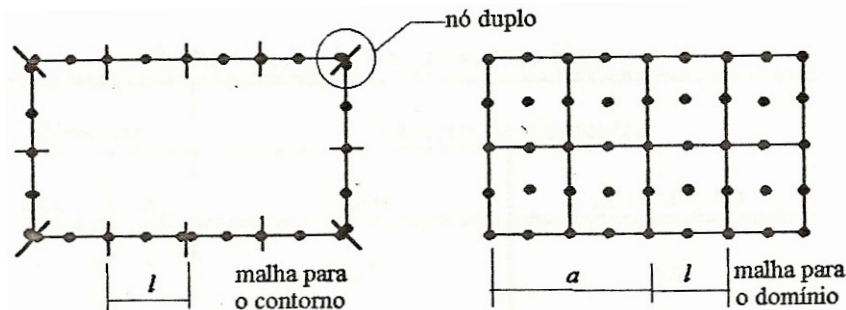


**Figura 3.13:** Caso 2: (a) problema e (b) condições de contorno.

O modelo numérico é feito, novamente, sobre a área hachurada devido à simetria do problema. Na Figura 3.13 podem ser vistas as condições de contorno utilizadas para a solução numérica, que é comparada com a analítica fornecida por Rooke e Cartwright [78]. A solução analítica foi obtida com técnicas de mapeamento uniforme por Bowie e Neal [22],  $Y_{RC} = 3,0$ , para  $a/W = H/W = 0,5$ .

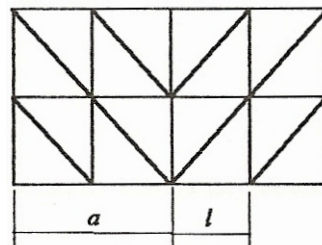
### 3.5 Resultados

As discretizações utilizadas na solução dos casos teste são na maioria regulares, elementos com dimensões iguais, e deve ser lembrada a necessidade da construção de duas malhas, uma para o domínio e a outra para o contorno. Mas, este inconveniente pode ser contornado se uma delas for gerada automaticamente a partir da outra, já que o contorno é o traço do domínio. Uma destas discretizações é mostrada na Figura 3.14, as malhas do domínio e do contorno com elementos lagrangeanos quadráticos, que pode ser usada tanto para o caso 1 quanto o 2, mudando apenas as condições de contorno.



**Figura 3.14:** Discretizações para os elementos quadráticos.

Para os elementos finitos triangulares as malhas de contorno não sofrem modificações em relação à de elementos finitos quadrangulares, se o número de elementos de contorno e a ordem de interpolação não são alterados. As malhas de domínio são diferentes e na Figura 3.15 é apresentada a malha de finitos utilizada, para qualquer ordem de elemento, onde a proporção do tamanho do elemento  $l$  com o tamanho da trinca  $a$  é igual à da discretização na Figura 3.14,  $l/a = 0,5$ .



**Figura 3.15:** Discretizações com elementos triangulares.

Com o MFGLM calcula-se o vetor deslocamento generalizado para o contorno  $\mathbf{u}^C$  e, então,

com o método dos deslocamentos, pode-se calcular os valores nodais do fator de intensidade de tensão  $K_I^i$  na posição  $\theta = \pm\pi$ . Dividindo os fatores de intensidade de tensão nodais pela raiz de  $\pi$  ( $K_0$  - fator de intensidade de tensão para geometria infinita) são encontrados os fatores geométricos nodais  $Y_i$ , que são comparados com a solução analítica  $Y_{RC}$  obtendo uma variação em relação a esta. Esta variação (erro) pode ser obtida por

$$\text{erro} = \left( \frac{Y_i}{Y_{RC}} - 1 \right) 100 \quad (\%) \quad (3.40)$$

e é plotado em relação a razão  $r_i/a$ , onde  $r_i$  é a distância do nó ao extremo da trinca. São formados os gráficos presentes na Figura 3.17, dos quais cada gráfico representa um dos elementos apresentados.

A Tabela 3.2 apresenta as malhas utilizadas nas soluções da Figura 3.17, nesta o (\*) está indicando que a malha em questão não é regular como na Figura 3.14, mas possui um refino extra com uma razão de redução no elemento de 0,17; próximo ao extremo da trinca, como mostra a Figura 3.16.

**Tabela 3.2:** Malhas usadas na Figura 3.17.

Elemento		Número de elementos	
Tipo	$p$	Finitos	de contorno
Lagrangeano	1	54*	32*
	2	50	30
	3	8	12
	4	8	12
	5	2	6
	6	2	6
Serendipity	2	32	24
Triangular	1		
	2	16	12
	3		

Nos gráficos de resultados o número entre parênteses representa o caso teste em questão e a nomenclatura abaixo é usada para indicar o tipo de elemento finito utilizado na discretização.

$$\text{Simbologia para os elementos} \left\{ \begin{array}{l} Q \Rightarrow \text{Quadrangular} \\ T \Rightarrow \text{Triangular} \\ N \Rightarrow \text{Número de nós do elemento} \end{array} \right.$$

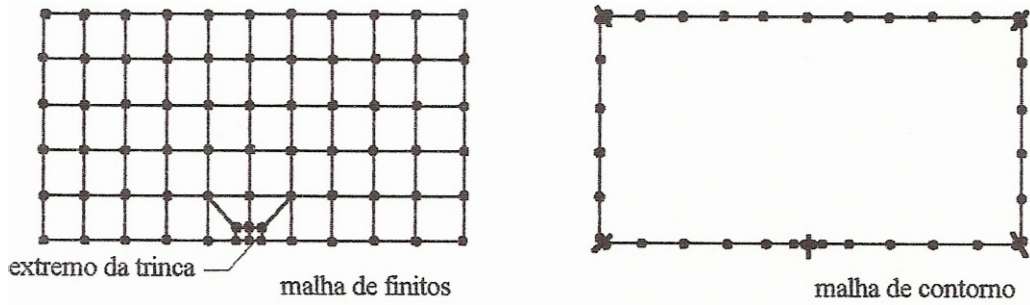


Figura 3.16: Malhas com refino extra, elementos lineares.

Como já foi mencionado anteriormente, um valor estimado para o fator de intensidade de tensão pode ser obtido extrapolando os gráficos da Figura 3.17 e, então, a avaliação dos gráficos deve ser efetuada levando em conta este fato. É importante observar também que os resultados para pontos muito distantes, ou muito próximos, do extremo da trinca são normalmente menos confiáveis, por motivos já comentados, esta variação fica evidente em alguns dos resultados da Figura 3.17.

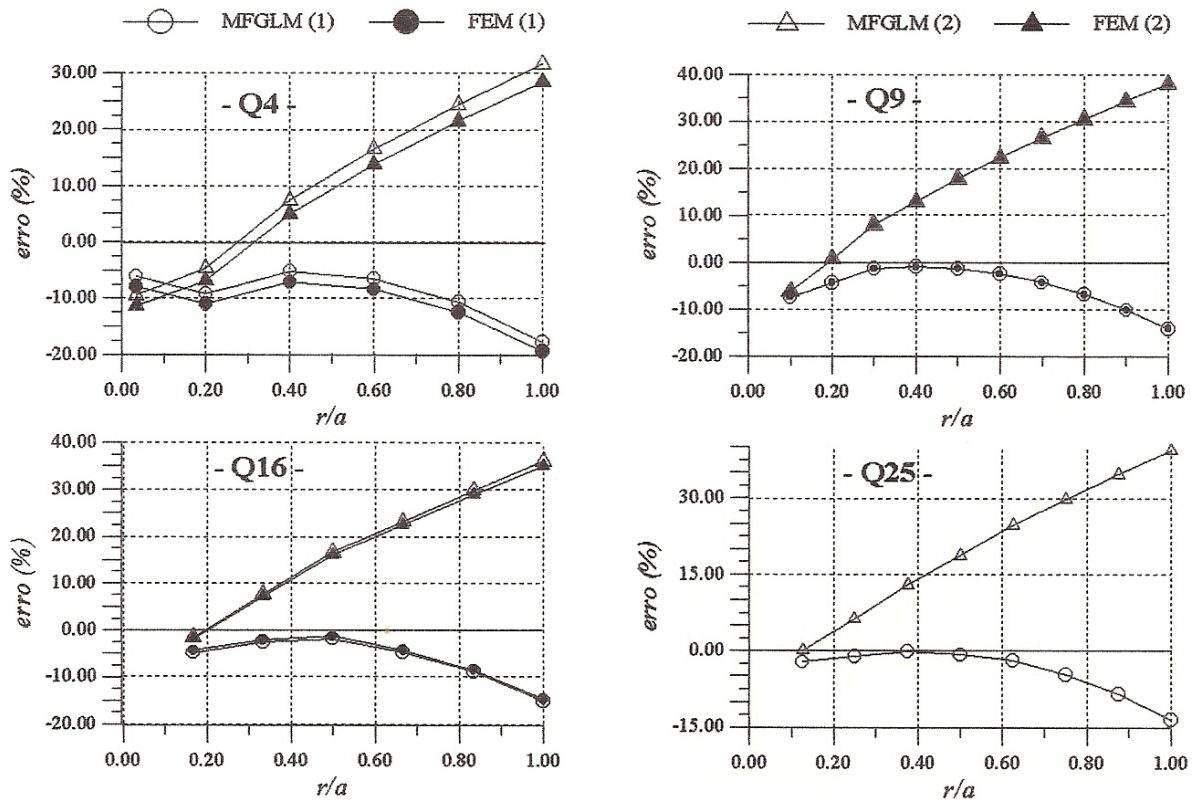
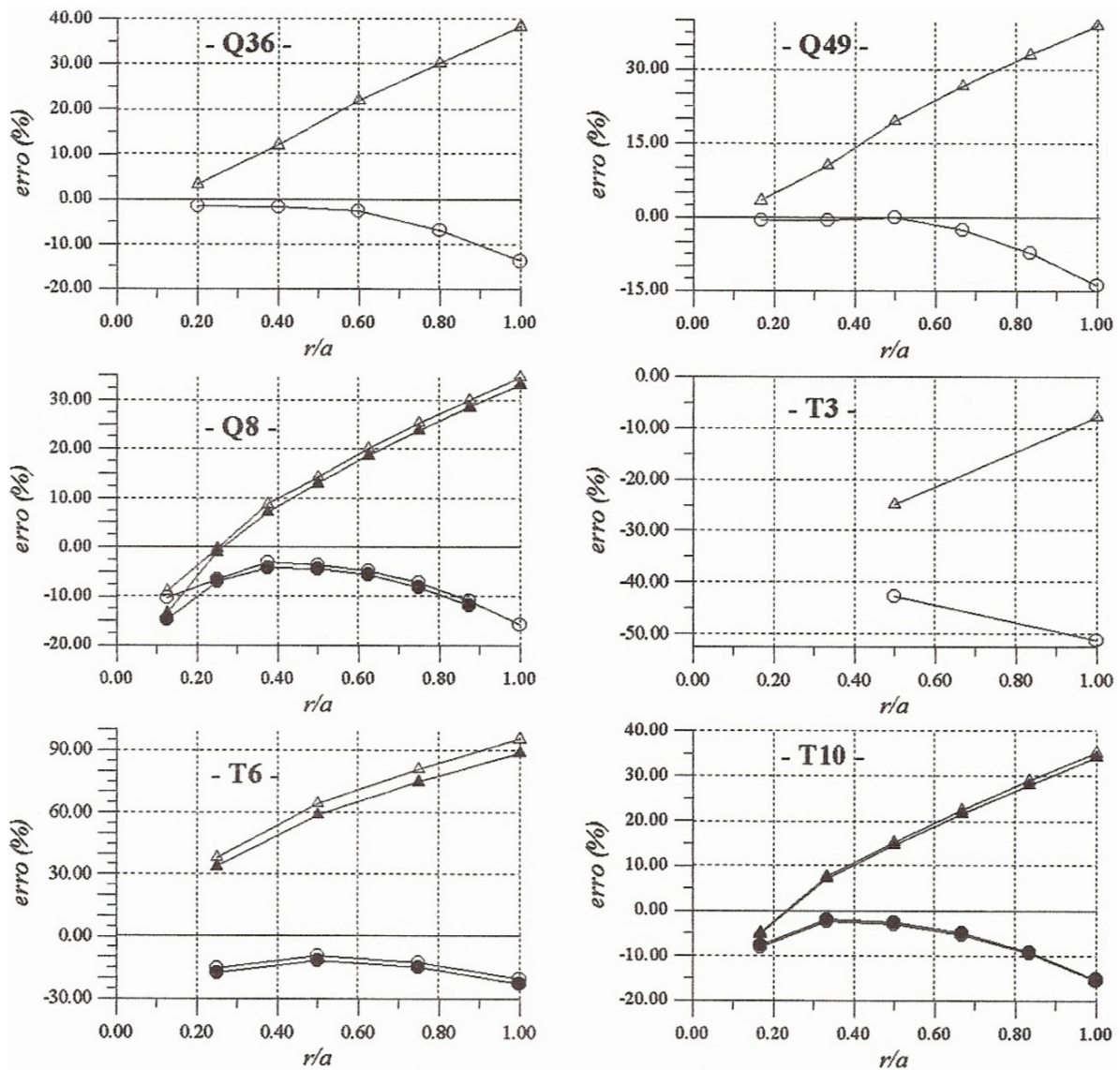


Figura 3.17: Resultados preliminares - parte 1.

Também são plotados alguns resultados com o MEF, como efeito comparativo, utilizando



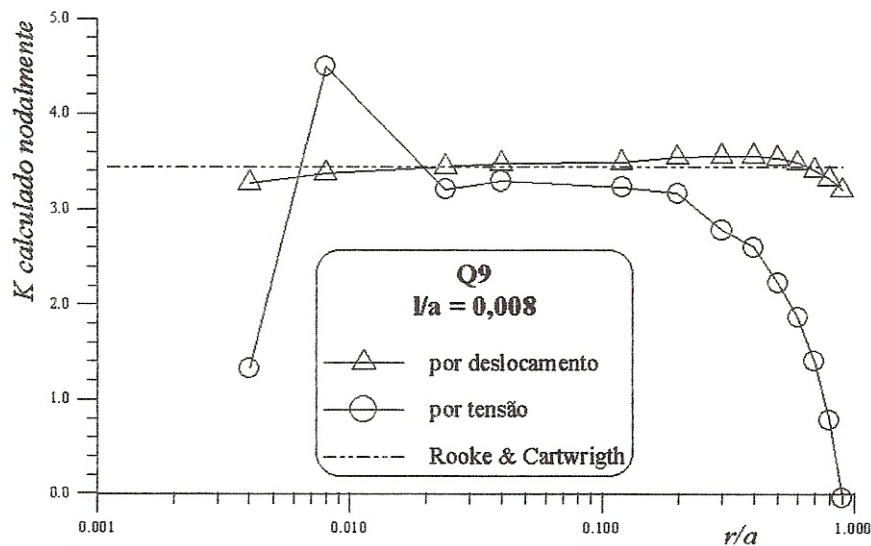
a mesma discretização para o domínio. O MEF fornece resultados um pouco mais rígidos e uma pequena melhora nos resultados pode ser observada quando utilizado o MFGLM, comprovando a capacidade deste na solução dos problemas da MFEL. Quanto aos elementos, os quadrangulares fornecem melhores resultados que os triangulares.



**Figura 3.18:** Resultados preliminares - parte 2.

Os resultados da Figura 3.18 foram obtidos com o método do deslocamento, mas poderiam ter sido obtidos com o método da tensão (Capítulo 2), pois o MFGLM pode fornecer diretamente quanto o obtido pelo deslocamento, como pode ser verificado no gráfico da Figura 3.19 que apresenta

os resultados para o caso um, obtidos com ambas as técnicas. A discretização usou elementos, finitos e de contorno, lagrangeanos quadráticos e um refino extra, como na Figura 3.16, mas com duas reduções em forma de progressão geométrica de razão 0,20. Os valores apresentados no gráfico são os fatores intensidade de tensão, obtidos nodalmente ( $K_I^i$ ), e a distância em relação ao extremo da trinca é apresentado na forma logarítmica para melhor visualização. A instabilidade do resultado próximo ao extremo da trinca é maior quando calculado pela tensão e, também, o resultado se deteriora antes à medida que se afasta do extremo da trinca, mas isto não chega a inviabilizar o método da tensão, podendo ser aplicada quando for desejada, necessitando apenas de um refino maior.



**Figura 3.19:** Comparação entre os métodos de deslocamento e de tensão.

Uma análise mais detalhada do MFGLM pode ser feita realizando uma análise de convergência dos resultados quando é efetuado um refino, ou seja, quando o número de graus de liberdade é aumentado. O refino pode ser, basicamente, de duas maneiras:

1. Refino  $h$   $\rightarrow$  é o refino adquirido aumentando o número de elementos nas malhas, melhorando a capacidade de interpolação destas. Recebe este nome porque o tamanho dos elementos é reduzido, sendo  $h$  a maior dimensão do menor elemento existente na malha;
2. Refino  $p$   $\rightarrow$  provocado com o aumento da ordem de interpolação  $p$  das discretizações, neste, nem o número de elementos e nem o tamanho destes são alterados.

### 3.5.1 Convergência $h$

A convergência  $h$  é aquela cuja análise é feita unicamente com o refino tipo  $h$ . Esta tem como objetivo verificar se a solução converge para a solução correta, assim como verificar a taxa de convergência. É realizada desenhando o erro em relação ao parâmetro  $h$ . Para que essa curva de convergência seja traçada é necessário se ter uma única solução para cada  $h$ , que pode ser obtida aqui extrapolando os valores calculados com o método dos deslocamentos para o extremo da trinca. Entretanto, a extrapolação é um tanto subjetiva, tal que dois analistas podem chegar a estimativas um pouco diferentes, e devido a isto os gráficos são apresentados em uma forma não habitual, onde cada  $h$  não é representado por um ponto, mas por uma curva, plotando os fatores geométricos nodais em relação à distância destes ao extremo da trinca.

Algumas análises deste tipo podem ser observadas nas Figuras 3.20-24, onde a variável  $h$  está representada por  $l/a$ , que é a razão entre o lado  $l$  sobre o contorno do menor elemento em relação à dimensão da trinca  $a$ . As curvas que possuem esta razão valendo 0,034 e 0,008 foram calculadas usando malhas com um refino concentrado no extremo da trinca em progressão geométrica.

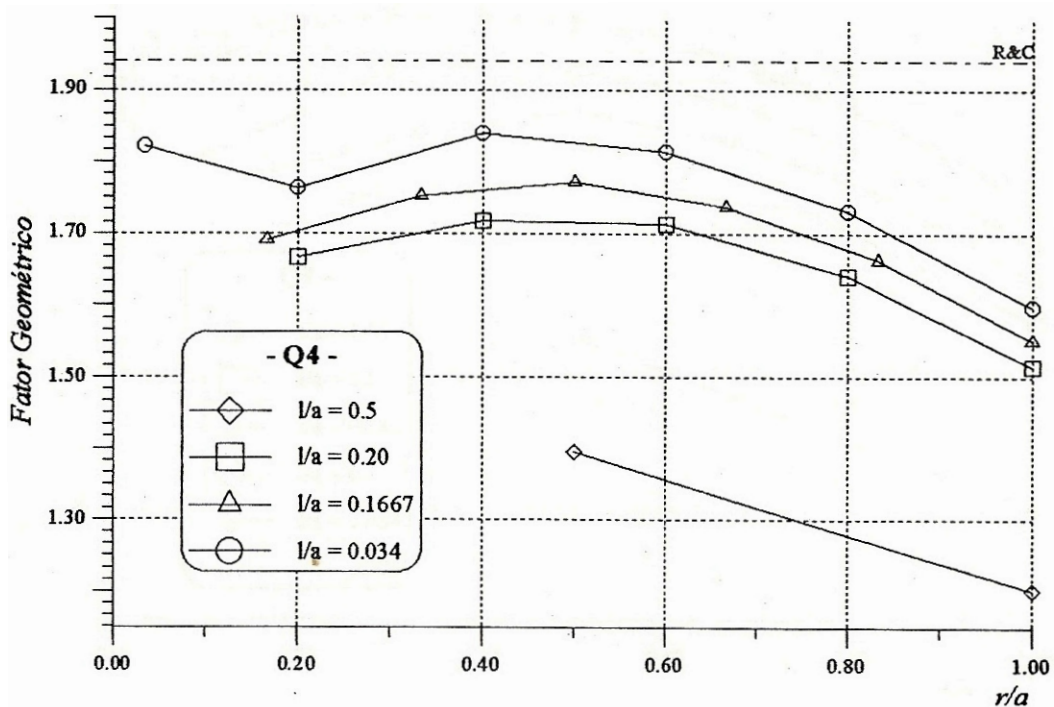


Figura 3.20: Convegência  $h$  para o elemento quadrangular linear.

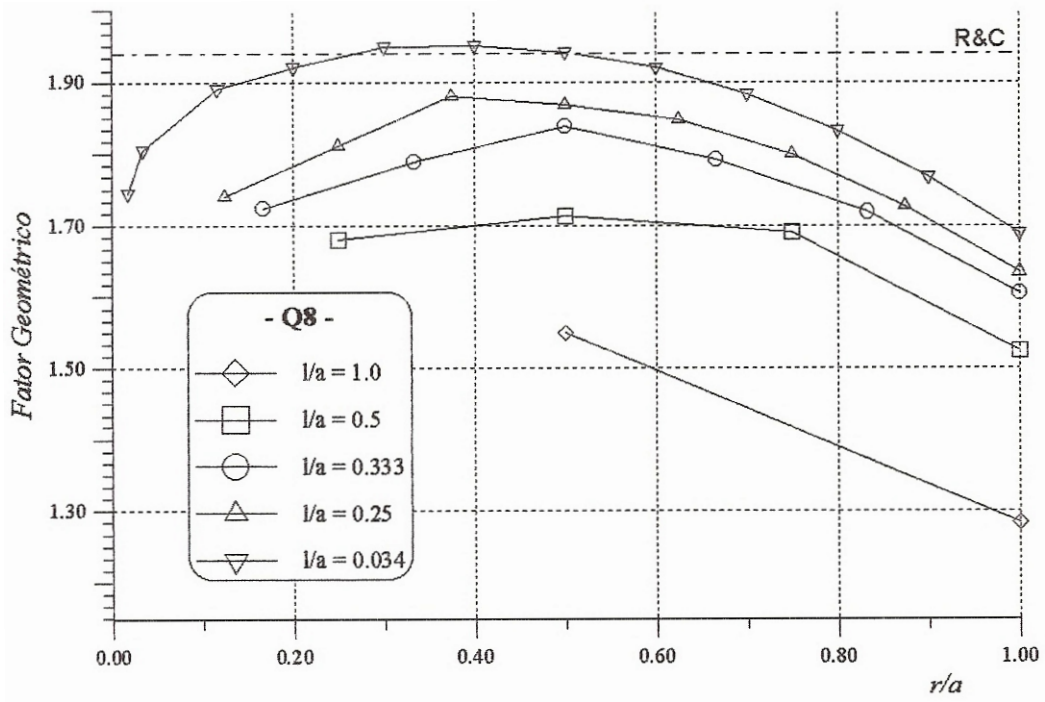


Figura 3.21: Convergência  $h$  para o elemento serendipity quadrático.

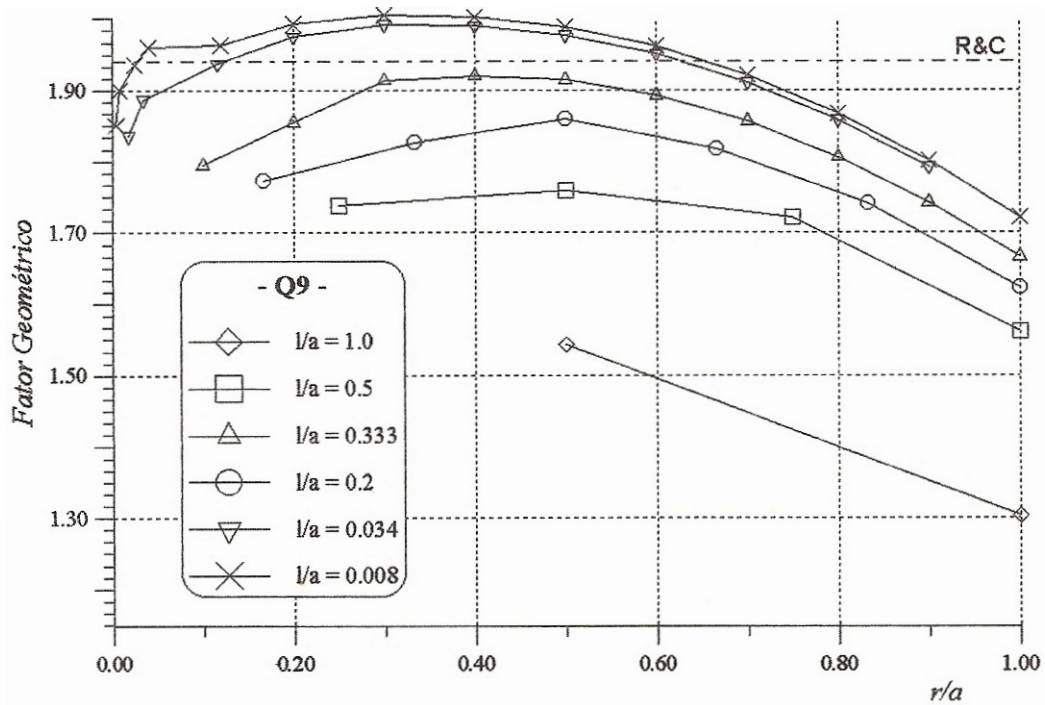


Figura 3.22: Convergência  $h$  para o elemento lagrangeano quadrático.

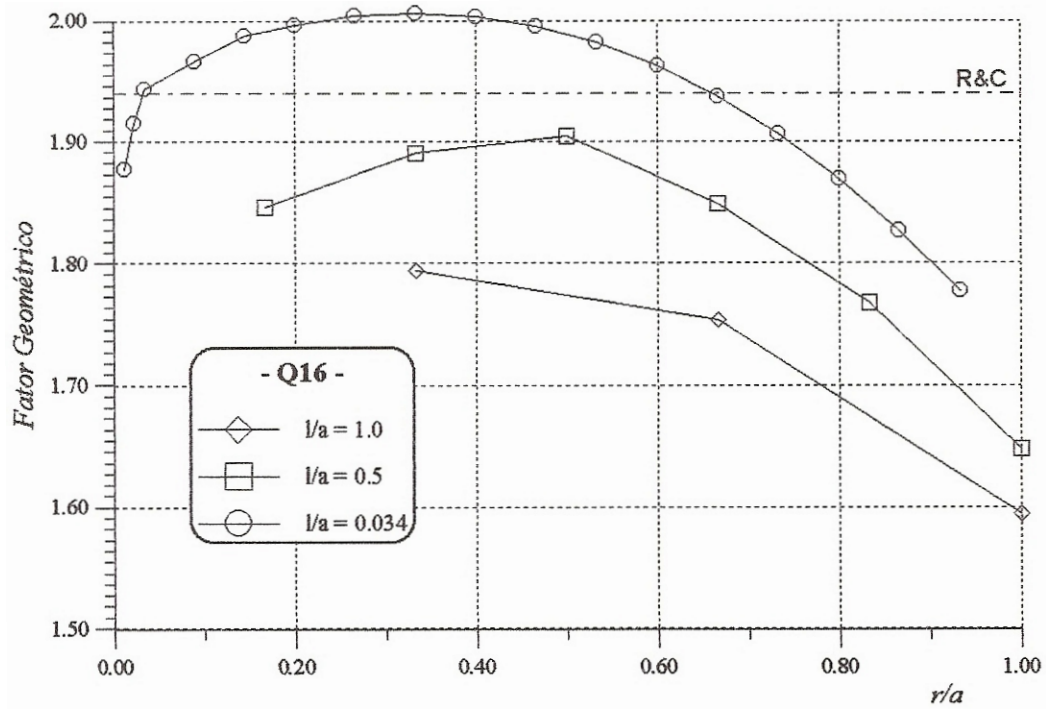


Figura 3.23: Convergência  $h$  para o elemento lagrangeano cúbico.

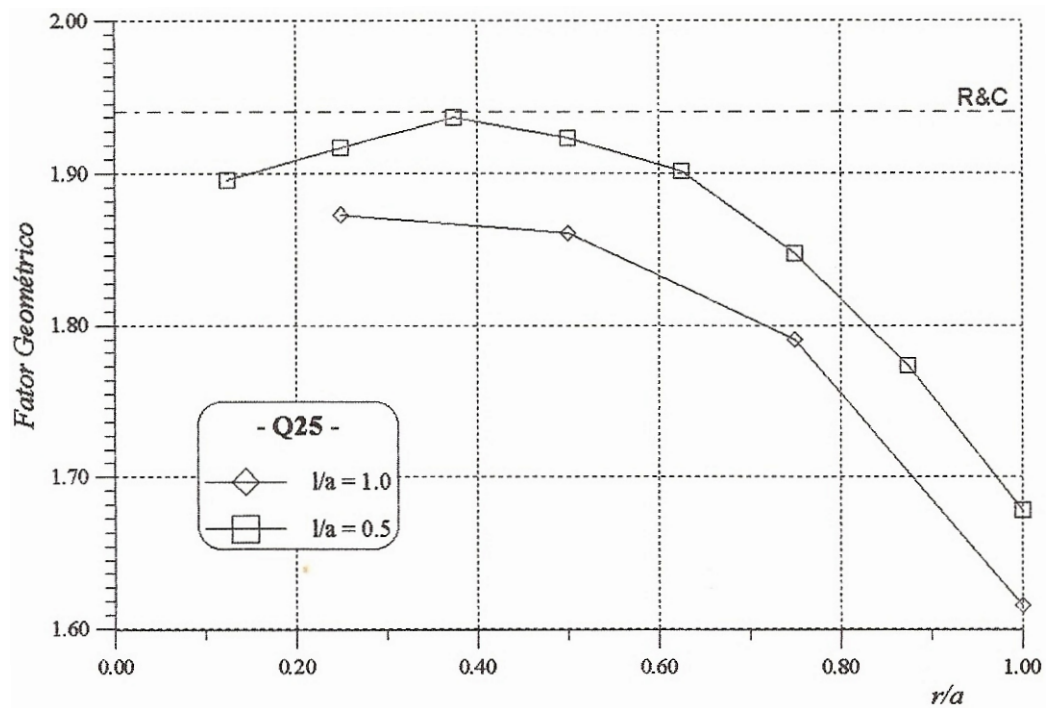


Figura 3.24: Convergência  $h$  para o elemento lagrangeano quártico.

Na Figura 3.16 são apresentadas as malhas, para o domínio e o contorno, da discretização linear com apenas uma redução, caso  $l/a = 0,034$ . Para o caso  $l/a = 0,008$  são usadas duas reduções. Nas convergências dos elementos lagrangeanos de nove e dezesseis nós há uma tendência das curvas, em torno de  $r/a = 0,5$ ; dos resultados se sobressaírem à solução fornecida por Rooke e Cartwright [78] (R&C), mas próximos ao extremo da trinca estes são melhorados, facilitando uma estimativa para o fator de intensidade de tensão.

### 3.5.2 Convergência $p$

Da mesma forma, mas agora aplicando o refino  $p$ , são obtidos os gráficos das Figuras 3.25 e 3.26 onde, novamente, apenas o caso um é analisado com malhas de domínio tendo dois e oito elementos quadrangulares ou 4 e 16 triangulares, isto é, com  $l/a$  valendo 0,5 e 0,25. A ordem de interpolação é variada de linear ( $p = 1$ ) à sexta ordem ( $p = 6$ ).

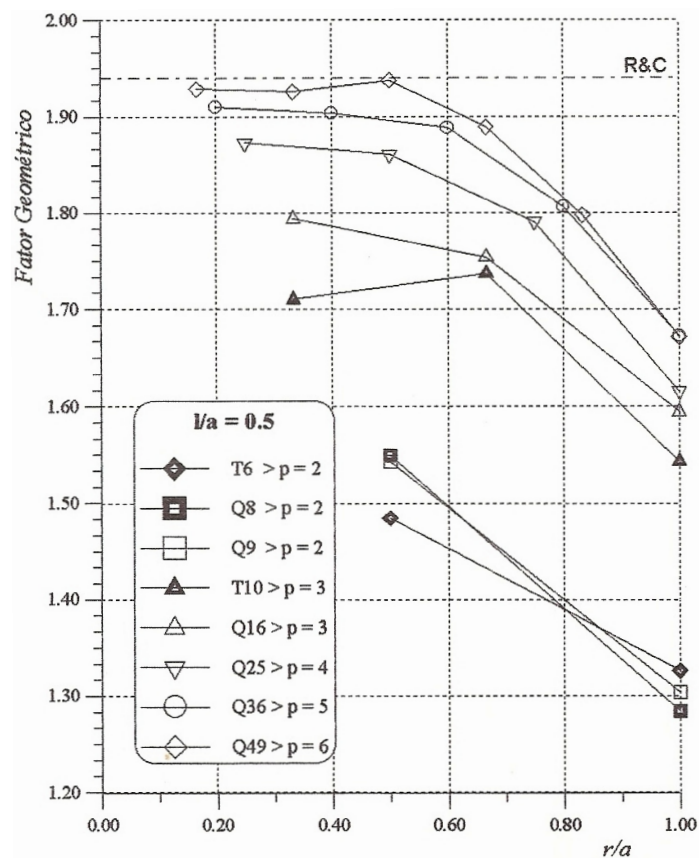


Figura 3.25: Convergência  $p$  com 2 elementos finitos.

Nos gráficos, mais uma vez os elementos quadrangulares se mostram superiores aos triangulares, principalmente na interpolação linear. Entre os elementos quadráticos o elemento lagrangeano se mostra superior ao serendipity. A malha com  $p = 6$  e  $l/a = 0,5$  fornece resultado melhor que as malhas  $p = 3$  e  $l/a = 0,25$ ; apesar de possuírem o mesmo número de graus de liberdade, sugerindo que o refino  $p$  é melhor que o  $h$ .

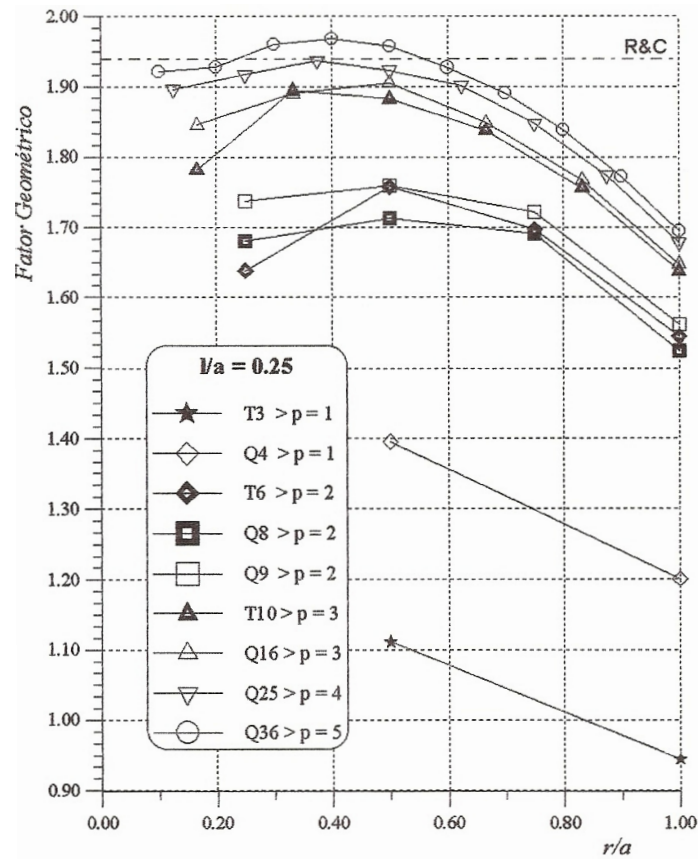


Figura 3.26: Convergência  $p$  com 8 elementos finitos.





## Capítulo 4

# Elementos Especiais

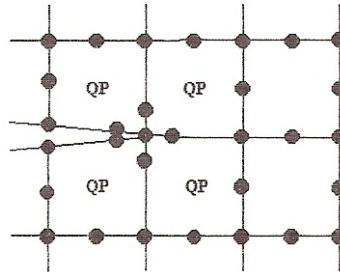
No capítulo anterior o MFGLM mostrou ser capaz de resolver problemas da mecânica da fratura elástica. Neste capítulo são implementados ao método alguns elementos especiais para corpos com trinca, posicionados no extremo da trinca, esses elementos são de uso corrente no MEF e no MEC e têm como objetivo simular a singularidade de tensão que ocorre, representando melhor o problema. Assim, se no capítulo anterior o âmbito do trabalho é genérico dentro do MFGLM, os desenvolvimentos aqui apresentados são específicos para casos singulares, particularmente os da MFEL bidimensional.

### 4.1 *Quarter-Point*

O primeiro elemento de trinca apresentado, e o mais simples, é o elemento *quarter-point* que recebeu vários aprimoramentos, primeiro no MEF e em seguida também no MEC. Uma revisão histórica sobre este elemento é encontrada a seguir.

Henshell e Shaw [46] e Barsourn [15] demonstraram, independentemente, que a singularidade  $(1/r)^{1/2}$  da teoria da MFEL pode ser obtida, no elemento serendipity de oito nós (Q8), alterando as posições dos nós, centrais aos lados concorrentes no nó singular, para um quarto do comprimento desses lados, na direção da singularidade. A Figura 4.1 mostra como se dá essa alteração. Barsourn mostrou ainda que esse elemento degenerado, elemento *quarter-point*, inclui as condições de deformação constante e deslocamento de corpo rígido, o que não ocorre em muitos elementos especiais,

e que não tem problema quanto à compatibilidade entre elementos e continuidade de deslocamentos. Dessa forma o elemento *quarter-point* satisfaz as condições de convergência, passando num *patch-test* (Cook [28]).



**Figura 4.1:** Malha com elementos *quarter-point*.

Em seu trabalho original, Barsoum [14] mostrou que o elemento triangular, formado pelo colapso dos nós no elemento quadrangular Q8, fornece resultados melhores como elemento degenerado que o próprio elemento quadrangular. Freese e Tracey [41] mostraram que o elemento triangular natural (T6) traz resultados similares ao colapsado, porém se o lado oposto à singularidade é curvo o resultado, utilizando o elemento colapsado, é bastante prejudicado, enquanto que se usado o elemento triangular natural T6 esse problema inexistente. Essa variação ocorre, segundo Newton [70], porque o elemento colapsado não se transforma exatamente num elemento triangular.

Uma explicação sobre porque o elemento triangular fornece melhores resultados que o quadrangular foi dada por Hibbitt [49], o qual concluiu que a energia de deformação de um elemento *quarter-point* quadrangular é singular de  $O[\ln r]_0^1$ , enquanto o triangular possui energia de deformação de  $O[r]_0^1$ . Mais tarde, Ying [97] mostrou que as conclusões dadas por Hibbitt estão erradas e que a singularidade mencionada ocorre apenas no contorno e em sua diagonal. Ying também apresentou uma razoável influência sobre o erro quando os nós, deslocados a um quarto, sofrem erro no seu posicionamento. Dá-se início a uma vasta discussão e Barsoum [16] demonstrou que as diferenças, entre o elemento singular colapsado e o quadrangular, se dão pelo fato de que uma reta radial no elemento quadrangular se transforma em uma curva de segundo grau quando é mapeado nas coordenadas naturais, e para o elemento colapsado a linha permanece linear. Barsoum mostrou, ainda, que o erro na determinação do fator de intensidade de tensão, devido a um erro no posicionamento dos nós, é muito menor que o erro oriundo da discretização. Assim a localização do nó a um quarto não é crucial, como

havia concluído Ying [97].

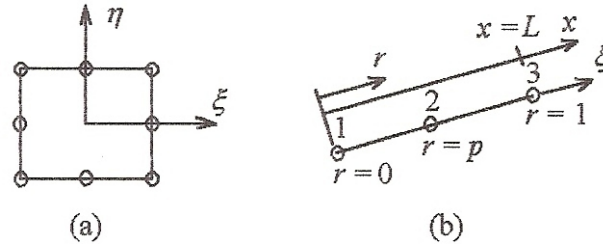
Pu *et al.* [77] propuseram uma extensão do elemento *quarter-point* quadrático ao elemento degenerado cúbico. Uma extensão do conceito a um número variável de nós foi dada por Yamada *et al.* [96] e essa generalização do elemento singular, onde a variação entre um quarto e um meio da posição do nó, possibilita a variação na localização da singularidade, chegou-se ao elemento de transição, usado em conjunto e logo após o elemento singular, aumentando a região na discretização que incorpora a singularidade (Lynn e Ingraflea [62]). Os elementos de transição se mostraram importantes quando o tamanho do elemento singular é muito pequeno em relação ao tamanho da trinca. Hussain *et al.* [53] estenderam o elemento de transição quadrático ao cúbico.

Várias tentativas de definir qual o tamanho ideal para o elemento singular *quarter-point*, ou como o utilizar melhor, surgiram. Harrop [47] discutiu qual o tamanho ideal para o elemento e indicou que um elemento muito grande não pode representar uma variação de tensão não-linear na estrutura, em contra partida, se for muito pequeno a região da malha que representa a singularidade da tensão também é muito pequena, mesmo utilizando elementos de transição. Harrop concluiu que existe um tamanho ideal para cada caso, mas que é impossível recomendar um tamanho particular ao elemento de trinca adequado a todas as situações.

#### 4.1.1 Elemento *Quarter-Point* Quadrático

Uma demonstração de como se pode chegar ao valor de um quarto para a posição dos nós é fornecida a seguir, esta é baseada no trabalho de Henshell e Shaw [46], onde a idéia de deslocar os nós para captar a singularidade é aplicada sobre o elemento isoparamétrico quadrático da família serendipity, elemento de domínio (Figura 4.2a). Por comodidade, somente um dos lados é analisado, isto é, um elemento unidimensional, que no MFGLM corresponde ao elemento para a discretização do contorno.

O elemento mostrado na Figura 4.2b tem os nós nas posições  $\xi = -1, 0, +1$ , para as coordenadas naturais, e  $r = 0, p, 1$  nas coordenadas globais, onde  $x = r - L$ , sendo  $L$  o comprimento do elemento. Dessa forma,  $p = 0,5$  corresponde ao elemento sem distorções. Do elemento se obtém as



**Figura 4.2:** Elementos utilizados: (a) elemento serendipity para o domínio e (b) elemento quadrático para o contorno.

relações

$$r(\xi) = a_1 + a_2\xi + a_3\xi^2 \quad \text{e} \quad u(\xi) = b_1 + b_2\xi + b_3\xi^2 \quad (4.1)$$

onde  $a_i$  e  $b_i$  são constantes, obtidas da substituição dos valores nodais de  $r$  e  $u$  nestas equações. Assim, chega-se para  $r$  na equação

$$(1 - 2p)\xi^2 + \xi + 2(p - r) = 0 \quad (4.2)$$

que resolvendo para  $\xi$ , como uma função de  $r$ , vem

$$\xi(r) = \frac{-1 \pm \sqrt{(1 - 4p)^2 + 8(1 - 2p)r}}{2(1 - 2p)} \quad (4.3)$$

Considerando a raiz positiva como a correta (Henshell e Shaw [46]), a derivada de  $\xi$  em relação a  $r$  fica:

$$\frac{d\xi}{dr} = \frac{2}{\sqrt{(1 - 4p)^2 + 8(1 - 2p)r}} \quad (4.4)$$

que é singular quando o denominador é nulo, ou seja, quando

$$(1 - 4p)^2 + 8(1 - 2p)r = 0 \quad (4.5)$$

Admitindo que a singularidade ocorre em  $r = 0$ , isto é, que o nó um esteja no extremo da trinca, o termo linear em  $p$  na equação (4.5) pode ser eliminado e a parte restante tem como raízes

o valor  $\frac{1}{4}$ . Então, o valor de  $p$  para o qual a equação (4.5) seja satisfeita e, conseqüentemente, o elemento possua singularidade no nó um, é  $\frac{1}{4}$ . As expressões para  $\xi$  e  $\frac{d\xi}{dr}$  ficam

$$\xi(r) = 2\sqrt{r} - 1 \quad \text{e} \quad \frac{d\xi}{dr} = \frac{1}{\sqrt{r}} \quad (4.6)$$

A equação para os deslocamentos pode ser obtida em função de  $r$  com a determinação das constantes  $b_i$ , em (4.1), substituindo os valores nodais de  $u$ ,

$$u(r) = (1 - 3\sqrt{r} + 2r) u_1 + 4(\sqrt{r} - r) u_2 + (2r - \sqrt{r}) u_3 \quad (4.7)$$

A singularidade mencionada está se referindo às tensões nominais próximas ao extremo da trinca, estas são proporcionais às deformações, que no caso unidimensional são fornecidas pela expressão

$$\frac{du}{dr} = \left(2 - \frac{3}{2\sqrt{r}}\right) u_1 + 4\left(\frac{1}{2\sqrt{r}} - 1\right) u_2 + \left(2 - \frac{1}{2\sqrt{r}}\right) u_3 \quad (4.8)$$

que mostra que há a singularidade desejada,  $(1/r)^{1/2}$ . Assim, basta que quando se desejar trabalhar com singularidades deste tipo os nós centrais dos lados sejam posicionados a 1/4 do comprimento do elemento, na direção da singularidade. É importante notar que não é necessária nenhuma implementação numérica extra, e podem ser utilizadas as rotinas normais do elemento, mudando apenas as malhas, como na Figura 4.1.

Barsoum (1976) demonstrou que para ocorrer a singularidade na tensão, em uma formulação comum de elementos finitos, esta deve ocorrer também na deformação e chega à conclusão de que a matriz inversa do Jacobiano da transformação, mapeamento isoparamétrico, deve ser singular no nó que contém o extremo da trinca, isto é, o determinante do Jacobiano se anula neste ponto. No caso unidimensional significa que  $\frac{dx}{d\xi} = 0$  no nó um, e lembrando que  $r = \frac{x}{L}$ , o Jacobiano fica definido, de acordo com a equação (4.6), como

$$\frac{dx}{d\xi} = \sqrt{\frac{x}{L}} \quad (4.9)$$

nulo em  $x = 0$ . Essa teoria pode ser transferida para o elemento finito triangular, colapsado ou natural, fornecendo resultados exatamente iguais.

No MEC as funções de interpolação para os deslocamentos e tensões podem ser diferentes, elementos não isoparamétricos. Martinez e Domingues [68] sugeriram uma modificação nas funções de interpolação de tração, transformando-as em funções singulares, esses elementos são chamados de elementos singulares *quarter-point* de tração.

Neste trabalho, é testado também um elemento singular que não é obtido do elemento serendipity, mas do elemento lagrangeano de nove nós colapsado, já que este também satisfaz, radialmente, as condições acima.

#### 4.1.2 Elemento *Quarter-Point* Generalizado

A relação de  $r$  com a coordenada natural  $\xi$ , em elementos unidimensionais não degenerados, é sempre a mesma não dependendo da ordem do elemento. Essa relação é facilmente obtida, para um elemento de  $n$  nós, de

$$x = \sum_{i=1}^n \phi_i(\xi) x_i \quad (4.10)$$

Substituindo  $x$  por  $r$ , com os devidos valores nodais ( $0 \leq r_i \leq 1$ ), chega-se ao mapeamento:

$$r(\xi) = \frac{1 + \xi}{2} \quad (4.11)$$

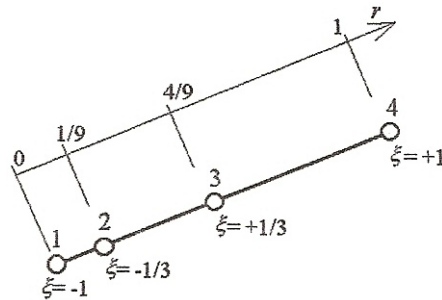
Então, para que o campo de deslocamentos tenha variação  $r^{1/2}$ , como em (4.7),  $r$  é substituído por  $r^{1/2}$  e o mapeamento se transforma em

$$r(\xi) = \left( \frac{1 + \xi}{2} \right)^2 \quad (4.12)$$

que é idêntica à primeira das equações em (4.6), valendo para qualquer ordem de interpolação. Dessa forma, a equação (4.12) pode fornecer as posições nodais reais, como exemplo, no caso quadrático os nós têm as coordenadas naturais  $\xi = -1, 0, 1$  que correspondem às coordenadas reais  $r = 0, \frac{1}{4}, 1$  do

elemento singular.

Para o elemento cúbico as posições naturais são  $\xi = -1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1$  e correspondem a  $r = 0, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, 1$  conforme a Figura 4.3.



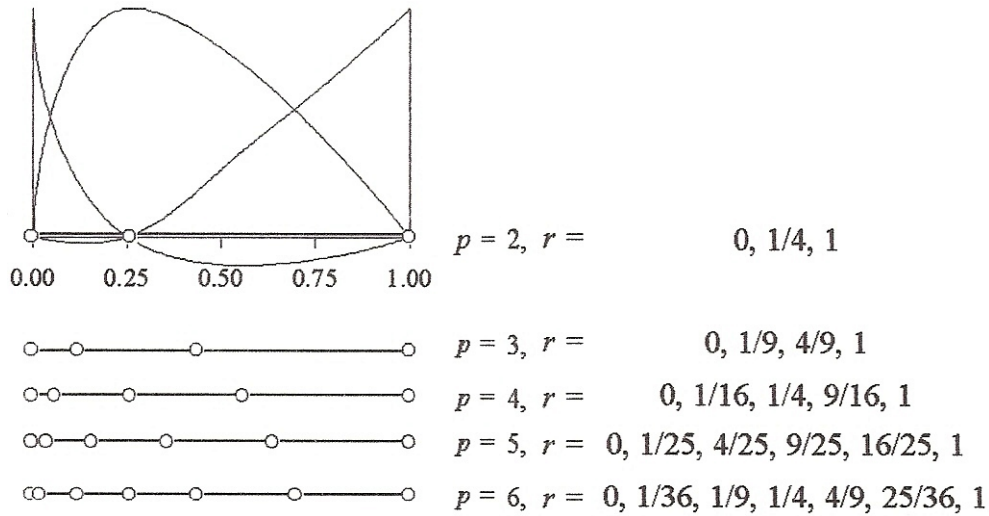
**Figura 4.3:** Elemento *quarter-point* cúbico.

Assim, com a expressão (4.12), o conceito utilizado na formulação do elemento *quarter-point* pode ser expandido para qualquer ordem dos elementos da família serendipity (Yamada *et al.* [96]), valendo as considerações feitas anteriormente para o elemento quadrático. Mas aqui são, também, testados elementos singulares degenerados provenientes dos elementos lagrangeanos, colapsados, pois radialmente a formulação anterior é satisfeita.

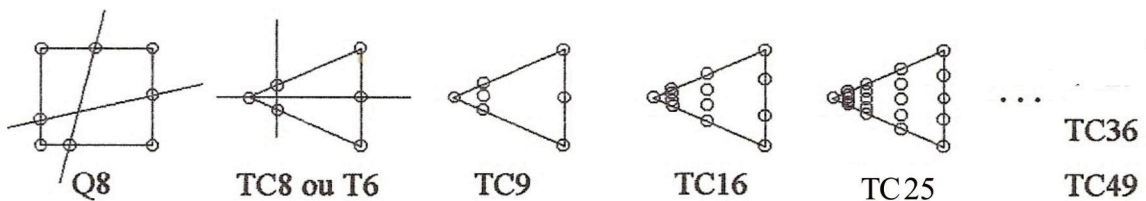
### 4.1.3 Resultados Numéricos

Baseando-se no primeiro caso teste do capítulo três, são apresentados alguns resultados numéricos utilizando os elementos singulares das Figuras 4.4 e 4.5, a primeira Figura mostra os elementos de contorno *quarter-point* utilizados, com as funções de interpolação para o elemento quadrático de variação  $r^{1/2}$ .

A Figura 4.5 mostra os elementos finitos singulares com a nomenclatura usada para a identificação destes, onde TC significa que o elemento triangular vem do colapso de um quadrangular. A identificação da posição dos nós foi feita com a equação (4.12), e todas as posições necessárias para os elementos singulares estão na Figura 4.4, posições radiais dos nós para determinado elemento de ordem  $p$ .



**Figura 4.4:** Elementos *quarter-point* para o contorno.



**Figura 4.5:** Elementos finitos singulares.

Na solução numérica, apresentada nos gráficos das Figuras 4.6 e 4.7, foram levadas em consideração as recomendações dadas por Saouma e Schwemmer [79], quanto ao uso do elemento *quarter-point* quadrático como um elemento finito especial. São estas:

1. Usar integração numérica reduzida ( $2 \times 2$ );
2. Usar quatro elementos singulares ao redor do extremo da trinca, quando é considerada a simetria nos casos puramente do modo  $I$ ;
3. Elementos de transição são válidos apenas em malhas com  $l/a$  muito pequeno;
4. O uso da malha fina,  $l/a \ll 1$ , não traz grandes melhoras se a distribuição de tensão for uniforme;
5. Os ângulos dos elementos em torno do extremo da trinca devem ser de  $45^\circ$  (Figura 4.7).



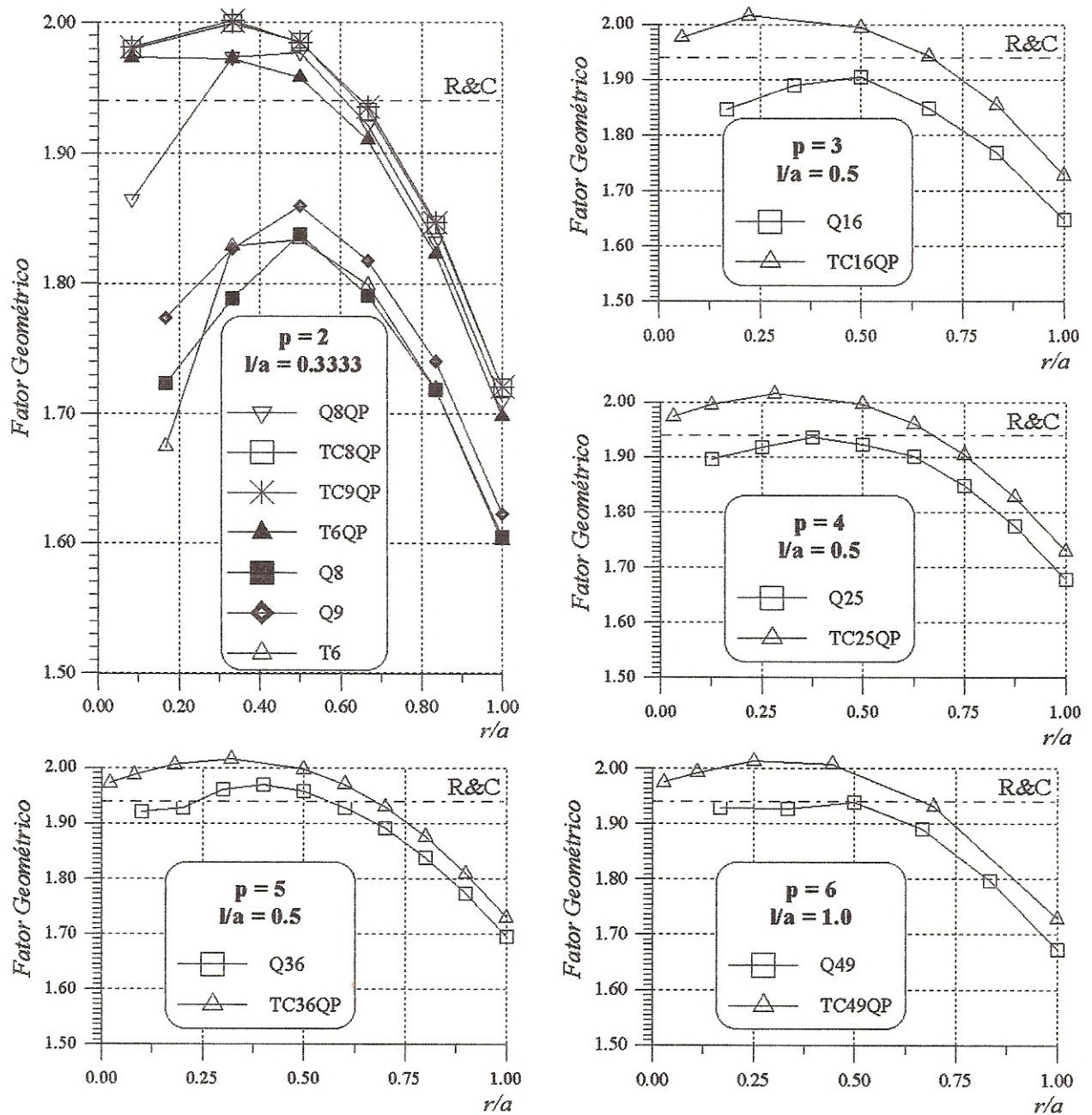
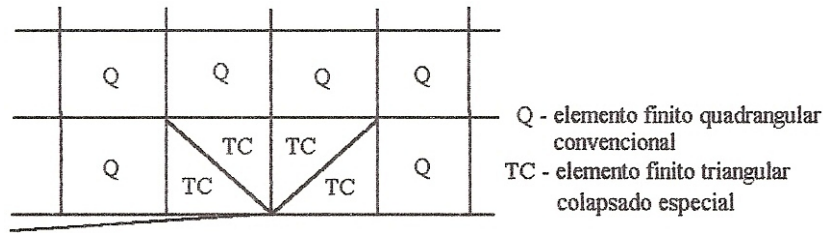


Figura 4.6: Resultados com elementos singulares *quarter-point*.

As discretizações usadas para a aproximação são regulares, com elementos de mesmas dimensões. Quando os elementos finitos singulares são os triangulares, obtidos pelo colapso dos nós, a malha de domínio toma a forma da Figura 4.7 na região singular.

A utilização de elementos degenerados oferece uma variação mais vantajosa quando o refino é menor, isso é visível nos resultados da Figura 4.6, onde os resultados em  $p = 2$  sofrem uma melhora



**Figura 4.7:** Malha de finitos com elementos colapsados.

muito mais evidente que em  $p = 5$ , que é a malha mais refinada. Também, os elementos *quarter-point* de maior ordem oferecem pequena vantagem porque os resultados com os elementos convencionais já são bons.

No primeiro gráfico da Figura 4.6 é possível uma comparação entre os diversos elementos degenerados. Neste é comprovada a aplicação da técnica do elemento *quarter-point* sobre elementos lagrangeanos, pois os resultados obtidos com o elemento colapsado de oito e nove nós praticamente coincidem. Também fica comprovado que os elementos *quarter-point* triangulares são melhores que os quadrangulares. Surpreendentemente, os resultados obtidos com o MEF e o MFGLM quando utilizado o elemento *quarter-point* colapsado coincidiram, entretanto, o MFGLM ainda pode fazer uso do elemento de contorno *quarter-point* de tração, comentado anteriormente, melhorando o resultado.

Uma estimativa para o fator intensidade de tensão pode ser obtida com a extrapolação dos gráficos da Figura 4.6, como já havia sido comentado no capítulo anterior. Mas, com o elemento *quarter-point*, essa extrapolação pode ser local, no próprio elemento singular, como mostram Martinez e Domingues [68]. Então, sabe-se que o fator  $K$  pode ser calculado, com o método dos deslocamentos, por (2.125),

$$K_I^i = \frac{u_{y_i} G}{1 - \nu} \sqrt{\frac{\pi}{2\rho_i}} \quad (4.13)$$

onde  $\rho_i$  é a distância do nó  $i$  ao extremo da trinca, esta distância é real e não adimensionalizada como  $r$  na Figura 4.2. Então, deixando a equação (4.7) em função de  $\rho = rL$ , vem

$$u(\rho) = \left(1 - 3\sqrt{\frac{\rho}{L}} + 2\frac{\rho}{L}\right) u_1 + 4\left(\sqrt{\frac{\rho}{L}} - \frac{\rho}{L}\right) u_2 + \left(2\frac{\rho}{L} - \sqrt{\frac{\rho}{L}}\right) u_3 \quad (4.14)$$

que quando substituídos nesta os valores nodais dos deslocamentos ( $u_i$ ), considerando o problema

simétrico da Figura 4.8, onde  $u_k$  é nulo, toma a forma

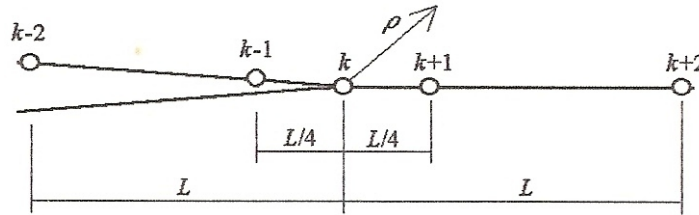
$$u(\rho) = (4u_{k-1} - u_{k-2}) \sqrt{\frac{\rho}{L}} + (-4u_{k-1} + 2u_{k-2}) \frac{\rho}{L} \quad (4.15)$$

que levado à equação (4.13), o fator de intensidade de tensão pode ser calculado por

$$K_I = \frac{G}{1-\nu} \sqrt{\frac{\pi}{2L}} [(4u_{y_{k-1}} - u_{y_{k-2}}) + (-4u_{y_{k-1}} + 2u_{y_{k-2}}) \sqrt{\rho}] \quad (4.16)$$

A expressão (4.16), na forma como está apresentada, ainda depende da posição radial, entretanto, o cálculo de  $K_I$  é válido apenas para uma região muito próxima da trinca e, assim,  $\sqrt{\rho}$  pode ser substituído por zero, obtendo um valor único para o fator intensidade de tensão, calculado por

$$K_I = \frac{G}{1-\nu} \sqrt{\frac{\pi}{2L}} (4u_{y_{k-1}} - u_{y_{k-2}}) \quad (4.17)$$



**Figura 4.8:** Discretização do contorno, próximo ao extremo da trinca.

A Tabela 4.1 apresenta alguns resultados para o fator geométrico, do gráfico  $p = 2$  na Figura 4.6, obtidos com esta extrapolação local. O desenvolvimento acima é particular para a interpolação quadrática, como em Martinez e Domingues [68], mas algo semelhante pode ser criado para outras ordens de interpolação.

**Tabela 4.1:** Extrapolação por dois pontos de deslocamento.

Elemento	$Y_{\text{Extrap}}$	erro (%)
Q8QP	1,7557	-9,4992
TC8QP	1,9593	0,9923
TC9QP	1,9606	1,0615
T6QP	1,9739	1,7499

A superioridade dos elementos singulares triangulares é novamente comprovada e o ele-

mento lagrangeano degenerado é 0,07% menos preciso que o serendipity. A malha com elementos triangulares naturais ofereceu uma extrapolação um pouco pior que os colapsados, provavelmente porque o elemento triangular convencional tem precisão inferior ao quadrangular.

## 4.2 Família de Elementos de Akin

Foi apresentada uma forma de se representar a singularidade de tensão, nas proximidades do extremo de uma trinca, sem alterar as funções de interpolação dos elementos. A maioria dos elementos propostos com este objetivo fazem uso de funções de interpolação especiais, como a família de elementos singulares desenvolvida por Akin [1]. Nesta família as funções de interpolação especiais são obtidas alterando as funções de interpolação de elementos comuns, utilizando a potência  $W^\lambda$ , sendo  $W(\zeta, \eta)$  uma função local, como é demonstrado a seguir. Uma característica importante nestes elementos definidos por Akin é que a singularidade, de tensão e deformação, incorporada por estes não é necessariamente  $r^{-1/2}$  mas  $r^\lambda$ , com  $0 < \lambda < 1$ . Esta característica possibilitou o uso dessa família na solução, entre outras, de problemas da mecânica da fratura elastoplástica (Oliveira e Kaiser [72]).

### 4.2.1 Formulação dos Elementos Singulares

A técnica proposta por Akin [1] para a construção de elementos singulares de qualquer ordem, com singularidade arbitrária de  $O(r^{-\lambda})$ , em qualquer nó do elemento, é aplicada sobre elementos convencionais do MEF, cujas funções de interpolação  $\Psi_i$  satisfazem as condições

$$\Psi_i(\zeta_j, \eta_j) = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n \Psi_i(\zeta_j, \eta_j) = 1 \quad (4.18)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker,  $n$  é o número de nós do elemento e o índice  $j$ , na primeira das equações, está se referindo ao nó que a função está sendo avaliada. Diferenciando a segunda equação em relação às coordenadas locais, são encontradas as seguintes condições adicionais:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Psi_i(\zeta, \eta)}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Psi_i(\zeta, \eta)}{\partial \eta} = 0 \quad (4.19)$$

que podem ser utilizadas na verificação numérica das sub-rotinas que calculam as funções de interpolação e suas derivadas. Esta verificação também pode ser usada na implementação dos elementos da família de Akin, pois as funções de interpolação destes também satisfazem as condições acima (Carey e Oden [26]), como pode ser observado facilmente à frente.

Então, considerando um elemento finito plano qualquer que satisfaz as condições mencionadas e, apenas para facilitar a compreensão, que a origem do sistema de coordenadas local esteja no nó singular e, ainda, admitindo que este nó singular é o nó um, é introduzida a função local  $W(\xi, \eta)$ , definida sobre o elemento por

$$W(\xi, \eta) = 1 - \Psi_1(\xi, \eta) \quad (4.20)$$

de onde é fácil observar que a função  $W$  é nula no nó um e unitária em todos os outros nós, ou seja,

$$W(\xi_j, \eta_j) = 1 - \delta_{1j} \quad (4.21)$$

Defini-se, para um dado  $\lambda$ , uma função positiva  $R(\xi, \eta)$  como

$$R(\xi, \eta) = [W(\xi, \eta)]^\lambda \quad (4.22)$$

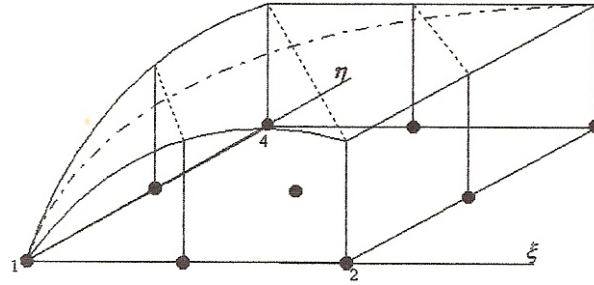
que, da mesma forma que  $W$ , é nula no nó que contém a origem e unitária nos outros nós. De uma forma mais genérica  $R \equiv 1$  em todos os lados do elemento que não contenham o nó singular, veja a Figura 4.9. As funções de interpolação especiais de Akin ( $\zeta_i$ ) são finalmente definidas, sobre o elemento com  $n$  nós, por

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \zeta_i(\xi, \eta) u_i \quad (4.23)$$

onde as  $n$  funções  $\zeta_i$  vem de

$$\zeta_1(\xi, \eta) = 1 - \frac{W(\xi, \eta)}{R(\xi, \eta)} \quad \text{e} \quad \zeta_j(\xi, \eta) = 1 - \frac{W_j(\xi, \eta)}{R(\xi, \eta)}, \quad 2 \leq j \leq n \quad (4.24)$$

Devido às características da função  $R$ , as novas funções de interpolação obtidas por (4.24)



**Figura 4.9:** Função  $R(\xi, \eta)$  para o elemento lagrangeano quadrático,  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

também satisfazem às condições (4.18) e, ainda, a variação dos deslocamentos não é alterado nos lados do elemento que não contém o nó singular. Assim um campo de interpolação compatível é obtido se o nó singular for rodeado por elementos singulares, e estes pelos elementos convencionais, que serviram como origem para a criação do elemento de Akin.

Na maioria dos casos da MFEL o parâmetro  $\lambda$  pode assumir o valor  $1/2$  e o cálculo da primeira função de interpolação  $\zeta_1$  é simplificado,

$$\zeta_1(\xi, \eta) = 1 - R(\xi, \eta) \quad (4.25)$$

Esta teoria proposta por Akin para o MEF, quando é implementada no MFGLM exige que elementos de contorno que sejam o traço dos elementos finitos, isto não é problema pois os elementos de contorno, como apresentados no capítulo anterior, também satisfazem as condições (4.18) e a teoria pode ser aplicada sobre estes, que se forem o traço dos elementos finitos convencionais fornecerão elementos de contorno singulares que são o traço dos elementos finitos singulares.

O cálculo das funções de interpolação singulares numericamente é simples e pode ser generalizado, para qualquer ordem de interpolação, com as equações (4.24). As derivas também possuem esta facilidade numérica, com as expressões

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi} = (1 - \lambda) \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} W^{-\lambda} \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \zeta_j}{\partial \xi} = \frac{\partial \Psi_j}{\partial \xi} W^{-\lambda} + \lambda \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} \Psi_j W^{-(1+\lambda)}, \quad 2 \leq j \leq n \quad (4.27)$$

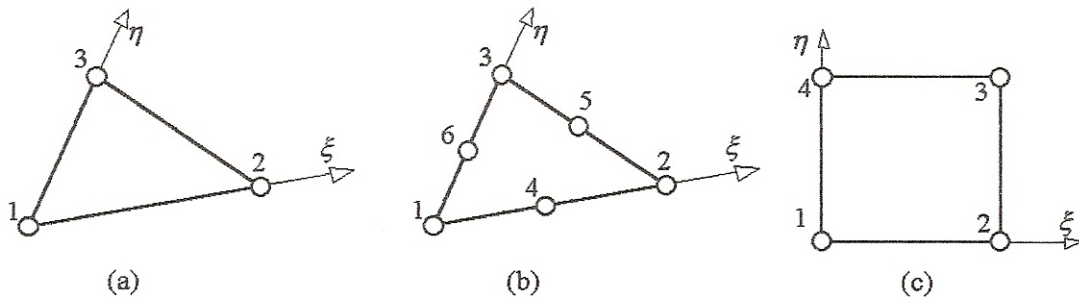
onde  $\xi$  representa qualquer coordenada natural,  $\xi$  ou  $\eta$  para o elemento plano.

Para a MFEL ( $\lambda = \frac{1}{2}$ ) o cálculo das derivadas também é simplificado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \bar{\xi}} &= \frac{1}{2R} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{\xi}} \\ \frac{\partial \zeta_j}{\partial \bar{\xi}} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi_j}{\partial \bar{\xi}} + \frac{W_j}{W} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{\xi}}, \quad 2 \leq j \leq n \end{aligned} \quad (4.28)$$

### 4.2.2 Exemplos

Alguns elementos singulares obtidos com a técnica apresentada são mostrados a seguir, sendo que a extensão para outros é facilmente obtida e pode ser realizada numericamente. Para a construção dos elementos foi considerado  $\lambda = 1/2$  e, como exemplos, tem-se os elementos finitos triangulares, linear e quadrático, e o quadrangular linear com os seus respectivos elementos de contorno, veja Figura 4.10.



**Figura 4.10:** Elementos triangular linear (a), quadrático (b) e quadrangular linear (c).

Para o elemento triangular linear as funções de interpolação de Akin obtidas são:

$$\zeta_1 = 1 - \sqrt{\bar{\xi} + \eta}, \quad \zeta_2 = \frac{\bar{\xi}}{\sqrt{\bar{\xi} + \eta}} \quad \text{e} \quad \zeta_3 = \frac{\eta}{\sqrt{\bar{\xi} + \eta}} \quad (4.29)$$

e o campo de deslocamentos é fornecido por

$$u(\bar{\xi}, \eta) = u_1 - (u_2 - u_1) \frac{\bar{\xi}}{\sqrt{\bar{\xi} + \eta}} + (u_3 - u_1) \frac{\eta}{\sqrt{\bar{\xi} + \eta}} \quad (4.30)$$

Ao longo de qualquer linha radial, com origem no nó um, é possível relacionar as coordena-

nadas naturais com a coordenada polar global  $r$ ,

$$\xi = ar \quad \text{e} \quad \eta = br \quad (4.31)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes reais e  $r$  é a distância à origem, o raio do sistema polar. Dessa forma,

$$u[\xi(r), \eta(r)] = u_1 + (a + b)^{-\frac{1}{2}} [(u_2 - u_1)a + (u_3 - u_1)b] r^{\frac{1}{2}} \quad (4.32)$$

ou, de forma esquemática,

$$u(r) = u_1 + C r^{\frac{1}{2}} \quad (4.33)$$

onde  $C$  é uma constante. Então, a derivada do deslocamento em relação ao raio fica

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{2} C r^{-\frac{1}{2}} \quad (4.34)$$

Assim este elemento possui deslocamento linear entre os nós 2 e 3 e ao longo dos lados 1-2 e 2-3 o deslocamento varia com  $r^{1/2}$ , e as derivadas do deslocamento com  $r^{-1/2}$ , singulares em  $r = 0$ , nó um. Entretanto, este elemento não possui possibilidade de deformação linear e, portanto, sua convergência não pode ser garantida (Zienkiewicz [98]), assim como o elemento não passa no *patch-test*.

As funções de interpolação especiais para o contorno ( $\zeta_i$ ) podem ser obtidas aplicando a técnica apresentada sobre o elemento de contorno linear, ou simplesmente anulando uma coordenada natural ( $\zeta \xrightarrow{\text{traço}} \zeta$ ), por exemplo  $\eta$ :

$$\zeta_1(\xi) = 1 - \sqrt{\xi} \quad \text{e} \quad \zeta_2(\xi) = \sqrt{\xi} \quad (4.35)$$

Para o elemento quadrangular, Figura 4.10c, as funções de interpolação singulares são

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= 1 - (\xi + \eta - \xi\eta)^{\frac{1}{2}} & \zeta_2 &= \xi(1 - \eta)(\xi + \eta - \xi\eta)^{-\frac{1}{2}} \\ \zeta_3 &= \xi\eta(\xi + \eta - \xi\eta)^{-\frac{1}{2}} & \zeta_4 &= \eta(1 - \eta)(\xi + \eta - \xi\eta)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.36)$$



e as funções para o contorno são as mesmas do triangular linear em (4.35). Para o elemento triangular quadrático, Figura 4.10b, as funções para o domínio e o contorno são

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= 1 - [3(\xi + \eta) - 2(\xi + \eta)^2]^{\frac{1}{2}} & \zeta_2 &= \xi(2\xi - 1) [3(\xi + \eta) - 2(\xi + \eta)^2]^{-\frac{1}{2}} \\
\zeta_3 &= \eta(2\eta - 1) [3(\xi + \eta) - 2(\xi + \eta)^2]^{-\frac{1}{2}} & \zeta_4 &= 4\xi(1 - \xi - \eta) [3(\xi + \eta) - 2(\xi + \eta)^2]^{-\frac{1}{2}} \\
\zeta_5 &= 4\xi\eta [3(\xi + \eta) - 2(\xi + \eta)^2]^{-\frac{1}{2}} & \zeta_6 &= 4\eta(1 - \xi - \eta) [3(\xi + \eta) - 2(\xi + \eta)^2]^{-\frac{1}{2}} \\
\varsigma_1 &= 1 - [\xi(3 - 2\xi)]^{\frac{1}{2}} & \varsigma_2 &= 4\xi(1 - \xi) [\xi(3 - 2\xi)]^{-\frac{1}{2}} & \varsigma_3 &= \xi(2\xi - 1) [\xi(3 - 2\xi)]^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

No elemento quadrático o deslocamento varia, nos lados que contém a origem, com  $(\frac{r}{3-2r})^{\frac{1}{2}}$  e  $(\frac{r^2}{3-2r})^{\frac{1}{2}}$ . A Tabela 4.2 mostra os campos de deslocamento em função das coordenadas naturais, nesta é fácil ver que o campo de deslocamentos só é alterado radialmente, isto é, nos lados que não contém a singularidade os campos originais são mantidos, e é devido a isto que os elementos de Akin não têm problemas de compatibilidade.

**Tabela 4.2:** Deslocamentos nas bordas dos elementos.

Elemento	Lado	$u(\xi, \eta)$
Triangular linear	1 - 2	$u_1 + (u_2 - u_1)\sqrt{\xi}$
	1 - 3	$u_1 + (u_3 - u_1)\sqrt{\eta}$
	2 - 3	$u_3 + (u_2 - u_3)\xi$
Quadrangular linear	1 - 2	$u_1 + (u_2 - u_1)\sqrt{\xi}$
	1 - 4	$u_1 + (u_4 - u_1)\sqrt{\eta}$
	2 - 3	$u_2 + (u_3 - u_2)\eta$
	3 - 4	$u_4 + (u_3 - u_4)\xi$
Triang. quadrático	1 - 4 - 2	$u_1 + (-3u_1 - u_2 + 4u_4)\sqrt{\frac{\xi}{3-2\xi}} + (2u_1 + 2u_2 - 4u_4)\xi\sqrt{\frac{\xi}{3-2\xi}}$
	1 - 6 - 3	$u_1 + (-3u_1 - u_3 + 4u_6)\sqrt{\frac{\eta}{3-2\eta}} + (2u_1 + 2u_3 - 4u_6)\eta\sqrt{\frac{\eta}{3-2\eta}}$
	2 - 5 - 3	$u_3 + (4u_5 - u_2 - 3u_3)\xi + (2u_2 - 4u_5 + 2u_3)\xi^2$

### 4.2.3 Integração Numérica

No cálculo da matriz de rigidez, quando é usado o elemento singular de Akin, são necessárias integrações especiais, pois são integrados os produtos das derivadas das funções de interpolação em relação às coordenadas locais, as quais possuem singularidade de  $O(r^{-1/2})$  e  $O(r^{-1})$ .

Akin [1, 2] propõe uma quadratura para a integração numérica dos elementos triangulares,

a quadratura de Gauss-Radau. Uma pesquisa sobre esta quadratura foi realizada e encontrada em uma literatura bastante restrita: Zienkiewicz [98] e Dhatt e Touzot [33], havendo divergência entre elas. Assim, outra forma de integração foi procurada e se utilizou a técnica, para aplicação da integração numérica de funções com singulares fracas, propostas por Telles [89] para o MEC. Este sugere uma mudança de coordenadas não linear provocando um acúmulo dos pontos de integração na região próxima ao ponto singular. Esta mudança de coordenadas é feita com um polinômio de segunda ou terceira ordem.

Assim, considerando a integral

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\eta) d\eta \quad (4.38)$$

na qual  $f(\eta)$  é singular em  $\bar{\eta}$ , com  $-1 \leq \eta \leq 1$  no elemento. Escolhe-se a relação de terceiro grau entre a coordenada  $\eta$  e a coordenada  $\gamma$ , do novo sistema de coordenadas, já que Telles comenta ser esta a melhor:

$$\eta(\gamma) = a\gamma^3 + b\gamma^2 + c\gamma + d \quad (4.39)$$

onde as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$\eta(1) = 1 \quad \text{e} \quad \eta(-1) = -1 \quad (4.40a)$$

$$\left. \frac{d\eta}{d\gamma} \right|_{\bar{\eta}} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{d^2\eta}{d\gamma^2} \right|_{\bar{\eta}} = 0 \quad (4.40b)$$

Então, obtém-se a solução para  $a, b, c$  e  $d$  da transformação, que tem como vantagem em relação à transformação de segundo grau não depender da condição  $|\bar{\eta}| \geq 1$ . Essas constantes são

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{1 + 3\bar{\gamma}^2} \\ b &= \frac{-3\bar{\gamma}}{1 + 3\bar{\gamma}^2} \\ c &= \frac{3\bar{\gamma}^2}{1 + 3\bar{\gamma}^2} \\ d &= -b \end{aligned} \quad (4.41)$$

onde  $\bar{\gamma}$  é o valor de  $\gamma$  que satisfaz  $\eta(\bar{\gamma}) = \bar{\eta}$  e pode ser calculado por

$$\bar{\gamma} = \sqrt[3]{\bar{\eta}\eta^* + |\eta^*|} + \sqrt[3]{\bar{\eta}\eta^* - |\eta^*|} + \bar{\eta} \quad (4.42)$$

sendo  $\eta^* = \bar{\eta}^2 - 1$ .

Assim, a equação (4.38) pode ser reescrita como

$$I = \int_{-1}^{+1} f[\eta(\gamma)]J(\gamma)d\gamma \quad (4.43)$$

com  $J(\gamma)$  sendo o Jacobiano da transformação, e

$$J(\gamma) = \frac{3(\gamma - \bar{\gamma})^2}{1 + 3\bar{\gamma}^2} \quad \eta(\gamma) = \frac{(\gamma - \bar{\gamma})^3 + \bar{\gamma}(\bar{\gamma}^2 + 3)^2}{1 + 3\bar{\gamma}^2} \quad (4.44)$$

Na transformação de Telles o Jacobiano se anula no ponto singular, devido às condições de contorno (4.40), anulando a singularidade. Dessa forma, a integração de Gauss convencional pode ser aplicada.

Para a família de elementos de Akin a singularidade está sempre nos extremos e  $|\bar{\eta}| = 1$ , simplificando as expressões anteriores. Então, para os elementos de Akin  $\eta^* = 0$  e  $\bar{\gamma} = \bar{\eta}$ , resultando em

$$J(\gamma) = \frac{3}{4}(\gamma - \bar{\eta})^2 \quad \eta(\gamma) = \frac{1}{4}(\gamma - \bar{\eta})^3 + \bar{\eta} \quad (4.45)$$

A implementação numérica desta transformação, para os elementos quadrangulares, é relativamente simples e fornece resultados aceitáveis, sendo aplicada em conjunto aos elementos de Akin.

#### 4.2.4 Resultados

Alguns gráficos com resultados numéricos, utilizando elemento de Akin, são apresentados nas Figura 4.11 e 4.12. O caso teste em questão é novamente o caso um, apresentado anteriormente, com solução analítica de 1,94 (R&C). As soluções são apresentadas em conjunto com as soluções

obtidas sem elementos especiais, apenas com os elementos convencionais.

Novamente os elementos singulares fornecem melhores vantagens nos resultados quando o refino é menor, em malhas mais grosseiras. E, quando  $p \geq 4$  essas chegam a ser questionáveis. É possível, ainda, observar que os elementos de Akin são melhores sobre a família lagrangeana que a serendipity.

Também são apresentadas nas Figura 4.11 e 4.12, os resultados obtidos com o MEF utilizando os elementos de Akin para as discretizações com elementos lagrangeanos lineares (Q4) e quadráticos (Q9). Na discretização com elementos quadráticos os resultados se sobrepõem mas com lineares o MFGLM fornece um resultado melhor.

Uma extrapolação, interna ao elemento de Akin, para o fator intensidade de tensão no extremo da trinca pode ser criada, como no elemento *quarter-point*, do campo de deslocamentos.

Para o elemento de contorno singular quadrático com singularidade no nó um e coordenadas naturais  $\xi_1 = 0, \xi_2 = \frac{1}{2}$  e  $\xi_3 = 1$ , considerando um problema simétrico ( $u_{y_1} = 0$ ), o campo de deslocamentos de direção perpendicular à trinca é:

$$u_y = \sqrt{\frac{\xi}{3-2\xi}} [4(1-\xi)u_{y_2} + (2\xi-1)u_{y_3}] \quad (4.46)$$

Substituindo  $\xi$  pela coordenada polar  $r = L\xi$ , onde  $L$  é o comprimento do elemento, a expressão anterior fica

$$u_y = \sqrt{\frac{r}{L} \frac{1}{\sqrt{3-2\frac{r}{L}}}} \left[ 4 \left( 1 - \frac{r}{L} \right) u_{y_2} + \left( 2\frac{r}{L} - 1 \right) u_{y_3} \right] \quad (4.47)$$

Levando (4.47) no cálculo do fator de intensidade de tensão (2.125) e extrapolando para  $r = 0$ , vem:

$$K_I = \frac{G}{1-\nu} \sqrt{\frac{\pi}{6L}} (4u_{y_2} - u_{y_3}) \quad (4.48)$$

Da mesma forma, para os elementos de maior ordem, o campo de deslocamentos e o fator intensidade de tensão podem ser extrapolados localmente.

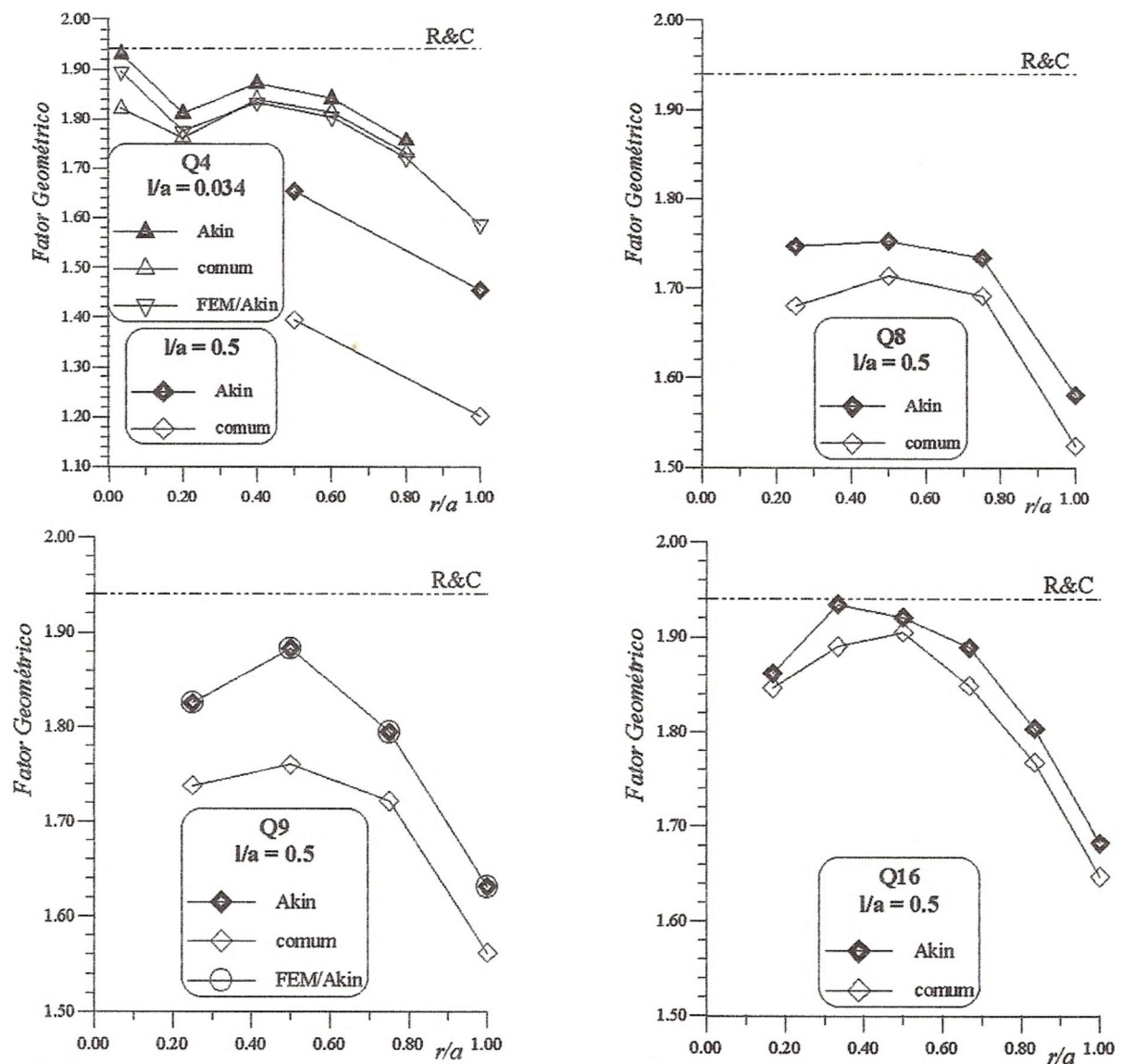


Figura 4.11: Resultados com elementos de Akin.

A Tabela 4.3 mostra os resultados desta extrapolação para o caso quadrático da Figura 4.12 e o elemento lagrangeano comprova, aqui também, sua superioridade sobre o serendipity, como elemento de Akin. Os resultados da tabela são bons se verificado a simplicidade das malhas, com apenas oito elementos finitos.

Tabela 4.3: Extrapolação no elemento de Akin.

Elemento	$Y_{\text{extrap.}}$	erro (%)
Q8	1.8400	-5.1540
Q9	1.8930	-2.4213

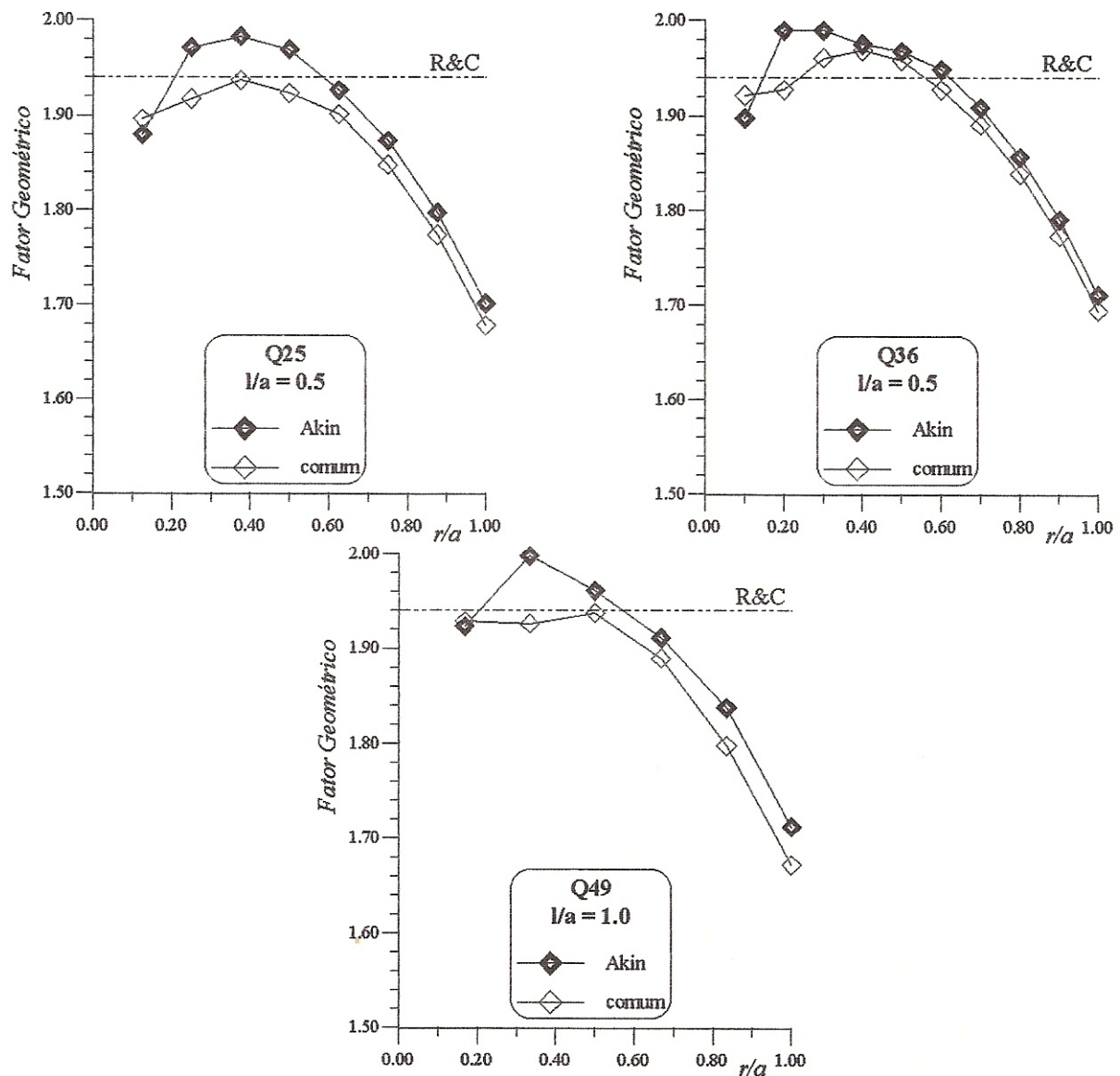


Figura 4.12: Resultados com elementos de Akin.

### 4.3 Família de Elementos de Stern

Os elementos de Akin [1] da seção anterior não possuem a condição de deformação constante, devendo ser integrado numericamente com a precisão sendo de difícil acesso, o que ocorre com a maioria dos elementos que incorporam a singularidade. Entretanto, o elemento proposto por Stern e Becker [86] não oferece esta dificuldade, cujas funções de interpolação, no elemento triangular de seis nós, modelam um campo de deslocamentos com uma variação  $r^{1/2}$  na direção radial e quadrática na direção circunferencial. Estas funções são um aprimoramento do elemento desenvolvido por Black-

burn [19] que, para o elemento triangular de seis nós (Figura 3.10b), tem o campo de deslocamentos dado por

$$\begin{aligned}
 u(\xi, \eta) = & u_1 + \left[ (2 + \sqrt{2})u_2 - (1 + \sqrt{2})u_4 + \sqrt{2}u_1 \right] \xi \\
 & + \left[ (2 + \sqrt{2})u_3 - (1 + \sqrt{2})u_6 + \sqrt{2}u_1 \right] \eta \\
 & + (1 + \sqrt{2}) \left[ (2u_4 - u_2 - u_1)\xi + (2u_6 - u_3 - u_1)\eta \right] (\xi + \eta)^{-\frac{1}{2}} \\
 & + (2u_5 - u_2 - u_3)\xi\eta(\xi + \eta)^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

onde  $(\xi, \eta)$  são as coordenadas naturais no elemento triangular, com a origem no nó singular, nó um. Stern e Becker [86] substituem os fatores  $(\xi + \eta)^{-1/2}$  por  $(\xi + \eta)^{-3/2}$  e o campo de deslocamentos se torna quadrático em sua parte singular.

Algumas vantagens desta família de elementos são observadas:

1. Compatibilidade com elementos isoparamétricos quadráticos;
2. Possibilidade de deformação constante;
3. Integração exata no cálculo da rigidez do elemento.

#### 4.3.1 Elementos Triangulares Singulares

Logo após Stern e Becker [86] apresentarem o elemento triangular de seis nós, Stern [85] generalizou a idéia para uma família de elementos finitos singulares, onde a variação para o campo de deslocamentos na direção circunferencial pode ser de qualquer ordem. Na direção radial o campo varia na  $Or^\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ), tal que a singularidade pode variar, aumentando o campo de aplicações da família.

Para facilitar a análise é convenientemente usado um sistema de coordenadas triangulares polares  $(\rho, \sigma)$ , Figura 4.13, que em termos das coordenadas naturais utilizadas por Blackburn [19] são

$$\rho = \xi + \eta \qquad \sigma = \frac{\eta}{\xi + \eta} \tag{4.50}$$

onde  $0 \leq \rho \leq 1$  e  $0 \leq \sigma \leq 1$ . E em termos de um sistema de coordenadas globais por

$$x = x_1 + \rho[(x_2 - x_1) + \sigma(x_3 - x_2)] = \sum_{i=1}^3 M_i(\rho, \sigma)x_i \quad (4.51)$$

onde  $x_i (i = 1, 2, 3)$  são as coordenadas globais do nó  $i$ , isto é, dos vértices do triângulo.  $M_i$  representa as funções de interpolação utilizadas no mapeamento de um quadrado unitário, no espaço  $(\rho, \sigma)$ , em uma região triangular, conforme mostra a Figura 4.12. Estas funções são

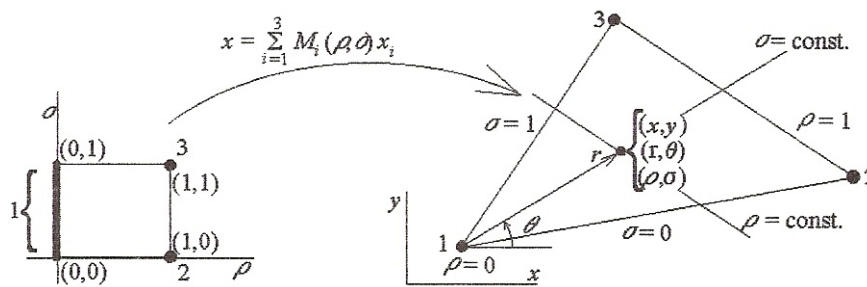
$$M_1 = 1 - \rho, \quad M_2 = \rho(1 - \sigma) \quad \text{e} \quad M_3 = \rho\sigma \quad (4.52)$$

e o Jacobiano da transformação é dado por

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \sigma} & \frac{\partial y}{\partial \sigma} \end{vmatrix} = \rho(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_2 - y_1) = 2A\rho \quad (4.53)$$

onde  $A$  é a área do elemento. E, assim, um elemento diferencial de área tem a forma

$$dA = Jd\rho d\sigma = 2A\rho d\rho d\sigma \quad (4.54)$$



**Figura 4.13:** Sistema de coordenadas para a família de Stern.

A transformação inversa é singular no nó um, isto é, a matriz inversa do Jacobiano é singular, pois  $J$  se anula quando,  $\rho$  se anula. Esta transformação inversa, necessária no cálculo das projeções



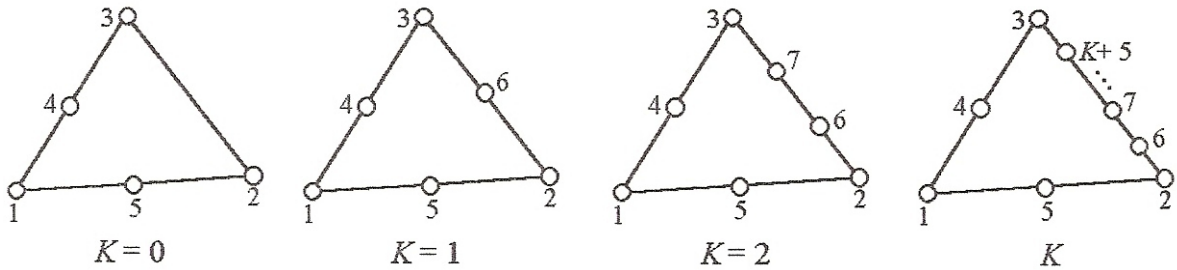
da função de Green, tem a forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{y_3 - y_2}{2A} & \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= -\frac{(y_2 - y_1) + \sigma(y_3 - y_2)}{2\rho A} \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} &= \frac{x_3 - x_2}{2A} & \frac{\partial \sigma}{\partial y} &= \frac{(x_2 - x_1) + \sigma(x_3 - x_2)}{2\rho A} \end{aligned} \quad (4.55)$$

Na Figura 4.13 é verificado ainda que as linhas de coordenada  $\rho$  ( $\sigma = \text{constante}$ ) são posicionadas radialmente, partindo do nó um, e as linhas para a coordenada  $\sigma$  ( $\rho = \text{constante}$ ) são paralelas ao lado 2-3 do triângulo.

Para a construção do elemento singular, partindo do elemento de três nós da Figura 4.13, são adicionados nós centrais nos lados que contém o ponto singular, nós 4 e 5 da Figura 4.14, e  $K$  nós no lado 2-3, com  $K \geq 0$ .

As coordenadas nodais para o elemento genérico, de  $(K + 5)$  nós e lado 2-3 compatível com elementos polinomiais de ordem  $K$ , são fornecidos na Tabela 4.4.



**Figura 4.14:** Família de elementos triangulares de Stern.

Admitindo  $r$  e  $\theta$  como coordenadas polares usuais com origem no nó um, é desejado aproximar funções singulares do tipo

$$u(r, \theta) = p(\theta)r^\lambda + q(r, \theta) \quad (4.56)$$

onde  $0 < \lambda < 1$  e  $q(r, \theta)$  é bem comportada, no sentido de que é diferenciável próximo a  $r = 0$ , e seu gradiente é  $O(r^{\lambda-1})$  com  $r \rightarrow 0$ . Sendo o nó um o ponto singular, o campo de deslocamentos acima pode ser aproximado no elemento com

$$\tilde{u}(\rho, \sigma) = P(\sigma)\rho^\lambda + Q(\rho, \sigma) \quad (4.57)$$

**Tabela 4.4:** Coordenadas nodais para os elementos de Stern.

Nº do nó ( $N$ )	Coordenadas	
	$\rho_N$	$\sigma_N$
1	0	arbitrário
2	1	0
3	1	1
4	1/2	0
5	1/2	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$5 + k$	1	$s_k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$5 + K$	1	$s_K$

$k = 1, 2, \dots, K \quad 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{K+1} = 1$

onde  $P(\sigma)$  e  $Q(\rho, \sigma)$  são funções polinomiais. Para que o elemento seja completo em relação aos campos lineares  $Q(\rho, \sigma)$  deve ser, no mínimo, linear em  $\rho$  e  $\rho\sigma$ . Isto é, deve ser linear nas coordenadas naturais  $\xi$  e  $\eta$ , comentadas no início da seção e relacionadas conforme

$$\xi = \rho(1 - \sigma) \quad \text{e} \quad \eta = \rho\sigma \quad (4.58)$$

Incorpora-se os outros graus de liberdade em  $P(\sigma)$ , já que o termo singular é dominante. Então, para o elemento de  $(5 + K)$  nós independentes a representação local (4.58) adquire a forma

$$\tilde{u}(\rho, \sigma) = \{a(1 - \sigma) + b\sigma + \sigma(1 - \sigma)P_K(\sigma)\} \rho^\lambda + \{A + \rho[B(1 - \sigma) + C\sigma]\} \quad (4.59)$$

onde  $P_K$  é um polinômio de grau  $(K + 1)$ , para  $K = 0$  este polinômio é  $P_0 \equiv 0$ , e assim, tem-se  $K$  coeficientes independentes para serem relacionados junto com as cinco constantes  $a, b, A, B$  e  $C$ . Monta-se um sistema com  $(K + 5)$  incógnitas e  $(K + 5)$  equações, obtidos dos valores nodais de deslocamento

$$u_N = \tilde{u}(\rho_N, \sigma_N), \quad N = 1, 2, \dots, 5 + K \quad (4.60)$$

com a seguinte solução única:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{\beta - 1}(2u_4 - u_2 - u_1) \\
 b &= \frac{1}{\beta - 1}(2u_5 - u_3 - u_1) \\
 A &= u_1 \\
 B &= \frac{1}{\beta - 1}[(2 - \beta)u_1 + \beta u_2 - 2u_4] \\
 C &= \frac{1}{\beta - 1}[(2 - \beta)u_1 + \beta u_3 - 2u_5]
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

e

$$\sigma(1 - \sigma)P_K(\sigma) = \sum_{k=1}^K [u_{5+k} - (1 - s_k)u_2 - s_k u_3] L_k(\sigma) \tag{4.62}$$

onde  $\beta = 2^{1-\lambda}$  e  $L_k(\sigma)$  são os polinômios interpoladores de Lagrange para os nós com posições  $s_k (k = 0, 1, 2, \dots, K + 1)$ , no lado 2-3. São os polinômios

$$L_k(\sigma) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{K+1} \frac{\sigma - s_j}{s_k - s_j}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K \tag{4.63}$$

Stern estabelece algumas propriedades para seu elemento, as quais são facilmente verificadas:

1. Se a aproximação local de  $u$ , em um elemento que possui lado coincidente com o lado 2-3 do elemento singular, for linear então (4.62) também toma a forma linear no lado 2-3. Isto é, as funções singulares são compatíveis com campos lineares.
2. Quando é interpolada uma função da forma  $u = f(\theta)r^\lambda$  nos nós a função de interpolação é da forma  $\tilde{u} = P(\sigma)\rho^\lambda$ , onde  $P(\sigma)$  é um polinômio de grau  $(K + 1)$ .
3. A função de interpolação é contínua entre os lados em comum de dois elementos singulares de mesma espécie, que tenham em comum o vértice singular.
4. A função de interpolação é contínua, no lado oposto ao nó singular com o elemento associado, se este tiver os mesmos nós para o lado em comum e um polinômio de interpolação, também

neste lado, com grau uma ordem menor que o número de nós. A compatibilidade com elementos lagrangeanos isoparamétricos é assegurada.

Reescrevendo a equação (4.59) como

$$\tilde{u}(\rho, \sigma) = \sum_{j=1}^{K+5} \Psi_j^K(\rho, \sigma) u_j \quad (4.64)$$

são encontradas as funções de interpolação para o elemento singular de  $(5 + K)$  nós, as quais para o nó  $j$ , quando decomposta convenientemente, assumem a forma

$$\Psi_j^K(\rho, \sigma) = m_j^K(\sigma) \rho^\lambda + n_j(\rho, \sigma), \quad j = 1, 2, \dots, 5 + K \quad (4.65)$$

onde  $n_j$  é a parte polinomial de  $\Psi_j^K$  e é independente de  $K$  e da posição dos nós no lado 2-3. O mesmo ocorre para  $m_j$  nos nós 1, 4 e 5:

$$\begin{aligned} n_1 &= 1 + \frac{2 - \beta}{\beta - 1} \rho & n_2 &= \frac{\beta}{\beta - 1} (1 - \sigma) \rho \\ n_3 &= \frac{\beta}{\beta - 1} \sigma \rho & n_4 &= \frac{-2}{\beta - 1} (1 - \sigma) \rho \\ n_5 &= \frac{\beta}{\beta - 1} \sigma \rho & n_{5+k} &\equiv 0, \quad k = 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (4.66)$$

e

$$m_1^K = -\frac{1}{\beta - 1} \quad m_4^K = \frac{2}{\beta - 1} (1 - \sigma) \quad m_5^K = \frac{2}{\beta - 1} \sigma \quad (4.67)$$

onde  $\beta = 2^{1-\lambda}$ . As únicas partes das funções de interpolação afetadas pelo número e posição dos nós no lado  $\rho = 1$  são as  $m_j^K(\sigma)$ , quando  $j$  está contido neste lado. São estas:

$$\begin{aligned} m_2^K &= -\frac{1}{\beta - 1} (1 - \sigma) - \sum_{k=1}^K (1 - s_k) L_k(\sigma) \\ m_3^K &= -\frac{1}{\beta - 1} \sigma - \sum_{k=1}^K s_k L_k(\sigma) \\ m_5^K &= L_k(\sigma), \quad k = 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (4.68)$$

Como exemplo são apresentadas as funções de interpolação e suas derivadas, obtidas para o elemento de seis nós ( $K = 1$ ) e  $\lambda = \frac{1}{2}$ , para a aplicação no cálculo do fator de intensidade de tensão,

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= 1 + \sqrt{2}\rho - (1 + \sqrt{2})\rho^{\frac{1}{2}} \\
\Psi_2 &= (1 - \sigma) \left[ (2 + \sqrt{2})\rho - (1 + \sqrt{2} + 2\sigma)\rho^{\frac{1}{2}} \right] \\
\Psi_3 &= \sigma \left[ (2 + \sqrt{2})\rho - (3 + \sqrt{2} - 2\sigma)\rho^{\frac{1}{2}} \right] \\
\Psi_4 &= -2(1 + \sqrt{2})(1 - \sigma)(\rho - \rho^{\frac{1}{2}}) \\
\Psi_5 &= -2(1 + \sqrt{2})\sigma(\rho - \rho^{\frac{1}{2}}) \\
\Psi_6 &= 4\sigma(1 - \sigma)\rho^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{1,\rho} &= \sqrt{2} - \frac{1 + \sqrt{2}}{2}\rho^{-\frac{1}{2}} \\
\Psi_{2,\rho} &= (2 + \sqrt{2})(1 - \sigma) - \left[ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}) + \sigma \right] (1 - \sigma)\rho^{-\frac{1}{2}} \\
\Psi_{3,\rho} &= (2 + \sqrt{2})\sigma - \left[ \frac{1}{2}(3 + \sqrt{2}) - \sigma \right] \rho^{-\frac{1}{2}} \\
\Psi_{4,\rho} &= -(1 + \sqrt{2})(1 - \sigma)(2 - \rho^{-\frac{1}{2}}) \\
\Psi_{5,\rho} &= -(1 + \sqrt{2})\sigma(2 - \rho^{-\frac{1}{2}}) \\
\Psi_{6,\rho} &= 2\sigma(1 - \sigma)\rho^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{1,\sigma} &= 0 \\
\Psi_{2,\sigma} &= -(2 + \sqrt{2})\rho + \left[ (\sqrt{2} - 1)4\sigma \right] \rho^{\frac{1}{2}} \\
\Psi_{3,\sigma} &= (2 + \sqrt{2})\rho - \left[ (\sqrt{2} + 3)4\sigma \right] \rho^{\frac{1}{2}} \\
\Psi_{4,\sigma} &= 2(1 + \sqrt{2})(\rho - \rho^{\frac{1}{2}}) \\
\Psi_{5,\sigma} &= -\Psi_{4,\sigma} \\
\Psi_{6,\sigma} &= 4(1 - 2\sigma)\rho^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{4.71}$$

As funções de interpolação (4.69) levam, então, a um elemento singular conforme com outros elementos  $K = 1$ , nos lados  $\sigma = 0$  e  $\sigma = 1$ , e conforme também em  $\rho = 1$  com elementos finitos quadráticos para deslocamento, como já era esperado. O elemento também permite deslocamento de corpo rígido e deformação constante, características também esperadas.

### 4.3.2 Elementos de Contorno Singulares com a Teoria de Stern

Novamente, é necessário determinar as funções de interpolação para o elemento de contorno singular,  $\phi_j^K$ , tal que estas sejam o traço das funções singulares de domínio,  $\Psi_j^K$ . Estas funções para o contorno são obtidas facilmente fazendo  $\sigma = 0$  ou  $\sigma = 1$ , dependendo se o elemento está posicionado em  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ , respectivamente. Para  $\sigma = 0$  se chega em

$$\begin{aligned}\phi_1(\rho) &= 1 + \frac{2-\beta}{\beta-1}\rho - \frac{1}{\beta-1}\rho^\lambda = \Psi_1^K(\rho, \sigma) \\ \phi_2(\rho) &= \frac{2}{\beta-1}(\rho^\lambda - \rho) = \Psi_4^K(\rho, 0) \\ \phi_3(\rho) &= \frac{1}{\beta-1}(\beta\rho - \rho^\lambda) = \Psi_2^K(\rho, 0)\end{aligned}\tag{4.72}$$

onde os nós são posicionados tal que:  $\rho_1 = 0, \rho_2 = \frac{1}{2}$  e  $\rho_3 = 1$ , com a singularidade no nó um. É interessante notar que o elemento de contorno singular tem sempre três nós, e as funções de interpolação  $\phi_j^K$  são independentes de  $K$ . A única função que poderia depender de  $K$  é  $\phi_3$ , pois  $\Psi_2^K$  depende, mas isto não ocorre porque  $L_k(\sigma = 0)$  é nulo para todos os  $k$ , menos  $k = 0$ , que não está incluído no somatório.

Quando o elemento de contorno está na posição  $\theta = \pi$  o nó três é o singular, suas funções de interpolação  $\phi_j^\pi$  podem ser relacionadas com as anteriores por

$$\phi_1^\pi(\rho) = \phi_3(\rho), \quad \phi_2^\pi(\rho) = \phi_2(\rho) \quad \text{e} \quad \phi_3^\pi(\rho) = \phi_1(\rho)\tag{4.73}$$

onde  $\rho$  continua com a origem no nó singular, então para o elemento em  $\theta = \pi$  as coordenadas nodais  $\rho$  são:  $\rho_1 = 0, \rho_2 = \frac{1}{2}$  e  $\rho_3 = 1$ .

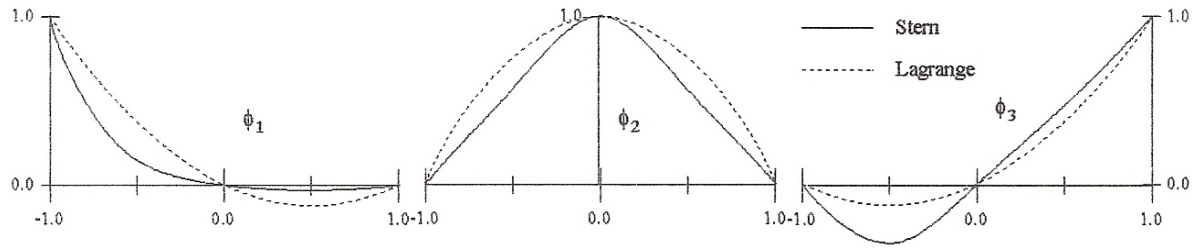
No elemento de contorno, a transformação linear de coordenadas propostas por Stern e Becker [86] pode ser evitada, pois esta fica sendo apenas uma mudança simples da coordenada  $-1 \leq \xi \leq 1$  para  $0 \leq \rho \leq 1$ , mantendo a forma do elemento. Então,  $\rho$  pode ser visto como uma função de  $\xi$  em  $\phi_j$  e  $\phi_j^K$ , onde a transformação  $\rho \rightarrow \xi$  é dada por

$$\rho(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \Rightarrow \text{para } \theta = 0 \quad \rho(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \Rightarrow \text{para } \theta = \pi\tag{4.74}$$

Para  $\lambda = \frac{1}{2}$  (MFEL) as funções de interpolação dos elementos de contorno são obtidas sem dificuldade e valem

$$\begin{aligned}\phi_1(\xi) &= \phi_3^\pi(\xi) = 1 + \sqrt{2}\rho(\xi) - (1 + \sqrt{2})\rho(\xi)^{\frac{1}{2}} \\ \phi_2(\xi) &= \phi_2^\pi(\xi) = 2(1 + \sqrt{2}) \left[ \rho(\xi)^{\frac{1}{2}} - \rho(\xi) \right] \\ \phi_3(\xi) &= \phi_1^\pi(\xi) = (2 + \sqrt{2})\rho(\xi) - (1 + \sqrt{2})\rho(\xi)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (4.75)$$

A Figura 4.15 mostra as funções  $\phi_j(\theta = 0)$  do elemento de contorno singular, comparando com as funções de interpolação lagrangeanas.



**Figura 4.15:** Funções de interpolação do elemento de contorno para a família de elementos finitos de Stern.

### 4.3.3 Integração dos Elementos de Stern

Uma vantagem do elemento de Stern sobre o elemento de Akin é a possibilidade de integração exata. Stern e Becker [86] propõem uma integração analítica na direção radial, para o cálculo da matriz de rigidez, restando apenas a integral na direção  $\sigma$  que pode ser integrada normalmente com a quadratura de Gauss convencional. Essa integração analítica pode ser representada por

$$\mathbf{K} = \int_A \mathbf{B}^t \mathbf{C} \mathbf{B} dA = \frac{1}{2A} \int_0^1 \mathbf{Q}(\sigma) d\sigma \quad (4.76)$$

sendo  $\mathbf{Q}(\sigma)$  uma matriz com polinômios em  $\sigma$ . Detalhes desta integração são apresentados no Apêndice.

Dunham [35], observando que os termos integrados para a matriz de rigidez dependem de simples produto entre os polinômios de  $\rho$  e  $\sigma$ , cria uma quadratura especial para o elemento de seis nós de Stern e Becker. E, ainda no mesmo ano, Stern mostra que a regra de integração de Dunham

pode ser aplicada para toda sua família de elementos singulares.

Para se apresentar esta nova quadratura é necessário definir algumas matrizes, primeiramente, tem-se a matriz  $\mathbf{L}$ , obtida da matriz inversa do Jacobiano da transformação,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} & \rho \frac{\partial \sigma}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} & \rho \frac{\partial \sigma}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

onde é interessante notar que os termos da primeira coluna são constantes em  $\sigma$ , enquanto a segunda é linear, expressões (4.56).

A matriz das derivadas locais das funções de interpolação, de dimensões  $[2 \times (5 + K)]$ , pode ser escrita como

$$\mathbf{G}^K = \begin{bmatrix} \cdots & \frac{\partial \Psi_j^K}{\partial \rho} & \cdots \\ \cdots & \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_j^K}{\partial \sigma} & \cdots \end{bmatrix} \quad \text{com } j = 1, 2, \dots, 5 + K \quad (4.78)$$

E a matriz das derivadas em relação às coordenadas espaciais como

$$\mathbf{G}^K = \begin{bmatrix} \cdots & \frac{\partial \Psi_j^K}{\partial x} & \cdots \\ \cdots & \frac{\partial \Psi_j^K}{\partial y} & \cdots \end{bmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{G}^K \quad (4.79)$$

que, observando as expressões (4.70) e (4.71), chega-se, para as componentes da matriz  $\mathbf{D}^K$ , à forma abaixo:

$$D_{\alpha\alpha}^K(\rho, \sigma) = A_{\alpha\alpha}^K(\sigma) + B_{\alpha\alpha}^K(\sigma)\rho^{\lambda-1} \quad (4.80)$$

onde  $A_{\alpha\alpha}^K$  são polinômios na maioria lineares e  $B_{\alpha\alpha}^K$  são polinômios de ordem, no máximo,  $(K + 1)$ .

Então, na integração sobre o elemento são encontradas as integrais do tipo

$$\begin{aligned} & \int_A \left[ \mathbf{A}(\sigma) + \mathbf{B}(\sigma)\rho^{\lambda-1} + \mathbf{C}(\sigma)\rho^{2(\lambda-1)} \right] dA = \\ & = \int_0^1 \int_0^1 \left[ \mathbf{A}(\sigma) + \mathbf{B}(\sigma)\rho^{\lambda-1} + \mathbf{C}(\sigma)\rho^{2(\lambda-1)} \right] 2A\rho d\rho d\sigma \\ & = \int_0^1 \int_0^1 \left[ \mathbf{Q}_1(\sigma)\rho + \mathbf{Q}_\lambda(\sigma)\rho^\lambda + \mathbf{Q}_{2\lambda-1}(\sigma)\rho^{2\lambda-1} \right] d\rho d\sigma \end{aligned} \quad (4.81)$$



onde  $\mathbf{Q}_1$  é um polinômio quadrático em  $\sigma$ ,  $\mathbf{Q}_\lambda$  é um polinômio de ordem  $(K + 1)$  e  $\mathbf{Q}_{2\lambda-1}$  de ordem  $2(K + 1)$ . A integração analítica toma aqui um grande custo computacional na identificação e cálculo dos polinômios. Com o processo de Dunham [35] é possível a integração exata com uma quadratura de apenas dois pontos, facilitando e reduzindo o custo computacional.

Assim, procura-se uma regra de integração com apenas dois pontos que resolva

$$I_m = \int_0^1 \rho^m d\rho = \frac{1}{m+1} \approx w_1 \rho_1^m + w_2 \rho_2^m \quad (4.82)$$

com solução exata para os valores  $m = 1$ ,  $m = \lambda$  e  $m = (2\lambda - 1)$ . Um sistema de três equações pode ser obtido em termos de  $\rho_2$ , dos pesos  $w_1$  e  $w_2$ , e da posição relativa entre os pontos de integração  $(\gamma = \frac{\rho_1}{\rho_2})$ :

$$\begin{cases} w_1 \gamma + w_2 = \frac{1}{2\rho_2} \\ w_1 \gamma^\lambda + w_2 = \frac{1}{(1+\lambda)\rho_2^\lambda} \\ w_1 \gamma^{2\lambda-1} + w_2 = \frac{1}{2\lambda\rho_2^{2\lambda-1}} \end{cases} \quad (4.83)$$

Eliminando do sistema acima  $w_1$  e  $w_2$  sobra a relação

$$\rho_1 = \gamma\rho_2 = \lambda\rho_2^{1-\lambda} \left[ \frac{2 - (1+\lambda)\rho_2^{\lambda-1}}{1 + \lambda - 2\lambda\rho_2^{\lambda-1}} \right] \quad (4.84)$$

tal que qualquer valor para  $\rho_1$  e  $\rho_2$  pode ser escolhido, desde que esta equação seja satisfeita e estejam no domínio do elemento ( $0 \leq \rho_i \leq 1$ ). Dunham sugere

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \lambda^{\frac{1}{1-\lambda}} & w_1 &= \frac{\lambda^{\frac{1}{1-\lambda}}}{2(1+\lambda)} \\ \rho_2 &= 1 & w_2 &= \frac{1}{2(1+\lambda)} \end{aligned} \quad (4.85)$$

que quando particularizado para  $\lambda = \frac{1}{2}$ , essas posições e pesos ficam

$$\rho_1 = \frac{1}{4}, \quad \rho_2 = 1, \quad w_1 = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad w_2 = \frac{1}{3} \quad (4.86)$$

A integração restante é de polinômios de grau  $2(K + 1)$  em  $\sigma$ , que podem ser integrados

utilizando a quadratura de Gauss com  $(K + 2)$  pontos, suficiente para integrar um polinômio de ordem  $2(K + 2)$ .

Para o elemento de contorno a integração não oferece dificuldades, já que não são integrados os produtos das derivadas das funções de interpolação, mas os produtos das próprias funções, no cálculo da matriz massa unitária (Capítulo 2).

É importante observar que o uso da transformação linear de coordenadas permite a utilização apenas de elementos com lados retos, isto para que a consistência e a compatibilidade sejam asseguradas, assim como a forma das funções de interpolação seja mantida, não prejudicando na precisão do elemento. Entretanto, esta condição não é problemática porque os elementos especiais de trinca são utilizados sempre internamente ao modelo, ao redor do extremo da trinca, não tendo motivos para serem usados lados curvos.

#### 4.3.4 Resultados

Alguns resultados são apresentados em forma de gráficos na Figura 4.17. Apenas resultados com o elemento de seis nós são apresentados, apesar da implementação ter sido, a princípio, para toda a família de elementos de Stern. Isto se deve ao fato de que o grande número de algebrismos, existentes atualmente no cálculo computacional estão baseados em fatores pertinentes ao tipo de elementos utilizados na discretização de uma forma global, como exemplo o número de nós por elemento, então, quando utilizado um elemento singular da família de Stern ( $K \neq 1$ ), este terá um número diferente de nós do restante da malha, necessitando desta forma uma reprogramação dispendiosa. Dessa forma, como o objetivo principal deste trabalho é analisar o desempenho do MFGLM com elementos especiais na MFEL esta tarefa não foi realizada. Este problema será evitado quando a implementação numérica do método for realizada para qualquer número de células, onde uma célula poderia ser reservada para os elementos especiais.

Visto isto, apenas malhas com elementos finitos triangulares quadráticos podem ser aplicados em conjunto a estes elementos especiais. Porém, elementos quadrangulares lagrangeanos quadráticos também podem ser utilizados, pois dois elementos triangulares de seis nós podem formar uma matriz de rigidez local equivalente à dos elementos de nove nós, conforme mostra o esquema da Figura 4.16.

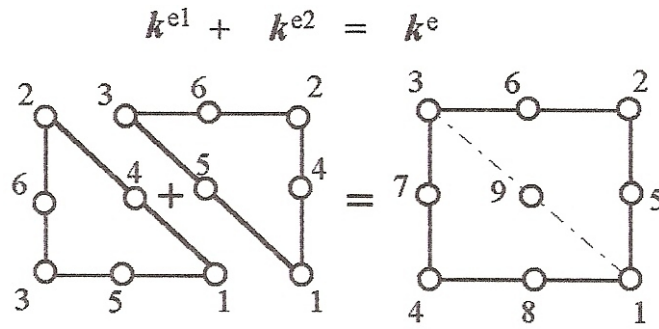


Figura 4.16: Divisão de um elemento quadrangular em dois triangulares.

Dos gráficos da Figura 4.17, pode-se verificar que a utilização de elementos finitos quadrangulares ou triangulares, na malha de finitos, praticamente não oferece variação quando aplicado o elemento de Stern no extremo da trinca, fato concluído dos resultados obtidos com um refino cuja relação  $l/a = 0,5$  (razão do comprimento do elemento sobre a dimensão da trinca). Também é apresentado um resultado com um refino menos grosseiro, para a discretização do domínio com elementos quadrangulares (Q9).

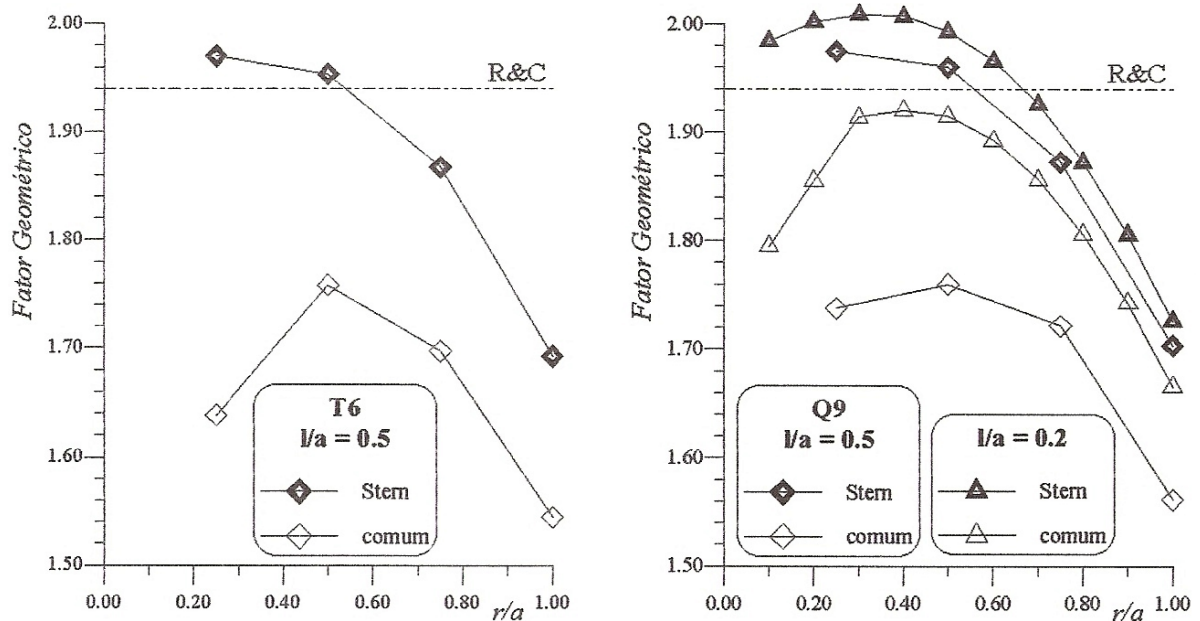


Figura 4.17: Resultados com elementos de Stern.

O MEF foi utilizado para resolver o caso com elementos quadrangulares Q9 e  $l/a = 0,2$  com elementos de Stern, o resultado obtido foi o mesmo que o MFGLM, fato que havia acontecido com a mesma discretização sem elementos especiais.

Como foi feito para outros elementos aqui também é possível uma extrapolação especial, localmente ao elemento. Assim, sabendo que em problemas envolvendo um comportamento singular das derivadas são os termos de maior crescimento os mais importantes, para o cálculo do fator intensidade de tensão ( $r \rightarrow 0$ ) o campo de deslocamentos de variação  $r$  pode ser desprezado, necessitando apenas  $p(\theta)r^\lambda$ , em (4.57). Em termos dos valores nodais fica, para um raio de ângulo  $\theta = \theta_0$

$$p(\theta_0)r^\lambda \approx P(\sigma_0)\rho^\lambda = \rho^\lambda \sum_{N=1}^{5+K} m_N^K(\sigma_0)u_N \quad (4.87)$$

onde  $r$  e  $\theta$  representam o sistema de coordenadas polares com origem no nó singular que pode ser relacionado com o sistema de coordenadas naturais por (Stern [85])

$$r = R(\sigma)\rho \quad \theta = \Theta(\sigma) \quad (4.88)$$

onde  $R(\sigma)$  e  $\Theta(\sigma)$  são obtidos de

$$\begin{aligned} R(\sigma) &= \left\{ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2\sigma [(x_2 - x_1)(x_3 - x_2) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_2)] \right. \\ &\quad \left. + \sigma^2 [(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2] \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \Theta(\sigma) &= \arctan \left[ \frac{(y_2 - y_1) + \sigma(y_3 - y_2)}{(x_2 - x_1) + \sigma(x_3 - x_2)} \right] \end{aligned} \quad (4.89)$$

Então,  $p(\theta_0)$  pode ser obtido da expressão

$$p(\theta_0) \approx \tilde{p}(\theta_0) = \frac{1}{[R(\sigma_0)]^\lambda} \sum_{N=1}^{5+K} m_N^K(\sigma_0)u_N \quad (4.90)$$

o que pode ser muito simplificado se  $\theta = \theta_0$  corresponder a  $\sigma_0 = 0$ ,

$$\tilde{p}(\theta_0) = \frac{1}{2^{1-\lambda} - 1} [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{-\frac{\lambda}{2}} (2u_4 - u_1 - u_2) \quad (4.91)$$

ou, se corresponder a  $\sigma_0 = 1$ ,

$$\tilde{p}(\theta_0) = \frac{1}{2^{1-\lambda} - 1} [(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2]^{-\frac{\lambda}{2}} (2u_5 - u_1 - u_3) \quad (4.92)$$

A extrapolação no elemento de contorno é ainda mais simples, onde (4.88) se resume a  $r = \frac{\rho}{L}$ , sendo  $L$  o comprimento do elemento de contorno. Chega-se a

$$\tilde{p}(\theta = 0) = \frac{L^{-\lambda}}{2^{1-\lambda} - 1} (2u_2 - u_1 - u_3) \quad (4.93)$$

No cálculo do fator de intensidade de tensão, com  $\lambda = \frac{1}{2}$  e considerando um problema simétrico (deslocamento transversal nulo no extremo da trinca,  $u_{y_1} = 0$ ), essa extrapolação cria a relação, para  $\theta = \pi$

$$K_I = \frac{G}{1-\nu} \sqrt{\frac{\pi}{2L}} \frac{(2u_{y_2} - u_{y_3})}{\sqrt{2}-1} \quad (4.94)$$

e, para  $\theta = 0$ ,

$$K_I = \frac{G}{1-2\nu} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \frac{(2u_{x_2} - u_{x_1} - u_{x_3})}{\sqrt{2}-1} \quad (4.95)$$

Uma observação que não pode ser esquecida é que as extrapolações apresentadas valem para qualquer elemento da família de Stern, isto é, são independentes de  $K$ . A Tabela 4.5 mostra resultados obtidos com a extrapolação apresentada, para os resultados da Figura 4.17.

**Tabela 4.5:** Extrapolação por dois pontos de deslocamento M1  $-l/a = 0,5$  e M2  $-l/a = 0,2$ .

Elemento	$Y_{\text{Extrap}}$	erro (%)
T6	2,010179	3,6175
Q9-M1	2,010191	3,6181
Q9-M2	1,940091	0,0047

O resultado obtido com a extrapolação também mostra a similaridade dos resultados, para um mesmo  $l/a$ , obtidos com elementos triangulares (T6) ou quadrangulares (Q9). O resultado para  $l/a = 0,2$ ; 50 elementos finitos e 30 elementos de contorno, é excelente quando comparado à solução analítica.

## 4.4 Família de Elementos de Contorno Especiais

Até o momento, todos os elementos apresentados são elementos desenvolvidos para o MEF, até mesmo o *quarter-point* foi criado a princípio como um elemento finito singular. Para as famílias de elementos de Akin e Stem os elementos de contorno foram desenvolvidos a partir do operador-traço, que não é aplicado aqui. Porém, os elementos de contorno devem ser o traço dos elementos finitos, lembrando que esta é uma condição criada na formulação do método.

A origem dos elementos de contorno, bi e tridimensionais para o MEC, é do trabalho de Tanaka e Itoh [88] e são aqui adaptados para o MFGLM. O elemento bidimensional é utilizado na íntegra, como proposto, e o elemento de contorno tridimensional é utilizado como um elemento finito plano. Estes elementos têm como possibilidade a variação na singularidade da derivada do deslocamento e da tração, independentemente. Surgiram da necessidade criada quando Takakuda [87] mostrou analiticamente que com  $r \rightarrow 0$ , na MFEL, as componentes de deslocamento e de tração satisfazem

$$u_y = ar^\lambda \quad t_y = br^{-\gamma} \quad (4.96)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes e o sistema de coordenadas é o sistema polar já conhecido, com origem no extremo da trinca. Takakuda mostrou ainda que  $\lambda$  e  $\gamma$  dependem do coeficiente de Poisson e do ângulo de ataque da trinca (ângulo que as duas superfícies da trinca fazem entre si na sua extremidade).

### 4.4.1 Elementos de Contorno Bidimensionais

O desenvolvimento da formulação do MFGLM para elementos não isoparamétricos é finalmente aplicado, pois estes elementos não são isoparamétricos, isto é, a interpolação da geometria, dos deslocamentos e das trações são diferentes. Para um elemento de contorno com  $N$  nós se tem

$$x = \sum_{j=1}^N \phi_j(\xi)x_j, \quad u = \sum_{j=1}^N \tilde{\phi}_j(\xi)u_j \quad \text{e} \quad t = \sum_{j=1}^N \varphi_j(\xi)t_j \quad (4.97)$$

A teoria de Tanaka e Itoh [88] é aplicada sobre a família de elementos de contorno lagrangeanos com nós equidistantes. A coordenada local  $\xi$  ( $-1 \leq \xi \leq 1$ ) pode ser relacionada com o sistema

polar real  $r$ , com  $r = 0$  no extremo da trinca, por

$$\frac{r}{L} = \frac{1 + \zeta}{2} \quad (4.98)$$

para o elemento com singularidade em  $\zeta = -1$  (nó um), onde  $L$  é o comprimento do elemento de contorno. Para o elemento cujo nó singular é o nó três, em  $\zeta = +1$ , esta relação é alterada para

$$\frac{r}{L} = \frac{1 - \zeta}{2} \quad (4.99)$$

A função de interpolação para a geometria é a da família de Lagrange, expressa como

$$\phi_j(\zeta) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \frac{\zeta - \zeta_i}{\zeta_j - \zeta_i} \quad (4.100)$$

Para os deslocamentos e as trações apresentarem o comportamento desejado, como em (4.96), altera-se a função polinomial acima de forma adequada e para a interpolação dos deslocamentos a função é calculada por

$$\phi_j(\zeta^*) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \frac{\zeta^* - \zeta_i^*}{\zeta_j^* - \zeta_i^*} \quad (4.101)$$

onde  $\zeta^*$  está relacionado com  $\zeta$  conforme:

$$(\zeta + 1)^\lambda = 2^{\lambda-1}(1 + \zeta^*) \quad (4.102)$$

válida para o elemento com singularidade em  $\zeta = -1$ .

Observando o trabalho de Tanaka e Itoh [88] verifica-se que esta transformação de coordenadas modifica a variação de  $r$  para  $r^\lambda$ , isto fica mais claro reescrevendo a equação (4.102) da seguinte forma:

$$\frac{1 + \zeta^*}{2} = \left( \frac{1 + \zeta}{2} \right)^\lambda = r^\lambda \quad (4.103)$$

Aplicando a mesma idéia para  $\theta = \pi$ , singular em  $\zeta = +1$ , encontra-se

$$\frac{1 - \zeta^{**}}{2} = \left( \frac{1 - \zeta}{2} \right)^\lambda = r^\lambda \quad (4.104)$$

onde  $\zeta^{**}$  é a variável substituta de  $\zeta^*$  em (4.101).

As funções de interpolação para a tração são obtidas dividindo a equação (4.101) por  $(1 + \zeta)^\lambda$ , para  $\theta = 0$ , e são expressas pelas funções,

$$\begin{aligned} \varphi_1(\zeta) &= (1 + \zeta)^{-\gamma} \phi_1(\zeta) \\ \varphi_j(\zeta) &= (1 + \zeta)^{-\gamma} (1 + \zeta_j)^\gamma \phi_j(\zeta) \quad \text{para } j \neq 1 \end{aligned} \quad (4.105)$$

singulares em  $\zeta = -1$ . E, novamente, para o elemento simétrico em relação ao ponto singular,  $\theta = \pi$ ,  $(1 + \zeta)^\gamma$  é substituído por  $(1 - \zeta)^\gamma$  e as funções de interpolação para a tração, singulares em  $\zeta = +1$ , são representadas como

$$\begin{aligned} \varphi_N(\zeta) &= (1 + \zeta)^{-\gamma} \phi_N(\zeta) \\ \varphi_j(\zeta) &= (1 + \zeta)^{-\gamma} (1 + \zeta_j)^\gamma \phi_j(\zeta) \quad \text{para } j \neq N \end{aligned} \quad (4.106)$$

onde  $N$  é o nó singular.

Na Figura 4.18 as funções de interpolação para o elemento bidimensional de Tanaka e Itoh [88] são mostradas, no caso linear, cujas funções são, para  $\theta = 0$ , expressas por

$$\begin{aligned} \phi_1(\zeta) &= \frac{1 - \zeta}{2} & \tilde{\phi}_1(\zeta^*) &= \frac{1 - \zeta^*}{2} & \varphi_1(\zeta) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta}} \frac{1 - \zeta}{2} \\ \phi_2(\zeta) &= \frac{1 + \zeta}{2} & \tilde{\phi}_2(\zeta^*) &= \frac{1 + \zeta^*}{2} & \varphi_2(\zeta) &= \sqrt{\frac{1 + \zeta}{2}} \end{aligned} \quad (4.107)$$

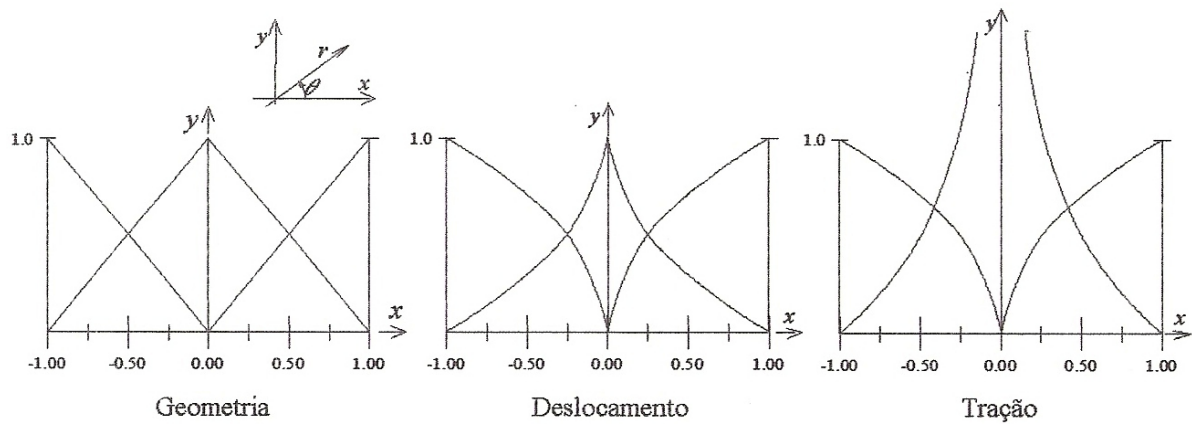
e, para  $\theta = \pi$ :

$$\begin{aligned} \phi_1(\zeta) &= \frac{1 - \zeta}{2} & \tilde{\phi}_1(\zeta^{**}) &= \frac{1 - \zeta^{**}}{2} & \varphi_1(\zeta) &= \sqrt{\frac{1 - \zeta}{2}} \\ \phi_2(\zeta) &= \frac{1 + \zeta}{2} & \tilde{\phi}_2(\zeta^{**}) &= \frac{1 + \zeta^{**}}{2} & \varphi_2(\zeta) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta}} \frac{1 + \zeta}{2} \end{aligned} \quad (4.108)$$

onde  $\zeta^*$  e  $\zeta^{**}$  são fornecidos por (4.103) e (4.104), respectivamente. Os fatores utilizados foram



$\lambda = \gamma = \frac{1}{2}$ , recomendados em casos simétricos da MFEL.



**Figura 4.18:** Funções de interpolação para o elemento de contorno singular de dois nós.

Usando essas funções os campos para a geometria, o deslocamento e a tração ficam, para um elemento de contorno com  $N$  nós:

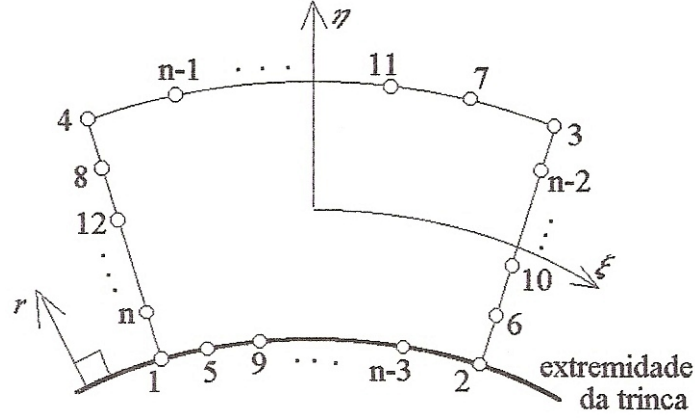
$$\begin{aligned}
 x &= a_1 + a_2 r + a_3 r^2 + \dots + a_N r^{(N-1)} \\
 u &= b_1 + b_2 r^\lambda + b_3 r^{2\lambda} + \dots + b_N r^{(N-1)\lambda} \\
 t &= c_1 + c_2 r^{-\lambda} + c_3 r^{-\lambda+1} + \dots + c_N r^{-\lambda+(N-1)}
 \end{aligned}
 \tag{4.109}$$

onde  $a_i, b_i$  e  $c_i$  são constantes.

#### 4.4.2 Elementos de Contorno Tridimensionais Singulares

O elemento de contorno tridimensional elemento de superfície, segue a mesma idéia do bidimensional. É usado de duas maneiras com o MEC nos problemas da mecânica da fratura: na primeira é aquela que o elemento não tem apenas um ponto, mas um lado singular (Figura 4.19); na segunda a singularidade está concentrada em um ponto (Figura 4.20).

O elemento da Figura 4.20 é utilizado aqui como um elemento finito plano aplicado no MFGLM, esse elemento com singularidade em um ponto é triangular e obtido quando o lado singular do elemento quadrangular é colapsado. Dessa forma, a formulação é fornecida para o elemento quadrangular e, para tanto, deve-se considerar um elemento genérico, como mostra a Figura 4.19, onde o lado 1-2 coincide com o extremo da trinca, donde a distância  $r$  é medida.



**Figura 4.19:** Elemento singular de contorno 3D.

No MFGLM a interpolação do domínio necessita funções somente para a geometria e os deslocamentos, as trações não são interpoladas internamente ao domínio. Tem-se então, para  $N$  nós,

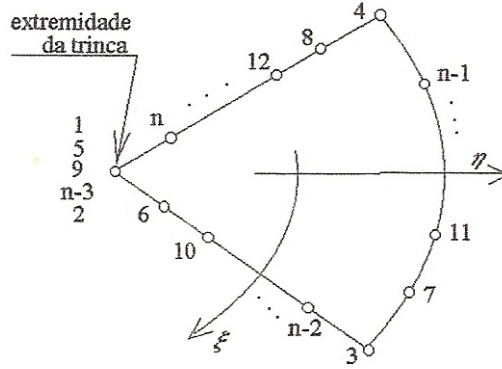
$$x = \sum_{j=1}^N \Psi_j(\zeta, \eta) x_j \quad u = \sum_{j=1}^N \tilde{\Psi}_j(\zeta, \eta) u_j \quad (4.110)$$

Essas funções, de acordo com Tanaka e Itoh [88], são

$$\begin{aligned} \Psi_j(\zeta, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \zeta_j \zeta)(1 + \eta_j \eta) - \sum_{i=5}^N \frac{1}{4}(1 + \zeta_i \zeta_j)(1 + \eta_i \eta_j) \Psi_i \quad \text{para } j = 1, 2, 3, 4 \\ \Psi_j(\zeta, \eta) &= \frac{1 + \eta_j \eta}{2} \prod_{\substack{i=K \\ i \neq j}}^H \frac{\zeta - \zeta_i}{\zeta_j - \zeta_i} \quad \text{para os lados } 1-2 \text{ e } 3-4 \\ \Psi_j(\zeta, \eta) &= \frac{1 + \zeta_j \zeta}{2} \prod_{\substack{i=K \\ i \neq j}}^N \frac{\eta - \eta_i}{\eta_j - \eta_i} \quad \text{para os lados } 2-3 \text{ e } 4-1 \\ \tilde{\Psi}_j(\zeta, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \zeta_j^* \zeta^*)(1 + \eta_j^* \eta^*) - \sum_{i=5}^N \frac{1}{4}(1 + \zeta_i^* \zeta_j^*)(1 + \eta_i^* \eta_j^*) \tilde{\Psi}_i \quad \text{para } j = 1, 2, 3, 4 \\ \tilde{\Psi}_j(\zeta, \eta) &= \frac{1 + \eta_j^* \eta^*}{2} \prod_{\substack{i=K \\ i \neq j}}^N \frac{\zeta^* - \zeta_i^*}{\zeta_j^* - \zeta_i^*} \quad \text{para os lados } 1-2 \text{ e } 3-4 \\ \tilde{\Psi}_j(\zeta, \eta) &= \frac{1 + \zeta_j^* \zeta^*}{2} \prod_{\substack{i=K \\ i \neq j}}^H \frac{\eta^* - \eta_i^*}{\eta_j^* - \eta_i^*} \quad \text{para os lados } 2-3 \text{ e } 4-1 \end{aligned} \quad (4.111)$$

onde  $K$  e  $H$  são o primeiro e o último nó do lado que se está referindo.  $\zeta^*$  é obtido de (4.103) e  $\eta^*$  também, mudando apenas a coordenada  $\zeta$  por  $\eta$ .

Colapsando o lado 1-2 se chega ao elemento desejado, utilizando no MFGLM, Figura 4.20. Esse elemento de contorno 3D possui duas complicações: seu lado 3-4 não é compatível com os elementos polinomiais de uso comum e, impossibilitando a aplicação no MFGLM, o "traço" das funções de interpolação do elemento de contorno 3D não são as funções de interpolação dos elementos 2D.



**Figura 4.20:** Elemento de contorno 3D aplicado como elemento finito.

Apenas o caso linear está livre destes problemas, isto é, para o elemento 3D de quatro nós (Figura 4.21). As funções de interpolação e derivadas locais desse elemento são dadas por

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_1(\xi, \eta^*) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta^*) & \tilde{\Psi}_2(\xi, \eta^*) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta^*) \\ \tilde{\Psi}_3(\xi, \eta^*) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta^*) & \tilde{\Psi}_4(\xi, \eta^*) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta^*)\end{aligned}\quad (4.112)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_{1,\xi} &= -\frac{1}{4}(1 - \eta^*) & \tilde{\Psi}_{2,\xi} &= -\tilde{\Psi}_{1,\xi} \\ \tilde{\Psi}_{3,\xi} &= \frac{1}{4}(1 + \eta^*) & \tilde{\Psi}_{4,\xi} &= -\tilde{\Psi}_{3,\xi}\end{aligned}\quad (4.113)$$

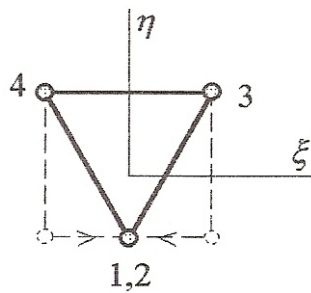
$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_{1,\eta} &= -\frac{1}{4} \frac{(1 - \xi)}{(1 - \eta^*)} & \tilde{\Psi}_{2,\eta} &= -\frac{1}{4} \frac{(1 + \xi)}{(1 + \eta^*)} \\ \tilde{\Psi}_{3,\eta} &= -\tilde{\Psi}_{2,\eta} & \tilde{\Psi}_{4,\eta} &= -\tilde{\Psi}_{1,\eta}\end{aligned}\quad (4.114)$$

onde as derivadas  $\tilde{\Psi}_{i,\eta}$  foram facilmente obtidas usando a regra da cadeia:

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}_i}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{\Psi}_i}{\partial \eta^*} + \frac{\partial \eta^*}{\partial \eta}, \quad \text{com} \quad \frac{d\eta^*}{d\eta} = \frac{1}{1 + \eta^*}\quad (4.115)$$

Como elemento finito este elemento possui a condição de deslocamento linear, mas um grande número de pontos é necessário na integração numérica, pois suas derivadas são singulares,

ou se deve aplicar uma regra de integração especial, como a de Telles [89], aplicada na família de elementos de Akin. Para os elementos de contorno a integração numérica também merece cuidados especiais já que, apesar de não serem integradas as derivadas, as funções de interpolação de tração são singulares.



**Figura 4.21:** Elemento singular de contorno 3D linear.

#### 4.4.3 Resultados

Os resultados obtidos com os elementos lineares propostos por Tanaka e Itoh [88] são bons, isto pode ser verificado nos resultados apresentados graficamente na Figura 4.22. Uma extrapolação local não é possível para o elemento implementado, pois possui apenas dois nós radialmente. Na Figura também é apresentado um resultado obtido com o MEF, utilizando o elemento de contorno 3D adaptado como elemento finito plano, como no MFGLM. As funções de interpolação de tração existentes no elemento de contorno fazem com que o MFGLM apresente um resultado melhor, pois os elementos finitos interpolam apenas o deslocamento, para uma formulação baseada nestes.

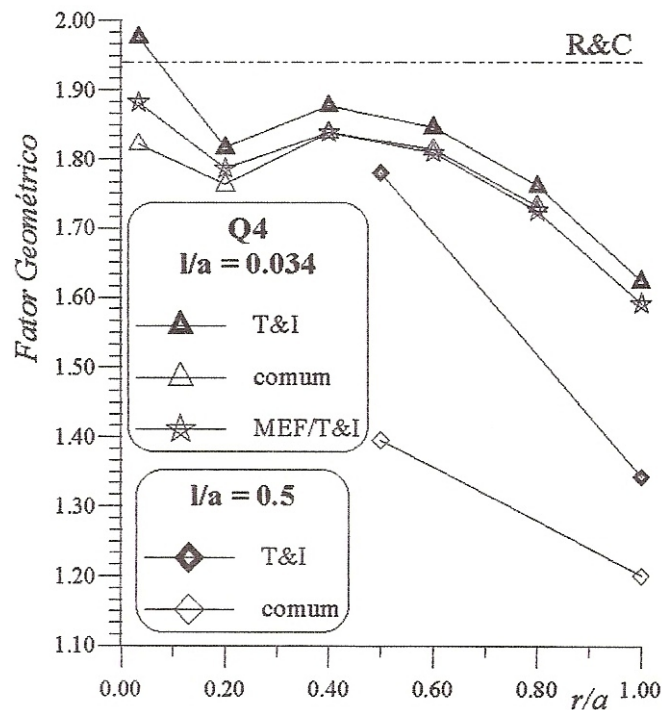


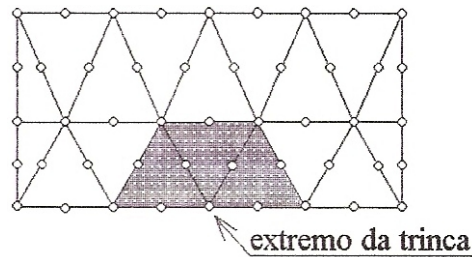
Figura 4.22: Resultados com o elemento de Tanaka e Itoh [88].

## 4.5 Comparações Entre os Elementos Especiais

Nos gráficos de resultados a seguir são realizadas comparações entre os diversos tipos de elementos especiais, aqui apresentados e adaptados ao MFGLM. Cada gráfico representa uma determinada discretização, cujos elementos finitos são os mostrados no Capítulo 3: lagrangeanos, serendipity e triangulares, com os elementos de contorno lagrangeanos. Os resultados são alterados, em um mesmo gráfico, modificando apenas os elementos nas proximidades do extremo da trinca.

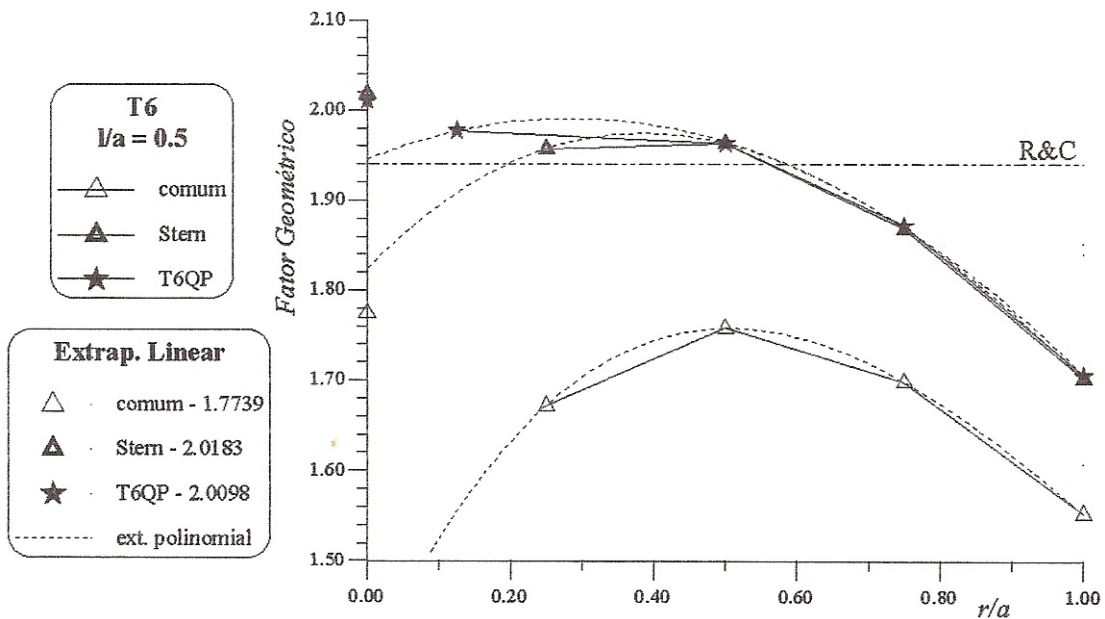
A primeira comparação é entre o elemento *quarter-point* triangular (T6QP) e o elemento quadrático de Stern, com a discretização fazendo uso de elementos finitos triangulares de seis nós (T6), como mostra a Figura 4.23, onde a área hachurada mostra os elementos especiais.

Na Figura 4.24 estão presentes os resultados com a discretização da Figura 4.23, onde é possível comparar os elementos. A curva gerada com elementos de Stern se mantém mais próxima à solução analítica, fornecida por Rooke e Cartwright [78] (R&C - 1,94), que a gerada com elementos "quarter-point"(T6QP). Entretanto, realizando uma extrapolação linear, para estimar o fator intensidade de tensão do problema, o elemento T6QP fornece uma estimativa ligeiramente melhor que o



**Figura 4.23:** Discretização do domínio com elementos triangulares.

elemento de Stern. As linhas pontilhadas no gráfico são curvas polinomiais que contém os valores nodais, podendo ser usada para a extrapolação dos resultados ao extremo da trinca ( $r = 0$ ). Esta extrapolação polinomial se mostra bastante poderosa quando são usados os elementos *quarter-point*, fato verificado também em outras discretizações, a seguir.



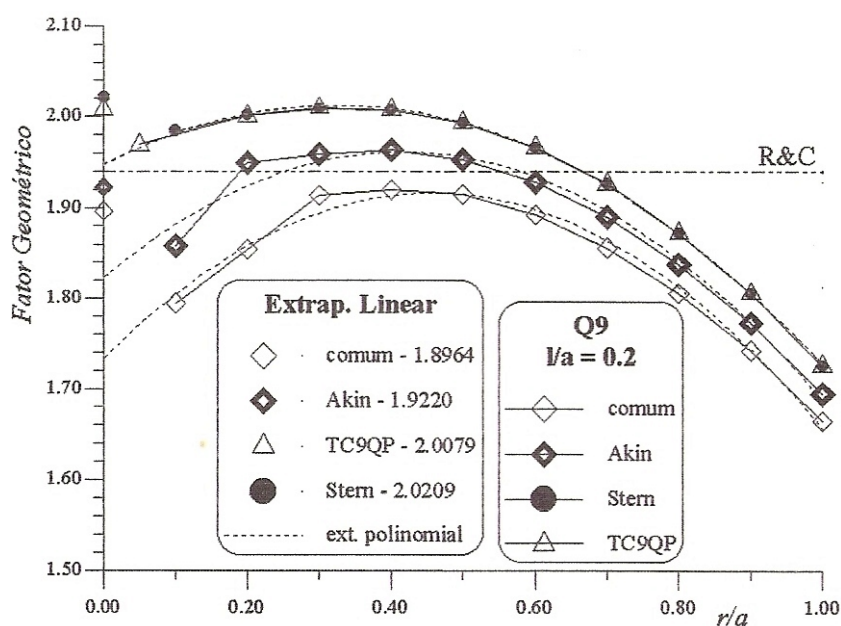
**Figura 4.24:** Comparação em uma malha com elemento finitos triangulares quadráticos.

Quando o valor do fator de intensidade de tensão, ou do fator geométrico, é estimado aplicando as extrapolações locais aos elementos de trinca o elemento de Stern mostra sua superioridade, oferecendo o excelente resultado de 1,9440 para o fator geométrico, erro de 0,2050%, enquanto que com o elemento T6QP se obtém 1,9911; com um erro de 2,6335%.

A segunda comparação, presente na Figura 4.25, é entre o elemento de Stern, o elemento da família de Akin e o elemento lagrangeano quadrático degenerado com a técnica *quarter-point*

(TC9QP) e colapsado. Esta comparação é realizada sobre uma discretização de domínio com 50 elementos finitos quadrangulares lagrangeanos (Q9), de mesmo tamanho.

Na Figura 4.25, os resultados com elementos de Stern e TC9QP praticamente coincidem, como na Figura 4.24, propiciando uma boa aproximação para o fator de intensidade de tensão com a extrapolação polinomial. A solução com elementos de Akin é a que apresenta valores nodais mais próximos da analítica (R&C), assim como uma melhor estimativa quando extrapolado linearmente, chegando a um erro de -0,9278%. Sem usar elementos especiais, a extrapolação linear, com os mesmos pontos da estimativa para os elementos de Akin, fornece um erro para o fator geométrico de -2,274%. Se as devidas extrapolações locais dos elementos de trinca forem aplicadas o elemento de Stern se destaca novamente, este fornece para o fator geométrico o valor 1,940091; com um erro em relação à solução analítica de Rooke e Cartwright [78] de 0,004679%. Os outros elementos também fornecem bons resultados: o elemento TC9QP traz para o fator geométrico 1,9368, com erro de -0,1646%, e o elemento de Akin o valor 1,9092, com erro de -1,5881%.

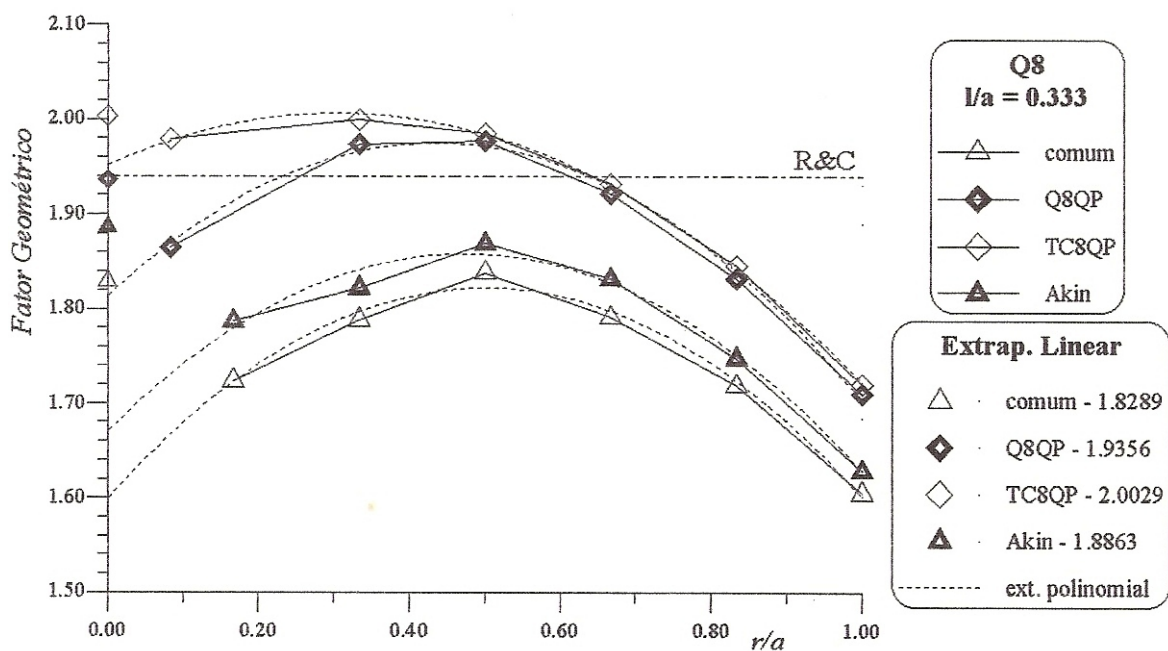


**Figura 4.25:** Comparação em uma malha com elementos lagrangeanos quadráticos.

Dezoito elementos finitos serendipity quadráticos são usados na discretização de domínio para os resultados da Figura 4.26, onde são comparados os elementos *quarter-point* quadrangular (Q8QP), *quarter-point* triangular colapsado (TC8QP) e o elemento de Akin sobre o elemento seren-

dipity.

A técnica de Akin, quando aplicada sobre a família serendipity, não é tão vantajosa quanto quando aplicada sobre a família lagrangeana, fato já concluído anteriormente. Os elementos *quarter-point* são os sugeridos por Barsoum [15], o quadrangular consegue uma excelente estimativa quando seu resultado é extrapolado linearmente, chega-se a um erro de -0,2268% para o fator geométrico. Para o elemento colapsado TC8QP a extrapolação linear traz um péssimo resultado. Um erro razoável (-2,7680%) é obtido com o elemento de Akin quando extrapolado linearmente. Uma boa estimativa também é encontrada com o elemento TC8QP usando uma extrapolação polinomial, ou com a extrapolação local que fornece um erro de 0,9923% para o fator geométrico. Com a extrapolação local quem fornece um péssimo resultado é o elemento Q8QP (erro de 9,4992%), o elemento de Akin também não traz um resultado bom (3,8232%).

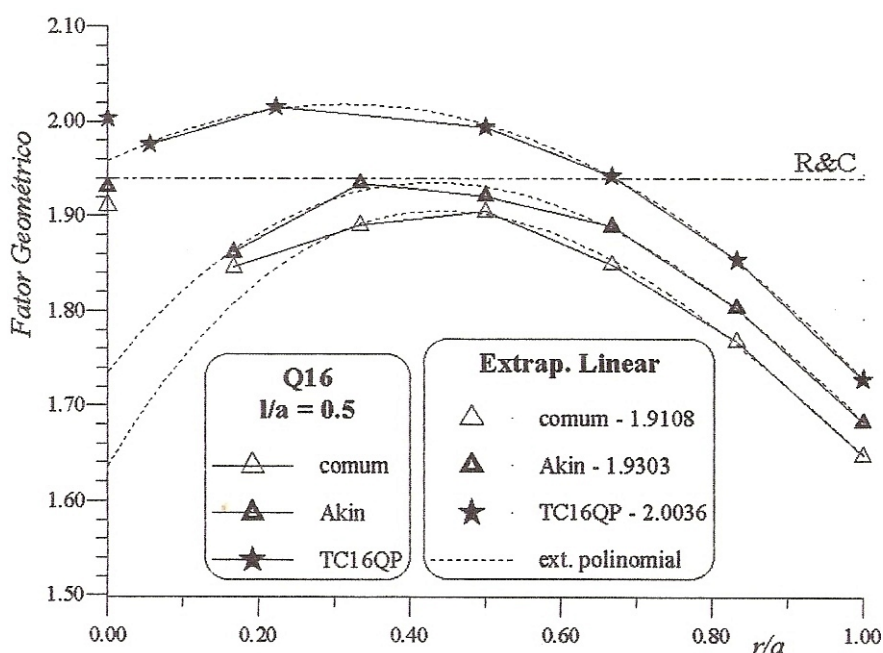


**Figura 4.26:** Comparação com elementos serendipity de oito nós.

As Figuras 4.27-29 comparam os elementos de Akin com os elementos degenerados colapsados, utilizando extrapolações lineares polinomiais.

Os elementos degenerados fornecem estimativas inferiores aos de Akin, caso que poderia talvez ser invertido se utilizada a extrapolação local. Na Figura 4.27, a extrapolação polinomial oferece uma extrapolação, com erro próximo ao obtido sem elementos especiais. Nesta, as estimativas,





**Figura 4.27:** Malha de elementos finitos com elementos lagrangianos cúbicos.

extrapolando linearmente para o elemento de Akin e sem elementos especiais, tem erros, respectivamente, de -0,50% e -1,5366%, resultados que podem ser considerados muito bons para uma discretização grosseira de apenas oito elementos finitos cúbicos (Q16).

Na Figura 4.28, também com apenas oito elementos finitos mas agora quárticos (Q25), o resultado com extrapolação linear sem qualquer elemento especial, senão os convencionais, é excelente (1,9341 para o fator geométrico), com um erro em relação à solução analítica de -0,3041%. Para o elemento de Akin a extrapolação traz para o fator geométrico 1,9513 (erro de 0,5825%), resultado que questiona a validade da utilização de elementos especiais quando a ordem de interpolação é elevada. Com uma extrapolação local talvez os elementos especiais possam ainda superar o resultado com elementos Q25.

Novamente, na Figura 4.29, o melhor resultado obtido com as extrapolações lineares é sem a utilização dos elementos de trinca, que chega a um erro de 0,5103%, somente com elementos lagrangianos quárticos (Q36). O erro é um pouco maior que o obtido na Figura 4.28, o que pode sugerir uma não convergência dos resultados, entretanto, como já foi discutido anteriormente, a solução analítica possui um erro possível de mais de 1% e a extrapolação não é uma boa maneira de se estimar um valor para o fator de intensidade de tensão.

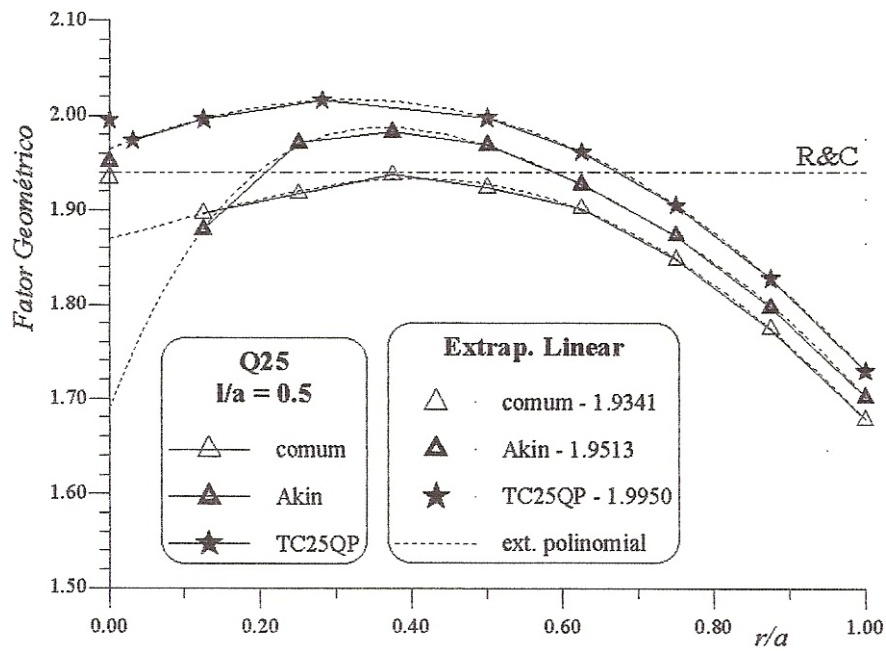


Figura 4.28: Comparação com elementos lagrangeanos quárticos.

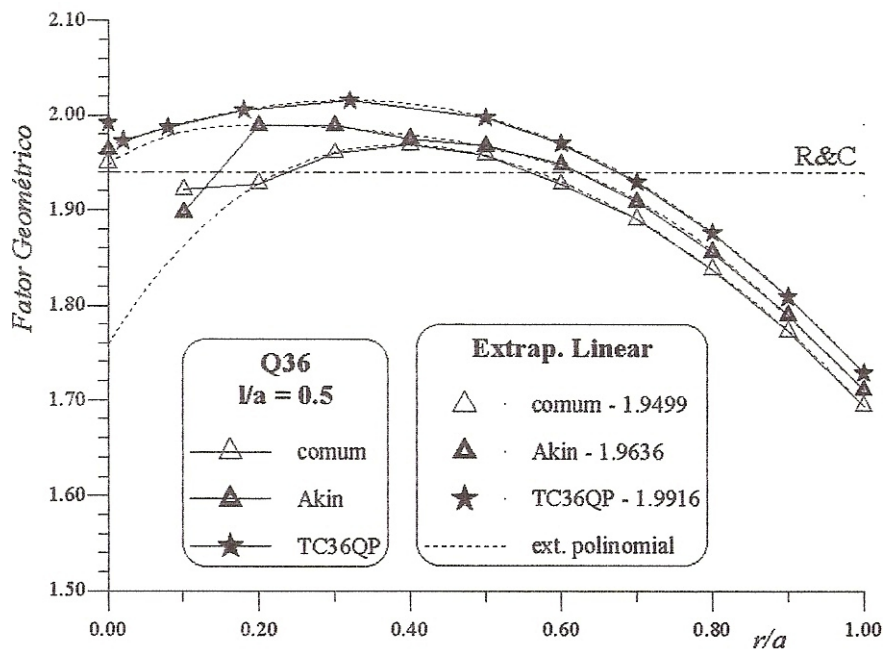


Figura 4.29: Comparação com elementos lagrangeanos quárticos.

Finalmente, uma comparação envolvendo os elementos singulares lineares, adaptados do trabalho de Tanaka e Itoh [88], que são comparados com o elemento de Akin, aplicados sobre uma discretização linear com um refino extra no extremo da trinca, na Figura 4.30.

O elemento de Tanaka e Itoh fornece uma estimativa um pouco melhor que o de Akin, cujos erros são, respectivamente, de -0,5619% e -1,6340%, contra uma erro de mais de 6% quando não são usados elementos especiais no extremo da trinca.

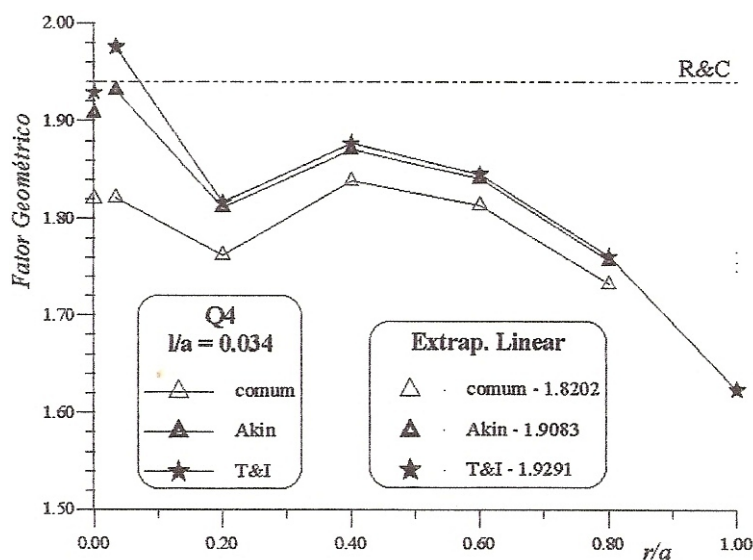


Figura 4.30: Comparação em uma discretização linear.

O elemento de Akin, dentre seus resultados, mostrou-se melhor para a discretização linear, mas nesta o elemento de Tanaka e Itoh forneceu um resultado ainda melhor, tanto na extrapolação linear quanto na local. Os elementos *quarter-point* trouxeram bons resultados quando extrapolados localmente, mesmo aqueles provenientes da família de elementos lagrangeanos. O melhor comportamento dentre os elementos apresentados pertence ao elemento de Stern, com extrapolação local.

Assim, para uma aproximação linear aconselha-se o uso do elemento de Tanaka e Itoh. Quando a interpolação é quadrática a melhor alternativa é o elemento de Stern, com elementos triangulares ou quadrangulares, tendo os elementos *quarter-point* como uma segunda alternativa, de aplicação bem mais simples. Os elementos de Akin podem ser aplicados quando os elementos são de ordem cúbica ou quártica. E para interpolações de ordem maior que quártica não são necessários qualquer tipo de elementos especiais.



## Capítulo 5

# Conclusão e Sugestões

Aplicou-se o Método da Função de Green Local Modificado (MFGLM) na solução de problemas planos da mecânica da fratura elástica linear (MFEL), propiciando uma nova alternativa para a análise destes.

Em comparação com o Método dos Elementos de Contorno (MEC), o MFGLM tem como vantagens não necessitar do conhecimento prévio da solução fundamental podendo ser aplicado em geometrias e condições de contorno complexas, e não possuir integrais singulares. No MFGLM, como no MEC, as trações podem ser interpoladas com funções singulares e, dessa forma, os deslocamentos e as trações são aproximados separadamente e as variações de tensão e deformação, próximas ao extremo da trinca, são independentes, o que é interessante em alguns casos não simétricos. Essa possibilidade de ordens de singularidade distintas pode ser vista como uma vantagem sobre o Método dos Elementos Finitos (MEF). Outra vantagem é que as tensões no contorno são fornecidas diretamente pelo MFGLM, sem a necessidade dos cálculos utilizados para este fim no MEF, e com uma precisão mais apurada.

Usando elementos convencionais isoparamétricos o MFGLM apresenta resultados um pouco melhores que o MEF, alguns muito próximos. A convergência  $p$  com estes elementos é maior que a convergência  $h$ , isto é, para um mesmo número de graus de liberdade, o modelo com maior ordem de interpolação traz uma estimativa melhor para o fator de intensidade de tensão.

Quando elementos especiais para trinca são usados para representar a singularidade e estes são provenientes do MEF, onde deslocamento e tração são interpolados com as mesmas funções,

os resultados são muito próximos do MEF, como foi demonstrado com os elementos de Stern e o elemento *quarter-point*. Mas, mesmo com esses elementos, em alguns resultados o MFGLM supera o MEF, na família de elementos de Akin o resultado fica melhor no MFGLM. Quando os elementos não são isoparamétricos, aproveitando as características herdadas do MEC, o MFGLM traz resultados melhores que o MEF.

O MFGLM se implementado para um número qualquer de células, como originalmente proposto, oferece uma nova vantagem, a facilidade de refino na região próxima ao extremo da trinca, tanto com elementos especiais quanto com elementos de alta ordem, os quais trouxeram bons resultados.

Assim, a implementação de elementos especiais deve sempre levar em conta a possibilidade de usar funções de interpolação singulares para a tração no contorno, como o elemento de Tanaka e Itoh, aqui apresentado, e o elemento de contorno *quarter-point* de tração. Dessa forma, o MFGLM pode fornecer uma melhor aproximação para o fator de intensidade de tensão. O elemento *quarter-point* de tração não foi implementado neste trabalho e fica como uma sugestão para trabalhos futuros, assim como outros elementos com as características acima, cuja implementação deve fazer uso da formulação não isoparamétrica do método apresentada.

Ficam, também, como sugestões: utilizar outras técnicas para obter a estimativa para o fator intensidade de tensão, como o método da integral  $J$ ; aplicar o MFGLM na solução dos problemas da mecânica da fratura elastoplástica; a análise de problemas tridimensionais com trinca e a implementação do método para um número qualquer de células.

A dependência paramétrica pode ser muito reduzida se a matriz de rigidez auxiliar oferecer uma influência proporcional, dependente do valor do termo a ser alterado. Isto é obtido se os parâmetros forem multiplicados com os termos da diagonal da matriz de rigidez, proveniente do MEF na aproximação das funções de Green, no lugar da soma até então utilizada.

O tempo computacional, elevado se comparado com o MEF, pode ser bastante reduzido se o algoritmo numérico for adequado. Uma possível alternativa foi apresentada aqui, mas apenas para o contorno, ficando, também, como sugestão o desenvolvimento de algo semelhante para as equações do domínio.

Então, conclui-se que o MFGLM é uma ferramenta em potencial para a análise de falha, pois este carrega as características do MEC, como a interpolação não isoparamétrica, e a versatilidade

do MEF, podendo ser aplicado a qualquer geometria.





# Referências Bibliográficas

- [1] AKIN, J. E. The generation of elements with singularities. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 10 (1976), 1249–1259.
- [2] AKIN, J. E. Elements for the analysis of line singularities. *The Mathematics of Finite Elements with Applications 3* (1979).
- [3] BARBIERI, R. *Desenvolvimento e Aplicação do Método da Função de Green Local modificado (MLGFM) para Problemas do Meio Contínuo*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1992.
- [4] BARBIERI, R., & BARCELLOS, C. S. A modified local green's functions technique for the mindlin's plate model. *Proc. 13th Conf Boundary Element Technology, Ed. Brebbia, C. A. and Gipson, G.* (1991).
- [5] BARBIERI, R., & BARCELLOS, C. S. Solução do problema potencial pelo método da função de green local modificado (mlgfm). In *Prac. XI COBEM - Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica* (1991).
- [6] BARBIERI, R., & BARCELLOS, C. S. Mindlin's plate solutions by the mlgfm. *BEM XV - Int. Corif. on Boundary Element Meth.* 2 (1993), 149–164.
- [7] BARBIERI, R., & BARCELLOS, C. S. Non-homogeneous field potential problems solution by the modified local green's functions method (mlgfm). *Eng. Analysis with Boudary Elements 11* (1993), 9–15.

- [8] BARBIERI, R., MACHADO, R. D., FILIPPIN, C. G., & BARCELLOS, C. S. O método da função de green local modificado (mlgfm) aplicado a problemas da mecânica do contínuo: Parte i - elastoestática. In *XIII CILAMCE - Cong. Ibero Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia* (Porto Alegre, 1992).
- [9] BARBIERI, R., NOEL, A. T., & BARCELLOS, C. S. A green's function approach to shell analysis. *BEM XV - Int. Conf on Boundary Element Meth.* 2 (1993), 179–194.
- [10] BARCELLOS, C. S., & BARBIERI, R. Solution of singular potential problems by the modified local green's functions method (mlgfm). In *Proc. 13th Conf Boundary Element Technology*, Ed. Brebbia, C. A. and Gipson, G. (1991).
- [11] BARCELLOS, C. S., BARBIERI, R., MACHADO, R. D., & FILIPPIN, C. G. Método modificado da função de green local (mlgfm) - uma nova alternativa para a solução de problemas da mecânica - parte i: Descrição do método. In *7º SIBRAT - Simpósio Brasileiro Sobre Tubulações e Vasos de Pressão* (Florianópolis, 1992).
- [12] BARCELLOS, C. S., BARBIERI, R., MACHADO, R. D., & FILIPPIN, C. G. Método modificado da função de green local (mlgfm) - uma nova alternativa para a solução de problemas da mecânica - parte ii: Aplicações. In *7º SIBRAT - Simpósio Brasileiro Sobre Tubulações e Vasos de Pressão* (1992).
- [13] BARCELLOS, C. S., & SILVA, L. H. M. Elastic membrane solution by a modified local green's function method. In *Proceedings of the Int. Conf. on Boundary Element* (1987).
- [14] BARSOUM, R. S. Application of quadratic isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *Int. J. Fract.* 10 (1974), 603–605.
- [15] BARSOUM, R. S. On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 10 (1976), 25–37.
- [16] BARSOUM, R. S. Letter to the editor. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 18 (1982), 1420–1422.
- [17] BENZLEY, S. E. Representation of singularities with isoparametric finite elements. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 8 (1974), 537–545.

- [18] BESKOS, D. E. Boundary elements methods in mechanics. In *Computational Methods in Mechanics*, Elsevier Science Publishers (1987).
- [19] BLACKBURN, W. S. Calculation of stress intensity factors at crack tips using special elements. *The Math. Finite Elem.* (1973), 327–336.
- [20] BLANDFORD, G. E., INGRAFFEA, A. R., & LIGGETT, J. A. Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 17 (1981), 387–404.
- [21] BORESIS, A. P., & LYNN, P. P. *Elasticity in Engineering Mechanics*. Prentice-Hall, 1974.
- [22] BOWIE, O. L., & NEAL, P. M. Single-edge crack in rectangular tensile sheet. *J. Appl. Mech.* 32 (1965), 708–709.
- [23] BROEK, D. *Elementary Engineering Fracture Mechanics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1986.
- [24] BURNS, T. J. *The Partial Current Balance Method: A Local Green's Function Technique for the Numerical Solution of Multidimensional Neutron Diffusion Problems*. Tese de Doutorado, University of Illinois, Urbana, 1975.
- [25] BYSKOV, E. The calculation of stress intensity factors using the finite element method with cracked elements. *Int. J. Fract.* 6 (1970), 159–167.
- [26] CAREY, G., & ODEN, J. T. *Finite Elements: A Second Course*. Vol. IV in the Texas Finite Element Series. Prentice-Hall, 1983.
- [27] CHANG, S. K., TUBA, I. S., & WILSON, W. K. On the finite element method in linear fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics* 2 (1970), 1–17.
- [28] COOK, R. D. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3<sup>rd</sup> ed. John Wiley & Sons, 1989.
- [29] CROUCH, S. L. Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 10 (1976), 301–343.

- [30] CRUSE, T. A. Numerical evaluation of elastic stress intensity factors by the boundary integral equation method. In *The Surface Crack: Physical Problems and Computational Solutions* (1972), Swedlow, Ed., pp. 153–170.
- [31] CRUSE, T. A. Boundary-integral equation method for three-dimensional elastic fracture mechanics analysis. In *AFOSR-TR-75-0813, Accession N° ADA01160* (1975), pp. 13–20.
- [32] CRUSE, T. A. Two dimensional bie fracture mechanics analysis. *Applied Mathematical Modeling* 2 (1978), 287–293.
- [33] DHATT, G., & TOUZOT, G. *The Finite Element Method Displayed*. John Wiley & Sons, Norwich, 1984.
- [34] DUGDALE, D. S., & RUIZ, C. *Elasticity for Engineers*. McGraw-Hill, London, 1971.
- [35] DUNHAM, R. S. A quadrature rule for conforming crack tip elements. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 14 (1974), 287–312.
- [36] DYM, C. L., & SHAMES, I. H. *Solid Mechanics - A Variational Approach*. McGraw-Hill, New York, 1973.
- [37] EZAWA, Y., & OKAMOTO, N. Singularity modeling in two and three dimensional stress intensity factor computation using the boundary element method. In *in Boundary Elements VII* (1985).
- [38] FILIPPIN, C. G. Desenvolvimento e aplicação do método da função de green local modificado à equação de helmholtz. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1992.
- [39] FILIPPIN, C. G., BARBIERI, R., MACHADO, R. D., & BARCELLOS, C. S. O método da função de green local modificado como ferramenta computacional na solução do problema de vibração livre. In *Rev. Sociedade Brasileira de Acústica - SOBRAC - Acústica e Vibrações, Vol. II* (1992).
- [40] FILIPPIN, C. G., BARBIERI, R., MACHADO, R. D., & BARCELLOS, C. S. O método da função de green local modificado (mlgfm) aplicado a problemas da mecânica do contínuo: Parte

- iii - problemas regidos pela equação de helmholtz. In *XIII CILAMCE - Cong. Ibero Latino-Americano sobre Métodos Comp. para Eng.* (Porto Alegre, 1992).
- [41] FREESE, C. E., & TRACY, D. M. The natural isoparametric triangle versus collapsed quadrilateral for elastic crack analysis. *Int. J. Fract.* 12 (1976), 768–770.
- [42] GRAY, L. J. Hypersingular integrals in boundary element fracture analysis. *Int. J. Fract.* 29 (1990), 1135–1158.
- [43] GRIFFITH, A. A. The phenomena of rupture and flow in solids. *Phil. Trans. Roy. Soco of London A221* (1920), 163–197.
- [44] GRIFFITH, A. A. The theory of rupture. In *Proc. 1st Int. Congerss Appl. Mech., Biezeno and Burgers Ed. Waltman* (1924), pp. 55–63.
- [45] GUIGGIANI, M. Letters to the editor. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 26 (1988), 1683–1684.
- [46] HANSHELL, R. D., & SHALL, K. G. Crack tip elements are unnecessary. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 9 (1975), 495–509.
- [47] HARROP, L. P. The optimum size of quarter-point crack tip elements. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 17 (1982), 1101–1103.
- [48] HEYLIGER, P. R., & KRIZ, R. D. Stress intensity factors by enriched mixed finite elements. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 28 (1989), 1461–1473.
- [49] HIBBIT, H. D. Some properties of singular isoparametric elemnts. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 11 (1977), 180–184.
- [50] HORAK, W. C. *Local Green's Function Techniques for the Solution of Heat Conduction and Incompressible Fluid Flow Problems.* Tese de Doutorado, University of Illinois, 1980.
- [51] HORAK, W. C., & DORNING, J. J. A local green's function method for the numerical solution of heat conduction and fluid flow problems. *Nuclear Science Engng.* 64 (1977), 192–207.
- [52] HORAK, W. C., & DORNING, J. J. A course-mesh method for heat flow analysis based upon the use of locally-defined green's functions. *Numerical Methods in Thermal Problems 2* (1981).

- [53] HUSSAIN, M. A., VASILAKIS, J. D., & PU, L. Quadratic and cubic transition elements. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 16 (1981), 1397–1406.
- [54] IRWIN, G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack transversing a plate. *J. Appl. Mech.* 24 (1957), 361–364.
- [55] IRWIN, G. R. Fracture i. *Handbuch der Physik* 6 (1958), 551–590.
- [56] IRWIN, G. R. *Fracture Mechanics*. Struct. Mechanics, Pergamon Press, New York, 1960.
- [57] ISIDA, M. Effect of width and length on stress intensity factors of intemaly cracked plates under varios boundary conditions. *Int. J. Fract. Mech.* 7 (1971), 306–316.
- [58] KNOTT, V. F. *Fundamentals of Fracture Mechanics*. John Wiley & Sons, New York, 1973.
- [59] KONKOV, V. *Variational Principles of Continuum Mechanics with Engineering Applications*. D. Reidel Publishing Company, 1986.
- [60] LAWRENCE, R. D. *A Nodal Green's Function Method for Multidimensional Neutron Diffusion Calculations*. Tese de Doutorado, University of Illinois, 1979.
- [61] LUEMBERG, D. G. *Optimization by Vector Space Methods*. John Wiley & Sons, New York, 1969.
- [62] LYNN, P. P., & INGRAFFEA, A. R. Transition elements to be used with quarter point crac tip elements. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 11 (1977), 1031–1036.
- [63] MACHADO, R. D. *Desenvolvimento do Método Modificado da Função de Green Local para a Solução de Placas Laminadas de Materiais Compostos*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1992.
- [64] MACHADO, R. D., BARBIERI, R., BARCELLOS, C. S., & FILIPPIN, C. G. O método da função de green local modificado (mlgfm) aplicado a problemas da mecânica do contínuo: Parte ii - placas ortotrópicas laminadas. In *XIII CILAMCE - Cong. Ibero Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia* (Porto Alegre, 1992).

- [65] MACHADO, R. D., & BARCELLOS, C. S. A first modified local green's functions method approach to orthotropic laminated plates. In *Proc. CADCOMP92 - Computer Aided Design for Composite Materials Conference* (USA, 1992), C. A. N. Brebbia, Ed.
- [66] MALDANER, M., & BARCELLOS, C. S. Análise de problemas da mecânica da fratura bidimensional pelo método da função de green local modificado. In *XIII CILAMCE - Cong. Ibero Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia* (Porto Alegre, 1992).
- [67] MALVERN, L. E. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, New Jersey, 1969.
- [68] MARTINEZ, J., & DOMINGUEZ, J. Short communication on the use of quarter-point boundary elements for stress intensity factor computations. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 20 (1984), 1941–1950.
- [69] MUSKHELISHVILI, N. I. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Noordhoff, Leiden, 1953.
- [70] NEWTON, R. E. Degeneration of brick-type isoparametric elements. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 7 (1973), 579–581.
- [71] ODEN, J. T., & REDDY, J. N. *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*. John Wiley & Sons, New York, 1976.
- [72] OLIVEIRA, R., & KAIZER, S. Modelling the hrr-singularity with akin and conventional singular elements. *Eng. Fracture Mechanics* 27, 2 (1987), 199–204.
- [73] PARIS, P. C., & SIH, G. C. Stress analysis of cracks. In *Fracture Toughness Testing and its Applications* (1965), vol. ASTM STP 381, pp. 30–81.
- [74] PARKER, A. P. *The Mechanics of Fracture and Fatigue, an introduction*. E. & F. N. Spon, USA, 1981.
- [75] PLAN, T. H. H., TONG, P., & LUK, C. H. Elastic crack analysis by a finite element hybrid method. In *Proc. 3rd Conf. on Matrix Methods in Structural Analysis AFFOL-TR-71-160* (1973), pp. 661–682.

- [76] PORTELA, A., ALIABADI, M. H., & ROOKE, D. P. The dual boundary element method: Effective implementation for crack problems. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 33 (1992), 1269–1287.
- [77] PU, S. L., HUSSAIN, M. A., & LORENSEN, W. E. Collapsed 12 nodes triangular elements as crack tip elements for elastic fracture. Tech. rep., ARLCBTR77047, 1977.
- [78] ROOKE, D. P., & CARTWRIGHT, D. J. *Compendium of Stress Intensity Factors*. The Hellington Press, England, 1976.
- [79] SAOUMA, V. E., & SCHWEMMER, D. Numerical evaluation of the quarter-point crack tip element. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 20 (1984), 1629–1641.
- [80] SIH, G. C. *Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*. Noordhoff International Publishing, Leiden, 1973.
- [81] SILVA, L. H. M. *Novas Formulações Integrais para Problemas da Mecânica*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1988.
- [82] SINCLAIR, G. B., & MULLAD, D. A simple yet accurate finite element procedure for computing stress intensity factors. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 18 (1982), 1587–1600.
- [83] SNEDDON, I. N. The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid. *Proc. Royal Soc. London A* 187 (1946), 229–260.
- [84] SNYDER, M. D., & CRUSE, T. A. Boundary-integral equation analysis of cracked anisotropic plates. *Int. J. Fract.* 11 (1975), 315–328.
- [85] STERN, M. Families of consistent conforming elements with singular derivative fields. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 14 (1979), 409–421.
- [86] STERN, M., & BECKER, E. B. A conforming crack tip element with quadratic variation in the singular fields. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 12 (1978), 279–288.
- [87] TAKAKUDA, K. Stress singularities near crack front. *Trans. Japan Soc. Mech. Engrs* 50, A (1984), 1193–1200.



- [88] TANAKA, M., & ITOH, H. A new family of crack elements for stress intensity factor computation in elastostatics boundary element method. In *Boundary Elements VIII, Vol. 1* (Tokyo, 1986), C. by Brebbia, Ed.
- [89] TELLES, J. C. F. A self-adaptative co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary elements integrals. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 24 (1987), 959–973.
- [90] TRACY, D. M. Finite elements for determination of crack tip elastic stress intensity factors. *Eng. Fracture Mechanics* 3 (1971), 255–265.
- [91] TSAMASPHYROS, G., & GIANNAKOPOULUS, A. E. The use of conformal mapping for creating singular elements. *Eng. Fracture Mechanics* 28, 1 (1987), 55–65.
- [92] WATSON, O. J. Hermitian cubic boundary elements for plane problems of fracture mechanics. *Research Mechanica* 4 (1982), 23–42.
- [93] WESTERGAARD, H. M. Bearing pressures and cracks. *J. Appl. Mech.* A61 (1939), 49–53.
- [94] WILLIAMS, M. L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *J. Appl. Mech.* 24 (1957), 109–114.
- [95] WILSON, W. K. *Combined Mode Fracture Mechanics*. Tese de Doutorado, University of Pittsburgh, 1969.
- [96] YAMADA, Y., EZAWA, Y., NISHIGUCHI, I., & OKABE, M. Recosiderations on singularity or crack tip elements. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 14 (1979), 1525–1544.
- [97] YING, L. A. A note on the singularity and the strain energy of singular elements. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 18 (1982), 31–39.
- [98] ZIENKIEWICZ, O. C. *The Finite Element Method in Engineering Science*. McGraw-Hill, New York, 1971.



## Apêndice A

# Integração Analítica para o Elemento

## Quadrático da Família de Stern

Stern e Becker [86] propuseram uma integração analítica para seu elemento triangular singular. A demonstração desta integração necessita que algumas definições do Capítulo 4 sejam lembradas: as matrizes  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{G}$  são expressas por

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} & \rho \frac{\partial \sigma}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} & \rho \frac{\partial \sigma}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \dots & \frac{\partial \Psi_j}{\partial \rho} & \dots \\ \dots & \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_j}{\partial \sigma} & \dots \end{bmatrix} \quad \text{com } j = 1, 2, \dots, 6 \quad (\text{A.2})$$

Sendo que  $\mathbf{G}$  pode ser decomposta em uma equação matricial, contendo duas outras matrizes  $\mathbf{G}_0$  e  $\mathbf{G}_1$ , dependentes apenas da coordenada  $\sigma$  do sistema de coordenadas definido na Figura 4.13, tal que

$$\mathbf{G}(\rho, \sigma) = \mathbf{G}_0(\sigma) + \mathbf{G}_1(\sigma)\rho^{\lambda-1} \quad (\text{A.3})$$

onde os termos das matrizes  $\mathbf{G}_0$  e  $\mathbf{G}_1$  são polinômios de ordem no máximo  $(K + 1)$ , sendo  $K$  o número de nós internos no lado oposto ao nó singular, Figura 4.14.

A matriz que contém as derivadas parciais das funções de interpolação em relação às coordenadas espaciais (matriz  $\mathbf{D}$ ), também definida no Capítulo 4, pode ser obtida do produto das matrizes  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{G}$ .

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \cdots & \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} & \cdots \\ \cdots & \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} & \cdots \end{bmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{G} = \mathbf{L}(\mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_1\rho^{\lambda-1}) \quad (\text{A.4})$$

O vetor deslocamento generalizado, na elasticidade plana, é expresso por  $\mathbf{u}^t = \{\mathbf{u}_x \quad \mathbf{u}_y\}$  e, definindo a matriz  $\mathbf{D}^*$ , criada a partir da matriz de derivadas globais como

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & 0 \\ 0 & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

as derivadas espaciais dos deslocamentos são:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} \right\}^t = \mathbf{D}^*\mathbf{u} \quad (\text{A.6})$$

A densidade de energia de deformação é dada por

$$\sigma = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^t\mathbf{C}^*\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\mathbf{u}^t\mathbf{D}^{*t}\mathbf{C}^*\mathbf{D}^*\mathbf{u} \quad (\text{A.7})$$

onde  $\mathbf{C}^*$  é a matriz de coeficientes elásticos, escrita convenientemente na forma

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 & C_{12} \\ 0 & C_{33} & C_{33} & 0 \\ 0 & C_{33} & C_{33} & 0 \\ C_{21} & 0 & 0 & C_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

sendo  $C_{ij}$  os coeficientes da matriz  $\mathbf{C}$  ( $3 \times 3$ ) convencional da elasticidade plana, fornecida no Capítulo 2.

Assim, a matriz de rigidez fica

$$\mathbf{K} = \int_A \mathbf{D}^{*t}\mathbf{C}^*\mathbf{D}^* dA \quad (\text{A.9})$$

e pode ser particionada em quatro submatrizes, assim como  $\mathbf{C}^*$ , da seguinte maneira:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{11} & \mathbf{C}^{12} \\ \mathbf{C}^{21} & \mathbf{C}^{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Notando que  $\mathbf{K}^{12} = (\mathbf{K}^{21})^t$  e  $\mathbf{C}^{12} = (\mathbf{C}^{21})^t$  cada uma das submatrizes de rigidez podem ser calculadas por

$$\mathbf{K}^{\alpha\beta} = \int_A \mathbf{D}^t \mathbf{C}^{\alpha\beta} \mathbf{D} \, dA \quad (\text{A.11})$$

e, quando substituído  $\mathbf{D}$  pela expressão (A.4), fica

$$\mathbf{K}^{\alpha\beta} = \int_0^1 \int_0^1 (\mathbf{G}_0^t + \mathbf{G}_1^t \rho^{\lambda-1}) \mathbf{L}^t \mathbf{C}^{\alpha\beta} \mathbf{L} (\mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_1 \rho^{\lambda-1}) 2A \rho \, d\rho \, d\sigma \quad (\text{A.12})$$

Definindo a parte central do integrando acima, que não depende de  $\rho$ , como

$$\hat{\mathbf{C}}^{\alpha\beta} = \mathbf{L}^{*t} \mathbf{C}^{\alpha\beta} \mathbf{L}^*, \quad \text{onde } \mathbf{L}^* = 2A\mathbf{L} \quad (\text{A.13})$$

a expressão (A.12) pode ser reescrita na forma

$$\mathbf{K}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2A} \int_0^1 \int_0^1 (\mathbf{G}_0^t + \mathbf{G}_1^t \rho^{\lambda-1}) \hat{\mathbf{C}}^{\alpha\beta} (\mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_1 \rho^{\lambda-1}) \rho \, d\rho \, d\sigma \quad (\text{A.14})$$

ou

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2A} \int_0^1 \int_0^1 & \left[ (\mathbf{G}_0^t \hat{\mathbf{C}}^{\alpha\beta} \mathbf{G}_0) \rho + (\mathbf{G}_0^t \hat{\mathbf{C}}^{\alpha\beta} \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_1^t \hat{\mathbf{C}}^{\alpha\beta} \mathbf{G}_0) \rho^\lambda \right. \\ & \left. + (\mathbf{G}_1^t \hat{\mathbf{C}}^{\alpha\beta} \mathbf{G}_1) \rho^{2\lambda-1} \right] d\rho \, d\sigma \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

que, quando integrada em relação a  $\rho$ , transforma-se em

$$\mathbf{K}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2A} \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{G}_0^t \hat{\mathbf{C}}^{\alpha\beta} \mathbf{G}_0) + \frac{1}{\lambda+1} (\mathbf{G}_0^t \hat{\mathbf{C}}^{\alpha\beta} \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_1^t \hat{\mathbf{C}}^{\alpha\beta} \mathbf{G}_0) + \frac{1}{2\lambda} (\mathbf{G}_1^t \hat{\mathbf{C}}^{\alpha\beta} \mathbf{G}_1) \right] d\sigma \quad (\text{A.16})$$

Pode-se, ainda, escrever a integral acima em uma forma mais compacta,

$$\mathbf{K}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2A} \int_0^1 \mathbf{Q}^{\alpha\beta}(\sigma) d\sigma \quad (\text{A.17})$$

onde  $\mathbf{Q}^{\alpha\beta} = \mathbf{Q}_1^{\alpha\beta} + \mathbf{Q}_\lambda^{\alpha\beta} + \mathbf{Q}_{2\lambda-1}^{\alpha\beta}$ , cujos termos são polinômios em  $\sigma$  e são definidos por

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{G}_0^t \hat{\mathbf{C}}^{\alpha\beta} \mathbf{G}_0 \right) \\ \mathbf{Q}_\lambda^{\alpha\beta} &= \frac{1}{\lambda + 1} \left( \mathbf{G}_0^t \hat{\mathbf{C}}^{\alpha\beta} \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_1^t \hat{\mathbf{C}}^{\alpha\beta} \mathbf{G}_0 \right) \\ \mathbf{Q}_{2\lambda-1}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2\lambda} \left( \mathbf{G}_1^t \hat{\mathbf{C}}^{\alpha\beta} \mathbf{G}_1 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

A integração ao longo da direção radial pode, então, ser calculada analiticamente. Essa integração analítica eleva consideravelmente o custo computacional, devido à complexidade do algoritmo na identificação das matrizes (A. 18). Para integrar na direção circunferencial, integral (A.17), também se pode realizar explicitamente, mas isto elevaria ainda mais o tempo despendido e é fácil verificar que se pode aplicar uma quadratura de Gauss convencional, já que os termos de  $\mathbf{Q}^{\alpha\beta}(\sigma)$  são polinômios em  $\sigma$ . Assim, o elemento de Stern é integrado exatamente, sem que a precisão do elemento seja deteriorada.