

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECÂNICA**

**UM MÉTODO PARA ANÁLISE
DE CONFIABILIDADE PARA
ELEMENTOS FINITOS**

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE
FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO
DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**

Eng.º ANDRÉ TEÓFILO BECK

FLORIANÓPOLIS, FEVEREIRO DE 1999.

UM MÉTODO PARA ANÁLISE DE CONFIABILIDADE
PARA ELEMENTOS FINITOS

Eng.º ANDRÉ TEÓFILO BECK

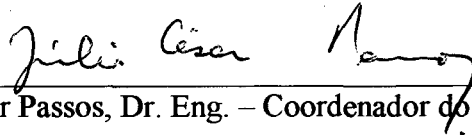
ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA
EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

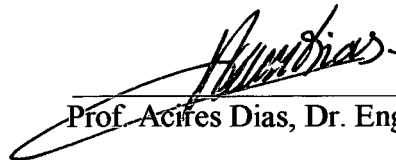


Edison da Rosa, Dr. Eng. – Orientador

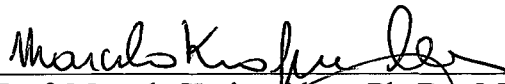


Júlio César Passos, Dr. Eng. – Coordenador do Curso

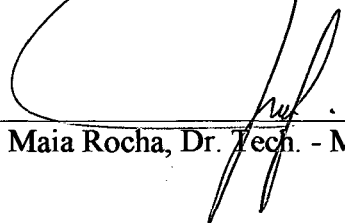
BANCA EXAMINADORA



Prof. Acifres Dias, Dr. Eng. - Presidente



Prof. Marcelo Krajnc Alves, Ph. D. - Membro



Prof. Marcelo Maia Rocha, Dr. Tech. - Membro

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho ao meu avô, Germano José Beck, pelo exemplo de fé, perseverança e humildade, in memoriam.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Silvana e Oscar Lehenbauer por terem emprestado um cantinho deste paraíso que é a ilha de Florianópolis. Neste local tranquilo e inspirador floresceu e amadureceu boa parte das idéias contidas neste trabalho.

Agradeço aos primos, tios e outros parentes de enésimo grau que tão bem me receberam no Morro das Pedras.

Agradeço aos mestres que me ensinaram os caminhos que trilhei para chegar aqui: Julius Sporket, Rosa Leamar, Manuel Joaquim e, em especial, ao Rogério “Rato” Marczak, por ter-me passado aquela famosa apostila...

Agradeço ao meu orientador, Edison da Rosa, pelo apoio e motivação, e por ter escrito a referida apostila...

Agradeço aos meus pais e irmãos pelo apoio e incentivo.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro a este trabalho.

Sumário

0.1	Lista de Figuras	4
0.2	Lista de Tabelas	6
0.3	Lista de Símbolos	7
0.4	Lista de Abreviaturas	10
0.5	Resumo	11
0.6	Abstract	12
1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Introdução	13
1.2	Objetivos	14
1.3	Contribuições	14
1.4	Modelagem de problemas de engenharia	16
1.5	Análise crítica da metodologia determinística de projeto	17
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	21
2.1	Introdução	21
2.2	Conceitos fundamentais	21
2.2.1	Variável aleatória	21
2.2.2	Processo estocástico	22
2.2.3	Confiabilidade	23
2.2.4	Modo de falha	23
2.2.5	Equação de estado limite	24
2.3	Modelos de confiabilidade estrutural	24
2.3.1	Modelos para variáveis aleatórias	25
2.3.2	Modelos para processos estocásticos	26
2.3.3	Modelos para campos estocásticos	26
2.4	Interferência entre populações	27
2.4.1	Margem de segurança	29
2.4.2	O ponto de projeto e o índice de confiabilidade de Hasofer e Lind	31
2.4.3	Generalização para problemas reais	32
2.5	Falha à primeira sobrecarga	34
2.6	Conclusão	38
3	MÉTODOS APROXIMADOS DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDEM	39
3.1	FORM - Método aproximado de primeira ordem	39
3.1.1	Introdução	39
3.1.2	Transformação para o espaço normal padrão	40

3.1.3	Algoritmos de otimização	48
3.1.4	Análise de sensibilidade da P_f de primeira ordem.	50
3.1.5	Aproximação de primeira ordem para múltiplos modos de falha	51
3.2	SORM - Método aproximado de segunda ordem	54
3.2.1	SORM baseado em curvaturas	55
3.2.2	SORM baseado em pontos	56
3.2.3	Aproximação de segunda ordem para múltiplos modos de falha	57
4	SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO	58
4.1	Introdução	58
4.2	Formulação	59
4.3	Métodos para redução da variância	60
4.3.1	Variáveis antitéticas	61
4.3.2	Amostragem por importância	61
4.3.3	Amostragem por importância para múltiplos modos de falha	63
4.3.4	Amostragem por importância adaptativa	65
4.4	Geração de números aleatórios	65
4.4.1	Geração de números com distribuição uniforme	66
4.4.2	Geração de números aleatórios com distribuição conjunta	67
4.5	Método da superfície de resposta	68
5	ELEMENTOS FINITOS ESTOCÁSTICOS	71
5.1	Formulação	71
5.2	MEF estocástico de segundo momento	73
5.2.1	Aproximação de primeira ordem por série de Taylor	73
5.2.2	Método da perturbação	74
5.3	FERM - Método de confiabilidade para elementos finitos	75
5.3.1	Sub-modelagem no FERM	76
5.4	Discretização de campos estocásticos	77
5.4.1	Campos estocásticos Gaussianos	77
5.4.2	Aspectos importantes	78
5.4.3	Métodos de discretização	79
5.5	Análise de sensibilidade no MEF Estocástico	80
5.5.1	Cálculo de gradientes por diferenças finitas	80
5.5.2	DDM - Método de diferenciação direta	81
5.5.3	Cálculo das Hessianas	84
6	RESULTADOS	85
6.1	Descrição do programa ACE-Pro	85
6.2	Configuração de FERM adotada	86
6.3	Problemas analisados	88
6.3.1	Problema da viga engastada	89
6.3.2	Problema da haste tracionada	94
6.3.3	Problema da treliça	96
6.3.4	Problema do quadro de 3 andares	98
6.3.5	Problema da coluna treliçada	102

6.4	Análise de confiabilidade da Ponte Hercílio Luz	107
6.4.1	Caracterização estatística das variáveis aleatórias	108
6.4.2	Resultados da análise probabilística	111
7	CONCLUSÃO	118
7.1	Apreciação dos métodos analisados	118
7.2	Sugestões para continuação deste trabalho	120
7.2.1	Complementação do ACE-Pro	121
7.2.2	Uma nova plataforma para o ACE-Pro	121
7.2.3	Tratamento de sistemas	121
7.2.4	Otimização estrutural baseada em confiabilidade	122
A	ACE-Pro - Manual para Utilização e Programação.	129

0.1 Lista de Figuras

1.1	Solução de problemas de engenharia.	16
2.1	Equação de estado limite e domínios de falha e não falha.	24
2.2	Interferência entre populações.	27
2.3	Influência da média na interferência.	28
2.4	Influência do desvio-padrão na interferência.	28
2.5	Probabilidade de falha em função da margem de segurança.	29
2.6	Margem de segurança no espaço normal padrão.	30
2.7	Função de probabilidade conjunta binormal decorrelacionada.	32
2.8	Transformação para o espaço normal padrão e definição do ponto de projeto.	32
2.9	Problema típico de interferência no domínio do tempo.	34
2.10	Processo estocástico ergódico.	34
2.11	Processo ergódico discretizado no tempo.	35
2.12	Ensaio de Bernoulli.	35
3.1	Aproximação de primeira ordem da P_f	39
3.2	Distribuição normal equivalente a uma distribuição uniforme - FDP.	43
3.3	Distribuição normal equivalente a uma distribuição uniforme - FPA.	43
3.4	Aproximação linear da P_f para dois modos de falha.	53
3.5	Aproximação de segunda ordem da P_f	55
4.1	Amostragem por importância usando o ponto de projeto.	62
4.2	Amostragem por importância para múltiplos modos de falha.	64
4.3	Geração de números aleatórios com distribuição prescrita.	66
5.1	Problema de elasticidade.	71
5.2	Elementos finitos como uma caixa preta.	75
5.3	Cálculo da P_f utilizando o modelo de elementos finitos.	75
5.4	Obtenção da FDP de efeitos de carregamento.	77
6.1	Viga engastada para problema 6.3.1.	89
6.2	Resultados para problema da viga engastada.	90
6.3	Relação entre o coeficiente de segurança e a P_f	91
6.4	FDP da tensão na extremidade engastada.	91
6.5	Influência da forma da equação de estado no cálculo da P_f	92
6.6	Influência do Δz na simulação via RSM e no resultado de SORM.	93
6.7	Convergência da solução por simulação.	94
6.8	Haste tracionada do problema 6.3.2.	94
6.9	Influência da ordem das VA no cálculo da P_f	95
6.10	Treliça do problema 6.3.3.	96
6.11	Relação entre o coeficiente de segurança e a P_f	98
6.12	Influência do β nos limites bi-modais da P_f da treliça.	98
6.13	Quadro de 3 andares do problema 6.3.4.	99
6.14	Importância das VA no cálculo da P_f	101
6.15	Convergência da solução por simulação.	101

6.16	Influência da ordem das VA no resultado da simulação.	102
6.17	FDP da força atuante no primeiro piso.	102
6.18	Coluna treliçada do problema 6.3.5.	103
6.19	Curva carga - deflexão da coluna.	104
6.20	Configuração da coluna no ponto de projeto.	105
6.21	Importância das VA no cálculo da P_f	106
6.22	Instabilidade no cálculo da superfície de resposta.	106
6.23	Ilustração volumétrica do modelo de viga 3D da ponte.	108
6.24	FDP da tensão de escoamento.	108
6.25	FDP da corrosão nas barras.	109
6.26	Probabilidades de falha condicionais calculadas.	114

0.2 Lista de Tabelas

1.1	Programas probabilísticos para uso em engenharia.	15
1.2	Características dos programas probabilísticos.	15
6.1	Dados para problema da viga engastada.	89
6.2	Resultados para problema da viga engastada.	89
6.3	Dados para problema da haste tracionada.	94
6.4	Resultados para problema da haste tracionada.	95
6.5(a)	Dados para VA do problema da treliça.	96
6.5(b)	Dados para variáveis determinísticas.	97
6.6(a)	Resultados para o problema da treliça (falha por qualquer modo).	97
6.6(b)	Resultados para cada barra.	97
6.7	Dados para problema do quadro.	99
6.8(a)	Resultados para falha do quadro.	100
6.8(b)	Resultados para cada modo de falha.	100
6.9	Dados para problema da coluna treliçada.	103
6.10	Resultados para problema da coluna treliçada.	104
6.11	Coordenadas do ponto de projeto.	105
6.12	Dados para análise de referência da ponte.	111
6.13	Resultados para caso de referência.	111
6.14	Resultados para influência das distribuições assumidas.	112
6.15	Resultados para influência do momento fletor.	113
6.16	Resultados para falhas condicionais das barras.	115
6.17	Resultados para cadeia reforçada.	117

0.3 Lista de Símbolos

a	termo independente da superfície de resposta
\mathbf{A}	matriz Hessiana diagonalizada
A_{ij}	evento definido entre os modos de falha i e j
B_{ij}	evento definido entre os modos de falha i e j
\mathbf{c}	matriz dos coeficientes em \mathbf{z}^2 da superfície de resposta
\mathbf{C}	matriz de covariâncias
\mathbf{b}	vetor dos coeficientes em \mathbf{z} da superfície de resposta
d	distância entre um ponto determinado e a origem
\mathbf{d}_k	direção de procura linear
\mathbf{D}	matriz diagonal de desvios padrão
D_f	domínio de falha
$E(Z)$	esperança matemática de Z
f_p	fator de projeto
f	fator percentual do desvio padrão utilizado no cálculo de diferenças finitas
$f_Z(z)$	função densidade de probabilidade marginal da variável Z
$F_Z(z)$	função de probabilidade acumulada marginal da variável Z
$f_Z^{neq}(z)$	função densidade de probabilidade normal equivalente
$F_Z^{neq}(z)$	função de probabilidade acumulada normal equivalente
$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$	função densidade de probabilidade conjunta de \mathbf{Z}
$F_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$	função de probabilidade acumulada conjunta de \mathbf{Z}
F_i	evento falha em relação ao i -ésimo modo de falha
F	fator empírico para cálculo do coeficiente de correlação equivalente
\mathbf{f}	vetor de cargas externas
$g(\mathbf{z})$	equação de estado do problema no espaço \mathbb{Z}
$g(\mathbf{z}) = 0$	equação de estado limite
$h_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$	função de amostragem por importância
$\mathbf{H}g_{\mathbf{y}}(\mathbf{z})$	Hessiana de $g(\mathbf{z})$ calculada em \mathbb{Y}
$I_{ g(\mathbf{z}) }$	função indicadora de falha
\mathbf{I}	matriz identidade
$\mathbf{j}(\mathbf{z})$	matriz de mapeamento para o domínio padrão de integração
$\mathbf{J}_{\mathbf{y},\mathbf{z}} = \mathbf{J}$	Jacobiano da transformação probabilística $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{z})$
$\mathbf{J}_{\mathbf{y},\mathbf{z}}^{-1}$	Jacobiano da transformação probabilística $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{y})$
$\mathbf{J}_{\mathbf{s},\mathbf{z}}$	Jacobiano da transformação mecânica $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{z})$
k_i	curvaturas principais da equação de estado limite
\mathbf{K}	matriz de rigidez do problema de elasticidade
\mathbf{L}	matriz triangular inferior de Choleski
$m(\mathbf{y}_k)$	função mérito
M	variável aleatória margem de segurança
\mathbf{M}	vetor de valores médios $\mu_{X_i} \quad i = 1, \dots, n$
nva	número de VA do problema
nsi	número de simulações
N_k	função de interpolação associada ao nó k
$p(z=1)$	probabilidade de que a variável Z assumo o valor 1
$p_Z(z)$	função-massa de probabilidades da variável Z

$P_Z(z)$	função massa de probabilidade acumulada
P_f	probabilidade de falha
$P_{f i}$	estimativa de i -ésima ordem da probabilidade de falha
\overline{P}_f	estimativa da probabilidade de falha
P_I	probabilidade de interferência
p_i	peso de amostragem da i -ésima função de amostragem
$\overline{\mathbf{Q}}$	matriz cujas colunas são os autovetores de \mathbf{R}^{-1}
R	variável aleatória relacionada a resistência
\mathbf{R}	matriz dos coeficientes de correlação ρ_{ij}
\mathbf{R}_0	matriz dos coeficientes de correlação equivalentes $\rho_{0,ij}$
$\mathbf{s}(\mathbf{z})$	efeito de carregamento genérico
S	variável aleatória associada a solicitação
T	base de autovetores para construção do parabolóide de SORM
\mathbb{T}	tempo de referência
$\mathbf{u}(\mathbf{z})$	vetor de deslocamentos nodais
$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$	campo estocástico
w_i	peso do i -ésimo ponto simulado
\mathbf{x}	vetor de coordenadas do problema de elasticidade
\mathbf{X}	vetor de coordenadas nodais originais
Y	variável aleatória normalizada e padronizada
y	valor particular assumido por Y
\mathbb{Y}	espaço das variáveis normalizadas e padronizadas
$Y(t)$	processo estocástico
$Var(Z)$	variância da variável aleatória Z
Z	variável aleatória, definida por sua FDP ou pelos seus momentos
z	valor particular assumido por Z
\mathbf{Z}	vetor de variáveis aleatórias $Z_i, i = 1, \dots, n$
\mathbf{z}	valor particular assumido por \mathbf{Z}
\mathbf{z}^*	ponto ótimo ou de projeto
\mathbb{Z}	espaço original das variáveis aleatórias de projeto
$\alpha(\mathbf{y}^*)$	fator de sensibilidade para variáveis aleatórias
β	índice de confiabilidade
β_{HL}	índice de confiabilidade de Hassofer-Lind
β_{gen}	índice de confiabilidade generalizado
$\gamma(\mathbf{y}^*)$	fator de sensibilidade para parâmetros das distribuições
δ	coeficiente de dispersão
ε	matriz de deformações
λ	taxa média de falhas
$\boldsymbol{\lambda}^T$	vetor adjunto
μ_Z	valor médio da variável aleatória Z
ρ_{ij}	coeficiente de correlação entre as variáveis de índice i e j
ρ_0	coeficiente de correlação equivalente
σ_Z	desvio padrão da variável aleatória Z
$\boldsymbol{\sigma}$	matriz de tensões internas
ϕ	função de densidade de probabilidade normal padrão

Φ	função de probabilidade acumulada normal padrão
$\psi_i(\mathbf{z})$	função base para a determinação dos momentos de $\mathbf{u}(\mathbf{z})$
$\Delta \mathbf{z}_i$	vetor de diferenças finitas com apenas i-ésimo componente não nulo
$\nabla g_{\mathbf{y}}$	gradiente de $g(\mathbf{z})$ calculado em \mathbf{Y}
Ω_e	domínio do elemento
Ω_0	domínio do elemento padrão

0.4 Lista de Abreviaturas

ACE-Pro	programa para Análise de Componentes Estruturais Probabilística
FBM	falha bi-modal
DDM	<i>direct differentiation method</i> - método de diferenciação direta
EF	elementos finitos
FDP	função densidade de probabilidade
FERM	<i>finite element reliability method</i> - método de confiabilidade para elementos finitos
FMA	função massa de probabilidade acumulada
FMP	função massa de probabilidade
FORM	<i>first order reliability method</i> - método de aproximação de primeira ordem
FPA	função de probabilidade acumulada
HLRF	método de otimização de Hasofer, Lind, Rackwitz e Fiesler
HLRF-M	método de otimização modificado de Hasofer, Lind, Rackwitz e Fiesler
MEF	método dos elementos finitos
RSM	<i>response surface method</i> - método da superfície de resposta
SMC	simulação de Monte Carlo
SMC AI	simulação de Monte Carlo com amostragem por importância
SMC SI	simulação de Monte Carlo simples
SORM	<i>second order reliability method</i> - método de aproximação de segunda ordem
VA	variável aleatória

0.5 Resumo

Este trabalho apresenta a implementação de um Método de Confiabilidade para Elementos Finitos. O objetivo principal do trabalho é criar uma ferramenta prática para o cálculo de probabilidade de falha em problemas reais de engenharia.

Os modelos e métodos de confiabilidade estrutural são apresentados. Os modelos para interferência entre populações e para falha à primeira sobrecarga são discutidos em detalhe. No método de aproximação de primeira ordem, a transformação para o espaço normal padrão e um algoritmo de otimização para procura do ponto de projeto são estudados em detalhe. No método de segunda ordem, a representação de uma equação de estado limite genérica por uma superfície de segunda ordem é analisada. O método de simulação de Monte Carlo é apresentado, com ênfase para os métodos de amostragem por importância. O método da superfície de resposta, que permite a aplicação de simulação em problemas de solução muito demorada, também é apresentado.

Os métodos de elementos finitos estocásticos são apresentados. Uma comparação entre o método de confiabilidade para elementos finitos e os tradicionais elementos finitos estocásticos de segundo momento é feita.

O trabalho é implementado na forma de um conjunto de subrotinas para o programa de análise ANSYS. Uma série de exemplos são analisados para verificar a precisão e eficiência do método desenvolvido. Um caso de aplicação prática (ponte Hercílio Luz) também é estudado. Os resultados obtidos são muito satisfatórios para problemas lineares ou levemente não lineares. Sugestões são feitas para melhorar a performance do método em problemas altamente não lineares, bem como para aproveitar as rotinas programadas em programas de confiabilidade mais abrangentes.

0.6 Abstract

This work deals with the implementation of a finite element reliability method. The main objective of the work is to develop a practical tool for calculating failure probabilities in real world engineering problems.

The models and methods of structural reliability are presented. The models for interference between populations and first over-crossing failure are presented in detail. In the first order reliability method, the transformation to the normalized space and an optimization algorithm for searching for the design point are studied. In the second order reliability method, the representation of a generic limit state surface by a second order surface is studied. Monte Carlo simulation methods are presented, with emphasis on importance sampling techniques. The Response Surface Method, which allows the use of simulation in complicated problems, is analyzed.

The stochastic finite element method is presented. A comparison of the finite element reliability method with the traditional second moment stochastic finite element method is made.

The work is implemented in form of a set of subroutines for the ANSYS analysis program. Several examples from literature are analyzed, in order to verify the precision and efficiency of the developed method. Practical results from the Hercílio Luz bridge analysis are also shown. Results are very satisfactory for linear and mildly non-linear problems. Suggestions to improve the results for highly non-linear problems and for the use of the programmed routines in wider reliability programs are made.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 Introdução

O Método dos Elementos Finitos revolucionou a análise estrutural. O desenvolvimento experimentado pelo método nos últimos anos é notável. O aumento considerável da capacidade dos computadores e a grande evolução dos programas comerciais popularizaram o uso do método, de tal forma que hoje em dia soluções analíticas se tornaram inviáveis. Problemas que outrora exigiam o trabalho de alguns dias de toda uma equipe de engenheiros podem ser resolvidos por um único engenheiro, com auxílio de um computador pessoal, em horas. As aproximações feitas para resolver numericamente os problemas são irrelevantes frente a certas simplificações que tinham que ser feitas para se obter soluções analíticas.

Novos tipos de elementos permitem a aplicação do método aos mais diversos problemas das mais diversas áreas da engenharia. O método já não se restringe à solução de problemas de mecânica dos sólidos, para o qual foi originalmente criado. Hoje em dia, existem elementos finitos para problema de transferência de calor, de mecânica dos fluidos, de dinâmica estrutural, para calcular campos elétricos e magnéticos, para resolver problemas de mecânica da fratura e muitos outros.

Na mecânica dos sólidos, é possível resolver problemas com não linearidades material (plasticidade, visco-plasticidade e visco-elasticidade), não linearidades geométricas (grandes deformações, enrijecimento por tensão), problemas de estabilidade, dinâmica e contato, etc. Existem elementos adequados para sólidos, placas, cascas, barras e vigas. Algoritmos adaptativos permitem melhorar a qualidade dos resultados, através de um controle do erro de discretização. Interfaces gráficas amigáveis facilitam a construção do modelo e a análise de resultados. Pode-se afirmar que a parte tecnológica do método de elementos finitos está muito bem resolvida.

No entanto, a solução de um modelo de elementos finitos é apenas uma parte da solução de um problema real de engenharia. Torna-se cada vez mais importante a questão da modelagem destes problemas. Obviamente, a qualidade dos resultados obtidos a partir de uma análise de

elementos finitos depende da qualidade da informação fornecida ao computador e da validade das hipóteses adotadas na simplificação do problema.

Os métodos de confiabilidade estrutural permitem a caracterização do aspecto aleatório das variáveis de projeto, bem como a consideração das incertezas de modelagem. Estes métodos permitem avaliar a segurança de um projeto de forma quantitativa, em termos de uma probabilidade de falha.

Infelizmente, os métodos de confiabilidade não alcançaram a popularidade e a versatilidade do método de elementos finitos. Historicamente, segundo Orisamolú [49],

”o desenvolvimento da mecânica probabilística (leia-se confiabilidade) se deu à parte do desenvolvimento da mecânica computacional (elementos finitos)”.

A principal deficiência dos métodos de confiabilidade estrutural é a necessidade de se obter uma equação algébrica para descrever o problema, o que implica em uma solução analítica. Isto limita a aplicação destes métodos a problemas extremamente simples, se comparados aos problemas que podem ser resolvidos, de forma determinística, por elementos finitos. Existe, portanto, a necessidade de se rever a teoria de confiabilidade e de criar métodos de solução de confiabilidade para problemas tão genéricos e tão complexos quanto possível. No mínimo, os métodos de confiabilidade devem permitir resolver a ampla gama de problemas que podem ser resolvidos hoje em dia pelo método dos elementos finitos.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem por objetivo principal o desenvolvimento de uma ferramenta prática para a abordagem probabilística da análise de projetos em engenharia. Esta ferramenta deve integrar as soluções existentes em confiabilidade estrutural com a praticidade e eficiência dos métodos de elementos finitos. A ferramenta deve permitir a avaliação da segurança em projetos reais de engenharia.

Também são objetivos do trabalho apresentar os modelos para os vários tipos de problemas de confiabilidade e os métodos de solução utilizados. Estes métodos serão analisados com relação a sua aplicabilidade na solução de problemas reais.

Outro objetivo do trabalho é a verificação dos níveis de segurança do projeto alternativo de recuperação da ponte Hercílio Luz, desenvolvido pelo GRANTE - Grupo de Análise e Projeto Mecânico da Universidade Federal de Santa Catarina.

1.3 Contribuições

Nos últimos 20 anos, a disponibilidade de programas de elementos finitos robustos e de fácil utilização popularizou o uso desta técnica entre os engenheiros. Da mesma forma, é de

se esperar que o desenvolvimento de programas probabilísticos eficientes, com aplicação a problemas reais, popularize os métodos de confiabilidade estrutural e ajude a criar uma visão probabilística dos problemas de engenharia.

As soluções tradicionais de confiabilidade se limitam a problemas simples, com equações de estado limite algébricas e com número reduzido de variáveis aleatórias. Muitas vezes, requerem a realização de cálculos recursivos ou de um número muito grande de simulações.

Atualmente, existem alguns poucos programas probabilísticos para solução de problemas de engenharia. Os mais importantes estão apresentados na tabela 3.1, segundo Orisamolu [49]:

Tabela 1.1: Programas probabilísticos para uso em engenharia.

Programa	Origem	Lançamento	Preço (US\$)
NESSUS	Southwest Research Institute, Texas	1989	20.000,00
PROBAN	DnV/Veritas Sesam Systems, Noruega	1989	20.000,00
STRUREL	RCP Gmbh, Alemanha	1992	10.000,00*
ISPUD	University of Innsbruck, Austria	1986	2.200,00*
CALREL	University of California, Berkeley	1989	1.100,00*
COMPASS	Martec Limited, Halifax, Canada	1992	2.500,00

*Licença anual.

Tabela 1.2: Características dos programas probabilísticos.

Programa	Características
NESSUS	Módulo de EF probabilísticos integrado; modelagem de campos estocásticos; interface com programas de EF comerciais: ANSYS, NASTRAN.
PROBAN	Parâmetros com distribuição aleatória; módulos especiais para inspeção e manutenção; confiabilidade de sistemas.
STRUREL	Problemas de confiabilidade dependente do tempo; integrado com pacote de EF próprio; análise estatística de dados.
ISPUD	Integração numérica adaptativa, amostragem por importância.
CALREL	Interface com pacote de EF próprio (CALREL-FEAP).
COMPASS	Interface com pacote de EF próprio (STOVAST).

Como pode ser verificado, todos os programas são recentes. Também pode-se observar que apenas 4 destes programas possuem interface com programas de elementos finitos, sendo que em 3 casos este programa é próprio. Apenas um dos programas apresenta interface com programas de elementos finitos comerciais. O número reduzido de programas existentes e o custo dos mesmos ilustra a importância deste trabalho.

Com relação a aplicação prática à ponte Hercílio Luz, convém destacar as grandes incertezas envolvidas na recuperação da mesma e os riscos envolvidos em uma eventual falha. Esta ponte foi construída em 1925. Ela é uma das poucas pontes com cadeia de sustentação

de barras de olhal sobreviventes no mundo. Na época em que foi construída, esta ponte era o maior vão coberto utilizando o sistema de barras de olhais: 340 metros. Hoje em dia, uma das grandes incógnitas na análise de recuperação da ponte é o nível de deterioração das barras de olhal. Além disto, a ponte está sujeita a duas solicitações tipicamente aleatórias e de grande relevância: a carga provocada pelo vento e a carga de veículos e pedestres sobre a mesma. Outra incerteza está no peso próprio da ponte. Através deste trabalho, espera-se fornecer ao pessoal do GRANTE informações importantes a respeito da segurança do projeto de recuperação.

1.4 Modelagem de problemas de engenharia

A solução de problemas de engenharia envolve um processo de síntese conhecido como modelagem. A modelagem consiste em representar um problema real através de modelos físicos e matemáticos, que simplificam o problema e possibilitam sua solução. A solução de um problema poderia ser sintetizada conforme figura 1.1:

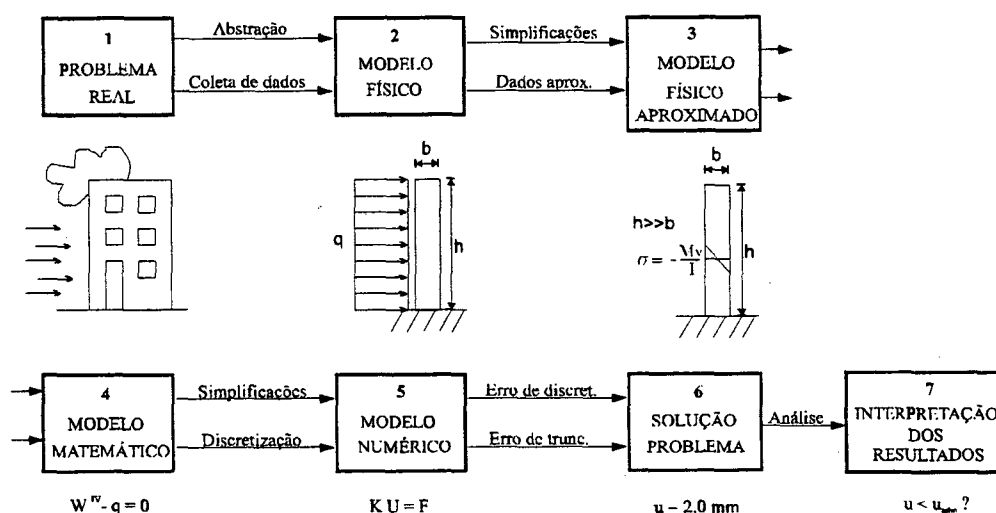


Figura 1.1: Solução de problemas em engenharia.

O método de elementos finitos, a despeito de toda a sua versatilidade e abrangência, serve apenas para passar da etapa 4 para a etapa 6, ou seja, serve apenas para resolver, de forma aproximada (numérica), o modelo matemático do problema. Nas demais etapas da modelagem realizam-se simplificações e incorporam-se dados incertos ao problema. As incertezas de análise são de 4 tipos:

1. Incerteza física: aleatoriedade natural de algumas das variáveis do problema. Estas variáveis não podem ser caracterizadas por um valor único e determinístico. Elas devem ser modeladas como variáveis aleatórias, caracterizadas por suas distribuições de probabilidade ou por seus parâmetros;

2. Incerteza estatística: proveniente da caracterização dos valores e parâmetros das variáveis de projeto, indicadas na etapa 1. Esta incerteza é decorrente da incerteza dos aparelhos de medição e do fato de se utilizarem amostras de tamanho finito. Esta incerteza deve ser incorporada à incerteza da variável medida.
3. Incertezas de modelo: são as aproximações e simplificações feitas no processo de modelagem, que podem ser mais ou menos corretas. As incertezas de modelo não podem ser mensuradas, mas podem ser estimadas. Estas incertezas podem eventualmente ser incorporadas ao problema, de forma estatística.
4. Incerteza fenomenológica: corresponde a não consideração de variáveis ou modos de falha importantes para o problema, por desconhecimento. Devido a esta incerteza, os resultados da análise são sempre condicionais às variáveis e modos de falha considerados.

Desta forma, a incerteza está sempre presente, em maior ou menor grau, em qualquer problema de engenharia.

1.5 Análise crítica da metodologia determinística de projeto

Já em 1947 Freudenthal [27] discute a questão da segurança de estruturas e questiona os métodos utilizados para determinação dos coeficientes de segurança. O desenvolvimento de uma metodologia de projeto e análise de segurança baseada em probabilidades tem sido assunto de muitos pesquisadores desde os anos 60. Shinozuka, em um artigo de 1983 [58], apresenta referências a muitos destes trabalhos.

As incertezas de modelagem e aleatoriedades das variáveis de projeto sempre estiveram presentes nos projetos de engenharia. Por conta destas incertezas, a metodologia tradicional de projeto (determinística) envolve alguns procedimentos questionáveis do ponto de vista da teoria de confiabilidade:

1. Consideração do pior caso possível: considera-se o carregamento máximo e a resistência mínima possíveis. Como estes extremos também são incertos, utiliza-se o coeficiente de segurança, cujos critérios de escolha também são questionáveis:
2. Critérios de escolha do coeficiente de segurança:
 - (a) tipo de aplicação do componente projetado;
 - (b) Conseqüências de eventuais falhas (perda de vidas humanas, perdas econômicas, custos de reparo, custo do seguro,...);

- (c) nível de detalhamento da análise realizada;
 - (d) nível de incertezas envolvidas na análise, o que pode ser feito apenas de forma subjetiva;
 - (e) experiência em projetos anteriores, que é o critério mais utilizado na prática.
- Além disto, verifica-se que:

3. O coeficiente de segurança não é uma medida de segurança, pois:

- (a) um mesmo coeficiente de segurança pode ser suficiente em um projeto e insuficiente em outro;
- (b) o coeficiente de segurança não serve para comparar a segurança de projetos de diferente configuração ou materiais, nem mesmo um mesmo projeto sob diferentes condições de carregamento.

A determinação do valor do coeficiente de segurança é feita de forma bastante empírica, em função do tipo de aplicação de determinado projeto. Se uma falha do componente ou sistema envolve risco de vida ou elevado prejuízo econômico, um grande coeficiente é utilizado. Se a falha do componente ou sistema não causa acidentes nem perdas econômicas, se o componente é facilmente substituível ou se o sistema é facilmente reparável, um pequeno coeficiente pode ser utilizado. Duas questões surgem naturalmente:

”O que é um **grande** coeficiente de segurança?”

”Qual a segurança associada ao uso de um dado coeficiente de segurança?”

A metodologia de projeto tradicional não possui meios de responder a estas questões.

As técnicas de confiabilidade permitem quantificar as incertezas de projeto e lidar com estas de forma mais adequada. Num projeto baseado em confiabilidade, o coeficiente de segurança é substituído por um fator de projeto, razão entre os valores médios da resistência e da solicitação (R e S):

$$f_p = \frac{\mu_R}{\mu_S} \quad (1.1)$$

A escolha deste fator é feita em função do nível de incerteza existente no projeto e do nível de segurança desejado. Esta escolha é feita com base em uma medida quantificável da segurança do projeto: a probabilidade de falha (P_f).

Do ponto de vista da confiabilidade, pode-se questionar a metodologia de projeto determinística:

1. O pior caso considerado na análise determinística pode ter uma probabilidade de ocorrência muito pequena ou mesmo desprezível, o que significaria um superdimensionamento.

namento desnecessário do projeto. Algumas aplicações estruturais modernas, como reatores nucleares, veículos de exploração marítima ou espacial e aeronaves estão sujeitas a enormes variações de solicitação. A consideração do pior caso pode se tornar anti-econômica nestes casos. Por outro lado, o pior caso considerado não é a única combinação que leva a falha.

2. Com relação à escolha do fator de projeto, verifica-se que:

- (a) O tipo de aplicação e...
- (b) ... as conseqüências de uma eventual falha são utilizados para determinar a P_f admissível. A diferença em relação ao projeto convencional é que o uso da P_f permite quantificar as conseqüências de uma eventual falha (mesmo que a perda de vidas humanas não seja quantificável). Assim, o custo do projeto pode ser comparado ao custo esperado de manutenção, de reparos ou de substituição de componentes.
- (c) A medida que novas ferramentas surgem, é possível aprimorar cada vez mais a etapa de análise em projetos. As modernas técnicas de EF permitem reduzir de forma significativa o número de aproximações feitas na análise e lidar com problemas bastante complexos, conforme verificado nas seções anteriores. Frente a estas possibilidades, o uso de um coeficiente de segurança baseado em projetos anteriores (2e) não faz nenhum sentido!
- (d) A P_f depende diretamente das incertezas presentes no projeto. Além disto, o cálculo da P_f permite verificar a influência ou contribuição de cada variável aleatória na falha do componente. Assim, é possível alocar custo às variáveis aleatórias que mais contribuem para a falha, aumentando a segurança do componente de forma mais racional. Da mesma forma, é possível reduzir custo em VA de pouca contribuição. Alguns materiais modernos, como a fibra de carbono, possuem características médias superiores aos materiais convencionais, mas também maiores coeficientes de variação. Com o uso de confiabilidade, pode-se levar em conta estas variações, sem aniquilar os ganhos médios na propriedade do material.
- (e) Uma análise de P_f pode ser feita inteiramente no âmbito do problema em mãos, sem referência a problemas anteriores. A análise de P_f pode ser realizada em estruturas únicas, que não possuam padrão de comparação e nem modelos para testes. A velocidade com que novos projetos são colocados em execução ou alterados, hoje em dia, pode tornar impossível a escolha de um coeficiente de segurança baseado em experimentos ou projetos anteriores. Além disto, o emprego de otimização em análise estrutural resulta em mais restrições no limite do que em

projetos não otimizados. Mais uma vez, um coeficiente de segurança baseado em projeto não otimizado pode ser insuficiente.

3. A P_f representa uma medida muito mais realista da segurança do projeto do que o fator de segurança. Ela pode ser utilizada para comparar diferentes projetos ou diferentes condições de carregamento.

A confiabilidade abre espaço para questões como:

”Quão seguro é seguro o suficiente?”

O estabelecimento de uma P_f admissível não deve ser obstáculo para a utilização dos métodos probabilísticos em projeto. Várias sugestões já foram feitas para se responder a pergunta acima. Uma delas [48] está baseada em um estudo das estruturas existentes hoje em dia. A P_f admissível seria escolhida de forma tal que o número de falhas causadas por fatores relacionados ao projeto (sobrecarga) não ultrapassasse 10% do número total de falhas. Desta forma, 90% das falhas estaria relacionada a fatores que não podem ser considerados no projeto, tais como incêndio, falhas humanas, falhas de construção, etc.

Capítulo 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é revisar e fornecer os fundamentos teóricos da teoria de confiabilidade, que serão necessários para o desenvolvimento das etapas posteriores do trabalho. Desta forma, não houve uma preocupação de revisar os conceitos fundamentais da teoria de probabilidades e nem quaisquer tópicos da teoria de confiabilidade que não se referissem estritamente ao assunto do trabalho.

Inicialmente são discutidos alguns conceitos fundamentais para a compreensão do trabalho. Em seguida, é feita uma discussão sobre os modelos de confiabilidade estrutural para tratamento dos diversos níveis de incerteza. Na seqüência são apresentados dois modelos muito utilizados: o modelo de interferência entre populações e de falha à primeira sobrecarga.

2.2 Conceitos fundamentais

2.2.1 Variável aleatória

Uma variável aleatória (Z) é caracterizada pelos vários estados que pode assumir. Se uma variável é aleatória a ocorrência de um estado particular desta não pode ser previsto. No entanto, pode-se afirmar que um estado particular desta variável pode ocorrer em uma determinada proporção em relação aos demais estados possíveis, ou que um estado particular pode ocorrer com uma determinada probabilidade.

Toma-se como exemplo o lançamento de um dado. O resultado de um lançamento (face obtida) é uma variável aleatória. Pode-se afirmar que o resultado de um lançamento particular é imprevisível. No entanto, se o lançamento é repetido muitas vezes, pode-se esperar que aproximadamente $1/6$ dos lançamentos resultem na face 1, uma vez que todas as 6 faces tem a mesma tendência de ocorrer. Se o lançamento do dado é repetido n vezes, define-se como freqüência relativa o número resultados com face de um determinado valor (n_1) obtidas em

relação ao número total de lançamentos (n):

$$f_r = \frac{n_1}{n} \quad (2.1)$$

A probabilidade é definida por Bernoulli como o valor limite da frequência relativa quando o número de experimentos tende ao infinito:

$$p_{(Z=1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_1}{n} = \frac{1}{6} \quad (2.2)$$

Matematicamente, uma VA pode ser descrita como uma função que mapeia um evento do espaço amostral para a reta dos números reais. O espaço amostral é o conjunto de todos os valores possíveis da variável.

Uma variável aleatória é denominada por Z (maiúsculo). Denota-se por z (minúsculo) um valor particular assumido pela variável Z . Uma variável aleatória não pode ser descrita por um valor particular z que assuma. Ela é descrita por sua função de densidade de probabilidade, por sua função de probabilidade acumulada ou pelos seus momentos estatísticos. Os momentos estatísticos são caracterizados pela média, desvio-padrão, coeficiente de simetria, coeficiente de kurtosis, e outros.

FDP - Função densidade de probabilidade:

O produto $f_Z(z) \cdot dz$ fornece a probabilidade de que o valor da variável aleatória contínua Z esteja entre dois valores z e $z + dz$. A probabilidade de que Z assuma um valor particular z é nula. A FDP descreve a distribuição das probabilidades de Z ao longo de todos os valores que Z pode assumir:

$$P(z \leq Z \leq z + dz) = \int_z^{z+dz} f_Z(\bar{z}) d\bar{z} \quad (2.3)$$

FPA - Função de probabilidade acumulada:

É uma função $F_Z(z)$ que fornece a probabilidade de que o valor da variável Z seja menor ou igual a um determinado valor z .

$$P(Z \leq z) = F_Z(z) = \int_{-\infty}^z f_Z(\bar{z}) d\bar{z} \quad (2.4)$$

2.2.2 Processo estocástico

Processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias dependentes, relacionadas a um mesmo fenômeno, que podem ser associadas a uma ou mais variáveis independentes. Estas variáveis independentes estão associadas a um contínuo, geralmente o tempo. Um exemplo de um processo estocástico é um conjunto de registros das vibrações induzidas no corpo de um

ciclista, ao trafegar sobre uma trilha esburacada. Segundo Clarkson [20], a aceleração medida por esta série de registros forma um processo estocástico, que representa toda uma família ou pacote de registros, e não um registro isolado. Este pacote de registros é representativo de qualquer registro que seria obtido dentro das mesmas condições, ou seja, para o mesmo ciclista, rodando na mesma trilha, com a mesma bicicleta,...

Processos estocásticos possuem médias no tempo e médias entre registros. A média entre registros é obtida com os valores dos vários registros, para um ponto fixo do tempo. A média no tempo é a média obtida com os vários valores no tempo para um único registro.

Um processo estocástico é dito estacionário se todas as suas estatísticas são independentes do tempo. O processo é fracamente estacionário se apenas a média e o desvio-padrão se mantiverem invariáveis ao longo do tempo. Processos estacionários podem ser representados por sua média no tempo.

Um processo é dito ergódico quando apenas um registro for suficiente para caracterizar as estatísticas de todos os sistemas similares. Nestes processos, a média no tempo é igual à média entre os registros, para um tempo fixo. Um processo ergódico é necessariamente estacionário.

2.2.3 Confiabilidade

O termo confiabilidade está associado ao grau de confiança que se tem em algo. Em projetos de engenharia, confiabilidade é o grau de confiança de que o sistema a ser projetado atenderá aos requisitos de projeto. Segundo da Rosa [55],

”Confiabilidade é a probabilidade de que um componente ou sistema, operando dentro das condições especificadas no projeto, não falhe durante o tempo previsto para sua vida.”

Portanto, confiabilidade é uma probabilidade, ou seja, uma medida que reflete a segurança do componente ou sistema. Na definição acima, entende-se por falha qualquer estado em que o sistema deixe de atender a função para a qual foi projetado.

A probabilidade de falha é complementar à confiabilidade:

$$P_f = 1 - C(t) \quad (2.5)$$

2.2.4 Modo de falha

A segurança de um projeto é caracterizada a partir de modos possíveis de falha. Um modo de falha é definido como um modelo físico que descreve uma falha estrutural atribuída a uma causa mecânica definida de maneira única. Um modo de falha pode ser único ou pode ser uma idealização de apenas uma das muitas maneiras como a estrutura pode falhar.

2.2.5 Equação de estado limite

Um modo de falha é descrito através de uma equação de estado limite, que divide o domínio das variáveis do problema em um domínio de falha e um domínio de não falha ou sobrevivência, em relação ao respectivo modo de falha, conforme ilustrado na figura 2.1 para um problema envolvendo duas variáveis aleatórias.

$$g(\mathbf{z}) = g(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0 \quad (2.6)$$

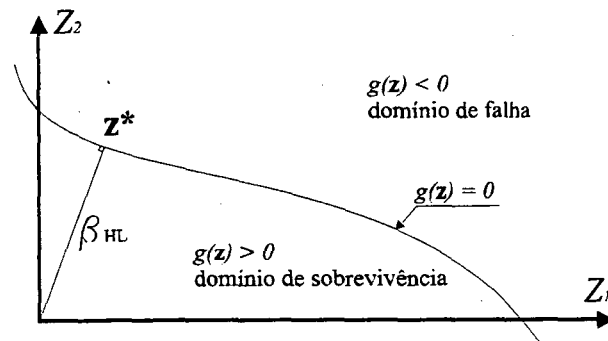


Figura 2.1: Equação de estado limite e domínios de falha e não-falha.

A equação de estado limite é construída de tal maneira que $g(\mathbf{z}) \leq 0$ representa a falha e $g(\mathbf{z}) > 0$ representa sobrevivência. O domínio de falha é o conjunto de todos os valores que as variáveis de projeto podem assumir e que levam a uma falha da estrutura. O domínio de não falha ou sobrevivência é o conjunto complementar a este.

$$D_f = \{\mathbf{z} | g(\mathbf{z}) \leq 0\} \quad (2.7)$$

No contexto deste trabalho, $g(\mathbf{z})$ não é interpretada como uma variável aleatória ($g(\mathbf{Z})$), mas sim como uma função que determina o estado da estrutura para uma determinada configuração do vetor das variáveis de projeto (\mathbf{z}).

2.3 Modelos de confiabilidade estrutural

A quantidade e qualidade da informação estatística a respeito dos fenômenos envolvidos nos projetos de engenharia é uma questão fundamental. A carência de informação estatística é a principal responsável pela resistência a uma abordagem probabilística destes projetos.

Usualmente, a informação estatística que se pode obter a respeito de um problema são as distribuições marginais das VA e os coeficientes de correlação entre pares de VA. Sendo assim, as soluções em confiabilidade estrutural incluem um modelo para a FDP conjunta $f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$ para as VA do problema.

As FDP marginais geralmente são determinadas por ajuste a dados experimentais. Isto exige um número de ensaios bastante grande, suficiente para se traçar um histograma. Em

muitos casos, apenas a média e o desvio padrão podem ser determinados. Isto equivale a considerar uma distribuição marginal normal para a VA. Em outros casos, as distribuições são determinadas em função de considerações físicas ou matemáticas, como a escolha de uma distribuição log-normal para VA estritamente positivas, distribuição normal com base no teorema do limite central ou distribuição de valores extremos com base em teoremas assintóticos.

Os métodos de confiabilidade estrutural requerem portanto um modelo para a distribuição conjunta $f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$ e uma forma de cálculo da probabilidade de falha. Algumas características fundamentais são desejáveis nestes métodos:

1. Consistência: o modelo para solução (cálculo da P_f) deve satisfazer as regras básicas da teoria de probabilidades, ser consistente com a informação estatística disponível usualmente e incorporar qualquer informação adicional;
2. Invariância: a solução deve ser invariante com relação a formulações mútuas do problema;
3. Operabilidade: a solução deve ser possível independentemente do número de VA, da distribuição das VA e da forma da equação de estado limite;
4. Simplicidade: o esforço necessário para se computar a solução deve ser compatível com a qualidade da informação estatística disponível.

Os métodos de confiabilidade estrutural que serão apresentados neste trabalho serão avaliados com relação a estes quesitos.

Os modelos para confiabilidade estrutural podem ser classificados em 3 grupos, de acordo com o nível de descrição das incertezas envolvidas. Bjerager [12] divide estes modelos em:

1. modelos para VA;
2. modelos para processos estocásticos e
3. modelos para campos estocásticos.

2.3.1 Modelos para variáveis aleatórias

Os problemas de confiabilidade mais simples são aqueles que podem ser modelados utilizando apenas VA. Nestes problemas, a margem de segurança é definida em termos de uma equação de estado limite que depende apenas de VA:

$$g(\mathbf{z}) = 0 \tag{2.8}$$

A probabilidade de falha, neste caso, é obtida integrando-se a FDP conjunta das VA do problema no domínio de falha:

$$P_f = \int_{D_f} f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) \cdot d\mathbf{z} \quad (2.9)$$

O modelo para VA mais comum é o da interferência entre populações, que será visto adiante.

2.3.2 Modelos para processos estocásticos

Nesta classe de problemas a equação de estado é, genericamente:

$$\min_t g(\mathbf{z}, \mathbf{y}(t)), \quad t \in (0, T) \quad (2.10)$$

onde: $\mathbf{y}(t)$ é um conjunto de processos estocásticos e T é um tempo de referência, normalmente o tempo de vida previsto para o componente.

O modelo mais comum para processos estocásticos é o de falha a primeira sobrecarga, descrito adiante. Processos estocásticos estacionários, cujas estatísticas são independentes do tempo, podem ser discretizados em termos de VA's, eliminando-se a variável tempo do problema. Com a discretização, o problema se reduz a um problema de VA, que pode ser resolvido pelo modelo de interferência entre populações. Não existem soluções práticas para processos não estacionários.

2.3.3 Modelos para campos estocásticos

Nestes problemas, a equação de estado limite tem a forma:

$$\min_t g(\mathbf{z}, \mathbf{y}(t), \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)), \quad t \in (0, T) \quad (2.11)$$

onde: \mathbf{z} é um conjunto de VA; $\mathbf{y}(t)$ é um conjunto de processos estocásticos; $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ um conjunto de campos estocásticos e \mathbf{x} o vetor de coordenadas geométricas. No caso de processos estocásticos estacionários, a discretização comentada acima se aplica e o problema fica:

$$g(\mathbf{z}, \mathbf{w}(\mathbf{x})) = 0 \quad (2.12)$$

Campos estocásticos são utilizados para modelar variações espaciais em um contínuo, como variações de propriedades mecânicas ao longo do material ou variações de carregamentos ao longo de um contorno. Nos problemas independentes do tempo, soluções são obtidas discretizando-se o campo estocástico existente em termos de um conjunto de VA. O problema discretizado se transforma em um problema de VA e pode ser resolvido pelo modelo de interferência entre populações. Técnicas de discretização dos campos estocásticos fazem parte da teoria dos elementos finitos estocásticos, conforme será visto adiante.

2.4 Interferência entre populações

Projetos estruturais podem ser caracterizados por duas variáveis básicas: resistência e solicitação, denotadas por R e S , respectivamente. O problema do projetista se resume a garantir que $R > S$.

Se as variáveis básicas do problema são determinísticas, também R e S serão determinísticas. Neste caso, basta calcular o valor destas variáveis e adotar um coeficiente de segurança mínimo, de forma a ter $R > S$. Assim, o problema está resolvido e, teoricamente, não há possibilidade de falha.

Por outro lado, se as variáveis básicas do problema (ou parte delas) forem aleatórias, R e S também serão aleatórias. Neste caso, R e S serão caracterizadas por suas respectivas FDP. De forma ilustrativa, estas distribuições terão uma disposição conforme figura 2.2.

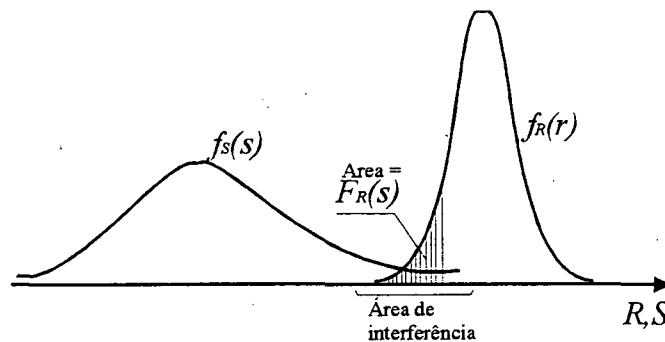


Figura 2.2: Interferência entre populações.

Na figura 2.2 percebe-se que, devido ao carácter aleatório de R e S e ao carácter assintótico das caudas de suas distribuições, existe uma interferência entre as duas variáveis. Na figura, a área hachurada corresponde aqueles valores para os quais $R \leq S$, ou seja, valores para os quais ocorre a falha da estrutura. Logo, devido à consideração do carácter aleatório das variáveis de projeto, existe uma probabilidade de que a estrutura venha a falhar. Esta probabilidade será proporcional à área hachurada na figura 2.2.

A relação entre R e S pode ser escrita como: $R - S \leq 0$. A distribuição de $R - S$ é dada pela função de densidade de probabilidade conjunta de R e S , $f_{R,S}(r, s)$. Portanto, a probabilidade de falha pode ser calculada como:

$$P_f = P(R - S \leq 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^s f_{R,S}(r, s) \cdot dr \cdot ds \quad (2.13)$$

Se as variáveis R e S forem estatisticamente independentes, então:

$$f_{R,S}(r, s) = f_R(r) \cdot f_S(s) \quad (2.14)$$

obtendo-se:

$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} f_S(s) \left[\int_{-\infty}^s f_R(r) \cdot dr \right] \cdot ds = \int_{-\infty}^{\infty} f_S(s) \cdot F_R(s) \cdot ds \quad (2.15)$$

aonde:

$f_S(s)$ = função de densidade de probabilidade da solicitação;

$F_R(s)$ = função de probabilidade acumulada da resistência avaliada em s .

As figuras 2.3 e 2.4 ilustram os procedimentos que podem ser adotados em projeto para diminuir a probabilidade de interferência entre as distribuições da solicitação e da resistência, ou seja, para diminuir a probabilidade de falha da estrutura. O uso de um fator de projeto, ou do tradicional coeficiente de segurança, afasta as médias de R e S , diminuindo de forma visível a area hachurada na figura 2.2, conforme figura 2.3. Esta alternativa de melhora do projeto tem o custo correspondente ao superdimensionamento. Outra alternativa é diminuir o desvio-padrão de R e S . O desvio-padrão da resistência usualmente está relacionado com a dispersão de propriedades do material, e pode ser diminuído através do uso de um material de melhor qualidade, com propriedades mais homogêneas. O desvio-padrão da solicitação normalmente é inerente ao aspecto aleatório do problema. No entanto, pode ser diminuído a medida que se melhora a qualidade na medição dos carregamentos. O uso de um material de melhor qualidade também envolve um aumento de custos.

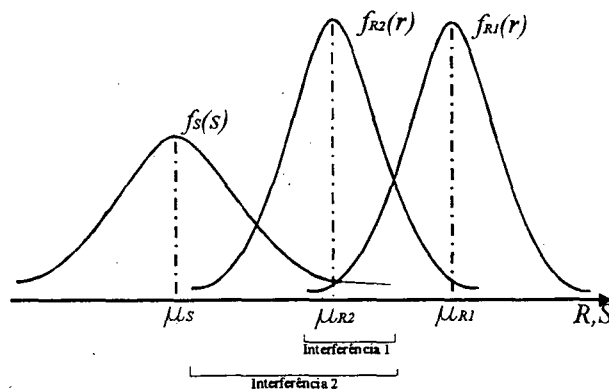


Figura 2.3: Influência da média na interferência.

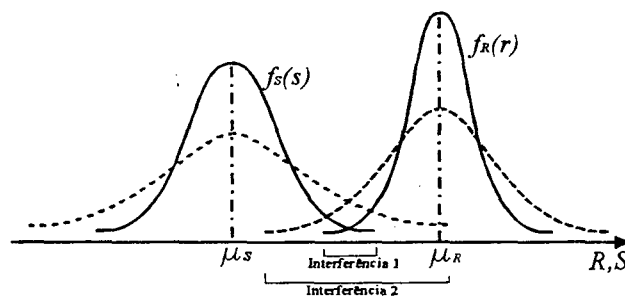


Figura 2.4: Influência do desvio-padrão na interferência.

O modelo de interferência é aplicável a outras áreas da engenharia, além da análise estrutural. Apenas a natureza dos fenômenos relacionados à resistência e a solicitação é

diferente em cada caso. Num problema térmico, a solicitação pode ser a temperatura em um determinado ponto e a resistência pode ser uma temperatura máxima admissível para o material. Em um problema de mecânica da fratura, a solicitação será o tamanho da trinca e a resistência será o tamanho crítico do defeito que causa o colapso da estrutura.

2.4.1 Margem de segurança

O problema de garantir que $R > S$ pode ser quantificado através de uma variável chamada margem de segurança. Existem diferentes maneiras de se definir a margem de segurança, todas elas são equivalentes:

$$M = R - S \quad (2.16)$$

$$M = \frac{R}{S} - 1 \quad (2.17)$$

Valores positivos da margem de segurança indicam que o projeto é seguro. Quanto maior a margem de segurança, mais seguro é o projeto. Se a margem é negativa, o projeto está em falha. Um valor nulo da margem de segurança define o que se conhece por equação de estado limite ou função de estado limite. Conforme figura 2.1, a equação de estado limite divide o espaço das variáveis de projeto em um domínio de falha e um domínio de sobrevivência. Se R e S são variáveis aleatórias, M também será uma variável aleatória. Neste caso, a probabilidade de falha pode ser calculada por:

$$P_f = P(M \leq 0) = \int_{-\infty}^0 f_M(m) \cdot dm = F_M(0) \quad (2.18)$$

o que pode ser visualizado na figura 2.5.

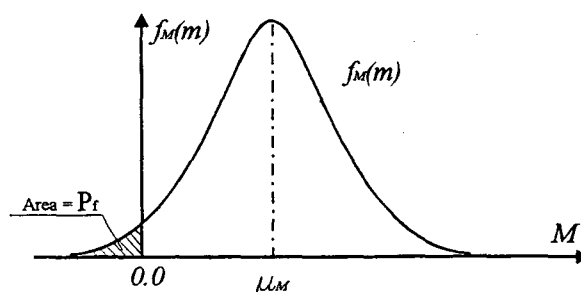


Figura 2.5: Probabilidade de falha em função da margem de segurança.

Adotando a expressão (2.16) e sendo R e S VA normais, a distribuição de M também será normal. Neste caso, $F_M(0)$ pode ser obtida a partir da FPA normal padrão Φ . Neste caso, a média de M é:

$$\mu_M = \mu_R - \mu_S \quad (2.19)$$

e, considerando independência entre R e S , o desvio-padrão é:

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (2.20)$$

A distribuição de M é transformada em uma distribuição normal padrão Y (com média nula e desvio-padrão unitário), fazendo-se:

$$y = \frac{m - \mu_M}{\sigma_M} \quad (2.21)$$

Esta transformação permite uma comparação dos valores de M com os valores de probabilidade da curva normal padrão Φ . Portanto, a probabilidade de falha resulta:

$$P_f = P(M \leq 0) = P\left(y \leq -\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right) = \Phi\left(-\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right) \quad (2.22)$$

Com os resultados anteriores chega-se a:

$$P_f = \Phi\left[-\frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right] \quad (2.23)$$

onde Φ é a FPA normal padrão.

Interpretação geométrica

Transformando-se as variáveis R e S para o espaço normal padrão Y , através da expressão (2.21), obtém-se uma margem de segurança conforme figura 2.6.

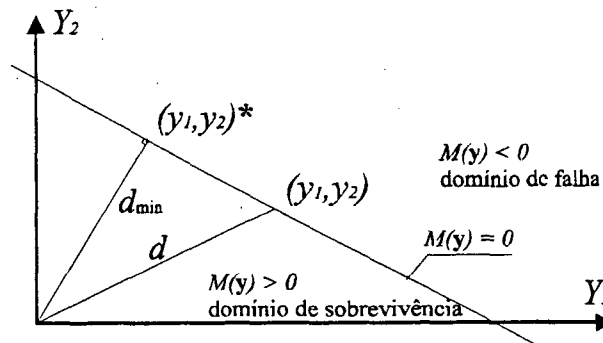


Figura 2.6: Margem de segurança no espaço normal padrão.

A expressão da margem de segurança no espaço normal padrão é:

$$M(y_1, y_2) = R - S = y_1\sigma_R + \mu_R - y_2\sigma_S - \mu_S \quad (2.24)$$

Fazendo $M(y_1, y_2) = 0$ e isolando-se y_2 na expressão (2.24), obtém-se:

$$y_2 = \frac{y_1\sigma_R + \mu_R - \mu_S}{\sigma_S} \quad (2.25a)$$

O quadrado da distância entre um ponto qualquer e a origem é:

$$d^2 = y_1^2 + y_2^2 \quad (2.26)$$

e para um ponto sobre $M(y_1, y_2) = 0$ é:

$$d^2 = y_1^2 + \left(\frac{y_1 \sigma_R + \mu_R - \mu_S}{\sigma_S} \right)^2 \quad (2.27)$$

A distância mínima entre $M(y_1, y_2) = 0$ e a origem é obtida derivando-se (2.25a) em relação a y_1 e igualando a zero:

$$d_{\min}^2 = 2y_1 + 2y_2 \frac{\partial y_2}{\partial y_1} = 0 \quad (2.28)$$

Resolvendo-se (2.28) para y_1 e utilizando (2.25a) para determinar y_2 , obtém-se as coordenadas do ponto sobre $M(y_1, y_2) = 0$ mais próximo da origem:

$$(y_1^*, y_2^*) = \left(-\frac{(\mu_R - \mu_S)\sigma_R}{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}, \frac{(\mu_R - \mu_S)\sigma_S}{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \right) \quad (2.29)$$

Substituindo-se (2.29) em (2.26) e tomando-se a raiz quadrada, obtém-se a expressão para a distância mínima entre $M(y_1, y_2) = 0$ e a origem do espaço das variáveis normalizadas:

$$d_{\min} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \equiv \beta_{HL} \quad (2.30)$$

onde β_{HL} é definido como o índice de confiabilidade de Hasofer e Lind [2]. Observa-se que d_{\min} é igual a expressão (2.23) obtida anteriormente, o que permite generalizar:

$$P_f = \Phi(-\beta_{HL}) \quad (2.31)$$

A expressão (2.31) é exata para problemas com VA normais, decorrelacionadas, e com equação de estado limite linear.

2.4.2 O ponto de projeto e o índice de confiabilidade de Hasofer e Lind

Conforme visto acima, o índice de confiabilidade de Hasofer e Lind β_{HL} é definido como a mínima distância entre a equação de estado limite e a origem do espaço das variáveis normalizadas. O ponto sobre $M(\mathbf{y}) = 0$ que corresponde a este mínimo (equação 2.29) é denominado Ponto de Projeto, habitualmente denotado por um asterisco (*). O ponto de projeto é também o ponto do domínio de falha com maior probabilidade de ocorrência, como será visto em seguida.

Se R e S são variáveis normais decorrelacionadas, a FDP conjunta $f_{R,S}(r, s)$ tem uma distribuição binormal conforme figura 2.7. Com a transformação da equação (2.21), a FDP $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ adquire uma simetria radial, onde as curvas de equi-probabilidade são círculos concêntricos centrados na origem (figura 2.8):

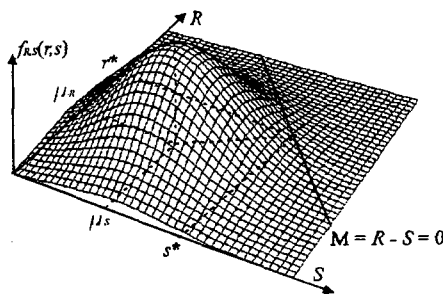


Figura 2.7: Função de probabilidade conjunta bi-normal decorrelacionada.

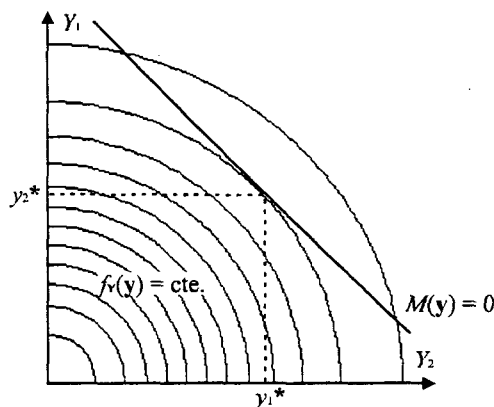


Figura 2.8: Transformação para o espaço normal padrão e definição do ponto de projeto.

Na figura 2.8 pode-se identificar o fato de que o ponto sobre $M(\mathbf{y}) = 0$ com a maior probabilidade de ocorrência é aquele que intercepta a linha de equi-probabilidade de maior conteúdo de probabilidade. Devido a forma circular das linhas de equi-probabilidade, este é também o ponto sobre $M(\mathbf{y}) = 0$ mais próximo da origem. Isto é verdade porque a FDP bi-normal decai exponencialmente com o afastamento da origem, enquanto que a distância à origem aumenta de forma quadrática. Portanto, o ponto do domínio de falha com maior probabilidade de ocorrência, ou ponto de projeto de Hasofer-Lind, se confunde com o ponto sobre $M(\mathbf{y}) = 0$ mais próximo da origem do espaço de variáveis normais padrão. Desta forma, o índice de confiabilidade β_{HL} pode ser calculado como a distância (mínima) entre este ponto e a origem. O cálculo da distância d_{\min} ao invés de β_{HL} é conhecido na literatura como "Fast Probability Integration" [21].

2.4.3 Generalização para problemas reais

Os resultados obtidos nas seções anteriores foram obtidos para problemas com variáveis aleatórias normais, não correlacionadas, e com equação de estado limite linear. No entanto, estes resultados podem ser estendidos a problemas envolvendo VA com distribuições

quaisquer, correlacionadas e com equações de estado limite genéricas. Nestes problemas, a simetria de $f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$ é perturbada pela existência de correlação entre as VA e pela assimetria das FDP marginais das VA. A solução destes problemas exige uma transformação que mapeia a FDP $f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$ qualquer para o espaço normal padrão, descorrelacionando as VA e normalizando as suas distribuições. A expressão (2.31) é exata para funções de estado limite lineares. No método de aproximação de primeira ordem, esta equação é utilizada para obter uma aproximação da P_f .

Definição da notação utilizada

Em problemas com mais de duas VA trabalha-se em notação vetorial. Para tanto, define-se o vetor de variáveis aleatórias como:

$$\mathbf{Z} = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\} \quad (2.32)$$

Este vetor pode assumir um valor específico $\mathbf{z} = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, onde cada VA Z_i assume um valor z_i . \mathbf{z} define um ponto no espaço amostral. A FDP conjunta é escrita de forma vetorial como $f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$ e a FPA como $F_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$.

Define-se também um vetor de médias \mathbf{M} e uma matriz de covariâncias \mathbf{C} :

$$\mathbf{M} = \{\mu_{Z_1}, \mu_{Z_2}, \dots, \mu_{Z_n}\} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma_{Z_1}^2 & \sigma_{Z_1} \cdot \sigma_{Z_2} \cdot \rho_{12} & \dots & \sigma_{Z_1} \cdot \sigma_{Z_n} \cdot \rho_{1n} \\ \sigma_{Z_2} \cdot \sigma_{Z_1} \cdot \rho_{21} & \sigma_{Z_2}^2 & \dots & \sigma_{Z_2} \cdot \sigma_{Z_n} \cdot \rho_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{Z_n} \cdot \sigma_{Z_1} \cdot \rho_{n1} & \sigma_{Z_n} \cdot \sigma_{Z_2} \cdot \rho_{n2} & \dots & \sigma_{Z_n}^2 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Muitas vezes é conveniente separar a matriz \mathbf{C} fazendo $\mathbf{C} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{D}$, onde \mathbf{D} é a matriz diagonal de desvios padrão e \mathbf{R} a matriz dos coeficientes de correlação:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sigma_{Z_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{Z_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{Z_n} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

De maneira similar a equação (2.15), a probabilidade de falha no caso n dimensional é obtida integrando-se a FDP conjunta do problema sobre o domínio de falha:

$$P_f = \int_{D_f} f_{z_1, z_2, \dots, z_n}(z_1, z_2, \dots, z_n) \cdot dz = \int_{D_f} f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) \cdot dz \quad (2.36)$$

A expressão (2.36) não pode ser resolvida diretamente, pois a FDP conjunta $f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$ e o limite de integração dificilmente são conhecidos. Métodos como a aproximação de primeira e segunda ordem e a simulação de Monte Carlo são utilizados para resolver esta expressão de forma aproximada. Estes métodos serão discutidos em detalhe nos próximos capítulos.

2.5 Falha à primeira sobrecarga

Variáveis aleatórias associadas a um contínuo, como o tempo, podem ser modeladas como processos estocásticos. Uma solicitação que varia de forma aleatória no tempo, por exemplo, pode ser modelada como um processo estocástico. As variáveis $R(t)$ e $S(t)$ (resistência e solicitação), podem ser utilizadas para ilustrar um problema típico de engenharia envolvendo processos aleatórios:

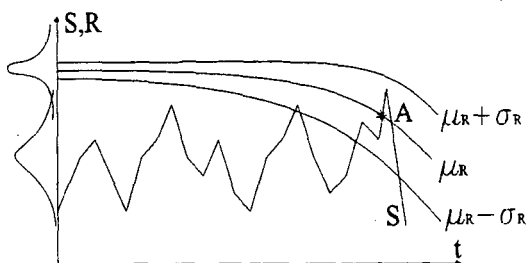


Figura 2.9: Problema típico de interferência no domínio do tempo.

A falha acontece no primeiro instante em que a solicitação ultrapassa a resistência (ponto A indicado na figura). Este modelo é conhecido como "falha à primeira sobrecarga" e é uma forma de visualizar o problema da interferência entre populações no domínio do tempo. Portanto, a falha da estrutura fica caracterizada como:

$$\min_t (R(t) \leq S(t)) \quad (2.37)$$

A figura 2.9 ilustra um problema típico de engenharia, onde a solicitação varia aleatoriamente no tempo e a resistência diminui com o tempo. Em problemas estruturais a resistência diminui com o tempo devido a processos como fadiga, corrosão, desgaste. Estes mesmos processos causam ainda um aumento do desvio-padrão da resistência. O valor médio da solicitação também pode ser variável com o tempo.

Um caso particular é aquele em que a média e desvio padrão da resistência e da solicitação são constantes no tempo, ou seja, R e S são processos estacionários, conforme figura 2.10. Estes problemas podem ser modelados como processos estocásticos ergódicos.

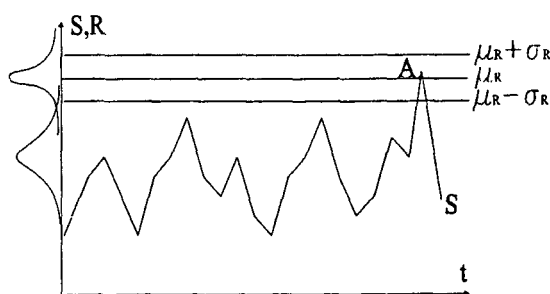


Figura 2.10: Processo estocástico ergódico.

A figura 2.10 ilustra uma resistência R que não varia no tempo mas que está sujeita a uma incerteza, devida a dispersão de propriedades do material. A solicitação varia aleatoriamente com o tempo, mas as suas estatísticas permanecem constantes. Quando o processo estocástico for ergódico, a variável tempo pode ser eliminada do problema através de uma discretização do mesmo. O problema ilustrado na figura 2.10 pode ser modelado, neste caso, como uma seqüência de aplicações estáticas de carga, conforme figura 2.11, onde o valor dos picos estacionários de carga é dado por uma distribuição de máximos da solicitação. Para maiores informações a respeito da estatística de extremos (distribuições de máximos e mínimos), recomenda-se [2, 36].

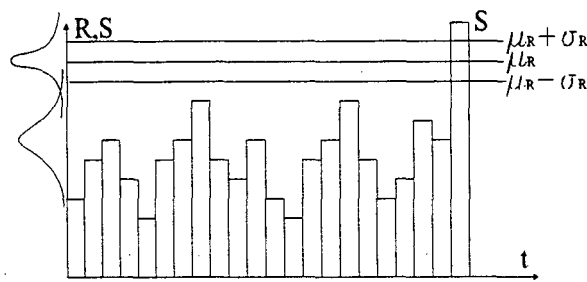


Figura 2.11: Processo ergódico discretizado no tempo.

O problema discretizado no tempo pode ser modelado como uma seqüência de ensaios de Bernoulli, onde cada aplicação de carga indicada na figura 2.11 consiste em um ensaio de Bernoulli, sendo os únicos resultados possíveis a falha ou sobrevivência (figura 2.12).

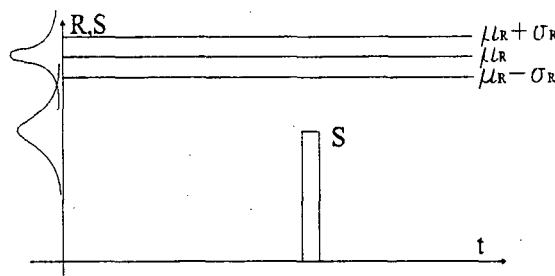


Figura 2.12: Ensaio de Bernoulli.

A probabilidade de ocorrer uma falha, neste caso, é chamada de probabilidade de interferência P_I . A combinação de n ensaios de Bernoulli independentes (figura 2.11) origina uma distribuição binomial. A probabilidade de ter um número z de falhas em n ensaios é dada pela expansão do binômio de Newton:

$$P(Z = z) = \binom{n}{z} \cdot P_I^z \cdot (1 - P_I)^{n-z} \quad (2.38)$$

onde:

$$\binom{n}{z} = \frac{n!}{z! \cdot (n - z)!} \quad (2.39)$$

é o número de combinações possíveis para se obter z falhas em n ensaios;

P_I é a probabilidade de interferência;

P_I^z é a probabilidade de ter z falhas e

$(1 - P_I)^{n-z}$ é a probabilidade de ter $(n - z)$ sobrevivências.

Na prática, o interesse está na ocorrência da primeira falha, ou seja, $P(Z \geq 1)$.

Quando, o número de aplicações de carga n tende a infinito e a probabilidade de interferência em um ensaio individual tende a zero, o que resulta em um processo de Poisson:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot P_I = v \quad (2.40)$$

Substituindo ($P_I = \frac{v}{n}$) na expressão (2.38) obtém-se a expressão para a distribuição de Poisson:

$$P(Z = z) = \frac{v^z}{z!} \cdot e^{-v} \quad (2.41)$$

que fornece a probabilidade de ter um número discreto z de falhas em uma seqüência contínua de ensaios de Bernoulli. No processo de Poisson, P_I é considerada constante ao longo do tempo (processo ergódico). O número médio de falhas que ocorre vem a ser a própria constante v . A partir deste fato pode-se definir a taxa média de falhas λ como $\lambda = \frac{v}{t}$, sendo t o tempo de ensaio. A taxa média de falhas pode ser expressa em falhas por hora, falhas por ciclo, etc. Uma taxa de falha constante no tempo é uma característica de um processo ergódico. A taxa média de falhas está diretamente relacionada com a confiabilidade do sistema, como será visto em seguida.

A probabilidade de que o tempo de vida t seja maior ou igual ao tempo de vida projetado \mathbb{T} , ou seja, a probabilidade de que não ocorra nenhuma falha para $t < \mathbb{T}$ é por definição a confiabilidade:

$$C(t) = P(t < \mathbb{T}) = 1 - F_T(t) = P(Z = 0) \quad (2.42)$$

sendo o último termo a probabilidade de que ocorram 0 falhas em $0 \leq t < \mathbb{T}$, dada pela distribuição de Poisson, e $F_T(t)$ é a FPA do tempo até a primeira falha. Utilizando a expressão (2.41) e a definição de λ , obtém-se:

$$P(Z = 0) = \frac{\lambda t^0}{0!} \cdot e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \quad (2.43)$$

Portanto, o tempo até a primeira falha é dado por uma distribuição exponencial, e sua FPA é:

$$F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (2.44)$$

A taxa média de falhas λ está relacionada com a probabilidade de interferência P_I através da frequência média de picos f_p :

$$\lambda = f_p \cdot P_I \quad (2.45)$$

A frequência média de picos é dada em termos dos momentos de i -ésima ordem da função de densidade espectral (PSD) do processo:

$$f_p = \frac{m_0^2 \cdot m_4}{m_2^2} \quad (2.46)$$

Portanto, pode-se relacionar a probabilidade de interferência ou a probabilidade de falha com a confiabilidade:

$$C(t) = e^{-f_p \cdot P_I \cdot t} \quad (2.47)$$

A expressão (2.47) fornece a confiabilidade, ou seja, a probabilidade de que o sistema não falhe até o tempo t . Se $t = \mathbb{T}$, sendo \mathbb{T} o tempo de vida previsto em projeto, então (2.47) fornece a probabilidade de que o sistema não falhe dentro do tempo de vida previsto para o projeto, conforme a definição de confiabilidade.

O desenvolvimento apresentado exigiu uma série de suposições, que limitam a aplicação da teoria vista, e que devem ser destacadas. A principal suposição é a de independência do tempo, que caracteriza um processo ergódico. Assim, não é possível resolver através desta metodologia problemas que envolvem processos dependentes do tempo, como fluência, fadiga, corrosão, desgaste, etc.

A suposição de independência entre as sucessivas aplicações de carga (figura 2.11), que permitiu utilizar um modelo Binomial a partir dos vários ensaios de Bernoulli, deve ser analisada levando-se em conta a função de auto-correlação da solicitação $R_s(\tau)$:

$$R_s(\tau) = E[S(t) \cdot S(t + \tau)] \quad (2.48)$$

Se o intervalo de tempo τ utilizado para discretizar o processo $S(t)$ é escolhido de forma que o valor da função de auto-correlação é próximo de zero, as sucessivas aplicações de carga podem ser consideradas como eventos independentes. Esta suposição é válida principalmente quando a largura de banda (conteúdo de frequências) da solicitação é grande. Para processos estacionários ergódicos, a função de auto-correlação é facilmente obtida a partir da PSD da solicitação $S_s(\bar{w})$:

$$R_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_s(\bar{w}) \exp(i\bar{w}\tau) d\bar{w} \quad (2.49)$$

onde \bar{w} é a frequência circular do sinal.

Deve-se ressaltar ainda que, quando um processo estocástico é discretizado, a probabilidade de interferência, no ensaio de Bernoulli, é calculada através dos modelos para VA. Nestes casos, a P_f calculada pelos modelos para VA é, na verdade, a P_I . A probabilidade de falha para um determinado intervalo de tempo deve ser calculada através da frequência média de picos e do tempo de vida previsto (equação 2.47). Deve-se destacar ainda que, no cálculo da probabilidade de interferência via métodos para VA, as distribuições de máximos da solicitação (e mínimos de resistência, se for o caso) devem ser consideradas. Os primeiros a reconhecer esta necessidade foram Rackwitz e Fiessler, em 1978 [51].

2.6 Conclusão

Segundo Ditlevsen [22],

”A teoria de confiabilidade não deve ser vista como uma teoria física que busca a descrição de uma verdade da natureza, mas sim como um modelo pragmático para auxiliar a tomada de decisões. A confiabilidade, usada como medida da segurança de um sistema, não deve ser encarada como uma propriedade física do problema mas sim como uma variável de apoio à decisão, a qual está sujeita ao conhecimento a respeito das variáveis do problema e do modelo de solução. Esta medida de segurança está sujeita à quantidade e à qualidade da informação disponível.”

Capítulo 3

MÉTODOS APROXIMADOS DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDEM

3.1 FORM - Método aproximado de primeira ordem

3.1.1 Introdução

O método aproximado de primeira ordem ou FORM - *First Order Reliability Method* - consiste em linearizar a equação de estado limite do problema em um ponto adequado, de forma a obter uma aproximação para a solução da expressão (2.36), conforme figura 3.1. O ponto mais adequado para a linearização é o ponto mais provável de falha ou ponto de projeto, em torno do qual está o maior conteúdo de probabilidades da função de densidade de probabilidade conjunta, no domínio de falha. Conforme visto no capítulo anterior, a P_f para uma equação de estado limite linear, no espaço normal padrão, é dada por:

$$P_{f1} = \Phi(-\beta_{HL}) \quad (3.1)$$

onde β_{HL} é a distância (mínima) entre o ponto de projeto e a origem do espaço das variáveis normais padrão e Φ é a FPA normal padrão.

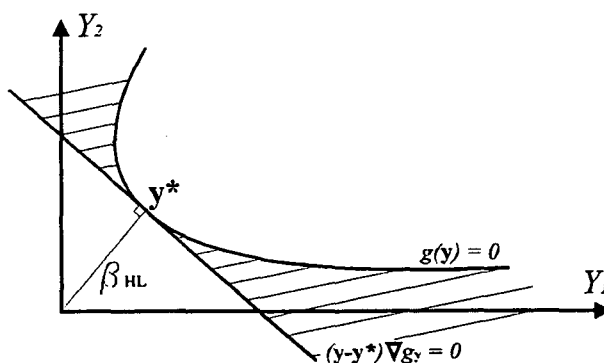


Figura 3.1: Aproximação de primeira ordem da P_f .

A precisão da aproximação feita em FORM depende do grau de linearidade da equação de estado limite em torno do ponto de projeto. A área hachurada na figura 3.1 ilustra o

erro de aproximação que é cometido. Ao interpretar-se esta figura, deve-se lembrar que o maior conteúdo de probabilidades de $f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$, no domínio de falha, está próximo ao ponto de projeto. Deve-se ressaltar também que a aproximação feita em (3.1) é assintótica, isto é, ela melhora a medida que β_{HL} aumenta. Isto significa que, mesmo que o erro relativo $\left(\frac{P_{f1}-P_f}{P_f}\right)$ permaneça constante, o valor absoluto do erro $(P_{f1}-P_f)$ tende a zero quando β_{HL} tende a infinito. O erro de FORM também aumenta a medida que aumentam o número de variáveis aleatórias do problema [57]. Infelizmente, o método não fornece nenhuma maneira de estimar o erro cometido.

O método de primeira ordem foi o primeiro método desenvolvido para abordar o projeto de estruturas de uma forma probabilística. O método foi desenvolvido nos últimos 20 anos, tendo recebido contribuições de diversos pesquisadores. Hasofer e Lind, em 1974 [31], propõem um método para aplicação em normas técnicas, considerando o primeiro e o segundo momentos das VA. Este método equivale a considerar todas as VA com distribuições normais. Neste trabalho também é introduzido um algoritmo para procura do ponto de projeto. Rackwitz e Fiessler, em 1978 [51], apresentam uma transformação para ampliar a solução de Hasofer e Lind a problemas envolvendo variáveis de distribuição qualquer. Neste trabalho também é apresentada uma abordagem para o problema de solicitações dinâmicas. Dois artigos de 1981, de autoria de Ditlevsen [21] e Hohenbichler e Rackwitz [32], abordam a questão de VA não normais correlacionadas. Shinozuka, em 1983 [58] formula uma solução de FORM no espaço original de projeto, que evita a necessidade de uma transformação para o espaço normal padrão, para VA não normais correlacionadas. Kiureghian e Liu, em 1986 [38], sumarizam os trabalhos acima, apresentando uma formulação para problemas com VA de distribuição qualquer e correlacionadas. Novas discussões são feitas por Dolinski, em 1983 [23] e Hohenbichler et al, em 1987 [33], abordando principalmente a questão de múltiplos modos de falha.

O método de primeira ordem pode ser dividido nas seguintes etapas:

1. Mapeamento da FDP conjunta $f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$ do espaço original de projeto \mathbb{Z} para o espaço normal padrão \mathbb{Y} ;
2. Cálculo das coordenadas do ponto de projeto em \mathbb{Y} , através de um algoritmo de otimização.
3. Aproximação de primeira ordem da P_f (equação 3.1) no ponto de projeto.

3.1.2 Transformação para o espaço normal padrão

Nos problemas reais, a ocorrência de distribuições marginais limitadas ou assimétricas, bem como a existência de correlação entre as variáveis aleatórias, perturba a simetria necessária

ao cálculo do ponto de projeto. Sendo assim, a aplicação do método de primeira ordem a estes problemas exige uma transformação que mapeia a função distribuição de probabilidade conjunta $f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$ qualquer em uma distribuição $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ multi-normal padrão (com média zero e desvio padrão unitário). Esta transformação é utilizada para mapear pontos e vetores do espaço de projeto \mathbb{Z} para o espaço \mathbb{Y} .

Considera-se que a informação disponível a respeito do problema permite determinar as distribuições marginais e momentos de 1ª e 2ª ordem das VA, bem como os coeficientes de correlação entre cada par de VA. A transformação para o espaço normal padrão inclui um modelo para a FDP conjunta do problema, $f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$, desconhecida.

Nesta seção, cinco transformações são apresentadas:

1. transformação de Rosenblatt;
2. princípio da aproximação normal;
3. decorrelacionamento de VA por autovetores;
4. decorrelacionamento de VA por decomposição de Choleski;
5. modelo de Nataf.

A transformação de Rosenblatt é uma transformação genérica, que inclui distribuições não normais e VA correlacionadas, mas que não é utilizada na prática porque faz uso de distribuições conjuntas desconhecidas. As demais transformações são formas de aproximar os resultados da transformação de Rosenblatt a partir das informações conhecidas. Através do princípio da aproximação normal, as distribuições marginais originais das VA do problema são transformadas em distribuições marginais normais equivalentes. O decorrelacionamento de VA é feito por uma de duas transformações equivalentes: por autovetores ou por decomposição de Choleski. O princípio da aproximação normal se aplica apenas a VA decorrelacionadas. As transformações de decorrelacionamento se aplicam apenas a distribuições normais. Através do modelo de Nataf, estas três transformações são combinadas, de forma a permitir o mapeamento de um conjunto de VA correlacionadas com distribuição qualquer em um conjunto multi-normal independente.

Transformação de Rosenblatt

Uma transformação genérica que mapeia um conjunto de VA correlacionadas com distribuição qualquer em um conjunto de VA normais padrão independentes é a transformação de Rosenblatt (Rosenblatt, 1969).

Seja um conjunto de nva variáveis aleatórias $\mathbf{Z} = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_{nva}\}$ com FPA conjunta $F_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$. Um conjunto de VA normais padrão independentes $\mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_{nva}\}$ pode ser obtido fazendo:

$$\begin{aligned} y_1 &= \Phi^{-1}[F_1(z_1)] \\ y_2 &= \Phi^{-1}[F_2(z_2|z_1)] \\ &\vdots \\ y_{nva} &= \Phi^{-1}[F_{nva}(z_{nva}|z_1, z_2, \dots, z_{nva-1})] \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde $F_2(z_2|z_1)$ é a probabilidade condicional de z_2 dada a ocorrência de z_1 . As expressões (3.2) são obtidas invertendo-se a relação de igualdade entre a FPA dos dois conjuntos de VA. As probabilidades condicionais podem ser obtidas a partir da FDP conjunta:

$$f(z_i|z_1, z_2, \dots, z_{i-1}) = \frac{f(z_1, z_2, \dots, z_i)}{f(z_1, z_2, \dots, z_{i-1})} \quad (3.3)$$

$$F(z_i|z_1, z_2, \dots, z_{i-1}) = \frac{\int_{-\infty}^{z_i} f(z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, s_i) ds_i}{f(z_1, z_2, \dots, z_{i-1})} \quad (3.4)$$

Nos problemas reais, no entanto, a função de probabilidade conjunta $f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$ dificilmente é conhecida e portanto a solução de (3.3) e (3.4) não é possível. Assim, a transformação de Rosenblatt é aproximada pelas transformações que são apresentadas a seguir.

O princípio da aproximação normal

Se as VA do problema são descorrelacionadas, as distribuições marginais originais podem ser mapeadas em distribuições marginais normais equivalentes. Para que este mapeamento seja consistente, é necessário que os conteúdos de probabilidade ($f_{Z_i}(z_i)$ e $F_{Z_i}(z_i)$) no ponto onde a transformação é feita seja idêntico nos dois espaços (espaço original e espaço normal padrão). Portanto, os momentos da distribuição normal equivalente são calculados [21] de forma que :

$$f_{Z_i}^{neq}(z_i^*) = f_{Z_i}(z_i^*) \quad (3.5)$$

$$F_{Z_i}^{neq}(z_i^*) = F_{Z_i}(z_i^*) \quad (3.6)$$

Fazendo-se uma mudança de variáveis:

$$y_i^* = \frac{z_i^* - \mu_{Z_i}^{neq}}{\sigma_{Z_i}^{neq}} \quad (3.7)$$

onde y_i^* é o ponto no espaço normal padrão \mathbf{Y} onde a transformação é feita, as expressões (3.5) e (3.6) ficam:

$$f_{Z_i}(z_i^*) = \frac{1}{\sigma_{Z_i}^{neq} \cdot \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z_i^* - \mu_{Z_i}^{neq}}{\sigma_{Z_i}^{neq}} \right)^2 \right] = \frac{\phi(y_i^*)}{\sigma_{Z_i}^{neq}} \quad (3.8)$$

e:

$$F_{Z_i}(z_i^*) = \Phi \left(\frac{z_i^* - \mu_{Z_i}^{neq}}{\sigma_{Z_i}^{neq}} \right) = \Phi(y_i^*) \quad (3.9)$$

onde: ϕ é a FDP normal padrão e Φ é a FPA normal padrão. De (3.7) obtém-se a expressão para a média e de (3.8) obtém-se a expressão para o desvio padrão da distribuição normal equivalente:

$$\mu_{Z_i}^{neq} = z_i^* - y_i^* \cdot \sigma_{Z_i}^{neq} \quad (3.10)$$

$$\sigma_{Z_i}^{neq} = \frac{\phi(\Phi^{-1}(F_{Z_i}(z_i^*)))}{f_{Z_i}(z_i^*)} = \frac{\phi(y_i^*)}{f_{Z_i}(z_i^*)} \quad (3.11)$$

De (3.9) obtém-se y_i^* :

$$y_i^* = \Phi^{-1}(F_{Z_i}(z_i^*))$$

A transformação apresentada pode ser visualizada para o caso de uma VA com distribuição marginal uniforme entre os valores hipotéticos 8 e 12, conforme figuras 3.2 e 3.2. Nas figuras são ilustradas as distribuições normais equivalentes em $z = 11,5$.

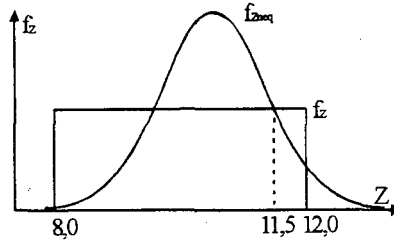


Figura 3.2: Distribuição normal equivalente a uma distribuição uniforme - FDP.

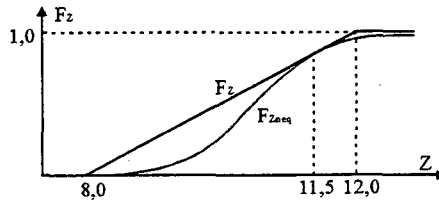


Figura 3.3: Distribuição normal equivalente a uma distribuição uniforme - FPA.

O procedimento de, a cada ponto, mapear a FDP marginal de cada VA do problema em uma FDP normal equivalente, aproximando a cauda da distribuição original pela cauda de uma distribuição normal, é conhecido na literatura como "Princípio da Aproximação Normal" [21].

Quando as distribuições marginais originais são substituídas por distribuições normais equivalentes, informações além dos momentos de 1ª e 2ª ordem são perdidas. Desta forma, informações como limites das FDP originais, que representam restrições nos valores que o vetor z pode assumir, deixam de ser levadas em conta. Isto significa que, durante o processo de solução do problema de otimização, a solução pode convergir para algum valor não factível

de \mathbf{z} . Portanto, estes limites devem ser impostos de forma alternativa, durante o processo de solução.

Descorrelacionamento de VA por autovetores

A correlação entre as VA do problema perturba a simetria necessária ao cálculo do ponto de projeto. Portanto, o conjunto original de variáveis correlacionadas deve ser mapeado em um conjunto de VA independentes.

Considera-se um caso bi-dimensional, com duas distribuições marginais normais Z_1 e Z_2 e coeficiente de correlação ρ , como exemplo. Procura-se uma transformação que mapeie a FDP conjunta $f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2, \rho)$ em uma distribuição bi-normal padronizada com VA não correlacionadas $f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)$. Neste caso, a expressão para a FDP conjunta original é conhecida [1]:

$$f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2, \rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{Z_1}\sigma_{Z_2}\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2 \cdot (1-\rho^2)} \{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2\} \right] \quad (3.12)$$

sendo $X_i = \frac{Z_i - \mu_{Z_i}}{\sigma_{Z_i}}$ uma mudança de variáveis.

A distribuição conjunta procurada é:

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \{y_1^2 + y_2^2\} \right] \quad (3.13)$$

Propõe-se uma transformação na forma $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{y}$, onde \mathbf{Q} é uma matriz cheia a ser determinada. Reconhecendo que :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{x} &= \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{\det \mathbf{R}} \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{1-\rho^2} \{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

pode-se re-escrever (3.12):

$$f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}, \rho) = \tilde{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \rho) = \frac{1}{\alpha} \exp \left[-\frac{1}{2} \{ \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{x} \} \right] \quad (3.15)$$

com $\alpha = \sqrt{2\pi}\sigma_{Z_1}\sigma_{Z_2}\sqrt{1-\rho^2}$. Como $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{y}$:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}, \rho) &= \frac{1}{\alpha} \exp \left[-\frac{1}{2} \{ (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{y})^T \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{y}) \} \right] \\ &= \frac{1}{\alpha} \exp \left[-\frac{1}{2} \{ \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{y} \} \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Desprezando o fator $1/\alpha$, a expressão (3.16) se reduz a (3.13) se $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{Q}$ for igual à matriz identidade. Por ser simétrica, \mathbf{R}^{-1} é também diagonalizável. Portanto:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \\
&= (\overline{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{\Lambda}^*)^T \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot (\overline{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{\Lambda}^*) \\
&= \mathbf{\Lambda}^{*T} \cdot (\overline{\mathbf{Q}}^T \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \overline{\mathbf{Q}}) \cdot \mathbf{\Lambda}^* \\
&= \mathbf{\Lambda}^{*T} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{\Lambda}^*
\end{aligned} \tag{3.17}$$

onde:

$\overline{\mathbf{Q}}$ matriz ortogonal cujas colunas são os autovetores de \mathbf{R}^{-1} ;

$\mathbf{\Lambda}$ matriz diagonal dos autovalores de \mathbf{R}^{-1} : $\mathbf{\Lambda} = [\lambda_i]$.

$\mathbf{\Lambda}^*$ matriz diagonal tal que: $\mathbf{\Lambda}^* = \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \right]$.

Portanto, a matriz procurada é:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q} &= \overline{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{\Lambda}^* \\
\mathbf{Q}^{-1} &= \sqrt{\mathbf{\Lambda}} \cdot \overline{\mathbf{Q}}^T
\end{aligned}$$

A mudança de variável pode ser escrita de forma vetorial:

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1} \cdot \{\mathbf{z} - \mathbf{M}\} \tag{3.18}$$

e portanto:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{x} \tag{3.19}$$

$$= \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \{\mathbf{z} - \mathbf{M}\} \tag{3.20}$$

Fazendo:

$$\mathbf{J} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{D}^{-1} \tag{3.21}$$

a transformação procurada fica:

$$\mathbf{y} = \mathbf{J} \cdot \{\mathbf{z} - \mathbf{M}\} \tag{3.22}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{M} \tag{3.23}$$

onde \mathbf{J} é o Jacobiano da transformação de \mathbf{Z} para \mathbf{Y} . As matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{D} são constantes e portanto \mathbf{J} também é constante.

Descorrelacionamento de VA por decomposição de Choleski

Uma alternativa aos autovetores, para o decorrelacionamento de VA, é a decomposição de Choleski da matriz de correlação \mathbf{R} . A decomposição de Choleski não tem qualquer relação com a transformação de Rosenblatt, mas resulta em uma matriz de decorrelacionamento muito semelhante (matriz triangular inferior \mathbf{L}):

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T = \mathbf{R} \tag{3.24}$$

O jacobiano encontrado na seção anterior, neste caso, fica:

$$\mathbf{J} = \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{D}^{-1} \quad (3.25)$$

Ambas as técnicas de decorrelacionamento são equivalentes. A transformação por autovetores é mais adequada quando a matriz de correlação é cheia (determinante próximo de zero). Quando a matriz de correlação possui apenas alguns coeficientes de correlação não nulos, a transformação de Choleski é mais adequada.

A decomposição de Choleski, assim como o cálculo de autovetores, só vale para VA com distribuição normal. No entanto, ambos os métodos podem ser aplicados à VA com distribuições quaisquer através do cálculo de uma matriz de correlação equivalente, conforme será visto na próxima seção.

Modelo de Nataf

O modelo de Nataf resulta da transformação de Rosenblatt. Ele permite estender as transformações anteriores (princípio da aproximação normal e decorrelacionamento de VA) a problemas com VA correlacionadas de distribuição qualquer.

Considera-se duas variáveis Z_1 e Z_2 não normais com coeficiente de correlação igual a ρ . Procura-se um modelo para a distribuição conjunta $f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$ que seja consistente com as FDP marginais e com o coeficiente de correlação entre Z_1 e Z_2 , bem como uma expressão que permita mapear $f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$ em uma distribuição bi-normal padrão $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$, com média nula e desvio padrão unitário. Existem vários modelos para esta distribuição na literatura, porém apenas um deles satisfaz os requisitos da seção 2.3. Os demais pecam pela invariância com relação ao ordenamento das VA, por serem restritos a determinadas faixas de ρ ou por se aplicarem apenas ao caso bi-normal.

Duas variáveis normais padrão Y_1 e Y_2 podem ser obtidas através da transformação marginal de Z_1 e Z_2 , conforme a transformação de Rosenblatt:

$$y_i = \Phi^{-1}(F_{Z_i}(z_i)) \quad i = 1, 2 \quad (3.26)$$

No modelo de Nataf [38], a FDP conjunta de Z_1 e Z_2 é dada por:

$$f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2, \rho) = f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2, \rho_0) \frac{f_{Z_1}(z_1) \cdot f_{Z_2}(z_2)}{\phi(y_1) \cdot \phi(y_2)} \quad (3.27)$$

sendo $f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2, \rho_0)$ a FDP padrão conjunta de Y_1 e Y_2 (dada por 3.12) e ρ_0 o coeficiente de correlação equivalente entre Y_1 e Y_2 . O coeficiente de correlação equivalente está para as distribuições normais padrão ($f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$) assim como o coeficiente de correlação original está para as distribuições marginais originais ($f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$). Assim, se o coeficiente de correlação original impõe uma certa tendência da distribuição conjunta em \mathbf{Z} , o coeficiente de correlação

equivalente impõe esta tendência na distribuição conjunta em \mathbb{Y} , de forma que o modelo (equação 3.27) seja válido.

Da definição da covariância [1] obtém-se uma expressão para o coeficiente de correlação ρ :

$$\rho_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{z_1 - \mu_{Z_1}}{\sigma_{Z_1}} \right) \left(\frac{z_2 - \mu_{Z_2}}{\sigma_{Z_2}} \right) f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2, \rho_{012}) \frac{f_{Z_1}(z_1) \cdot f_{Z_2}(z_2)}{\phi(y_1) \cdot \phi(y_2)} dz_1 dz_2 \quad (3.28)$$

Esta expressão permite calcular ρ_0 em função do ρ conhecido. Este modelo é válido quando:

1. o mapeamento (3.26) é unívoco, o que é verdade se $F_{Z_i}(z_i)$ é contínua e estritamente crescente;
2. o valor de ρ_0 estiver compreendido entre -1 e +1, o que é satisfeito em quase todas as situações de interesse prático, já que a diferença entre ρ_0 e ρ é pequena.

A integração da expressão 3.28 pode ser evitada através do uso de fórmulas empíricas, através das quais se determina o fator F , sendo:

$$\rho_0 = F \cdot \rho \quad (3.29)$$

As expressões empíricas de F para várias combinações de distribuições são apresentadas em [38]. O fator F , em função do tipo de distribuição envolvida, pode depender de ρ ou do coeficiente de dispersão das distribuições marginais.

Transformação resultante

Na solução de problemas reais, as três transformações apresentadas são utilizadas conjuntamente. As equações resultantes são resumidas nesta seção.

A transformação resultante pode ser resumida nas seguintes etapas:

1. transformação das distribuições marginais em distribuições normais equivalentes, considerando-se as VA como independentes. O vetor \mathbf{M}^{neq} e a matriz \mathbf{D}^{neq} são obtidos;
2. cálculo da matriz de correlação equivalente \mathbf{R}_0 através de (3.28) ou (3.29);
3. cálculo das matrizes de descorrelacionamento por:

(a) autovetores da matriz de correlação equivalente:

$$\bar{\mathbf{Q}}^T \cdot \mathbf{R}_0 \cdot \bar{\mathbf{Q}} = \Lambda \quad (3.30)$$

$$\mathbf{Q}^{-1} = \sqrt{\Lambda} \cdot \bar{\mathbf{Q}}^T \quad (3.31)$$

(b) ou por decomposição de Choleski de \mathbf{R}_0 :

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T = \mathbf{R}_0$$

4. cálculo da matriz Jacobiana:

$$\mathbf{J} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot (\mathbf{D}^{neq})^{-1} \text{ ou:} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{L}^{-1} \cdot (\mathbf{D}^{neq})^{-1} \quad (3.33)$$

5. e a transformação final resulta:

$$\mathbf{y} = \mathbf{J} \cdot \{\mathbf{z} - \mathbf{M}^{neq}\} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{M}^{neq} \quad (3.35)$$

O vetor \mathbf{M}^{neq} e a matriz \mathbf{D}^{neq} devem ser atualizadas a cada ponto de iteração do algoritmo de otimização. Já as matrizes \mathbf{R}_0 , \mathbf{Q}^{-1} e \mathbf{L}^{-1} só precisam ser calculadas na 1ª iteração.

3.1.3 Algoritmos de otimização

A solução do problema de otimização em confiabilidade estrutural pode ser feita, a princípio, por qualquer algoritmo de otimização capaz de resolver o problema:

Minimizar:

$$d = \sqrt{\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{y}}$$

sujeito a:

$$g(\mathbf{y}) = 0 \quad (3.36)$$

Liu e Kiureghian, em [42], fazem um estudo comparativo entre vários algoritmos, testando sua aplicação à solução do problema (equação 3.36). Os algoritmos testados foram: método dos gradientes projetados, penalização por multiplicadores de Lagrange, Lagrangeanos aumentados, programação quadrática seqüencial e o método modificado de Hasofer, Lind, Rackwitz e Fiessler (HLRF-M). Os critérios adotados para avaliar os algoritmos foram generalidade, robustez, eficiência e capacidade. Merece destaque a eficiência, medida a partir do número de iterações e, por conseqüência, do número de avaliações de $g(\mathbf{z})$ necessários para a convergência. Este número é fundamental para o bom desempenho de programas de confiabilidade para elementos finitos, já que cada avaliação de $g(\mathbf{z})$ corresponde a uma análise do modelo de elementos finitos.

A análise feita por Kiureghian aponta os métodos HLRF-M e programação quadrática seqüencial como os mais apropriados para solução do problema de confiabilidade, devido a convergência destes métodos para todos os 5 exemplos analisados e por apresentarem o

menor número de avaliações de $g(\mathbf{z})$ em relação aos demais métodos. A análise também apontou uma ligeira vantagem do método programação quadrática seqüencial em relação ao HLRF-M, em relação ao número de avaliações de $g(\mathbf{z})$. No entanto, o método HLRF-M é muito mais simples de ser implementado.

Método modificado de Hasofer, Lind, Rackwitz e Fiessler

O algoritmo HLRF foi desenvolvido por Hasofer e Lind [31] com contribuições de Rackwitz e Fiessler [51], com o objetivo específico de resolver o problema de otimização em confiabilidade estrutural, sendo o algoritmo mais utilizado para este fim. No entanto, só serve para problemas com a forma (3.36).

Sua fórmula recursiva está baseada na aproximação do ponto \mathbf{y} à superfície $g(\mathbf{y}) = 0$ e na perpendicularização entre o vetor \mathbf{y} e a superfície $g(\mathbf{y}) = 0$. Lembrando que o ponto mais próximo da origem é também um ponto de projeção da origem sobre $g(\mathbf{y}) = 0$, a fórmula recursiva é obtida conforme segue.

Sendo \mathbf{y}_k uma aproximação do ponto de projeção da origem, procura-se que \mathbf{y}_{k+1} seja uma aproximação melhor. Expandindo $g(\mathbf{y})$ em torno de \mathbf{y}_k e tomando apenas o termo de 1ª ordem, obtém-se:

$$g(\mathbf{y}_{k+1}) = g(\mathbf{y}_k) + \nabla g(\mathbf{y}_k)^T \cdot (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k) = 0 \quad (3.37)$$

onde $\nabla g(\mathbf{y}_k)$ é o gradiente da equação de estado limite em relação as variáveis do problema, calculado no espaço normal padrão. Fazendo $\mathbf{y}_{k+1} = \lambda \nabla g(\mathbf{y}_k)$ (combinação linear de $\nabla g(\mathbf{y}_k)$) e substituindo em (3.37):

$$g(\mathbf{y}_k) + \lambda \nabla g(\mathbf{y}_k)^T \cdot \nabla g(\mathbf{y}_k) = \nabla g(\mathbf{y}_k)^T \cdot \mathbf{y}_k \quad (3.38)$$

e portanto:

$$\lambda = \frac{\nabla g(\mathbf{y}_k)^T \cdot \mathbf{y}_k - g(\mathbf{y}_k)}{\nabla g(\mathbf{y}_k)^T \cdot \nabla g(\mathbf{y}_k)} \quad (3.39)$$

Substituindo (3.39) em (3.37), obtém-se:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \frac{\nabla g(\mathbf{y}_k)^T \cdot \mathbf{y}_k - g(\mathbf{y}_k)}{\nabla g(\mathbf{y}_k)^T \cdot \nabla g(\mathbf{y}_k)} \nabla g(\mathbf{y}_k) \quad (3.40)$$

A convergência do método HLRF pode ser melhorada [42] através de um ajuste do passo. Neste caso, a direção de busca dada por:

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k = \frac{\mathbf{y}_k \cdot \nabla g(\mathbf{y}_k) - g(\mathbf{y}_k)}{\nabla g(\mathbf{y}_k)^T \cdot \nabla g(\mathbf{y}_k)} \cdot \nabla g(\mathbf{y}_k) - \mathbf{y}_k \quad (3.41)$$

O novo ponto é encontrado através de uma procura linear na direção acima. Vários métodos podem ser utilizados para a procura linear. O algoritmo HLRF modificado consiste

em utilizar uma função mérito para monitorar a convergência do algoritmo. Neste caso, a procura linear é feita até que seja atingida uma redução mínima na função mérito. Esta redução pode ser de 50 a 90% do valor da função mérito no ponto anterior.

Uma função mérito bastante conveniente, por utilizar apenas grandezas previamente calculadas, é:

$$m(\mathbf{y}_k) = \frac{1}{2} \left| \mathbf{y}_k - \frac{\mathbf{y}_k \cdot \nabla g(\mathbf{y}_{k-1})}{|\nabla g(\mathbf{y}_{k-1})|^2} \cdot \nabla g(\mathbf{y}_{k-1}) \right|^2 + \frac{1}{2} \cdot c \cdot g(\mathbf{y}_k)^2 \quad (3.42)$$

onde c é uma constante positiva. A convergência do HLRF-M é praticamente independente de c , quando seu valor está entre 1 e 10^6 , conforme Liu e Kiureghian [42].

Na função $m(\mathbf{y}_k)$, o primeiro termo impõe que $\mathbf{y}_{k+1} = \lambda \nabla g(\mathbf{y}_k)$. O segundo termo impõe que $g(\mathbf{y}_k) = 0$ quando $k \rightarrow \infty$. A função $m(\mathbf{y}_k)$ tem mínimo global em todos os pontos de mínimo de (3.36). O uso da função mérito melhora bastante a convergência do algoritmo, porém ela pode ter mínimos que não são solução de (3.36) e \mathbf{d}_k pode não ser direção de descida de $m(\mathbf{y}_k)$. Portanto, a convergência global do HLRF-M não pode ser garantida.

3.1.4 Análise de sensibilidade da P_f de primeira ordem.

A análise de sensibilidade em FORM fornece a variação da estimativa da probabilidade de falha em relação às VA do problema e aos parâmetros que determinam suas FDP. Para uma VA qualquer, tem-se

$$\frac{\partial P_{f1}}{\partial z_i} = \frac{\partial \Phi(-\beta)}{\partial z_i} = -\phi(-\beta) \cdot \frac{\partial \beta}{\partial z_i} \quad (3.43)$$

A análise de sensibilidade em relação às VA permite identificar a importância relativa de cada VA na falha do componente, o que é muito útil para eliminar do problema VA sem importância e acelerar o cálculo de gradientes e a convergência da solução. Esta possibilidade é particularmente importante em problemas envolvendo campos estocásticos, uma vez que estes campos são discretizados em um número geralmente alto de VA. Os fatores de sensibilidade para VA não exigem nenhum cálculo adicional, pois são um subproduto da análise de FORM. Os fatores de sensibilidade para VA são calculados por:

$$\alpha(\mathbf{y}^*) = \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{y}_i^*} = -\frac{\nabla g_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}^*)}{|\nabla g_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}^*)|} \quad (3.44)$$

onde o asterisco (*) indica que os fatores devem ser calculados no ponto de projeto. No entanto, como estes fatores variam pouco durante a solução do problema, utiliza-se os valores obtidos na primeira iteração para eliminar do problema VA sem importância. Madsen [44] apresenta fórmulas para determinar o erro percentual introduzido ao se substituir uma VA por um valor determinístico, bem como qual deve ser este valor de forma a minimizar o erro.

Os fatores de sensibilidade com relação a parâmetros das distribuições são muito úteis no sentido de identificar as fontes de incerteza mais importantes e de permitir uma avaliação da

influência dos parâmetros assumidos na resposta obtida. Estes fatores permitem ao projetista verificar o modelo probabilístico do problema e melhorar o projeto de forma racional e objetiva. A sensibilidade da P_f em relação a um parâmetro genérico θ (média, desvio padrão, etc.) é dada por:

$$\gamma(\mathbf{y}^*) = \frac{\partial \beta}{\partial \theta} = - \frac{\nabla g_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}^*)}{|\nabla g_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}^*)|} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}^*}{\partial \theta} \Big|_{z^*} \quad (3.45)$$

O termo $\frac{\partial \mathbf{y}^*}{\partial \theta} \Big|_{z^*}$ não pode ser determinado analiticamente e portanto um esquema de diferenças finitas é adequado. A análise de sensibilidade com relação ao valor médio também fornece a importância relativa entre as VA do problema. A sensibilidade com relação ao desvio padrão fornece a importância da incerteza em cada VA.

Zhang e Kiureghian [65] apresentam fatores de sensibilidade semelhantes para a estimativa de segunda ordem da P_f , utilizando o método de SORM baseado em pontos.

3.1.5 Aproximação de primeira ordem para múltiplos modos de falha

Um componente ou sistema estrutural geralmente apresenta mais de um modo potencial de falha. A cada modo de falha do componente corresponde uma equação de estado limite:

$$g_i(\mathbf{z}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.46)$$

Denota-se o evento falha em relação a cada modo individual de falha por F :

$$F_i = [g_i(\mathbf{z}) \leq 0] \quad (3.47)$$

Um componente estrutural, por definição, é considerado em falha quando falha em relação a qualquer um de seus modos potenciais de falha:

$$F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k \quad (3.48)$$

Esta definição coincide com a definição de sistemas em série. Um sistema estrutural em série é, por exemplo, uma estrutura isostática, onde a falha de qualquer um dos elementos implica em falha da estrutura. Cada um dos elementos da estrutura pode ainda falhar por diferentes modos: ultrapassagem do limite elástico do material, deslocamento excessivo, etc. A formulação apresentada nesta seção se aplica a componentes estruturais ou a sistemas estruturais em série. A solução para sistemas estruturais mais complexos é feita decompondo-se o(s) evento(s) falha, através de uma árvore de falha ou outra técnica similar [2], até que os elementos da base da árvore possam ser considerados como componentes estruturais. A solução de FORM apresentada nas seções anteriores fornecem a P_f em relação a cada modo individual de falha. Estas P_f são então combinadas, de forma a se obter uma estimativa da P_f para o componente estrutural.

Ang, em [2], faz uma dedução detalhada das equações para os limites bi-modais da P_f , utilizando teoria de conjuntos. Nesta seção, apenas as idéias principais e a formulação são apresentadas. Ang mostra que os limites bi-modais da P_f são dados por:

$$P_{f1} + \max_{i,j} \left[\sum_{i=2}^k \left\{ P_{fi} - \sum_{j=1}^{i-1} P(F_i \cap F_j) \right\}; 0 \right] \leq P_f \leq \sum_{i=1}^k P_{fi} - \sum_{i=2}^k \max_{i>j} [P(F_i \cap F_j)] \quad (3.53)$$

onde os modos de falha são ordenados de forma decrescente tal que $P_{f1} \geq P_{f2}$ e $P(F_i \cap F_j)$ é a probabilidade de ocorrer falha combinada em dois modos (area hachurada na figura 3.4). A probabilidade de ocorrência de $F_1 \cap F_2$ não pode ser calculada diretamente. Esta probabilidade é aproximada em função das probabilidades dos eventos A e B conforme ilustrado na figura 3.4. Para tanto, os coeficientes de correlação linearizados entre os modos de falha são calculados por:

$$\rho_{ij} = \frac{\nabla g_i \cdot \nabla g_j}{|\nabla g_i| \cdot |\nabla g_j|} \quad (3.54)$$

Pelas relações de ortogonalidade na figura 3.4, calcula-se a probabilidade de ocorrência dos eventos A e B , para cada combinação de modos ij :

$$P(A_{ij}) = \Phi(-\beta_i) \cdot \Phi\left(-\frac{\beta_j - \rho_{ij} \cdot \beta_i}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}}\right) \quad (3.55)$$

$$P(B_{ij}) = \Phi(-\beta_j) \cdot \Phi\left(-\frac{\beta_i - \rho_{ij} \cdot \beta_j}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}}\right) \quad (3.56)$$

De forma a manter a P_f entre os limites estabelecidos em (3.53), $P(F_i \cap F_j)$ é aproximada de forma distinta para fins de cálculo dos limites inferior e superior. Para o limite inferior utiliza-se:

$$P(F_i \cap F_j) = P(A_{ij}) + P(B_{ij}) \quad (3.57)$$

Para fins de cálculo do limite superior da P_f , a probabilidade conjunta é:

$$P(F_i \cap F_j) = \max[P(A_{ij}), P(B_{ij})] \quad (3.58)$$

Desta forma, a expressão (3.53) fica:

$$P_{f1} + \max_{i,j} \left[\sum_{i=2}^k \left\{ P_{fi} - \sum_{j=1}^{i-1} (P(A_{ij}) + P(B_{ij})) \right\}; 0 \right] \leq P_f$$

$$P_f \leq \sum_{i=1}^k P_{fi} - \sum_{i=2}^k \max_{i>j} [\max[P(A_{ij}), P(B_{ij})]] \quad (3.59)$$

A formulação dos limites bi-modais da P_f está baseada em três importantes aproximações: a linearização das equações de estado limite nos respectivos pontos de projeto, a consideração

de falha simultânea por 2 e não mais do que 2 modos de falha e a aproximação feita no cálculo da probabilidade conjunta $P(F_i \cap F_j)$.

Devido à linearização e à aproximação feita no cálculo de $P(F_i \cap F_j)$, os limites estabelecidos por (3.59) são assintóticos, isto é, se estreitam a medida que as P_f individuais diminuem (β aumenta). Estes limites podem ser bastante largos quando não há um modo de falha dominante, ou seja, quando há vários modos de falha com a mesma probabilidade de falha. Se a probabilidade de falha individual destes modos for elevada, os limites serão mais largos ainda.

O cálculo dos limites bi-modais da P_f pode ser resumido nas seguintes etapas:

1. Ordenamento das P_f individuais e gradientes em ordem decrescente de P_f ;
2. Cálculo dos coeficientes de correlação linearizados entre os modos de falha;
3. Cálculo da probabilidade de ocorrência dos eventos A e B para cada par de modos de falha;
4. Cálculo da probabilidade de ocorrência conjunta de 2 modos de falha $P(F_i \cap F_j)$;
5. Cálculo dos limites da P_f conforme (3.59).

3.2 SORM - Método aproximado de segunda ordem

A aproximação de primeira ordem da P_f é obtida substituindo-se a equação de estado limite $g(\mathbf{y}) = 0$ por um hiperplano tangente a esta no ponto de projeto. Esta aproximação pode ser inadequada quando $g(\mathbf{y}) = 0$ for excessivamente não linear na vizinhança do ponto de projeto. Neste caso, pode-se utilizar uma aproximação de segunda ordem, na qual $g(\mathbf{y}) = 0$ é substituída por uma superfície de segunda ordem, centrada no ponto de projeto, conforme figura 3.5. Como a aproximação é feita no ponto de projeto, o algoritmo de otimização e a transformação probabilística apresentadas em FORM também são necessários para se obter a estimativa de segunda ordem.

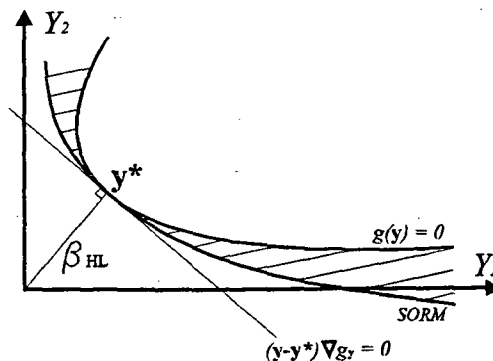


Figura 3.5: Aproximação de segunda ordem da P_f .

O erro cometido na aproximação de segunda ordem será menor do que o de FORM, conforme ilustrado na figura 3.5. Os aspectos comentados em relação ao erro cometido na aproximação de primeira ordem podem ser generalizados para SORM (forma da equação de estado limite, assintoticidade e influência do número de VA).

3.2.1 SORM baseado em curvaturas

Um método de segunda ordem baseado em curvaturas e utilizando uma superfície quadrática genérica foi primeiramente apresentada por Fiessler, em 1979 [25]. Breitung (1984), Kiureghian (1987) e Tvedt (1990) utilizam um hiper parabolóide, ajustado através das curvaturas principais de $g(\mathbf{y}) = 0$ ou de pontos escolhidos em torno do ponto de projeto.

O parabolóide baseado em curvaturas foi proposto por Breitung a partir de análise assintótica e das condições de otimalidade de segunda ordem no ponto de projeto. O parabolóide genérico pode ser escrito como:

$$v_n = \beta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} v_i v_j \quad (3.60)$$

onde os v_i formam uma base ortonormal $T = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ centrada no ponto de projeto e os a_{ij} são as componentes da matriz Hessiana do parabolóide, a serem determinados. As questões fundamentais de SORM são a escolha da base T adequada para a construção do parabolóide e a determinação analítica do conteúdo de probabilidade definido pela curva (3.60). A matriz \mathbf{A} , cujos componentes são os a_{ij} , pode ser determinada igualando-se seus termos à matriz Hessiana de $g(\mathbf{y}) = 0$, $\mathbf{H}g_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})$, quando esta é escrita em relação à base T , ou seja:

$$\mathbf{A} = \frac{T^T \cdot \mathbf{H}g_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) \cdot T}{|\nabla g(\mathbf{y})|} \quad (3.61)$$

A Hessiana do Lagrangeano associado ao problema de mínimo (3.36) é dada por:

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} + \frac{\beta}{|\nabla g(\mathbf{y})|} \cdot \mathbf{H}g_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) \quad (3.62)$$

Escrita na base T , esta expressão fica:

$$T^T \cdot \mathbf{H} \cdot T = \mathbf{I} + \beta \cdot \mathbf{A} \quad (3.63)$$

o que representa a condição de otimalidade de segunda ordem, ou a projeção de \mathbf{H} no plano tangente a $g(\mathbf{y}) = 0$ no ponto de projeto. A matriz $T^T \cdot \mathbf{H} \cdot T$ é sempre positivo semi-definida no ponto de projeto. Através da análise assintótica e da equação (3.63), Breitung chegou a uma expressão para a aproximação de segunda ordem da P_f :

$$P_{f2} = \Phi(-\beta) \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{I} + \beta \mathbf{A})}} \quad (3.64)$$

onde o índice 2 indica aproximação de segunda ordem. A análise assintótica implica que a aproximação (3.64) (e 3.66) melhoram a medida que β aumenta.

No caso particular em que os v_i são escolhidos de forma a serem os autovetores de $\mathbf{H}g_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})$, a expressão do parabolóide (3.60) fica:

$$v_n = \beta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} k_i v_i^2 \quad (3.65)$$

onde os k_i são as curvaturas principais do parabolóide. Neste caso, a matriz \mathbf{A} é diagonal e a expressão (3.64) fica:

$$P_{f2} = \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta k_i}} \quad (3.66)$$

A estimativa da P_f via SORM é bastante cara, um vez que a determinação das curvaturas principais exige o cálculo da matriz Hessiana $\mathbf{H}g_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})$, o que requer a avaliação de $g(\mathbf{z})$ em $2 \cdot nva^2$ pontos, sendo nva o número de variáveis aleatórias. Esta estimativa pode tornar-se bastante cara a medida que aumenta o número de VA do problema. Existem alternativas que podem, eventualmente, ser utilizadas para reduzir o número de avaliações de $g(\mathbf{z})$. Uma possibilidade é o SORM baseado em pontos.

3.2.2 SORM baseado em pontos

O método de SORM baseado em pontos é apresentado por Kiureghian et al., em 1987 [39] e Zhang e Kiureghian, em 1989 [65]. No SORM baseado em pontos a aproximação (3.65) é utilizada. Neste caso, dois pontos são determinados sobre cada eixo v_i , um em cada segmento (positivo e negativo). Neste pontos $g_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})$ é avaliada e dois semi-parabolóides são ajustados. Uma curvatura equivalente, a ser utilizada na expressão (3.66), é determinada, em função das curvaturas das duas semi-parábolas. Neste método, a princípio, apenas $2(nva - 1)$ pontos precisam ser avaliados. No entanto, a escolha ideal para os eixos v_i são as direções principais de $\mathbf{H}g_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})$, desconhecida. O uso de semi-parábolas permite incluir, de forma aproximada, termos de 3ª ordem da equação de estado limite, que são totalmente desprezados pelo SORM baseado em curvaturas. Além disto, o resultado é insensível a ruídos da equação de estado. A principal vantagem do SORM baseado em pontos, no entanto, é a possibilidade de realizar análise de sensibilidade da P_f em relação às VA, conforme descrito em [65]. Por outro lado, a localização adequada dos pontos em cada eixo é bastante trabalhosa, pois é feita de forma iterativa.

As expressões (3.64) e (3.66), infelizmente, dependem da expressão analítica de $g_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) = 0$. Estas expressões fornecem resultados distintos para formas equivalentes da equação de estado

limite. Um resultado insensível a estas variações é a integral de Tvedt (1985):

$$P_{f2} = \phi(-\beta) \operatorname{Re} \left[i \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \int_{t=0}^{\infty} \frac{\exp\{(t + \beta)^2/2\}}{t} \left[\prod_{j=1}^{q-1} (1 - t \cdot k_j)^{1/2} \right] dt \right] \quad (3.67)$$

Esta expressão pode ser avaliada numericamente através de quadraturas de Gauss ou métodos de integração de pontos de sela. Outro resultado de Tvedt, de 1988, reporta uma integral simples exata para aproximação de SORM, não disponível.

3.2.3 Aproximação de segunda ordem para múltiplos modos de falha

Conforme visto na seção 3.1.5, uma aproximação linear para múltiplos modos de falha já é uma tarefa bastante complicada. Uma aproximação de segunda ordem é algo impraticável. No entanto, os resultados da aproximação linear podem ser melhorados a partir do conhecimento da estimativa de SORM das P_f 's individuais. Isto é feito trasladando-se o hiper-plano que aproxima cada equação de estado limite, do ponto de projeto para uma posição que corresponde à estimativa de SORM. Para tanto, calcula-se o índice de confiabilidade equivalente ou índice de confiabilidade generalizado:

$$\beta_{gen} = \Phi^{-1}(P_{f2}) \quad (3.68)$$

Capítulo 4

SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

4.1 Introdução

Simulação é uma forma de experimentação numérica. Segundo Rubinstein [56],

”simulação é uma técnica numérica para realizar experimentos em computador, com base em modelos lógicos e modelos matemáticos, de modo a descrever o comportamento de sistemas econômicos e de administração ao longo de um determinado período de tempo”.

Simulação de Monte Carlo é o nome dado a simulação que envolve a utilização de números aleatórios. Este nome é uma referência à cidade de Monte Carlo, no principado de Mônaco, famosa por seus cassinos. A simulação tem sido muito utilizada para prever o comportamento a longo prazo de sistemas complexos de qualquer natureza. Simulação é utilizada também como ferramenta para calcular integrais, equações algébricas e equações diferenciais muito complexas.

Com relação à análise de estruturas, a simulação pode ser encarada como uma forma de simular numericamente um experimento que na prática não é realizável. Estruturas geralmente não podem ser ensaiadas para determinação da probabilidade de falha, por que possuem uma probabilidade de falha caracteristicamente muito pequena, o que exige um número de ensaios muito grande e torna o custo de um ensaio real proibitivamente elevado. Além disto, muitas vezes uma estrutura é única, não havendo sequer uma similar para ser ensaiada.

A simulação é uma técnica que permite a solução de problemas muito complexos. Para a simulação, não há limite no número de variáveis do problema ou na complexidade de seu modelo matemático. Através da simulação resolve-se com a mesma facilidade problemas com poucas ou com muitas variáveis. A simulação é utilizada quando o nível de simplificações necessárias para a solução analítica do problema se torna muito grande. Além disto, é muito utilizada para validar modelos analíticos aproximados.

Históricamente, na área de estruturas, o método de simulação de Monte Carlo sempre foi o último recurso, utilizado quando qualquer outro método analítico de solução falhava. Hoje em dia, no entanto, o método tem conquistado mais espaço, devido à sua robustez e simplicidade, e devido ao desenvolvimento de técnicas de redução da variância (redução do número de ensaios), as quais tem permitido a aplicação da simulação a problemas com baixa probabilidade de falha.

Métodos de simulação são conhecidos como métodos exatos porque, teoricamente, o resultado da simulação tende ao resultado exato quando o número de simulações tende ao infinito. Muitos autores se referem a resultados de simulação como resultados exatos, o que desconsidera o fato de que estes resultados são obtidos para amostras de tamanho finito e através de algoritmos aproximados.

Os resultados dependem da amostra utilizada, ou seja, da qualidade dos números aleatórios utilizados na simulação. A geração de números aleatórios com uma distribuição e correlação prescritas constitui-se numa parte importante do trabalho de simulação.

4.2 Formulação

O problema da determinação da confiabilidade ou da probabilidade de falha de uma estrutura pode ser colocado na forma de uma integral multidimensional, conforme visto na seção 2.4.3:

$$P_f = \int_{D_f} f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) \cdot dz \quad (4.1)$$

onde:

$f_{\mathbf{z}}(z)$ é a função de densidade de probabilidade conjunta e

D_f é o domínio de falha, ambos desconhecidos.

Usando uma função indicadora, pode-se integrar (5.18) sobre todo o domínio:

$$P_f = \int_{\text{todo } z} I_{[g(\mathbf{z})]} \cdot f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) dz \quad (4.2)$$

onde:

$I_{[g(\mathbf{z})]} = 1$ se $g(\mathbf{z}) \leq 0$ (falha da estrutura);

$I_{[g(\mathbf{z})]} = 0$ se $g(\mathbf{z}) > 0$ (não - falha da estrutura);

A expressão do valor esperado de uma função qualquer $g(\mathbf{z})$ é:

$$E_{[g(\mathbf{z})]} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathbf{z}) \cdot f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) dz \quad (4.3)$$

e pode ser estimada, com base uma amostra de tamanho finito, por:

$$\bar{g} = \frac{\sum_i^{n_{si}} g(z_i)}{n_{si}} \quad (4.4)$$

onde a barra indica uma estimativa.

Comparando estas duas expressões com a expressão (4.2) obtém-se:

$$\overline{P_f} = \frac{\sum_{i=1}^{nsi} I_{[g(z_i)]}}{nsi} \quad (4.5)$$

Desta forma, a simulação de Monte Carlo consiste em:

1. gerar nsi amostras de $\mathbf{z} = \{z_1, z_2, \dots, z_{nsi}\}$ a partir de $f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$;
2. verificar a ocorrência de falha ou não para cada amostra, através de $I_{[g(\mathbf{z})]}$;
3. estimar a probabilidade de falha através de (4.5).

De maneira semelhante, a variância de P_f pode ser estimada através de:

$$Var_{(P_f)} = \frac{\sum_{i=1}^{nsi} (I_{[g(z_i)]} - P_f)^2}{nsi \cdot (nsi - 1)} \quad (4.6)$$

A variância na P_f corresponde a incerteza (ou ao erro) relacionado com a simulação realizada. A equação (4.6) mostra que o erro da simulação diminui quando aumenta o número de simulações, se reduzindo a zero a medida que nsi tende a infinito. Ela mostra ainda que o erro depende do valor da probabilidade de falha. Quanto menor a probabilidade de falha, maior o número de simulações necessárias para se obter uma mesma variância. A equação (4.6) permite estimar o número de ensaios necessários para manter o erro dentro de um intervalo determinado. Uma boa aproximação pode ser obtida utilizando:

$$nsi = \frac{100}{P_f} \quad (4.7)$$

Os problemas estruturais usualmente são caracterizados por uma baixa probabilidade de falha. Isto significa que um número muito grande de simulações tem que ser realizadas para se atingir apenas alguns poucos pontos no domínio de falha, o que leva a uma grande variância do resultado. Nestes casos, o número de simulações pode se tornar proibitivamente grande, tornando-se necessário melhorar os resultados da simulação através de técnicas de redução da variância, descritas a seguir.

4.3 Métodos para redução da variância

O aumento do número de simulações não é a única maneira de melhorar a qualidade de uma simulação de Monte Carlo. A variância do resultado da simulação pode ser reduzida através de técnicas específicas, conforme segue.

4.3.1 Variáveis antitéticas

Esta técnica de redução da variância é uma das mais fáceis de serem implementadas e apresenta bons resultados.

Dois estimadores não tendenciosos da probabilidade de falha, Z' e Z'' , podem ser combinados de forma a produzir um terceiro estimador Z_A :

$$Z_A = \frac{1}{2} (Z' + Z'') \quad (4.8)$$

Z_A também será um estimador não tendencioso de Z pois:

$$E(Z_A) = \frac{1}{2} [E(Z') + E(Z'')] = \frac{1}{2} (Z' + Z'') \quad (4.9)$$

A variância de Z_A vem a ser:

$$Var(Z_A) = \frac{1}{4} [Var(Z') + Var(Z'') + 2Cov(Z', Z'')] \quad (4.10)$$

Se os dois estimadores são independentes, (se forem baseados em dois conjuntos separados de valores aleatórios, por exemplo) o último termo da expressão (4.10) se anula. Se os estimadores tiverem uma correlação negativa, o último termo é menor que zero e portanto a variância de Z_A resulta menor do que a variância combinada de Z' e de Z'' . Logo, a variância de Z_A e portanto o erro associado com a simulação pode ser reduzida através da utilização de dois estimadores com correlação negativa.

A correlação negativa pode ser obtida através do uso das variáveis antitéticas, como segue. Se um conjunto de nsi valores $\{y_1, y_2, \dots, y_{nsi}\}$ com distribuição uniforme entre 0 e 1 (veja seção 4.4) é utilizado para gerar o estimador Z' , basta utilizar o conjunto $\{1 - y_1, 1 - y_2, \dots, 1 - y_{nsi}\}$ para obter Z'' . Os estimadores Z' e Z'' resultarão negativamente correlacionados ($\rho = -1$).

4.3.2 Amostragem por importância

As técnicas de amostragem por importância são conhecidas também por amostragem inteligente, uma vez que procuram deslocar os pontos de amostragem para regiões importantes do domínio de falha. Elas reduzem o número de simulações por evitarem a simulação excessiva de pontos longe da região de interesse, ou seja, longe do domínio de falha. Estas técnicas geralmente fazem uso de alguma informação adicional sobre o problema, como por exemplo as coordenadas do ponto de projeto.

As técnicas de amostragem por importância tem sido objeto de muito estudo nos últimos anos. Elas estão entre as mais importantes e eficientes técnicas para diminuir o número de simulações e/ou reduzir a variância dos resultados.

Os pontos de amostragem são deslocados para o domínio de falha através de uma função de amostragem $h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$:

$$P_f = \int_{\text{todo } z} I'_{[g(\mathbf{z})]} \cdot \frac{f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})}{h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})} \cdot h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (4.11)$$

Como $h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$ passa a ser a nova função de amostragem, $I'_{[g(\mathbf{z})]} \neq I_{[g(\mathbf{z})]}$, e a P_f passa a ser estimada por:

$$\overline{P}_f = \frac{1}{n_{si}} \cdot \sum_{i=1}^{n_{si}} I'_{[g(\mathbf{z}_i)]} \cdot \frac{f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}_i)}{h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}_i)} \quad (4.12)$$

A equação (4.12) pode ser interpretada como sendo (4.5), mas com uma nova função indicadora $I'_{[g(\mathbf{z})]}$, onde cada ponto amostrado possui um peso de simulação:

$$w_i = \frac{f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}_i)}{h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}_i)} \quad (4.13)$$

De fato, se $h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$ desloca os pontos de amostragem para o domínio de falha, $I'_{[g(\mathbf{z})]}$ é maior do que $I_{[g(\mathbf{z})]}$, mas está associada a um peso menor do que 1, conforme indicado no detalhe da figura 4.1:

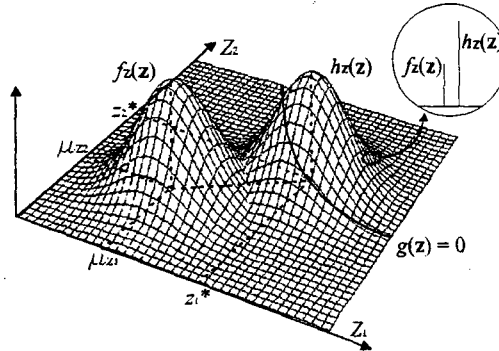


Figura 4.1: Amostragem por importância usando o ponto de projeto.

O algoritmo de solução para simulação com amostragem por importância é:

1. gerar n_{si} amostras de $\mathbf{z} = \{z_1, z_2, \dots, z_{n_{si}}\}$ a partir de $h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$;
2. verificar a ocorrência de falha ou não para cada amostra, através de $I'_{[g(\mathbf{z})]}$;
3. calcular o peso de cada ponto simulado por (4.13);
4. estimar a probabilidade de falha através de (4.12).

O problema de amostragem por importância se resume na escolha da forma e dos parâmetros de $h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$. Percebe-se que se $h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$ é escolhida de maneira que:

$$h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) = I'_{[g(\mathbf{z}_i)]} \cdot \frac{f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})}{P_f} \quad (4.14)$$

então o erro cometido em (4.12) em relação a (4.5) é nulo, e apenas uma simulação seria necessária. Esta expressão não tem utilidade prática, pois faz uso da própria P_f que está sendo calculada. No entanto, ela mostra que $h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$ deve ser escolhida de maneira a ser proporcional a $I'_{[g(\mathbf{z}_i)]} \cdot \frac{f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})}{P_f}$, ou ainda, de forma a ser parecida com a FDP original $f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$.

Várias estratégias são propostas na literatura para se determinar a função de amostragem $h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$: amostragem por importância utilizando pontos de projeto [13]; amostragem adaptativa [16, 37]; método kernel [3]; método do hipercone [34]; divisão do hiper-espaço [63]; simulação direcional [11] e outros.

Uma estratégia que se mostra bastante interessante é centrar a função de amostragem no ponto de projeto, deslocando os pontos de simulação para o domínio de falha. Esta vem a ser uma forma de melhorar a qualidade da simulação através do uso de uma informação adicional: as coordenadas do ponto de projeto. O ponto de projeto é encontrado facilmente pelo algoritmo de HLRP ou outro. Borgound e Bucher [13] utilizam esta técnica para encontrar o ponto de projeto e a partir dele iniciar a simulação.

Quando a amostragem por importância no ponto de projeto é utilizada, o número de pontos necessários para a simulação (equação 4.7), torna-se praticamente independente da ordem de grandeza da P_f . A experiência mostra que 3000 simulações por ponto de projeto são suficientes para se obter uma boa aproximação da P_f (com coeficiente de dispersão em torno de 5%).

4.3.3 Amostragem por importância para múltiplos modos de falha

Múltiplos modos de falha não representam qualquer dificuldade adicional no contexto da simulação. A questão da associação de componentes, se em série, em paralelo ou mista, não representa problema maior. Basta determinar qual a combinação ou combinações de modos de falha que levam a falha da estrutura e verificar, para cada ponto, a ocorrência de alguma destas combinações. A função indicadora em (4.11) só será adicionada de uma unidade se uma destas combinações acontecer. No caso de componentes em série, a falha do sistema fica caracterizada quando ocorrer a falha em relação a qualquer um dos modos de falha.

Existem várias alternativas para se realizar a amostragem por importância no caso de múltiplos modos de falha. Bucher, em [16], utiliza uma função de amostragem que é "esticada", de modo a cobrir dois modos de falha. Deste procedimento resulta que a maioria dos pontos é amostrada entre os dois pontos de projeto. Esta solução também é inviável para mais de dois modos de falha. Uma alternativa muito interessante é utilizar uma função de amostragem centrada em cada ponto de projeto, conforme apresentado por Schuëller em 1987 [57] e ilustrado na figura 4.2.

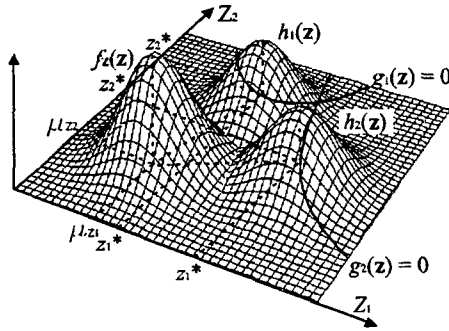


Figura 4.2: Amostragem por importância para múltiplos modos de falha.

Na realidade, uma única função de amostragem é utilizada. Esta função, no entanto, possui saliências sobre cada ponto de projeto e é aproximadamente plana no resto do domínio. Cada saliência é uma componente da função de amostragem. Para k modos de falha, a expressão da função de amostragem é:

$$h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^k p_i \cdot h_{i\mathbf{z}}(\mathbf{z}) \quad (4.15)$$

onde os p_i são pesos de amostragem associados a cada modo de falha. Cada saliência $h_{i\mathbf{z}}$ é obtida transladando-se a FDP original do problema, de forma que a seu ponto médio coincida com o respectivo ponto de projeto. Os pesos p_i são determinados em função da importância de cada modo de falha, dada em termos da estimativa de primeira ordem da P_f :

$$p_i = \frac{\Phi(-\beta_i)}{\sum_{i=1}^k \Phi(-\beta_i)} \quad (4.16)$$

Pontos de projeto pouco importantes não são utilizados para construção da função de amostragem. A simulação de um número muito reduzido de pontos em um modo de falha pouco importante prejudica a qualidade dos resultados. Assim, modos de falha cujo peso de amostragem for menor do que um determinado limite (0.1) não devem ser utilizados para a construção da função de amostragem.

O número total de simulações é dividido de forma proporcional aos pesos p_i . Cada conjunto de pontos é amostrado segundo a sua componente da função de amostragem ($h_{i\mathbf{z}}$). Os pesos de amostragem para cada modo de falha são calculados por (4.13) e a estimativa da P_f é feita por (4.12). A função indicadora é calculada considerando-se a possibilidade de falha em relação a qualquer equação de estado limite, independente da componente $h_{i\mathbf{z}}$ utilizada na geração de cada ponto.

4.3.4 Amostragem por importância adaptativa

Uma forma bastante eficiente de melhorar a qualidade dos resultados são os métodos adaptativos, nos quais a função de amostragem $h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$ é atualizada a medida que os resultados da simulação vão sendo computados. Bucher e Karamchandani et al [16, 37] apresentam formas diferentes para se proceder a amostragem por importância adaptativa. Uma forma de equacionar o problema da amostragem por importância adaptativa é como segue.

Revisando a expressão (4.14), o erro estatístico da amostragem por importância será nulo se:

$$h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) = f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z} | \mathbf{z} \in D_f)$$

Relaxando esta condição e aplicando ela apenas aos 2 primeiros momentos da função de amostragem tem-se:

$$E_h[\mathbf{Z}] = E_f[\mathbf{Z} | \mathbf{Z} \in D_f] \quad (4.17)$$

$$E_h[\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T] = E_f[\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T | \mathbf{Z} \in D_f] \quad (4.18)$$

Através de simulações iniciais, pode-se calcular $E_h[\mathbf{Z}]$ e $E_h[\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T]$ e a partir destes valores construir uma função de amostragem multi-normal. Ao invés de iniciar a simulação a partir do ponto médio, pode-se melhorar bastante a convergência da amostragem por importância adaptativa se o ponto inicial da simulação for deslocado para perto do domínio de falha. O ponto de projeto é um ponto adequado para isto.

4.4 Geração de números aleatórios

Uma boa parte do trabalho envolvido na aplicação do método de simulação de Monte Carlo está na geração dos números aleatórios com a distribuição estatística desejada. A utilização de computadores facilita esta tarefa. Os métodos apresentados a seguir são os utilizados na prática. Outras técnicas de maior apelo teórico mas difícil aplicação prática também existem [15, 56].

A geração de um número aleatório com distribuição determinada pode ser dividida em duas etapas:

1. geração de um número aleatório y com distribuição uniforme entre 0 e 1;
2. inversão da FPA (conforme distribuição desejada):

$$z = F_z^{-1}(y) \quad (4.19)$$

Este procedimento de geração de números aleatórios pode ser visualizado na figura 4.3:

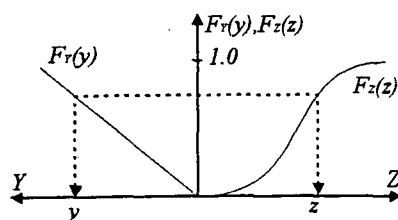


Figura 4.3: Geração de números aleatórios com distribuição prescrita.

A expressão analítica de $F_Z^{-1}(y)$ muitas vezes não é conhecida, como nos casos das distribuições normal e log-normal. Nestes casos, expressões polinômicas assintóticas são utilizadas, com resultados bastante satisfatórios. A geração de um conjunto de números aleatórios com distribuição conjunta prescrita é descrita adiante.

4.4.1 Geração de números com distribuição uniforme

Existem inúmeros algoritmos que podem ser utilizados para a geração de números aleatórios. Normalmente, os números aleatórios são gerados através de algoritmos recursivos. Bourgund et all [14] apresentam uma série destes algoritmos, bem como uma avaliação da sua precisão. Um algoritmo muito utilizado é:

$$y_{i+1} = \frac{a \cdot z_i + c}{m} - \text{int} \left(\frac{a \cdot z_i + c}{m} \right) \quad (4.20)$$

Na expressão acima, *int* designa a parte inteira do número calculado, portanto resulta que os valores de *y* estarão entre 0 e 1. O valor de *z* utilizado para dar seqüência no algoritmo é:

$$z_{i+1} = a \cdot z_i + c - m \cdot \text{int} \left(\frac{a \cdot z_i + c}{m} \right) \quad (4.21)$$

Os números aleatórios gerados através de algoritmos como o indicado podem ser reproduzidos e portanto constituem-se em um conjunto determinístico. Por causa disto, estes números são chamados pseudo-aleatórios.

Os números gerados através de algoritmos recursivos são cíclicos. O período do ciclo é menor do que *m*, portanto um elevado valor de *m* deve ser utilizado. Além disto, o índice de correlação entre dois números consecutivos é inversamente proporcional às constantes *m* e *a* utilizadas, portanto estes valores devem ser grandes. Os computadores IBM System 360 utilizam o algoritmo indicado para geração de números aleatórios, com $a = 16807$, $m = 2^{31} - 1$ e $c = 0$, com os quais se obtém bons resultados.

Os números gerados através deste tipo de algoritmo podem ser testados quanto a sua independência e quanto a sua uniformidade através de testes estatísticos padronizados, como o teste de Kolmogorov e o teste do Qui-quadrado [50].

4.4.2 Geração de números aleatórios com distribuição conjunta

O método de simulação de Monte Carlo requer a geração de um vetor de números aleatórios \mathbf{z} , com distribuição conjunta conforme a FDP conjunta das VA do problema. Como nos problemas reais a FDP conjunta dificilmente é conhecida, este conjunto de pontos é gerado a partir das distribuições marginais de cada VA (equação 4.19), adotando-se um modelo para a FDP conjunta, conforme feito no método de aproximação de primeira ordem.

Números aleatórios independentes

Se as VA do problema são independentes, a FDP conjunta pode ser escrita simplesmente como:

$$f_{Z_1, Z_2, \dots, Z_{nva}}(z_1, z_2, \dots, z_{nva}) = \prod_{i=1}^{nva} f_{Z_i}(z_i) \quad (4.22)$$

onde $f_{Z_i}(z_i)$ é a FDP marginal de Z_i . Neste caso, portanto, os números aleatórios podem ser gerados independentemente dos demais, de acordo com a expressão (4.19).

Números aleatórios correlacionados

A existência de correlação entre as VA deve então ser imposta no conjunto de pontos gerados para obtenção do vetor \mathbf{z} . Este problema é semelhante ao problema de descorrelacionamento das VA no FORM e envolve um modelo para a FDP conjunta. Na prática, as mesmas transformações utilizadas no FORM podem ser empregadas.

Se as VA do problema são correlacionadas, a FDP e FPA conjunta podem ser expressas como:

$$f_{Z_1, Z_2, \dots, Z_{nva}}(z_1, z_2, \dots, z_{nva}) = f_{Z_1}(z_1) f_{Z_2}(z_2|z_1) \dots f_{Z_{nva}}(z_{nva}|z_1, z_2, \dots, z_{nva-1}) \quad (4.23)$$

$$F_{Z_1, Z_2, \dots, Z_{nva}}(z_1, z_2, \dots, z_{nva}) = F_{Z_1}(z_1) F_{Z_2}(z_2|z_1) \dots F_{Z_{nva}}(z_{nva}|z_1, z_2, \dots, z_{nva-1}) \quad (4.24)$$

onde $F_{Z_2}(z_2|z_1)$ é a FPA condicional de Z_2 . Os números correlacionados podem ser gerados a partir de um conjunto de números aleatórios $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{nva})$, independentes e com distribuição uniforme entre 0 e 1, da seguinte forma. O valor de z_1 é gerado de forma independente:

$$z_1 = F_{Z_1}^{-1}(y_1) \quad (4.25)$$

e z_2 é gerado utilizando-se a FDP condicional e o valor de z_1 já conhecido:

$$z_2 = F_{Z_2}^{-1}(y_2|z_1) \quad (4.26)$$

Nos problemas práticos, as distribuições condicionais não são conhecidas. No entanto, as expressões (4.25) e (4.26) são semelhantes as expressões (3.2) da transformação de

Rosenblatt, apresentada na seção 3.1.2. Sendo assim, as aproximações desta transformação, utilizadas no FORM, também são empregadas aqui.

Desta forma, o vetor independente \mathbf{y} é transformado em um vetor correlacionado \mathbf{y}' fazendo:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{L} \cdot \mathbf{y} \text{ ou} \quad (4.27)$$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{y} \quad (4.28)$$

onde:

$$\mathbf{Q} = \overline{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{\Lambda}^* \quad (4.29)$$

$$\overline{\mathbf{Q}}^T \cdot \mathbf{R}_0 \cdot \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{\Lambda} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T = \mathbf{R}_0 \quad (4.31)$$

Os números correlacionados com distribuição qualquer são obtidos por:

$$\mathbf{z} = F_{\mathbf{z}}^{-1}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{y}) \text{ ou} \quad (4.32)$$

$$\mathbf{z} = F_{\mathbf{z}}^{-1}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{y}) \quad (4.33)$$

4.5 Método da superfície de resposta

Os métodos de simulação requerem a avaliação de $g(\mathbf{z})$ em um número muito grande de pontos, mesmo utilizando-se a amostragem por importância. Quando $g(\mathbf{z})$ é dada de forma algorítmica, através de um modelo de elementos finitos, este número pode ser proibitivamente alto. Nestes casos, torna-se interessante substituir o modelo detalhado do problema (modelo de EF) por um modelo de comportamento aproximado. O modelo de EF é avaliado em alguns pontos, a partir dos quais o modelo aproximado é construído. Este modelo simplificado geralmente é composto de equações polinômicas, chamadas de superfície de resposta. O método é conhecido como método da superfície de resposta ou RSM - *Response Surface Method*.

A aproximação mais utilizada para a superfície de resposta [17] é um polinômio de segundo grau:

$$g_{rsm}(\mathbf{z}) \cong a + \mathbf{z} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{z} \quad (4.34)$$

onde a , $\mathbf{b} = \{b_i\}$ e $\mathbf{C} = [c_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \dots, nva$ são coeficientes a determinar. Para se determinar estes coeficientes, $(1 + nva + nva^2)$ pontos precisam ser avaliados. Um sistema é montado e resolvido para os coeficientes desconhecidos.

Outra alternativa é a interpolação por mínimos quadrados, que procura minimizar o erro de aproximação de $g_{rsm}(\mathbf{z})$. Este método requer a avaliação de $g(\mathbf{z})$ em $(2^{nva} + 2 \cdot nva + 1)$ pontos para uma superfície de segunda ordem, o que pode se tornar bastante caro.

Muitas vezes os termos cruzados $z_i \cdot z_j$ são desprezados em (4.34), como forma de diminuir o números de avaliações de $g(\mathbf{z})$. Neste caso a matriz \mathbf{c} torna-se diagonal e o número de coeficientes a determinar se reduz a $(2 \cdot nva + 1)$. A equação de estado limite será bem representada ao longo dos eixos principais mas a aproximação não será tão boa entre os eixos.

Uma questão importante é a escolha da posição dos pontos onde a avaliação de $g(\mathbf{z})$ deve ser feita. Obviamente, a representação de $g(\mathbf{z})$ por $g_{rsm}(\mathbf{z})$ depende desta escolha. Esta questão, bem como o problema de instabilidade numérica detectado na solução do sistema montado a partir de (4.34), levaram a adotar uma terceira aproximação para a superfície de resposta. No ACE-Pro a solução para SORM já havia sido implementada e a Hessiana apresentava boa qualidade. Assim, optou-se por aproximar $g(\mathbf{z})$ a partir de uma expansão de segunda ordem da equação de estado limite:

$$g_{rsm}(\mathbf{z}) \cong g(\mathbf{z}^*) + (\mathbf{z} - \mathbf{z}^*)^T \cdot \nabla g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^*} + (\mathbf{z} - \mathbf{z}^*)^T \cdot \mathbf{H}g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^*} \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{z}^*) \quad (4.35)$$

A expansão (4.35) vem a ser uma expressão particular de (4.34). A Hessiana é a mesma utilizada para fazer a aproximação de SORM. O gradiente é calculado por diferenças centrais, utilizando os mesmos pontos necessários para o cálculo dos termos da diagonal principal da Hessiana. Um total de $(2 \cdot nva^2)$ pontos são necessários. Esta opção custa mais do que (4.34), mas a aproximação obtida é muito boa, conforme será visto adiante.

Um outro aspecto muito importante é a localização da superfície de resposta. Ela deve ser construída em torno do ponto de projeto, de forma a minimizar erro no cálculo da P_f . Em alguns trabalhos [17, 60] o ponto de projeto é encontrado a partir da superfície de resposta, o que exige que a superfície de resposta seja construída de forma adaptativa. Acontece que, devido à eficiência do HLLRF e ao alto custo da construção da superfície de resposta, é mais conveniente achar o ponto de projeto primeiro, calculando os gradientes diretamente a partir de $g(\mathbf{z})$ e construindo a superfície de resposta uma única vez. A avaliação do gradiente por diferenças finitas exige $(nva + 1)$ pontos, enquanto que a construção da superfície de resposta sem termos cruzados exige $(2 \cdot nva + 1)$ pontos, a cada iteração.

A viabilidade de se utilizar uma superfície de resposta (ao invés de realizar a simulação diretamente utilizando o modelo de EF) deve ser avaliada balanceando-se o erro cometido em cada uma destas soluções com o número de avaliações de $g(\mathbf{z})$ necessárias. Na simulação direta, utilizando amostragem por importância, em torno de 3000 simulações são necessárias, por ponto de projeto (para um coeficiente de dispersão em torno de 5%). Já utilizando uma superfície de resposta como a empregada neste trabalho, um total de $(2 \cdot nva^2)$ avaliações

de $g(\mathbf{z})$ são necessárias, por ponto de projeto. O erro de simulação pode ser reduzido a um mínimo, utilizando-se um grande número de pontos. No entanto, um erro correspondente à representação de $g(\mathbf{z})$ por (4.35) é introduzido. Este erro depende de quão bem a superfície de resposta pode representar a equação de estado limite do problema, e não pode ser avaliado quantitativamente. Como orientação, considera-se viável o uso de uma superfície de resposta, como a utilizada neste trabalho, sempre que:

$$2 \cdot nva^2 \leq 3000 \quad (4.36)$$

Capítulo 5

ELEMENTOS FINITOS ESTOCÁSTICOS

5.1 Formulação

Seja um corpo ocupando um domínio Ω num espaço tridimensional com sistema de coordenadas x_i , $i = 1, 2, 3$, sob ação de forças de corpo \mathbf{b}_0 atuando no domínio Ω e forças de tração \mathbf{t}_0 atuando na fronteira Γ , conforme figura 5.1. O equilíbrio deste corpo é dado, de forma variacional, por:

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_0 d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_0 d\Gamma = 0 \quad (5.1)$$

onde:

$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ relação constitutiva;

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ equação para pequenas deformações;

ρ_0 = massa específica;

$\ddot{u}_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ = componente de aceleração;

\mathbf{D} = tensor de constantes elásticas;

\mathbf{u} e $\delta \mathbf{u}$ = vetor deslocamentos nodais e respectivas variações.

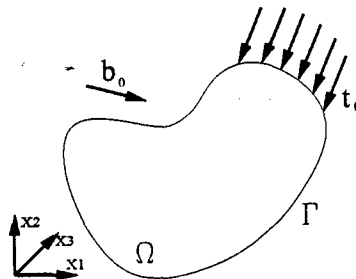


Figura 5.1: Problema de elasticidade.

Se as forças externas, propriedades do material e a geometria forem variáveis aleatórias, representadas por Z_i , $i = 1, 2, \dots, nva$, sendo nva o número de variáveis aleatórias, as respostas $\mathbf{u}(\mathbf{z})$ e $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{z})$ serão função das VA \mathbf{Z} , e portanto também serão VA.

A solução tradicional de elementos finitos é aproximar os deslocamentos através de uma série:

$$u_i(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \sum_{k=1}^n N_k(\mathbf{x}) \cdot u_{ik}(\mathbf{z}) \quad (5.2)$$

sendo:

n = número de nós;

$N_k(\mathbf{x})$ = função de interpolação associada ao nó k e

$u_{ik}(\mathbf{z})$ = componentes do deslocamento no nó k .

Substituindo (5.2) em (5.1), na ausência de forças de inércia, obtém-se o sistema:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}(\mathbf{z}), \mathbf{z}) - \mathbf{f}(\mathbf{z}) = 0 \quad (5.3)$$

onde \mathbf{R} e \mathbf{f} são vetores de forças internas e externas, respectivamente, dados por:

$$\mathbf{R} = \bigcup_e \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{z}) d\Omega = \bigcup_e \int_{\Omega_0} \mathbf{B}^T(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{z}) \mathbf{j}(\mathbf{z}) d\Omega_0 \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \bigcup_e \left[\int_{\partial\Omega_e} \mathbf{N}^T(\mathbf{x}) \mathbf{t}_0(\mathbf{z}) d\partial\Omega + \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T(\mathbf{x}) \rho_0 \mathbf{b}_0(\mathbf{z}) d\Omega \right] \\ &= \bigcup_e \left[\int_{\partial\Omega_0} \mathbf{N}^T(\mathbf{x}) \mathbf{t}_0(\mathbf{z}) \mathbf{j}(\mathbf{z}) d\partial\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{N}^T(\mathbf{x}) \rho_0 \mathbf{b}_0(\mathbf{z}) \mathbf{j}(\mathbf{z}) d\Omega_0 \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde:

$\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{z})$ = relação entre deslocamentos nodais e deformações, tal que:

$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{z})$;

$\mathbf{N}^T(\mathbf{x})$ = funções de interpolação;

Ω_e = domínio do elemento;

Ω_0 = domínio padrão para integração do elemento;

$\mathbf{j}(\mathbf{z})$ = Jacobiano do mapeamento para o domínio padrão Ω_0 .

Para problemas elásticos lineares, a equação acima assume a forma:

$$\mathbf{K}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}) \quad (5.6)$$

onde $\mathbf{K}(\mathbf{z})$ = matriz de rigidez do problema.

Zhang e Kiureghian [65] dividem os métodos de elementos finitos estocásticos em dois tipos: aqueles que visam determinar a média e coeficiente de variação da resposta ($\mathbf{u}(\mathbf{z})$)

e aqueles que visam determinar probabilidades associadas a determinados critérios de falha. Estes métodos são conhecidos, respectivamente, como métodos de segundo momento e método de confiabilidade para elementos finitos.

5.2 MEF estocástico de segundo momento

O objetivo destes métodos é determinar a média e variação da resposta de um componente estrutural. Além da resposta de elementos finitos convencional, eles fornecem uma estimativa da variação da resposta. Estes métodos utilizam apenas informação estatística até o segundo momento, o que equivale a considerar \mathbf{Z} como um vetor normal.

Nos métodos de segundo momento, o vetor deslocamentos nodais é expandido em série da seguinte forma:

$$\mathbf{u}(\mathbf{z}) = \sum_{i=0}^m u_i \psi_i(\mathbf{z}) \quad (5.7)$$

onde $m + 1$ é o número de termos da série. Os diferentes métodos de segundo momento diferem pela escolha dos coeficientes determinísticos u_i e das funções base $\psi_i(\mathbf{z})$. Quando as funções base são polinômicas, os momentos estatísticos de $\mathbf{u}(\mathbf{z})$ podem ser determinados analiticamente. Em outros casos, são determinados através de simulação de Monte Carlo.

5.2.1 Aproximação de primeira ordem por série de Taylor

Neste método, o vetor deslocamentos nodais $\mathbf{u}(\mathbf{z})$ é aproximado por uma expansão em série de Taylor em torno do ponto médio $\bar{\mathbf{z}}$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{z}) = \mathbf{u}(\bar{\mathbf{z}}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{u}(\bar{\mathbf{z}})}{\partial z_i} \cdot (z_i - \bar{z}_i) + \dots \quad (5.8)$$

Neste caso, as funções base são $\psi_0 = 1$ e $\psi_i = z_i - \bar{z}_i$ e os coeficientes determinísticos são $u_0 = \mathbf{u}(\bar{\mathbf{z}})$ e $u_i = \frac{\partial \mathbf{u}(\bar{\mathbf{z}})}{\partial z_i}$. Os momentos estatísticos podem ser determinados diretamente de (5.8):

$$\mu_{\mathbf{u}(\mathbf{z})} = \mathbf{u}(\bar{\mathbf{z}}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{u}(\bar{\mathbf{z}})}{\partial z_i} \cdot \bar{z}_i \quad (5.9)$$

$$\sigma_{\mathbf{u}(\mathbf{z})} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{u}(\bar{\mathbf{z}})}{\partial z_i} \right)^2} \quad (5.10)$$

As derivadas do vetor deslocamentos nodais podem ser obtidas por diferenças finitas ou derivando-se a equação (5.6):

$$\mathbf{K} \cdot \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{z})}{dz_i} = \frac{d\mathbf{f}}{dz_i} - \frac{d\mathbf{K}}{dz_i} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{z}) \quad (5.11)$$

Os cálculos envolvidos no método são a solução do sistema de elementos finitos tradicionais (equação 5.6) no ponto médio, a avaliação dos gradientes (equação 5.11) e o cálculo dos momentos (equação 5.9).

5.2.2 Método da perturbação

Neste método, aplicável a apenas alguns tipos de problemas, são feitas expansões de 1ª ordem de \mathbf{K} , \mathbf{u} e \mathbf{f} :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{(0)} + \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i^{(1)} \cdot (z_i - \bar{z}_i) + O[(z_i - \bar{z}_i)^2] \quad (5.12)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(0)} + \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i^{(1)} \cdot (z_i - \bar{z}_i) + O[(z_i - \bar{z}_i)^2] \quad (5.13)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i^{(1)} \cdot (z_i - \bar{z}_i) + O[(z_i - \bar{z}_i)^2] \quad (5.14)$$

onde $\mathbf{K}^{(0)} = \mathbf{K}(\bar{\mathbf{z}})$, $\mathbf{f}^{(0)} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{z}})$, $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}(\bar{\mathbf{z}})$, $\mathbf{K}_i^{(1)}$, $\mathbf{f}_i^{(1)}$ e $\mathbf{u}_i^{(1)}$ são os coeficientes determinísticos e o superíndice (\cdot) refere-se a ordem do polinômio $(z_i - \bar{z}_i)$ a que cada coeficiente corresponde. Substituindo as equações (5.12) em (5.6) e igualando-se os termos de mesma ordem em $(z_i - \bar{z}_i)$ obtém-se o seguinte sistema de $n + 1$ equações:

$$\mathbf{K}^{(0)} \cdot \mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{f}^{(0)} \quad (5.15)$$

$$\mathbf{K}^{(0)} \cdot \mathbf{u}_i^{(1)} = \mathbf{f}_i^{(1)} - \mathbf{K}_i^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.16)$$

onde a primeira equação corresponde a solução convencional de elementos finitos. O sistema é resolvido para as incógnitas $\mathbf{u}^{(0)}$ e $\mathbf{u}_i^{(1)}$. Os momentos da resposta são obtidos por uma expressão similar a 5.9.

A precisão do método depende diretamente da ordem da perturbação $(z_i - \bar{z}_i)$, ou seja, o coeficiente de variação das VA deve ser pequeno. Além disto, o método só é aplicável a alguns problemas nos quais a relação explícita (equação 5.12) para \mathbf{K} e \mathbf{f} pode ser obtida, como por exemplo problemas lineares de barra ou viga com forças nodais ou módulo de elasticidade incertos. Quando os coeficientes são escolhidos como $\mathbf{K}_i^{(1)} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_i}$ e $\mathbf{f}_i^{(1)} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z_i}$, o método da perturbação se reduz ao método da expansão em série de Taylor.

Outros métodos de segundo momento, descritos em [65], são a expansão de Neumann, *Polynomial Chaos* e *Weighted Integral*.

Os métodos do segundo momento, em geral, fornecem bons resultados quando a FDP conjunta é bem comportada, o que acontece quando as FDP marginais não são limitadas e não são fortemente correlacionadas, quando a resposta $\mathbf{u}(\mathbf{z})$ em torno do ponto médio não é excessivamente não linear e quando a variância das VA for pequena. Neste sentido, o método de confiabilidade para elementos finitos é muito mais robusto.

5.3 FERM - Método de confiabilidade para elementos finitos

O método de confiabilidade para elementos finitos ou FERM - *Finite Element Reliability Method* - foi proposto inicialmente por Kiureghian e Taylor, em 1983. Foi implementado para estruturas lineares sob carga estática por Kiureghian em 1985 e por Kiureghian e Ke em 1985 e 1988. Em 1991, Kiureghian e Liu implementaram uma solução por SORM, bem como a primeira aplicação a problemas não lineares. Recentemente, o método vem sendo aplicado a uma gama cada vez maior de problemas. Os desenvolvimentos atuais tem sido no sentido de problemas envolvendo não linearidades geométricas e materiais. As referências a estes trabalhos podem ser obtidas em [65].

O método é uma seqüência natural dos trabalhos de Gopalakrishna [29] e de Maymon [46, 47]. A idéia básica é bastante simples: utilizar o modelo de elementos finitos do problema como uma "caixa preta", que fornece a resposta mecânica do problema para uma dada configuração das variáveis de projeto, conforme figura 5.2.

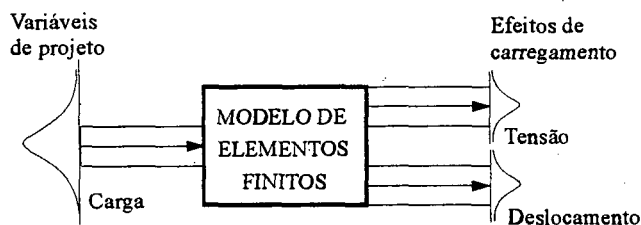


Figura 5.2: Elementos finitos como uma caixa preta.

A resposta mecânica são os efeitos de carregamento, denotados simbolicamente por $s(\mathbf{z})$. efeitos de carregamento podem ser tensões, deformações ou deslocamentos. A transformação mecânica $s = s(\mathbf{z})$ é dada de forma algorítmica pela solução do modelo de elementos finitos.

O método de confiabilidade para elementos finitos permite determinar probabilidades associadas a determinados modos de falha, descritos por equações de estado limite, conforme figura 5.3 e equação (5.17):

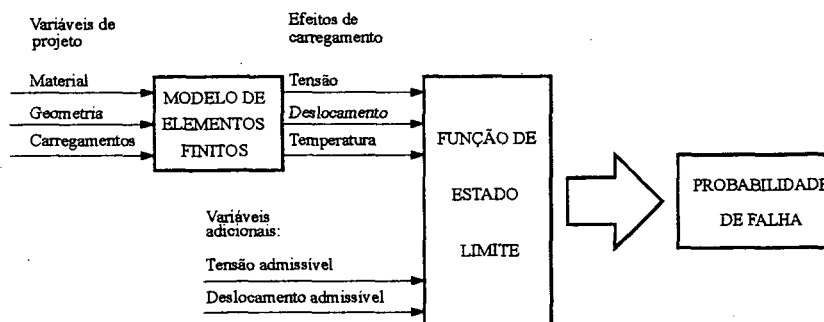


Figura 5.3: Cálculo da P_f utilizando o modelo de elementos finitos.

$$g(\mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z}) = 0 \quad (5.17)$$

A probabilidade de falha com relação a cada modo de falha é dada por:

$$P_f = \int_{g(\mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z}) \leq 0} f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) \cdot d\mathbf{z} \quad (5.18)$$

Conforme visto no capítulo 2, a expressão (5.18) não pode ser avaliada diretamente, pois a FDP conjunta $f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$ e o limite de integração $g(\mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z}) = 0$ não são conhecidos. Na solução de (5.18), os métodos para VA apresentados neste trabalho podem ser utilizados. A escolha de um método ou de uma combinação destes consiste em uma opção de cada autor. No capítulo 6 é apresentada em detalhes a opção feita neste trabalho e implementada no programa ACE-Pro. A solução adotada inclui as aproximações de primeira e segunda ordem, construção de superfícies de resposta em torno dos pontos de projeto, cálculo de limites bimodais da P_f e simulação de Monte Carlo com amostragem por importância.

O método é muito mais robusto do que os tradicionais elementos finitos estocásticos de segundo momento, pois sua solução não apresenta as limitações destes. Em conjunto com o FORM, o método pode ser aplicado a VA com distribuições quaisquer, sem limitação em sua faixa de variação, com uma aproximação no caso de equações de estado não lineares.

O método pode ser utilizado para problemas envolvendo campos estocásticos, através de uma discretização dos mesmos. Para isto, a questão do tamanho adequado do elemento, que permite representar de forma adequada a variação espacial de propriedades, é relevante. As técnicas de discretização de campos estocásticos serão vistas na seção 5.4.

O FERM basicamente exige a avaliação de $g(\mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z})$ em alguns pontos específicos, determinados pelos algoritmos de FORM, SORM ou outro qualquer. O algoritmo de otimização de FORM requer, além da resposta $\mathbf{s}(\mathbf{z})$, o gradiente da equação de estado limite em relação as VA ($\nabla_{\mathbf{z}}g$). O gradiente pode ser calculado por um esquema de diferenças finitas ou pelas técnicas de diferenciação direta, conforme descrito na seção 5.5.

5.3.1 Sub-modelagem no FERM

O objetivo principal do FERM é a determinação das P_f 's associadas a determinadas equações de estado limite. No entanto, uma importante característica do método é a possibilidade de se determinar a função densidade de probabilidades de efeitos de carregamento. Estas distribuições são necessárias para se efetuar simplificações do problema ou quando se utiliza a técnica de sub-modelagem na análise de elementos finitos. Determinando as FDP's dos carregamentos ou deslocamentos atuantes no sub-modelo, evita-se a necessidade de se efetuar a análise de sub-modelagem completa a cada etapa da análise de confiabilidade.

As distribuições destes carregamentos e deslocamentos são determinadas a partir das distribuições das VA originais do problema, repetindo-se a solução do modelo global de elementos finitos. A probabilidade de falha final é determinada utilizando apenas as PDF's calculadas e o sub-modelo de elementos finitos.

Uma equação de estado limite é escrita para cada carregamento ou deslocamento atuante no sub-modelo:

$$g(\mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z}) = \mathbf{z}_{\text{lim}} - \mathbf{s}(\mathbf{z}) = 0 \quad (5.19)$$

em função de um valor limite \mathbf{z}_{lim} , determinístico. O cálculo da P_f é repetido para vários valores de \mathbf{z}_{lim} , variando-se \mathbf{z}_{lim} de zero até um valor bem maior do que o valor médio de $\mathbf{s}(\mathbf{z})$. Assim, a FPA da P_f é obtida, conforme figura 5.4. Como \mathbf{z}_{lim} é determinística, o evento complementar à P_f é a FPA do efeito de carregamento $\mathbf{s}(\mathbf{z})$. Derivando esta FPA, obtém-se a FDP desejada.

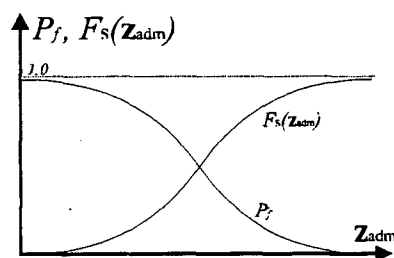


Figura 5.4: Obtenção da FDP de efeitos de carregamento.

Esta é mais uma vantagem do FERM em comparação aos elementos finitos estocásticos de segundo momento, uma vez que estes permitem obter apenas a média e o desvio padrão dos efeitos de carregamento, e não a sua FDP.

5.4 Discretização de campos estocásticos

A solução de problemas envolvendo campos estocásticos pelos métodos do segundo momento e método de confiabilidade para elementos finitos exige uma discretização dos mesmos. Nesta discretização, os campos passam a ser representados por um conjunto de VA. A discretização é feita através de uma malha de elementos de campo estocástico, semelhante a malha de elementos finitos.

5.4.1 Campos estocásticos Gaussianos

Na grande maioria dos problemas, os campos estocásticos são modelados como campos Gaussianos, devido à simplicidade destes modelos e à carência de modelos alternativos. Apesar disto, campos Gaussianos não são adequados para representar campos limitados por natureza ou por definição (grandezas estritamente positivas, por exemplo).

Campos Gaussianos são completamente descritos por uma função média $\mu_w(\mathbf{x})$, uma função variância $\sigma_w^2(\mathbf{x})$ e por uma função de auto-correlação $\rho_{ww}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$. Geralmente, se assume que os campos são homogêneos, com funções média e variância constantes no tempo e com funções de auto-correlação na forma: $\rho_{ww}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \rho_{ww}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)$

Um campo estocástico é totalmente definido quando a transformação $Z(\mathbf{x}) = \Phi^{-1}[F_w(\mathbf{x})]$ resulta num processo com média nula e variância unitária.

5.4.2 Aspectos importantes

Uma questão fundamental na discretização dos campos estocásticos é o tamanho adequado dos elementos. O tamanho geralmente é definido em função do comprimento de correlação, que vem a ser o comprimento sobre o qual a função de auto-correlação é menor do que um determinado fator (por exemplo, e^{-1}). Para um comprimento de correlação curto, uma malha fina deve ser utilizada. Para um comprimento de correlação bastante grande, o campo pode eventualmente ser representado como uma única VA atuando sobre todo o domínio. Por outro lado, uma malha muito fina pode resultar em VA fortemente correlacionadas, o que pode criar problemas na operação de descorrelacionamento conforme visto na seção 3.1.2, uma vez que a matriz de correlação se torna singular quando os coeficientes de correlação tendem a um.

Liu e Kiureghian [40] mostram que um tamanho de elemento da ordem de $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{2}$ do comprimento de correlação é adequado. Os autores também sugerem o uso de uma malha para cada campo estocástico do problema, diferente da malha de elementos finitos. Afinal, a malha de elementos finitos é escolhida em função de gradientes de tensão enquanto que a malha de campo estocástico depende basicamente da função de auto-correlação. Assim, a malha de campo estocástico é geralmente constituída por um conjunto de elementos da malha de elementos finitos.

Outra questão importante é o elevado número de VA resultante do processo de discretização. Conforme visto nos capítulos anteriores, um número muito grande de VA prejudica o resultado de FORM e é muito caro para os métodos de SORM e para construção da superfície de resposta. Desta forma, é interessante eliminar do problema VA sem importância. Mahadevan e Haldar [45] apresentam uma proposta na qual o problema é resolvido inicialmente considerando cada campo estocástico como uma única VA atuando sobre todo o domínio do problema. Somente campos correspondentes a VA que apresentarem um grande fator de sensibilidade na solução inicial são discretizados. Os demais campos permanecem representados como uma única VA. Mahadevan até sugere um fator de sensibilidade limite de 0.3, ou seja, campos cujas VA apresentarem fator de sensibilidade menor do que 0.3 não são discretizados. Além disto, após a discretização dos campos mais importantes, VA que ainda se mostrarem sem importância nas primeiras iterações da solução final também podem ser

eliminadas.

5.4.3 Métodos de discretização

Método da média espacial

O método da média espacial (*Spatial Averaging Method*) foi proposto por Vanmarcke em 1977 e consiste em utilizar uma média do valor do campo sobre o elemento para representar o campo neste elemento:

$$w_i = \frac{1}{\Omega_i} \int_{\Omega_i} w(\mathbf{x}) d\Omega \quad (5.20)$$

onde:

Ω_i = domínio do elemento;

w_i = VA representativa do campo no i -ésimo elemento.

Vanmarcke derivou expressões para os coeficientes de correlação w_i entre as VA para elementos retangulares. O método não se aplica a outras formas de elementos e portanto é bastante limitado. Além disto, a determinação da distribuição dos w_i é muito difícil, a não ser no caso de campos Gaussianos, quando então as VA resultantes também são Gaussianas.

Métodos do ponto médio e do ponto nodal

Nos métodos do ponto médio e do ponto nodal (*Midpoint and Nodal-Point Methods*) o valor da VA que representa o campo é simplesmente o valor do campo em determinados pontos:

$$E(w_i) = E(w(\bar{\mathbf{x}}_i)) \quad (5.21)$$

No método do ponto médio, $\bar{\mathbf{x}}_i$ é o centróide do elemento:

$$\bar{\mathbf{x}}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j^d \quad (5.22)$$

onde:

n = número de nós;

\mathbf{x}_j^d = coordenadas dos nós.

Este método é adequado para campos que representam propriedades do material, por exemplo.

No método dos pontos nodais os $\bar{\mathbf{x}}_i$ são os próprios nós da malha. Este método é adequado para campos que representam carregamentos distribuídos. O coeficiente de correlação entre os w_i é obtido simplesmente a partir da função de auto-correlação:

$$\rho_{w_i w_j} = \rho_{ww}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \quad (5.23)$$

Os métodos do ponto médio e ponto nodal não são tão precisos como o método da média espacial, mas possuem a grande vantagem de preservar a distribuição do campo nas VA resultantes. Assim, estes métodos são aplicáveis a quaisquer tipos de campos estocásticos. A matriz de covariâncias também é facilmente obtida e a matriz dos coeficientes de correlação é sempre positivo-definida, desde que a função de auto-correlação esteja perfeitamente definida.

Outros métodos de discretização mais específicos e menos didáticos são apresentados por Liu e Kiureghian em [40]. Estes são os métodos da interpolação e método da expansão em série, sendo este último adequado para os elementos finitos estocásticos de segundo momento.

5.5 Análise de sensibilidade no MEF Estocástico

O cálculo de gradientes da equação de estado limite $g(\mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z})$ em relação as VA é necessário tanto nos métodos de segundo momento quanto no FERM. Gradientes são necessários no FORM, e hessianas são necessárias no SORM e na construção das superfícies de resposta.

A solução de FERM apresenta duas transformações distintas: uma transformação mecânica $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{z})$ e outra probabilística $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{z})$, apresentada na seção 3.1. No cálculo dos gradientes e hessianas estas duas transformações devem ser levadas em conta.

5.5.1 Cálculo de gradientes por diferenças finitas

O cálculo dos gradientes da equação de estado limite é um aspecto fundamental para a performance do FERM. Os gradientes podem ser calculados diretamente por um esquema de diferenças finitas centrais, aplicando-se uma pequena variação a cada VA e verificando a variação na resposta:

$$\frac{\partial g}{\partial z_i} = \frac{g(\mathbf{z} + \Delta \mathbf{z}_i) - g(\mathbf{z})}{\Delta z_i} \quad (5.24)$$

onde:

$$\Delta \mathbf{z}_i = (0, \dots, \Delta z_i, \dots, 0) \quad (5.25)$$

É muito conveniente utilizar como $\Delta \mathbf{z}$ um percentual do desvio padrão de cada VA. Assim, usualmente:

$$\Delta z_i = f \cdot \sigma_{z_i} \quad (5.26)$$

O método FORM exige o cálculo dos gradientes no espaço normal padrão \mathbf{Y} . Aplicando-se a regra da cadeia, obtém-se:

$$\nabla g_{\mathbf{y}} = \frac{\partial g}{\partial y_i} = \frac{\partial g}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial y_i} = \nabla g_{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{y}, \mathbf{z}}^{-1} \quad (5.27)$$

onde:

$\nabla g_{\mathbf{y}}$ = gradiente de $g(\mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z})$ em relação a \mathbf{y} ;

$\nabla g_{\mathbf{z}}$ = gradiente de $g(\mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z})$ em relação a \mathbf{z} ;

$\mathbf{J}_{\mathbf{y},\mathbf{z}}^{-1}$ = Jacobiano da transformação probabilística $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{z})$.

O método de diferenças finitas é uma ferramenta intuitiva, robusta e fácil de ser implementada. No entanto, o custo de solução pode tornar-se muito alto a medida que aumenta o número de VA do problema ou quando o problema é altamente não linear, já que o cálculo de cada componente do vetor gradiente exige uma avaliação adicional de $g(\mathbf{z})$. Um método muito mais promissor para o cálculo de gradientes, principalmente em problemas não lineares, são as técnicas de diferenciação direta.

5.5.2 DDM - Método de diferenciação direta

No método de diferenciação direta ou DDM - *Direct Differential Method* - a equação de equilíbrio a nível de elemento é derivada analiticamente (Liu e Kiureghian, [41, 43] e Zhang e Kiureghian [65]). Assim, obtém-se uma expressão para o gradiente a nível de elemento. A contribuição de cada elemento é combinada, obtendo-se uma matriz global para o cálculo do gradiente. O método exige uma derivação e implementação trabalhosas, mas os resultados são compensadores, como será visto em seguida.

Abrindo-se a expressão (5.27), obtém-se:

$$\nabla g_{\mathbf{y}} = \nabla g_{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{y},\mathbf{z}}^{-1} = (\nabla g_{\mathbf{s}}|_{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{s},\mathbf{z}} + \nabla g_{\mathbf{z}}|_{\mathbf{s}}) \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{y},\mathbf{z}}^{-1} \quad (5.28)$$

onde $\nabla g_{\mathbf{s}}|_{\mathbf{z}}$ = gradiente de $g(\mathbf{z})$ em relação a \mathbf{s} para \mathbf{z} fixo. Os gradientes $\nabla g_{\mathbf{s}}|_{\mathbf{z}}$ e $\nabla g_{\mathbf{z}}|_{\mathbf{s}}$ são calculados facilmente, pois dependem apenas de variáveis que aparecem explicitamente na equação de estado limite do problema. A parte mais trabalhosa é justamente o cálculo do Jacobiano da transformação mecânica, $\mathbf{J}_{\mathbf{s},\mathbf{z}}$.

As VA do problema podem ser adequadamente separadas em grupos, sendo:

\mathbf{z}_l = variáveis de carregamento;

\mathbf{z}_m = variáveis de propriedades do material;

\mathbf{z}_g = variáveis de geometria.

O vetor de coordenadas nodais originais \mathbf{X} é claramente função de \mathbf{z}_g . O vetor de deslocamentos nodais \mathbf{u} é função de \mathbf{X} , \mathbf{z}_m e \mathbf{z}_l . Examinando as equações de equilíbrio (equações 5.4 e 5.5) do problema estático (5.3), percebe-se que \mathbf{R} é função de \mathbf{X} , \mathbf{u} e \mathbf{z}_m . De forma semelhante, \mathbf{f} é função de \mathbf{X} , \mathbf{u} e \mathbf{z}_l . Portanto:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}[\mathbf{X}(\mathbf{z}_g), \mathbf{u}(\mathbf{X}, \mathbf{z}_m, \mathbf{z}_l), \mathbf{z}_m] \quad (5.29)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}[\mathbf{X}(\mathbf{z}_g), \mathbf{u}(\mathbf{X}, \mathbf{z}_m, \mathbf{z}_l), \mathbf{z}_l] \quad (5.30)$$

O gradiente da resposta mecânica pode ser calculado separadamente em relação a cada conjunto de VA. Pela regra da cadeia:

$$\nabla \mathbf{R}_{z_m} [\mathbf{X}(z_g), \mathbf{u}(\mathbf{X}, z_m, z_l), z_m] = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{z_m} \cdot \nabla \mathbf{u}_{z_m} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z_m} \Big|_{\mathbf{u}} \quad (5.31)$$

$$\nabla \mathbf{f}_{z_m} [\mathbf{X}(z_g), \mathbf{u}(\mathbf{X}, z_m, z_l), z_m] = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{z_m} \cdot \nabla \mathbf{u}_{z_m} \quad (5.32)$$

onde: $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{z_m} = \mathbf{K}_t$ e $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{z_m} = \mathbf{K}_l$ são as matrizes de rigidez tangente e de carregamento inicial. Igualando-se os gradientes nas expressões acima e fazendo $\mathbf{K} = \mathbf{K}_t - \mathbf{K}_l$ obtém-se:

$$\mathbf{K} \cdot \nabla \mathbf{u}_{z_m} = - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z_m} \Big|_{\mathbf{u}} \quad (5.33)$$

Procedendo-se de forma semelhante para as VA geométricas e de carregamento, obtém-se:

$$\mathbf{K} \cdot \nabla \mathbf{u}_{z_l} = - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z_l} \Big|_{\mathbf{u}} \quad (5.34)$$

$$\mathbf{K} \cdot \nabla \mathbf{u}_{z_g} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{\mathbf{u}} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{\mathbf{u}} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z_g} \quad (5.35)$$

As expressões (5.33) e (5.34) são resolvidas a nível de elemento, utilizando a mesma aproximação feita em (5.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z_m} \Big|_{\mathbf{u}} &= \bigcup_e \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \mathbf{B}^T(\mathbf{u}, \mathbf{z})}{\partial z_m} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{z}) \mathbf{j}(\mathbf{z}) + \mathbf{B}^T(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{z})}{\partial z_m} \mathbf{j}(\mathbf{z}) + \mathbf{B}^T(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{z}) \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{z})}{\partial z_m} \right) d\Omega_0 \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z_l} \Big|_{\mathbf{u}} &= \bigcup_e \left[\int_{\partial \Omega_0} \left(\mathbf{N}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{t}_0(\mathbf{z})}{\partial z_l} \mathbf{j}(\mathbf{z}) + \mathbf{N}^T(\mathbf{x}) \mathbf{t}_0(\mathbf{z}) \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{z})}{\partial z_l} \right) d\partial \Omega_0 \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega_0} \left(\mathbf{N}^T(\mathbf{x}) \rho_0 \frac{\partial \mathbf{b}_0(\mathbf{z})}{\partial z_l} \mathbf{j}(\mathbf{z}) + \mathbf{N}^T(\mathbf{x}) \rho_0 \mathbf{b}_0(\mathbf{z}) \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{z})}{\partial z_l} \right) d\Omega_0 \right] \end{aligned} \quad (5.36)$$

onde todas as derivadas são para \mathbf{u} fixo. As expressões $\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{z})}{\partial z_m}$ e $\frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{z})}{\partial z}$ são fáceis de derivar, pois $\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{z})$ e $\mathbf{j}(\mathbf{z})$ normalmente são funções explícitas em \mathbf{z} . Ainda:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{z})}{\partial z_m} \Big|_{\mathbf{u}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{z})}{\partial z_m} \Big|_{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{D} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}, \mathbf{z})}{\partial z_m} \Big|_{z_m} \quad (5.37)$$

onde $\mathbf{D} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ é o módulo tangente e:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}, \mathbf{z})}{\partial z_m} \Big|_{z_m} = \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{z})}{\partial z_m} \Big|_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} \quad (5.38)$$

A expressão $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{z})}{\partial z_m} \Big|_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ está relacionada a equação constitutiva do material. Para materiais lineares elásticos:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{z})}{\partial z_m} \Big|_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial z_m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.39)$$

Quando o efeito de carregamento considerado são os deslocamentos nodais, então $\mathbf{s} = \mathbf{u}$, $\mathbf{J}_{\mathbf{s},\mathbf{z}} = \nabla \mathbf{u}_{\mathbf{z}}$ e os termos (5.33) a (5.35) podem ser agrupados obtendo-se:

$$\mathbf{K} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\mathbf{z}} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\mathbf{u}} - \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\mathbf{u}} \quad (5.40)$$

Os termos a direita de (5.40) são calculados utilizando as expressões (5.36) e os nva sistemas de equações (5.40) são resolvido para $\nabla \mathbf{u}_{\mathbf{z}}$. Para obter os gradientes em relação a σ e ε a regra da cadeia é aplicada. O método requer a solução de nva sistemas lineares de elementos finitos, após a convergência da solução não linear do problema, se o mesmo for não linear.

Utilizando o método adjunto o termo $\nabla g_{\mathbf{s}}|_{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{s},\mathbf{z}}$ na equação (5.28) é calculado diretamente, de forma bastante simplificada[24]. Neste caso, pré multiplica-se os termos de (5.40) pelo vetor adjunto λ^T e, comparando-se o resultado com (5.28) chega-se a:

$$\lambda^T \cdot \mathbf{K} = \nabla g_{\mathbf{u}}|_{\mathbf{z}} \quad (5.41)$$

O sistema de EF é resolvido uma única vez para λ^T e as componentes do gradiente são calculadas pelo sistema:

$$\nabla g_{\mathbf{u}}|_{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{u},\mathbf{z}} = \lambda^T \cdot \left(\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\mathbf{u}} - \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\mathbf{u}} \right) \quad (5.42)$$

No método adjunto, apenas dois sistemas são resolvidos: um sistema linear de EF é resolvido para o vetor adjunto, após a convergência da solução não linear de EF, e um sistema de nva equações é resolvido para determinar as componentes do vetor gradiente.

A derivação das soluções e a sua implementação na forma de código são trabalhosas. No entanto, os gradientes são calculados de forma precisa e eficiente. A formulação apresentada é genérica e considera não linearidades geométricas e de material. Esta formulação também se aplica para elementos finitos referenciais e lagrangeanos.

O processo de montagem dos elementos em (5.36) é idêntico ao utilizado em (5.4). As equações (5.36) são particularizadas para cada tipo de elemento. Liu [40] utiliza as expressões para elementos planos de 4 nós em problemas com não linearidades geométricas. Zhang [65] utiliza estas expressões em problemas de elasticidade 2D com não linearidade material e plasticidade e em elementos de barra para problemas de estabilidade. Nestas aplicações, alguns termos cuja derivação analítica seria inviável são resolvidos por diferenças finitas, num esquema misto com a técnica de DDM.

O método DDM é particularmente eficiente em problemas não lineares. Em comparação ao método de diferenças finitas, que requer ($nva + 1$) soluções do sistema de equações não linear de EF para cada avaliação do gradiente, o método DDM utilizando o método adjunto requer apenas a solução de um sistema linear de EF e de um sistema de nva equações. Sem a utilização do método adjunto, é necessária a solução de nva sistemas lineares de EF.

5.5.3 Cálculo das Hessianas

O método de segunda ordem, bem como o método das superfícies de resposta, requer o conhecimento da matriz Hessiana de $g(\mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z})$ no ponto de projeto.

$\mathbf{H}g_{\mathbf{z}}$ pode ser calculada diretamente a partir de um esquema de diferenças finitas centrais. Os termos da diagonal principal são calculados por:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z_i^2} = \frac{g(\mathbf{z} + \Delta \mathbf{z}_i) - 2 \cdot g(\mathbf{z}) + g(\mathbf{z} - \Delta \mathbf{z}_i)}{\Delta z_i^2} \quad (5.43)$$

e os termos fora da diagonal principal:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_j} &= \frac{g(\mathbf{z} + \Delta \mathbf{z}_i + \Delta \mathbf{z}_j) - g(\mathbf{z} - \Delta \mathbf{z}_i + \Delta \mathbf{z}_j)}{4 \cdot \Delta z_i \cdot \Delta z_j} + \\ &\quad \frac{-g(\mathbf{z} + \Delta \mathbf{z}_i - \Delta \mathbf{z}_j) + g(\mathbf{z} - \Delta \mathbf{z}_i - \Delta \mathbf{z}_j)}{4 \cdot \Delta z_i \cdot \Delta z_j} \end{aligned} \quad (5.44)$$

O cálculo dos termos da diagonal principal (5.43) exige a avaliação de $g(\mathbf{z})$ em 2 pontos adicionais, e (5.44) em 4. No total, $2 \cdot nva^2$ pontos são necessários para calcular a Hessiana completa.

A Hessiana também deve ser mapeada do espaço original \mathbb{Z} para \mathbb{Y} . Observa-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}g_{\mathbf{y}} &= \frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_i} \left[\frac{\partial g}{\partial y_j} \right] = \frac{\partial}{\partial z_m} \left[\frac{\partial g}{\partial z_n} \frac{\partial z_n}{\partial y_j} \right] \frac{\partial z_m}{\partial y_i} \\ &= \left[\frac{\partial^2 g}{\partial z_m \partial z_n} \frac{\partial z_n}{\partial y_j} + \frac{\partial g}{\partial z_n} \frac{\partial}{\partial z_m} \left[\frac{\partial z_n}{\partial y_j} \right] \right] \frac{\partial z_m}{\partial y_i} = \frac{\partial^2 g}{\partial z_m \partial z_n} \frac{\partial z_n}{\partial y_j} \frac{\partial z_m}{\partial y_i} = \frac{\partial z_j}{\partial y_n} \frac{\partial^2 g}{\partial z_n \partial z_m} \frac{\partial z_m}{\partial y_i} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\mathbf{H}g_{\mathbf{y}} = (\mathbf{J}_{\mathbf{y},\mathbf{z}}^{-1})^T \cdot \mathbf{H}g_{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{J}_{\mathbf{y},\mathbf{z}}^{-1}) \quad (5.45)$$

Um método adjunto híbrido para cálculo da Hessiana em problemas lineares é apresentado em [24]. Um esquema de derivação direta utilizando este método pode ser viável para problemas lineares. Para problemas genéricos, no entanto, o cálculo por diferenças finitas se faz necessário. Mesmo assim, é possível utilizar a técnica de DDM para calcular os gradientes, e calcular as Hessianas por diferenças finitas através de perturbações do gradiente. Desta forma, são necessárias apenas nva avaliações adicionais do vetor gradiente para o cálculo da Hessiana completa:

$$\mathbf{H}g_{\mathbf{z}} = \frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_j} = \frac{\partial}{\partial z_i} \left[\frac{\partial g}{\partial z_j} \right] = \frac{\partial}{\partial z_i} [\nabla g_j] \quad (5.46)$$

Logo:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_j} = \frac{\nabla g(\mathbf{z} + \Delta \mathbf{z}_i)_j - \nabla g(\mathbf{z})_j}{\Delta z_i} \quad (5.47)$$

Capítulo 6

RESULTADOS

6.1 Descrição do programa ACE-Pro

A partir dos estudos realizados, o programa proposto na introdução foi desenvolvido. A este programa se deu o nome de ACE-Pro - **Análise de Componentes Estruturais Probabilística**.

O ACE-Pro é um programa para o cálculo de confiabilidade estrutural a partir de modelos de elementos finitos. Ele foi desenvolvido como um conjunto de subrotinas para o programa de análise ANSYS versão 5.3 [6]. O ACE-Pro também pode ser utilizado de forma independente para resolver problemas com equações de estado limite analíticas.

Uma descrição detalhada do programa é feita em "ACE-Pro - Manual para utilização e programação" [10], apresentado em anexo. Neste manual é descrita a operação conjunta do ANSYS e ACE-Pro, as rotinas utilizadas, os tipos de VA disponíveis e o procedimento de customização do ANSYS.

O programa permite a solução de confiabilidade em problemas práticos de engenharia, pois não requer uma expressão analítica para a equação de estado limite do problema. Desta forma, soluções de confiabilidade podem ser obtidas para uma ampla gama de problemas.

O programa é uma ferramenta a mais ao alcance do engenheiro que trabalha com elementos finitos. Ele permite verificar o nível de segurança do componente analisado, possibilitando uma melhor escolha do coeficiente de segurança a ser utilizado.

O ACE-Pro resolve problemas nos quais as variáveis de projeto são modeladas como variáveis aleatórias. Ele não permite, diretamente, a solução de problemas envolvendo campos estocásticos ou problemas dependentes do tempo. É possível modelar como VA carregamentos, propriedades de material, condições de contorno, geometria e valores admissíveis de tensão, deslocamento, etc. As VA podem ser modeladas segundo um dos tipos de distribuição descritos em detalhe no capítulo 4 de [10].

A falha da estrutura pode ser caracterizada por um modo de falha ou mais (uma equação de estado limite por modo de falha). Para que a estrutura seja classificada como um componente estrutural é necessário que uma falha em qualquer um dos modos de falha represente

falha da estrutura (caso de estruturas isostáticas). Se este não for o caso (por exemplo no caso de estruturas hiperestáticas), os modos de falha devem ser revistos, ou a estrutura deve ser desmembrada, de forma que suas partes possam ser classificadas como componentes estruturais.

A independência entre as soluções mecânicas e probabilística no FERM (seção 5.3) permite a utilização de um programa de elementos finitos comercial. A opção por utilizar um programa comercial obviamente tem prós e contras. Por um lado, ganha-se tempo, uma vez que as rotinas convencionais de elementos finitos não tem que ser programadas. Ganha-se em recursos, já que os programas comerciais já possuem uma série de opções em termos de elementos, tipos de análise, interface gráfica, geração de malha, etc. Ganha-se também em confiabilidade, pois utiliza-se rotinas testadas. Por outro lado, perde-se liberdade, já que o programa deve se adaptar a forma de trabalho do programa de elementos finitos. Perde-se recursos do ponto de vista dos métodos probabilísticos. Especificamente, não foi possível implementar no presente trabalho métodos para discretização de campos estocásticos nem técnicas de diferenciação direta.

A opção pelo programa ANSYS tem vários motivos. Este é o programa de elementos finitos mais utilizado no GRANTE e mais conhecido pelo autor. Além disto, os modelos da ponte Hercílio Luz já estão disponíveis no formato deste programa. Outro aspecto fundamental é o fato do programa ter uma arquitetura aberta, com diversas subrotinas que permitem a customização do mesmo, através da linkagem com rotinas do usuário. O ACE-Pro foi desenvolvido como um conjunto de rotinas para o módulo de otimização do ANSYS. O ACE-Pro é integrado ao ANSYS através de um procedimento chamado de "customização", descrito em detalhes no capítulo 5 de [10] e em [4].

O ACE-Pro é formado por rotinas das bibliotecas ACE, desenvolvida especialmente para esta aplicação, por rotinas da biblioteca CPE e mais algumas rotinas da biblioteca IMSL. As rotinas ACE foram desenvolvidas em Fortran 90, utilizando compilador Digital Fortran versão 5.0. A biblioteca CPE são rotinas para simulação de Monte Carlo, desenvolvidas no Laboratório de Dinâmica e Confiabilidade da UFRGS [54]. Estas rotinas foram adaptadas para o caso de múltiplos modos de falha e para realizarem a amostragem por importância através de múltiplas funções de amostragem. IMSL é a biblioteca da Microsoft para Fortran. Um sumário de todas as rotinas utilizadas é apresentado em [10], bem como uma descrição das rotinas mais importantes.

6.2 Configuração de FERM adotada

Conforme verificado na seção 5.3, o método de confiabilidade para elementos finitos permite a utilização das técnicas convencionais para análise probabilística. Neste trabalho é adotada

uma combinação dos métodos FORM, SORM, superfície de resposta e simulação de Monte Carlo com amostragem por importância. O ACE-Pro determina configurações das VA para as quais o modelo de elementos finitos é resolvido, e utiliza a resposta do ANSYS para computar gradientes ou para construir superfícies de resposta.

De forma resumida, o ACE-Pro:

1. encontra o ponto de projeto correspondente a cada modo de falha;
2. faz uma aproximação de primeira ordem da P_f individual;
3. constrói uma superfície de resposta em torno de cada ponto de projeto;
4. melhora a estimativa da P_f por aproximação de segunda ordem;
5. calcula os limites bi-modais linearizados da P_f .
6. realiza a simulação de Monte Carlo com amostragem por importância, utilizando as superfícies de resposta construídas.

A partir de um ponto inicial (normalmente o ponto médio), o primeiro gradiente é calculado, através de um esquema de diferenças finitas. Um percentual do desvio padrão de cada VA é utilizado como $\Delta \mathbf{z}$. Os demais gradientes são calculados utilizando-se um percentual do passo dado por cada VA na iteração anterior.

Na primeira iteração, uma análise de sensibilidade do gradiente é realizada, onde variáveis sem importância para o modo de falha em questão são eliminadas. O ponto de projeto é procurado através do algoritmos HLRFF ou HLRFF-M. A transformação para o espaço normal padrão é feita a cada ponto da iteração do algoritmo de otimização. Encontrado o ponto de projeto, a estimativa de primeira ordem da P_f é realizada.

A Hessiana de $g(\mathbf{z})$ é calculada por um esquema de diferenças finitas centrais. O $\Delta \mathbf{z}$ utilizado é um percentual do desvio padrão de cada VA. A superfície de resposta de segunda ordem é construída em torno de cada ponto de projeto. Esta superfície é composta pela Hessiana e por um vetor gradiente, desta vez calculado por diferenças centrais.

A aproximação de segunda ordem é feita. Os autovetores da Hessiana são utilizados para construção do parabolóide. Os índices de confiabilidade são atualizados em função da P_f de segunda ordem.

Limites bi-modais linearizados para a P_f do componente são calculados.

A simulação de Monte Carlo é realizada utilizando as superfícies de resposta construídas, com funções de amostragem centradas nos pontos de projeto. Com este esquema de amostragem, a simulação é feita principalmente em torno dos pontos onde as superfícies de resposta foram construídas. O uso de amostragem por importância permite reduzir muito o número de simulações e o erro estatístico da simulação.

A simulação de Monte Carlo representa uma importante melhora para os resultados. Em primeiro lugar, a SMC não é suscetível a expressão analítica da equação de estado limite, como SORM é. Em segundo lugar, a simulação feita utilizando as superfícies de resposta, para múltiplos modos de falha, eqüivale a uma aproximação de segunda ordem *nva-modal* (considerando todas as possibilidades de combinações de modos de falha), o que é uma grande melhora em relação a aproximação linear bimodal.

6.3 Problemas analisados

Nesta seção são analisados alguns exemplos resolvidos pelo ACE-Pro. A procura por exemplos junto as fontes literárias mostrou uma carência de exemplos adequados a validação do programa, ou seja, problemas cuja solução mecânica pode ser obtida através de um modelo de elementos finitos. Em outros casos, os exemplos apresentados na literatura não possuíam toda a informação necessária para que pudessem ser aproveitados. Uma grande parte dos problemas tratados na literatura envolvem equações de estado analíticas (resolvidas por FORM ou simulação) e outros envolvem campos estocásticos, que não são resolvidos pelo ACE-Pro.

Mesmo assim, os 5 exemplos apresentados compreendem as características mais interessantes dos problemas de confiabilidade estrutural e demonstram bem a performance das rotinas desenvolvidas. A maioria das análises apresentadas foram repetidas em vários exemplos. Apenas os resultados mais característicos para demonstrar cada efeito estudado são apresentados.

Devido a falta de informações sobre o número de iterações necessárias e o critério de convergência utilizado nas referências, tornou-se impossível uma comparação entre a eficiência dos programas. A maioria das referências apresenta um resultado de simulação como "resultado exato". É muito mais adequado chamar este resultado de "valor de referência", uma vez que este é o melhor resultado disponível. Em alguns destes exemplos, não é fornecida informação sobre a variância dos resultados e o número de simulações não é muito elevado. Nestes casos, utiliza-se como referência os valores obtidos por simulação simples através das rotinas da biblioteca CPE.

Os exemplos 1 a 4 foram resolvidos, inicialmente, utilizando as equações de estado analíticas. Isto facilitou a realização das análises comparativas. Todavia, os exemplos 1, 2, 3 e 5, que podiam ser resolvidos através de um modelo de elementos finitos, foram resolvidos novamente a partir do ANSYS. Os resultados concordaram com os anteriores em todos os casos, com diferenças absolutamente desprezáveis.

6.3.1 Problema da viga engastada

Este problema é bastante simples do ponto de vista das VA, mas apresenta uma equação de estado limite altamente não linear. O modo de falha considerado é o início de escoamento na extremidade engastada da viga.

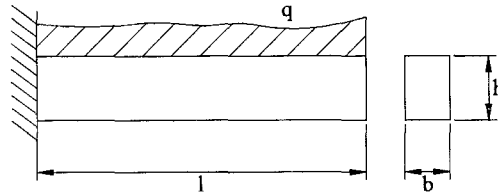


Figura 6.1: Viga engastada para problema 6.3.1.

Características:

5 VA normais sem correlação; um modo de falha:

$$g(z) = S_y - \frac{3 \cdot q \cdot l^2}{b \cdot h^2} = Z_5 - \frac{3 \cdot Z_1 \cdot Z_2^2}{Z_3 \cdot Z_4^2} = 0 \quad (6.1)$$

Dados do problema:

Tabela 6.1: Dados para problema da viga engastada.

VA	Distribuição	μ	δ	Unidade	
Z_1	q	Normal	1,15	0,029	kgf/cm
Z_2	l	Normal	60,00	0,010	cm
Z_3	b	Normal	4,00	0,030	cm
Z_4	h	Normal	1,00	0,030	cm
Z_5	S_y	Normal	3600,00	0,083	kgf/cm ²

Resultados:

Tabela 6.2: Resultados para problema da viga engastada.

Fonte	Método	P_f	δ / toler.	nsi/niter
PROBAN[46]	FORM	0,100337	?	?
	SORM	0,103940	?	?
CRA[60]	HLRF	0,100339	?	?
ACE-PRO	FORM	0,100339	10^{-3}	5
	SORM	0,104735	10^{-3}	-
	SMC SI	0,103320*	0,009	$1 \cdot 10^5$
	SMC AI	0,104235	0,004	$1 \cdot 10^5$
	SMC SI - RSM	0,107510	0,009	$1 \cdot 10^5$
SMC AI - RSM	0,107911	0,004	$1 \cdot 10^5$	

*Valor de referência.

Os resultados apresentados na tabela 6.2 são ilustrados na figura 6.2.

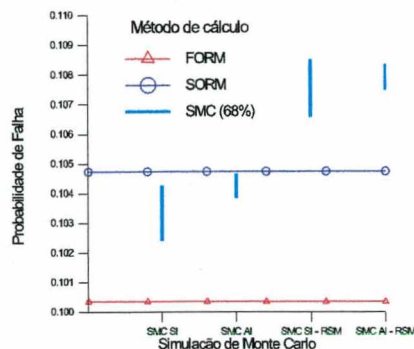


Figura 6.2: Resultados para problema da viga engastada.

Os resultados mostram uma boa concordância entre o ACE-Pro e as referências citadas. Percebe-se a esperada redução da variância da P_f na simulação com amostragem por importância. Esta variação é modesta porque o valor da P_f é alto e o número de simulações utilizado é grande. Observa-se ainda um ligeiro aumento do valor médio da P_f na SMC com amostragem por importância, em comparação a amostragem simples. Observa-se ainda um aumento razoável da P_f para as simulações realizadas utilizando a superfície de resposta, o que demonstra o erro introduzido na substituição da equação de estado analítica por uma expressão aproximada (de segunda ordem).

A solução via FORM exigiu 24 avaliações da equação de estado. A construção da superfície de resposta exigiu mais 50 avaliações. O tempo de solução no ANSYS foi de 18.36 segundos, utilizando um processador 80586 com velocidade de 200 MHz.

Aspectos verificados no problema:

Relação entre o fator de segurança e a probabilidade de falha Como forma de ilustrar a discussão apresentada na introdução, comparando as metodologias de projeto determinística e probabilística, a relação entre o coeficiente de segurança e a probabilidade de falha é estudada neste problema. Para tanto, o problema foi resolvido repetidamente, diminuindo o valor médio de variáveis relacionadas à solicitação (q , l) e aumentando o valor médio de variáveis relacionadas à resistência (b , h e S_y), portanto aumentando o coeficiente de segurança e diminuindo a P_f . Os resultados são apresentados na figura 6.3, em escalas linear e logarítmica.

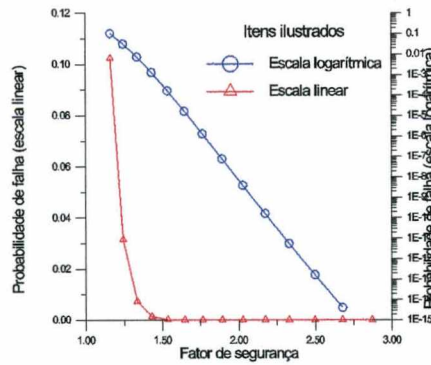


Figura 6.3: Relação entre o coeficiente de segurança e a P_f .

A figura ilustra como pode ser perigoso confiar em coeficientes de segurança. Neste problema, o coeficiente de segurança pode ser reduzido de 1,75 até 1,50 sem afetar significativamente a P_f . Já se o coeficiente de segurança for reduzido de 1,50 para 1,25, a segurança fica seriamente comprometida. Da mesma forma, a figura mostra que um aumento do coeficiente de segurança de 2,00 para 3,00 apenas aumentaria o custo da estrutura, sem aumentar significativamente a confiabilidade.

FDP da tensão máxima na extremidade engastada da viga Conforme visto no capítulo 5, o método de confiabilidade para elementos finitos pode ser utilizado para determinar a FDP de efeitos de carregamento, repetindo-se o cálculo da P_f para vários valores determinísticos da variável z_{lim} . Neste problema, calculou-se a P_f repetidamente, para uma tensão de escoamento determinística variando de 2400 até 4000 kgf/cm^2 . O resultado obtido é comparado, na figura 6.4, ao resultado aproximado obtido por álgebra de VA. Os resultados coincidem de forma razoável, considerando que na álgebra de VA uma aproximação linear do desvio padrão é realizada.

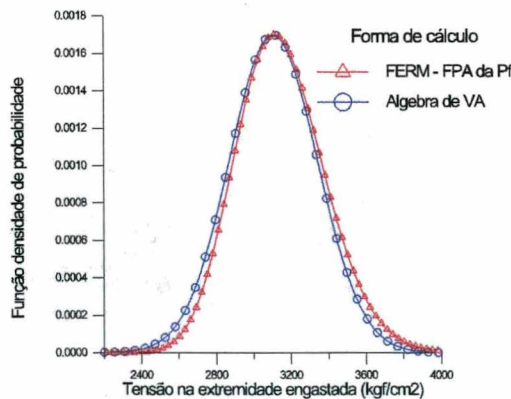


Figura 6.4: FDP da tensão na extremidade engastada.

Observa-se que a FDP resultante é praticamente uma distribuição normal. Este resultado mostra que a alta não linearidade da equação de estado limite não chega a afetar a FDP da tensão máxima na extremidade da viga, que é função de quatro VA normais: $S_{max} = \frac{3 \cdot q \cdot l^2}{b \cdot h^2}$.

Influência da forma da equação de estado no cálculo da P_f : A aproximação de segunda ordem (SORM) da P_f utiliza a informação das curvaturas da equação de estado limite no ponto de projeto. As curvaturas variam em função da expressão analítica da equação de estado limite. Da mesma forma, o resultado da simulação utilizando a superfície de resposta depende de quão bem esta superfície, de segunda ordem, consegue representar uma equação de estado limite genérica. Para verificar estas influências no cálculo da P_f , 6 formas equivalentes da equação (6.1) foram analisadas. A figura 6.5 apresenta os resultados obtidos.

$$\begin{aligned}
 \text{Tensão} & : g_1(\mathbf{z}) = S_y - \frac{3 \cdot q \cdot l^2}{b \cdot h^2} = 0 \\
 \text{Momento} & : g_2(\mathbf{z}) = S_y \cdot b \cdot h^2 - 3 \cdot q \cdot l^2 = 0 \\
 \text{Carga distribuída} & : g_3(\mathbf{z}) = \frac{S_y \cdot b \cdot h^2}{l^2} - 3 \cdot q = 0 \\
 \text{Momento resistente normalizado} & : g_4(\mathbf{z}) = \frac{S_y \cdot b \cdot h^2}{3 \cdot q \cdot l^2} - 1 = 0 \\
 \text{Momento solicitante normalizado} & : g_5(\mathbf{z}) = 1 - \frac{3 \cdot q \cdot l^2}{S_y \cdot b \cdot h^2} = 0 \\
 \text{Inversa do momento} & : g_6(\mathbf{z}) = \frac{1}{3 \cdot q \cdot l^2} - \frac{1}{S_y \cdot b \cdot h^2} = 0 \quad (6.2)
 \end{aligned}$$

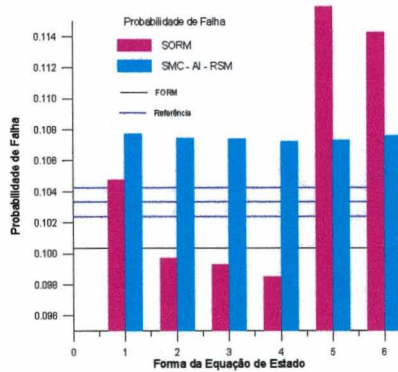


Figura 6.5: Influência da forma da equação de estado no cálculo da P_f .

No gráfico, pode-se verificar que o resultado de SORM (equação 3.66) é altamente dependente da forma como a equação de estado é definida. Para a expressão utilizada nas referências, $g_1(\mathbf{z})$, o resultado de SORM representa uma melhora considerável em relação ao resultado de FORM, estando muito mais próximo do valor de referência. Já o resultado de simulação mostrou uma variação desprezável, o que mostra que a superfície de resposta utilizada consegue representar de forma semelhante qualquer uma das expressões (6.2). O resultado da simulação via superfície de resposta apresentou valores um pouco maiores do que o valor de referência.

Influência do Δz na simulação via RSM e no resultado de SORM: Um fator importante no uso da superfície de resposta e no SORM é o Δz utilizado no cálculo dos gradientes e da Hessiana. Conforme visto na seção 5.5, o Δz é calculado como um percentual do desvio padrão de cada VA:

$$\Delta z_i = f \cdot \sigma_{z_i}$$

A solução de simulação utilizando a superfície de resposta bem como a solução de SORM foram testadas para vários valores do fator f . Esta influência foi verificada para as várias formas alternativas da equação de estado deste problema (equações 6.2). A figura 6.6 mostra os resultados correspondentes a $g_1(\mathbf{z})$.

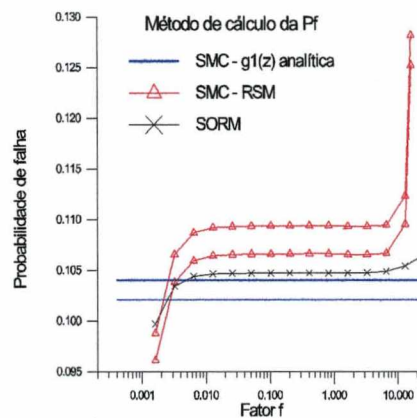


Figura 6.6: Influência do Δz na simulação via RSM e no resultado de SORM.

Observa-se uma faixa "estável" do fator f para a qual a P_f calculada via superfície de resposta e via SORM concorda com o valor de referência, obtido por simulação de Monte Carlo simples utilizando a equação de estado analítica. Observa-se que, independente da expressão de $g(\mathbf{z})$, as soluções são adequadas para f entre 0.01 e 5.0, o que é muito adequado.

Convergência da solução por simulação e influência do uso da superfície de resposta: Um aspecto importante da solução por simulação é a diminuição da variância da P_f calculada com o aumento do número de simulações. Outro aspecto interessante, apresentado na figura 6.7, é a oscilação do valor médio da P_f calculada com a variação do número de simulações. A figura mostra ainda a influência do uso da equação de estado aproximada no cálculo da P_f via simulação. Pode-se perceber que o ligeiro aumento do valor da P_f é constante para qualquer número de simulações utilizado.

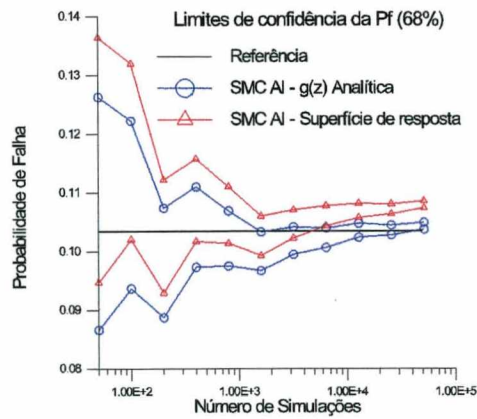


Figura 6.7: Convergência da solução por simulação.

6.3.2 Problema da haste tracionada

Este é um problema tradicional, considerado nos trabalhos de Ang, Chia, Maymon e Silva [2, 19, 46, 60]. Também é um problema simples em consideração as VA, mas introduz o problema da correlação entre as VA. O modo de falha considerado corresponde ao escoamento da haste.

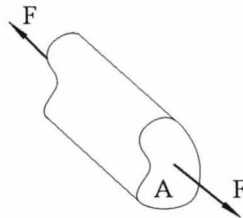


Figura 6.8: Haste tracionada do problema 6.3.2.

Características:

3 VA normais correlacionadas; um modo de falha:

$$g(\mathbf{z}) = S_y - \frac{F}{A} = 0 \quad (6.3)$$

Dados do problema:

Tabela 6.3: Dados para problema da haste tracionada.

VA		Distribuição	μ	δ	Unidade
Z_1	F	Normal	1000,0	0,033	N
Z_2	A	Normal	2,00	0,050	cm^2
Z_3	S_y	Normal	600,00	0,033	N/cm^2

Matriz de correlação:

$$\begin{bmatrix} 1,0 & & \text{sim.} \\ 0,5 & 1,0 & \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix}$$

Resultados:

Tabela 6.4: Resultados para problema da haste tracionada.

Fonte	Método	P_f	δ / toler.	nsi/niter
PROBAN[46]	FORM	0,0007674	?	16
CRA[60]	FORM	0,0007682	?	10
ACE-Pro	FORM	0,0007682	10^{-3}	5
	SORM	0,0008803	—	-
	SMC SI	0,0008500	0,108	$1 \cdot 10^5$
	SMC AI	0,0008135	0,006	$1 \cdot 10^5$
	SMC SI - RSM	0,0009300	0,104	$1 \cdot 10^5$
	SMC AI - RSM	0,0008643	0,006	$1 \cdot 10^5$

*Valor de referência.

Os resultados mostram uma boa relação entre a solução de FORM do ACE-Pro e das referências. Neste exemplo, percebe-se uma redução considerável da variância da P_f , quando utilizada a amostragem por importância, devido ao pequeno valor da P_f . Também percebe-se uma pequena alteração da P_f em função do uso da superfície de resposta.

A solução via FORM exigiu 20 avaliações da equação de estado. A construção da RSM exigiu mais 18 avaliações. O tempo de solução foi desprezável.

Aspectos verificados no problema:

Influência da ordem das VA no cálculo da P_f via simulação: A figura 6.9 mostra a influência da ordem das VA na operação de correlacionamento das VA (equação 4.27). O problema foi resolvido utilizando as 6 permutações possíveis neste problema. A figura mostra uma variação considerável da P_f calculada. Os resultados de FORM, mesmo utilizando a mesma transformação que a simulação (decomposição de Choleski), não apresentaram qualquer alteração.

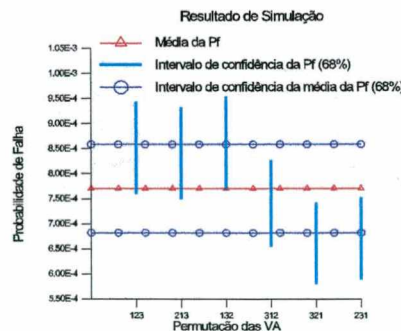


Figura 6.9: Influência da ordem das VA no cálculo da P_f .

6.3.3 Problema da treliça

Este problema está mais próximo do que poderia ser considerado um problema real. No entanto, vários aspectos do problema foram simplificados por Siddall em [59], para permitir a solução analítica apresentada nesta referência. O problema consiste em uma treliça carregada por 4 cargas P conforme indicado na figura 6.10. São considerados 13 modos de falha, sendo cada um deles o escoamento de uma das barras. A tensão de escoamento de cada uma das barras é considerada uma VA independente das demais. A carga nos 4 pontos de aplicação é considerada como uma única VA. O uso de fatores de distribuição de carga permite a solução analítica do problema em [59]. Para a solução através do ACE-Pro, estes fatores não são necessários. As equações de estado são definidas diretamente em função da tensão em cada barra. Na solução pelo ACE-Pro, seria fácil considerar uma correlação entre as tensões de escoamento das barras, um carregamento composto por várias VA, a aleatoriedade das áreas individuais de cada barra ou mesmo a aleatoriedade das dimensões da treliça.

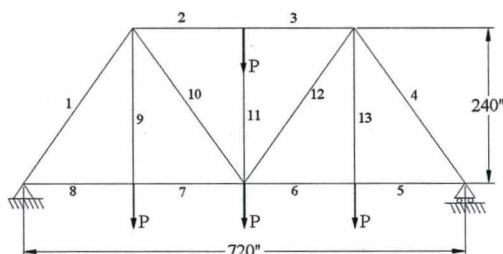


Figura 6.10: Treliça do problema 6.3.3.

Características:

14 VA log-normais sem correlação; 13 modos de falha:

$$g_i(z) = S_i \cdot A_i - a_i \cdot P = 0 \quad (6.4)$$

onde:

S_i = tensão de escoamento da barra i ;

A_i = área da seção transversal da barra i ;

a_i = fator de distribuição de carga na barra i .

Dados do problema:

Tabela 6.5(a): Dados para VA do problema da treliça.

VA	Distribuição	μ	δ	Unidade	
Z_1	P	Log-normal	50250,63	0,10	lb
Z_2 a Z_{14}	S_i	Log-normal	40032,01	0,04	psi

Tabela 6.5(b): Dados para variáveis determinísticas.

Barras	A_i (in^2)	a_i
1 e 4	4,80	2,50
2 e 3	4,80	2,25
5, 6, 7, e 8	2,10	1,50
9, 11 e 13	2,10	1,00
10 e 12	2,10	1,25

Resultados:

Tabela 6.6(a): Resultados para o problema da treliça (falha por qualquer modo).

Fonte	Método	P_f	δ / toler.	nsi/niter
Siddall[59]	Integral de convolução	0,2435*	—	—
ACE-Pro	FORM - FBM	$0,1463 \leq P_f \leq 0,4154$	10^{-4}	5 por $g(\mathbf{z})$
	SMC SI	0,2434	0,008	$5 \cdot 10^4$
	SMC AI	0,2447	0,004	$5 \cdot 10^4$

*Valor de Referência.

Tabela 6.6(b): Resultados para cada barra.

Barras	P_f (FORM - ACE-Pro)
1 e 4	$3,3 \cdot 10^{-4}$
2 e 3	$3,5 \cdot 10^{-7}$
5, 6, 7 e 8	0,1463
9, 11 e 13	$7,3 \cdot 10^{-7}$
10 e 12	$3,0 \cdot 10^{-3}$

Os resultados mostram uma boa coerência entre a solução adotada em [59] e a solução de simulação via ACE-Pro. Já os limites bi-modais linearizados da P_f são bastante inadequados, devido a presença de 4 modos de falha igualmente importantes com uma elevada P_f individual. A simulação utilizando a superfície de resposta forneceu resultados idênticos aos da simulação sobre as equações de estado analíticas, devido a linearidade destas equações.

A solução via FORM exigiu 30 avaliações da equação de estado. A construção das superfícies de resposta exigiu mais 104 avaliações. O tempo de solução foi desprezável.

Aspectos verificados no problema:

Relação entre o coeficiente de segurança e a P_f . Neste problema, a relação entre o coeficiente de segurança da barra 5 e as P_f 's da barra 5 e da treliça foi analisada. Os resultados estão ilustrados na figura 6.11. A figura mostra um comportamento semelhante ao verificado no problema da viga engastada.

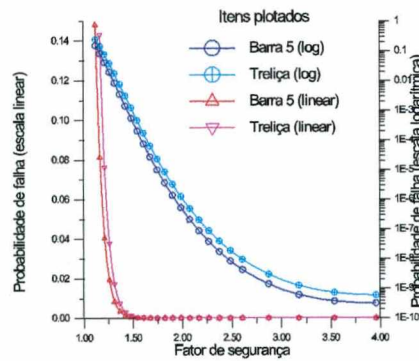


Figura 6.11: Relação entre o coeficiente de segurança e a P_f .

Influência do índice de confiabilidade nos limites bi-modais da P_f da treliça. A figura 6.12 mostra como os limites bi-modais se estreitam a medida que a P_f individual de cada modo de falha diminui, mesmo que o erro relativo permaneça aproximadamente constante.

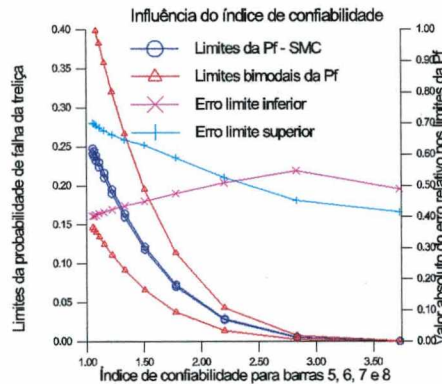


Figura 6.12: Influência do β nos limites bi-modais da P_f da treliça.

6.3.4 Problema do quadro de 3 andares

Este é mais um problema interessante do ponto de vista prático, apesar de bastante simplificado. Trata-se de um quadro de 3 andares sujeito a uma carga lateral de vento. São considerados 3 modos de falha, cada um correspondente a plastificação inicial de cada um dos andares. Deve-se destacar que a solução adotada por Bucher em [16] exige um trabalho razoável no sentido de determinar as distribuições dos esforços resistentes de cada andar, em função das VA originais do problema. Este esforço é evitado no ACE-Pro, uma vez que se pode determinar o critério de falha diretamente em função da tensão solicitante.

Características:

6 VA não normais correlacionadas; 3 modos de falha:

$$\begin{aligned}
g_1(\mathbf{z}) &= \frac{4M_1}{h} - F_1 = 0 \\
g_2(\mathbf{z}) &= \frac{4M_2}{h} - F_1 - F_2 = 0 \\
g_3(\mathbf{z}) &= \frac{4M_3}{h} - F_1 - F_2 - F_3 = 0
\end{aligned} \tag{6.5}$$

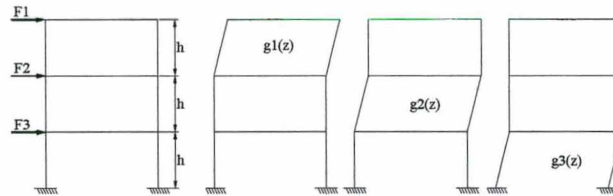


Figura 6.13: Quadro de 3 andares do problema 6.3.4.

Dados do problema:

Tabela 6.7: Dados para problema do quadro.

VA		Distribuição	μ	δ	Unidade
Z_1	F_1	Gumbel	10,0	0,0250	MN
Z_2	F_2	Gumbel	7,0	0,0233	MN
Z_3	F_3	Gumbel	5,5	0,0275	MN
Z_4	$\frac{M_1}{h}$	Log-normal	9,0	0,0562	MN
Z_5	$\frac{M_2}{h}$	Log-normal	13,0	0,0650	MN
Z_6	$\frac{M_3}{h}$	Log-normal	15,0	0,0625	MN

Matriz de correlação:

$$\begin{bmatrix}
1,0 & & & & & \\
0,5 & 1,0 & & & & \\
0,2 & 0,5 & 1,0 & & & \\
0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & & \\
0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,3 & 1,0 & \\
0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,3 & 1,0
\end{bmatrix}$$

Resultados:

Tabela 6.8(a): Resultados para falha do quadro.

Fonte	Método	P_f	δ / toler.	nsi/niter
Bucher[16]	Amost. adaptativa	0,001727	?	10^4
	Amost. importância	0,001233	?	10^4
	FORM	0,000660	?	?
	Exato	0,002400*	?	?
ACE-Pro	FORM - FBM	$0,00205 \leq P_f \leq 0,00239$	10^{-5}	10 por $g(\mathbf{z})$
	SMC SI	0,00239	0,06	10^5
	SMC AI	0,00215	0,02	10^5

*Valor de referência.

Tabela 6.8(b): Resultados para cada modo de falha.

$g(\mathbf{z}) \setminus P_f$	FORM	SMC SI	SMC AI
$g_1(\mathbf{z})$	0,00066	0,00064	0,00060
$g_2(\mathbf{z})$	0,00074	0,00091	0,00077
$g_3(\mathbf{z})$	0,00121	0,00150	0,00133

Os resultados mostram uma boa concordância entre a solução de referência e as soluções obtidas via limites bi-modais linearizados e via simulação. Os limites bi-modais, neste problema, já são bem melhores do que no problema anterior, devido ao grande valor do índice de confiabilidade. Os resultados do ACE-Pro estão bem melhores do que os resultados obtidos pelos métodos apresentados em [16]. A simulação utilizando a superfície de resposta forneceu resultados idênticos aos da simulação sobre as equações de estado algébricas, devido a linearidade destas equações.

A solução via FORM exigiu 120 avaliações da equação de estado. A construção da superfície de resposta exigiu mais 58 avaliações. O tempo de solução foi desprezável.

Aspectos verificados no problema:

Sensibilidade da P_f : A figura 6.14 mostra os fatores de importância das VA do problema. Como esperado, a variável F1 é a mais importante, uma vez que está presente em todos os modos de falha considerados.

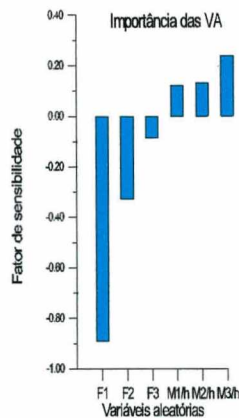


Figura 6.14: Importância das VA no cálculo da P_f .

FDP da força atuante no primeiro piso A FDP da força atuante no primeiro piso do quadro foi determinada calculando-se a P_f para vários valores da força resistente ($4M_3/h$), através da equação $g_3(\mathbf{z})$. A força resistente foi considerada como determinística, e seu valor foi variado de 1 até 15 MN (seu valor médio). O resultado obtido é apresentado na figura 6.15. Este resultado é comparado com o resultado aproximado obtido através de algebra de VA. Através da algebra de VA só se consegue determinar os momentos de primeira e segunda ordem da VA, portanto a distribuição calculada é normal. Já pelo FERM se consegue determinar a distribuição real da VA resultante.

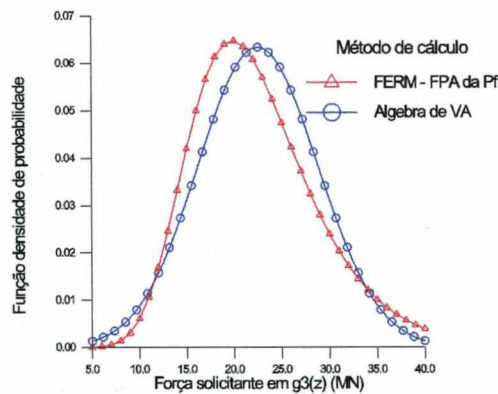


Figura 6.15: FDP da força atuante no primeiro piso.

Convergência da solução por simulação: Neste problema é destacada a vantagem da amostragem por importância em relação a amostragem simples. A figura 6.16 mostra a redução da variância da P_f obtida na amostragem por importância. Mostra ainda que, apesar de uma certa oscilação, os resultados via simulação convencional e com amostragem por importância convergem para um mesmo resultado.

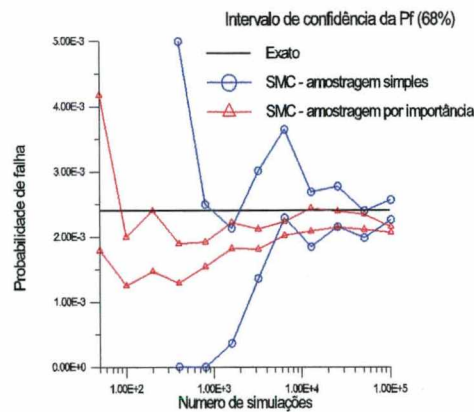


Figura 6.16: Convergência da solução por simulação.

Influência da ordem das VA no resultado da simulação: Também neste problema a ordem das VA foi verificada. A figura 6.17 mostra uma variação menor do que a indicada na figura 6.9, mas apenas algumas possibilidades de permutação foram investigadas neste problema.

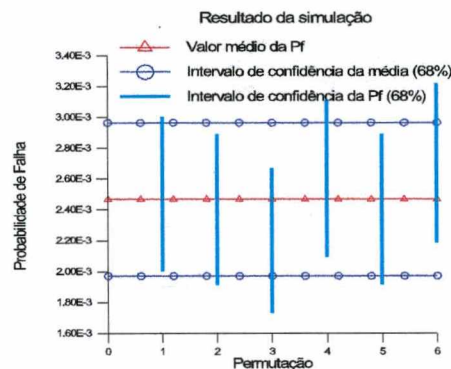


Figura 6.17: Influência da ordem das VA no resultado da simulação.

6.3.5 Problema da coluna treliçada

Este é mais um problema interessante do ponto de vista prático, pois considera a falha por flambagem de uma coluna treliçada, conforme figura 6.18. O problema exige uma análise não linear, devido as grandes deformações existentes. O problema foi tirado do trabalho de Liu e Kiureghian [40]. Neste problema, os módulos de elasticidade D_1 e D_2 das colunas e reforços, respectivamente, bem como as cargas f_1 e f_2 , são considerados como variáveis aleatórias. A coordenada y dos nós é determinística, mas a coordenada x é considerada como aleatória, para levar em conta imprecisões de montagem, que são fundamentais para o modo de falha considerado.

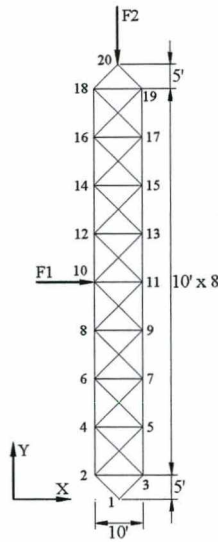


Figura 6.18: Coluna treliçada do problema 6.3.5.

Características:

22 VA não normais correlacionadas; 1 modo de falha:

$$g(\mathbf{z}) = u_0 - u_{10} = 0 \quad (6.6)$$

onde u_0 é o deslocamento crítico que caracteriza a flambagem da coluna e u_{10} é o deslocamento horizontal do nó 10.

Dados do problema:

Tabela 6.9: Dados para problema da coluna treliçada.

VA		Distribuição	μ	δ	Unidade
Z_1	D_1	Log-normal	30000,0	0,08	ksi
Z_2	D_2	Log-normal	30000,0	0,08	ksi
Z_3	F_1	Log-normal	20,0	0,10	kips
Z_4	F_2	Log-normal	1500,0	0,10	kips
Z_5 a Z_{22}	x_2 a x_{18}	Normal	+60,0 ou -60,0	0,02	in

O coeficiente de correlação entre D_1 e D_2 é igual a 0.3. As demais variáveis são descorrelacionadas. As áreas da seção transversal das colunas e dos reforços são 1.59 e 0.938 in², respectivamente. Demais dimensões estão indicadas na figura 6.18.

Análise determinística da carga de flambagem

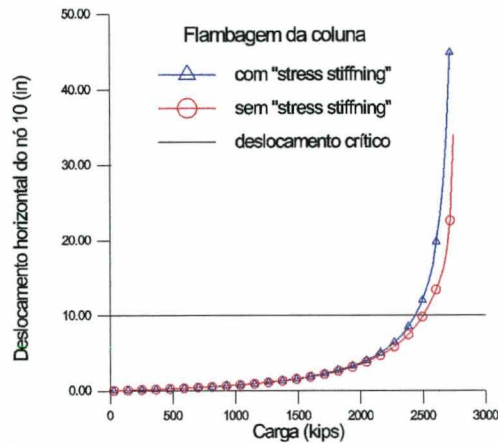


Figura 6.19: Curva carga - deflexão da coluna.

A figura 6.19 mostra o resultado da análise não linear de flambagem, realizada incrementando-se a carga f_2 de um valor nulo até 3000 kips. A figura sugere uma carga de flambagem em torno de 2600 kips, o que está de acordo com o valor encontrado em [40]. O deslocamento crítico que caracteriza a flambagem está entre 5 e 20 in. Para a realização da análise probabilística, considerou-se um deslocamento crítico de 10 polegadas.

Esta análise, bem como as subseqüentes, foi realizada considerando-se as não linearidades geométricas, sendo as coordenadas nodais atualizadas durante o processo de solução. O efeito de "stress-stiffning" foi considerado, mas não se mostrou relevante.

Resultados:

Tabela 6.10: Resultados para problema da coluna treliçada.

Fonte	Método	P_f	$\delta / \text{toler.}$	nsi/niter
Kiureghian[40]	FORM	$5,0 \cdot 10^{-3}$?	8
ACE-Pro	FORM	$1,1 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}	8

Os resultados obtidos não podem ser comparados com a referência [40] sem considerar que o modelo não linear empregado nas duas soluções não foi o mesmo. Em [40] a não linearidade do problema é modelada através de uma não linearidade do material. Assim, apesar de se ter chegado a mesma carga de flambagem, os deslocamentos horizontais correspondentes podem ser bastante diferentes. Como a equação de estado do problema é função destes deslocamentos, o cálculo da P_f fica altamente dependente da solução não linear adotada no problema. Mesmo assim, destaca-se que os dois resultados possuem a mesma ordem de grandeza. A própria convergência da solução merece destaque, dada a forte não linearidade do problema.

Deslocamentos críticos maiores do que 10 polegadas ($u_0 > 10$) apresentaram problema de convergência da solução não linear. Esta é uma característica do algoritmo do ANSYS

utilizado para a solução da parte mecânica do problema. De acordo com a figura 6.19, esta é uma região "instável" para a solução utilizada. Em seu trabalho, Kiureghian [40] realiza análises comparativa da P_f , variando u_0 de 5 até 30 polegadas e f_2 variando de 500 até 2500 kips. Esta análise permite ainda obter a distribuição de probabilidades do deslocamento horizontal u_{10} .

A solução por FORM exigiu 183 avaliações da equação de estado limite e demorou 132 segundos.

Aspectos verificados no problema:

Configuração da coluna no ponto de projeto: O ponto de projeto obtido está apresentado na tabela abaixo. A figura 6.20 mostra a configuração da coluna no ponto de projeto.

Tabela 6.11: Coordenadas do ponto de projeto.

VA	Ponto de Projeto	VA	Ponto de Projeto
D_1	24862,00	x_9	60,36
D_2	27699,27	x_{10}	59,12
F_1	21,68	x_{11}	60,36
F_2	1874,37	x_{12}	59,37
x_2	60,27	x_{13}	60,36
x_3	59,74	x_{14}	59,55
x_4	59,63	x_{15}	60,28
x_5	60,31	x_{16}	59,63
x_6	59,55	x_{17}	60,31
x_7	60,28	x_{18}	60,27
x_8	59,37	x_{19}	59,74

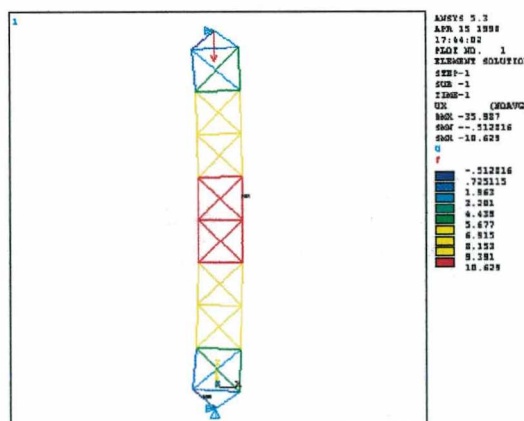


Figura 6.20: Configuração da coluna no ponto de projeto.

Sensibilidade da P_f : A figura 6.21 mostra os fatores de sensibilidade da P_f em relação a incerteza em cada uma das VA do problema. A figura mostra uma importância razoável da incerteza das coordenadas horizontais dos nós, principalmente no centro da coluna. o que é muito interessante. A figura mostra ainda uma importância bem maior da força F_2 em relação a F_1 , devida principalmente ao pequeno valor de F_2 . O módulo de elasticidade das colunas também afeta a confiabilidade muito mais do que o módulo de elasticidade dos reforços, apesar do valor destas variáveis ser idêntico.

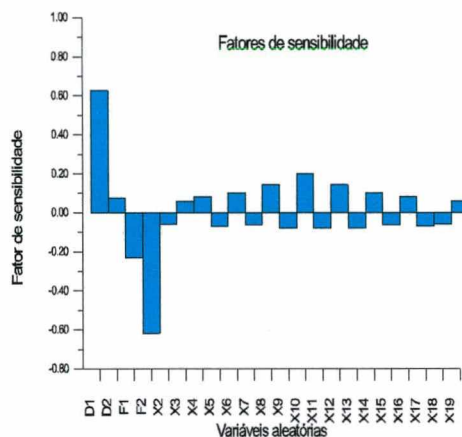


Figura 6.21: Importância das VA no cálculo da P_f .

Influência do Δz utilizado: Não foi possível obter resultados coerentes via SORM ou simulação para o problema. Estes resultados se mostraram altamente dependentes do fator f utilizado no cálculo dos Δz para avaliação da matriz Hessiana, conforme figura 6.22. Esta influência, provavelmente, é conseqüência do fato de o ponto de projeto estar na região de instabilidade da coluna. Assim, uma aproximação diferente da Hessiana é obtida para cada Δz utilizado, e os resultados de SORM e simulação são afetados.

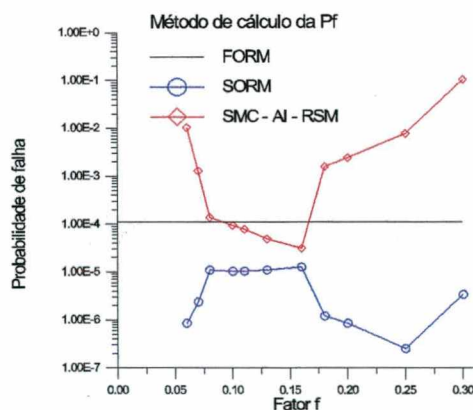


Figura 6.22: Instabilidade no cálculo da superfície de resposta.

6.4 Análise de confiabilidade da Ponte Hercílio Luz

A finalidade desta seção é de mostrar as potencialidades e a performance do método implementado na solução de problemas reais. Também deseja-se fornecer informações que possam contribuir para um melhor entendimento do problema, por parte do grupo responsável pelo projeto alternativo de recuperação da Ponte Hercílio Luz.

Devido à complexidade e ao tamanho do problema, uma análise completa e detalhada é inviável no contexto deste trabalho. Assim, a confiabilidade da ponte será verificada com relação a alguns aspectos do problema, com base na pequena quantidade de dados disponíveis e com base em diversas suposições, feitas com base na intuição do autor. Obviamente, os resultados serão dependentes das hipóteses assumidas.

A maior dificuldade para uma análise mais realista do problema é a falta de dados estatísticos para caracterizar as variáveis aleatórias do problema. Uma análise com maior nível de detalhamento exigiria um longo trabalho de coleta de dados.

A análise probabilística feita neste trabalho esta baseada na análise determinística realizada no GRANTE [30]. A maioria das hipóteses adotadas no estudo [30] também são adotadas no presente trabalho. O modelo numérico utilizado na análise probabilística é o mesmo utilizado em [30]. Na seqüência, são resumidos os principais aspectos levantados nesta análise determinística.

A análise determinística se concentrou na verificação do nível de tensões de membrana nas barras da cadeia de sustentação, para diversas condições de carregamento (projeto original, situação durante a montagem, projeto de recuperação com várias situações de serviço). Constatou-se, por exemplo, que os resultados em termos de tensão não variam através da consideração da não linearidade (grandes deslocamentos) do problema. Assim, em todas as análises, apenas o efeito não linear de enrijecimento por tensão foi considerado.

Outro aspecto importante é quanto a possibilidade de rotação das barras da cadeia de sustentação em relação aos respectivos pinos. Devido a grande oxidação atual das barras e pinos, modelou-se as barras como elementos de viga, ficando impossibilitada a rotação das barras nos pinos quando do carregamento da ponte com sua carga útil. Verificou-se que o momento fletor atuante na extremidade das barras é maior do que o momento necessário para girar as barras nos pinos, mesmo com a oxidação. Desta forma, os efeitos de flexão das barras são eliminados e, nas análises posteriores, apenas a tensão de membrana foi considerada. Alguns resultados referentes a esta suposição são analisados neste trabalho.

O modelo numérico utilizado na análise esta ilustrado na figura 6.23. Este modelo é composto por 2275 elementos e 8886 graus de liberdade. As barras da cadeia de sustentação, as vigas das colunas e as vigas da treliça foram modeladas como elementos de viga tridimensionais. Os pendurais foram modelados como elementos de barra. Conforme comenta-

do, os efeitos de não linearidade geométrica foram desprezados, mas o efeito de enrijecimento por tensão foi considerado.

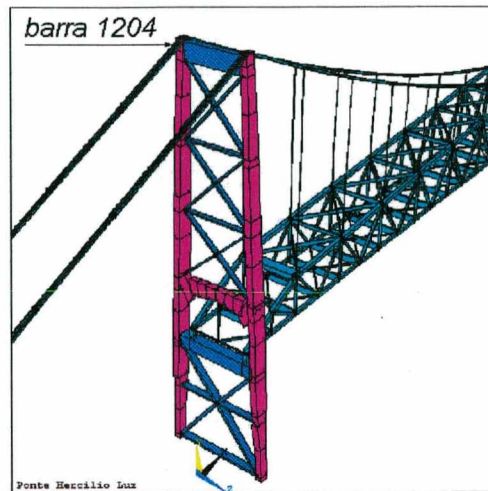


Figura 6.23: Ilustração volumétrica do modelo de viga 3D da ponte.

6.4.1 Caracterização estatística das variáveis aleatórias

Tensões de escoamento e de ruptura das barras

Os dados referentes a tensões de escoamento e ruptura das barras da cadeia de sustentação foram obtidos a partir do ensaio de 13 barras, em tamanho real [61]. Este número é muito pequeno para se determinar uma distribuição estatística para as tensões. É comum, no entanto, assumir distribuições de mínimos limitadas em zero para estas variáveis, uma vez que tensões de escoamento ou ruptura negativas não tem sentido físico. Assumiu-se uma distribuição de Weibull para mínimos para estas variáveis. Os resultados obtidos estão apresentados abaixo. A figura 6.24 mostra a distribuição assumida para a tensão de escoamento, em comparação com uma distribuição normal de mesma média e desvio padrão.

Variável	Distribuição	μ	σ	δ	Unidade
S_y	Weibull mínimos	582,6	34,9	0,060	MPa
S_r	Weibull mínimos	848,0	47,0	0,054	MPa

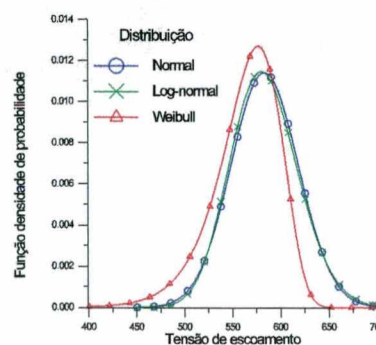


Figura 6.24: FDP da tensão de escoamento.

Perda de área devido a corrosão

Uma das grandes fontes de incerteza no projeto de recuperação da Ponte Hercílio Luz é o nível de deterioração das barras da cadeia de sustentação. Verificou-se que a perda de área em diversas barras é significativa. A caracterização estatística do nível de corrosão das barras foi realizada com base em cinco medidas de perda de área, realizadas em 5 seções mais críticas de duas barras no trabalho [30]. Estas barras estão situadas na cadeia sul, lado da ilha, próximas a pista de rodagem (devido ao acúmulo de água na pista de rodagem, estas são as barras mais deterioradas). Efeitos de corrosão localizada não foram levados em consideração.

A perda de área foi modelada utilizando uma variável γ , que caracteriza o nível de corrosão:

$$A = A_0 \cdot (1 - \gamma) \quad (6.7)$$

onde:

A_0 = área original de projeto;

A = área atual.

A distribuição de mínimos de área corresponde a uma distribuição de máximos de corrosão. Por uma questão de sentido físico, considerou-se uma distribuição de Weibull para máximos para a variável γ , limitada ao valor um, já que uma área atual menor do que zero não faz sentido físico. Os dados obtidos de [30] estão apresentados abaixo. A figura 6.25 mostra a distribuição assumida para o nível de corrosão, em comparação com uma distribuição normal de mesma média e desvio padrão.

Variável	Distribuição	μ	σ	δ	Unidade
γ	Weibull máximos	0,0992	0,014	0,138	-

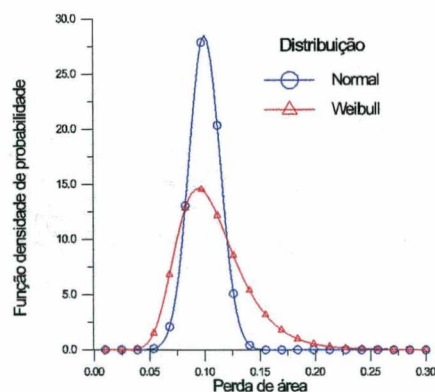


Figura 6.25: FDP da corrosão nas barras.

Para outras regiões da cadeia de sustentação, uma corrosão de menor média pode ser considerada. Por uma questão de facilidade de modelagem, a perda de área máxima foi

considerada constante em toda a extensão da barra. Esta consideração não tem maiores conseqüências em termos das tensões na barra em questão, mas introduz um erro no alongamento da barra.

Peso próprio da estrutura

O peso próprio da estrutura é calculado a partir do volume de cada elemento estrutural. No entanto, este peso também é incerto, devido a enorme quantidade de membros, passadiços, parafusos, porcas, solda, cujo peso normalmente não é incluído nos cálculos. Além disto, o próprio cálculo do volume das barras, vigas, eixos e outros elementos estruturais é aproximado.

A incerteza no peso próprio da estrutura pode ser facilmente modelada através de uma incerteza na aceleração da gravidade. Assim, esta incerteza se reflete em toda a extensão da ponte. Considerou-se um desvio-padrão de 10% no peso próprio, ou seja:

Variável	Distribuição	μ	σ	δ	Unidade
g	Normal	9,81	0,981	0,100	m/s^2

Deve-se salientar que a incerteza na aceleração da gravidade é apenas um artifício utilizado para modelar a incerteza no peso próprio, já que a aceleração da gravidade é uma variável bem conhecida (determinística).

Carga útil da ponte

A carga útil é uma variável bastante importante. Para determinar a distribuição da carga útil, seriam necessárias estatísticas sobre o tráfego de veículos entre o continente e a ilha. A norma Americana para pontes rodoviárias [8] apresenta um gráfico da FDP para a carga útil sobre pontes rodoviárias nos Estados Unidos, em função do tipo de estrada (se estrada rural, urbana, primária ou secundária). A distribuição apresentada é muito diferente de qualquer uma das distribuições estatísticas mais conhecidas. Esta distribuição, no entanto, poderia ser utilizada, bastando linearizá-la entre determinados intervalos. A aplicação dos métodos utilizados neste trabalho apenas exige o conhecimento dos valores da FDP e da FPA a cada ponto. No entanto, como os dados disponíveis não se aplicam diretamente a ponte Hercílio Luz, esta possibilidade não foi levada adiante.

A referência [8] prevê algumas situações críticas para a carga útil, considerando engarrafamentos da ponte por caminhões, carros e multidões, bem como combinações destas. O caso mais crítico é de um engarrafamento de caminhões junto com uma multidão nas passarelas. A carga nesta situação extrema também é incerta, pois utiliza-se valores aproximados para o peso e dimensões dos caminhões e para a quantidade de pessoas sobre a passarela. A carga distribuída foi modelada de forma que esta situação crítica tivesse uma probabilidade

de 1% de acontecer (média mais três vezes o desvio padrão). A carga distribuída foi modelada diretamente a partir da variável "piso", utilizada no modelo de elementos finitos para determinar as cargas nodais nas vigas de suporte do piso. Obteve-se, portanto:

Variável	Distribuição	μ	σ	δ	Unidade
q	Normal	140000,00	20000,00	0,140	N

6.4.2 Resultados da análise probabilística

Caso de referência

Neste caso de referência calculou-se a probabilidade de falha de uma barra na posição da barra rompida (barra número 1204), na cadeia sul lado da ilha, em relação a uma falha por escoamento. Como apenas a tensão de membrana foi considerada e não há cargas horizontais, a P_f calculada vale para qualquer uma das barras de qualquer uma das cadeias, fora as barras do vão principal que fazem parte da treliça. Nestas últimas, a tensão de membrana é menor e portanto a P_f também é menor. Resumindo os dados apresentados na seção anterior, os dados utilizados nesta análise foram:

Tabela 6.12: Dados para análise de referência da ponte.

Variável	Distribuição	μ	δ	Unidades
q	Normal	140000,00	0,140	N
S_y	Weibull mínimos	582,60	0,060	MPa
γ	Weibull máximos	0,10	0,138	-
g	Normal	9,81	0,100	m/s^2

Resumindo, a situação analisada foi a seguinte:

1. falha por escoamento da barra 1204:

$$g(\mathbf{z}) = S_y - S_{membrana}^{1204} \quad (6.8)$$

2. tensão de membrana;
3. uma VA para a corrosão das 4 barras do módulo (correlação perfeita).

Os resultados obtidos estão apresentados na tabela 6.13:

Tabela 6.13: Resultados para caso de referência.

Método	P_f	tol. / δ
FORM	$6,60 \cdot 10^{-6}$	0,001
SORM	$6,54 \cdot 10^{-6}$	0,001
SMC - AI	$6,99 \cdot 10^{-6}$	0,008

O fator utilizado no cálculo do Δz foi de 0,01. A solução completa levou 53 minutos. Como a equação de estado limite se mostrou altamente linear (resultados de FORM e SORM quase idênticos, nas demais análises realizou-se apenas a aproximação de primeira ordem. Nestes casos, o tempo de solução se reduziu a 20 minutos, em média.

Os fatores de sensibilidade da P_f obtidos foram:

Variável	q	S_y	γ	g
Fator de sensibilidade	-0,26	0,95	-0,05	-0,15

Estes fatores mostram uma grande importância da incerteza na tensão de escoamento na falha da barra. Esta é, casualmente, a VA do problema que melhor pôde ser caracterizada, em função dos dados disponíveis. Isto contribui para aumentar a credibilidade nos resultados. Por outro lado, a importância relativamente alta da carga distribuída aponta para a conveniência de uma melhor caracterização estatística desta VA. A perda de área devido à corrosão, uma das grandes incógnitas do projeto de recuperação, mostra-se pouco importante para este modo de falha. Cabe lembrar ainda que a perda de área considerada (10%) corresponde à perda de área das barras mais corroídas, portanto para as demais barras a corrosão tem uma importância ainda menor. Por outro lado, a corrosão localizada, muito importante no caso de falhas frágeis devido ao efeito de concentração de tensões, não foi considerada nesta análise.

Influência das distribuições assumidas:

A análise realizada para o caso de referência foi refeita, considerando-se uma distribuição Log-Normal para a tensão de escoamento. Em outra análise, considerou-se tanto a tensão de escoamento como o nível de corrosão das barras com distribuições normais. Os resultados se mostraram altamente dependentes da distribuição assumida, conforme tabela 6.14. Os fatores de sensibilidade também se alteraram de forma razoável.

Tabela 6.14: Resultados para influência das distribuições assumidas.

Variável / Caso de análise	P_f	q	S_y	γ	g
Caso de referência	$6,60 \cdot 10^{-6}$	-0,26	0,95	-0,05	-0,15
S_y Log-Normal	$8,51 \cdot 10^{-14}$	-0,55	0,71	-0,28	-0,32
S_y e γ Normais	$5,36 \cdot 10^{-10}$	-0,48	0,81	-0,15	-0,28

Verificou-se uma redução considerável da P_f , bem como um aumento da importância da corrosão e uma diminuição da importância da tensão de escoamento, em relação ao caso de referência. Isto acontece porque, neste caso, aumenta o peso da cauda superior da tensão de escoamento, enquanto que diminui o peso da cauda inferior da corrosão, conforme pode ser verificado nas figuras 6.24 e 6.25.

Influência do momento fletor na falha das barras

O caso de referência analisado considera apenas a tensão de membrana nas barras. Conforme comentado, as barras da cadeia de sustentação foram modeladas como vigas, considerando-se que a oxidação estivesse impedindo o livre giro das barras em relação aos pinos. Neste caso de análise, leva-se em conta a tensão de flexão provocada nas barras em função do carregamento da ponte. Numa primeira análise, considera-se a junta totalmente engastada, ou seja, sem qualquer possibilidade de giro. Considera-se a falha da barra 1185, no centro da cadeia de sustentação sul, lado ilha, onde o esforço de flexão é máximo. Nesta barra, a tensão de membrana utilizando os valores médios das VA é de 292 MPa, enquanto que a tensão axial máxima devido a flexão mais tração chega a 429 MPa. Neste caso de análise, obteve-se:

Tabela 6.15: Resultados para influência do momento fletor.

Caso de análise	P_f
Caso de referência	$6,60 \cdot 10^{-6}$
Tensão de membrana + flexão	$3,57 \cdot 10^{-2}$

Verifica-se, portanto, um grande efeito do momento fletor na P_f desta barra.

O próximo passo nesta análise seria considerar qual o momento fletor que provoca o giro das barras na condição atual da junta. Este momento é uma parcela do momento fletor máximo. Neste caso, o momento fletor máximo a ser considerado nas barras é o momento que provoca o giro da junta, adotando a hipótese conservativa de que o giro não provoca o alívio do momento fletor. O momento que provoca o giro das barras certamente está sujeito a uma determinada incerteza. Esta análise não foi levada adiante.

Análise da falha de um módulo da cadeia de sustentação

Cada módulo da cadeia de sustentação original da ponte é constituído por quatro barras de olhal. Conforme será mostrado adiante, a falha de uma destas barras não implica em falha da ponte. Assim, as barras de um módulo podem ser consideradas como um sistema em paralelo com redundância ativa.

Se a P_f das barras for idêntica e a falha das mesmas for perfeitamente correlacionada, então a falha de uma das barras implica em falha do módulo. Neste caso (correlação total) a P_f do módulo é igual a P_f das barras. Já se a falha das barras não for perfeitamente correlacionada ou se for independente, a análise de falha deve ser feita de forma condicional, atualizando-se a P_f das demais barras dada a falha de uma delas. No caso do módulo da ponte, existem, a princípio, $4! = 24$ seqüências possíveis que levam à falha do módulo. No entanto, analisando o valor das P_f 's condicionais das barras restantes, dada a falha de uma

barra, pode-se identificar seqüências mais importantes que levam a falha do sistema. As seqüências de ruptura analisadas estão indicadas na figura 6.26. Estas seqüências são:

- 1A falha inicial de qualquer uma das barras
- 2A falha de 1199 dada falha em 1204
- 2B falha de 1204 dada falha em 1199
- 3A falha de 1194 dadas falha em 1204 e em 1199

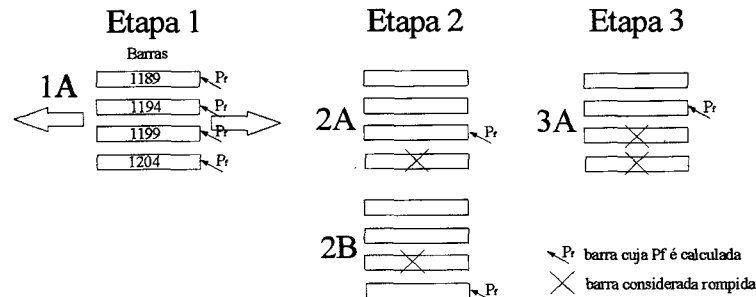


Figura 6.26: Probabilidades de falha condicionais calculadas.

O primeiro resultado relevante é a P_f inicial das barras, em relação a uma falha por ruptura (etapa 1A, figura 6.26). Esta primeira análise foi realizada repetindo-se o caso de referência, calculando-se a P_f da barra 1204, utilizando a tensão de ruptura ao invés da tensão de escoamento: $g(\mathbf{z}) = S_r - S_{membrana}^{1204}$. Como a tensão de membrana é a mesma em todas as barras do módulo, a P_f calculada é a mesma para todas as barras do módulo.

Em seguida, calculou-se a P_f da barra 1199, dada a falha da barra 1204 (etapa 2A). Neste cálculo não foi utilizado nenhum fator de impacto. Esta situação, portanto, representa a situação atual da ponte (barra 1204 rompida), considerando-se que a barra rompida e o reforço não tenham qualquer capacidade de suportar carga.

Nas demais análises, considerou-se o efeito de impacto causado pela ruptura das barras. Adotando o mesmo critério da análise determinística [30], admite-se que a tensão de impacto é:

$$S_i = S_1 + f_i \cdot \Delta S \quad (6.9)$$

onde:

S_i = tensão de impacto;

S_1 = tensão inicial na barra em questão antes da ruptura;

$\Delta S = S_2 - S_1$ = diferença de tensão na barra antes e após a ruptura;

f_i = fator de impacto.

Na análise determinística, utilizou-se um fator de impacto igual a dois. Neste trabalho, achou-se interessante considerar o fator de impacto como uma variável aleatória, dada a

incerteza com relação ao seu valor verdadeiro. Assumiu-se um fator de impacto com média dois e desvio padrão de 0,5, com uma distribuição normal. Isto significa que se está considerando uma probabilidade de 99% de que este fator seja menor do que 3.5.

Os resultados obtidos estão resumidos na tabela 6.16:

Tabela 6.16: Resultados para falhas condicionais das barras da cadeia de sustentação.

Caso de análise	P_f	q	S_r	γ	g	f_i	f_i^*
1A sem f_i	$1,70 \cdot 10^{-9}$	-0,22	0,95	-0,16	-0,13	-	-
2A sem f_i	$1,31 \cdot 10^{-5}$	-	-	-	-	-	-
2A com f_i	$5,02 \cdot 10^{-4}$	-0,48	0,29	-0,42	-0,28	-0,65	3,07
2B com f_i	$6,58 \cdot 10^{-5}$	-0,47	0,28	-0,52	-0,27	-0,59	3,13
3A com f_i	$1,19 \cdot 10^{-2}$	-0,53	0,22	-0,36	-0,31	-0,66	2,75

A P_f de ruptura da terceira barra, dada a falha de duas barras (caso 3A) é bastante alta. Assim, pode-se concluir que, dada a falha da terceira barra, a falha da quarta barra é praticamente certa. Considerando a independência da falha das barras e a simetria do problema, e considerando ainda a ordem de grandeza das P_f 's condicionais, pode-se identificar duas seqüências mais importantes para a falha do módulo. Estas seqüências são diferenciadas na etapa 2, indicada na figura 6.26. A probabilidade de falha do módulo para cada uma destas seqüências é:

$$P_{f1} = 1,70 \cdot 10^{-9} \cdot 5,02 \cdot 10^{-4} \cdot 1,19 \cdot 10^{-2} = 1,01 \cdot 10^{-14}$$

$$P_{f2} = 1,70 \cdot 10^{-9} \cdot 6,58 \cdot 10^{-5} \cdot 1,19 \cdot 10^{-2} = 1,33 \cdot 10^{-15}$$

Considerando a simetria, estas seqüências podem ocorrer de duas formas diferentes. Assim, a P_f do módulo, P_{fm} , considerando independência entre os modos de falha, é:

$$P_{fm} = 2 \cdot P_{f1} + 2 \cdot P_{f2} = 2,86 \cdot 10^{-14}$$

Os limites unimodais para a P_f de um módulo, considerando os casos limites de independência e dependência perfeita, são portanto:

$$2,86 \cdot 10^{-14} \leq P_{fm} \leq 1,70 \cdot 10^{-9}$$

Como as quatro equações de estado limite (uma por barra) dependem das mesmas VA, acredita-se que a falha das barras de um mesmo módulo seja altamente correlacionada. Para tanto, basta verificar que o aumento desproporcional de qualquer uma das VA relacionadas à solicitação (perda de área, carga distribuída e peso próprio) aumenta a P_f de todas as barras da mesma maneira. A única VA que não é totalmente correlacionada é a tensão de ruptura das barras. Assim, a P_f de um módulo estaria mais próxima de $1,70 \cdot 10^{-9}$.

Análise da falha das cadeias de sustentação

O conhecimento da P_f de um módulo permite estimar a P_f das cadeias de sustentação. Os módulos de cada cadeia formam um sistema em série, onde a falha de um módulo implica na falha de toda a cadeia. Cada cadeia da ponte é composta por 46 módulos, com a seguinte distribuição: 10 módulos na extremidade continente, 27 módulos no vão central, dos quais 11 pertencem à treliça e 9 módulos na extremidade lado ilha. Contando somente os módulos que não pertencem à treliça, são 35 módulos. Para as duas cadeias, são 70 módulos. Considerando-se dependência completa entre as falhas dos módulos, a P_f com relação a falha de qualquer módulo das cadeias de sustentação (fora os pertencentes à treliça) é igual a P_f de um único módulo, $1,70 \cdot 10^{-9}$. Considerando a falha dos módulos como completamente independentes, a P_{fc} de qualquer módulo da cadeia (P_{fc}) vai ser:

$$P_{fc} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P_{fc}^i) = 1 - (1 - 1,70 \cdot 10^{-9})^{70} = 1,19 \cdot 10^{-7}$$

Os limites unimodais para a P_f das cadeias, considerando os casos limites de independência e dependência perfeita e considerando a falha das barras de um módulo como perfeitamente correlacionadas, são portanto:

$$1,70 \cdot 10^{-9} \leq P_{fc} \leq 1,19 \cdot 10^{-7}$$

Mais uma vez, acredita-se que a falha dos diversos módulos de uma cadeia estão mais para correlacionados do que para não correlacionados. Se as partes de cada cadeia fossem consideradas separadamente, poderia-se trabalhar melhor a questão da correlação entre a falha das diversas partes da cadeia. Neste caso, se obteria algum valor intermediário aos valores encontrados acima.

Comparação com a cadeia reforçada

Neste caso de análise, adicionou-se à cadeia de sustentação original da ponte as barras de reforço, conforme projeto de recuperação da ponte. Numa primeira análise, considerou-se a falha por escoamento da barra 2194, barra adicionada ao módulo analisado na seção anterior (cadeia da ilha, lado sul). Para esta análise, considerou-se uma tensão de escoamento com média de 1100 MPa e desvio padrão de 66 MPa ($\delta = 0,06$), com uma distribuição de Weibull para mínimos. Numa segunda análise calculou-se a P_f de uma barra na posição da barra rompida (barra 1204), com a presença da barra de reforço. Em ambos os casos, foi considerada corrosão nas quatro barras da cadeia original. Os resultados obtidos são apresentados na tabela 6.17:

Tabela 6.17: Resultados para cadeia reforçada.

Caso de análise	P_f
Caso de referência (sem reforço)	$6,60 \cdot 10^{-6}$
Falha da barra nova 2194 (com reforço)*	$3,17 \cdot 10^{-9}$
Falha da barra velha 1204 (com reforço)*	$5,62 \cdot 10^{-9}$

*Barra 1204 considerada não rompida.

Os resultados mostram um aumento considerável da confiabilidade da ponte com a cadeia reforçada. A P_f da barra nova é suficientemente pequena, sendo bem menor do que a P_f de uma barra da cadeia original na condição de projeto (sem perda de área). Mesmo a P_f das barras velhas diminui muito com o reforço da cadeia (aproximadamente 1000 vezes).

Consideração sobre os casos analisados

A medida que o trabalho se desenvolve, novas situações de análise se mostram interessantes. Os casos apresentados são bastante simplificados, mas servem para demonstrar a utilidade do método implementado na solução de problemas práticos.

Deve-se salientar ainda que o modelo de falha utilizado nas análises apresentadas é extremamente simples (falha por escoamento de uma barra sob tração). Muitos dos casos analisados poderiam ter sido resolvidos a partir de expressões analíticas, bastando para isto determinar a distribuição da força axial nas barras em função das distribuições da carga útil e do peso próprio. Neste problema, em particular, como estas distribuições são normais, isto seria muito simples. Em problemas mais complexos, a capacidade de sub-modelagem do FERM poderia ser utilizada para determinar esta distribuição, conforme ilustrado nos problemas 6.3.1 e 6.3.4. Obviamente, este não foi o objetivo desta análise.

Outro aspecto importante diz respeito aos modos de falha considerados. A falha de uma barra por escoamento ou por ruptura, sem consideração de efeitos de corrosão localizada, certamente não são os modos de falha mais importantes. Um eventual detalhamento da análise deve avançar no sentido de considerar estes modos de falha.

Capítulo 7

CONCLUSÃO

7.1 Apreciação dos métodos analisados

Os exemplos resolvidos através do ACE-Pro permitem estabelecer algumas conclusões a respeito das técnicas e métodos de confiabilidade estrutural discutidos neste trabalho.

O algoritmo de otimização modificado HLRF-M se mostrou robusto e eficiente na solução do problema de otimização. O algoritmo convergiu em todos os exemplos analisados, sem a necessidade de calibrar parâmetros ou realizar ajustes, independentemente do número de VA, da forma da função objetivo e da não linearidade de alguns dos problemas analisados. A convergência foi rápida em todos os casos, exigindo de 4 a 5 iterações para um critério de parada igual a 10^{-4} no deslocamento em \mathbb{Y} .

Em conjunto com o algoritmo de otimização, a transformação para o espaço normal padrão também se mostrou robusta, consistente e invariável com relação a diferentes formulações do problema (questão da ordem das VA). A transformação é robusta no sentido de se aplicar a problemas de VA correlacionadas e com distribuições marginais quaisquer. A transformação é consistente pois utiliza toda a informação estatística disponível, a nível de distribuições marginais, e está de acordo com a teoria de probabilidades.

A aproximação de primeira ordem da P_f se mostrou razoável na maioria dos problemas analisados, a um custo bastante baixo. Esta aproximação foi menos precisa no problema 6.3.1, devido a grande não linearidade da equação de estado limite deste problema.

A aproximação de segunda ordem mostrou melhoras significativas da P_f para os problemas com equação de estado limite não linear, a um custo computacional significativo. No entanto, embora este custo seja proporcional ao quadrado do número de VA, o tempo de solução não passou de 20 minutos para o problema 6.3.5, que envolve 22 VA e uma análise não linear de elementos finitos. Este é um tempo pequeno, considerando a importante melhora dos resultados (mesmo que no problema citado esta melhora não tenha sido possível). O problema da variação da P_f com relação a diferentes expressões de $g(\mathbf{z}) = 0$ é importante. A menos que se consiga determinar qual a forma "adequada" de $g(\mathbf{z}) = 0$ para aplicação

da solução assintótica (equação 3.66), é fundamental que a estimativa de SORM seja feita através da expressão (3.67). Cabe lembrar que uma forma "adequada" não possui nenhum sentido físico para o problema.

O método da superfície de resposta também se mostrou muito útil, por permitir a realização da simulação de Monte Carlo, que melhora significativamente a resposta no caso de múltiplos modos de falha. O custo desta solução é equivalente ao de SORM, para uma superfície quadrática com termos cruzados. A melhora da solução valeu o preço adicional pago, nos problemas analisados! Em problemas com um número maior de VA, esta relação já fica mais comprometida.

A simulação de Monte Carlo se mostrou formidável no sentido de melhorar os resultados para os problemas com múltiplos modos de falha. O esquema de amostragem por importância utilizado se mostrou muito eficiente. O custo da simulação utilizando as superfícies de resposta e amostragem por importância é mínimo, pois um conjunto de 10^5 pontos de amostragem é gerado em segundos e geralmente é suficiente para obter uma boa precisão. Além disto, todos os modos de falha são amostrados com o mesmo conjunto de pontos.

A questão da variação dos resultados de simulação com relação a ordem das VA é fundamental, principalmente porque esta solução geralmente é utilizada como valor de referência. Como o ordenamento das VA não possui nenhum sentido físico para o problema, é fundamental que a operação de correlacionamento das VA seja feita por outra técnica independente deste ordenamento.

A aproximação linear bimodal para múltiplos modos de falha se mostrou adequada nos problemas com pequena probabilidade de falha. Já no problema 6.3.3, esta aproximação deixou a desejar, devido a existência de quatro modos de falha equi-importantes de grande P_f . Neste problema, a simulação de Monte Carlo com múltiplas funções de amostragem mostrou grandes melhoras na estimativa da P_f . Em comparação à aproximação linear bimodal, a simulação utilizando superfícies de resposta quadráticas equivale a um aproximação de segunda ordem *nva-modal*!

Os métodos de elementos finitos estocásticos de segundo momento não chegaram a ser estudados na prática. No entanto, as limitações destes métodos e os resultados obtidos neste e em outros trabalhos levam a crer que o FERM é um método muito mais robusto e eficiente para resolver o problema de confiabilidade estrutural no contexto de elementos finitos. Os métodos de segundo momento estão limitados a distribuições normais, a pequenos coeficientes de variação e a equações de estado limites aproximadamente lineares. Já o FERM não possui nenhuma destas limitações. O método permite resolver todos os problemas abordados pelos métodos de segundo momento e muitos outros. O FERM permite tratar de problemas envolvendo campos estocásticos e determinar a FDP da resposta, de forma semelhante aos métodos de segundo momento.

A configuração do FERM adotada no ACE-Pro se mostrou muito eficiente, sem problemas de convergência e alheia a ruídos da equação de estado limite. A solução desenvolvida é mais completa e abrangente do que os trabalhos que a motivaram [29, 46, 47].

O programa tal como foi implementado permite a solução de problemas práticos de engenharia, de forma simples e eficiente. A implementação do ACE-Pro em conjunto com o ANSYS se mostrou extremamente prática. A análise de confiabilidade através destes programas exige apenas duas tarefas adicionais em relação a uma análise convencional (determinística) de elementos finitos:

1. construção parametrizada do modelo de elementos finitos, onde cada VA deve ser representada como um parâmetro e o modelo deve ser construídos em função destes parâmetros (prática recomendável mesmo em análises convencionais);
2. caracterização estatística das VA envolvidas.

Este segundo item é uma questão delicada que concerne a qualquer método que visa um tratamento probabilístico de problemas reais. Acontece que atualmente dados estatísticos sobre os fenômenos envolvidos nos problemas reais de engenharia são raros, conforme verificado no caso da Ponte Hercílio Luz. Este fato pode ser uma consequência de que a atual comunidade de engenharia ainda tem uma visão determinista dos seus problemas. Com a criação de ferramentas práticas como o ACE-Pro espera-se contribuir para mudar esta visão em favor de uma perspectiva probabilística de projeto. Possivelmente, se a ponte fosse construída nos dias de hoje, uma atenção maior já seria dada à caracterização estatística das variáveis de projeto.

Através de análises como a da Ponte Hercílio Luz pretende-se mostrar os ganhos que podem ser obtidos por esta mudança de visão, em relação a realizar projetos mais confiáveis. Os resultados obtidos nesta análise, mesmo que bastante simplificada, fornecem informações importantes sobre a confiabilidade do projeto de recuperação e sobre a influência das incertezas envolvidas.

7.2 Sugestões para continuação deste trabalho

O estudo desenvolvido neste trabalho permite destacar alguns pontos que merecem maior atenção e algumas possibilidades que surgem, em função do programa desenvolvido. Estas sugestões são no sentido de complementar o ACE-Pro, de criar uma versão do programa em uma plataforma distinta, e de apontar próximos passos a serem dados, como análise de sistemas e otimização estrutural baseada em confiabilidade.

7.2.1 Complementação do ACE-Pro

Nesta seção são sugeridas algumas implementações para tornar o ACE-Pro mais completo e confiável.

A programação do algoritmo de otimização programação quadrática sequencial seria muito útil, para resolver eventuais problemas de convergência do HLRF-M.

A programação de um algoritmo para a integração da expressão de SORM (equação 3.67) é fundamental, devido a variação observada na equação (3.66) em relação a formas distintas mas equivalentes da equação de estado limite.

Também é fundamental uma nova operação para impor a correlação das VA na simulação de Monte Carlo, que seja independente do ordenamento das VA.

Uma opção para utilizar diferentes superfícies de resposta pode ser muito útil, para problemas com equações de estado limite aproximadamente lineares. Formas para aproximar a Hessiana também podem ser muito úteis para reduzir o custo desta análise. Uma destas formas é a consideração dos termos da diagonal principal, apenas.

7.2.2 Uma nova plataforma para o ACE-Pro

A sugestão é eliminar o ANSYS e utilizar em seu lugar algum outro programa de elementos finitos, disponível na forma de rotinas, de forma a acessar diretamente os dados sobre o modelo. Isto permitiria implementar a discretização de campos estocásticos. Outro aspecto importante é a possibilidade de implementar as técnicas de diferenciação direta para o cálculo dos gradientes. Apesar dos excelentes resultados obtidos pelo ACE-Pro, é fundamental que se possa considerar modos de falha ainda mais realistas do que os considerados, como formação de rótulas plásticas e fadiga. É fundamental também modelar problemas mais complexos, como não linearidades materiais e plasticidade. Conforme visto neste trabalho, o FERM não apresenta quaisquer restrições neste sentido. A eficiência destas soluções depende apenas de uma forma de acelerar o cálculo dos gradientes. Para os problemas não lineares as técnicas de diferenciação direta se mostram particularmente promissoras.

7.2.3 Tratamento de sistemas

O próximo passo no sentido de complementar as ferramentas de análise é automatizar o cálculo da P_f para sistemas. O ACE-Pro serve para calcular as P_f 's individuais em relação a cada modo de falha e a P_f dos componentes estruturais. Estas P_f 's devem ser combinadas em função do sistema em questão (série, paralelo ou misto). Um aspecto importante da análise de sistemas é a identificação de seqüências de falha mais importantes, conforme foi feito para o módulo da cadeia de sustentação da Ponte Hercílio Luz. Trabalhos neste sentido já vem sendo realizados por alguns pesquisadores.

7.2.4 Otimização estrutural baseada em confiabilidade

O desenvolvimento de ferramentas computacionais para o cálculo de confiabilidade, como o ACE-Pro, abre novas perspectivas para os atuais métodos de otimização estrutural. Métodos de otimização estrutural baseada em critérios de confiabilidade são sugeridos por Moses e Frangopol [48, 26].

Um fator importante a considerar é que a otimização resulta em projetos com mais membros ou modos de falha projetados contra o limite, em comparação a projetos não otimizados[48]. Esta conclusão pode ser facilmente verificada em problemas de otimização linear. Como o ponto ótimo destes projetos está localizado em um dos vértices do espaço factível, tem-se que:

$$\text{número de restrições ativas no ponto ótimo} \geq \text{número de variáveis de projeto}$$

Esta conclusão vale também para a otimização baseada em *full stress*. Do ponto de vista da segurança, a otimização de projetos pode introduzir um fator detrimental. Se os coeficientes de segurança utilizados nas restrições são determinados com base em projetos não otimizados (mesmo em normas técnicas), a segurança do projeto otimizado pode ficar aquém da desejada.

Outro ponto a considerar é o compromisso que existe entre o custo (ou peso, que normalmente é a variável a ser otimizada) e a segurança do projeto. Torna-se assim interessante formular problema de otimização com base em critérios de confiabilidade.

A forma mais natural de formular este problema é minimizar o custo sujeito a uma restrição em termos da P_f . Neste contexto, o problema de otimização pode ser colocado de forma mais realista e até simplificado, ao se substituir as várias restrições em tensão, rigidez ou estabilidade, por uma restrição única em termos da P_f do componente ou sistema. Uma formulação alternativa é de minimizar a P_f sujeita a uma restrição de custo.

O conhecimento da P_f permite ainda formular o problema de otimização em uma escala bem mais abrangente do que possível na análise determinística. O custo esperado de falha ou custo de reposição podem ser incluídos e o custo total esperado pode ser minimizado:

$$\min C = C_0 + P_f \cdot C_f \quad (7.1)$$

onde:

C = custo total esperado;

C_0 = custo inicial;

C_f = custo de falha;

$P_f \cdot C_f$ = custo esperado de falha.

No contexto de tal algoritmo de otimização, o ACE-Pro pode calcular automaticamente a P_f para cada configuração de projeto.

Referências Bibliográficas

- [1] Ang, A. H-S.; Tang, W. H.; 1975. **Probability Concepts in Engineering Planning and Design** , Volume I: Basic Principles; John Wiley & Sons.
- [2] Ang, A. H-S.; Tang, W. H.; 1990. **Probability Concepts in Engineering Planning and Design** , Volume II: Decision, Risk and Reliability; John Wiley & Sons.
- [3] Ang, G. S.; Ang, H-S.; 1994. **Adaptive Kernel Method for Evaluating Structural System Reliability**, 6th International Conference on Structural Safety and Reliability.
- [4] **ANSYS Programmer's Manual Revision 5.2**, 31 de outubro de 1995.
- [5] **ANSYS Installation and Configuration Guide for Release 5.3**; outubro de 1996.
- [6] **ANSYS User's Manual for Revision 5.0**, Volumes I e II - Procedures, 23 de dezembro de 1992.
- [7] Araújo, J. M. e Awruch, 1992. **Análise Estrutural Probabilística pelo Método dos Elementos Finitos**, Departamento de Engenharia Civil, UFRGS.
- [8] ASCE - American Society of Civil Engineers, 1980. **Recommended Design Loads for Bridges**.
- [9] Beck, A. T.; 1996. **Cálculo da Confiabilidade de uma Viga de Ponte Rolante**; Trabalho de Diplomação, Departamento de Engenharia Mecânica, UFRGS.
- [10] Beck, A. T. e da Rosa, E., 1999. **ACE-Pro - Manual para Utilização e Programação**, Grupo de Análise e Projeto Mecânico, Curso de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, UFSC.
- [11] Bjerager, P., 1988. **Probability Integration by Directional Simulation**, Journal of Engineering Mechanics, vol. 114, número 8, pg. 1285-1301.
- [12] Bjerager, P., 1990. **On Computation Methods for Structural Reliability Analysis**, Structural Safety, vol.9, pg. 79-96.

- [13] Borgund, U. e Bucher, C. G.; 1986. **Importance Sampling Procedure Using Design Point - ISPUD - User's Manual**, Institute für Mechanik, Universität Innsbruck, Innsbruck.
- [14] Borgund, U.; Ouypornprasert, W. e Prenninger, P. H. W., 1986. **Advanced Simulation Methods for the Estimation of Systems Reliability**, Internal Working Report 19, Institute für Mechanik, Universität Innsbruck, Innsbruck.
- [15] Bratley, P.; Fox, B. L.; Schrage, L. E.; 1987. **A Guide to Simulation**, Springer.
- [16] Bucher, C. G., 1988. **Adaptive Sampling - An Iterative Fast Monte Carlo Procedure**, Structural Safety, vol. 5, pg. 119-126.
- [17] Bucher, C. G. e Bourgund, U., 1990. **A Fast and Efficient Response Surface Approach for Structural Reliability Problems**, Structural Safety, vol. 7, pg. 56-66.
- [18] Bucher, C. G., Pradlwarter e Schuëller, G. I.; 1994. **COSSAN - Computational Stochastic Structural Analysis Perspectives of Software Development**, 6th International Congress for Structural Safety and Reliability, pg. 1733-1739.
- [19] Chia, C. e Ayyub, B.; 1994. **Conditional Sampling for Simulation Based Structural Reliability Assesment**, 6th International Congress for Structural Safety and Reliability, pg. 1233-1239.
- [20] Clarkson, B. L. **An Introduction to Random Vibration Analysis**; Institute of Sound and Vibration; University of Southampton.
- [21] Ditlevsen, D.; 1981. **Principle of Normal Tail Aproximation**, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, vol. 107, n^o EM6, pg. 1191 - 1208.
- [22] Ditlevsen, O. e Bjerager, P.; 1986. **Methods of Structural Systems Reliability**, Structural Safety, volume 3, pg. 195-229.
- [23] Dolinski, K.; 1983. **First Order Second Moment Aproximation in Reliability of Structural Systems: Critical Review and Alternative Approach**, Structural Safety, vol. 1, pg. 211-231.
- [24] Feijóo, R. A. e Taroco, E., 1993. **Introducción al Análisis de Sensibilidad**, Laboratorio Nacional de Computação Científica, Rio de Janeiro.

- [25] Fiessler, B., Neumann, H.-J. e Rackwitz, R.; 1979. **Quadratic Limit States in Structural Reliability**, Journal of the Engineering Mechanics Division, vol. 105, Número EM4, pg. 661-675.
- [26] Frangopol, D. M. e Fu, G., 1989. **Limit States Reliability Interaction in Optimum Design of Structural Systems**, 6th International Congress for Structural Safety and Reliability, pg. 1879-1886.
- [27] Freudenthal, A. M.; 1947. **The Safety of Structures**, American Society of Civil Engineers Transactions, vol. 112, pg. 125-180.
- [28] Gao, L. e Haldar, A.; 1994. **Nonlinear SFEM-based Reliability for Space Structures**, 6th International Congress for Structural Safety and Reliability, pg. 325-332.
- [29] Gopalakrishna, H. S. e Donaldson, E.; 1991. **Practical Reliability Analysis Using a General Purpose Finite Element Program**, Finite Element in Analysis and Design 10, pg. 75 - 87, Elsevier.
- [30] GRANTE - Grupo de Análise e Projeto Mecânico, 1997. **Estudo da Viabilidade Técnica de Proposta Alternativa de Recuperação da Ponte Hercílio Luz - Relatório Final**.
- [31] Hasofer, A. M. e Lind, N. C.; 1974. **Exact and Invariant Second Moment Code Format**, Journal of Engineering Mechanics vol. 100(1), pg. 111-121.
- [32] Hohenbichler e Rackwitz, R., 1981. **Non-Normal Dependent Vectors in Structural Reliability**, Journal of Engineering Mechanics vol. 107, N^o EM6, pg. 1227 - 1238.
- [33] Hohenbichler, M., Golwitzer, S., Kruse, W. e Rackwitz, R.; 1987. **New Light on First and Second Order Reliability Methods**, Structural Safety, vol. 4, pg. 267-284.
- [34] Iman, R. L.; Canover, W. J.; 1980. **Small Sample Sensitivity Analysis Techniques for Computer Models with an Application to Risk Assessment**, Communications in Statistics, Theory and Methods.
- [35] Ishie, K. e Suzuki, M.; 1987. **Stochastic Finite Element Method for Slope Instability Analysis**, Structural Safety 4, pg. 111-129.
- [36] Kapur, K. C.; Lamberson, L. R.; 1977. **Reliability in Engineering Design**, John Wiley & Sons.
- [37] Karamchandani, A.; Bjerager, B.; Cornell, C. A.; 1989. **Adaptive Importance Sampling**, 5th International Conference on Structural Safety and Reliability, pg. 855-862.

- [38] Kiureghian, A. D.; Asce, M. e Liu, P-L.; 1986. **Structural Reliability Under Incomplete Probability Information**, Journal of Engineering Mechanics n° 1, pg 85-103.
- [39] Kiureghian, A. D., Lin, H-Z. e Hwang, S-J., 1987. **Second Order Reliability Approximations**, Journal of Engineering Mechanics, vol. 113, n° 8, pg. 1208-1225.
- [40] Liu, P-L. e Kiureghian, A. D.; 1989. **Finite Element Reliability of Two Dimensional Continua with Geometrical Nonlinearity**, 5th International Congress for Structural Safety and Reliability, pg. 1089-1096.
- [41] Liu, P-L. e Kiureghian, A. D.; 1989. **Finite Element Reliability Methods for Geometrically Nonlinear Stochastic Structures**, Report UCB/SEMM-89/05, Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley.
- [42] Liu, P-L. e Kiureghian, A. D.; 1991. **Optimization Algorithms for Structural Reliability**, Structural Safety, vol. 9, pg. 161-177.
- [43] Liu, P-L. e Kiureghian, A. D.; 1997. **Finite Element Reliability of Geometrically Nonlinear Uncertain Structures**, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 117, n° 8, pg. 1806-1825.
- [44] Madsen, H. O; 1988. **Omission Sensitivity Factors**; Structural Safety 5, pg. 35-45.
- [45] Mahadevan, S. e Haldar, A.; 1991. **Practical Random Field Discretization in Stochastic Finite Element Analysis**, Structural Safety 9, pg. 283-304.
- [46] Maymon, G.; 1993. **Probability of Failure of Structures Without a Closed Form Failure Function**; Computers & Structures, vol. 49, n° 2, pg. 301-303.
- [47] Maymon, G.; 1994. **Direct Computation of the Design Point of a Stochastic Structure using Finite Element Code**; Structural Safety, vol.14, pg. 185-202
- [48] Moses, F. **Approaches to Structural Reliability and Optimization**, em "An Introduction to Structural Optimization", Case Western Reserve University, Cleveland, Ohio, pg. 81-120.
- [49] Orisamolu, I. R.; Liu, Q. e Chernuka, M. M.; 1994; **Probabilistic Reliability Analysis using General Purpose Commercial Computer Programs**; 6th International Congress for Structural Safety and Reliability, pg. 1395-1398.
- [50] Prabhu, N. U.; 1965. **Stochastic Processes**, Collier-Macmillan Limited, London.
- [51] Rackwitz, R. e Fiessler, B.; 1978. **Structural Reliability Under Combined Load Sequences**, Computers and Structures vol. 9, pg. 489-494.

- [52] Reh, S., Brüchner-Foit, A. e Böhm, F.; 1994. **Reliability Analysis of Complex Structures with Random Material Properties and Random Geometry**; 6th International Congress for Structural Safety and Reliability, pg. 399-402.
- [53] Riera, J. A.; 1993. **Introdução à Confiabilidade na Engenharia** ; Apostila da disciplina "Introdução a Confiabilidade em Engenharia", Departamento de Engenharia Civil, UFRGS.
- [54] Rocha, M. M., 1996. **Simulação de Monte Carlo com Amostragem por Importância: Fundamentos Teóricos e Programação**, Laboratório de Dinâmica Estrutural e Confiabilidade, Departamento de Engenharia Civil, UFRGS.
- [55] Rosa, E. da; 1976. **Confiabilidade em Sistemas Estruturais** , Publicação GRANTE - Grupo de Análise de Tensões, Curso de Engenharia Mecânica, UFSC.
- [56] Rubinstein, R. Y.; 1981. **Simulation and the Monte Carlo Method**, John Wiley & Sons.
- [57] Schuëller, G. I. e Stix, R.; 1987. **A Critical Appraisal on Methods to Determine Structural Reliability**, Structural Safety 4, pg. 293-309.
- [58] Shinozuka, M.; 1983. **Basic Analysis of Structural Safety**, Journal of Structural Engineering vol. 109(3), pg. 721-740.
- [59] Siddall, J. N., 1972. **Analytical Decision-Making in Engineering Design**, Prentice-Hall Inc.
- [60] Silva Jr., C. R. A. da; 1998. **Análise de Confiabilidade Estrutural Adaptativa de Componentes Mecânicos Utilizando Análise de Sensibilidade**, Dissertação de Mestrado, Pós-graduação em Engenharia Mecânica, UFSC.
- [61] Steinman, D. B. e Groove, W. G.; 1928. **The Eye-bar Cable Suspension Bridge at Florianópolis; Brazil**; ASCE paper 1662.
- [62] Tan, R. Y. e Lu, I. Y.; 1994. **Stochastic Finite Element Analysis of Structures**, 6th International Congress for Structural Safety and Reliability, pg. 375-380.
- [63] Yonezawa, M.; Okuda, S.; 1994. **An Improved Importance Sampling Density Estimation for Structural Reliability**, 6th International Conference on Structural Safety and Reliability.

- [64] Zhang, Y. e Kiureghian, A. D., 1994. **Probability of Damage Excursion in a Continuum with Random Field Properties**, 6th International Conference on Structural Safety and Reliability, pg. 1763-1767.
- [65] Zhang, Y. e Kiureghian, A. D., 1997. **Finite Element Reliability Methods for Inelastic Structures**, Report UCB/SEMM-97/05, Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley.

Apêndice A

ACE-Pro - Manual para Utilização e Programação.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
GRANTE – GRUPO DE ANÁLISE E PROJETO MECÂNICO

ACE-Pro

*Manual para utilização
e programação*

ANDRÉ TEÓFILO BECK

EDISON DA ROSA

Florianópolis, 27 de Janeiro de 1999.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	3
1.1	Descrição do programa	3
1.2	Metodologia de solução	4
2	OPERAÇÃO CONJUNTA DO ANSYS - ACE-Pro	6
2.1	Arquivo de entrada de dados CONFL.TXT	8
3	DESCRIÇÃO DAS ROTINAS IMPLEMENTADAS	12
3.1	Visão geral das rotinas	12
3.2	Descrição das subrotinas mais importantes	13
3.2.1	Rotinas principais	13
3.2.2	Rotinas auxiliares	15
3.2.3	Rotinas para modos de falha individuais	17
3.2.4	Rotinas para cálculo do ponto de projeto	18
3.2.5	Rotinas para cálculo do Jacobiano	21
3.2.6	Rotinas para construção da superfície de resposta	23
3.2.7	Rotinas para falha bi-modal	24
3.2.8	Rotinas para simulação de Monte Carlo	26
4	DESCRIÇÃO DAS DISTRIBUIÇÕES	29
4.1	Distribuição Uniforme	29
4.2	Distribuição Normal	29
4.3	Distribuição Log-Normal	30
4.4	Distribuição Exponencial deslocada	30
4.5	Distribuição Rayleigh deslocada	31
4.6	Distribuição Logística	31
4.7	Gumbel para mínimos (tipo I)	32
4.8	Gumbel para máximos (tipo I)	32
4.9	Frechet para mínimos (tipo II)	33
4.10	Frechet para máximos (tipo II)	33
4.11	Weibull para mínimos (tipo III)	34
4.12	Weibull para máximos (tipo III)	35
5	CUSTOMIZANDO ANSYS V5.3	37
5.1	Considerações iniciais	37
5.2	Configuração de software necessária	38

5.3 Procedimento	38
A Sumário da distribuições disponíveis	43
B Sumário das subrotinas do ACE-Pro.	44
C Fluxograma das rotinas do ACE-Pro	46
D Arquivo de entrada de dados para problema 6.3.1 de [6].	47
E Seqüência de comandos para solução do problema 6.3.1 [6] no ANSYS.	48
F Arquivos para customização do ANSYS	49

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 Descrição do programa

O **ACE-Pro** é um programa para **Análise de Componentes Estruturais Probabilística** a partir de modelos de Elementos Finitos.

Ele foi desenvolvido como um conjunto de subrotinas para o programa de análise ANSYS versão 5.3 [5]. O ACE-Pro também pode ser utilizado de forma independente para resolver problemas com equações de estado limite analíticas.

O programa permite a solução de confiabilidade em problemas práticos de engenharia, pois não requer uma expressão analítica para a equação de estado limite do problema. Desta forma, soluções de confiabilidade podem ser obtidas para uma ampla gama de problemas.

O programa é uma ferramenta a mais ao alcance do engenheiro que trabalha com EF. Ele permite verificar o nível de segurança do componente analisado, possibilitando uma melhor escolha do coeficiente de segurança a ser utilizado

O ACE-Pro resolve problemas nos quais as variáveis de projeto são modeladas como VA. Ele não permite, diretamente, a solução de problemas envolvendo campos ou processos estocásticos. Estes problemas requerem um tratamento inicial de discretização. É possível modelar como VA carregamentos, propriedades de material, condições de contorno, geometria e valores admissíveis de tensão, deslocamento, etc. As VA podem ser modeladas segundo um dos tipos de distribuição descritos no capítulo 4.

A falha da estrutura pode ser caracterizada por um modo de falha ou mais (uma equação de estado limite por modo de falha). Para que a estrutura seja considerada como um componente estrutural é necessário que uma falha em qualquer um dos modos de falha represente falha da estrutura. Se este não for o caso, os modos de falha devem ser revistos, ou a estrutura deve ser desmembrada, de forma que suas partes possam ser classificadas como componentes estruturais.

O ACE-Pro é integrado ao ANSYS através de um procedimento chamado de "customização", descrito em detalhes no capítulo 5 e em [3]. A interface entre os dois programas é feita

através da subrotina USEROP.F, que permite a programação de um algoritmo de otimização próprio do usuário.

O ACE-Pro resolve o problema de confiabilidade estrutural através do método de confiabilidade para elementos finitos, descrito em detalhes em [6]. Uma descrição da metodologia de solução adotada pelo programa é feita a seguir.

1.2 Metodologia de solução

O método de confiabilidade para elementos finitos permite a utilização das técnicas convencionais para análise probabilística. Neste programa é adotada uma combinação dos métodos FORM, SORM, superfície de resposta e simulação de Monte Carlo com amostragem por importância. O ACE-Pro determina configurações das VA para as quais o modelo de EF é resolvido, e utiliza a resposta do ANSYS para computar gradientes ou para construir superfícies de resposta.

De forma resumida, o ACE-Pro:

1. encontra o ponto de projeto correspondente a cada modo de falha;
2. faz uma aproximação de primeira ordem da P_f individual (falha em relação a cada modo);
3. constrói uma superfície de resposta em torno de cada ponto de projeto;
4. melhora a estimativa da P_f calculada por aproximação de segunda ordem;
5. calcula os limites bimodais linearizados da P_f .
6. realiza a simulação de Monte Carlo com amostragem por importância, utilizando as superfícies de resposta construídas.

A partir de um ponto inicial (normalmente o ponto médio), o primeiro gradiente é calculado, através de um esquema de diferenças finitas. Um percentual do desvio padrão de cada VA é utilizado como Δz . É realizada uma análise de sensibilidade do gradiente, onde variáveis sem importância para o modo de falha em questão são eliminadas. O ponto de projeto é procurado através dos algoritmos HLRF ou HLRF-M. Os demais gradientes são calculados utilizando-se um percentual do passo dado por cada VA na iteração anterior. A transformação para o espaço normal padrão é feita a cada ponto da iteração do algoritmo de otimização. Encontrado o ponto de projeto, a estimativa de primeira ordem da P_f é realizada.

A Hessiana de $g(\mathbf{z})$ é calculada por um esquema de diferenças finitas centrais. O Δz utilizado é um percentual do desvio padrão de cada VA. Uma superfície de resposta de

segunda ordem é construída em torno de cada ponto de projeto. Esta superfície é composta pela Hessiana e por um vetor gradiente, também calculado por diferenças finitas centrais.

A aproximação de segunda ordem é feita. Os auto-vetores da Hessiana são utilizados para construção do parabolóide. Os índices de confiabilidade são atualizados em função da P_f de segunda ordem.

Limites bimodais linearizados para a P_f do componente (múltiplos modos de falha) são calculados.

A simulação de Monte Carlo é realizada utilizando as superfícies de resposta construídas, com funções de amostragem centradas nos pontos de projeto. Com este esquema de amostragem, a simulação é feita principalmente em torno dos pontos onde as superfícies de resposta foram construídas. O uso de amostragem por importância permite reduzir muito o número necessário de simulações e o erro estatístico da simulação.

A simulação de Monte Carlo representa uma importante melhora para os resultados. Em primeiro lugar, a simulação não é suscetível a expressão analítica da equação de estado limite, como o resultado de SORM. Em segundo lugar, a simulação feita utilizando as superfícies de resposta, para múltiplos modos de falha, equivale a uma aproximação de segunda ordem *nva-modal* (considerando todas as possibilidades de combinações de modos de falha), o que é uma grande melhora em relação a aproximação linear bimodal.

Capítulo 2

OPERAÇÃO CONJUNTA DO ANSYS - ACE-Pro

O cálculo de confiabilidade pelo ACE-Pro a partir do ANSYS pode ser dividido nas seguintes etapas:

1. Definir um parâmetro para cada VA, um parâmetro para cada equação de estado limite do problema e outro para a função objetivo. Os parâmetros devem ser definidos antes do início da construção do modelo (comando /PREP7), para que seu valor possa ser alterado a cada nova iteração. Atribuir um valor inicial para cada VA. Recomenda-se que seja o ponto médio.
2. Construir o modelo parametrizado (comando /PREP7), utilizando os parâmetros para definir a geometria, carregamentos e condições de contorno. O modelo do componente é construído da mesma forma como seria construído se utilizado o algoritmo de otimização do ANSYS [5].
3. Obter a solução do problema (comando /SOLU).
4. Etapa de pós processamento (comando /POST1):
 - (a) Recuperar os valores necessários para a definição das equações de estado limite (deslocamentos, deformações ou tensões calculadas).
 - (b) Definir as equações de estado limite.
 - (c) Definir a função objetivo. A função objetivo não é utilizada pelo ACE-Pro, mas deve ser definida. A função objetivo do problema de confiabilidade é $\sqrt{\mathbf{z}^T \cdot \mathbf{z}}$.
5. Declaração das variáveis de otimização (comando /OPT):

- (a) As VA são declaradas como variáveis de projeto ou *design variables*¹, (comando OPVAR);
 - (b) as equações de estado são declaradas como variáveis de estado ou *state variables*²;
 - (c) a função objetivo é declarada como uma *objective function*.
6. Gravar a seqüência de comandos executados até esta etapa em um arquivo texto (comando OPCOPY). Este arquivo será utilizado pelo ANSYS para reconstruir o modelo e obter a solução para cada novo ponto calculado pelo ACE-Pro.
 7. Definir a opção pelo algoritmo de otimização do usuário (comando OPTYPE):
 - (a) definir o número máximo de iterações (maxopt);
 - (b) definir as opções de análise, destacadas abaixo.
 8. Iniciar a execução do ACE-Pro através do comando OPEXE.
 9. Após a convergência do algoritmo para o primeiro modo de falha, repetir as etapas 7 e 8 especificando o segundo modo de falha, se este for o caso. O ACE-Pro guardará as informações necessárias ao cálculo dos limites bimodais da P_f .
 10. Após a convergência do algoritmo para o último modo de falha, os limites da P_f são automaticamente calculados.

Em anexo, apresenta-se a seqüência de comandos utilizados para resolver o exemplo 6.3.1 de [6].

As opções de análise definidas no comando OPTYPE podem ser as seguintes:

Posição	Conteúdo	Valor	Significado
opus(1)	modo de falha a ser analisado	mfcont	-
opus(2)	fator para análises comparativas	vários	-
opus(3)	opção por procura do ponto de projeto	0 / 1	sim / não
opus(4)	opção por construção da superfície de resposta	0 / 1	sim / não
opus(5)	opção por simulação	0 / 1	sim / não
opus(6)	opção por leitura do arquivo de dados	0 / 1	sim / não
opus(7)	opção de impressão de resultados	0 / 1	simples / completa
opus(8)	equação de estado a ser utilizada	0 / 1*	numérica / analítica

*Esta opção só é possível quando o programa está sendo utilizado independentemente do Ansys. Neste caso, o arquivo EQ_ESTADO.FOR deve ser atualizado e compilado junto com as demais rotinas. Na operação com o ANSYS, a opção 0 deve ser utilizada.

¹Importante: a declaração de variáveis de projeto no ANSYS, a definição dos parâmetros das distribuições no arquivo de entrada de dados, a definição do ponto inicial no XANSYS devem obedecer a mesma seqüência.

²Importante: a declaração de variáveis de estado no ANSYS e a definição das equações de estado no arquivo EQ_ESTADO.FOR devem obedecer a mesma seqüência.

As opções de análise podem ser indicadas através do comando OPTYPE ou através do arquivo de entrada de dados. Se o item 6 do vetor opus indicar a leitura do arquivo de dados (caso padrão), as opções de análise do arquivo de dados são consideradas. Em caso de recomeçar uma análise interrompida (ou concluída parcialmente), não é necessário ler o arquivo de dados nem recalculiar itens já calculados. Basta indicar as opções de análise desejadas (desde que os itens necessários realmente tenham sido calculados).

Os limites das variáveis de otimização declaradas no ANSYS podem ser bem amplos, para não interferirem no algoritmo de otimização do ACE-Pro. Os limites considerados pelo ACE-Pro são definidos pelas FDP marginais das VA. As tolerâncias declaradas para as variáveis de estado e função objetivo também não são utilizadas.

A cada novo ponto calculado, a subrotina USEROP.F devolve o comando ao ANSYS, que executa uma seqüência de análise (etapas 2, 3, 4 e 5 acima), avaliando as equações de estado no ponto calculado. Em seguida, a subrotina USEROP.F é chamada novamente e os cálculos prosseguem, até a convergência ou até que o número máximo de iterações seja atingido. Como exemplo, no cálculo do gradiente, após determinado o ponto $\mathbf{z} + \Delta\mathbf{z}(i)$, o controle é retornado ao ANSYS, que avalia a equação de estado neste ponto, fornecendo o valor de $g(\mathbf{z} + \Delta\mathbf{z}(i))$ à rotina USEROP.F na próxima chamada esta rotina.

Os resultados são gravados no arquivo DEBUG.TXT.

2.1 Arquivo de entrada de dados CONFI.TXT

A entrada de dados para a análise probabilística é feita através do arquivo CONFI.TXT. Demais dados necessários, como o ponto inicial, são fornecidos através do ANSYS.

A entrada de dados é feita através de palavras chave, que não devem ser alteradas. A ordem do conteúdo do arquivo de entrada pode ser alterada, mas entre a palavra chave e os dados correspondentes nada deve ser alterado. Os dados são separados por espaço, podendo-se opcionalmente utilizar vírgulas e espaços. Os valores podem ser escritos em notação normal ou de engenharia.

Em seguida, são apresentadas os campos de entrada de dados do arquivo. Os dados utilizados como exemplo correspondem ao exemplo 6.3.1 de [6]. As palavras chave estão em negrito.

***TITULO:**

10. PROBLEMA DA VIGA ENGASTADA

Indicação do título do problema

***NUMERO_VA:**

5

Número de variáveis aleatórias do problema. Este número deve necessariamente coincidir com o número de variáveis de projeto definidas no módulo de otimização do ANSYS.

***NUMERO_FEL:**

1

Número de funções de estado limite do problema. Este número deve necessariamente coincidir com o número de variáveis de projeto definidas no módulo de otimização do ANSYS.

***DESCRICAO_VA:**

```

2 M S 1.15 0.0333 0.0 0.0
2 M S 60.0 0.60 0.0 0.0
2 M R 4.00 0.12 0.0 0.0
2 M R 1.00 0.03 0.0 0.0
2 M R 3600.0 300 0.0 0.0
    
```

Descrição das variáveis aleatórias do problema. A forma de descrição é a seguinte:

Item	Notação
Código da distribuição	0 - 13*
Dados de entrada (momentos / parâmetros)	M / P
Característica da VA (resistência / solicitação)	R / S
Média / parâmetro 1	μ / P_1^*
Desvio padrão / parâmetro 2	σ / P_2^*
Parâmetro 3	P_3^*
Parâmetro 4	P_4^*

* conforme apêndice A.

***CORRELACAO_VA:**

```

0.0
0.5 1.0
0.0 0.0 1.0
0.0 0.0 0.0 1.0
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0
    
```

Indicação dos coeficientes de correlação entre as variáveis aleatórias. Apenas a triangular inferior da matriz de correlação precisa ser informada. Se as variáveis não forem correlacionadas, basta colocar um valor nulo para o primeiro elemento da matriz. Cuidado: coeficientes de correlação muito próximos de 1.0 ou -1.0 podem causar problemas na rotina JACOBIANO.FOR, devido ao cálculo dos coeficientes de correlação equivalentes. Estes coeficientes podem ser um pouco maiores do que os originais, mas não podem ultrapassar a unidade.

***ANAL_OPT:**

1, 0, 1, 1, 0, 1

Opções de análise:

Item	Notação*
Cálculo do ponto de projeto	0 / 1
Construção da superfície de resposta	0 / 1
Aproximação de primeira ordem da P_f	0 / 1
Aproximação de segunda ordem da P_f	0 / 1
Cálculo dos limites bimodais da P_f	0 / 1
Simulação de Monte Carlo	0 / 1

*0 = não efetuar; 1 = efetuar.

***DESPO_CALC:**

0, 0.00001, 1, 1, 0.5

Opções do algoritmo de procura do ponto de projeto.

Item	Notação	Significado
Critério de parada do alg. otimização	0	passo dado em \bar{Y}
	1	variação em β_{HL}
	2	$\mathbf{y} \parallel \nabla g_{\mathbf{y}}$
	3	passo em \mathbb{Z}
Tolerância de convergência	10^{-2} a 10^{-8}	depende do critério de parada
Descorrelacionamento das VA	1	decomposição de Choleski
	2	vetores próprios da matriz de corr.
Utilizar algoritmo modificado HLRF-M	0 / 1	não / sim
Redução mínima na função mérito	0.5 a 0.9	valores típicos utilizados

***RSM_CALC:**

0.1

Fator do desvio padrão (f) a ser utilizado como $\Delta \mathbf{z}$ no cálculo da hessiana: $\Delta \mathbf{z}(i) = +f \cdot \sigma_{zi}$. Varia tipicamente entre 0.01 e 1.0. Os resultados são independentes deste fator para uma ampla faixa de variação do mesmo.

***SENSIB_AN:**

0, 0.1

Opções para análise de sensibilidade:

Item	Notação	Significado
Eliminar variáveis em função da sua importância	0 / 1	não / sim
Fator de sensibilidade crítico para eliminação de VA	0.1 a 0.0001	-

***SIMULACAO:**

5000, 111111, 0

Opções para simulação de Monte Carlo:

Item	Notação
Número de simulações	3 a $5,0 \cdot 10^5$
Semente do gerador	número impar grande
Nº de funções de amostragem (nfa)	0, 1 ou nfel *

*Significado no nfa:

0 = nenhuma função de amostragem (simulação simples);

1 = amostragem no ponto de projeto mais importante;

nfel = uma função de amostragem por ponto de projeto (o ACE-Pro elimina os pontos de projeto não importantes).

Capítulo 3

DESCRIÇÃO DAS ROTINAS IMPLEMENTADAS

3.1 Visão geral das rotinas

O fato de o ACE-Pro ter sido desenvolvido como um conjunto de subrotinas para o programa ANSYS trouxe uma série de implicações na maneira como estas subrotinas foram programadas. A principal implicação é a de que não é possível "chamar" uma subrotina de avaliação das equações de estado assim que um novo ponto é calculado. Afinal, quem faz esta avaliação é o próprio ANSYS, que é quem "chamada" a subrotina de otimização. Assim, toda a vez que se torna necessário avaliar as equações de estado, é necessário percorrer até o final das rotinas do ACE-Pro e fornecer o ponto calculado ao ANSYS, interrompendo a seqüência normal destas rotinas. Após a seqüência de análise, o ANSYS chama novamente a subrotina USEROP.F retornando os valores de $g(\mathbf{z})$ calculados. Então, é necessário voltar ao ponto onde a execução das rotinas do ACE-Pro foi interrompida para completar os cálculos. Para se conseguir esta atuação, utiliza-se variáveis de controle, que controlam quais as operações que devem ser executadas e quais não. Estas variáveis são contadores (tipo inteiro) ou variáveis lógicas (falso/verdadeiro). As variáveis de controle, bem como as demais variáveis cujo valor deve ser mantido de uma chamada à subrotina até a próxima, são salvas na memória do computador através da função SAVE.

Infelizmente, este procedimento torna a lógica das subrotinas bastante complicada e dificulta o seu aproveitamento em outros programas. O programa ACE-Pro consegue utilizar as mesmas subrotinas porque ele imita a operação do ANSYS, avaliando equações de estado analíticas ao invés de executar a seqüência de análise de elementos finitos realizadas pelo ANSYS.

Uma alternativa para esta solução adotada, apresentada no capítulo 5, seria executar o ANSYS em modo *batch*, a partir do programa de confiabilidade, fazendo a troca de informações necessárias através de arquivos texto. Esta alternativa teria a vantagem de permitir

uma programação mais lógica das subrotinas bem como evitaria a necessidade de gerar uma versão personalizada ("customizada ") do ANSYS. A execução do programa, neste caso, seria bem mais demorada. Esta opção de solução não foi estudada mais a fundo por falta de informação nos manuais do ANSYS [3].

No anexo B é apresentado um sumário das rotinas utilizadas pelo ACE-Pro, indicando código, nome, e função de cada rotina. O código ACE indica rotinas desenvolvidas especialmente para o ACE-Pro. As rotinas ACE mais importantes são apresentadas na seqüência. O código CPE indica rotinas da biblioteca da disciplina "Confiabilidade em Projetos de Engenharia", desenvolvida na UFRGS (referência [8]). As rotinas IMSL pertencem à biblioteca Standart da Microsoft. Nos anexos B e C são apresentados um sumário das rotinas utilizadas no ACE-Pro e fluxogramas indicando a subordinação das mesmas.

3.2 Descrição das subrotinas mais importantes

3.2.1 Rotinas principais

ACE_PRO.FOR

Esta rotina foi criada inicialmente para facilitar o desenvolvimento das demais subrotinas. Ele permite criar uma versão executável do ACE-Pro, independente do ANSYS, a qual pode ser utilizada para verificar os efeitos de alterações no programa, evitando o demorado processo de "linkagem" ao ANSYS. Na prática, este programa pode ser utilizado para resolver problemas com equação de estado analítica (a solução destes problemas também pode ser feita de dentro do ANSYS, mesmo sem a análise de um modelo de EF).

A rotina simula as operações realizadas pelo ANSYS entre chamadas subseqüentes à subrotina USEROP.F. Ao invés da solução do modelo de EF, o programa faz uma chamada à subrotina EQ_ESTADO.FOR, a qual avalia as equações de estado do problema. Para a passagem de parâmetros entre ACE_PRO.FOR e USEROP.F é utilizado um bloco comum, semelhante ao bloco comum que o ANSYS utiliza para passar valores para a rotina USEROP.F.

Esta rotina:

1. determina o ponto inicial;
2. avalia $g(\mathbf{z})$ no ponto inicial;
3. escreve \mathbf{z} e $g(\mathbf{z})$ para o bloco comum;
4. enquanto for necessário:
 - (a) chama USEROP.F;

- (b) avalia $g(\mathbf{z})$ no novo ponto calculado;
- (c) escreve $g(\mathbf{z})$ para o bloco comum;

Na resolução de um novo problema, os dados de análise (vetor opus) e o ponto inicial¹ devem ser alterados e o programa deve ser compilado novamente.

EQ_ESTADO.FOR

Esta subrotina avalia as equações de estado do problema quando utilizando o programa principal ACE-PRO.FOR. Esta rotina também deve ser alterada² sempre que se iniciar a solução de um novo problema. Esta rotina recebe um vetor de projeto $dv_x(ntdv)$ e avalia as equações de estado neste ponto, retornando o vetor $fel(ntsv+1)$. Cada componente deste vetor corresponde ao valor da equação de estado correspondente. Valores negativos de alguma das equações de estado indicam falha do componente segundo o respectivo modo de falha. O último termo do vetor fel é o menor valor dentre as equações de estado avaliadas. Este valor é utilizado pela rotina de simulação para verificar se houve falha da estrutura, dentro do conceito de componente estrutural: o componente está em falha se falhar por qualquer um dos seus modos de falha.

USEROP.F

Esta subrotina faz a interface entre o ANSYS e todas as demais subrotinas do ACE-Pro. Ela também pode ser linkada ao programa ACE_PRO.FOR, conforme descrito acima. É uma versão customizada da rotina original, fornecida pela SASI, que permite a programação de um algoritmo de otimização próprio do usuário (capítulo 5).

A rotina fornece acesso às variáveis de otimização do ANSYS através de um bloco comum chamado CMOPT. A principal destas variáveis é a matriz $optvar(maxopt,maxdv)$, onde os valores das variáveis de otimização são armazenados. Cada linha corresponde a um ciclo de otimização. As variáveis de otimização são armazenadas por colunas nesta seqüência: variáveis de estado, variáveis de projeto, função objetivo e demais parâmetros do problema.

O *common deck* IMPCOM.INC, incluído na compilação da subrotina, fornece as diretrizes de compilação. O arquivo CMOPT.INC possui a declaração do bloco comum para linkagem ao ANSYS. A subrotina ANSERR (*external*) permite enviar mensagens de erro para o usuário do ANSYS, durante a execução do ACE-Pro.

A linkagem ora com ANSYS ora com ACE_PRO.FOR exige algumas alterações nas linhas iniciais desta subrotina. Na linkagem ao ACE-Pro, a declaração do "bloco comum

¹Importante: a definição do ponto inicial no XANSYS, a declaração de variáveis de estado no ANSYS e a descrição das distribuições no arquivo de entrada de dados devem obedecer a mesma seqüência.

²Importante: a declaração de variáveis de estado no ANSYS e a definição das equações de estado no arquivo EQ_ESTADO.FOR devem obedecer a mesma seqüência.

para ACE-Pro” deve ser ativada, enquanto que os ”arquivos para linkagem ao ANSYS” bem como a primeira linha da subrotina (*DECK, USEROP.....) devem ser transformadas em comentários. Na linkagem ao ANSYS a linha inicial e os ”arquivos para linkagem ao ANSYS” devem ser ativados e o ”bloco comum para ACE-Pro” é desativado.

As operações realizadas pelo USEROP.F são:

1. leitura do arquivo de dados;
2. verificação e complementação de dados;
3. cálculo da P_f e construção da superfície de resposta para cada modo de falha individual;
4. cálculo dos limites bi-modais da P_f do componente.
5. simulação de Monte Carlo utilizando a superfície de resposta e os pontos de projeto calculados.

A cada novo ponto calculado pela subrotina de otimização, a rotina USEROP.F retorna o comando para o ANSYS, que executa uma seqüência de análise e chama a rotina novamente, fornecendo o valor das equações de estado calculadas.

3.2.2 Rotinas auxiliares

ENTRA_DADOS.FOR

Esta rotina lê os dados do problema do arquivo CONFI.TXT. Infelizmente, a tentativa de executar um *prompt* do DOS para alteração do nome do arquivo de estrada de dados durante a execução do ANSYS causa erro na execução do mesmo. Na seção 2.1 é apresentada uma descrição completa do arquivo de entrada de dados e de como os dados são lidos.

VERIF_DATA.FOR

Esta rotina verifica os dados de entrada e os complementa, se necessário. Se o usuário fornece os parâmetros das distribuições, a rotina calcula o primeiro e segundo momento. Se fornecidos os momentos, os parâmetros é que são calculados.

Se alguma das *ntdv* variáveis do problema for considerada como determinística, esta variável é eliminada nesta subrotina, restando *nva* variáveis aleatórias. A variável determinística deve ser eliminada do vetor *dv_xo* lido inicialmente e deve ser incorporada novamente na saída da subrotina, para que o ANSYS receba um vetor com a dimensão original. Se alguma variável é eliminada, a rotina atualiza os vetores e matrizes de propriedades.

CALC_MOM.FOR

Rotina que calcula os momentos das VA caso o usuário tenha fornecido seus parâmetros. Utiliza as seguintes fórmulas:

Código	Média - μ	Desvio Padrão - σ
1	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
2	P_1	P_2
3	$e^{(\lambda+0.5\xi^2)}$	$\mu\sqrt{(e^{\xi^2} - 1)}$
4	$\frac{1}{\lambda} + t$	$\frac{1}{\lambda}$
5	$\eta \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} + t$	$\eta \cdot \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}$
6	P_1	P_2
7	$y_1 - \frac{\gamma}{\alpha_1}$	$\frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{1}{\alpha_1}$
8	$y_n - \frac{\gamma}{\alpha_n}$	$\frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{1}{\alpha_n}$
9	$\eta \cdot \Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)$	$\eta \cdot \sqrt{\left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\right]}$
10	$\eta \cdot \Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)$	$\eta \cdot \sqrt{\left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\right]}$
11	$\gamma_1 + (\eta - \gamma_1) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$	$(\eta - \gamma_1) \cdot \sqrt{\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]}$
12	$\gamma_n + (\gamma_n - \eta) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$	$(\gamma_n - \eta) \cdot \sqrt{\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]}$

SENSIB_AN.FOR

Analisa o vetor gradiente na primeira iteração e os fatores de sensibilidade das VA. Se alguma VA não se mostrar importante para a o modo de falha em questão (dificilmente um modo de falha depende de todas as VA do problema, principalmente no caso de múltiplos modos de falha), esta variável é eliminada.

A informação de que uma VA deve ser eliminada é armazenada no vetor vpen. Ao ser eliminada, a VA recebe o valor médio. Este valor é guardado em vres para que, ao término da subrotina USEROP.FOR, um vetor de projeto completo (na dimensão original) possa ser enviado ao ANSYS (rotina AUMENTA_X). Ao eliminar variáveis do problema, a dimensão do vetor de projeto e dos vetores e matrizes de propriedades é reduzida (rotina RED_DIM).

RED_DIM.FOR

Reduz a dimensão dos vetores de projeto e vetores e matrizes de propriedades, caso alguma VA tenha sido considerada não importante para o modo de falha em questão.

AUMENTA_X.FOR

Reestabelece a dimensão original do vetor dv_x para retorná-lo completo ao ANSYS. Utiliza o vetor $vpen$ para verificar se alguma VA foi eliminada e, em caso positivo, atribui a esta VA o valor armazenado no vetor $vres$.

3.2.3 Rotinas para modos de falha individuais

SINGLE_FAIL.FOR

Esta rotina é a responsável pelo cálculo da P_f para modos de falha individuais. As atividades da rotina são:

1. cálculo do primeiro gradiente da equação de estado;
2. análise de sensibilidade das VA. Nesta etapa, VA de pouca importância podem ser eliminadas, reduzindo-se a dimensão do vetor de projeto;
3. procura do ponto de projeto;
4. estimativa da P_f por FORM;
5. aumento dos vetores para a dimensão original do problema;
6. construção de uma superfície de resposta no ponto de projeto encontrado, nas dimensões originais do problema (opcional);
7. estimativa da P_f por SORM (opcional);

PF_SORM.FOR

Esta rotina calcula a P_f por aproximação de segunda ordem da equação de estado. Uma aproximação de primeira ordem da P_f é feita inicialmente. Esta P_f é atualizada levando-se em conta as curvaturas principais da equação de estado limite calculadas no ponto de projeto. As curvaturas são obtidas da resolução do problema de valores próprios da matriz Hessiana (derivadas de segunda ordem da equação de estado).

Etapas:

1. mapeamento da Hessiana de $Z \rightarrow Y$;
2. cálculo dos autovalores e autovetores da Hessiana;
3. transformação da Hessiana para a base formada pelos autovetores;
4. as curvaturas do parabolóide são igualadas as curvaturas da Hessiana;

5. aproximação de primeira ordem da P_f ;
6. atualização da P_f por aproximação assintótica (através das curvaturas principais).

3.2.4 Rotinas para cálculo do ponto de projeto

DESPO_CALC.FOR

Esta é a rotina de otimização, que resolve o problema:

$$\begin{aligned} \text{minimize } \mathbf{d} &= \sqrt{\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{y}} \\ \text{sujeito a } g(\mathbf{y}) &= 0 \end{aligned}$$

através dos algoritmos de HLRF ou HLRF-M. A rotina faz um mapeamento das VA do espaço de projeto \mathbb{Z} para o espaço normal padrão \mathbb{Y} . A otimização é feita em \mathbb{Y} , mas gradientes e a equação de estado são avaliados diretamente em \mathbb{Z} . A solução do problema de otimização consiste nas seguintes etapas:

1. escolha de um ponto inicial qualquer, não necessariamente sobre a equação de estado limite (usualmente o ponto médio);
2. cálculo da matriz Jacobiana, que faz o mapeamento de $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Y}$, no ponto inicial: $\mathbf{J} = \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{D}^{-1}$;
3. mapeamento do ponto inicial: $\mathbf{y} = \mathbf{J} \cdot \{\mathbf{z} - \mathbf{M}^{neq}\}$;
4. cálculo do gradiente:
 - (a) cálculo das derivadas parciais de $g(\mathbf{z})$ no espaço de projeto \mathbb{Z} ;
 - (b) mapeamento do gradiente de $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Y}$: $\nabla g_{\mathbf{y}} = \mathbf{J}^{-1T} \cdot \nabla g_{\mathbf{z}}$;
 - (c) cálculo dos fatores de sensibilidade. Estes fatores podem ser utilizados para eliminar do problema VA cujo comportamento aleatório tenha pouca influência no cálculo da P_f .
5. cálculo da direção de procura pelo algoritmo de HLRF;
6. cálculo do novo ponto: $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \text{passo} \cdot \mathbf{d}_k$
7. verificação do ponto calculado:
 - (a) mapeamento do ponto de $\mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$;
 - (b) verificação das restrições das VA. Se o ponto calculado ultrapassou alguma restrição imposta pelas FDP marginais das VA, o valor desta VA não é atualizado.

8. cálculo do índice de confiabilidade no ponto calculado: $\beta = \sqrt{\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{y}}$
9. verificação do critério de convergência. Se o critério é satisfeito, o algoritmo é interrompido. Reconstitui-se a dimensão original dos vetores de projeto e gradiente, para fins de cálculo dos limites da P_f . Em caso contrário, retorna-se ao item 2 até que a convergência seja atingida.

Havendo a opção pelo algoritmo de HLRF-M, após a etapa 3 e após calculado o primeiro ponto, faz-se a verificação do decréscimo da função mérito. Se o decréscimo é suficiente, calcula-se o novo gradiente e a nova direção de procura (itens 4 até 9). Se o decréscimo não é suficiente, ignora-se as etapas 4, 5 e 6 e calcula-se mais um ponto, utilizando a direção de procura calculada anteriormente, porém aumentando o passo do algoritmo de HLRF. O algoritmo segue a partir da etapa 7.

GRAD_DF_DP.FOR

Esta rotina faz o cálculo do vetor gradiente da equação de estado por diferenças finitas uni-laterais. A rotina calcula o novo ponto e finaliza, permitindo ao ANSYS efetuar uma seqüência de análise e avaliar o valor da equação de estado no ponto. A operação da subrotina pode ser dividida nas seguintes etapas:

1. cálculo do ponto $\mathbf{z} = \mathbf{z} + \Delta \mathbf{z}(i)$, $i = 1$;
2. cálculo da derivada parcial e cálculo do próximo ponto:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{g(\mathbf{z} + \Delta \mathbf{z}(i)) - g(\mathbf{z})}{\Delta \mathbf{z}(i)}$$

$$i = i + 1$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{z} + \Delta \mathbf{z}(i)$$

3. repetição da etapa 2 para todas as VA.

Os $\Delta \mathbf{z}$ são calculados da seguinte forma:

$$\Delta \mathbf{z}(i) = +f \cdot \sigma_i \text{ se a VA for de solicitação;}$$

$$\Delta \mathbf{z}(i) = -f \cdot \sigma_i \text{ se a VA for de resistência.}$$

onde o fator f usualmente é unitário.

GRAD_DF_DX.FOR

Esta rotina calcula os demais gradientes em função do passo dado na iteração anterior. Usualmente, é utilizado 10% do passo anterior de cada VA:

$$\Delta \mathbf{z}(i) = 0.1 \cdot (\mathbf{z}(i) - \mathbf{z}_a(i))$$

Este procedimento é uma tentativa de avaliar gradiente no ponto para o qual se supõe que o algoritmo esteja evoluindo. Isto evita erros provocados por instabilidade numérica ou por uma equação de estado com "ruído".

P_HLRF.FOR

Calcula novo ponto pelo algoritmo HLRF:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + passo \cdot \mathbf{d}_k$$

onde a direção de procura é dada por:

$$\mathbf{d}_k = \frac{\mathbf{y}_k \cdot \nabla g(\mathbf{y}_k) - g(\mathbf{y}_k)}{\nabla g(\mathbf{y}_k)^T \cdot \nabla g(\mathbf{y}_k)} \cdot \nabla g(\mathbf{y}_k) - \mathbf{y}_k$$

e o passo é unitário.

P_HLRF_M.FOR

Calcula novo ponto pelo algoritmo de HLRF-M. A subrotina é dividida em duas partes. A primeira verifica se houve decréscimo suficiente na função mérito. A segunda calcula o novo ponto, aumentando o passo em relação ao passo do algoritmo HLRF. A procura linear só ocorre se o decréscimo na função objetivo não houver sido suficiente. A redução mínima requerida para a função mérito pode variar entre 0.5 e 0.9.

MERITO.FOR

Subrotina que avalia a função mérito:

$$m(\mathbf{y}_k) = \frac{1}{2} \left| \mathbf{y}_k - \frac{\mathbf{y}_k \cdot \nabla g(\mathbf{y}_{k-1})}{|\nabla g(\mathbf{y}_{k-1})|^2} \cdot \nabla g(\mathbf{y}_{k-1}) \right|^2 + \frac{1}{2} \cdot c \cdot g(\mathbf{y}_k)^2$$

A rotina também verifica se a procura linear deve prosseguir ou não.

A constante c pode variar entre 1 e 10^6 com pouca influência na convergência do algoritmo.

PENALIZA_X.FOR

Rotina que verifica se o novo ponto calculado não ultrapassou os limites estabelecidos pelas FDP marginais das VA. Se isto acontecer, a VA correspondente não é atualizada, permanecendo com o valor da iteração anterior. As seguintes VA são limitadas:

Código	Lim. Inf.	Lim. Sup.
1	a	b
3	0	-
4	t	-
5	t	-
11	γ_1	-
12	-	γ_n

CALC_APROX.FOR

Estima a convergência do algoritmo através de um dos seguintes critérios:

Critério	Descrição
1	passo dado em \mathbb{Y}
2	variação em β
3	paralelismo entre ∇g_y e \mathbf{y}
4	passo dado em \mathbb{Z}

3.2.5 Rotinas para cálculo do Jacobiano

Jacobiano.FOR

Esta subrotina calcula a matriz de mapeamento de $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Y}$ e a sua inversa. O mapeamento é feito através do descorrelacionamento das VA e do cálculo de distribuições normais equivalentes. Os parâmetros das distribuições normais equivalentes são calculados para cada novo ponto calculado pelo algoritmo de otimização. As matrizes para descorrelacionamento são calculadas apenas na primeira chamada à subrotina, ou se houver eliminação de alguma VA e conseqüente redução na dimensão das matrizes do problema. Este cálculo pode ser feito de duas formas distintas: através da decomposição de Choleski da matriz de correlação ou através da matriz de vetores próprios da matriz de correlação. O cálculo da matriz de mapeamento envolve as seguintes etapas:

1. cálculo dos parâmetros da distribuição normal equivalente para cada VA;
2. se as VA forem correlacionadas:
 - (a) cálculo dos coeficientes de correlação equivalentes para as distribuições normais equivalentes;

(b) cálculo das matrizes de descorrelacionamento por:

i. decomposição de Choleski da matriz de correlação ($\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T = \mathbf{R}$) e inversão de \mathbf{L} ou:

ii. cálculo dos vetores próprios (\mathbf{Q}) de \mathbf{R} (esta opção não está funcionando);

3. montagem das matrizes de transformação diagonais para o caso sem correlação:

$$\mathbf{J} = \mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sigma_{ij} \end{bmatrix}, i = j; \quad \mathbf{J}^{-1} = \mathbf{D} = [\sigma_{ij}], i = j$$

4. se as VA forem correlacionadas, montagem das matrizes de transformação:

i. $\mathbf{J} = \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{D}^{-1}$, $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{L}$ ou:

ii. $\mathbf{J} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}^{-1}$, $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T$.

NORMAL_EQ.FOR

Subrotina que calcula os parâmetros das distribuições normais equivalentes. Os parâmetros são calculados de forma que os conteúdos de probabilidade das duas distribuições no ponto em questão sejam iguais:

$$f_{Z_i}^{neq}(z_i^*) = f_{Z_i}(z_i^*)$$

$$F_{Z_i}^{neq}(z_i^*) = F_{Z_i}(z_i^*)$$

Se a VA é normal, os parâmetros não precisam ser calculados. Se a VA é log normal, os parâmetros são calculados através da expressão analítica:

O cálculo dos parâmetros para as demais VA envolve as seguintes etapas:

Para cada VA:

1. cálculo da FDP da VA no ponto: $f_{Z_i}(z_i^*)$

2. cálculo da FPA da VA no ponto: $F_{Z_i}(z_i^*)$

3. cálculo da inversa da FPA normal padrão: $y_i^* = \Phi^{-1}(F_{Z_i}(z_i^*))$.

4. cálculo do desvio padrão da distribuição normal equivalente: $\sigma_{Z_i}^{neq} = \frac{\phi(y_i^*)}{f_{Z_i}(z_i^*)}$

5. cálculo da média normal equivalente: $\mu_{Z_i}^{neq} = z_i^* - y_i^* \cdot \sigma_{Z_i}^{neq}$

6. cálculo do coeficiente de dispersão normal equivalente.

3.2.6 Rotinas para construção da superfície de resposta

RSM.FOR

Rotina responsável pela construção da superfície de resposta no ponto de projeto. A superfície de resposta é obtida através de uma expansão de segunda ordem da equação de estado do problema em torno do ponto de projeto z^* :

$$g_{RSM}(z) = (z - z^*) + (z - z^*)^T \cdot \nabla g_z(z)|_{z=z^*} + (z - z^*)^T \cdot \mathbf{H}g_z(z)|_{z=z^*} \cdot (z - z^*) \approx g(z)$$

A rotina executa as seguintes atividades:

1. verifica se o ponto de projeto já foi calculado;
2. avalia $g(z)$ nos pontos desejados (através da rotina RSM_POINTS.FOR);
3. calcula o gradiente da equação de estado limite $\nabla g_z(z)$ por diferenças finitas centrais;
4. calcula a Hessiana $\mathbf{H}g_z(z)$;
5. armazena os valores calculados para utilização posterior.

Hessiana.FOR

Calcula a matriz das derivadas de segunda ordem de $g(z)$ por diferenças finitas centrais. Avalia a $g(z)$ em $2 \cdot nva^2$ pontos. Os Δz utilizados são um percentual do desvio padrão de cada VA ($\Delta z(i) = f \cdot \sigma_{zi}$).

Os termos da diagonal principal são calculados por:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z_i^2} = \frac{g(z + \Delta z(i)) - 2 \cdot g(z) + g(z - \Delta z(i))}{\Delta z(i)^2}$$

o que exige a avaliação de $g(z)$ em 2 pontos adicionais. Os termos fora da diagonal principal são calculados por:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_j} = \frac{g(z + \Delta z(i) + \Delta z(j)) - g(z - \Delta z(i) + \Delta z(j))}{4 \cdot \Delta z(i) \cdot \Delta z(j)} + \frac{-g(z + \Delta z(i) - \Delta z(j)) + g(z - \Delta z(i) - \Delta z(j))}{4 \cdot \Delta z(i) \cdot \Delta z(j)}$$

o que exige a avaliação de $g(z)$ em 4 pontos.

Como a rotina deve ser finalizada para que o ANSYS avalie $g(z)$ nos pontos estabelecidos, as variáveis $i, j, i2$ e $j2$, que controlam a seqüência de operações, devem ser salvas de uma chamada a subrotina até a seguinte.

3.2.7 Rotinas para falha bi-modal

FALHA_BIMODAL.FOR

Calcula a P_f para um componente estrutural com mais de um modo de falha, através de uma aproximação linear das equações de estado limite nos respectivos pontos de projeto. A P_f calculada é dita bi-modal porque considera a ocorrência conjunta de falha por 2 modos, mas não mais do que 2. Como a probabilidade de ocorrência conjunta não pode ser calculada exatamente, apenas limites inferior e superior da P_f podem ser estabelecidos.

Devido à aproximação bi-modal, convém que as equações de estado limite do problema sejam bastante distintas. Por exemplo, considerar uma equação de estado limite para falha por saturação da tensão axial e outra para saturação da tensão de Von Misses pode levar a grandes erros de aproximação. O ideal é que as equações de estado limite estejam relacionadas a critérios de falha diferentes, como escoamento, rigidez e estabilidade.

Convém considerar ainda que, a medida que o coeficiente de correlação entre os modos de falha distintos se aproxima de 1.0 ou -1.0, o limite inferior torna-se mais próximo da P_f real. Se o coeficiente de correlação se aproxima de 0.0, então é o limite superior que fornece a melhor estimativa. O cálculo dos limites da P_f envolve as seguintes etapas:

1. ordenamento dos modos de falha e gradientes em ordem decrescente de P_f ;
2. cálculo dos coeficientes de correlação entre os modos de falha;
3. cálculo da probabilidade de ocorrência dos eventos A e B, segundo Ang [2];
4. cálculo da probabilidade de ocorrência conjunta (2 modos de falha);
5. cálculo dos limites bi-modais da P_f .

ORDENA_MF.FOR

Ordena os modos de falha em ordem decrescente de P_f . Ordena na mesma ordem as componentes do vetor beta e as linhas da matriz dos gradientes.

RHO_FIFJ.FOR

Calcula os coeficientes de correlação linearizados entre os modos de falha:

$$\rho_{ij} = \frac{\nabla g_i \cdot \nabla g_j}{|\nabla g_i| \cdot |\nabla g_j|}$$

PROB_AB.FOR

Calcula a probabilidade de ocorrência dos eventos A e B conforme Ang [2]:

$$\begin{aligned} p(A) &= \Phi(-\beta_i) \cdot \Phi\left(-\frac{\beta_j - \rho_{ij} \cdot \beta_i}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}}\right) \\ p(B) &= \Phi(-\beta_j) \cdot \Phi\left(-\frac{\beta_i - \rho_{ij} \cdot \beta_j}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}}\right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Os valores de $p(A)$ são armazenados na triangular inferior da matriz m_PAB . Os valores de $p(B)$ são armazenados na triangular superior. Os elementos da diagonal principal da matriz não são utilizados.

PROB_FIFJ.FOR

Calcula a probabilidade de ocorrência dos modos conjuntos de falha.

O valor é aproximado em função das probabilidades de A e B calculadas. Para fins de cálculo do limite inferior da P_f , este valor é calculado como:

$$p(F_i \cap F_j) = p(A) + p(B)$$

Sendo o evento F_i = falha em relação ao i-ésimo modo de falha. O valor da probabilidade conjunta é armazenado na triangular inferior da matriz m_PFIFJ .

Para fins de cálculo do limite superior da P_f , a probabilidade conjunta é calculada como:

$$p(F_i \cap F_j) = \max[p(A), p(B)]$$

Estes valores são armazenados na triangular superior da matriz m_PFIFJ . Os elementos da diagonal principal não são utilizados.

LIMINF_PF.FOR

Estimativa do limite bi-modal inferior da P_f , através da expressão:

$$P_{f1} + \max_{i,j} \left[\sum_{i=2}^k \left\{ P_{fi} - \sum_{j=1}^{i-1} (P(A_{ij}) + P(B_{ij})) \right\}; 0 \right]$$

LIMSUP_PF.FOR

Estimativa do limite bi-modal superior da P_f , através da expressão:

$$\sum_{i=1}^k P_{fi} - \sum_{i=2}^k \max_{i>j} [\max[P(A_{ij}), P(B_{ij})]]$$

3.2.8 Rotinas para simulação de Monte Carlo

SMC_ACE.FOR

Compatibiliza as rotinas da biblioteca ACE com as rotinas de simulação da biblioteca CPE.

A rotina:

1. cria vetores e matrizes de propriedades no formato utilizado pelas rotinas CPE;
2. no caso de amostragem por importância, verifica se os dados sobre o ponto de projeto já foram calculados;
3. no caso de uma equação de estado limite numérica, verifica se a superfície de resposta já foi construída;
4. passa os valores lidos no arquivo de entrada de dados para os vetores e matrizes utilizados pelas demais rotinas de simulação (rotinas CPE);
5. realiza a simulação de Monte Carlo simples, através da rotina SMC_SI.FOR (opcional);
6. se houver opção por amostragem por importância ou adaptividade, prepara a amostragem por importância através da rotina SMC_PREPAL.FOR;
7. realiza a simulação de Monte Carlo com amostragem por importância, se for o caso, através da rotina SMC_AI.FOR;
8. executa looping de amostragem (por importância) adaptativa, se for o caso.

Na amostragem adaptativa, a média, desvio padrão e matriz de correlação da função de amostragem são constantemente atualizados, através da análise estatística condicionada ao domínio de falha dos pontos gerados na iteração anterior.

SMC_SI.FOR

Executa a simulação de Monte Carlo simples:

1. gera vetores de números aleatórios segundo distribuição original;
2. avalia a ocorrência de falha para cada vetor simulado e em relação a cada modo de falha;
3. realiza as análises estatísticas:
 - (a) estima a P_f para cada modo de falha e para o componente;

- (b) verifica a qualidade dos números simulados;
- (c) realiza a análise condicionada ao domínio de falha para adaptividade, se for o caso.

A estimativa da P_f é feita por:

$$\bar{P}_f = \frac{\sum_{i=1}^N I_{[g(z_i)]}}{N}$$

SMC_PREPAI.FOR

Prepara a amostragem por importância:

1. obtém as estimativas iniciais da P_f individual, obtidas via FORM ou simulação simples;
2. verifica a importância de cada modo de falha, sinaliza a eliminação de modos de falha não importantes (vetor vpen);
3. calcula os pesos de amostragem;
4. divide o número de simulações segundo os pesos de amostragem;
5. constroe as funções de amostragem, através de:
 - (a) coordenadas do ponto de projeto calculadas por FORM (se primeira simulação com amostragem por importância);
 - (b) momentos estatísticos calculados através de análise condicionada ao domínio de falha na simulação simples (nas demais simulações).

Os pesos de amostragem são calculados por:

$$p_i = \frac{\Phi(-\beta_i)}{\sum_{i=1}^k \Phi(-\beta_i)}$$

SMC_AIFOR

Executa a simulação de Monte Carlo com amostragem por importância:

1. gera vetores de números aleatórios segundo função de amostragem;
2. avalia a ocorrência de falha para cada vetor simulado e em relação a cada modo de falha;
3. corrige a função indicadora em função dos pesos de amostragem $w_i = \frac{f_Z(z_i)}{h_Z(z_i)}$;

4. realiza as análises estatísticas:

- (a) estima a P_f para cada modo de falha e para o componente;
- (b) verifica a qualidade dos números simulados;
- (c) realiza a análise ponderada condicionada ao domínio de falha para adaptividade, se for o caso.

A estimativa da P_f é feita através de:

$$\overline{P_f} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N I'_{[g(\mathbf{z}_i)]} \cdot \frac{f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}_i)}{h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}_i)}$$

Capítulo 4

DESCRIÇÃO DAS DISTRIBUIÇÕES

4.1 Distribuição Uniforme

Funções de probabilidade:

$$f_Z(z) = \frac{1}{b-a}; \quad a \leq z \leq b$$
$$F_Z(z) = \frac{z-a}{b-a}; \quad a \leq z \leq b$$

Determinação dos momentos:

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$
$$\sigma = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Determinação dos parâmetros:

$$P_1 = a = \mu - \sqrt{3} \cdot \sigma$$
$$P_2 = b = \mu + \sqrt{3} \cdot \sigma$$

4.2 Distribuição Normal

Funções de probabilidade:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2}; \quad -\infty \leq z \leq \infty$$
$$F_Z(z) = \Phi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right); \quad -\infty \leq z \leq \infty$$

Determinação dos momentos:

$$\mu = P_1$$
$$\sigma = P_2$$

Determinação dos parâmetros:

$$P_1 = \mu$$

$$P_2 = \sigma$$

4.3 Distribuição Log-Normal

Funções de probabilidade:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\xi \cdot z \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(z) - \lambda}{\xi} \right)^2}; \quad 0 \leq z \leq \infty$$

$$F_Z(z) = \Phi \left(\frac{\ln(z) - \lambda}{\xi} \right); \quad 0 \leq z \leq \infty$$

Determinação dos momentos:

$$\mu = e^{(\lambda + 0.5\xi^2)}$$

$$\sigma = \mu \sqrt{(e^{\xi^2} - 1)}$$

Determinação dos parâmetros:

$$P_1 = \lambda = \ln(\mu) - 0.5 \cdot \xi^2$$

$$P_2 = \xi = \sqrt{\ln(1 + \delta^2)}$$

Determinação dos parâmetros da distribuição normal equivalente:

$$\mu^{neq} = z \cdot (1 - \ln(z) + \lambda)$$

$$\sigma^{neq} = z \cdot \xi$$

4.4 Distribuição Exponencial deslocada

Funções de probabilidade:

$$f_Z(z) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot (z-t)}; \quad t \leq z \leq \infty$$

$$F_Z(z) = 1 - e^{-\lambda \cdot (z-t)}; \quad t \leq z \leq \infty$$

Determinação dos momentos:

$$\mu = \frac{1}{\lambda} + t$$

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}$$

Determinação dos parâmetros:

$$P_1 = \lambda = \frac{1}{\sigma}$$

$$P_2 = t = \mu - \sigma$$

4.5 Distribuição Rayleigh deslocada

Funções de probabilidade:

$$f_Z(z) = \frac{(z-t)}{\eta^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-t}{\eta}\right)^2}; \quad t \leq z \leq \infty$$

$$F_Z(z) = 1 - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-t}{\eta}\right)^2}; \quad t \leq z \leq \infty$$

Determinação dos momentos:

$$\mu = \eta \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} + t$$

$$\sigma = \eta \cdot \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}$$

Determinação dos parâmetros:

$$P_1 = \eta = \frac{\sigma}{\sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}}$$

$$P_2 = t = \mu - \eta \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

4.6 Distribuição Logística

Funções de probabilidade:

$$f_Z(z) = \frac{e^{\frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(z-\mu)}{\sigma}}}{\left(1 + e^{\frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(z-\mu)}{\sigma}}\right)^2}; \quad -\infty \leq z \leq \infty$$

$$F_Z(z) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(z-\mu)}{\sigma}}}; \quad -\infty \leq z \leq \infty$$

Determinação dos momentos:

$$\mu = P_1$$

$$\sigma = P_2$$

Determinação dos parâmetros:

$$P_1 = \mu$$

$$P_2 = \sigma$$

4.7 Gumbel para mínimos (tipo I)

Se a cauda inferior da distribuição inicial Z apresenta taxa de crescimento exponencial, a distribuição dos mínimos de Z tende assintoticamente a uma distribuição de Gumbel.

Parâmetros da distribuição:

α_1 = parâmetro de forma;

y_1 = mínimo característico da distribuição inicial Z .

Funções de probabilidade:

$$\begin{aligned}f_{Z_1}(z) &= \alpha_1 \cdot e^{\alpha_1 \cdot (z-y)} \cdot e^{-e^{\alpha_1 \cdot (z-y)}}; & -\infty \leq z \leq \infty \\F_{Z_1}(z) &= 1 - e^{-e^{\alpha_1 \cdot (z-y)}}; & -\infty \leq z \leq \infty\end{aligned}$$

Determinação dos momentos:

$$\begin{aligned}\mu &= y_1 - \frac{\gamma}{\alpha_1} \\ \sigma &= \frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{1}{\alpha_1}\end{aligned}$$

onde: $\gamma = 0.577216$ (número de euler).

Determinação dos parâmetros:

$$\begin{aligned}P_1 &= \alpha_1 = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sigma} \\ P_2 &= y_1 = \mu + \frac{\gamma}{\alpha_1}\end{aligned}$$

4.8 Gumbel para máximos (tipo I)

Se a cauda superior da distribuição inicial Z apresenta taxa de decrescimento exponencial, a distribuição dos máximos de Z tende assintoticamente a uma distribuição de Gumbel.

Parâmetros da distribuição:

α_n = parâmetro de forma;

y_n = máximo característico da distribuição inicial Z .

Funções de probabilidade:

$$\begin{aligned}f_{Z_n}(z) &= \alpha_n \cdot e^{\alpha_n \cdot (z-y)} \cdot e^{-e^{\alpha_n \cdot (z-y)}}; & -\infty \leq z \leq \infty \\F_{Z_n}(z) &= 1 - e^{-e^{\alpha_n \cdot (z-y)}}; & -\infty \leq z \leq \infty\end{aligned}$$

Determinação dos momentos:

$$\begin{aligned}\mu &= y_n - \frac{\gamma}{\alpha_n} \\ \sigma &= \frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{1}{\alpha_n}\end{aligned}$$

onde: $\gamma = 0.577216$ (número de euler).

Determinação dos parâmetros:

$$P_1 = \alpha_n = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sigma}$$

$$P_2 = y_n = \mu + \frac{\gamma}{\alpha_n}$$

4.9 Frechet para mínimos (tipo II)

Se a cauda inferior da distribuição inicial Z apresenta taxa de crescimento polinômica, a distribuição dos mínimos de Z tende assintoticamente a uma distribuição de Frechet.

Parâmetros da distribuição:

β = parâmetro de forma;

η = mínimo característico da distribuição inicial Z .

Funções de probabilidade:

$$f_{Z_1}(z) = -\frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{\eta}{z}\right)^{\beta+1} \cdot e^{-\left(\frac{\eta}{z}\right)^\beta}; \quad -\infty \leq z \leq 0$$

$$F_{Z_1}(z) = 1 - e^{-\left(\frac{\eta}{z}\right)^\beta}; \quad -\infty \leq z \leq 0$$

Determinação dos momentos:

$$\mu = \eta \cdot \Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)$$

$$\sigma = \eta \cdot \sqrt{\left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\right]}$$

Determinação dos parâmetros:

$$P_1 = \eta = \frac{\mu}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)}$$

$$P_2 = \beta$$

O parâmetro de forma é determinado de forma iterativa através de:

$$1 + \delta^2 = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{2}{\beta}\right)}{\Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)}$$

4.10 Frechet para máximos (tipo II)

Se a cauda superior da distribuição inicial Z apresenta taxa de decrescimento polinômica, a distribuição dos máximos de Z tende assintoticamente a uma distribuição de Frechet.

Parâmetros da distribuição:

β = parâmetro de forma;

η = máximo característico da distribuição inicial Z .

Funções de probabilidade:

$$f_{Z_n}(z) = -\frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{\eta}{z}\right)^{\beta+1} \cdot e^{-\left(\frac{\eta}{z}\right)^\beta}; \quad -\infty \leq z \leq \infty$$

$$F_{Z_n}(z) = 1 - e^{-\left(\frac{\eta}{z}\right)^\beta}; \quad -\infty \leq z \leq \infty$$

Determinação dos momentos:

$$\mu = \eta \cdot \Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)$$

$$\sigma = \eta \cdot \sqrt{\left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\right]}$$

Determinação dos parâmetros:

$$P_1 = \eta = \frac{\mu}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)}$$

$$P_2 = \beta$$

O parâmetro de forma é determinado de forma iterativa através de:

$$1 + \delta^2 = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{2}{\beta}\right)}{\Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)}$$

4.11 Weibull para mínimos (tipo III)

Se a cauda inferior da distribuição inicial Z é limitada, a distribuição dos mínimos de Z tende assintoticamente a uma distribuição de Weibull.

Parâmetros da distribuição:

η = mínimo característico da distribuição inicial Z ;

β = parâmetro de forma;

γ_1 = limite inferior da distribuição inicial Z .

Funções de probabilidade:

$$f_{Z_1}(z) = \frac{\beta}{\eta - \gamma_1} \cdot \left(\frac{z - \gamma_1}{\eta - \gamma_1}\right)^{\beta-1} \cdot e^{-\left(\frac{z - \gamma_1}{\eta - \gamma_1}\right)^\beta}; \quad \gamma_1 \leq z \leq \infty$$

$$F_{Z_1}(z) = 1 - e^{-\left(\frac{z - \gamma_1}{\eta - \gamma_1}\right)^\beta}; \quad \gamma_1 \leq z \leq \infty$$

Determinação dos momentos:

$$\begin{aligned}\mu &= \gamma_1 + (\eta - \gamma_1) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \\ \sigma &= (\eta - \gamma_1) \cdot \sqrt{\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]}\end{aligned}$$

Determinação dos parâmetros:

$$\begin{aligned}P_1 &= \eta = \frac{\mu - \gamma_1}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} + \gamma_1 \\ P_2 &= \beta \text{ (Iterativo)} \\ P_3 &= \gamma_1 \\ P_4 &= 0\end{aligned}$$

O parâmetro de forma é determinado de forma iterativa através de:

$$1 + \left(\frac{\sigma}{\mu - \gamma_1}\right)^2 = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}$$

4.12 Weibull para máximos (tipo III)

Se a cauda superior da distribuição inicial Z é limitada, a distribuição dos máximos de Z tende assintoticamente a uma distribuição de Weibull.

Parâmetros da distribuição:

η = máximo característico da distribuição inicial Z ;

β = parâmetro de forma;

γ_n = limite superior da distribuição inicial Z .

Funções de probabilidade:

$$\begin{aligned}f_{Z_n}(z) &= \frac{\beta}{\gamma_n - \eta} \cdot \left(\frac{\gamma_n - z}{\gamma_n - \eta}\right)^{\beta-1} \cdot e^{-\left(\frac{\gamma_n - z}{\gamma_n - \eta}\right)^\beta}; \quad -\infty \leq z \leq \gamma_n \\ F_{Z_n}(z) &= e^{-\left(\frac{\gamma_n - z}{\gamma_n - \eta}\right)^\beta}; \quad -\infty \leq z \leq \gamma_n\end{aligned}$$

Determinação dos momentos:

$$\begin{aligned}\mu &= \gamma_n + (\gamma_n - \eta) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \\ \sigma &= (\gamma_n - \eta) \cdot \sqrt{\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]}\end{aligned}$$

Determinação dos parâmetros:

$$P_1 = \eta = \frac{\mu - \gamma_n}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} + \gamma_n$$

$$P_2 = \beta \text{ (Iterativo)}$$

$$P_3 = 0$$

$$P_4 = \gamma_n$$

O parâmetro de forma é determinado de forma iterativa através de:

$$1 + \left(\frac{\sigma}{\gamma_n - \mu}\right)^2 = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}$$

Capítulo 5

CUSTOMIZANDO ANSYS V5.3

5.1 Considerações iniciais

O ANSYS possui uma arquitetura aberta que permite ao usuário criar suas próprias rotinas e incorporá-las ao programa principal. Estas subrotinas são linkadas ao ANSYS criando-se versões customizadas do programa.

O corpo inicial das subrotinas é fornecido pela SASI. Estas subrotinas são chamadas de *User Programmable Features* ou UPF's. Estão disponíveis rotinas de usuário para elemento, carregamentos, materiais, otimização, sistema de coordenadas e parâmetros não lineares de material. Uma descrição completa destas subrotinas está disponível no manual de programação do ANSYS[3], capítulo 7.

A customização do ANSYS é um processo trabalhoso e sujeito a muitos erros. Antes de iniciar a programação de uma subrotina própria para execução de determinada tarefa, convém verificar se não se pode chegar aos mesmos resultados através de uma macro (seqüência de comandos do ANSYS). Convém verificar ainda se a tarefa a ser realizada pode ser executada, levando em conta a arquitetura do ANSYS. Outras alternativas de utilizar o ANSYS juntamente com o seu programa, e que convém ser analisadas, são a utilização do ANSYS como uma subrotina do seu programa[3] ou a utilização do ANSYS em modo *batch*, com troca de informações através de arquivo texto. Além disto, convém ressaltar que a criação uma versão customizada do ANSYS exige:

1. um bom entendimento dos comandos e operação do ANSYS;
2. conhecimento de programação em FORTRAN 77;
3. bom conhecimento da teoria a respeito da tarefa que você tem em mente.

A customização é um forma não padronizada de utilização dos ANSYS. É responsabilidade do usuário verificar se a rotina incorporada funciona corretamente e se ela não alterou outras partes do programa.

5.2 Configuração de software necessária

A possibilidade de customização está disponível apenas nas seguintes versões do ANSYS:

ANSYS/Multiphysics

ANSYS/Mechanical

ANSYS/Structural

ANSYS/PrepPost

ANSYS/ Research Faculty/Student.

As versões universitárias *low* e *high* não dispõem desta opção.

A customização pode ser feita tanto em Windows 95 como Windows NT. Recomenda-se o Windows NT, pois é mais confiável para este tipo de operação. Este foi o sistema operacional utilizado.

A utilização das UPF's requer compiladores FORTRAN e C, em versão tão ou mais atual do que a versão utilizada para compilação da sua versão do ANSYS. Ao utilizar ANSYS V5.3 em processador INTEL PC com Windows NT ou Windows 95, são necessários os compiladores MS Fortran PowerStation 4.0 e MS VC++ 4.0. Para configurações diferentes de hardware e software, consulte [4], página 1-4. Para implementação do ACE-Pro utilizou-se o compilador MS Fortran PowerStation 4.0 e, posteriormente, o compilador Digital Visual Fortran V5.0.

5.3 Procedimento

Uma vez definida a opção por uma customização do ANSYS, as seguintes etapas devem ser seguidas:

1. Estude a rotina que se aplica ao seu problema e a operação do ANSYS para verificar como deve ser feita a iteração entre os dois programas. As rotinas estão disponíveis no diretório: C:\ANSYS53\CUSTOM\USER¹. Convém imprimir uma cópia desta rotina. A troca de informações entre a rotina do usuário e o ANSYS é feita, normalmente, através de um bloco comum, declarado em um arquivo .INC (*include deck*). Outras rotinas que necessitam grandes quantidades de informação utilizam rotinas especiais de acesso (...GET e ...PUT). As diretrizes de compilação, para todas as UPF's, são fornecidas através do arquivo IMPCOM.INC. Se a passagem de dados para a subrotina for através de um bloco comum, consulte o arquivo .INC que declara este bloco para saber quais as variáveis que estão disponíveis. Estas variáveis terão que ser utilizadas para fazer a

¹C:\ANSYS53 é o diretório raiz normal do ANSYS. Nos arquivos .BAT apresentados em anexo o diretório raiz é C:\BIN\ANSYS53.

troca de informações entre a sua rotina e o ANSYS. Imprima também uma cópia deste arquivo.

2. Programe a sua subrotina a partir da versão original fornecida. Faça modificações pequenas, compile, linke e tente executar a subrotina. Verifique se a sua rotina provocou as alterações esperadas e se não provocou erros no programa principal. Se for o caso, crie uma versão independente do seu programa, que possa ser executada de forma independente do ANSYS. Algumas poucas alterações no arquivo de customização do usuário bastam para linká-lo ora ao ANSYS ora a outro programa principal. Assim, torna-se mais rápido o processo de programação, pois as consequências de eventuais mudanças podem ser verificadas rapidamente, sem a necessidade de se linkar a rotina ao ANSYS.
3. Compile e linke a rotina ao programa principal.

A rotina fornecida pela SASI deve ser programada em FORTRAN 77 ou em C². Porém, nada impede que esta rotina chame outras subrotinas, programadas em outras linguagens. Basta que a interface entre estas subrotinas e o ANSYS seja feita em FORTRAN 77 e que os arquivos objeto (.OBJ) das demais rotinas sejam fornecidos. Em se utilizando o compilador Microsoft, pode-se mesmo misturar rotinas programadas em FORTRAN, C, PASCAL² ou MASM².

A compilação e a linkagem ao ANSYS (item 3 acima) é feita através de quatro arquivos apresentados em anexo:

LINKALL.BAT
ANSCUST.BAT
FCOMP.BAT
MAKEFILE

A compilação e linkagem são feitas em 7 etapas:

1. Crie um diretório de trabalho para a construção da versão customizada do ANSYS (diretório utilizado: C:\BIN\ANSYS53\ASANSYS\OBJECT). Os arquivos .BAT acima devem ser copiados para este diretório;
2. Crie um segundo diretório (ou vários) para armazenar as suas rotinas customizadas e as demais rotinas necessárias (diretório utilizado: C:\BIN\ANSYS53\CUSTOM\USER\PROBAB)
3. Modifique o arquivo LINKALL.BAT de forma que as **suas** rotinas sejam copiadas para o **seu** diretório de trabalho;

²Estas alternativas não foram testadas!

4. Execute o arquivo LINKALL.BAT. Este arquivo:

- (a) copia os arquivos necessários do seu diretório para o diretório de trabalho, **apagando** versões anteriores;
- (b) executa o arquivo ANSCUST.BAT, que compila os arquivos em FORTRAN 77 (.F) e em C (.C) existentes no diretório de trabalho. O arquivo ANSCUST.BAT é uma ligeira modificação do arquivo fornecido pela SASI (diretório C:\ANSYS53\CUSTOM\USER). O arquivo FCOMP.BAT muda a extensão do arquivo .F para .FOR. O comando FL32 executa o compilador Fortran através da barra de comandos do DOS. Como resultado, os respectivos arquivos .OBJ são criados. Eventuais erros de compilação são reportados nos arquivos FOR_COMP.ERR ou C_COMP.ERR. As opções de compilação utilizadas são:
 - i. /c = compilação sem linkagem;
 - ii. /Od = compilação sem otimização;
 - iii. /Zp4 = alinhamento de estruturas em elementos de 4 bytes;
 - iv. /MT = aplicação "multithreat".
- (c) chama o arquivo MAKEFILE que linka todos os .OBJ existentes no diretório, juntamente com os arquivos objeto e demais bibliotecas do ANSYS, criando a versão customizada executável do programa. Esta etapa pode ser bastante demorada (aproximadamente 20 minutos em máquina Pentium 200MHZ com 16 MB de RAM). Erros de linkagem são reportados no arquivo LINKER.ERR.

5. Verifique os arquivos FOR_COMP.ERR e C_COMP.ERR, mesmo que o processo de linkagem ainda esteja em andamento. Se houver indicação de erro em qualquer um destes arquivos, interrompa a linkagem (Control-C) e recomece. Erros de compilação são comuns quando se utiliza um editor para programar e outro para compilar (é o caso da rotina fornecida pela SASI) e também quando se trabalha com um mesmo arquivo para gerar uma versão customizada do ANSYS e um programa independente.

6. Verifique o arquivo LINKER.ERR. Se houver erro, inicie novamente. Erros de linkagem são muito comuns nas primeiras tentativas de customização. Normalmente, são causados pela falta de alguma biblioteca requerida pelo arquivo MAKEFILE. Verifique este arquivo e procure as bibliotecas necessárias. Muitas vezes elas existem no seu computador mas não estão acessíveis. Se não encontra-las, procure no computador do seu vizinho. Copie as bibliotecas necessárias para o diretório raiz do ANSYS ou para o diretório de trabalho, conforme for o caso.

7. Se houve sucesso na linkagem, o arquivo ANSYS.EXE será criado no seu diretório de trabalho. Execute este programa através do arquivo ANSRUN.BAT (em anexo). Certifique-se que o código do produto, indicado neste arquivo, está de acordo com a sua versão do ANSYS. Além disto, pode ser necessário atualizar a variável ANSYS53_DIR para o diretório raiz: SET ANSYS53_DIR=C:\ANSYS53

Na linkagem ao ANSYS, os seguintes arquivos devem ser fornecidos:

1. versão do usuário do(s) arquivo(s) .F (ou .C) fornecidos pela SASI;
2. *include decks* (.INC) necessários ao(s) arquivo(s) acima;
3. os arquivos .OBJ das demais subrotinas chamadas pela(s) rotina(s) acima (1); ou os respectivos arquivos .FOR, se estas rotinas forem compiladas sem problemas a partir da barra de comando;
4. bibliotecas utilizadas pelas subrotinas acima. Na programação em FORTRAN 90 ou 95, ao se utilizar rotinas de precisão dupla da biblioteca MS-IMSL, deve-se fornecer ao ANSYS a biblioteca MATHD.LIB. Ao utilizar o compilador Digital Visual Fortran V5.0, deve-se fornecer a biblioteca DFORMD.LIB, que contém as rotinas utilizadas por este compilador para as operações de "input / output".

Ao executar o programa, lembre-se que mesmo utilizando uma versão customizada do ANSYS, a utilização das rotinas do usuário necessita de um comando especial para ativá-las. Este comando depende do tipo de customização que está sendo feita. Se este comando não for executado, a lógica padrão do ANSYS é utilizada.

Referências Bibliográficas

- [1] Ang, A. H-S.; Tang, W. H.; 1975. **Probability Concepts in Engineering Planning and Design** , Volume I: Basic Principles; John Wiley & Sons.
- [2] Ang, A. H-S.; Tang, W. H.; 1990. **Probability Concepts in Engineering Planning and Design** , Volume II: Decision, Risk and Reliability; John Wiley & Sons.
- [3] **ANSYS Programmer's Manual Revision 5.2**, 31 de outubro de 1995.
- [4] **ANSYS Installation and Configuration Guide for Release 5.3**; outubro de 1996.
- [5] **ANSYS User's Manual for Revision 5.0**, Volumes I e II - Procedures, 23 de dezembro de 1992.
- [6] Beck, A. T., 1999. **Um Método para Análise de Confiabilidade para Elementos Finitos**, Dissertação de Mestrado, Curso de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, UFSC.
- [7] Jewell, T. K., 1991. **Computer Applications for Engineers**, John Wiley & Sons, Inc.
- [8] Rocha, M. M., 1996. **Simulação de Monte Carlo com Amostragem por Importância: Fundamentos Teóricos e Programação**; Departamento de Engenharia Civil, UFRGS.
- [9] Schick, W. e Silverman, G. 1995. **Fortran 90 and Engineering Computation**, John Wiley & Sons, Inc.

Apêndice A

Sumário da distribuições disponíveis

Código	Distribuição	$f_Z(z)$	P_1	P_2	P_3	P_4
0	Determinística	-	valor	-	-	-
1	Uniforme	$f_Z(z) = \frac{1}{b-a}$	a	b	-	-
2	Normal	$f_Z(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2}$	μ	σ	-	-
3	Log-Normal	$f_Z(z) = \frac{1}{\xi z \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(z)-\lambda}{\xi}\right)^2}$	λ	ξ	-	-
4	Exponencial	$f_Z(z) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot (z-t)}$	λ	t	-	-
5	Rayleigh	$f_Z(z) = \frac{(z-t)}{\eta^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-t}{\eta}\right)^2}$	η	t	-	-
6	Logística	$f_Z(z) = \frac{e^{\frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(z-\mu)}{\sigma}}}{\left(1 + e^{\frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(z-\mu)}{\sigma}}\right)^2}$	μ	σ	-	-
7	Gumbel mínimos	$f_{Z_1}(z) = \alpha_1 \cdot e^{\alpha_1 \cdot (z-y)} \cdot e^{-e^{\alpha_1 \cdot (z-y)}}$	α_1	y_1	-	-
8	Gumbel máximos	$f_{Z_n}(z) = \alpha_n \cdot e^{\alpha_n \cdot (z-y)} \cdot e^{-e^{\alpha_n \cdot (z-y)}}$	α_n	y_n	-	-
9	Frechet mínimos	$f_{Z_1}(z) = -\frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{\eta}{z}\right)^{\beta+1} \cdot e^{-\left(\frac{\eta}{z}\right)^\beta}$	η	β	-	-
10	Frechet máximos	$f_{Z_n}(z) = -\frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{\eta}{z}\right)^{\beta+1} \cdot e^{-\left(\frac{\eta}{z}\right)^\beta}$	η	β	-	-
11	Weibull mínimos	$f_{Z_1}(z) = \frac{\beta}{\eta-\gamma_1} \cdot \left(\frac{z-\gamma_1}{\eta-\gamma_1}\right)^{\beta-1} \cdot e^{-\left(\frac{z-\gamma_1}{\eta-\gamma_1}\right)^\beta}$	η	β	γ_1	-
12	Weibull máximos	$f_{Z_n}(z) = \frac{\beta}{\gamma_n-\eta} \cdot \left(\frac{\gamma_n-z}{\gamma_n-\eta}\right)^{\beta-1} \cdot e^{-\left(\frac{\gamma_n-z}{\gamma_n-\eta}\right)^\beta}$	η	β	-	γ_n

Apêndice B

Sumário das subrotinas do ACE-Pro.

Tabela 01 - Sumário das rotinas da biblioteca CPE

Código	Nome	Tarefa
CPE000	GER_SI	geração de números aleatórios - distribuição original
CPE001	GER_AI	geração de números aleatórios - função de amostragem
CPE002	VERIF_DATA2	verificação preliminar de dados
CPE003	GER_UN	gerador uniforme congruencial tipo IBM System/360
CPE100	CALC_PARAM	cálculo dos parâmetros das distribuições
CPE101	PROD_FDP_MA	produto das FDP marginais
CPE102	FPA_MA	vetor de FPA marginais
CPE103	INV_FPA_MA	vetor de inversas de FPA marginais
CPE200	RHO_EQUIV	cálculo dos coef. de correlação equivalentes por integração
CPE201	CHOLESKI	fatorização de Choleski da matriz de correlação
CPE202	IMP_CORR	multiplicação matricial para impor correlação
CPE203	ELIM_CORR	retrosubstituição matricial para eliminar correlação
CPE300	ANE_SIM	análise estatística simples de amostras
CPE301	ANE_PON	análise estatística ponderada de amostras
CPE302	ANE_PF	análise estatística para estimação dos momentos da P_f
CPE303	ANE_CON	análise estatística condicionada ao domínio de falha
CPE900	PROD_FDP_NP	FDP normal padrão univariada
CPE901	FPA_NP	FPA normal padrão univariada
CPE902	INV_FPA_NP	inversa da FPA normal padrão univariada

Tabela 02: Rotinas da biblioteca IMSL utilizadas

Código	Nome	Tarefa
IMSL DEVASF	AUTOVALORES1	menor autovalor de matriz real simétrica
IMSL DLCHRG	CHOLESKI	fat. de Choleski de matriz sim. positivo def.
IMSL DLINRT	INVERSÃO	inversão de matriz real triangular
IMSL DEVCSF	AUTOVALORES2	cálculo de autovalores de matriz real sim.

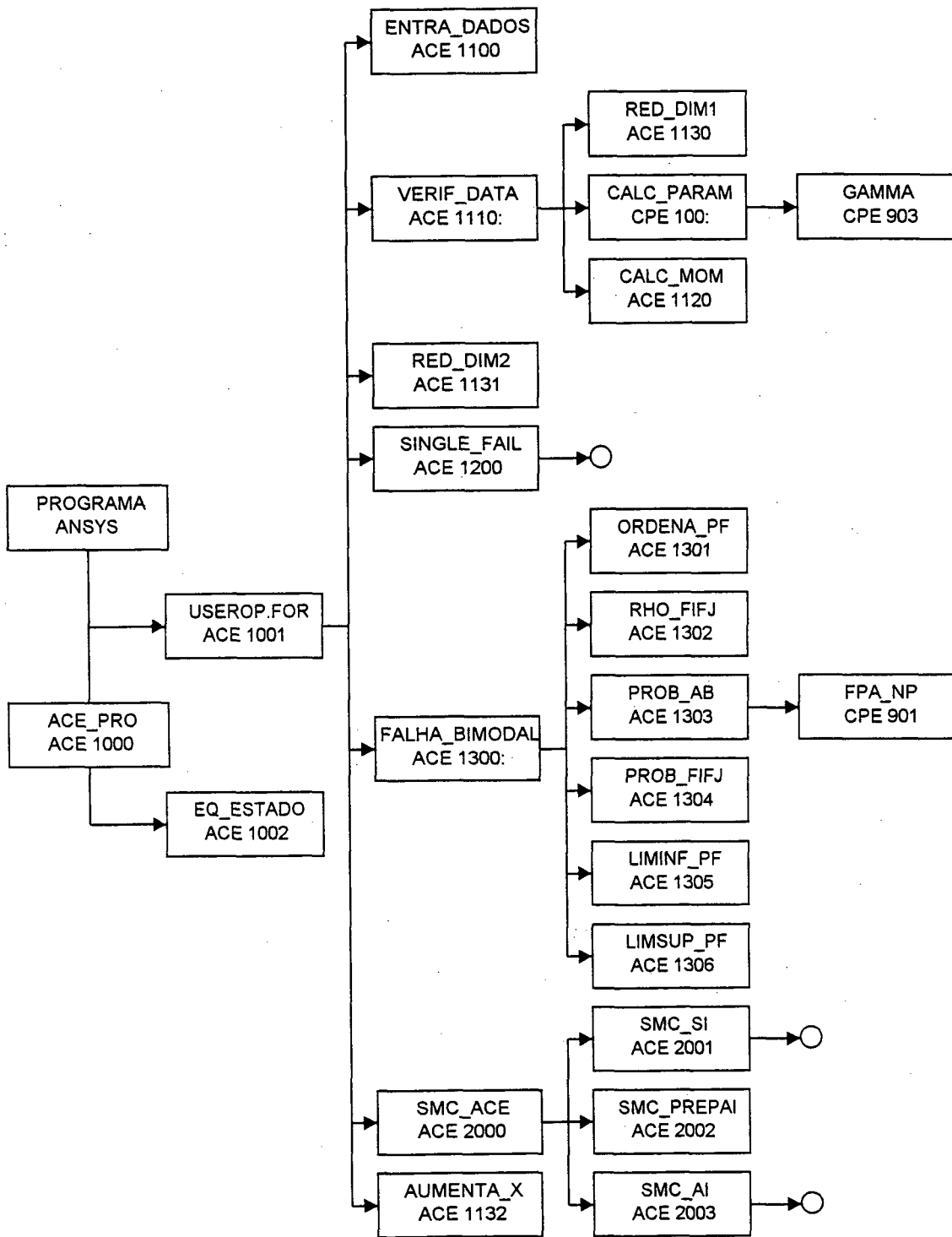
Tabela 03: Sumário das rotinas da biblioteca ACE.

Código	Nome	Finalidade
ACE1000	ACE_PRO	simula a operação do Ansys
ACE1001	USEROP	iteração entre o ANSYS e as demais subrotinas
ACE1002	EQ_ESTADO	equações de estado do problema
ACE1100	ENTRA_DADOS	entrada de dados
ACE1110	VERIF_DATA	verificação dos dados de entrada
ACE1120	CALC_MOM	cálculo dos momentos em função dos parâmetros
ACE1130	RED_DIM1	reduz a dimensão de vetores e matrizes
ACE1131	RED_DIM2	reduz a dimensão de vetores e matrizes
ACE1132	AUMENTA_X	aumenta a dimensão de vetores
ACE1133	AUMENTA_M	aumenta a dimensão de matrizes
ACE1200	SINGLE_FAIL	análise da P_f em relação a cada modo de falha
ACE1210	GRAD_DF_DP	cálculo do gradiente em função do desvio padrão
ACE1211	GRAD_DF_DX	cálculo do gradiente em função do passo anterior
ACE1220	SENSIB_AN	análise de sensibilidade
ACE1230	DESPO_CALC	procura do Ponto de Projeto
ACE1231	P_HLRF_M	cálculo de novo ponto pelo algoritmo de HLRF_M
ACE1232	MERITO	avaliação da função mérito no ponto
ACE1233	F_OMISSAO	cálculo dos fatores de omissão de sensibilidade
ACE1234	P_HLRF	cálculo de novo ponto pelo algoritmo de HLRF
ACE1235	PENALIZA_X	verifica se alguma variável ultrapassou a restrição
ACE1236	CALC_APROX	avaliação do critério de convergência
ACE1240	JACOBIANO	cálculo das matrizes de transformação de espaço
ACE1241	NORMAL_EQ	cálculo dos parâmetros da distribuição normal equiv.
ACE1242	C_RHO_Z	índices de correlação equiv. (equações analíticas)
ACE1243	EVEC_NR	cálculo de autovetores
ACE1250	RSM	construção da Superfície de Resposta
ACE1251	RSM_POINTS	determinação dos pontos onde $g(z)$ deve ser avaliada
ACE1252	HESSIANA	cálculo da matriz hessiana
ACE1260	PF_SORM	cálculo da P_f via SORM
ACE1261	SORM	SORM via aproximação assintótica
ACE1300	FALHA_BIMODAL	cálculo dos limites bimodais da P_f do componente
ACE1301	ORDENA_MF	ordena os modos de falha em ordem decrescente de P_f
ACE1302	RHO_FIFJ	coeficiente de correlação entre os modos de falha
ACE1303	PROB_AB	probabilidade de ocorrência dos eventos A e B
ACE1304	PROB_FIFJ	probabilidade de ocorrência de falha nos modos I e J
ACE1305	LIMINF_PF	cálculo do limite bimodal inferior da P_f
ACE1306	LIMSUP_PF	cálculo do limite bimodal superior da P_f
ACE2000	SMC_ACE	prepara a SMC compatibilizando formatos ACE -CPE
ACE2001	SMC_SI	simulação de Monte Carlo simples
ACE2002	SMC_PREPAI	preparação para a amostragem por importância
ACE2003	SMC_AI	sim. de Monte Carlo com amostragem por importância

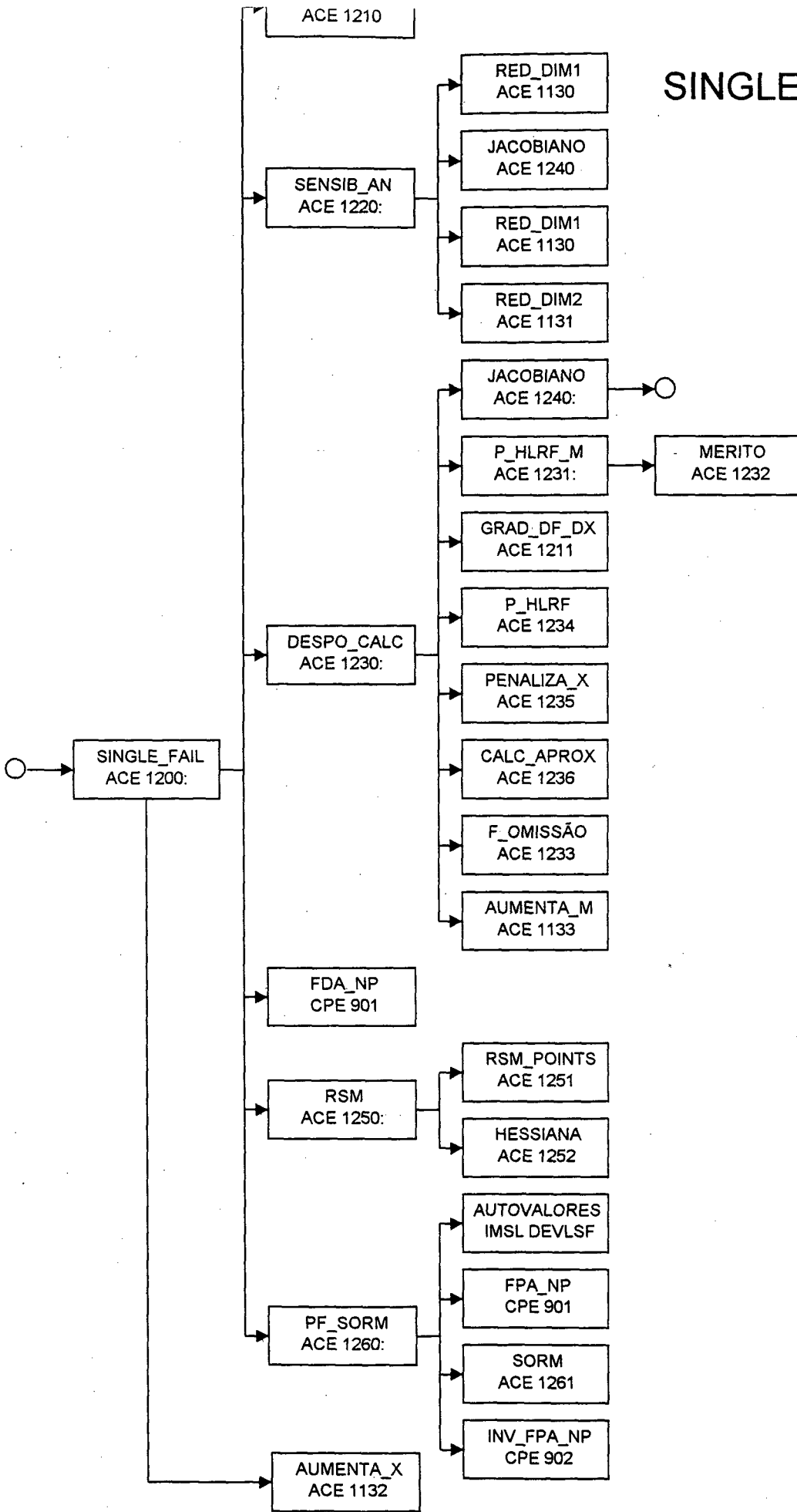
Apêndice C

Fluxograma das rotinas do ACE-Pro

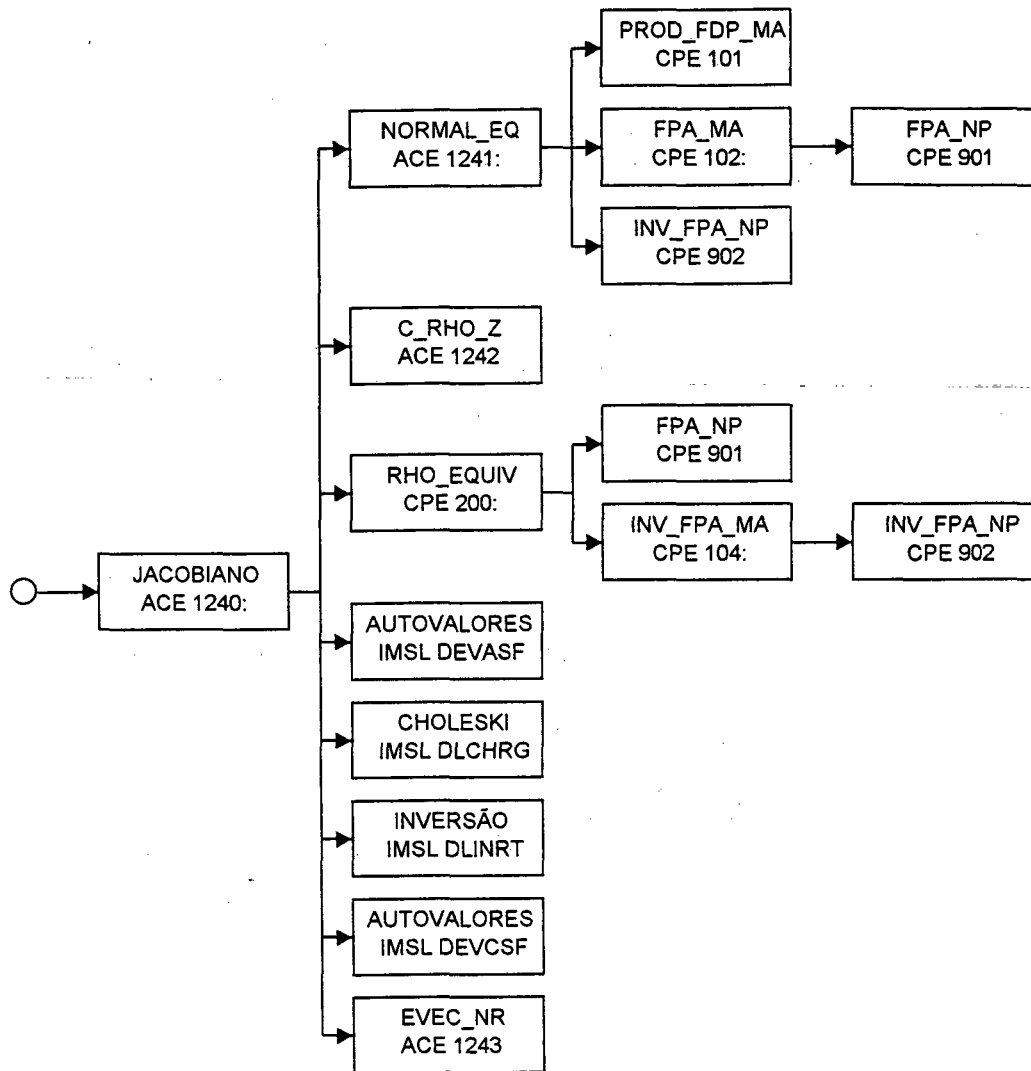
rograma ACE-Pro



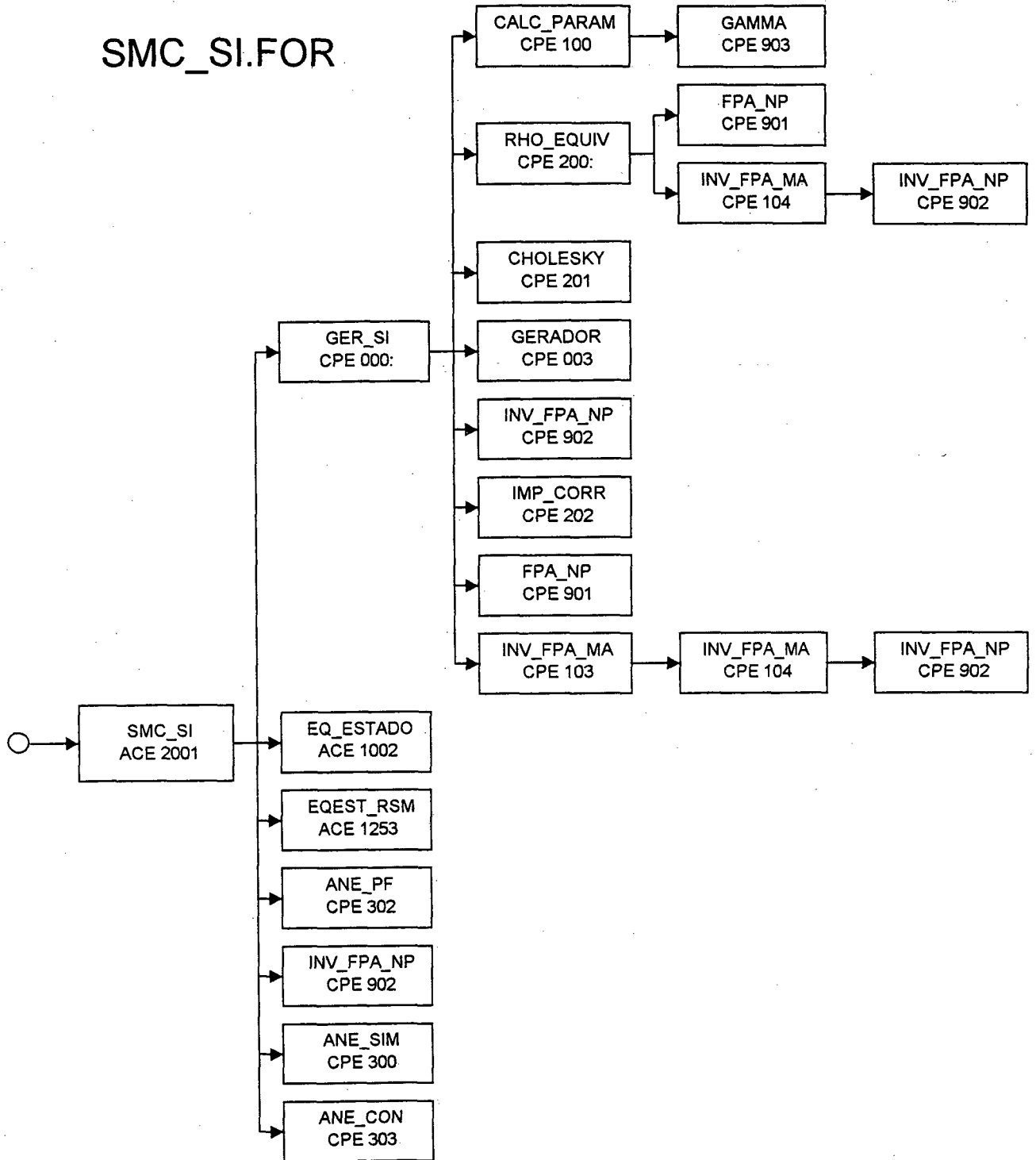
SINGLE_FAIL.FOR



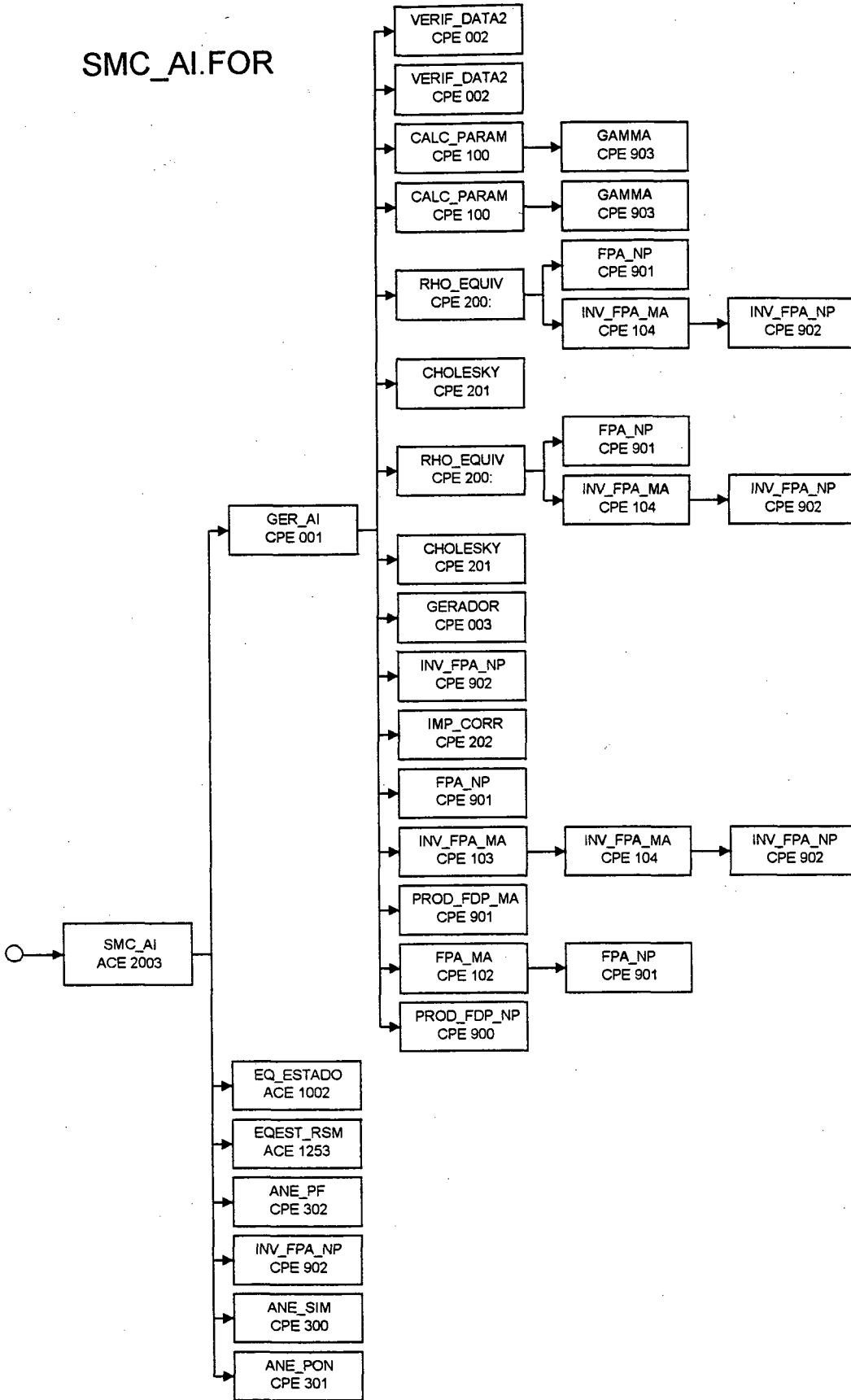
JACOBIANO.FOR



SMC_SI.FOR



SMC_AI.FOR



Apêndice D

Arquivo de entrada de dados para problema 6.3.1 de [6].

*TITULO:

10. PROBLEMA DA VIGA ENGASTADA

*NUMERO_VA:

6

*NUMERO_FEL:

1

*DESCRICAO_VA:

2 m s	1.15	0.0333	0.00	0.00
2 m s	60.00	0.60	0.00	0.00
2 m r	4.00	0.12	0.00	0.00
2 m r	1.00	0.03	0.00	0.00
2 m r	3600.00	300.0	0.00	0.00
2 m r	2140000.0	100000.0	0.00	0.00
Tipo p r	Parametro1	Parametro2	Parametro3	Parametro4
m s	Media	Desvio-padrao	nada	nada

*CORRELACAO_VA:

0.00					
0.00	1.00				
0.00	0.00	1.00			
0.00	0.00	0.00	1.00		
0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00

*ANAL_OPT:

1, 0, 1, 1, 0, 1
dpop(0/1), rsop(0/1), foop(0/1), soop(0/1), bmop(0/1), siop(0/1)

*DESPO_CALC:

0, 0.0001, 1, 1, 0.5
crit_p(0/1/2/3), toler, chol(0/1), hlrif_m(0/1), min_red

*RSM_CALC:

0.1
fator_dx

*SENSIB_AN:

0, 0.1
efetuar(0/1), fator para eliminação de VA

*SIMULACAO:

10000, 111111, 1
nsi, sem, nfa(0/1)

Apêndice E

Seqüência de comandos para solução do problema 6.3.1 [6] no ANSYS.

ARQUIVO VIGA.TXT-----

-----INÍCIO

```
/BATCH
! VA para construcao do problema parametrizado
q=1.15
l=60
b=4
h=1
sy=3600
e=2140000
! Demais variaveis do problema
dcr=3.0
ge1=0
ge2=0
beta=0
!
/prep7
ET,1,BEAM3
R,1,b*h,(b*h**3)/12,h,,,,
UIMP,1,EX,,,e,
UIMP,1,NUXY,,,0.3,
UIMP,1,PRXY,,,0.3,
!
n,1
n,11,1,0,0
fill,1,11
e,1,2
egen,10,1,1
d,1,all,0
sbeam,all,1,pres,q
FINISH
!
/SOLU
SOLVE
FINISH
!
/POST1
etable,sig,nmisc,1,1,
*get,smax,sig,1
*get,umax,uy,11
ge1=sy-smax
ge2=dcr+umax
b1=q**2+l**2+b**2
b2=h**2+sy**2+e**2
beta=b1+b2
/OPT
OPVAR,q,DV,0.0001,1e15,0.0001,
OPVAR,l,DV,0.0001,1e15,0.0001,
OPVAR,b,DV,0.0001,1e15,0.0001,
OPVAR,h,DV,0.0001,1e15,0.0001,
OPVAR,sy,DV,0.0001,1e15,0.0001,
OPVAR,e,DV,0.0001,1e15,0.0001,
OPVAR,ge1,SV,-1e15,1e15,0.0001,
! OPVAR,ge2,SV,-1e15,1e15,0.0001,
OPVAR,beta,OBJ,,,,0.0001,
!
```

ARQUIVO VIGA.TXT-----

-----FIM

Apêndice F

Arquivos para customização do ANSYS

```
echo off
set ANSYS35_DIR=c:\bin\ansys53
set cpy_path=c:\BIN\ansys53\ASansys\object
set usr_path=c:\BIN\ansys53\custom\user\probab
set obj_path=%ansys53_dir%\custom\user
set revnum=5.3
echo.
```

```
echo *****
echo          LINK ALL USER FILES WITH ANSYS
echo *****
echo.
echo *****
echo CLEAN UP
echo *****
echo.
```

```
for %%p in ( *.exe ) do del %%p
for %%p in ( *.map ) do del %%p
for %%p in ( *.err ) do del %%p
for %%p in ( *.inc ) do del %%p
for %%p in ( *.F ) do del %%p
for %%p in ( *.Fo ) do del %%p
for %%p in ( *.For ) do del %%p
for %%p in ( *.obj ) do del %%p
for %%p in ( *.lib ) do del %%p
```

```
echo.
echo *****
echo COPY
echo *****
echo.
```

```
copy %usr_path%\*.F          %cpy_path%
copy %usr_path%\*.inc        %cpy_path%
copy %usr_path%\*.obj        %cpy_path%
copy %usr_path%\*.h          %cpy_path%
copy %usr_path%\*.lib        %cpy_path%
```

```
echo.
echo *****
echo ANSCUST
echo *****
echo.
%cpy_path%\anscust.bat > linker.err
```

```
echo.
echo *****
echo DELETE
echo *****
echo.
del %cpy_path%\*.F
rem del %cpy_path%\*.For
del %cpy_path%\*.obj
del %cpy_path%\*.inc
echo FINISH
```

ARQUIVO ANSCUST.BAT-----INÍCIO

```
@echo off
set ANSYS53_DIR=C:\BIN\ANSYS53
if "%ansys53_dir%"==" " goto NoAnsDir
set revnum=5.3
set obj_path=%ansys53_dir%\custom\user
```

```
echo.
echo
*****
echo.
echo      This is the ANSYS Revision %revnum% ANSCUST batch file.It is
echo      used to link User Programmable Features into versions of
echo      the ANSYS program on the Windows NT and Windows 95 systems.
echo.
echo          NOTE:  The user subroutine source files are expected to
echo          reside in your local directory and be of the form
echo          *.F and/or *.c
echo.
echo
*****
echo.
```

```
echo on
  for %%p in ( *.F ) do call FComp.bat %%p
  for %%p in ( *.For ) do fl32 /c /Od /Zp4 /MT %%p >> for_comp.err
  for %%p in ( *.c ) do cl -c -W3 -D_X86=1 -DWIN32 -DCTL3D -Od /MT /Zp4
-D__STDC__ %%p >> c_comp.err
  nmake
goto end
```

```
:NoAnsDir
echo.
echo
*****
echo.
echo          ERROR:
echo          The environment variable ANSYS53_DIR must be set to the
echo          root ANSYS directory.
echo.
echo          EXAMPLE:
echo          set ANSYS53_DIR=C:\ANSYS53
echo.
echo          NOTE:
echo          You will need to change the first line in MAKEFILE ifyou
echo          installed into a directory other than C:\ANSYS53.
echo
*****
echo.
goto end
:end
```

ARQUIVO ANSCUST.BAT-----FIM

ARQUIVO FCOMP.BAT-----INÍCIO

```
cl /EP /DPCWINNT_SYS /DFORTRAN /C /I%obj_path% %1 > %1or
```

ARQUIVO FCOMP.BAT-----FIM

```
# The following line may need modified if you installed into a different
# drive/directory
ansys53_dir=c:\BIN\ansys53
```

```
ansys.exe:
```

```
    link \
-out:ANSYS.exe \
-map:ANSYS,map \
-debug:none \
-machine:i386 \
-align:0x1000 \
-subsystem:windows \
-nodefaultlib \
    $(ansys53_dir)\custom\lib\console.lib \
    $(ansys53_dir)\custom\lib\ansys1.lib \
    $(ansys53_dir)\custom\lib\ansys2.lib \
    kernel32.lib \
    netapi32.lib \
    advapi32.lib \
    user32.lib \
    gdi32.lib \
    $(ansys53_dir)\custom\lib\anslibx.lib \
    $(ansys53_dir)\custom\lib\boelib.lib \
    $(ansys53_dir)\custom\lib\lmgr324a.lib \
    $(ansys53_dir)\custom\lib\mnf.lib \
    comdlg32.lib \
    winspool.lib \
    vfw32.lib \
    winmm.lib \
    ct13d32.lib \
    glu32.lib \
    opengl32.lib \
    $(ansys53_dir)\custom\lib\libfmt.lib \
    libcmtd.lib \
    mathd.lib \
fp10.obj \
$(ansys53_dir)\custom\lib\WinAnsys.obj \
$(ansys53_dir)\custom\lib\INEXNT.obj \
$(ansys53_dir)\custom\lib\MATHLIBA.obj \
$(ansys53_dir)\custom\lib\MATHLIBC.obj \
$(ansys53_dir)\custom\lib\elshfn.obj \
$(ansys53_dir)\custom\lib\pElData.obj \
$(ansys53_dir)\custom\lib\WinAnsys.res \
$(ansys53_dir)\custom\lib\masscoef.obj \
$(ansys53_dir)\custom\lib\mscoef.obj \
$(ansys53_dir)\custom\lib\nodf10.obj \
$(ansys53_dir)\custom\lib\nodfTri.obj \
$(ansys53_dir)\custom\lib\nshpderv.obj \
$(ansys53_dir)\custom\lib\sstiff2d.obj \
$(ansys53_dir)\custom\lib\sstiff3d.obj \
$(ansys53_dir)\custom\lib\stcoef.obj \
$(ansys53_dir)\custom\lib\stcoefTr.obj \
$(ansys53_dir)\custom\lib\thcoef.obj \
$(ansys53_dir)\custom\lib\thcoefTr.obj \
$(ansys53_dir)\custom\lib\Trinshpd.obj
*.obj
```

ARQUIVO ANSRUN.BAT-----INÍCIO

```
echo off
□
set ansys53_dir=c:\bin\ansys53
□
c:\bin\ansys53\ASansys\object\ansys.exe -g -p
□
echo FINISH
□
```

ARQUIVO ANSRUN.BAT-----FIM