

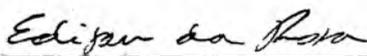
ANÁLISE ELÁSTICA DE PROBLEMAS
BIDIMENSIONAIS DA
MECÂNICA DA FRATURA

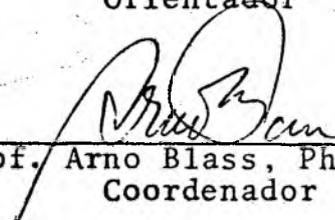
WILSON JOSÉ MAFRA

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

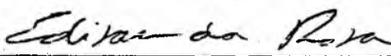
"MESTRE EM CIÊNCIAS"

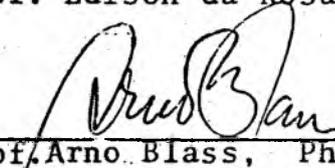
ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA FORMA
FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO.

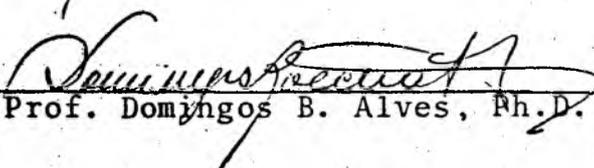

Prof. Edison da Rosa, M.Sc.
Orientador


Prof. Arno Blass, Ph.D.
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Edison da Rosa, M.Sc.


Prof. Arno Blass, Ph.D.


Prof. Domingos B. Alves, Ph.D.

AGRADECIMENTOS

O autor, ao término do trabalho, deseja agradecer:

Ao Orientador Edison, que através de seu valioso apoio e orientação, tornou possível a realização deste trabalho.

Ao Professor Domingos pela orientação que dispensou em relação à sistemática e ao uso do Proase.

A todos os Amigos que, direta ou indiretamente, apoiaram e estimularam a realização desta dissertação.

Aos meus Pais e Irmãos pelo apoio seguro e constante durante toda a realização deste trabalho.

A MARIA E CLAUDIA

ÍNDICE

	PÁG.
NOTAÇÃO	i
RESUMO	iii
ABSTRACT	iv
1. INTRODUÇÃO	1
2. SOLUÇÃO PARA O CAMPO DE TENSÕES E DESLOCAMENTOS NO EXTREMO DA TRINCA	4
2.1. Função Tensão Real	4
2.1.1. Função Real	4
2.1.2. Função Complexa	6
2.2. Tensões e Deslocamentos no Extremo da Trinca - Solução de Westerssard	7
2.2.1. Função Tensão	7
2.2.2. Equação de Tensões	8
2.2.3. Equação de Deslocamentos	8
2.3. Modo de Abertura da Trinca	11
2.4. Placa com Tração Uniforme Equibiaxial	12
2.4.1. Função Tensão de Westergaard	12
2.4.2. Forma da Trinca	14
2.4.3. Tensões e Deformações no Extremo da Trinca	16
2.5. Fator de Intensidade de Tensões	19
2.5.1. Definição Usual	19
2.5.2. Definição Formal	20
2.5.3. Distribuição de Tensões e Deslocamentos para uma Placa Infinita	21

	PÁG.
2.6. Correção das Equações de Westergaard	23
2.6.1. Constante Real	23
2.6.2. Fator Geométrico para uma Placa de Largura Finita	26
2.7. Análise dos Modos II e III	29
2.7.1. Modo II - Cisalhamento e Trinca	29
2.7.2. Modo III - Anti-Plano de Deformação	32
2.8. Energia de Deformação	36
2.8.1. Trabalho e Energia	36
2.8.2. Trabalho Realizado pelas Forças Externas.	38
2.8.3. Energia na Análise de Trincas	40
2.8.4. Métodos de Energia na Análise de Trincas.	43
2.8.4.1. Método da Flexibilidade	44
2.8.4.2. Método do Fator de Intensidade de Tensões	45
3. PROCESSOS NUMÉRICOS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DA ME CÂNICA DA FRATURA	48
3.1. Introdução	48
3.2. Método de Elementos Finitos	49
3.3. Método Baseado sobre Elementos Finitos Convencionais	50
3.3.1. Método de Deslocamentos	50
3.3.2. Funções de Deslocamentos Elípticas	51
3.3.3. Método de Elementos Finitos Calibrado ...	57
3.3.4. Método de Energia Total	61
3.3.5. Método de Energia com Elementos Finitos Calibrado	62
3.3.6. Método de Energia Local	63

	PÁG.
4. ESTRUTURA DO TRABALHO	64
4.1. Modelos Analisados	64
4.2. Variações nos Modelos	65
4.3. Programa de Elementos Finitos Usados	66
4.4. Representação dos Modelos por Elementos Finitos.	67
5. ANÁLISE DOS RESULTADOS	69
6. CONCLUSÃO	88
7. BIBLIOGRAFIA	90

APÊNDICES

A1 FUNÇÃO DE VARIÁVEIS COMPLEXAS	94
A2 DIFERENCIAÇÃO E INTEGRAÇÃO DA FUNÇÃO TENSÃO COMPLEXA	96
A3 CALIBRAGEM NA MALHA INTERNA	98
A4 LISTAGEM DOS RESULTADOS	100

NOTAÇÃO

A	constante real
a	dimensão característica da trinca
b	$\frac{2a\sigma}{E}$
C	coeficiente de flexibilidade
E	módulo de elasticidade longitudinal
F	função tensão de Airy
f_i	função definida na equação (2,26)
f_{ij}	função definida na equação (2,20)
G	módulo de elasticidade transversal
G	taxa de liberação de energia
H	altura da placa
Im	imaginário
Y	fator geométrico
$K_{I, II, III}$	fator de intensidade de tensões
K_t	fator de concentração de tensões
k	coeficiente de rigidez
L	largura da placa
l	dimensão linear do menor elemento, na direção da trinca
P	carga externa aplicada
Q	calor absorvido
q	$\frac{2\tau a}{E}$

r_0	distância característica da malha calibrada
T_E	trabalho realizado pelas forças externas
U	energia de deformação
u_i	deslocamento
W	densidade de energia de deformação
z	variável complexa
ΔE	variação de energia
ϵ_{ij}	deformação
ν	coeficiente de Poisson
σ_{ij}	tensão
τ	tensão cisalhante
$\phi(z)$	função tensão de Westergaard
ϕ', ϕ''	primeira e segunda derivada da função tensão de Westergaard
$\bar{\phi}, \bar{\bar{\phi}}$	primeira e segunda integral da função tensão de Westergaard
ϕ^*	função de Westergaard modificada
∇^2	operador laplaceano
∇^4	operador bi-harmônico

RESUMO

O presente trabalho trata dos problemas da Mecânica da Fratura, visando dar uma contribuição na determinação numérica do fator de intensidade de tensões, aplicável a qualquer geometria. Para isto, passou-se à comprovação de alguns métodos propostos, usando-se um programa de elementos finitos convencionais, para a obtenção de dados necessários à aplicação dos métodos, e, a partir destes, à obtenção do fator de intensidade de tensões. O objetivo é se ter em mãos uma ferramenta que forneça resultados satisfatórios, mesmo com um refinamento de malha não muito grande na extremidade da trinca.

ABSTRACT

This work aims to give a contribution to the numerical determination of the stress intensity factor, applied to any geometry. For this purpose it uses a program of finite elements to obtain necessary data to the application of the proposed methods and their comparison with existing solutions. It was kept in mind the development of a tool which furnishes satisfactory results without a great refinement of the mesh in the extremity of the crack.

1. INTRODUÇÃO

As falhas que ocorrem, em problemas estruturais, com solicitação abaixo da tensão de escoamento do material são frequentemente atribuídas à pré-existência de um defeito significativo ou de uma trinca. Tais falhas mostram que a análise de resistência estrutural convencional não é suficiente para garantir a integridade da estrutura sob condições operacionais. Estudos considerando o crescimento da trinca como função das cargas aplicadas são tratados na Mecânica da Fratura. Na ausência de grandes deformações plásticas na extremidade da trinca, o estudo é referido como Mecânica da Fratura Elástica Linear, cuja base é a teoria de Griffith, confirmada em testes de ruptura com materiais frágeis. Sua premissa básica, para explicar o comportamento destes materiais à fratura, é de que a propagação instável de uma trinca tem início se a energia liberada quando a trinca se propaga, é igual à energia necessária para a criação de novas superfícies livres. Irwin e Orowan, subsequentemente, modificaram a teoria original de Griffith aplicando-a aos metais, adicionando um termo envolvendo a dissipação de energia devida a deformação plástica na região dos arredores da trinca. A teoria de Griffith sobre o balanço de energia e as modificações subsequentes de Irwin e Orowan são condições necessárias para o início da fratura, porém não podem caracterizar convenientemente todos os tipos de fratura observados em testes. Irwin propôs, para tal caracterização, que se usasse o campo de tensões, nas proximidades da extremidade da trinca, em lugar da taxa de liberação de energia.

Até o presente momento, bem pouco conhecimento se tem com relação ao uso de componentes com trincas no projeto convencional. O uso de componentes trincados normalmente é liberado quando o projeto não envolve risco de vida, caso contrário, há rejeição do elemento sem que estudos mais avançados fossem feitos.

A Mecânica da Fratura tem conduzido a novos conceitos de Projeto e esforços foram feitos para incorporar estes ao uso prático. Assim, através de testes não destrutivos, utilizados na detecção de defeitos em componentes estruturais, o método de Projeto baseado na Mecânica da Fratura pode ser usado como critério de falha. Em componentes trincados, estudos sobre a propagação da trinca, geralmente por fadiga, permitem estimar os intervalos de inspeção para detectar o crescimento da trinca, antes que esta conduza à falha. De outra forma, se existirem dúvidas quanto aos tamanhos de trincas que possam ter escapado à detecção, testes de sobrecarga podem ser usados, para garantir que, operando abaixo de uma certa carga, o defeito, se existir, não levará o componente à falha. Desta forma, a Mecânica da Fratura pode ser usada para solucionar problemas práticos de Engenharia, como análise de falhas, seleção de materiais, previsão da vida estrutural por fadiga ou corrosão sob tensão, etc. Isso conduzirá à aceitação, ou rejeição, do componente sob determinadas condições de aplicação.

Partindo-se da premissa de que a pré-existência de uma trinca pode levar à falha estrutural, a teoria da Mecânica do Contínuo é usada para determinar os parâmetros, que caracterizam o campo de tensões e deformações nas proximidades da extremidade

da trinca, sendo o mais importante destes o fator de intensidade de tensões, K . O início da propagação da trinca ocorre quando o fator de intensidade de tensões atinge um valor crítico, K_c , dependendo do material. Assim, na aplicação da Mecânica da Fratura Elástica Linear, esforços têm sido feitos para a determinação do fator de intensidade de tensões e uma variedade de métodos tem sido desenvolvida, uma vez que a sua determinação trouxe solução a vários problemas estruturais com componentes fissurados. Em casos de geometria relativamente simples, métodos analíticos podem ser usados para a determinação do fator de intensidade de tensões, porém, na análise de contorno de maior complexidade, soluções numéricas são logo necessárias.

O presente trabalho procura dar uma contribuição na determinação numérica do fator de intensidade de tensões, aplicável a qualquer geometria. Desta forma, usando-se um programa de elementos finitos convencionais, passou-se à comprovação teórica da aplicação de alguns métodos propostos para a obtenção do fator de intensidade de tensões. O objetivo é se ter em mãos uma ferramenta que forneça resultados satisfatórios, mesmo com pequeno refinamento da malha nas proximidades da extremidade da trinca.

2. SOLUÇÃO PARA O CAMPO DE TENSÕES E DESLOCAMENTOS NO EXTREMO DA TRINCA

2.1. Função Tensão de Airy

2.1.1. Função Real

Funções $F(x_1, x_2)$, convenientemente escolhidas, de forma que satisfaçam as equações de equilíbrio e compatibilidade, são usadas na solução de problemas da elasticidade plana e são conhecidas como Função Tensão de Airy.

De acordo com Airy, as componentes de tensão são dadas por

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \\ \sigma_{22} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \\ \sigma_{12} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}\end{aligned}\tag{2.1}$$

Da teoria da elasticidade plana [4], [5], as equações de equilíbrio e compatibilidade, na ausência de forças de corpo e desconsiderando-se o efeito da temperatura, são dadas por

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} = 0$$

(2.2)

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1 \partial x_2} - \nu \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} \right) -$$

(2.3)

$$- \nu \left(\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} \right) = 0$$

As expressões entre parênteses na equação (2.3), são as equações de equilíbrio (2.2). Substituindo-se-as, fornecem a equação que satisfaz às condições de equilíbrio e compatibilidade, simultaneamente, ou seja,

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \sigma_{21}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

Pela substituição das equações (2.1), na equação acima, encontra-se

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) F = 0$$

onde a expressão entre os parênteses é conhecida como operador bi-harmônico ∇^4 ; assim, a equação supra pode ser escrita na forma

$$\nabla^4 F = 0 \quad (2.4)$$

A equação (2.4) é a equação diferencial parcial bi-harmônica. Qualquer função F que satisfaça a (2.4) é chamada de função bi-harmônica.

Pelo exposto conclui-se que o problema da elasticidade plana fica reduzido em procurar a função F que satisfaça a equação diferencial (2.4) e as condições de contorno do problema.

2.1.2. Função Complexa

Como já visto, de acordo com a equação (2.4) a função tensão real deve satisfazer a equação diferencial bi-harmônica, ou seja,

$$\nabla^4 F = \nabla^2 (\nabla^2 F) = 0 \quad (2.5)$$

Nota-se que a função F , na equação (2.5), pode ser dada por qualquer função ou soma de funções $f(x_1, x_2)$ que satisfaçam a equação diferencial de Laplace, $\nabla^2 f = 0$, ou pelo produto desta por x_1 e x_2 , conforme mostrado abaixo

$$F = f$$

$$F = x_1 f$$

$$F = x_2 f$$

Do apêndice A1, pode-se concluir que a função $f(x_1, x_2)$, poderá ser a parte real, ou imaginária, de uma função complexa $\phi(z)$, ou a soma destas.

Assim, o problema da elasticidade plana passa, agora, a ser o de encontrar uma função complexa, analítica, que deverá fornecer uma função tensão real F , tipo Airy, e satisfazer as condições de contorno do problema.

2.2. Tensões e Deslocamentos no Extremo da Trinca.

Solução de Westergaard

2.2.1. Função Tensão

Em problemas bidimensionais envolvendo trincas, a distribuição de tensões e deslocamentos foi tratada por Westergaard, usando funções tensão tipo Airy. Essas foram geradas por funções analíticas de variável complexa que satisfazem a equação diferencial de Laplace. Desta forma as condições de equilíbrio e compatibilidade são satisfeitas, faltando apenas verificar que espécie de condições de contorno seriam atendidas por tais funções. Assim, de conformidade com os tipos admissíveis de funções, seção 2.1, Westergaard [12] define a seguinte função tensão real:

$$F = \operatorname{Re} \bar{\phi}(z) + x_2 \operatorname{Im} \bar{\phi}(z) \quad (2.6)$$

onde $\phi(z)$ é qualquer função complexa, analítica na região, que satisfaça as condições de contorno do problema, sendo denominada de função tensão complexa ou função tensão de Westergaard [20].

2.2.2. Equações de Tensões

As componentes de tensões são obtidas a partir das equações (2.1) e (2.6) [6] , [23] , resultando

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \operatorname{Re} \phi(z) - x_2 \operatorname{Im} \phi'(z) \\ \sigma_{22} &= \operatorname{Re} \phi(z) + x_2 \operatorname{Im} \phi'(z) \\ \sigma_{12} &= -x_2 \operatorname{Re} \phi'(z)\end{aligned}\tag{2.7}$$

Para todos os pontos sobre a linha $x_2 = 0$ tem-se que $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ e $\sigma_{12} = 0$, o que implica que a função tensão (2.6) é válida somente para esta classe de problemas.

Se formas alternativas de função tensão F forem selecionadas, resultam diferentes equações de tensões, trazendo soluções a outras classes de problemas.

2.2.3. Equações de Deslocamentos

Da teoria da elasticidade plana as componentes de deformação são dadas [4] , [5] , assumindo pequenos deslocamentos e deformações, por

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

$$\epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (2.8)$$

$$\epsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

onde as componentes de deslocamento segundo as direções x_1 e x_2 são extraídas das equações acima e resultam

$$u_1 = \int \epsilon_{11} dx_1 + q_1(x_2) \quad (2.9)$$

$$u_2 = \int \epsilon_{22} dx_2 + q_2(x_1)$$

Pela lei de Hooke, considerando-se um estado plano de tensões, as componentes de deformação, em termo das tensões, são dadas por

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}]$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}] \quad (2.10)$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{G} \sigma_{12}$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal, ν o coeficiente de Poisson e G é o módulo de elasticidade transversal.

Pela substituição das equações (2.7) nas equações (2.10) e estas em (2.9), encontra-se

$$u_1 = \frac{(1 - \nu)}{E} \operatorname{Re} \bar{\phi}(z) - \frac{(1 + \nu)}{E} x_2 \operatorname{Im} \phi(z) + q_1(x_2)$$

$$u_2 = \frac{2}{E} \operatorname{Im} \bar{\phi}(z) - \frac{(1 + \nu)}{E} x_2 \operatorname{Re} \phi(z) + q_2(x_1)$$

As constantes arbitrárias de integração são determinadas fazendo-se uso das equações (2.8) e (2.10), onde

$$\epsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{1}{G} \sigma_{12}$$

que, após as substituições devidas, resulta

$$\frac{d}{dx_1} q_2(x_1) + \frac{d}{dx_2} q_1(x_2) = 0$$

Integrando, obtêm-se

$$q_2 = Bx_1 + C \quad \text{e} \quad q_1 = -Bx_2 + C$$

onde, para $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$ tem-se, das equações (2.9),

$$u_1 = q_1(x_2) \quad ; \quad u_2 = q_2(x_1) \quad \text{e}$$

$$\epsilon_{12} = -B + B = 0$$

As funções q_1 e q_2 representam o deslocamento de corpo rígido e, portanto, podem ser desprezadas.

Desta forma, os deslocamentos são expressos por

$$u_1 = \frac{(1 - \nu)}{E} \operatorname{Re} \bar{\phi}(z) - \frac{(1 + \nu)}{E} x_2 \operatorname{Im} \phi(z) \quad (2.11)$$

$$u_2 = \frac{2}{E} \operatorname{Im} \bar{\phi}(z) - \frac{(1 + \nu)}{E} x_2 \operatorname{Re} \phi(z)$$

2.3. Modos de Abertura da Trinca

A distribuição de tensões nas proximidades do extremo da trinca, dependendo do tipo de carregamento, pode ser classificada em três tipos básicos, associados ao movimento relativo das duas superfícies.

Os modos de abertura da trinca são mostrados na figura 2.1, e classificam-se [27] da seguinte forma:

Modo I, caracterizado pelo deslocamento no qual há separação das superfícies da trinca;

Modo II, caracterizado pelo deslocamento no qual as superfícies escorregam, uma em relação a outra, perpendicularmente, ao extremo da trinca;

Modo III, caracterizado pelo escorregamento das superfícies da trinca uma em relação à outra, paralelamente, à extremidade da trinca.

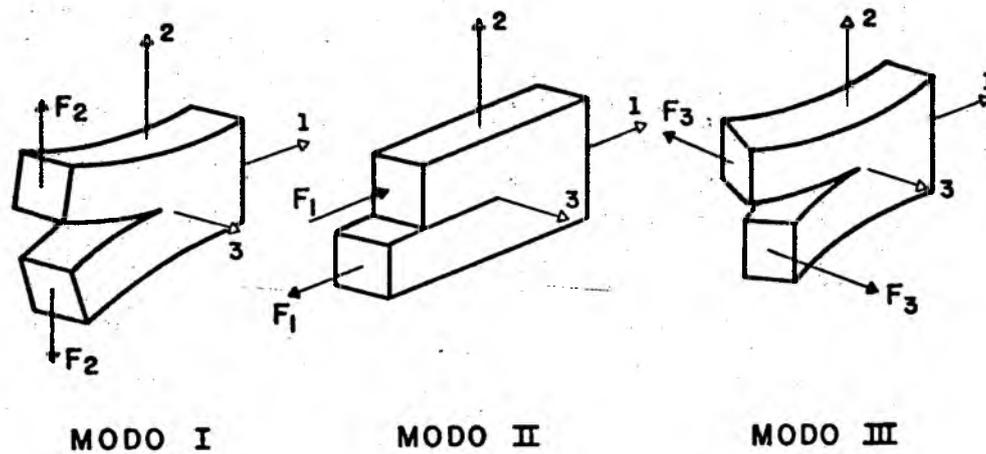


Fig. 2.1 - Modos de abertura da trinca, condições de carregamento.

Os modos I e II podem ser tratados como problemas planos, enquanto que o modo III é um problema de cisalhamento puro.

O modo mais perigoso de propagação, em problemas práticos, é o modo I, sendo muitas vezes causador de uma fratura frágil, com pequena dissipação de energia, enquanto que os modos II e III são menos perigosos, absorvendo maior quantidade de energia, já que existe grande trabalho de deformação plástica.

2.4. Placa com Tração Uniforme Equibiaxial

2.4.1. Função Tensão de Westergaard

Seja uma placa infinita contendo uma trinca reta de comprimento $2a$, situada sobre o eixo x_1 , com tensões σ aplicadas em todo seu contorno no infinito, figura 2.2. A função tensão

real neste tipo de problema (solução de Westergaard) é a descrita na seção 2.2 equação (2.6).

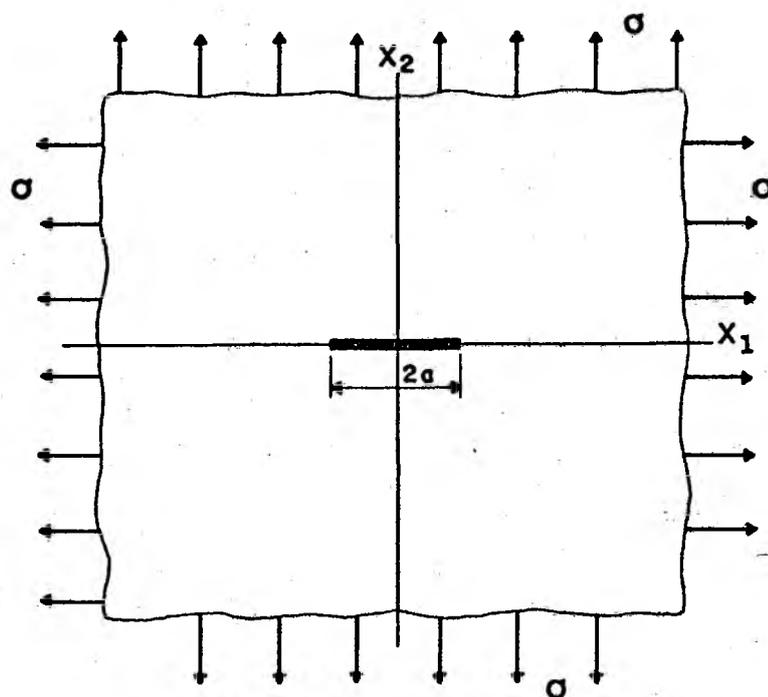


Fig. 2.2 - Placa infinita com tensão equibiaxial.

A função tensão complexa $\phi(z)$ apropriada para satisfazer as condições de contorno do problema [25], tem a forma

$$\phi(z) = \frac{\sigma z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} \quad (2.12)$$

onde $z = x_1 + ix_2$ e sua primeira derivada $\phi'(z)$ e integral $\bar{\phi}(z)$, em relação a z , necessárias para a obtenção das expressões de tensões e deslocamentos, equações (2.7) e (2.11), são

$$\phi'(z) = \frac{\sigma a^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \quad (2.13)$$

e

$$\bar{\phi}(z) = \sigma(z^2 - a^2)^{1/2} \quad (2.14)$$

As tensões no contorno seguem das substituições destas em (2.7) onde, para $|z| \rightarrow \infty$, o resultado é $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma$ e $\sigma_{12} = 0$.

Sobre a superfície da trinca $\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$, o que significa que as condições de contorno do problema são satisfeitas [6].

2.4.2. Forma da Trinca

Para se ter uma idéia da forma como a trinca se deforma sob o estado de tensões aplicado, no caso da placa da figura 2.2, considera-se uma pequena distância r à frente da extremidade da trinca, conforme mostra a figura 2.3, onde $x_1 = a + r$, $x_2 = 0$, e da expressão do deslocamento na direção x_2 , equação (2.11), vem

$$u_2(x_1, 0) = \frac{2}{E} \operatorname{Im} \bar{\phi}(z)$$

onde, pela substituição de $\bar{\phi}(z)$, equação (2.14), e algumas manipulações algébricas, encontra-se

$$u_2 = \frac{2}{E} a \sigma \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)^{1/2} \quad (2.15)$$

Fazendo $b = 2a\sigma/E$ é possível colocar a expressão acima na forma

$$\frac{u_2^2}{b^2} + \frac{x_1^2}{a^2} = 1$$

que mostra que, ao se deformar, a trinca toma a forma de uma elipse com eixo maior igual a a e eixo menor igual a b .

Nota-se também que sob esta condição de carregamento o modo de abertura da trinca está enquadrado no modo I.

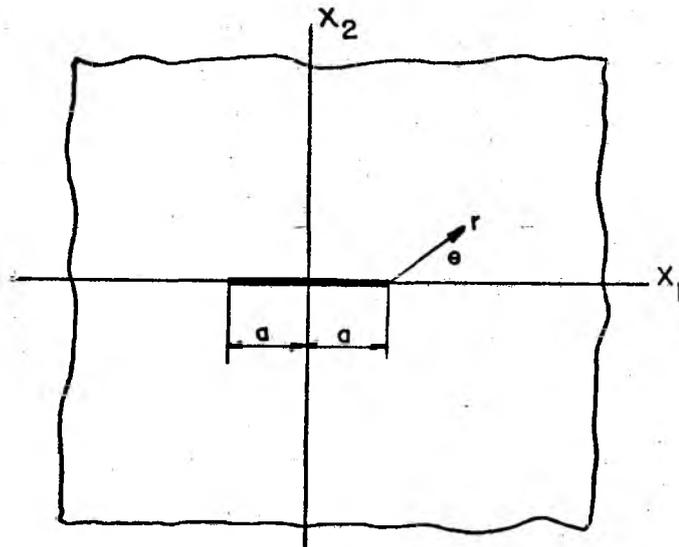


Fig. 2.3 - Sistema de coordenadas no extremo da trinca.

2.4.3. Tensões e Deformações na Extremidade da Trinca

Para melhor expressar a distribuição de tensões e deslocamentos próximos a extremidade da trinca, toma-se o sistema de coordenadas polares, figura 2.3, onde em relação ao sistema anterior, pode-se escrever $z = a + \eta$, $\eta = r e^{i\theta}$.

Para o sistema de coordenadas dado, a função tensão de Westergaard, equação (2.12), resulta

$$\phi(z) = \frac{\sigma(a + \eta)}{[(a + \eta)^2 - a^2]^{1/2}}$$

ou

$$\phi(z) = \frac{\sigma\left(\frac{a}{\eta} + 1\right)}{\left(\frac{2a}{\eta} + 1\right)^{1/2}}$$

Para distâncias muito próximas da extremidade da trinca, ou seja, $\eta/a \ll 1$, a expressão pode ser colocada na forma

$$\phi(z) = \frac{\sigma(a/\eta)}{(2a/\eta)^{1/2}}$$

ou

$$\phi(z) = \sigma\left(\frac{a}{2\eta}\right)^{1/2}$$

Tendo-se que $\eta = r e^{i\theta}$, e considerando as equações de Euler, $e^{i\theta} = \cos \theta/2 + i \sin \theta/2$, obtém-se

$$\phi(z) = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.16)$$

Com o mesmo procedimento, obtêm-se, através da equação (2.13)

$$\phi'(z) = -\frac{\sigma}{2r} \sqrt{\frac{a}{2r}} \left(\cos \frac{3\theta}{2} - i \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.17)$$

e através da equação (2.14),

$$\bar{\phi}(z) = \sigma \sqrt{2ar} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.18)$$

Da figura 2.3, pode-se concluir que

$$x_2 = r \operatorname{sen} \theta \quad (2.19)$$

Pela substituição das expressões de (2.16) a (2.19) em (2.7) e (2.11), obtêm-se as expressões para tensões e deslocamentos válidas nas proximidades da extremidade da trinca.

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{22} &= \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{12} &= \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

e

$$u_1 = \sigma \sqrt{2ar} \frac{(1 + \nu)}{E} \cos \frac{\theta}{2} \left[\frac{(1 - \nu)}{(1 + \nu)} + \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (2.21)$$

$$u_2 = \sigma \sqrt{2ar} \frac{(1 + \nu)}{E} \cos \frac{\theta}{2} \left[\frac{2}{(1 + \nu)} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

A expressão exata de σ_{11} e σ_{22} , das equações (2.7), para $x_1 = a + r$ e $x_2 = 0$ é

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{\text{exata}} = \text{Re } \phi(z)$$

Nesta situação, $z = x_1$ e

$$\sigma_{\text{exata}} = \frac{\sigma x_1}{(x_1^2 - a^2)^{1/2}}$$

ou

$$\sigma_{\text{exata}} = \frac{\sigma(a + r)}{((a + r)^2 - a^2)^{1/2}}$$

donde

$$\sigma_{\text{exata}} = \frac{\sigma(1 + r/a)}{(r/a)^{1/2} (2 + r/a)^{1/2}}$$

Das equações (2.20), para a mesma condição ou seja $(r, \theta = 0^\circ)$, tem-se

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{\text{aprox}} = \sigma \left(\frac{a}{2r} \right)^{1/2}$$

onde

$$\frac{\sigma_{\text{exata}}}{\sigma_{\text{aprox}}} = \frac{(1 + r/a)}{(1 + r/2a)^{1/2}}$$

Do gráfico, figura 2.4, pode-se ter uma idéia da variação da relação acima e a aproximação feita.

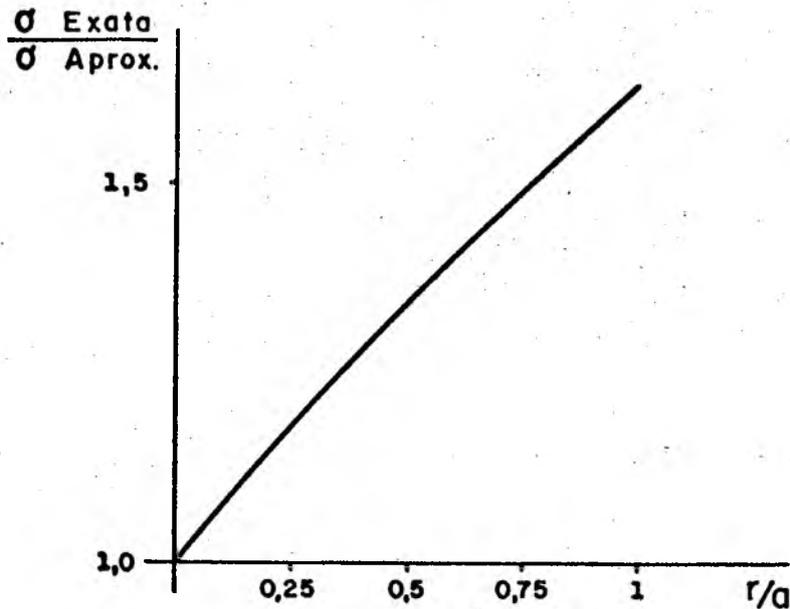


Fig. 2.4 - Relação entre solução exata e solução aproximada.

2.5. Fator de Intensidade de Tensões

2.5.1. Definição Usual

A análise de um corpo elástico sob tração, contendo um corte ou entalhe, indica elevações de tensão que, dependendo do carregamento, podem levar à ruptura do corpo. Um parâmetro utilizado para medir tais incrementos, considerando entalhes suaves e que antecedeu à Mecânica da Fratura, é o denominado fator de concentração de tensões, K_t , definido pela razão entre a máxima tensão ocorrida no extremo do entalhe e a tensão nominal.

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma}$$

No caso de uma trinca, ou seja, quando o raio de curvatura do entalhe tende a zero, em um material perfeitamente elástico, a tensão no extremo da trinca tende a infinito e, em consequência, K_t também.

Na Mecânica da Fratura, um outro fator foi introduzido para representar a magnitude das tensões nas proximidades da extremidade da trinca, denominado de fator de intensidade de tensões, K_m , e definido [7] como

$$K_m = Y \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2.22)$$

onde $m = I, II, III$ indica o modo de abertura, σ é a tensão nominal, a é uma dimensão característica da trinca e Y é o fator geométrico, introduzido por Irwin [7] como um fator de correção, que depende da forma e proporções do componente sob estudo, bem como do carregamento e orientação da trinca. O valor numérico de Y difere também de acordo com a definição usada para o fator de intensidade de tensões, ou seja, $K = Y \sigma \sqrt{a}$ ou $K = Y \sigma \sqrt{\pi a}$, sendo esta última forma a mais usada.

2.5.2. Definição Formal

No caso de uma placa infinita, conforme figura 2.2, pode-se generalizar as expressões de tensões (2.20) colocando-as na forma

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} f_{ij}(\theta)$$

onde $\sigma\sqrt{a}$ é o termo constante que, comparado com a definição do fator de intensidade de tensões leva a concluir que para uma placa infinita, condição mostrada na figura 2.2, $Y = 1$ e a expressão acima pode ser escrita como

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (2.23)$$

o que indica que a distribuição de tensões para um ponto considerado fica em função apenas da magnitude do fator de intensidade de tensões.

Do estudo da expressão (2.23), válida para $r/a \ll 1$, provém a definição formal para o fator de intensidade de tensão na forma

$$K_m = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_n(r, \theta = 0) \sqrt{2\pi r} \quad (2.24)$$

onde $m = I, II, III$ e σ_n é a tensão apropriada ao modo de abertura da trinca. Quando $r \rightarrow 0$ o campo de tensões e deslocamentos fica univocamente definido por K , para qualquer geometria.

2.5.3. Distribuição de Tensões e Deslocamentos para uma Placa Infinita

Considerando a placa infinita, conforme ilustra a figura 2.2 onde, na seção 2.4.2, ficou caracterizada como modo I de

abertura da trinca tem-se, da definição formal do fator de intensidade de tensões dada pela equação (2.24),

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{22}(r, \theta = 0) \sqrt{2\pi r}$$

onde das equações (2.20)

$$\sigma_{22}(r, \theta = 0) = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}}$$

Substituindo e operando, encontra-se

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$$

Assim, a distribuição de tensões e deslocamentos, para uma placa infinita em termos do fator de intensidade de tensões, das equações (2.20) e (2.21), será

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \quad (2.25)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

para as tensões, e

$$u_1 = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (2.26)$$

$$u_2 = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[\frac{2}{(1+\nu)} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

para os deslocamentos em um estado plano de tensões. Válidas para uma pequena distância à frente da trinca, ou seja $r/a \ll 1$.

2.6. Correção das Equações de Westergaard

2.6.1. Constante Real

As equações de Westergaard, conforme já demonstrado, aplicam-se a uma certa classe de problemas da elasticidade linear. A forma mais geral dessas equações foram apresentadas por Sih [29] e posteriormente enfatizadas por Eftis e Liebowitz [13], que demonstraram, pelo uso da representação complexa de Goursat-Kolosov para problemas planos, conter essas equações mais um termo constante, real.

Assim, as expressões de tensões e deslocamentos anteriormente vistas, passam a ter a forma [14].

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \operatorname{Re} \phi^*(z) - x_2 \operatorname{Im} \phi^{*'}(z) - A \\ \sigma_{22} &= \operatorname{Re} \phi^*(z) + x_2 \operatorname{Im} \phi^{*'}(z) + A \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\sigma_{12} = -x_2 \operatorname{Re} \phi^{*'}(z)$$

e

$$u_1 = \frac{(1-\nu)}{E} \operatorname{Re} \bar{\phi}^*(z) - \frac{(1+\nu)}{E} x_2 \operatorname{Im} \phi^*(z) - \frac{(1+\nu)}{E} Ax_1 \quad (2.28)$$

$$u_2 = \frac{2}{E} \operatorname{Im} \bar{\phi}^*(z) - \frac{(1+\nu)}{E} x_2 \operatorname{Re} \phi^*(z) + \frac{(1+\nu)}{E} Ax_2$$

Tendo-se que as expressões anteriores, juntamente com a função $\phi^*(z)$ assumida, devem satisfazer as condições de contorno do problema, a constante A depende da maneira com que o carregamento é aplicado e anular-se-á somente em condições especiais deste.

Assim para uma placa infinita com tensões biaxiais, figura 2.5, tem-se [13]

$$\phi^*(z) = \frac{\sigma z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} - A \quad (2.29)$$

$$e \quad A = (1 - \nu) \frac{\sigma}{2} \quad (2.30)$$

$$\text{onde } \mu = \frac{\sigma_{11}(\infty)}{\sigma_{22}(\infty)} \quad (2.31)$$

sendo as tensões calculadas por (2.27) e os deslocamentos por (2.28).

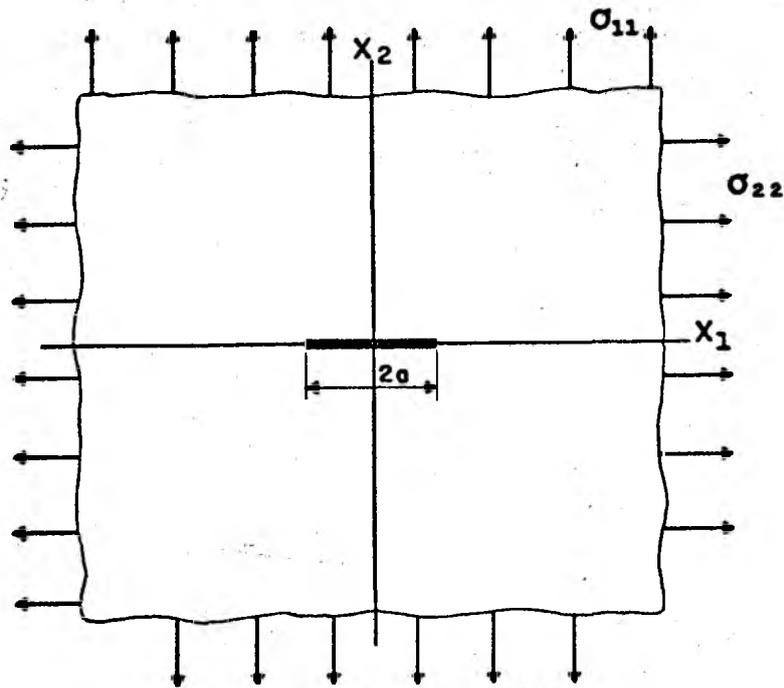


Fig. 2.5 - Placa com tensões biaxiais.

No caso equibiaxial, $\mu = 1$ e A torna-se nulo, sendo válidas as expressões anteriormente deduzidas, (2.7) e (2.11).

Para o caso de tensões uniaxiais, figura 2.6, onde há o interesse prático em se obter as correspondentes funções de tensões e deslocamentos para este tipo de problema, obtém-se, da equação (2.29), (2.27) e (2.28),

$$\sigma_{11} = \operatorname{Re} \phi(z) - x_2 \operatorname{Im} \phi'(z) - 2A$$

$$\sigma_{22} = \operatorname{Re} \phi(z) + x_2 \operatorname{Im} \phi'(z) \quad (2.32)$$

$$\sigma_{12} = -x_2 \operatorname{Re} \phi'(z)$$

e

$$u_1 = \frac{(1 - \nu)}{E} \operatorname{Re} \bar{\phi}(z) - \frac{(1 + \nu)}{E} x_2 \operatorname{Im} \phi(z) - \frac{2}{E} A x_1$$

$$u_2 = \frac{2}{E} \operatorname{Im} \bar{\phi}(z) - \frac{(1 + \nu)}{E} x_2 \operatorname{Re} \phi(z) + \frac{2\nu}{E} A x_2$$
(2.33)

sendo, de (2.30), $A = \sigma/2$, onde em (2.31) $\sigma_{11} = 0$.

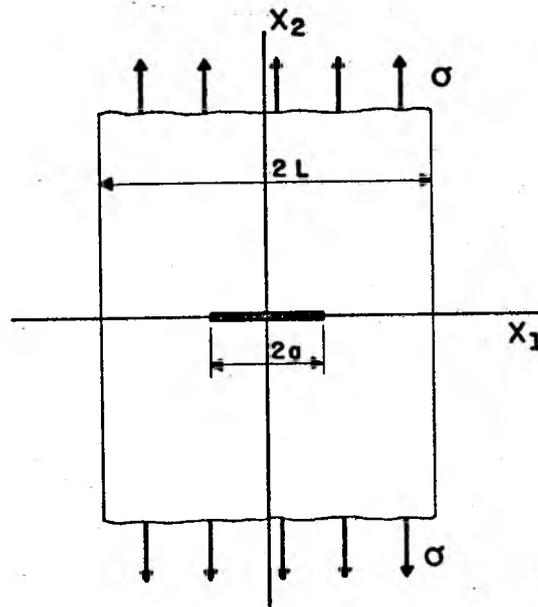


Fig. 2.6 - Placa de largura finita com tensões uniaxiais.

2.6.2. Fator Geométrico para uma Placa de Largura Finita.

Um caso de grande interesse em testes de fratura é o

de uma placa de largura finita, com uma trinca central ilustrada na figura 2.6. Irwin foi o primeiro a introduzir soluções aproximadas para este tipo de problema, partindo da solução obtida para uma placa infinita com tensões biaxiais e trincas periódicas colineares, tomando uma fatia dessa placa, figura 2.7.

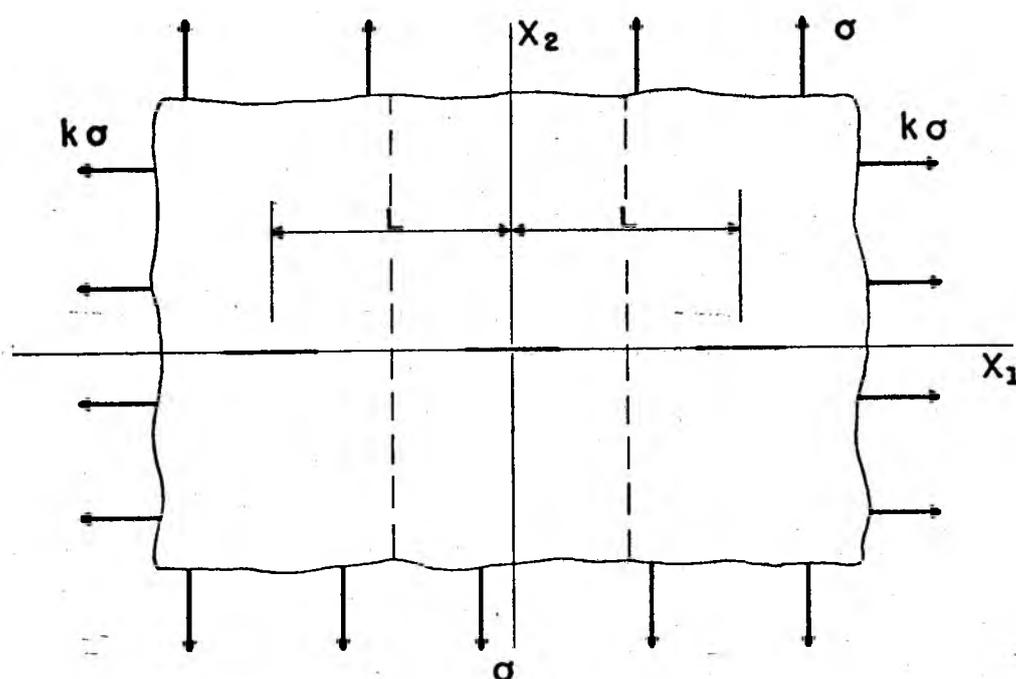


Fig. 2.7 - Placa com trincas periódicas colineares.

Ao campo de tensões associado à solução de problema para a placa infinita, Irwin adicionou tensões uniformes de compressão, de magnitude σ , ao longo da borda vertical, as quais tinham o efeito de compensar o termo omissa A. Esta combinação satisfaz parcialmente às condições de contorno ao longo da borda vertical, figura 2.8.

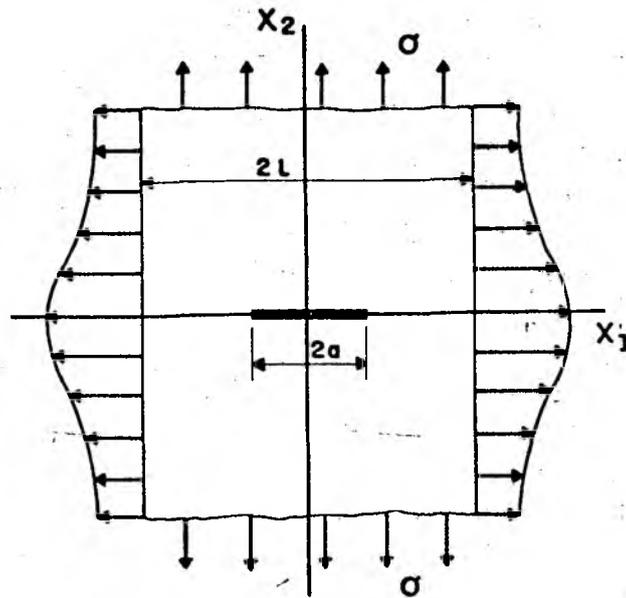


Fig. 2.8 - Tensões na extremidade vertical da fatia retirada da placa infinita.

Admitindo-se que as tensões paralelas à trinca não contribuem no fator de intensidade de tensões a solução do problema ilustrado na fig. 2.6 pode ser usada. O fator de intensidade de tensões que emana dessa solução é expresso pela chamada fórmula da tangente [13] .

$$K_I = \sigma \left[2L \tan \frac{\pi a}{2L} \right]^{1/2} \quad (2.34)$$

Comparando com a equação (2.22), o fator geométrico tem a forma

$$Y = \left[\frac{2L}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2L} \right]^{1/2} \quad (2.35)$$

Subseqüentemente, Feddersen [16] propôs a fórmula da secante, que mostrou ser mais precisa para a geometria em questão.

$$K_I = \sigma \left[\pi a \sec \left(\frac{\pi a}{2L} \right) \right]^{1/2} \quad (2.36)$$

onde

$$Y = \left[\sec \left(\frac{\pi a}{2L} \right) \right]^{1/2} \quad (2.37)$$

2.7. Análise dos Modos II e III

2.7.1 Modo II - Cisalhamento em Trinca

Para uma placa infinita, figura 2.9, contendo uma trinca central de comprimento $2a$, ao longo do eixo x_1 , sujeita a tensões cisalhantes $\sigma_{12} = \tau$ aplicada no infinito, a função tensão real neste problema, conforme Westergaard [12], [20], é dada na forma

$$F = -x_2 \operatorname{Re} \bar{\phi}_{II}(z) \quad (2.38)$$

onde ϕ_{II} é a função tensão complexa.

As componentes de tensão são dadas pelas equações (2.4), que, pela substituição de (2.38) fornecem

$$\sigma_{11} = 2 \operatorname{Im} \phi_{II}(z) + x_2 \operatorname{Re} \phi'_{II}(z)$$

$$\sigma_{22} = -x_2 \operatorname{Re} \phi'_{II}(z) \quad (2.39)$$

$$\sigma_{12} = \operatorname{Re} \phi_{II}(z) - x_2 \operatorname{Im} \phi'_{II}(z)$$

A função tensão complexa apropriada, para satisfazer as condições de contorno do problema tem a forma [23].

$$\phi_{II}(z) = \frac{\tau z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} \quad (2.40)$$

Uma vez que a função tensão assumida (2.40) é semelhante à do problema anterior, salvo pela mudança de σ , por τ , pelos mesmos procedimentos e considerações anteriores, obtêm-se, para as componentes de tensão e deformação nas proximidades do extremo da trinca,

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\tau \sqrt{\frac{a}{2r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_{22} &= \tau \sqrt{\frac{a}{2r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\sigma_{12} = \tau \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right]$$

e

$$u_1 = \tau \sqrt{2a r} \frac{(1 + \nu)}{E} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left[\frac{2}{(1 + \nu)} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (2.42)$$

$$u_2 = -\tau \sqrt{2a r} \frac{(1 + \nu)}{E} \cos \frac{\theta}{2} \left[\frac{(1 - \nu)}{(1 + \nu)} - (1 + \nu) \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

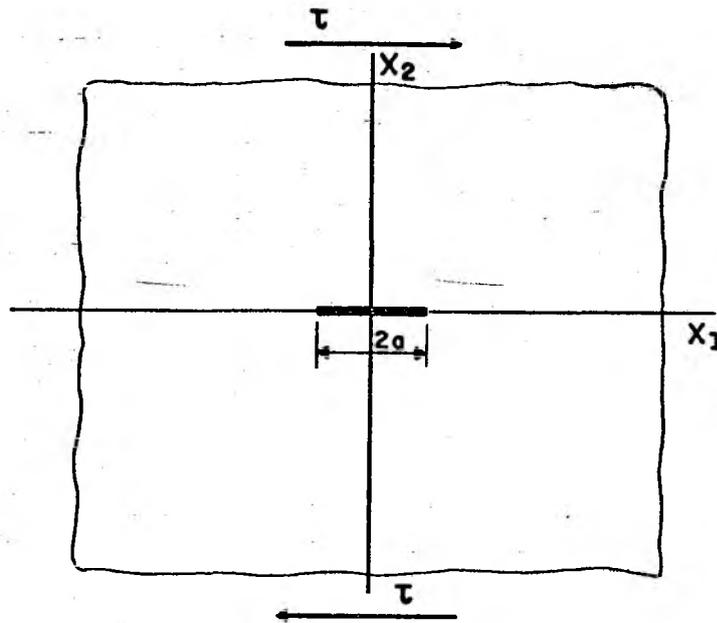


Fig. 2.9 - Modo II - Trinca sob condições de tensões cisalhantes aplicadas no infinito.

De acordo com a definição formal do fator de intensidade de tensões, equação (2.24), para o modo II de abertura de trinca, com $\sigma_n = \tau_{12}$, obtém-se

$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi a} \quad (2.43)$$

e as expressões de tensões e deslocamento para um estado plano de tensões, tornam-se

$$\sigma_{11} = - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (2.44)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right]$$

e

$$u_1 = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[\frac{2}{(1+\nu)} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

(2.45)

$$u_2 = - \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

2.7.2. Modo III - Anti-plano de Deformação

Para caracterizar o modo III, toma-se uma trinca de comprimento $2a$, sobre o eixo x_1 , solicitada por uma tensão $\sigma_{23} = \tau$, aplicada no infinito, figura 2.10.

Os deslocamentos u_1 e u_2 , na direção de x_1 e x_2 , respectivamente, são tomados como zero, enquanto que todos os deslocamentos e tensões são constantes em relação às distâncias ao longo do eixo x_3 [12], [19].

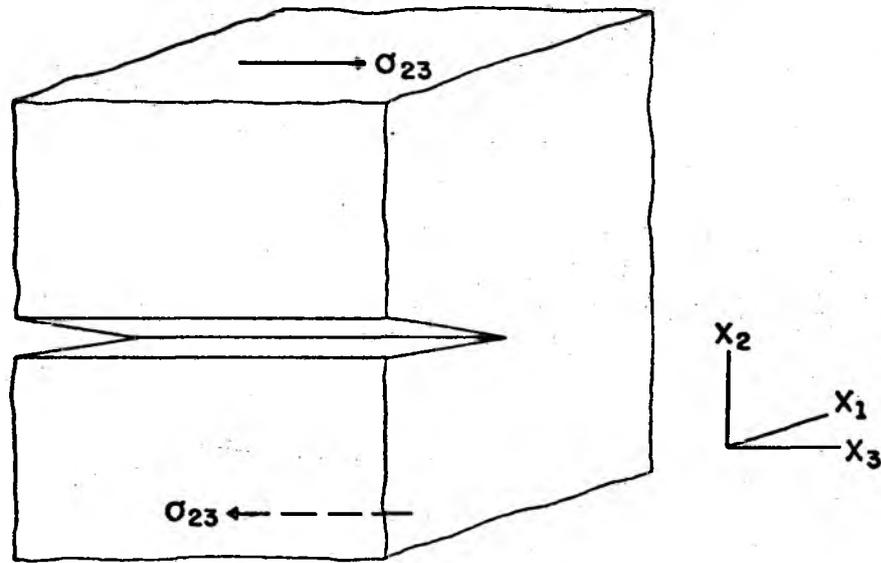


Fig. 2.10 - Modo III - Trinca sob condições anti-plano de deformação.

A forma deformada da trinca é definida pela distribuição dos deslocamentos $u_3(x_1, x_2)$ na direção de x_3 . Assume-se isto para caracterizar um estado de cisalhamento puro onde as seguintes componentes de tensão não são zero

$$\sigma_{13} = G \frac{\partial u_3}{\partial x_1}$$

$$\sigma_{23} = G \frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

(2.46)

As equações de equilíbrio reduzem-se a

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = 0 \quad (2.47)$$

Substituindo (2.46) em (2.47), obtêm-se

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = \nabla^2 u_3 = 0$$

Qualquer parte real ou imaginária de uma função complexa, analítica, satisfaz à equação diferencial acima (apêndice A1). Assim, a seguinte função foi escolhida para compatibilizar com o problema dado

$$u_3 = \frac{1}{G} \operatorname{Im} \phi_{III}(z)$$

Substituindo em (2.46), encontra-se

$$\sigma_{13} = \operatorname{Im} \phi'_{III}(z) \quad (2.48)$$

$$\sigma_{23} = \operatorname{Re} \phi'_{III}(z)$$

Para satisfazer as condições de contorno, com $\sigma_{23} = \tau$, no infinito e $\sigma_{23} = 0$ dentro da trinca, e a função complexa escolhida tem a forma

$$\phi_{III}(z) = \tau (z^2 - a^2)^{1/2}$$

onde

$$\phi'_{III}(z) = \frac{\tau z}{(z^2 - a^2)^{1/2}}$$

Fazendo a substituição das funções acima nas expressões de tensão e deslocamento e com as mesmas considerações anteriores tem-se, para uma distância r próxima à extremidade da trinca,

$$\sigma_{13} = -\tau \sqrt{\frac{a}{2r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$$

(2.49)

$$\sigma_{23} = \tau \sqrt{\frac{a}{2r}} \operatorname{cos} \frac{\theta}{2}$$

e

$$U_3 = \frac{\tau}{G} \sqrt{2a r} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$$

O fator de intensidade de tensões, para o modo III, onde $\sigma_n = \tau_{23}$, fica sendo

$$K_{III} = \tau \sqrt{\pi a}$$

e das equações (2.49) obtém-se as seguintes expressões

$$\sigma_{13} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$$

$$\sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (2.50)$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$$

e

$$u_3 = \frac{K_{III}}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \quad (2.51)$$

$$u_1 = u_2 = 0$$

2.8. Energia de Deformação

2.8.1. Trabalho e Energia

Considerando a deformação que ocorre quando um corpo, inicialmente não solicitado, é sujeito a um sistema de cargas aplicadas, figura 2.11, o processo de deformação [30] é governado pela primeira lei da Termodinâmica, a qual requer que

$$T_E + Q = \Delta E \quad (2.52)$$

onde T_E é o trabalho realizado pelas forças externas aplicadas durante o processo de carregamento, Q é o calor absorvido pelo corpo dos seus arredores e ΔE é a mudança de energia associada ao corpo como resultado do carregamento.

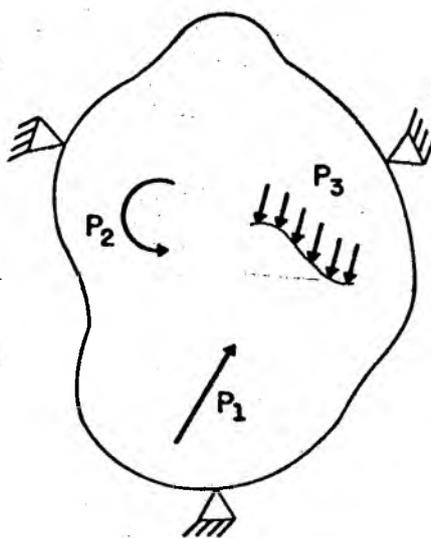


Fig. 2.11 - Sistema de cargas externas aplicadas

Em geral a variação de energia ΔE , de um corpo elástico é dada pela variação de energia cinética E_c , mais a variação de energia interna U . Assumindo que o processo de deformação seja adiabático ($Q = 0$), e que o carregamento seja aplicado lentamente, de forma a manter o equilíbrio durante todo o processo ($E_c = 0$), a expressão da conservação de energia, reduz-se a

$$T_E = U \quad (2.53)$$

Assim, o trabalho realizado pelas forças externas é igual à mudança de energia interna do corpo.

Assumindo que o material seja perfeitamente elástico, sendo o trabalho mecânico recuperado se as cargas forem removidas lentamente, a energia interna do corpo é armazenada sob a forma de energia elástica de deformação. Assim para um estado tri-dimensional, a energia de deformação segue diretamente da soma das

energias de cada componente de tensão, ou seja,

$$U = \int_V \int_0^{\epsilon_{kl}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dv \quad (2.54)$$

e a densidade de energia de deformação, definida como dU/dv , é

$$W = \int_0^{\epsilon_{kl}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (2.55)$$

2.8.2. Trabalho Realizado pelas Forças Externas

Considerando o equilíbrio de um corpo sob a ação de um sistema de cargas, P_1, P_2, \dots, P_n , denominadas de forças generalizadas, representando cargas concentradas, distribuídas, forças cisalhantes, momentos, etc..., figura 2.11 e assumindo que o corpo é suportado de maneira que não haja um deslocamento de corpo rígido, pode-se expressar T_E em termos das cargas externas aplicadas.

Em geral o deslocamento de um ponto do corpo é produzido pela ação combinada de todas as cargas aplicadas. Assim, para um corpo elástico linear onde os deslocamentos são proporcionais às forças generalizadas, pode-se escrever

$$u_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} P_j \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.55)$$

ou na forma matricial

$$\{u\} = [C] \{P\} \quad (2.56)$$

onde C_{ij} é conhecido como coeficiente de flexibilidade.

Desejando expressar as forças generalizadas em termos dos deslocamentos generalizados, assume-se que o sistema (2.55) possa ser invertido [30], ou seja, a matriz $[C]$ é positiva definida, então

$$P = \sum_{j=1}^n k_{ij} u_j \quad (2.57)$$

ou na forma matricial

$$\{P\} = [k] \{u\} \quad (2.58)$$

onde $[k] = [C]^{-1}$ e k_{ij} é conhecido como coeficiente de rigidez.

Genericamente, tem-se para o trabalho externo realizado por uma força P ao deslocar um ponto de uma determinada quantidade u , considerando o caso elástico linear,

$$T_E = \frac{1}{2} u P$$

Supondo a ação de todas as forças generalizadas P_i , o trabalho é então dado por

$$T_E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n u_i P_i \quad (2.59)$$

Em conjunto com o princípio da conservação de energia, onde as quantidades U e T_E são iguais, se o processo de deformação for adiabático e quase estático, obtém-se uma maneira de determinar a energia de deformação através das cargas e deslocamentos obtidos.

2.8.3. Energia na Análise de Trincas

A figura 2.12 mostra a situação onde uma trinca de comprimento $2a$ situada em uma placa infinita, é solicitada por tensões de tração σ . Pode-se considerar agora a mudança de energia que ocorre para estender a trinca de uma quantidade infinitesimal ou seja de a para $a + \delta a$.

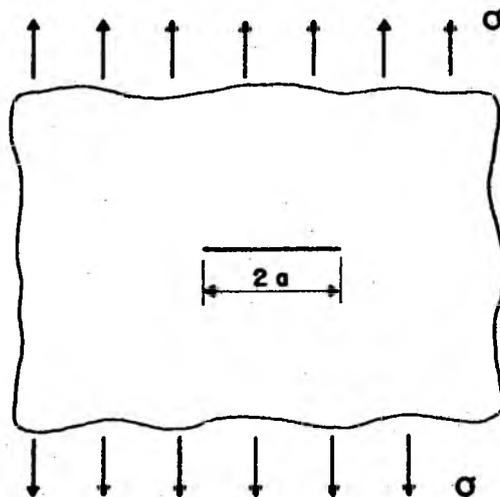


Fig. 2.12 - Configuração geométrica da placa.

Considerando inicialmente a condição de deslocamento constante, $u = u_1 = \text{constante}$, para um material elástico, fazendo-se uso do gráfico da figura 2.13, que apresenta curvas de carga-deslocamento para trincas de comprimento a e $a + \delta a$, do ponto de vista macroscópico [17], verifica-se que um aumento da trinca de a para $a + \delta a$, ocasiona uma diminuição na energia elástica de deformação, de $1/2 P_1 u_1$ para $1/2 P_2 u_1$, representada na figura 2.13 pela área do triângulo OAC

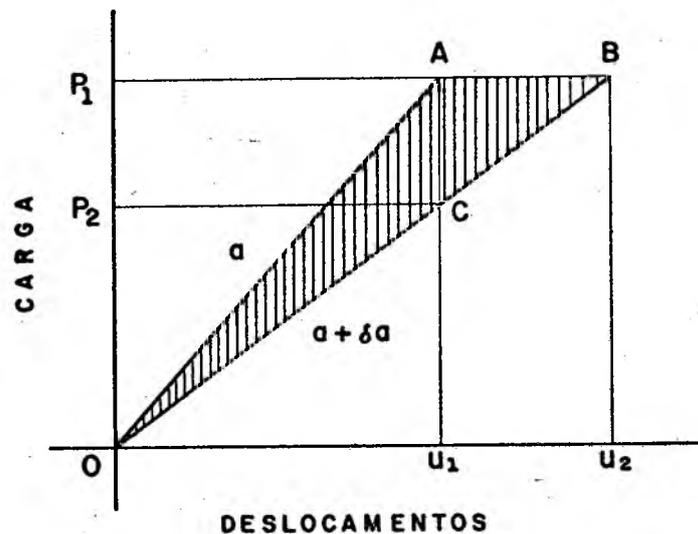


Fig. 2.13 - Gráfico carga-deslocamento para comprimentos de trincas a e $a + \delta a$.

Nestas condições a propagação da trinca provoca uma liberação de energia elástica de $1/2 (P_1 - P_2) u_1$, ou seja, um aumento no comprimento da trinca diminui a rigidez da placa.

Sob a condição de carga constante ($P = P_1 = \text{cte}$), a energia elástica armazenada para um comprimento de trinca $a + \delta a$

é $1/2 P_1 u_2$, área do triângulo OBu_2 da figura 2.13, e é maior do que a armazenada para o comprimento a , área do triângulo OAU_1 . Isto porque um aumento no comprimento da trinca diminui a rigidez da placa, permitindo que sob a carga aplicada ocorra um deslocamento de u_1 para u_2 , realizando trabalho. A energia potencial, sofre então um decréscimo, área do triângulo OAB , de

$$P(u_2 - u_1) - \frac{1}{2} P_1(u_2 - u_1) = \frac{1}{2} P_1(u_2 - u_1)$$

Dentro da análise linear, definindo $P_2 - P_1 = \delta P$ e $u_2 - u_1 = \delta u$, pode-se mostrar que a energia liberada quando $\delta a \rightarrow 0$, é igual para as duas situações, ou seja

$$\text{energia de deformação liberada (u = cte)} = - \frac{1}{2} u \delta P \quad (2.60)$$

$$\text{redução da energia potencial (P = cte)} = - \frac{1}{2} P \delta u \quad (2.61)$$

e da relação, equação 2.55, onde para um dado comprimento de trinca, tem-se

$$u = CP \quad (2.62)$$

Se a mudança de comprimento da trinca $\delta a \rightarrow 0$, pode-se tratar C como sendo igual para os comprimentos de trinca a e $a + \delta a$, assim a expressão (2.62) pode ser escrita na forma

$$\delta u = C \delta P \quad (2.63)$$

e pela substituição de (2.62) em (2.60) e (2.63) em (2.61), obtém-se

$$\frac{1}{2} u \delta P = \frac{1}{2} CP \delta P$$

$$\frac{1}{2} P \delta u = \frac{1}{2} CP \delta P$$

Conclui-se que para uma propagação infinitesimal da trinca, a diminuição na energia de deformação elástica armazenada num corpo, cuja condição é de deslocamento constante, é igual à diminuição de energia potencial cuja condição é de carga constante.

2.8.4. Métodos de Energia na Análise de Trincas

Griffith considerou a força dirigida para a propagação da trinca como a diferença entre a energia liberada quando a trinca se propaga e a energia necessária para a criação de novas superfícies da trinca. Seu método de calcular a energia é um tanto complicado, porque ele considera mudanças de energia em todo corpo, sendo necessária a integração do produto tensão -deformação em toda a placa.

Métodos mais simples e aproximados foram, então, apresentados por Knott [19], baseado no princípio de Griffith de relacionar a propagação da trinca com a mudança de energia.

2.8.4.1. Método da Flexibilidade

Na seção anterior demonstrou-se que a energia elástica de deformação liberada para estender a trinca de um comprimento δa era de $1/2 P \delta u$. A taxa de liberação de energia, representada por G , é definida como a energia por unidade de nova área de trinca criada. Para um corpo de espessura unitária,

$$G = \frac{\delta U}{\delta a} = \frac{1}{2} p \frac{\delta u}{\delta a} \quad (2.64)$$

Porém, como se pode verificar na área hachurada da figura 2.13, há dificuldade em medir essa quantidade quando $\delta a \rightarrow 0$. Através de um rearranjo dos termos da expressão (2.64) busca-se a obtenção de parâmetros mais facilmente mensuráveis.

Assim, da equação (2.63), para uma carga constante ($\delta u = P \delta C$), encontra-se, substituindo em (2.64) e calculando-se o limite para $\delta a \rightarrow 0$,

$$G = \frac{1}{2} p^2 \frac{\partial C}{\partial a} \quad (2.65)$$

O problema fica então resolvido determinando-se a flexibilidade C , como função do comprimento da trinca, medindo-se a inclinação da respectiva curva num comprimento de trinca apropriado. Tem-se em decorrência, um método prático para determinar a taxa de liberação de energia, apropriado a corpos de prova relativamente pequenos, com os quais é possível obter boas medi-

das em laboratório.

2.8.4.2. Métodos do Fator de Intensidade de Tensões

Baseado nas formulações de Griffith, um método relacionando a taxa de liberação de energia com o fator de intensidade de tensões é apresentado por Knott [19].

Ao contrário do procedimento de Griffith, a região a ser estudada será tomada próxima à extremidade da trinca, pequena em comparação com um todo, mas grande o suficiente em relação às dimensões atômicas para a aplicação da teoria da elasticidade. A variação de energia de deformação, $\partial U/\partial a$, se o corpo elástico é carregado e restrito seu movimento, é somente dada pela contribuição de G .

Nestas condições, o trabalho requerido para fechar um pequeno segmento de trinca δa , figura 2.14, é idêntico à variação de energia de deformação do corpo e esta pode ser avaliada calculando-se o trabalho realizado pelas forças de superfícies atuando ao longo de δa , quando o comprimento da trinca é diminuído de $a + \delta a$ para a . Considerando um corpo de espessura unitária, tem-se

$$G\delta a = \int_0^{\delta a} \sigma_{22} u_2 dr \quad (2.66)$$

A situação física está mostrada na figura 2.14, onde são apresentadas a distribuição de tensões para uma trinca de comprimento a , e a distribuição de deslocamentos para uma trinca de comprimento

to $a + \delta a$.

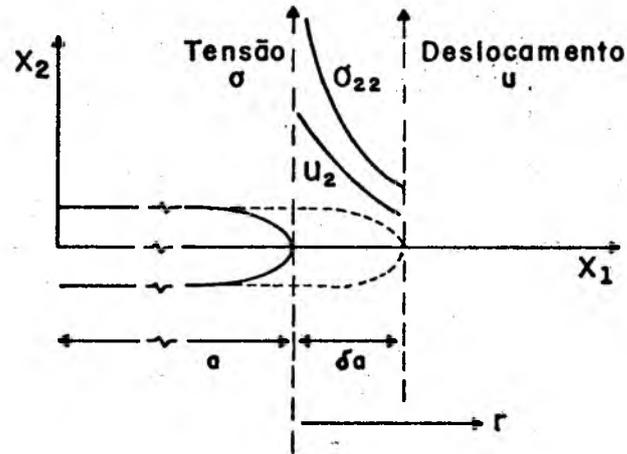


Fig. 2.14 - Situação física para o fechamento da trinca de $a + \delta a$ para a .

A solução de Westergaard para a distribuição de tensões e deslocamentos correspondentes, ou seja, $\sigma_{22}(r, \theta = \theta^0)$ e $u_2(r, \theta = 180^\circ)$ é dada, respectivamente, pelas equações (2.20), (2.21), onde

$$\sigma_{22} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \quad (2.67)$$

para um comprimento de trinca a , e

$$u_2 = \frac{2}{E} \sigma \sqrt{2a(\delta a - r)} \quad (2.68)$$

para uma variação no comprimento da trinca de $a + \delta a$ para a .

Substituindo as equações (2.67), (2.68) na equação (2.66) e integrando, obtém-se

$$G = \frac{\partial U}{\partial a} = \frac{K_I^2}{E} \quad (2.69)$$

para um estado plano de tensões

e

$$G = \frac{\partial U}{\partial a} = (1 - \nu^2) \frac{K_I^2}{E} \quad (2.70)$$

para um estado plano de deformação.

Observa-se que desta maneira a taxa de liberação é determinada a partir do fator de intensidade de tensões, que pode ser determinado para um grande número de diferentes geometrias e carregamentos.

Da mesma forma que foi determinado para o modo I de abertura da trinca, pode-se determinar a taxa de liberação de energia para os modos II ou III, ou combinações destes.

3. PROCESSOS NUMÉRICOS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DA MECÂNICA DA FRATURA

3.1. Introdução

O uso de métodos numéricos para possibilitar a determinação do fator de intensidade de tensões em cortes ou trincas, pode ser dividido em três categorias [19]. A primeira categoria faz uso de polinômios, que são importantes porque fornecem uma boa técnica para gerar funções rapidamente e são frequentemente empregados como solução do método de variáveis complexas, desenvolvido por Mushkelishvili [21].

A segunda categoria envolve equações de diferenças finitas, nela a função é definida, não em forma analítica, mas por seus valores, correspondentes a pontos regularmente espaçados dentro do domínio, onde empregando a técnica de diferenças finitas, se obtém a solução aproximada [15].

A terceira é o método de elementos finitos, um dos mais utilizados na análise numérica. O princípio envolvido neste método é que o corpo, considerado como contínuo, obedece certos tipos de relações tensão-deformação e é constituído por um conjunto de sub-regiões chamadas elementos, usualmente na forma triangular ou quadrangular para os problemas bidimensionais. Além do mais, as funções definidas para cada sub-região são contínuas entre os elementos, tal como se não houvesse subdivisões. O uso do método de elementos finitos permite, desta forma, determinar tensões e deformações que ocorrem em qualquer parte do corpo bem como outras variáveis de interesse, [18] [32].

Além destes métodos, outros apresentam-se, tais como, representação conforme, método de expansão em séries de Laurent, aproximações assintóticas, método alternante, método de transformações integrais e outros [28].

3.2. Método de Elementos Finitos

O uso da solução aproximada pelo método de elementos finitos trouxe nesses últimos anos solução a uma larga faixa de problemas práticos de engenharia, com geometria, condições de contorno e carregamento complexos, bem como para materiais não lineares. O método tem sido aplicado a corpos planos, tridimensionais, placas, cascas, materiais isotrópicos, ou anisotrópicos e outros, que podem ser analisados com quase igual facilidade. O método tem sido também uma ferramenta de grande importância na solução de problemas da Mecânica da Fratura, proporcionando uma base para análise de configurações complexas de trincas e carregamentos, com precisão aceitável [32]. Duas maneiras se apresentam no uso e na aplicação do método de elementos finitos em corpos elásticos com trincas. Na primeira, o corpo trincado é representado geometricamente por elementos finitos convencionais. Tais elementos não podem representar adequadamente a condição de singularidade de tensões, no extremo da trinca, e por isso necessitam de um refinamento de malha muito grande, nas proximidades da extremidade da trinca [18]. A segunda maneira envolve o uso de elementos especiais para uso na extremidade da trinca, onde a condição de singularidade é imposta [18], [26]. Eles podem ser divididos em duas classes: na primeira, os elementos na extremidade da trinca contêm a condição

de singularidade para o campo de tensões igual à singularidade teórica no extremo da trinca, e na segunda classe, um número de elementos especiais na extremidade da trinca tem sido desenvolvido, a partir de elementos isoparamétricos, permitindo a modelação da singularidade para o campo de tensões.

3.3. Métodos Baseados sobre Elementos Finitos Convencionais

Devido à indisponibilidade de programas, com elementos finitos especiais para análise de trincas, passou-se a fazer uso de um programa com elementos finitos convencionais e dos resultados obtidos deste, o fator de intensidade de tensões foi determinado por uma série de processos propostos [22]. Essencialmente, os métodos que empregam a técnica de elementos finitos podem ser divididos nos métodos sobre tensões, deslocamentos e energia. Uma vez que o método das tensões tem sido apresentado como o menos preciso, devido ao efeito da alta concentração de tensões, na extremidade da trinca, não será aqui descrito.

3.3.1. Método de Deslocamentos

Este método [24], foi primeiro utilizado por Chan na análise do modo I e posteriormente por Kobayashi na análise do modo I e modos I e II combinados. O seguinte esquema foi utilizado por Chan, na determinação do fator de intensidade de tensões:

Primeiro, através de um programa de elementos finitos foram determinados os deslocamentos, usando uma malha externa grosseira e uma malha interna muito fina. A rede, através de um esquema de geração automática, foi expressa pela razão de A/a^2 , que para redes internas variou de 312×10^{-6} a $1,20 \times 10^{-6}$, e para redes mais externas de 1×10^{-2} a $0,5 \times 10^{-2}$, sendo A a área do elemento triangular e a o comprimento da trinca;

Segundo, um valor estimado K_I^* foi obtido, como uma aproximação para K_I , substituindo os deslocamentos nodais, próximo à extremidade da trinca, na fórmula

$$K_I^* = u_{2i} \frac{G(1 + \nu)}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{r_i}} \quad (3.1)$$

a qual pode ser obtida das equações (2.26) fazendo-se $\theta = \pi$. Se na equação (3.1) os valores de u_{2i} computados fossem exatos, isto corresponderia a um único valor de K_I^* para qualquer r_i , de tal modo que K_I estaria determinado. Porém como esta condição não é satisfeita na extremidade da trinca, uma curva de K_I^* versus r é obtida e o valor estimado de K_I é obtido por extrapolação.

3.3.2. Funções de Deslocamento Elípticas

Uma das maneiras de determinar o fator geométrico Y , e, conseqüentemente, o fator de intensidade de tensões K , para diferentes geometrias, é considerar o fato de que a função de deslocamento, na direção onde a trinca tende a abrir é elíptica. Com base nesta consideração [8], [9] as análises dos modos I e II

foram feitas e estão descritas a seguir.

Modo I

Para uma placa infinita, como mostra a figura 3.1, as equações de deslocamentos, segundo x_1 e x_2 , de acordo com Westergaard e as modificações posteriores feitas por Sih, tem a forma

$$u_1 = \frac{(1 - \nu)}{E} \operatorname{Re} \bar{\phi}(z) - \frac{(1 + \nu)}{E} x_2 \operatorname{Im} \phi(z) - \frac{2A}{E} x_1 \quad (3.2)$$

$$u_2 = \frac{2}{E} \operatorname{Im} \bar{\phi}(z) - \frac{(1 + \nu)}{E} x_2 \operatorname{Re} \phi(z) - \frac{2\nu A}{E} x_2$$

onde $A = \sigma/2$ e $\phi(z)$ é dado na equação (2.12).

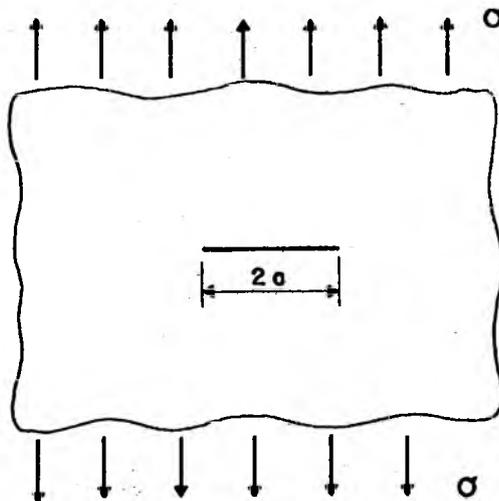


Fig. 3.1 - Placa infinita com tensões uniaxiais

Demonstrou-se na seção 2.4.2 que, para o modo I, a função de deslocamento tem a forma elíptica, ou seja

$$u_2(x_1, 0) = b \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)^{1/2} \quad (3.3)$$

onde

$$b = \frac{2 a \sigma}{E} \quad (3.4)$$

Para um sistema de coordenadas situado no extremo da trinca, figura 2.3, considerando regiões onde $r \ll a$, e das equações (2.26) para $\theta = \pi$, a equação (3.3) toma a forma

$$u_2 = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{2}{(1 + \nu)}$$

sendo

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

que pela substituição, conduz

$$u_2 = \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{8r}{\pi}} \quad (3.5)$$

O fator de intensidade de tensões, em uma placa infinita, seção 2.5, tem a forma

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (3.6)$$

e para uma placa de largura finita, figura 2.6, o fator de intensidade de tensões tem a forma

$$K_I = Y \sigma' \sqrt{\pi a} \quad (3.7)$$

Para existir a mesma distribuição de tensões e deslocamentos na extremidade da trinca, é necessário que os fatores de intensidade de tensões sejam iguais e utilizando as equações (3.6) e (3.7), obtém-se

$$Y = \frac{\sigma}{\sigma'} \quad (3.8)$$

onde se conclui que o efeito da largura finita de uma placa trincada é equivalente a um incremento na tensão nominal aplicada, quando comparada com o mesmo estado de tensões e deslocamentos na extremidade da trinca de uma placa infinita.

Considerando-se agora, que a placa de largura finita, seja solicitada com o mesmo carregamento da placa infinita, o fator de intensidade de tensões será dado pela seguinte expressão

$$K_I = Y \sigma \sqrt{\pi a} \quad (3.9)$$

Pelas mesmas considerações feitas com a função de deslocamento para a placa infinita, para a placa finita, tem-se

$$u_2(x_1, 0) = b' \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)^{1/2} \quad (3.10)$$

onde
$$b' = \frac{2a Y \sigma}{E} \quad (3.11)$$

e para regiões próximas à extremidade da trinca

$$u_2' = \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{8\pi}{r}} \quad (3.12)$$

Para pontos homólogos, dentro de um contorno arbitrário, das equações (3.4) e (3.11)

$$Y = \frac{b'}{b} \quad (3.13)$$

ou de (3.3) e (3.10), substituindo (3.4) e (3.11)

$$Y = \frac{u_2'}{u_2} \quad (3.14)$$

Modo II

O mesmo procedimento usado para a determinação do fator de intensidade de tensões para o modo I, pode também ser feito na análise do modo II, com pequenas modificações.

Para uma trinca, numa placa infinita e carregamento, como mostra a figura 2.9, tem-se

$$u_1(x_1, 0) = \frac{2 \tau a}{E} \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)^{1/2} \quad (3.15)$$

$$u_2(x_1, 0) = \frac{(1 - \nu)}{E} \tau a \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)^{1/2}$$

e o fator de intensidade de tensões é expresso como sendo

$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi a} \quad (3.16)$$

No modo II, a equação elíptica pode ser expressa em função de u_1 e x_1 , uma vez que o deslocamento u_1 caracteriza o modo II de abertura da trinca. Assim das equações (3.15)

$$u_1(x_1, 0) = q \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)^{1/2} \quad (3.17)$$

onde

$$q = \frac{2 \tau a}{E}$$

tal como a equação (3.3), a equação (3.17) é elíptica.

O fator de intensidade de tensões para este caso é dado por

$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi a}$$

Para uma placa de largura finita, a equação de deslocamento

mento que caracteriza o modo II, pode ser colocada na forma

$$u'_1(x_1, 0) = q' \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)^{1/2} \quad (3.18)$$

onde

$$q' = \frac{2Y \tau a}{E}$$

Pelas mesmas considerações feitas para o modo I, tem-se agora para o modo II as seguintes igualdades, para a determinação do fator de intensidade de tensões:

$$Y = \frac{\tau}{\tau'} = \frac{u'_1}{u_1} = \frac{q'}{q} \quad (3.19)$$

e

$$K_{II} = Y \tau \sqrt{\pi a'}$$

3.3.3. Método de Elementos Finitos Calibrado

A distribuição de tensões dentro de um contorno arbitrário, para uma placa elástica trincada, figura 3.2, pode ser expressa pelas equações (2.25), ou seja

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r'}} f_{ij}(\theta) \quad (3.20)$$

e os deslocamentos, das equações (2.26), podem ser expressos na forma

$$u_i = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} f_i(\theta) \quad (3.21)$$

Das equações (3.20) verifica-se que as tensões são proporcionais ao fator de intensidade de tensões. Se o espécime é representado adequadamente por uma malha de elementos finitos, as distorções sofridas pela malha, dentro do contorno, são proporcionais ao fator de intensidade de tensões.

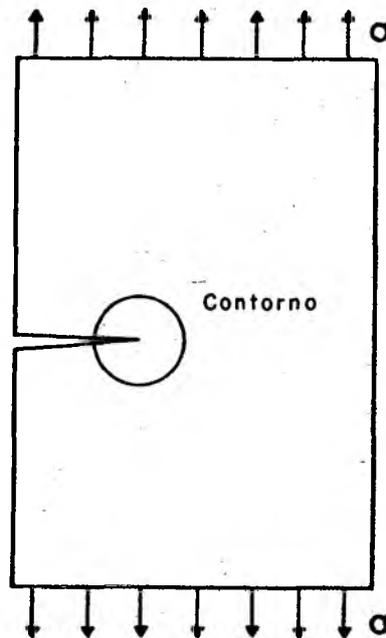


Fig. 3.2 - Espécime trincado, contorno onde a equação (3.20) é válida.

No método proposto [31] é inicialmente feita uma calibragem na malha interna ao contorno. Para tal, tensões correspondendo a um valor unitário de K_I , equação (3.20), são aplicadas à malha, conforme a figura 3.3, gerada no interior do contorno. Os deslocamentos dos vários nós próximos à extremidade da trinca são computados. Estes deslocamentos na malha interior constituem o campo de deslocamento unitário (CDU), constante para uma dada geometria de malha e propriedade do material. Como as tensões ficam univocamente definidas por K , o campo de deslocamento obtido é, teoricamente, válido para qualquer geometria.

Feita a calibragem, é possível usar a malha interna para obter o fator de intensidade de tensões.

A malha no interior do contorno é embutida no modelo de elementos finitos do espécime e o carregamento real é agora aplicado. Os deslocamentos na malha no interior do contorno, são novamente computados e constituem, agora, o campo de deslocamento real (CDR).

O fator de intensidade de tensões é determinado tomando-se o campo de deslocamento real dividido pelo campo de deslocamento unitário.

$$K_I = \frac{CDR}{CDU} \quad (3.22)$$

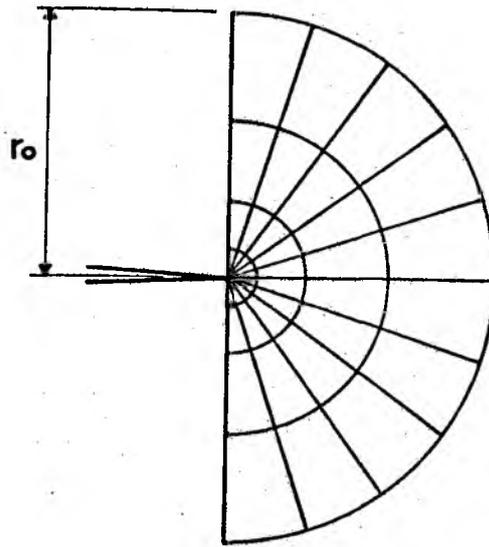


Fig. 3.3 - Malha utilizada para a calibragem no interior do contorno.

Na forma mais geral das equações (3.20), aparece um termo constante, conforme modificações apresentadas no capítulo 2. Uma vez que o termo constante para este tipo de problema é função da tensão aplicada, o campo de deslocamento correspondente a um valor unitário da tensão nominal deve ser obtido, para a malha no interior do contorno. O campo de deslocamento real (CDR), pela superposição dos efeitos, passa a ser dado pela expressão

$$\text{CDR} = \text{CDUK} \cdot K + \text{CDU} \sigma \cdot \sigma$$

onde portanto

$$K = \frac{\text{CDR} - \text{CDU} \sigma \cdot \sigma}{\text{CDUK}} \quad (3.23)$$

com $CDUK$ e $CDU\sigma$ representando respectivamente, o campo de deslocamento unitário para $K = 1$ e o campo de deslocamento unitário para $\sigma = 1$

3.3.4. Método de Energia Total

Da teoria de Griffith e as modificações subseqüente de Irwin e Orwan, surgiu, conforme apresentado na seção 2.8.4, a relação entre o fator de intensidade de tensões com a variação de energia de deformação, sendo dada pela equação

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{K_I^2}{E} \quad (3.24)$$

Através desta equação pode-se obter o fator de intensidade de tensões, determinando-se $\partial U / \partial a$, para a geometria em questão [11],

Métodos numéricos vem frequentemente beneficiar esta determinação, e o mais usado é o de elementos finitos. Assim, para um dado comprimento de trinca, usando um programa de elementos finitos, determina-se a energia de deformação. Fazendo uma ligeira variação no comprimento da trinca, roda-se novamente o programa, conseguindo desta forma informações necessárias para determinar $\Delta U / \Delta a$ e, conseqüentemente, o valor de K_I .

3.3.5. Método de Energia com Elementos Finitos Calibrado.

A energia de deformação, por unidade de espessura, segundo Griffith, equação (3.24), é dada pela expressão

$$U = \frac{1}{2} \frac{a}{E} K_I^2 \quad (3.25)$$

onde se tem a proporcionalidade entre a energia de deformação e o fator de intensidade de tensões. Assim, tomando por base a proposta do método de elementos finitos calibrado [31], usou-se a energia de deformação, no lugar dos deslocamentos. Pelas indicações dadas na seção 3.3.3, o fator de intensidade de tensões toma a forma

$$K_I^2 = \frac{U_{\text{REAL}} - U_{\text{UNIT.}\sigma} \sigma^2}{U_{\text{UNIT.K}}} \quad (3.26)$$

onde U_{REAL} é a energia de deformação para a placa com o carregamento real, $U_{\text{UNIT.}\sigma}$ é a energia de deformação para $\sigma = 1$ e $U_{\text{UNIT.K}}$ é a energia de deformação para $K = 1$.

3.3.6. Método de Energia Local

Conhecido o campo de tensões na extremidade da trinca, a energia de deformação sobre uma região de raio r_1 , pequena, comparada com o comprimento da trinca, é facilmente obtida. Assim, para um estado plano de tensões, usando os resultados obtidos por Irwin, indicado na referência [11], tem-se

$$U = \frac{(5 - 8\nu)}{(8 - 8\nu)} r_1 \frac{K_I^2}{E} \quad (3.27)$$

Para se obter K_I por este método, toma-se a energia de deformação, determinada no programa, para os elementos dentro do contorno de raio r , para os quais as expressões de tensões são válidas, ou seja, $r/a \ll 1$.

4. ESTRUTURA DO TRABALHO

4.1. Modelos Analisados

Pretendendo-se comprovar a aplicação dos métodos mencionados no capítulo anterior, com o uso de um programa de elementos finitos, foram analisados modelos de geometria relativamente simples, com posições de trinca central, uma trinca lateral e dupla trinca lateral, tais como mostra a figura 4.1. Estes são modelos comumente encontrados na bibliografia pesquisada, para a análise de corpos trincados.

Devido à simetria existente nos modelos usados, apenas um quarto da placa foi analisada para os modelos com trinca central e dupla trinca lateral, e para o modelo com uma trinca lateral, tomou-se a metade da placa, figura 4.1. Devido a isto, e à versatilidade do programa usado, as variações feitas nos modelos tornaram-se bastante simples, efetuando entre uma e outra variação, mudanças na definição do plano de simetria, figura 4.1, geração de novos elementos e condições de contorno, que eram fornecidas através da adição ou substituição de apenas alguns blocos de dados.

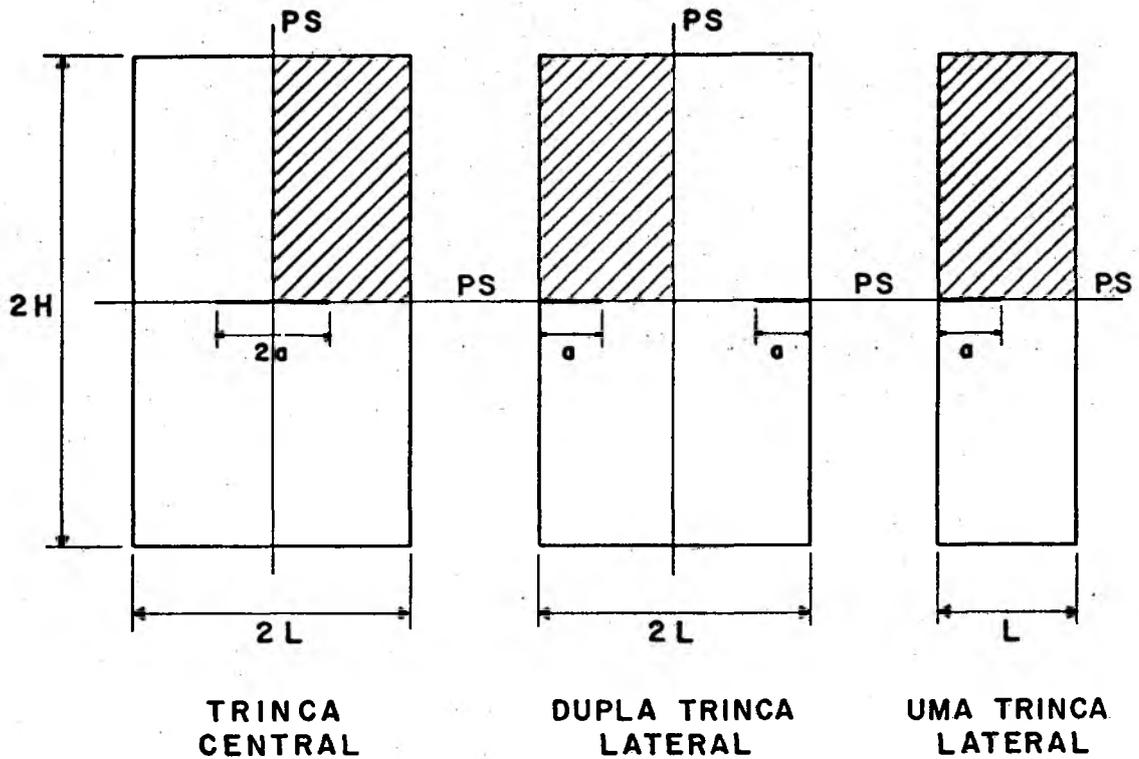


Fig. 4.1 - Posição da trinca, simetria e parte analisada.

4.2. Variações nos Modelos

As variações nos modelos foram feitas com a finalidade de se efetuar um estudo do comportamento dos métodos, devido a estas mudanças. Assim, os seguintes modelos foram usados;

Modelos A - Mantendo constante $r_0/a = 0,1$, $a/L = 0,8$ e variando a relação H/L .

A1 $H/L = 1$

A2 $H/L = 2$

A3 $H/L = 4$

Modelos B - Mantendo constante $r_0/a = 0,1$, $H/L = 4$ e variando a relação a/L .

$$B1 \quad a/L = 0,80$$

$$B2 \quad a/L = 0,50$$

$$B3 \quad a/L = 0,25$$

Modelos C - Mantendo constante $a/L = 0,25$, $H/L = 4$ e variando a relação r_0/a .

$$C1 \quad r_0/a = 0,20$$

$$C2 \quad r_0/a = 0,10$$

$$C3 \quad r_0/a = 0,05$$

A distância r_0 é característica à calibragem da malha, figura 3.3, H e L são as dimensões da placa, conforme mostra a figura 4.2.

Nos modelos A, pretendeu-se verificar os métodos quanto as variações no comprimento da placa, mantendo-se constante a relação $a/L = 0,8$, valor este dado na bibliografia como o mais sensível à variação de H/L . Dentro dos mesmos critérios, nos modelos B, foram verificadas as aplicações dos métodos quanto às variações de a/L e nos modelos C averiguou-se a influência da relação r_0/a .

4.3. Programa de Elementos Finitos Usado

Para a obtenção dos dados necessários à aplicação dos métodos descritos, usou-se o Programa Analisador de Sistemas Es-

truturais (PROASE) [1], um programa geral de elementos finitos, que foi elaborado no Centro Tecnológico da UFSC, pelo professor Domingos Boechat Alves, especialmente para a análise estática linear. A característica principal deste programa é a de construir várias bibliotecas de dados [3], destacando-se, entre estas, a biblioteca de elementos finitos, a de sistemas de referências, a de vínculos especiais (condições de contorno), a de constantes física dos materiais, a de propriedades seccionais das membranas e placas, etc..., que são utilizadas pelo analista através do registro de entrada, que é inerente a cada grupo de dados que constitui a biblioteca. Além disto, o PROASE, na construção destas bibliotecas, utiliza geradores multi-dimensionais de dados de entrada, o que reduz o trabalho na confecção da deck de dados, minimizando, assim, a possibilidade de erros acidentais. Devido à sua generalidade, o PROASE é ferramenta de grande utilidade em pesquisas em Mecânica dos Sólidos.

4.4. Representação dos Modelos por Elementos Finitos

Após definidas as variações nos modelos e o programa de elementos finitos a ser usado, passou-se à representação dos modelos por elementos finitos, usando-se elementos triangulares e quadrangulares. Na extremidade da trinca foram usados elementos triangulares tal como mostra a figura 4.2. Esses elementos sofreram variações na relação l/a entre 0,01 e 0,0025, que dependeu do método e da análise de convergência pretendida. No caso acima l é a dimensão linear, na direção da trinca, do menor elemento da malha.

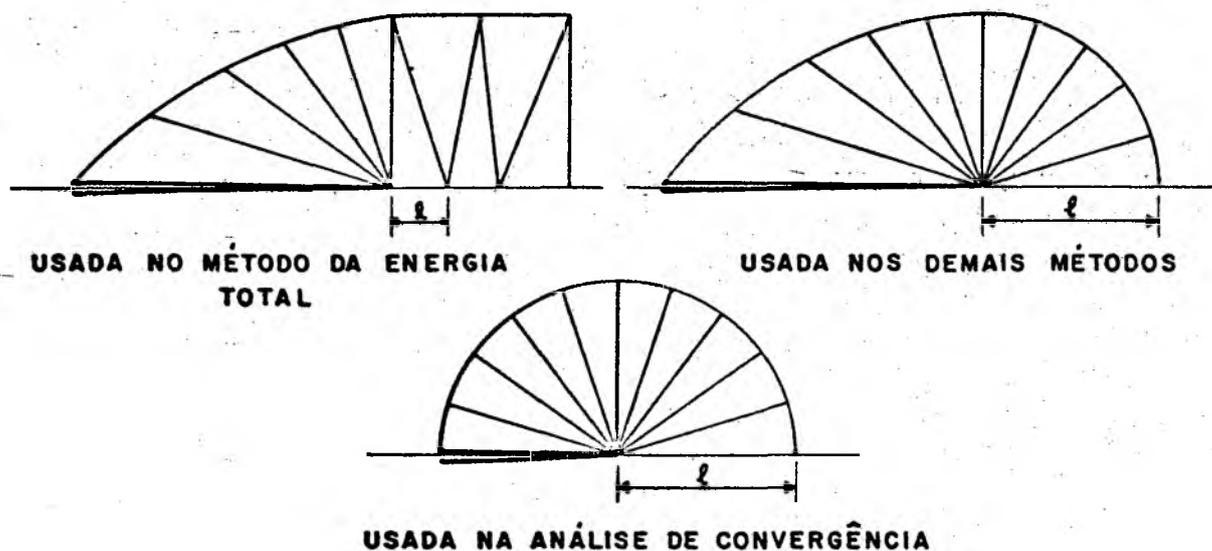


Fig. 4.2 - Malhas usada na extremidade da trinca.

Os elementos membrana utilizados na representação dos modelos foram desenvolvidos [2] a partir de funções tensões polinomiais quadráticas, com coeficientes, tais que as equações de equilíbrio sejam automaticamente satisfeitas. Através das relações tensão-deformação foram obtidas as funções deformações e a partir destas as funções deslocamentos. A seguir foram determinadas as relações entre as funções deslocamento em um ponto genérico do elemento e os deslocamentos nodais pelo princípio da energia complementar mínima, de tal forma que houvesse continuidade de deslocamentos e inclinações através das bordas de junção dos elementos contíguos.

5. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Dos dados obtidos pelo programa de elementos finitos usado, PROASE, após algumas manipulações, (apêndice A4) passou-se à aplicação dos métodos, cujos resultados estão mostrados nas figuras 5.1 a 5.17 e foram selecionados, dentro de um critério padrão, os que melhor se ajustavam com os de referência.

As análises seguem a seguinte sequência:

Figuras 5.1 a 5.7 - Análise de todos os modelos com geometria de trinca central e relação $l/a = 0,01$, exceção do método de energia total, onde $l/a = 0,003$ (figura 4.2).

Figuras 5.8 a 5.13 - Análise dos modelos A com geometria de trinca central e relação $l/a = 0,005$ e $l/a = 0,0025$.

Figuras 5.14 a 5.17 - Análise dos modelos B1 e B2 com uma trinca lateral e dupla trinca lateral.

Os métodos foram aplicados de acordo com a disponibilidade dos resultados obtidos do PROASE, sendo que devido à forma da malha usada no extremo da trinca (figura 4.2) alguns métodos não foram utilizados para certos modelos conforme se pode verificar nas tabelas das figuras 5.1 a 5.17.

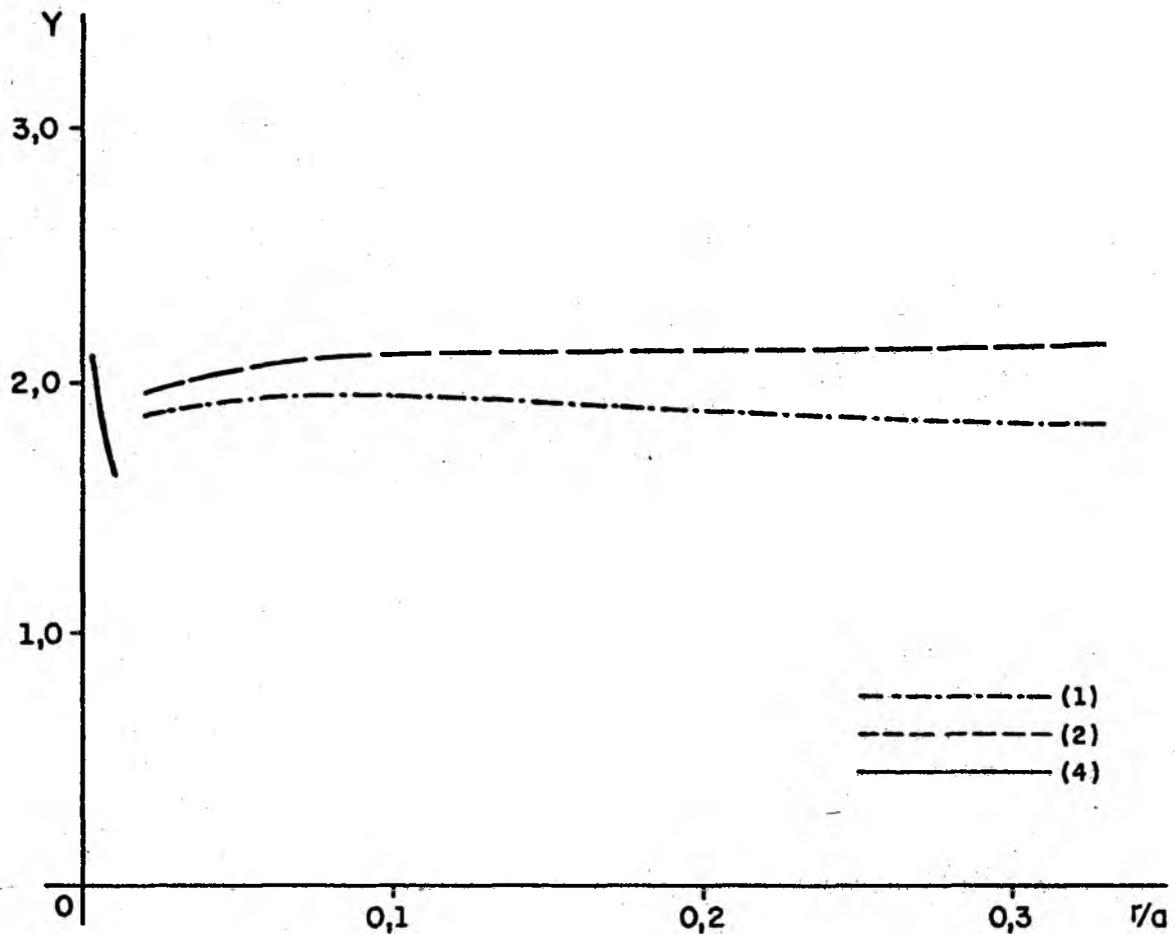
Na figura 5.18 apresenta-se o modelo A1 deformado.

Modelo A1

$$r_0/a = 0,1$$

$$a/L = 0,8$$

$$H/L = 1,0$$



Valor de referência [9] $Y = 2,57$

Valores estimados

Métodos	Deslocamento (1)	Elíptico (2)	Calibragem (3)	Energia Total (4)	Energia Calibrada (5)	Energia Local (6)
KI	10,68	11,51	10,48	10,33	10,71	
Y	1,905	2,054	1,870	1,843	1,911	

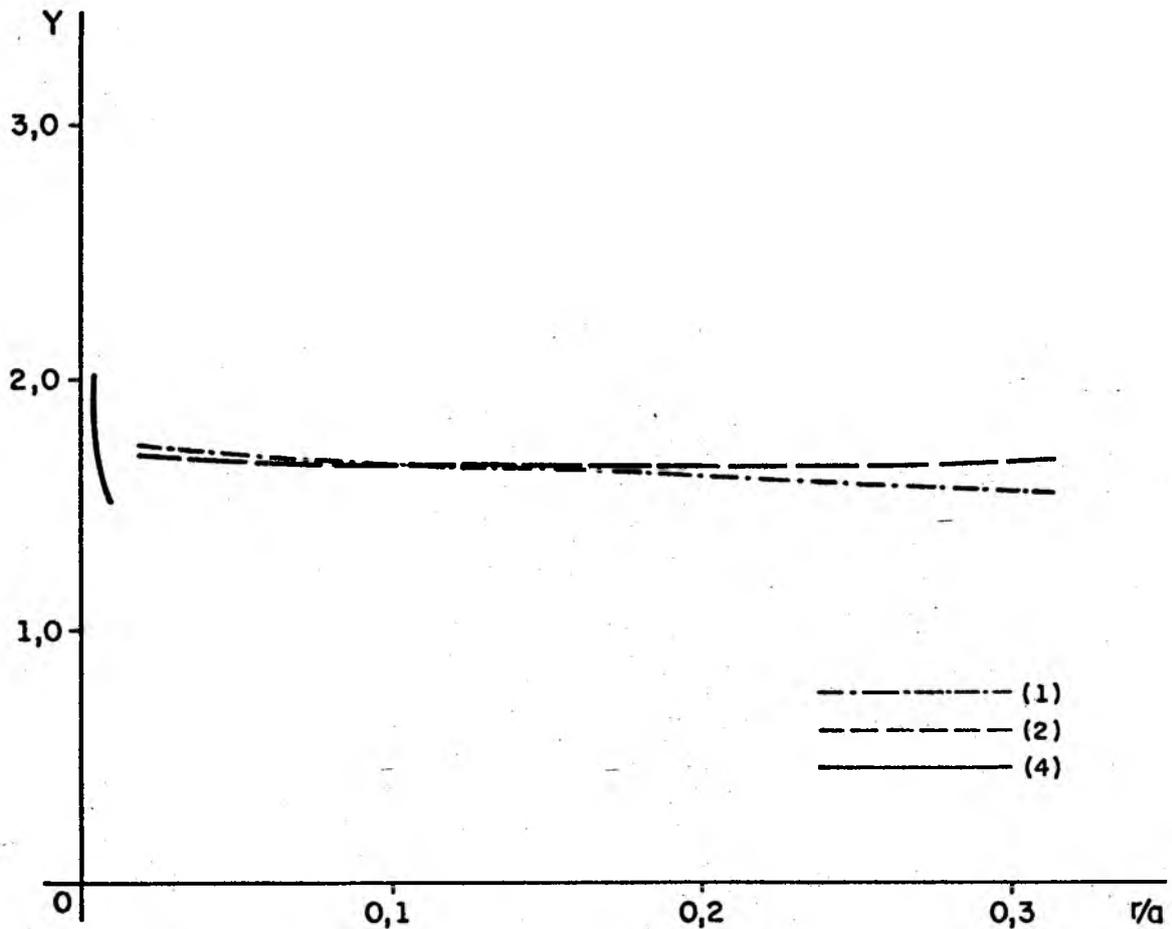
Fig. 5.1 - Resultados obtidos do modelo A1 para uma geometria de trinca central.

Modelo A2

$$r_0/a = 0,1$$

$$a/L = 0,8$$

$$H/L = 2,0$$



Valor de referência [9] $Y = 1,72$

Valores estimados

Métodos	Deslocamento (1)	Elíptico (2)	Calibragem (3)	Energia Total (4)	Energia Calibrada (5)	Energia Local (6)
KI	9,712	9,525	9,307	9,455	10,05	
Y	1,733	1,699	1,660	1,687	1,793	

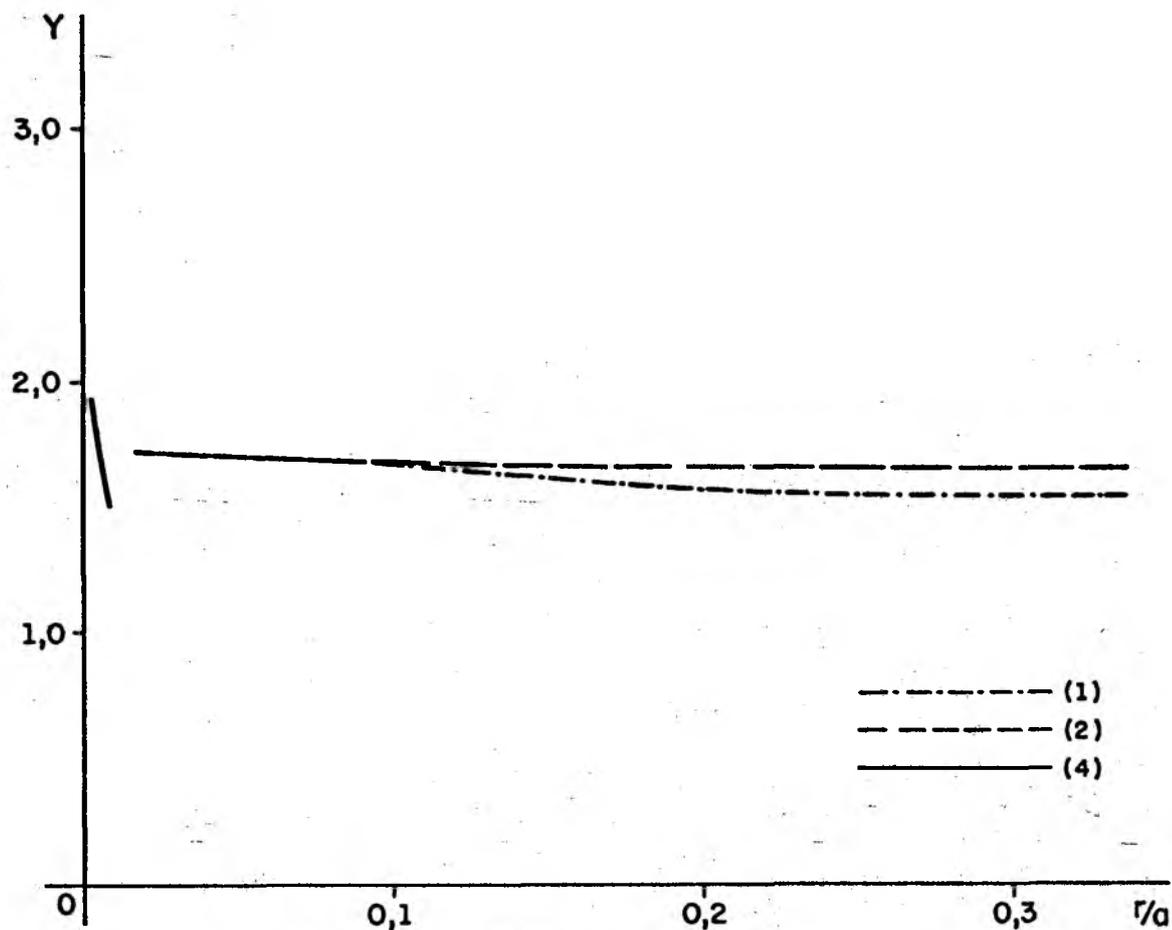
Fig. 5.2 - Resultados obtidos do modelo A2 para uma geometria de trinca central.

Modelo A3 \equiv B1

$$r_0/a = 0,1$$

$$a/L = 0,8$$

$$H/L = 4,0$$



Valor de referência [9] $Y = 1,67$

Valores estimados

Métodos	Deslocamento (1)	Elíptico (2)	Calibragem (3)	Energia Total (4)	Energia Calibrada (5)	Energia Local (6)
KI	9,709	9,517	9,318	9,450	10,05	
Y	1,732	1,698	1,662	1,686	1,793	

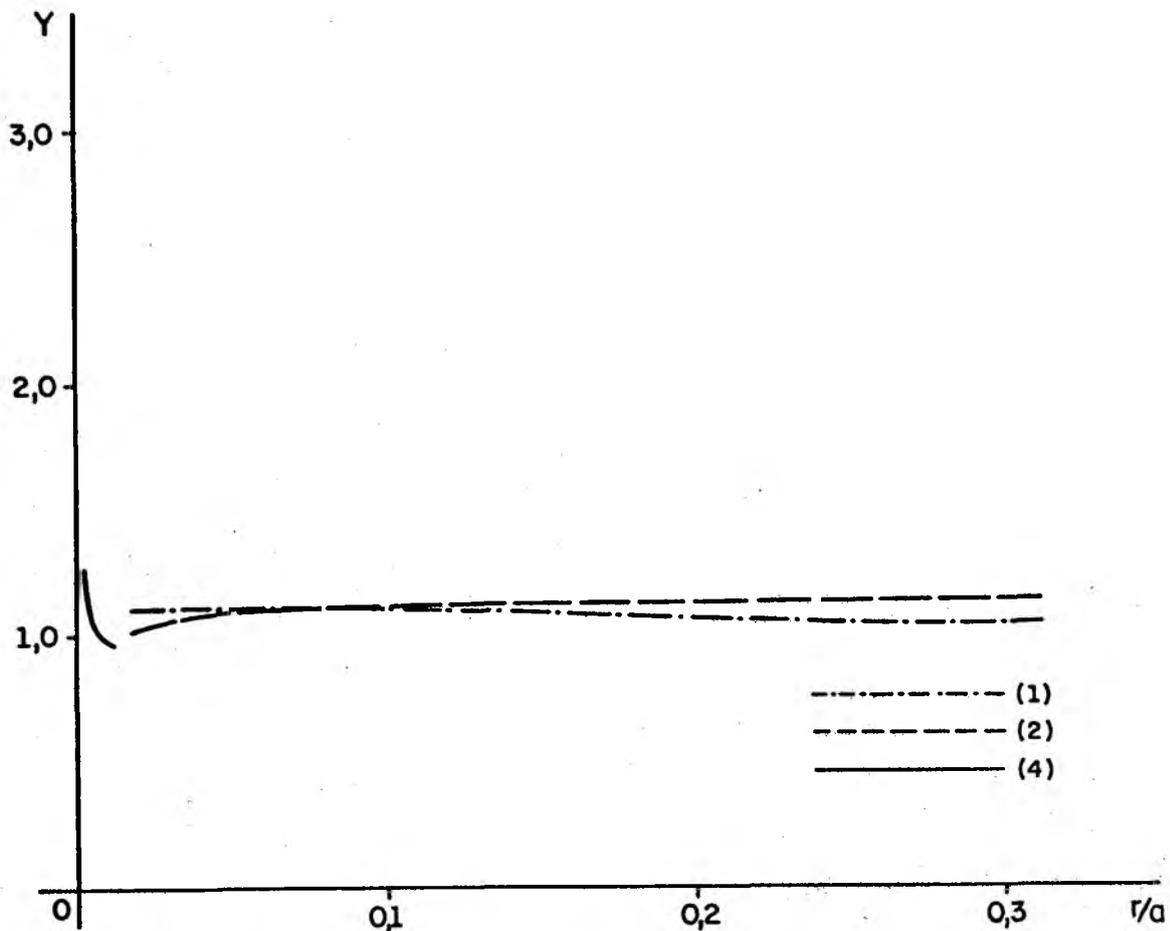
Fig. 5.3 - Resultados obtidos do modelo A3 para uma geometria de trinca central.

Modelo B2

$$r_0/a = 0,1$$

$$H/L = 4,0$$

$$a/L = 0,5$$



Valor de referência [9] $Y = 1,11$

Valores estimados

Métodos	Deslocamento (1)	Elíptico (2)	Calibragem (3)	Energia Total (4)	Energia Calibrada (5)	Energia Local (6)
KI	6,360	6,435	6,770	6,207	6,494	
Y	1,135	1,148	1,208	1,107	1,159	

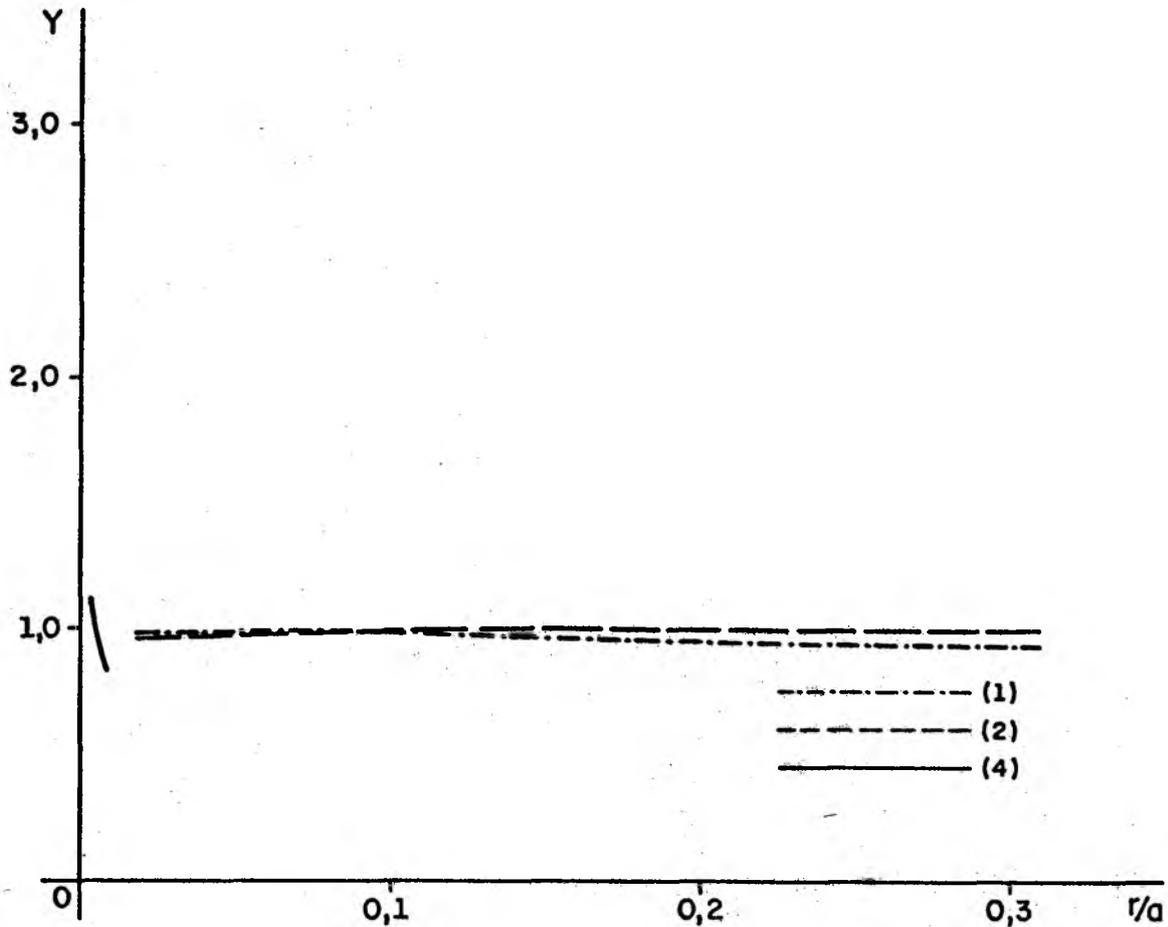
Fig. 5.4 - Resultados obtidos do modelo B2 para uma geometria de trinca central.

Modelo B3 \equiv C2

$$r_o/a = 0,10$$

$$H/L = 4,00$$

$$a/L = 0,25$$



Valor de referência [9] $Y = 1,00$

Valores estimados

Métodos	Deslocamento (1)	Elíptico (2)	Calibragem (3)	Energia Total (4)	Energia Calibrada (5)	Energia Local (6)
KI	5,602	5,667	6,118	5,463	5,858	
Y	0,9995	1,011	1,092	0,9747	1,045	

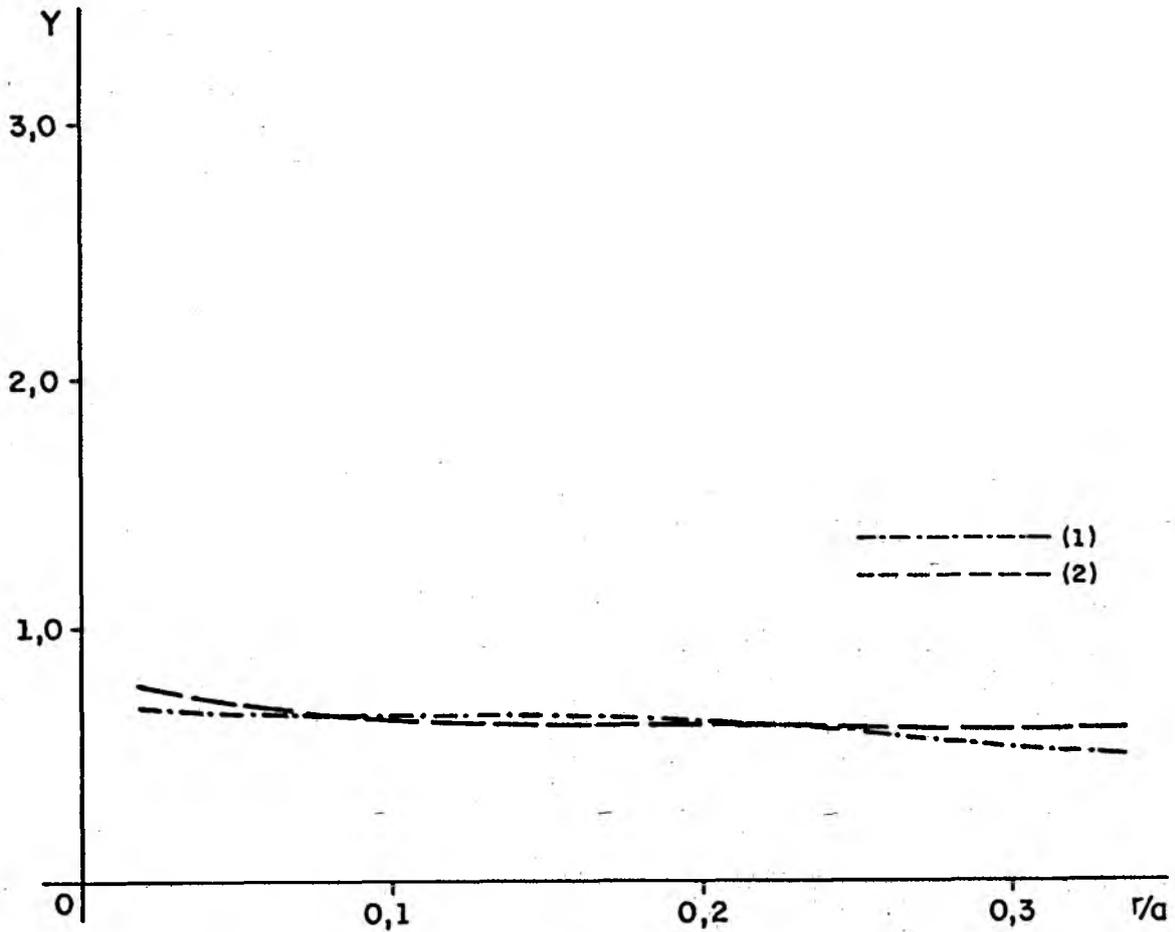
Fig. 5.5. Resultados obtidos do modelo B3 para uma geometria de trinca central.

Modelo C1

$$a/L = 0,25$$

$$H/L = 4,00$$

$$r_0/a = 0,20$$



Valor de referência [9] $Y = 1,00$

Valores estimados

Mé- to- dos	Desloca- mento (1)	Elíptico (2)	Calibra- gem (3)	Energia Total (4)	Energia Calibra- da (5)	Energia Local (6)
KI	3,980	3,655	4,249		3,949	
Y	0,7101	0,6521	0,7581		0,7045	

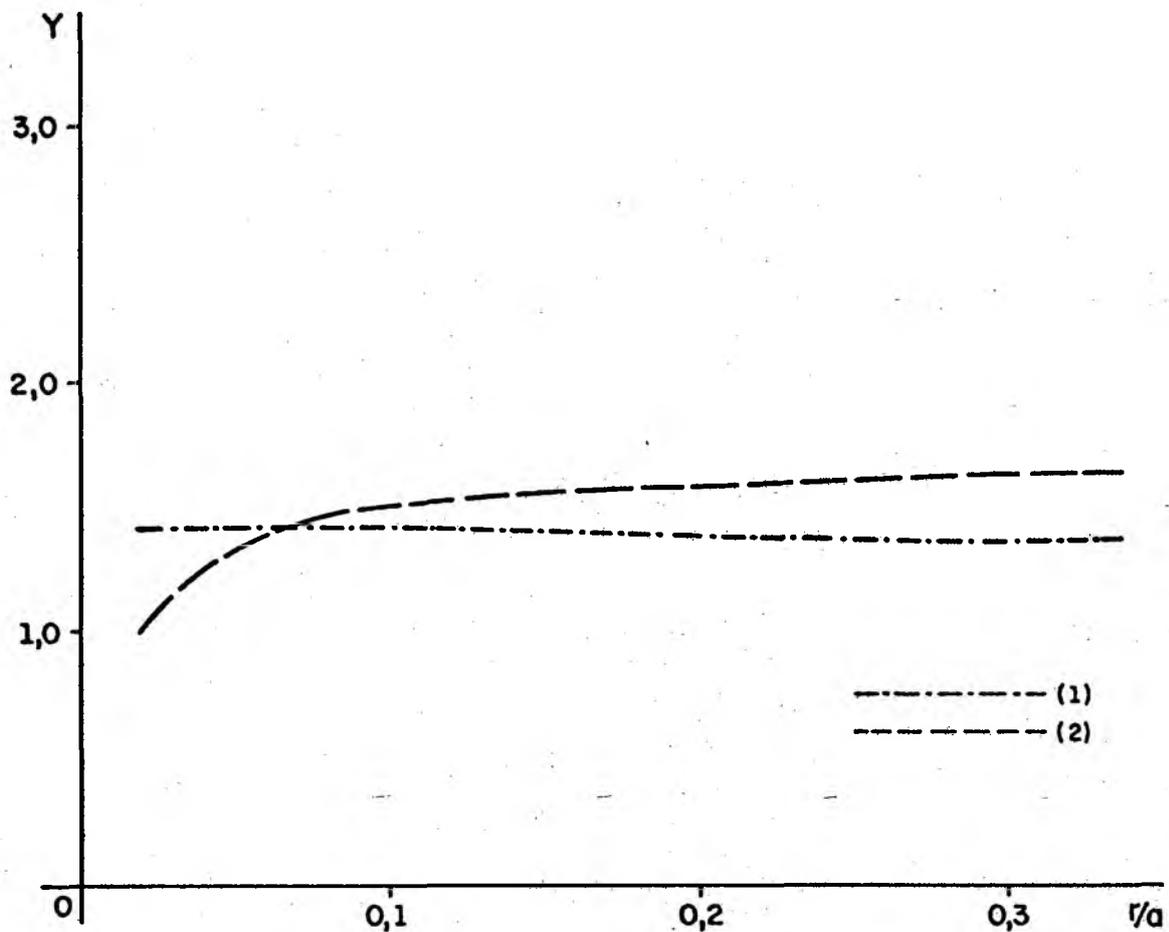
Fig. 5.6 - Resultados obtidos do modelo C1 para uma geometria de trinca central

Modelo C3

$a/L = 0,25$

$H/L = 4,00$

$r_o/a = 0,05$



Valor de referência [9] $Y = 1,00$

Valores estimados

Métodos	Deslocamento (1)	Elíptico (2)	Calibragem (3)	Energia Total (4)	Energia Calibrada (5)	Energia Local (6)
KI	7,980	8,677	8,801		8,169	
Y	1,424	1,548	1,570		1,457	

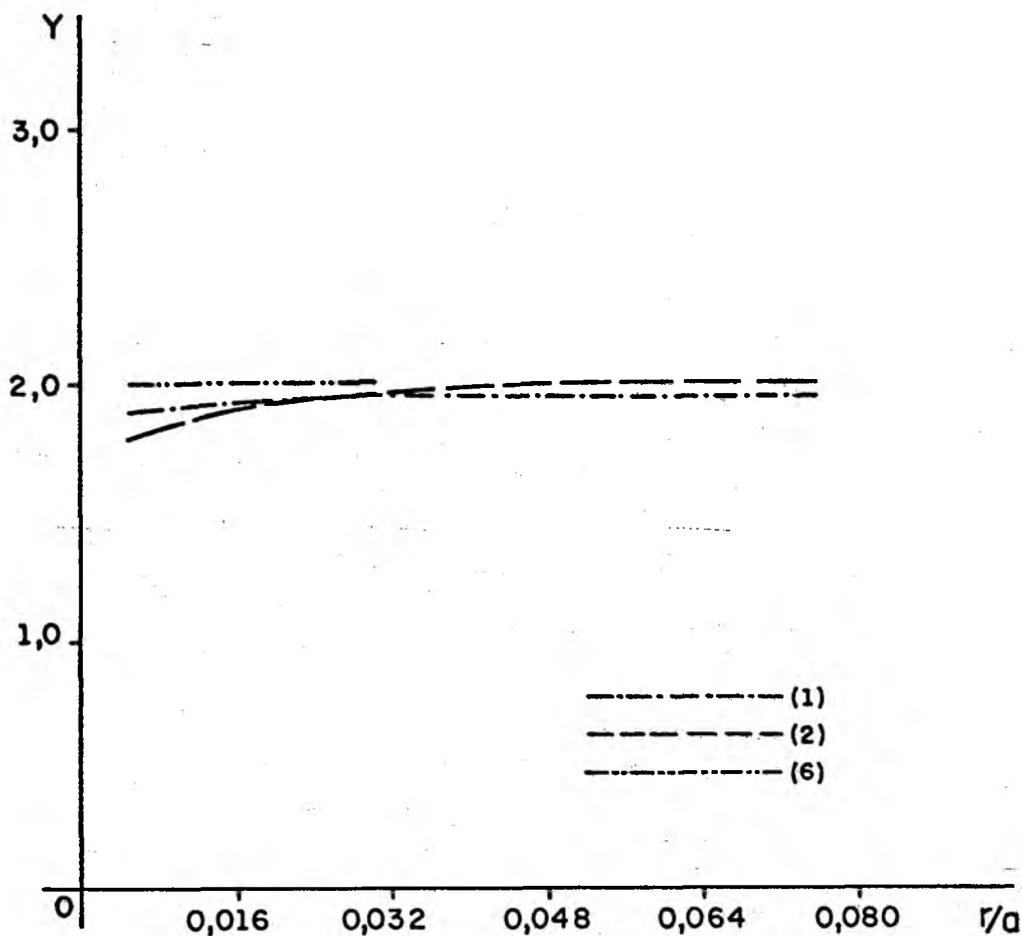
Fig. 5.7 - Resultados obtidos do modelo C3 para uma geometria de trinca central.

Modelo A1

$$r_0/a = 0,1$$

$$a/L = 0,8$$

$$H/L = 1,0$$



Valor de referência [9] $Y = 2,57$

Valores estimados

Métodos	Deslocamento (1)	Elíptico (2)	Calibragem (3)	Energia Total (4)	Energia Calibrada (5)	Energia Local (6)
KI	10,82	11,16				11,62
Y	1,930	1,983				2,228

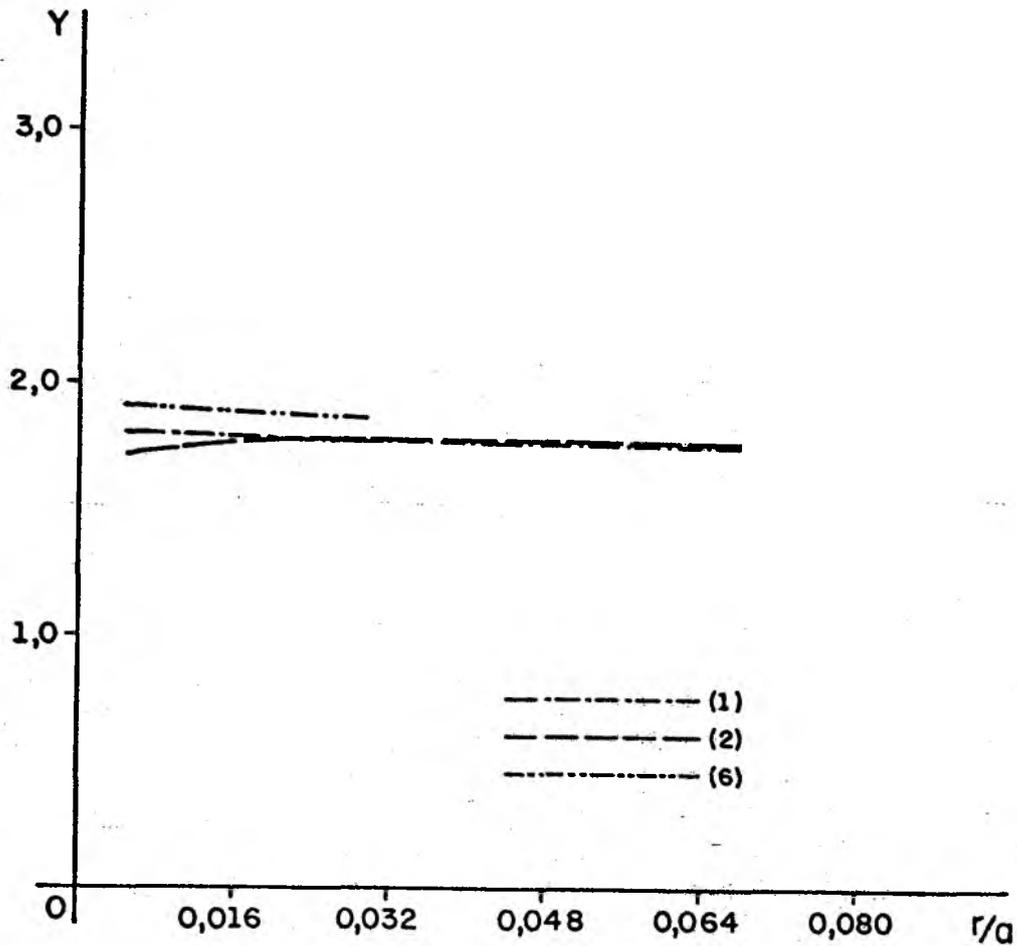
Fig. 5.8 - Resultados obtidos do modelo A1 para uma geometria de trinca central, usado na primeira análise de convergência.

Modelo A2

$$r_o/a = 0,1$$

$$a/L = 0,8$$

$$H/L = 2,0$$



Valor de referência [9] $Y = 1,72$

Valores estimados

Mé- to- dos	Desloca- mento (1)	Elíptico (2)	Calibra- gem (3)	Energia Total (4)	Energia Calibra- da (5)	Energia Local (6)
KI	9,896	9,896				10,72
Y	1,766	1,766				1,913

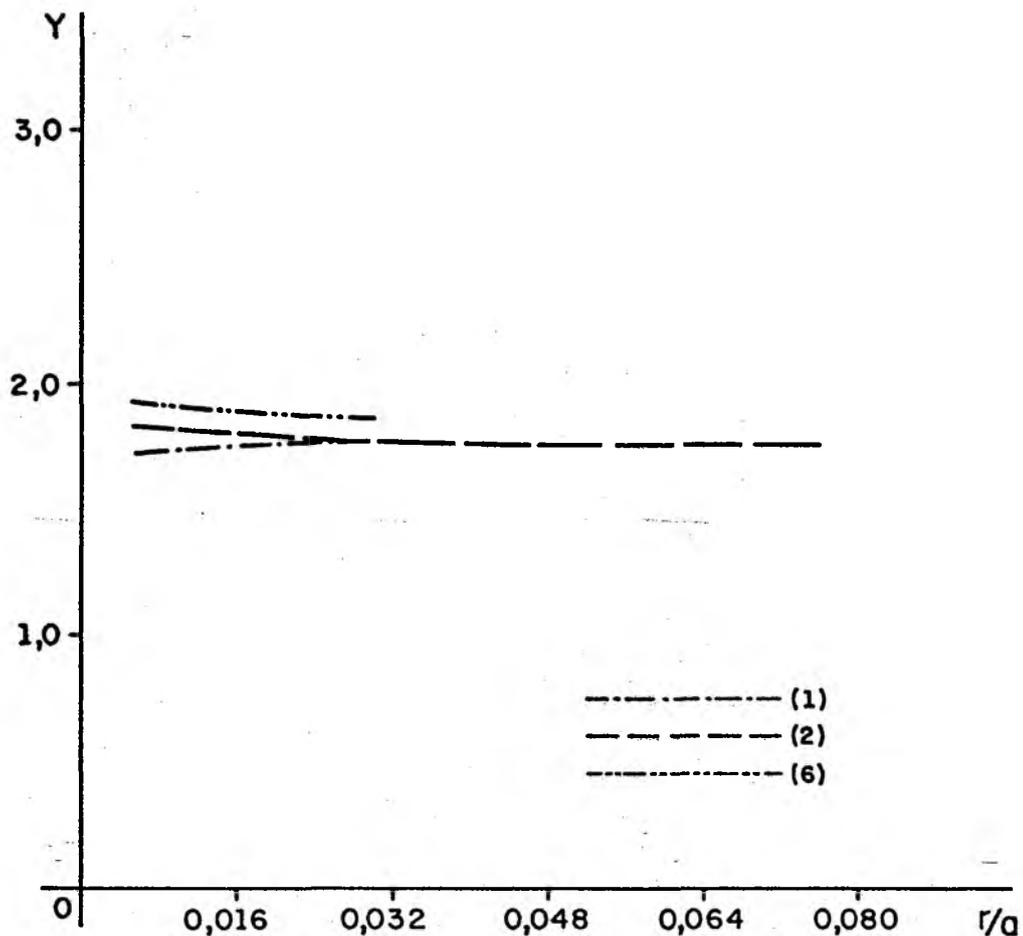
Fig. 5.9 - Resultados obtidos do modelo A2 para uma geometria de trinca central, usado na primeira análise de convergência.

Modelo A3

$$r_0/a = 0,1$$

$$a/L = 0,8$$

$$H/L = 4,0$$



Valor de referência [9] $Y = 1,67$

Valores estimados

Mê- to- dos	Desloca- mento (1)	Elíptico (2)	Calibra- gem (3)	Energia Total (4)	Energia Calibra- (5)	Energia Local (6)
KI	9,895	9,904				10,64
Y	1,765	1,767				1,898

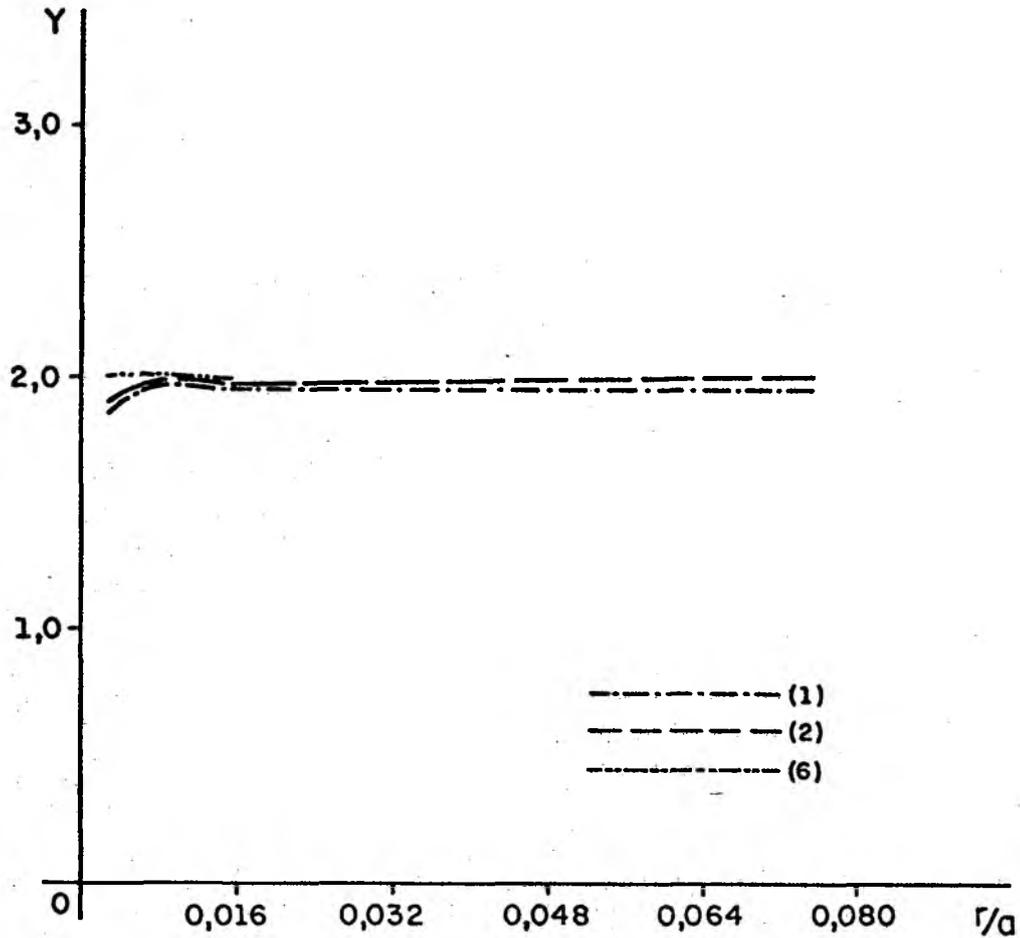
Fig. 5.10 - Resultados obtidos do modelo A3 para uma geometria de trinca central, usado na primeira análise de convergência.

Modelo A1

$$r_0/a = 0,1$$

$$a/L = 0,8$$

$$H/L = 1,0$$



Valor de referência [9] $Y = 2,57$

Valores estimados

Métodos	Deslocamento (1)	Elíptico (2)	Calibragem (3)	Energia Total (4)	Energia Calibragem (5)	Energia Local (6)
KI	10,99	11,11				12,08
Y	1,961	1,982				2,155

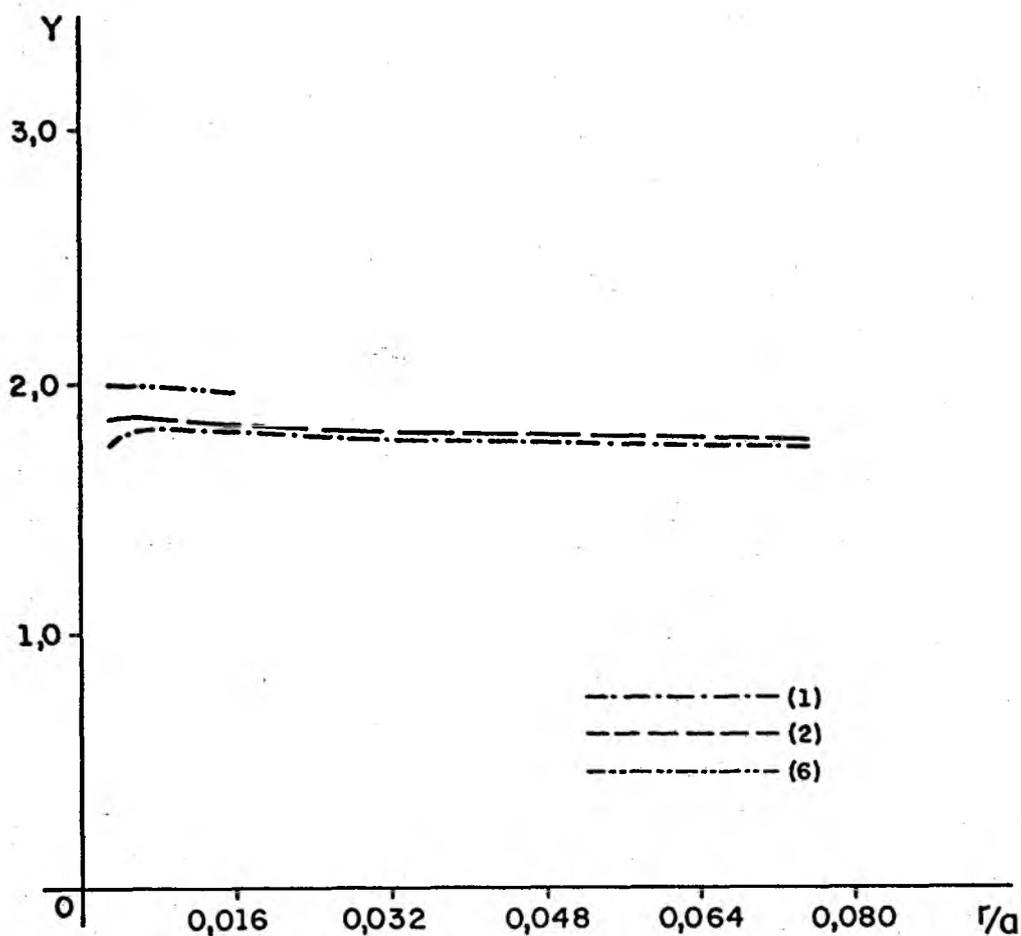
Fig. 5.11 - Resultados obtidos do modelo A1 para uma geometria de trinca central, usado na segunda análise de convergência.

Modelo A2

$$r_o/a = 0,1$$

$$a/L = 0,8$$

$$H/L = 2,0$$



Valor de referência [9] $Y = 1,72$

Valores estimados

Métodos	Deslocamento (1)	Elíptico (2)	Calibragem (3)	Energia Total (4)	Energia Calibragem (5)	Energia Local (6)
KI	10,05	9,994				10,90
Y	1,793	1,783				1,945

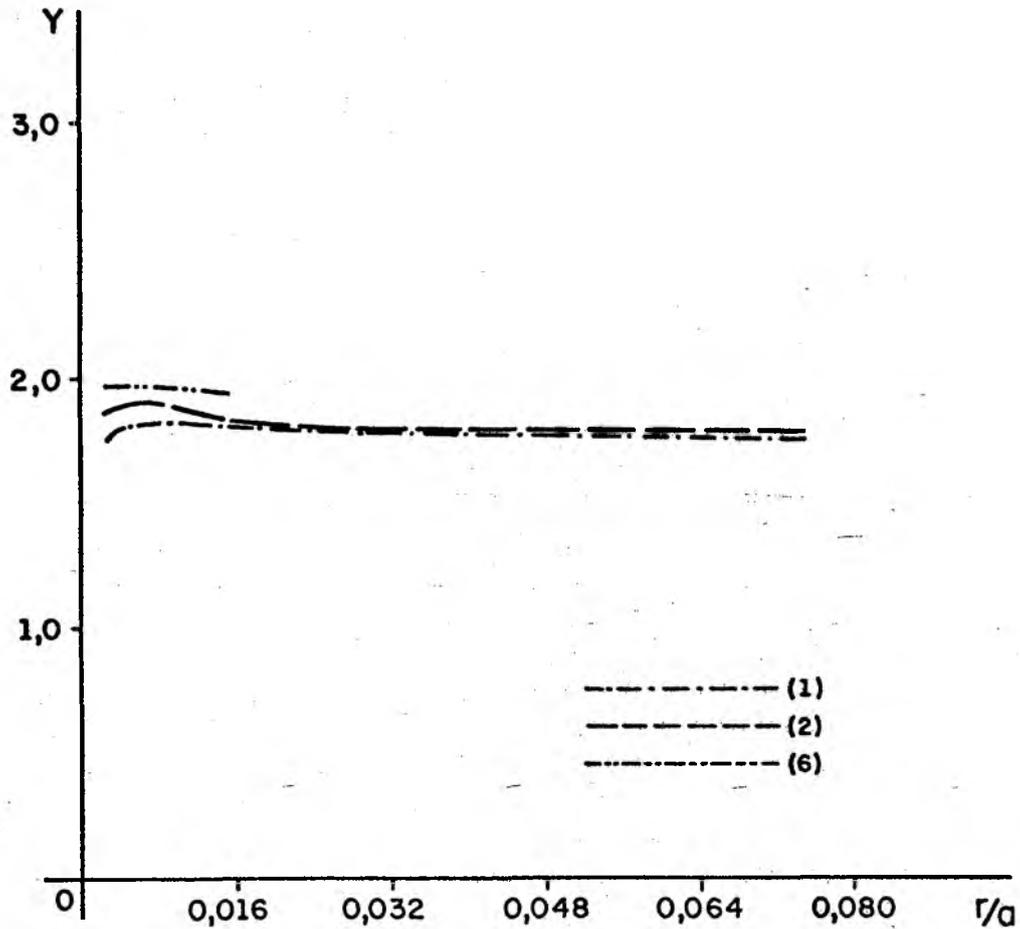
Fig. 5.12 - Resultados obtidos do modelo A2 para uma geometria de trinca central, usado na segunda análise de convergência.

Modelo A3

$$r_0/a = 0,1$$

$$a/L = 0,8$$

$$H/L = 2,0$$



Valor de referência [9] $Y = 1,67$

Valores estimados

Métodos	Deslocamento (1)	Elíptico (2)	Calibragem (3)	Energia Total (4)	Energia Calibragem (5)	Energia Local (6)
KI	10,05	10,02				10,90
Y	1,793	1,787				1,945

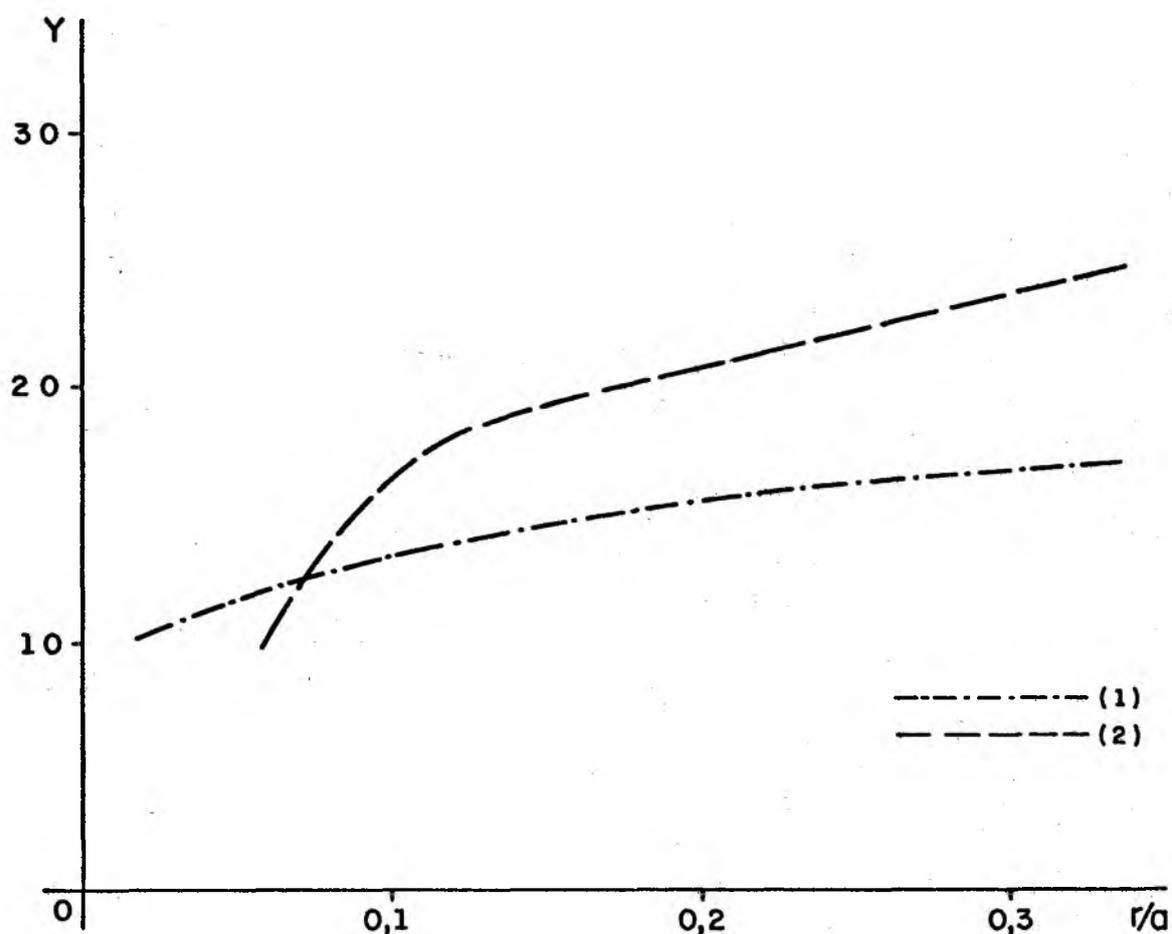
Fig. 5.13 - Resultados obtidos do modelo A3 para uma geometria de trinca central, usado na segunda análise de convergência.

Modelo B1

$$r_0/a = 0,1$$

$$H/L = 4,0$$

$$a/L = 0,8$$



Valor de referência [33] $Y = 11,11$

Valores estimados

Métodos	Deslocamento (1)	Elíptico (2)	Calibragem (3)	Energia Total (4)	Energia Calibrada (5)	Energia Local (6)
KI	61,73	113,21	78,46		51,32	
Y	11,01	20,20	13,99		9,156	

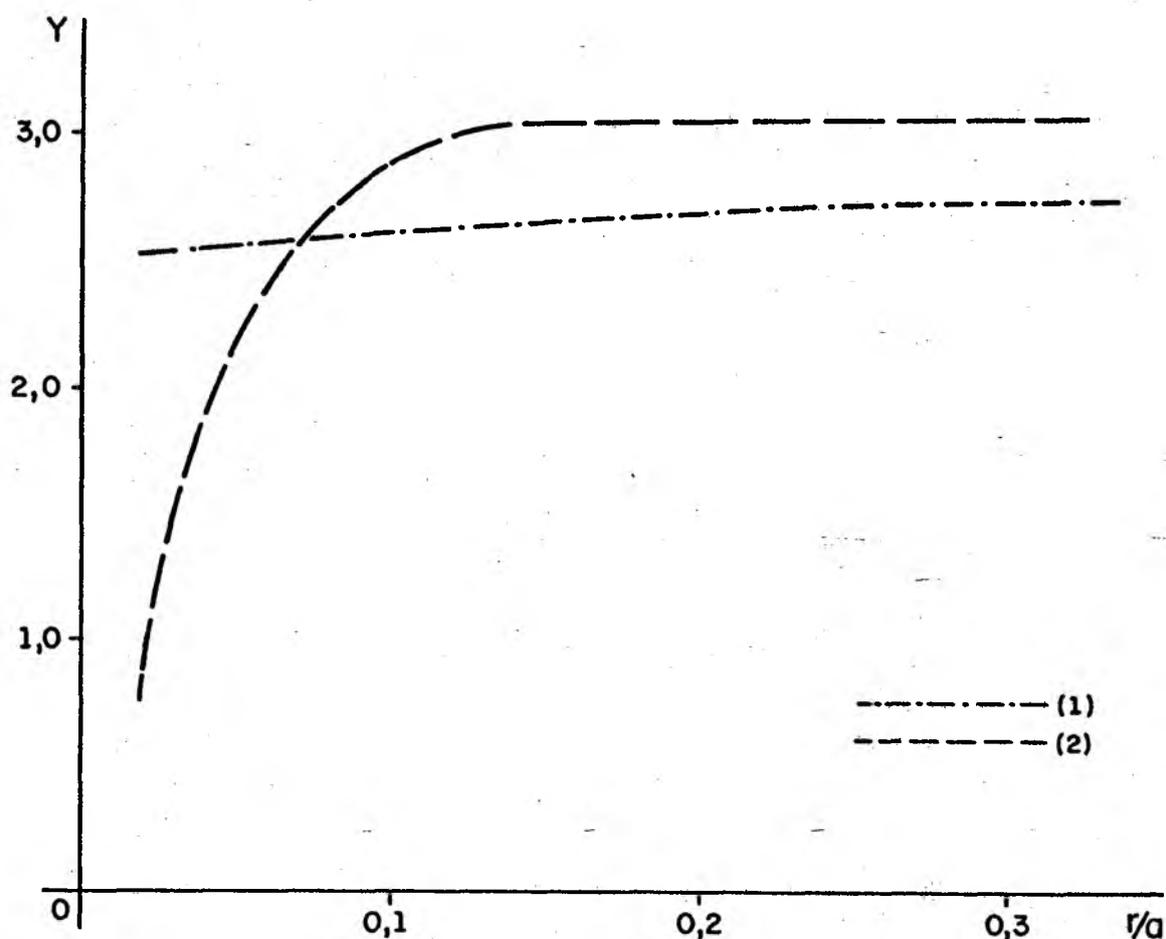
Fig. 5.14 - Resultados obtidos do modelo B1 para uma geometria com uma trinca lateral.

Modelo B2

$$r_o/a = 0,1$$

$$H/L = 4,0$$

$$a/L = 0,5$$



Valor de referência [33] $Y = 2,54$

Valores estimados

Métodos	Deslocamento (1)	Elíptico (2)	Calibragem (3)	Energia Total (4)	Energia Calibragem (5)	Energia Local (6)
KI	14,13	17,88	14,25		14,40	
Y	2,521	3,190	2,542		2,569	

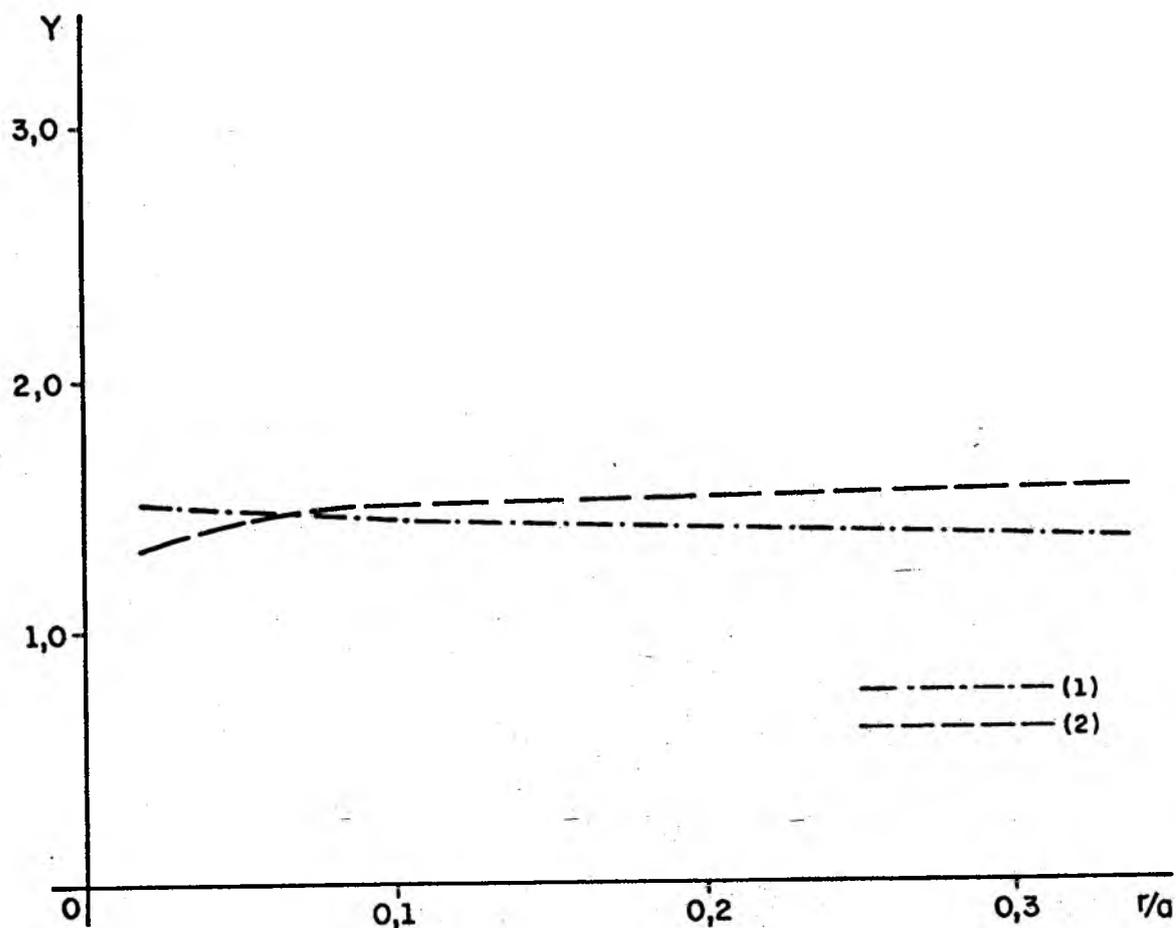
Fig. 5.15 - Resultados obtidos do modelo B2 para uma geometria com uma trinca lateral.

Modelo B1

$$r_0/a = 0,1$$

$$H/L = 4,0$$

$$a/L = 0,8$$



Valor de referência [33] $Y = 1,80$

Valores estimados

Métodos	Deslocamento (1)	Elíptico (2)	Calibragem (3)	Energia Total (4)	Energia Calibrada (5)	Energia Local (6)
KI	8,381	8,492	9,577		9,146	
Y	1,495	1,515	1,709		1,632	

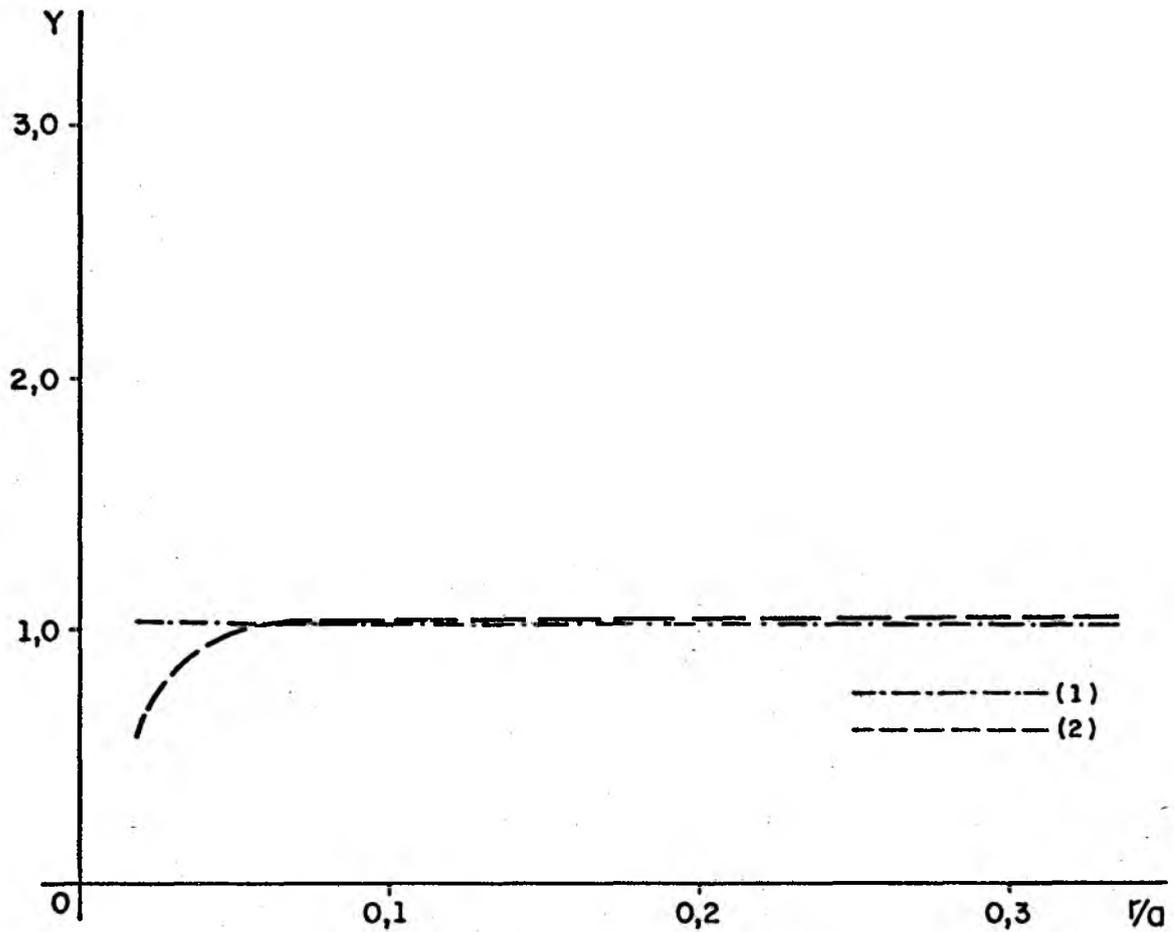
Fig. 5.16 - Resultados obtidos do modelo B1 com geometria de dupla trinca lateral.

Modelo B2

$$r_o/a = 0,1$$

$$H/L = 4,0$$

$$a/L = 0,5$$



Valor de referência [33] $Y = 1,19$

Valores estimados

Métodos	Deslocamento (1)	Elíptico (2)	Calibragem (3)	Energia Total (4)	Energia Calibrada (5)	Energia Local (6)
KI	6,306	6,911	8,160		6,862	
Y	1,125	1,233	1,456		1,224	

Fig. 5.17 - Resultados obtidos do modelo B2 com geometria de dupla trinca lateral.

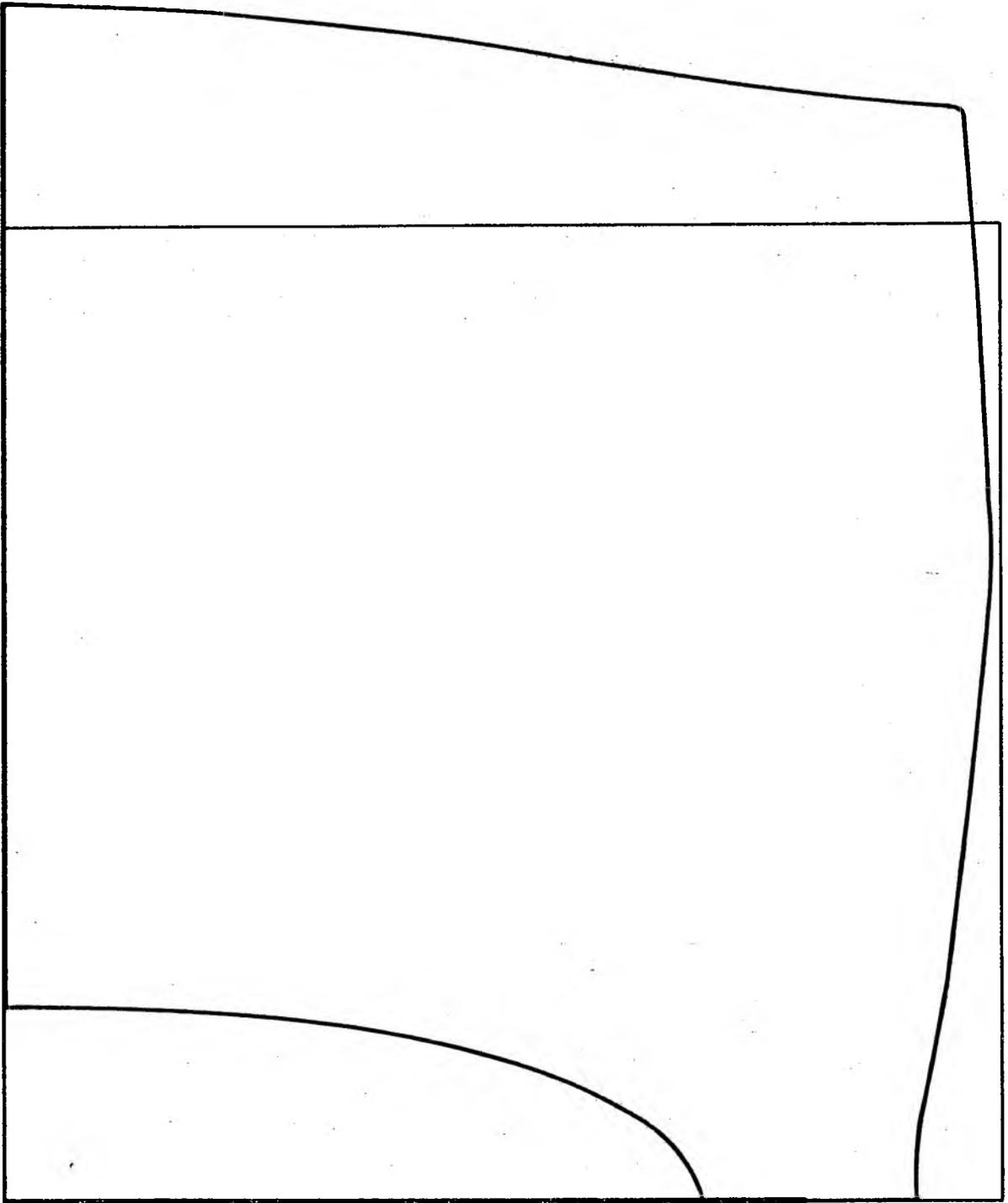


Fig. 5.18 - Modelo A1, com trinca central, deformado.

Escalas: Placa - 1,25 : 1

Deformação - $1,5 \times 10^4$: 1

6. CONCLUSÃO

Como se pode verificar nos resultados apresentados no capítulo anterior, não houve para os modelos analisados, grande predominância entre um método e outro, quando comparados com os resultados de referência.

O método elíptico, que apresentou bons resultados para geometrias de trinca central, mostrou não ser aplicável à geometrias com uma trinca lateral, uma vez que, devido à flexão existente, a trinca, ao se deformar, não mantém a forma elíptica.

Por esta e outras razões há necessidade de se usar não apenas um método, mas um conjunto destes, para se ter confiança quando da análise de um determinado modelo. Quanto ao refino de malha usado no modelo A1, não apresentou resultados satisfatórios, contrariando o que deveria ocorrer. Estudos posteriores seriam de interesse para verificar o porque deste comportamento anômalo.

Outras tentativas podem ser feitas, usando os métodos propostos, tais como, aplicação dos métodos de deslocamento e método elíptico considerando os deslocamentos na direção X_1 e não na direção X_2 , como foi feito. Outra aplicação seria considerar a malha calibrada na região dentro da trinca e não fora da trinca como empregado.

Em termos médios, o uso de elementos finitos convencionais, ao menos para as geometrias analisadas, pode ser considerado aplicável, embora com erros na ordem de 15 a 20%.

Com o uso de elementos especiais existem indicações de que é possível obter resultados bem mais exatos (erro $< 1\%$), com

malhas maiores, reduzindo portanto o tempo de preparo de modelo e o de computação. Entre estes, está o que incorpora, ao método de elementos finitos expansões analíticas dentro de uma pequena região na extremidade da trinca. A filosofia desta aproximação está baseada nas propriedades matemáticas de duas técnicas empregadas, ou seja, a expansão assintótica torna-se mais precisa com a aproximação do ponto singular, enquanto que a aproximação de elementos finitos, pode ser bastante precisa, exceto próximo à extremidade da trinca. Outra vantagem do uso de elementos especiais é que eles não necessitam de um manuseio muito grande dos resultados obtidos, o que não ocorre com os métodos aqui propostos, o que, conseqüentemente, pode levar a erros acidentais.

7. BIBLIOGRAFIA

- [1] ALVES, D.B., Programa Analisador de Sistemas Estruturais. Anais do III COBEM, 1067/1078, 1975.
- [2] ALVES, D.B., Matrizes Intrinsecas de Rigidez e de Tensões para Placas Anisotropicas Quadrangulares. Anais do III COBEM, 1099/1104, 1975.
- [3] ALVES, D.B., PROASE/V75. Manual do Usuário, UFSC, Florianópolis, 1975.
- [4] ALVES, D.B., Teoria da Elasticidade. Apostila, UFSC, Florianópolis, 1975.
- [5] BORESI, A.P. and P.P. LYNN, "Elasticity in Engineering Mechanics". Prentice Hall, 1974.
- [6] BROEK, D., "Elementary Engineering Fracture Mechanics". Noordhoff International Publishing, Leyden, 1974.
- [7] CARTWRIGHT, D. J. and D.P. ROOKE, Evaluation of Stress Intensity Factors. Journal of Strain Analysis, Vol.10, 217/224, 1975.
- [8] CHOW, C.L. and K.J. LAU, Finite Elementes Analysis of Cracked Bodies to Determine Stress Intensity Factors. Journal of Strain Analysis, Vol.11, 18/25, 1976.
- [9] CHOW, C.L. and K.J. LAU Fracture Studies of Point - Loaded Centre-Cracked Plates. Journal of Strain Analysis, Vol. 12, 286/292, 1977.
- [10] CHURCHILL, R.V. "Variáveis Complexas e suas Aplicações". McGraw-Hill, Brasil, 1975.
- [11] DEVERALL, L.I. and G.H. LINDSEY, A Comparison of Numerical Methods for Determining Stress Intensity Factors. Transactions of the ASME, 508/509, 1972.
- [12] DUGDALE D.S. and C. RUIZ, "Elasticity for Engineers". McGraw-Hill, 1971.

- [13] EFTIS, J. and H. LIEBOWITZ, On the Modified Westergaard Equations for Certain Plane Crack Problems. Int. Journal of Fracture Mechanics, vol.8, 383/392, 1972.
- [14] EFTIS, J.; N. SUBRAMONIAN and H. LIEBOWITZ, Crack Border Stress and Displacement Equations Revisited. Engineering Fracture Mechanics, Vol.9, 189/210, 1977.
- [15] EMERY, A.F. and C.M. SEGEDIN, The Evaluation of the Stress Intensity Factors for Cracks Subjected to Tension, Torsion and Flexure by an Efficient Numerical Technique. Journal of Basic Engineering, Vol.93, 387-393, 1972.
- [16] FEDDERSEN, C.E., Discussion. ASTM STP 410, 77/79, 1967.
- [17] GUENTHER, R. e E. Rosa, Métodos Energéticos e Integral J. GRANTE, UFSC, Pub. 16/78, 1978.
- [18] HILTON, P.D. and C.G. STH, Applications of the Finite Element Method to the Calculations of Stress Intensity Factors in "Methods of Analysis Solutions of Crack Problems, C.G. Sih, ed. Noordhoff International Publishing, 426/483, 1973.
- [19] KNOTT, V.F., "Fundamentals of Fracture Mechanics". John Wiley and Sons, 1973.
- [20] KOBAYASHI, A.S., "Experimental Techniques in Fracture Mechanics". SESA - Society for Experimental Stress Analysis Monograph, 1973.
- [21] KOBAYASHI, A.S., R.D. CHEREPY and W. C. KINSEL, A Numerical Procedure for Estimating the Stress Intensity Factor of a Crack in a Finite Plate. Journal of Basic Engineering, 681/684, 1964.
- [22] MAFRA, W.J. e E. da ROSA Processos para a Determinação do Fator de Intensidade de Tensões. GRANTE, UFSC, Pub. 05/78, 1978.
- [23] MAFRA, W.J. e E. da ROSA, Análise Elástica de Trincas. GRANTE, UFSC, Pub. 02/79, 1979.

- [24] OGLESBY, J.J. and O. LOMACKY, An Evaluation of Finite Element Methods for the Computation of Elastic Stress Intensity Factors. Journal of Engineering for Industry, 177/185, 1973.
- [25] PARIS, P.C. and C.G. SIH, Stress Analysis of Cracks. ASTM STP 381, 30/83, 1965.
- [26] PEARCE, J.H.B., Calculation of Stress Intensity Factors Using the Uncle Finite Element Systems and Their Application in Fracture Mechanics. United Kingdom Atomic Energy Authority, 1978.
- [27] RICHARDS, T.H. and A.W. ROBERTSON, The Determination of Single and Mixed Mode Stress Intensity Factors for Engineering Component of Practical Interest, in "Fracture Mechanics in Engineering Practice", P. Stanley, ed. Applied Science Publishers, 1977.
- [28] SIH, G.C., "Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems". Noordhoff International Publishing, Leyden, 1973.
- [29] SIH, G.C., On the Westergaard Method of Crack Analysis Int. Journal of Fracture Mechanics, Vol. 2, 628/631, 1966.
- [30] TAUCHERT, T.R. "Energy Principles in Structural Mechanics". McGraw Hill. Kogakusha, 1974.
- [31] WALSH, P.F., Stress Intensity Factors by Calibrated Finite Element Method. Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 98, 1611/1614, 1972.
- [32] WILSON, W.K., Finite Element Methods for Elastic Bodies Containing Cracks, in "Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems", G.C. Sih, ed., Noordhoff International Publishing, 484/515, 1973.
- [33] ZETTLEMOYER, N. And J.W. FISHER Stress Gradient and Crack Shape Effects on Stress Intensity at Welded Details. Welding Journal, 246/250, 1978.

APENDICES

APÊNDICE A1

FUNÇÃO DE VARIÁVEIS COMPLEXAS

Uma função ϕ da variável complexa z , onde $z = x_1 + ix_2$, se diz analítica num ponto z_0 , se sua derivada $\phi'(z)$ existe não só em z_0 como também em todo ponto z , de uma vizinhança de z_0 e é analítica num domínio do plano z , se ela é analítica em todo ponto desse domínio [10].

Então as partes real e imaginária de uma função analítica

$$\phi(z) = u(x_1, x_2) + i v(x_1, x_2) \quad (\text{A1.1})$$

satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, dadas abaixo, em cada ponto em que $\phi(z)$ é analítica.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_2} \quad (\text{A1.2})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = - \frac{\partial v}{\partial x_1} \quad (\text{A1.3})$$

Diferenciando a equação (A1.2) em relação a x_1 e (A1.3) em relação a x_2 e somando membro a membro, encontramos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \quad (\text{A1.4})$$

De igual forma, porém diferenciando (A1.2) em relação a x_2 e (A1.3) em relação a x_1 , tem-se

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} = 0 \quad (\text{A1.5})$$

Sendo que

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \nabla^2$$

é o operador Laplaceano. Pode-se colocar as equações (A1.4) e (A1.5), na forma

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 v = 0 \quad (\text{A1.6})$$

ou ainda

$$\nabla^2 \operatorname{Re} \phi(z) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 \operatorname{Im} \phi(z) = 0 \quad (\text{A1.7})$$

As equações acima são conhecidas como as equações diferenciais parciais de Laplace em duas variáveis independentes x_1 e x_2 . Qualquer função com derivadas parciais de segunda ordem contínuas, que satisfaz a equação de Laplace é chamada de função harmônica.

As funções u e v dizem-se funções harmônicas conjugadas, se a função $\phi = u + iv$ é analítica. A palavra conjugado aqui difere da definição usada para o complexo conjugado da função z , onde $z = x_1 + ix_2$ e $\bar{z} = x_1 - ix_2$ é o complexo conjugado.

APÊNDICE A2

DIFERENCIAÇÃO E INTEGRAÇÃO DA FUNÇÃO TENSÃO COMPLEXA

Neste apêndice são dadas as relações mais usadas para a obtenção das equações de tensões e deslocamentos, quando se usa função tensão complexa.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{Re} \phi(z) = \frac{\partial}{\partial x_2} \operatorname{Im} \phi(z) \quad (\text{A2.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \operatorname{Re} \phi(z) = - \frac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{Im} \phi(z) \quad (\text{A2.2})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{Re} \phi(z) = \frac{\partial}{\partial x_2} \operatorname{Im} \phi(z) = \operatorname{Re} \phi'(z) \quad (\text{A2.3})$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_2} \operatorname{Re} \phi(z) = \frac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{Im} \phi(z) = \operatorname{Im} \phi'(z) \quad (\text{A2.4})$$

$$\int \operatorname{Re} \phi'(z) dx_1 = \operatorname{Re} \phi(z) \quad (\text{A2.5})$$

$$\int \operatorname{Re} \phi'(z) dx_2 = \operatorname{Im} \phi(z) \quad (\text{A2.6})$$

$$\int \operatorname{Im} \phi'(z) dx_2 = - \operatorname{Re} \phi(z) \quad (\text{A2.7})$$

$$\int \operatorname{Im} \phi'(z) dx_1 = \operatorname{Im} \phi(z) \quad (\text{A2.8})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} [x_2 \operatorname{Im} \phi(z)] = x_2 \operatorname{Re} \phi'(z) + \operatorname{Im} \phi(z) \quad (\text{A2.9})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} [x_2 \operatorname{Re} \phi(z)] = \operatorname{Re} \phi(z) - x_2 \operatorname{Im} \phi'(z) \quad (\text{A2.10})$$

$$\int x_2 \operatorname{Re} \phi(z) dx_2 = \operatorname{Re} \bar{\phi}(z) + x_2 \operatorname{Im} \bar{\phi}(z) \quad (\text{A2.11})$$

$$\int x_2 \operatorname{Im} \phi(z) dx_2 = \operatorname{Im} \bar{\phi}(z) - x_2 \operatorname{Re} \bar{\phi}(z) \quad (\text{A2.12})$$

APÊNDICE A3

CALIBRAGEM NA MALHA INTERNA

A malha de elementos finitos usada no interior do contorno arbitrário, no método de elementos finitos calibrado é inicialmente calibrada para um carregamento correspondente a um valor de K unitário. Posteriormente, com o mesmo procedimento, calibra-se a malha para tensões unitárias devido à constante nas equações de Westergaard. A separação dos dois estados é feita para que a malha, uma vez calibrada, possa servir para qualquer outro estado de tensão aplicado, bem como para qualquer geometria do modelo.

Conhecido o campo de tensões, que atua no contorno da malha, equações (3.20), as forças no contorno para $K = 1$, são obtidas efetuando uma integração numérica, $dF = \sigma dA$, em todo o seu contorno.

Assim, através da integração, empregando a regra de Simpson, foram obtidas as forças que atuam em cada subdivisão feita, figura A3.1.

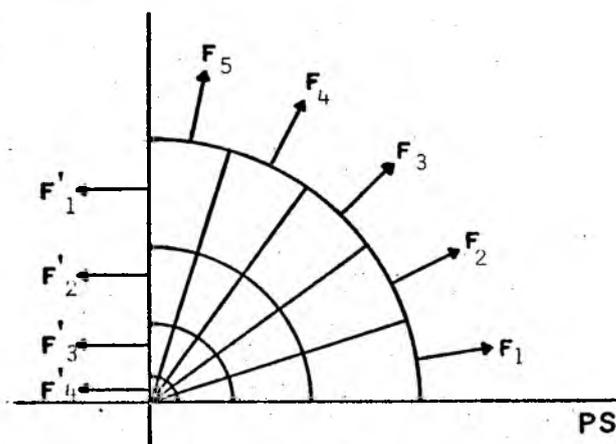


Fig. A3.1 - Forças nas subdivisões

As forças nodais, segundo as direções x_1 e x_2 , são obtidas a partir das condições de equivalência de um sistema de forças, imposto à cada intervalo.

O mesmo procedimento é usado para a calibragem com $\sigma = 1$.

Os deslocamentos e a energia de deformação podem ser computados pelo PROASE usando a malha e o carregamento obtido.

APÊNDICE A4

LISTAGEM DOS RESULTADOS

Neste apêndice é fornecida uma listagem de resultados obtidos com a aplicação dos métodos, bem como alguns procedimentos na obtenção dos mesmos.

Estes resultados estão resumidos nas tabelas subsequentes.

MÉTODO DE DESLOCAMENTOS

MODELO A

$$r_0/a = 0,1$$

$$a/L = 0,8$$

$$K_I = \frac{G(1+\nu)}{2} u_{2i} \sqrt{\frac{2\pi}{r_i}}$$

$$A1 - H/L = 1$$

$$A2 - H/L = 2$$

$$A3 - H/L = 4$$

$\theta = 180^\circ$ (dentro da trinca)

Geometria de trinca central, $l/a = 0,01$

POSIÇÃO (r_i)	DESLOCAMENTOS (U_{2i})			K_I		
	MODELO A1	MODELO A2	MODELO A3	MODELO A1	MODELO A2	MODELO A3
0,2236	$0,3784 \times 10^{-4}$	$0,3445 \times 10^{-4}$	$0,3444 \times 10^{-4}$	10,53	9,587	9,583
0,6708	$0,6616 \times 10^{-4}$	$0,5947 \times 10^{-4}$	$0,5945 \times 10^{-4}$	10,63	9,555	9,552
1,342	$0,9301 \times 10^{-4}$	$0,8213 \times 10^{-4}$	$0,8209 \times 10^{-4}$	10,57	9,330	9,325
2,236	$0,1193 \times 10^{-3}$	$0,1031 \times 10^{-3}$	$0,1030 \times 10^{-3}$	10,50	9,073	9,065
3,354	$0,1437 \times 10^{-3}$	$0,1211 \times 10^{-3}$	$0,1210 \times 10^{-3}$	10,33	8,702	8,695
4,696	$0,1666 \times 10^{-3}$	$0,1368 \times 10^{-3}$	$0,1367 \times 10^{-3}$	10,12	8,308	8,301
5,000	$0,1712 \times 10^{-3}$	$0,1398 \times 10^{-3}$	$0,1397 \times 10^{-3}$	10,08	8,228	8,222
Valor de K_I obtido do ajustamento pelo método dos mínimos quadrados.				10,68	9,712	9,709

RESULTADO DO AJUSTAMENTO

$$A1 \quad y = -1,044x + 10,68$$

$$A2 \quad y = -2,970x + 9,712$$

$$A3 \quad Y = -2,978x + 9,709$$

MÉTODO DE DESLOCAMENTOS

MODELO B

$$r_0/a = 0,1$$

$$H/L = 4$$

$$K_I = \frac{G(1+\nu)}{2} u_{2i} \sqrt{\frac{2\pi}{r_i}}$$

B1 $a/L = 0,80$

B2 $a/L = 0,50$

B3 $a/L = 0,25$

 $\theta = 180^\circ$ (dentro da trinca)Geometria de trinca central, $l/a = 0,01$

POSIÇÃO (r_i)	DESLOCAMENTOS (u_{2i})			K_I		
	MODELO B1 \equiv A3	MODELO B2	MODELO B3	MODELO B1	MODELO B2	MODELO B3
0,2236	$0,3444 \times 10^{-4}$	$0,2263 \times 10^{-4}$	$0,1993 \times 10^{-4}$	9,585	6,298	5,547
0,6708	$0,5945 \times 10^{-4}$	$0,3909 \times 10^{-4}$	$0,3441 \times 10^{-4}$	9,552	6,281	5,534
1,342	$0,8209 \times 10^{-4}$	$0,5413 \times 10^{-4}$	$0,4771 \times 10^{-4}$	9,325	6,149	5,420
2,236	$0,1030 \times 10^{-4}$	$0,6833 \times 10^{-4}$	$0,6027 \times 10^{-4}$	9,065	6,013	5,304
3,354	$0,1210 \times 10^{-3}$	$0,8100 \times 10^{-4}$	$0,7148 \times 10^{-4}$	8,695	5,820	5,136
4,596	$0,1367 \times 10^{-3}$	$0,9245 \times 10^{-4}$	$0,8165 \times 10^{-4}$	8,301	5,614	4,958
5,000	$0,1397 \times 10^{-3}$	$0,9468 \times 10^{-4}$	$0,8363 \times 10^{-4}$	8,222	5,572	4,922
Valor de K_I obtido do ajustamento pelo método dos mínimos quadrados.				9,709	6,360	5,602

RESULTADO DO AJUSTAMENTO

B1 $y = -2,978x + 9,709$

B2 $y = -1,582x + 6,360$

B3 $y = -0,364x + 5,602$

MÉTODO DE DESLOCAMENTOS

MODELO C

 $a/L = 0,25$ $H/L = 4$

$$K_I = \frac{G(1+\nu)}{2} u_{2i} \sqrt{\frac{2\pi}{r_i}}$$

C1 - $r_o/a = 0,20$ C2 - $r_o/a = 0,10$ C3 - $r_o/a = 0,05$ $\theta = 180^\circ$ (dentro da trinca)Geometria de trinca central, $l/a = 0,01$

POSIÇÃO (r_i)	DESLOCAMENTOS (u_{2i})			K_I		
	MODELO C1	MODELO C2 B3	MODELO C3	MODELO C1	MODELO C2	MODELO C3
0,2236	$0,1397 \times 10^{-4}$	$0,1993 \times 10^{-4}$	$0,2852 \times 10^{-4}$	3,888	5,547	7,937
0,6708	$0,2384 \times 10^{-4}$	$0,3441 \times 10^{-4}$	$0,4959 \times 10^{-4}$	3,831	5,534	7,968
1,342	$0,3236 \times 10^{-4}$	$0,4771 \times 10^{-4}$	$0,6934 \times 10^{-4}$	3,676	5,420	7,877
2,236	$0,3963 \times 10^{-4}$	$0,6027 \times 10^{-4}$	$0,8873 \times 10^{-4}$	3,488	5,304	7,811
3,354	$0,4464 \times 10^{-4}$	$0,7148 \times 10^{-4}$	$0,1073 \times 10^{-3}$	3,208	5,136	7,710
4,696	$0,4717 \times 10^{-4}$	$0,8165 \times 10^{-4}$	$0,1256 \times 10^{-3}$	2,865	4,958	7,627
5,000	$0,4741 \times 10^{-4}$	$0,8363 \times 10^{-4}$	$0,1294 \times 10^{-3}$	2,790	4,922	7,616
Valor de K_I obtido do ajustamento pelo método dos mínimos quadrados.				3,9802	5,602	7,980

RESULTADO DO AJUSTAMENTO

C1 $y = - 0,2349x + 3,9802$

C2 $y = - 0,364 x + 5,602$

C3 $y = - 0,0749x + 7,980$

MÉTODO DE DESLOCAMENTOS

MODELO A

$$r_o/a = 0,1$$

$$a/L = 0,8$$

$$K_I = \frac{G(1+\nu)}{2} u_{2i} \sqrt{\frac{2\pi}{r_i}} \quad \text{A1 - H/L} = 1$$

$$\text{A2 - H/L} = 2$$

 $\theta = 180^\circ$ (dentro da trinca)

$$\text{A3 - H/L} = 4$$

Geometria de trinca central, $1/a = 0,005$

POSIÇÃO (r_i)	DESLOCAMENTOS (u_{2i})			K_I		
	MODELO A1	MODELO A2	MODELO A3	MODELO A1	MODELO A2	MODELO A3
0,050	$0,1805 \times 10^{-4}$	$0,1649 \times 10^{-4}$	$0,1649 \times 10^{-4}$	10,62	9,705	9,705
0,150	$0,3193 \times 10^{-4}$	$0,2909 \times 10^{-4}$	$0,2908 \times 10^{-4}$	10,85	9,884	9,881
0,300	$0,4530 \times 10^{-4}$	$0,4110 \times 10^{-4}$	$0,4109 \times 10^{-4}$	10,88	9,875	9,872
0,500	$0,5861 \times 10^{-4}$	$0,5288 \times 10^{-4}$	$0,5286 \times 10^{-4}$	10,91	9,841	9,838
0,750	$0,7173 \times 10^{-4}$	$0,6428 \times 10^{-4}$	$0,6426 \times 10^{-4}$	10,90	9,768	9,765
1,125	$0,8754 \times 10^{-4}$	$0,7766 \times 10^{-4}$	$0,7763 \times 10^{-4}$	10,86	9,635	9,632
1,500	$0,1006 \times 10^{-4}$	$0,8838 \times 10^{-4}$	$0,8834 \times 10^{-4}$	10,81	9,496	9,492
2,000	$0,1155 \times 10^{-3}$	$0,1003 \times 10^{-3}$	$0,1002 \times 10^{-3}$	10,75	9,333	9,324
Valor de K_I obtido do ajustamento pelo método dos mínimos quadrados.				10,82	9,896	9,895

RESULTADO DO AJUSTAMENTO

$$\text{A1 } y = -0,0025x + 10,82$$

$$\text{A2 } y = -0,2560x + 9,896$$

$$\text{A3 } y = -0,2591x + 9,895$$

MÉTODO DE DESLOCAMENTOS

MODELO A

$$r_0/a = 0,1$$

$$a/L = 0,8$$

$$K_I = \frac{G(1+\nu)}{2} u_{2i} \sqrt{\frac{2\pi}{r_i}} \quad \text{A1 - H/L} = 1$$

$$\text{A2 - H/L} = 2$$

$$\theta = 180^\circ \text{ (dentro da trinca)}$$

$$\text{A3 - H/L} = 4$$

Geometria de trinca central, $l/a = 0,0025$

POSIÇÃO (r_i)	DESLOCAMENTOS (u_{2i})			K_I		
	MODELO A1	MODELO A2	MODELO A3	MODELO A1	MODELO A2	MODELO A3
0,025	$0,1295 \times 10^{-4}$	$0,1184 \times 10^{-4}$	$0,1184 \times 10^{-4}$	10,78	9,854	9,854
0,050	$0,1889 \times 10^{-4}$	$0,1726 \times 10^{-4}$	$0,1726 \times 10^{-4}$	11,12	10,16	10,16
0,150	$0,3242 \times 10^{-4}$	$0,2954 \times 10^{-4}$	$0,2953 \times 10^{-4}$	11,02	10,04	10,03
0,300	$0,4577 \times 10^{-4}$	$0,4152 \times 10^{-4}$	$0,4151 \times 10^{-4}$	11,00	9,976	9,973
0,500	$0,5897 \times 10^{-4}$	$0,5320 \times 10^{-4}$	$0,5319 \times 10^{-4}$	10,96	9,901	9,899
0,750	$0,7206 \times 10^{-4}$	$0,6457 \times 10^{-4}$	$0,6455 \times 10^{-4}$	10,95	9,812	9,809
1,125	$0,8784 \times 10^{-4}$	$0,7792 \times 10^{-4}$	$0,7789 \times 10^{-4}$	10,90	9,668	9,664
1,500	$0,1009 \times 10^{-3}$	$0,8863 \times 10^{-4}$	$0,8859 \times 10^{-4}$	10,84	9,523	9,519
Valor de K_I obtido do ajustamento pelo método dos mínimos quadrados.				10,99	10,05	10,05

RESULTADO DO AJUSTAMENTO

$$\text{A1 } y = -0,0848x + 10,99$$

$$\text{A2 } y = -0,3410x + 10,05$$

$$\text{A3 } y = -0,3419x + 10,05$$

MÉTODO DE DESLOCAMENTO

MODELO B1 e B2

$$r_o/a = 0,1$$

$$H/L = 4$$

$$K_I = \frac{G(1+\nu)}{2} u_{2i} \frac{2\pi}{r_i}$$

B1 $a/L = 0,80$

B2 $a/L = 0,50$

 θ 180° (dentro da trinca)Geometria com dupla trinca lateral, $l/a = 0,01$

POSIÇÃO (r_i)	DESLOCAMENTOS (u_{2i})		K_I	
	MODELO B1	MODELO B2	MODELO B1	MODELO B2
0,2236	$0,3001 \times 10^{-4}$	$0,2317 \times 10^{-4}$	8,352	6,448
0,6708	$0,5151 \times 10^{-4}$	$0,4012 \times 10^{-4}$	8,276	6,446
1,342	$0,7079 \times 10^{-4}$	$0,5577 \times 10^{-4}$	8,042	6,335
2,236	$0,8880 \times 10^{-4}$	$0,7089 \times 10^{-4}$	7,815	6,239
3,354	$0,1050 \times 10^{-3}$	$0,8507 \times 10^{-4}$	7,545	6,113
4,696	$0,1204 \times 10^{-3}$	$0,9894 \times 10^{-4}$	7,312	6,008
5,000	$0,1234 \times 10^{-3}$	$0,1017 \times 10^{-3}$	7,262	5,985
Valor de K_I obtido do ajustamento pelo método dos mínimos quadrados.			8,381	6,306

RESULTADO DO AJUSTAMENTO

B1 $y = 0,2321x + 8,381$

B2 $y = 0,1019x + 6,306$

MÉTODO DE DESLOCAMENTO

MODELO B1 e B2

$$r_o/a = 0,1$$

$$H/L = 4$$

$$K_I = \frac{G(1+\nu)}{2} u_{2i} \sqrt{\frac{2\pi}{r_i}}$$

$$B1 \quad a/L = 0,80$$

$$B2 \quad a/L = 0,50$$

$\theta = 180^\circ$ (dentro da trinca)

Geometria com uma trinca lateral, $l/a = 0,01$

POSIÇÃO (r_i)	DESLOCAMENTOS (u_{2i})		K_I	
	MODELO B1	MODELO B2	MODELO B1	MODELO B2
0,2236	$0,2217 \times 10^{-3}$	$0,5083 \times 10^{-4}$	61,70	14,14
0,6708	$0,4242 \times 10^{-3}$	$0,8993 \times 10^{-4}$	68,16	14,45
1,342	$0,6668 \times 10^{-3}$	$0,1290 \times 10^{-3}$	75,75	14,65
2,236	$0,9659 \times 10^{-3}$	$0,1704 \times 10^{-3}$	85,01	15,00
3,354	$0,1326 \times 10^{-2}$	$0,2143 \times 10^{-3}$	95,28	15,40
4,696	$0,1751 \times 10^{-2}$	$0,2620 \times 10^{-2}$	106,23	15,91
5,000	$0,1847 \times 10^{-2}$	$0,2722 \times 10^{-3}$	108,70	16,02
Valor de K_I obtido do ajustamento pelo método dos mínimos quadrados.			61,73	14,13

RESULTADO DO AJUSTAMENTO

$$B1 \quad y = 9,632x + 61,73$$

$$B2 \quad y = 0,3798x + 14,13$$

MÉTODO CALIBRADO

$$K_I = \frac{CDR - CDU_{\sigma} \cdot \sigma}{CDUK}$$

Geometria de trinca central, $l/a = 0,01$

MODELOS	K_I DIREÇÃO X_1	K_I DIREÇÃO X_2
A1	10,48	11,61
A2	9,307	10,90
A3	9,318	10,90
B2	6,770	6,824
B3	6,118	5,934
C1	4,249	4,233
C3	8,801	8,402

OBS:- O fator de intensidade de tensões foi obtido tomando-se o somatório dos deslocamentos segundo as direções de X_1 , e X_2 , obtidos do PROASE, substituindo-se na fórmula:

$$K_I = \frac{\sum u_R - \sum u_{u\sigma} \cdot \sigma}{\sum u_{uK}}$$

onde

u_R = deslocamento real

$u_{u\sigma}$ = deslocamento da malha calibrada para $\sigma = 1$.

u_{uK} = deslocamento da malha calibrada para $K = 1$.

MÉTODO DA ENERGIA TOTAL

$$\frac{K_I^2}{E} = \frac{\Delta U}{\Delta a}$$

Modelo	1.ª Variação		2.ª Variação		3.ª Variação		Média dos Valores
	Δa	K_I	Δa	K_I	Δa	K_I	
A1	0,03	$1,958 \times 10^{-5}$	0,06	$2,958 \times 10^{-5}$	0,10	$3,956 \times 10^{-5}$	10,33
A2	0,03	$1,638 \times 10^{-5}$	0,06	$2,476 \times 10^{-5}$	0,10	$3,317 \times 10^{-5}$	9,455
A3 = B1	0,03	$1,637 \times 10^{-5}$	0,06	$2,475 \times 10^{-5}$	0,10	$3,315 \times 10^{-5}$	9,450
B2	0,03	$7,126 \times 10^{-6}$	0,06	$1,067 \times 10^{-5}$	0,10	$1,413 \times 10^{-5}$	6,207
B3	0,03	$5,530 \times 10^{-6}$	0,06	$8,260 \times 10^{-6}$	0,10	$1,093 \times 10^{-5}$	5,463

Geometria de trinca central, $l/a = 0,003$

MÉTODO DE ENERGIA CALIBRADA

$$K_I^2 = \frac{U_{\text{REAL}} - U_{\text{UNIT. K}}}{U_{\text{UNIT. K}}}$$

Geometria de trinca central, $l/a = 0,01$

MODELO	$U_{\text{UNIT. K}}$	$U_{\text{UNIT.}}$	U_{REAL}	K_I
A1	$0,7548 \times 10^{-6}$	$0,1841 \times 10^{-6}$	$0,8837 \times 10^{-4}$	10,71
A2	$0,7548 \times 10^{-6}$	$0,1841 \times 10^{-6}$	$0,7804 \times 10^{-4}$	10,05
A3	$0,7548 \times 10^{-6}$	$0,1841 \times 10^{-6}$	$0,7802 \times 10^{-4}$	10,05
B2	$0,7548 \times 10^{-6}$	$0,1841 \times 10^{-6}$	$0,3367 \times 10^{-4}$	6,494
B3	$0,7548 \times 10^{-6}$	$0,1841 \times 10^{-6}$	$0,2609 \times 10^{-4}$	5,858
C1	$0,7548 \times 10^{-6}$	$0,1841 \times 10^{-6}$	$0,1361 \times 10^{-4}$	3,949
C3	$0,7548 \times 10^{-6}$	$0,1841 \times 10^{-6}$	$0,5221 \times 10^{-4}$	8,302

OBS:- A energia de deformação foi tomada do PROASE efetuando-se a soma das energias de cada elemento dentro do contorno calibrado.

MÉTODOS DE ENERGIA CALIBRADA

$$K_I^2 = \frac{U_{\text{REAL}} - U_{\text{UNIT.}}}{U_{\text{UNIT. K}}}$$

MODELO	$U_{\text{UNIT. K}}$	$U_{\text{UNIT.}}$	U_{REAL}	K_I
B1	$0,7548 \times 10^{-6}$	$0,1841 \times 10^{-6}$	$1,988 \times 10^{-3}$	51,32
B2	$0,7548 \times 10^{-6}$	$0,1841 \times 10^{-6}$	$1,568 \times 10^{-4}$	14,40

Geometria com uma trinca lateral, $l/a = 0,01$

MODELO	$U_{\text{UNIT. K}}$	$U_{\text{UNIT.}}$	U_{REAL}	K_I
B1	$0,7548 \times 10^{-6}$	$0,1841 \times 10^{-6}$	$6,332 \times 10^{-5}$	9,146
B2	$0,7548 \times 10^{-6}$	$0,1841 \times 10^{-6}$	$3,574 \times 10^{-5}$	6,863

Geometria com dupla trinca lateral

MÉTODO DE ENERGIA LOCAL

MODELO A

$$U = \frac{(5-8\nu)}{(8-8\nu)} r_1 \frac{K_I^2}{E}$$

r_1	A1		A2		A3	
	U	K_I	U	K_I	U	K_I
0,05	$1,571 \times 10^{-5}$	11,92	$1,311 \times 10^{-5}$	10,89	$1,310 \times 10^{-5}$	10,89
0,15	$4,436 \times 10^{-5}$	11,57	$3,718 \times 10^{-5}$	10,56	$3,716 \times 10^{-5}$	10,59
0,3	$8,574 \times 10^{-5}$	11,37	$7,618 \times 10^{-5}$	10,71	$7,230 \times 10^{-5}$	10,44
	$\bar{K} = 11,62$		$\bar{K} = 10,72$		$\bar{K} = 10,64$	

Geometria com trinca central, $l/a = 0,005$

r_1	A1		A2		A3	
	U	K_I	U	K_I	U	K_I
0,025	$8,142 \times 10^{-6}$	12,14	$6,794 \times 10^{-6}$	11,09	$6,790 \times 10^{-6}$	11,08
0,05	$1,741 \times 10^{-5}$	12,55	$1,348 \times 10^{-5}$	11,04	$1,347 \times 10^{-5}$	11,04
0,15	$4,424 \times 10^{-5}$	11,55	$3,706 \times 10^{-5}$	10,57	$3,704 \times 10^{-5}$	10,57
	$\bar{K} = 12,08$		$\bar{K} = 10,90$		$\bar{K} = 10,90$	

Geometria com trinca central $l/a = 0,0025$

OBS:- A energia de deformação foi tomada do PROASE dentro do contorno de raio r_1 , efetuando-se a soma da energia de cada elemento.

MÉTODO ELÍPTICO

MODELO A1

$$u'_{2i}(x_1, 0) = b' \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)^{1/2}$$

$$b' = \frac{2 a \sigma}{E}$$

Posição x_1	Deslocamentos u'_{2i} (PROASE)	Deslocamentos do ajustamento $u'_{2i} = b'x' + c$	b' obtido após u'_{2i} ajustado
10,00	-	- c -	-
9,776	$3,784 \times 10^{-5}$	$3,740 \times 10^{-5}$	$1,777 \times 10^{-4}$
9,329	$6,616 \times 10^{-5}$	$6,819 \times 10^{-5}$	$1,894 \times 10^{-4}$
8,658	$9,301 \times 10^{-5}$	$9,906 \times 10^{-5}$	$1,940 \times 10^{-4}$
7,764	$1,193 \times 10^{-4}$	$1,238 \times 10^{-4}$	$1,964 \times 10^{-4}$
6,646	$1,437 \times 10^{-4}$	$1,479 \times 10^{-4}$	$1,979 \times 10^{-4}$
5,304	$1,666 \times 10^{-4}$	$1,685 \times 10^{-4}$	$1,988 \times 10^{-4}$
5,000	$1,711 \times 10^{-4}$	$1,723 \times 10^{-4}$	$1,990 \times 10^{-4}$
3,750	$1,855 \times 10^{-4}$	$1,849 \times 10^{-4}$	$1,994 \times 10^{-4}$
2,500	$1,960 \times 10^{-4}$	$1,933 \times 10^{-4}$	$1,997 \times 10^{-4}$
1,250	$2,020 \times 10^{-4}$	$1,983 \times 10^{-4}$	$1,998 \times 10^{-4}$
-	$2,040 \times 10^{-4}$	$1,999 \times 10^{-4}$	$1,999 \times 10^{-4}$

Placa infinita $b = \frac{2 a \sigma}{E} = 9,524 \times 10^{-5}$

- Resultado do ajustamento pelo método dos mínimos quadrados

Por uma reta qualquer

$$u'_{2i} = 2,058 \times 10^{-4} x' - 5,918 \times 10^{-6}$$

coeficiente de correlação

$$r^2 = 0,9974$$

Por uma reta passando pela origem

$$u'_{2i} = 1,986 \times 10^{-4} x'$$

onde $x' = \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)^{1/2}$

Obtenção do fator geométrico ($Y = \frac{b'}{b}$)

$$(1) Y = \frac{2,058 \times 10^{-4}}{9,524 \times 10^{-5}} = 2,161 \quad (2) Y = \frac{1,956 \times 10^{-4}}{9,524 \times 10^{-5}} = 2,054$$

$$(3) Y = \frac{1,986 \times 10^{-4}}{9,524 \times 10^{-5}} = 2,085$$

OBS: Em (1) o valor do Y foi determinado tomando-se o valor obtido do ajustamento por $y = b'x' + c$, (2) pelo ajustamento $y = b'x'$ e em (3), pelo valor médio dos b' após u'_{2i} ajustado por uma reta qualquer.

MÉTODO ELÍPTICO

MODELO A2

$$u'_{2i}(x_1, 0) = b' \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)^{1/2}$$

$$b' = \frac{2 \cdot a \cdot \sigma}{E}$$

Posição x_1	Deslocamentos u'_{2i} (PROASE)	Deslocamentos do ajustamento $u'_{2i} = b'x' + c$	b' obtido após u'_{2i} ajustado
10,00	-	- c -	-
9,776	$0,3445 \times 10^{-4}$	$0,3485 \times 10^{-4}$	$1,656 \times 10^{-4}$
9,329	$0,5947 \times 10^{-4}$	$0,5874 \times 10^{-4}$	$1,631 \times 10^{-4}$
8,658	$0,8213 \times 10^{-4}$	$0,8115 \times 10^{-4}$	$1,622 \times 10^{-4}$
7,764	$0,1031 \times 10^{-3}$	$0,1019 \times 10^{-3}$	$1,617 \times 10^{-4}$
6,646	$0,1211 \times 10^{-3}$	$0,1206 \times 10^{-3}$	$1,614 \times 10^{-4}$
5,304	$0,1368 \times 10^{-3}$	$0,1366 \times 10^{-3}$	$1,612 \times 10^{-4}$
5,000	$0,1398 \times 10^{-3}$	$0,1395 \times 10^{-3}$	$1,611 \times 10^{-4}$
3,750	$0,1491 \times 10^{-3}$	$0,1493 \times 10^{-3}$	$1,610 \times 10^{-4}$
2,500	$0,1555 \times 10^{-3}$	$0,1559 \times 10^{-3}$	$1,610 \times 10^{-4}$
1,250	$0,1589 \times 10^{-3}$	$0,1597 \times 10^{-3}$	$1,609 \times 10^{-4}$
-	$0,1601 \times 10^{-3}$	$0,1609 \times 10^{-3}$	$1,609 \times 10^{-4}$

Placa infinita $b = \frac{2 \cdot a \cdot \sigma}{E} = 9,524 \times 10^{-5}$

Resultado do ajustamento pelo método dos mínimos quadrados

Por uma reta qualquer

$$u'_{2i} = 1,597 \times 10^{-4} x' + 1,236 \times 10^{-6}$$

coeficiente de correlação

$$r^2 = 0,9998$$

Por uma reta passando pela origem

$$u'_{2i} = 1,612 \times 10^{-4} x'$$

Obtenção do fator geométrico ($Y = \frac{b'}{b}$)

$$(1) Y = \frac{1,597 \times 10^{-4}}{9,524 \times 10^{-5}} = 1,677$$

$$(2) Y = \frac{1,612 \times 10^{-4}}{9,524 \times 10^{-5}} = 1,693$$

$$(3) Y = \frac{1,618 \times 10^{-4}}{9,524 \times 10^{-5}} = 1,699$$

MÉTODO ELÍPTICO

MODELO A3

$$u'_{2i}(x_1, 0) = b' \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)^{1/2}$$

$$b' = \frac{2 a \sigma}{E}$$

Posição x_1	Deslocamentos u'_{2i} (PROASE)	Deslocamentos do ajustamento $u'_{2i} = b'x' + c$	b' obtido após u'_{2i} ajustado
10,00	-	- c -	-
9,776	$0,3444 \times 10^{-4}$	$0,3484 \times 10^{-4}$	$1,655 \times 10^{-4}$
9,329	$0,5945 \times 10^{-4}$	$0,5870 \times 10^{-4}$	$1,630 \times 10^{-4}$
8,658	$0,8209 \times 10^{-4}$	$0,8108 \times 10^{-4}$	$1,620 \times 10^{-4}$
7,764	$0,1030 \times 10^{-3}$	$0,1018 \times 10^{-3}$	$1,615 \times 10^{-4}$
6,646	$0,1210 \times 10^{-3}$	$0,1204 \times 10^{-3}$	$1,612 \times 10^{-4}$
5,304	$0,1367 \times 10^{-3}$	$0,1365 \times 10^{-3}$	$1,610 \times 10^{-4}$
5,000	$0,1397 \times 10^{-3}$	$0,1394 \times 10^{-3}$	$1,610 \times 10^{-4}$
3,750	$0,1489 \times 10^{-3}$	$0,1491 \times 10^{-3}$	$1,609 \times 10^{-4}$
2,500	$0,1553 \times 10^{-3}$	$0,1557 \times 10^{-3}$	$1,608 \times 10^{-4}$
1,250	$0,1588 \times 10^{-3}$	$0,1595 \times 10^{-3}$	$1,608 \times 10^{-4}$
-	$0,1599 \times 10^{-3}$	$0,1608 \times 10^{-3}$	$1,608 \times 10^{-4}$

Placa infinita $b = \frac{2 a \sigma}{E} = 9,524 \times 10^{-5}$

Resultado do ajustamento pelo método dos mínimos quadrados

Por uma reta qualquer

$$u'_{2i} = 1,595 \times 10^{-4} x' + 1,265 \times 10^{-6}$$

coeficiente de correlação

$$r^2 = 0,9998$$

Por uma reta passando pela origem

$$u'_{2i} = 1,611 \times 10^{-4} x'$$

Obtenção do fator geométrico ($Y = \frac{b'}{b}$)

$$(1) Y = \frac{1,595 \times 10^{-4}}{9,524 \times 10^{-5}} = 1,675$$

$$(2) Y = \frac{1,611 \times 10^{-4}}{9,524 \times 10^{-5}} = 1,692$$

$$(3) Y = \frac{1,617 \times 10^{-4}}{9,524 \times 10^{-5}} = 1,698$$

MÉTODO ELÍPTICO

MODELO B2

$$u'_{2i}(x_1, 0) = b' \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)^{1/2}$$

$$b' = \frac{2 a \sigma}{E}$$

Posição x_1	Deslocamentos u'_{2i} (PROASE)	Deslocamentos do ajustamento $u'_{2i} = b'x' + c$	b' obtido após u'_{2i} ajustado
10,00	-	- c -	-
9,776	$0,2263 \times 10^{-4}$	$0,2262 \times 10^{-4}$	$1,075 \times 10^{-4}$
9,329	$0,3909 \times 10^{-4}$	$0,3908 \times 10^{-4}$	$1,085 \times 10^{-4}$
8,658	$0,5413 \times 10^{-4}$	$0,5451 \times 10^{-4}$	$1,089 \times 10^{-4}$
7,764	$0,6833 \times 10^{-4}$	$0,6879 \times 10^{-4}$	$1,092 \times 10^{-4}$
6,646	$0,8100 \times 10^{-4}$	$0,8166 \times 10^{-4}$	$1,093 \times 10^{-4}$
5,304	$0,9245 \times 10^{-4}$	$0,9271 \times 10^{-4}$	$1,094 \times 10^{-4}$
5,000	$0,9468 \times 10^{-4}$	$0,9473 \times 10^{-4}$	$1,094 \times 10^{-4}$
3,750	$0,1015 \times 10^{-3}$	$0,1014 \times 10^{-3}$	$1,094 \times 10^{-4}$
2,500	$0,1063 \times 10^{-3}$	$0,1060 \times 10^{-3}$	$1,095 \times 10^{-4}$
1,250	$0,1090 \times 10^{-3}$	$0,1086 \times 10^{-3}$	$1,095 \times 10^{-4}$
-	$0,1099 \times 10^{-3}$	$0,1095 \times 10^{-3}$	$1,095 \times 10^{-4}$

Placa infinita $b = \frac{2 a \sigma}{E} = 9,524 \times 10^{-5}$

Resultado do ajustamento pelo método dos mínimos quadrados

Por uma reta qualquer

coeficiente de correlação

$$u'_{2i} = 1,100 \times 10^{-4} x' - 5,336 \times 10^{-7}$$

$$r^2 = 0,9999$$

Por uma reta passando pela origem

$$u'_{2i} = 1,093 \times 10^{-4} x'$$

Obtenção do fator geométrico ($Y = \frac{b'}{b}$)

$$(1) Y = \frac{1,100 \times 10^{-4}}{9,524 \times 10^{-5}} = 1,155$$

$$(2) Y = \frac{1,093 \times 10^{-4}}{9,524 \times 10^{-5}} = 1,148$$

$$(3) Y = \frac{1,091 \times 10^{-4}}{9,524 \times 10^{-5}} = 1,146$$

MÉTODO ELÍPTICO

MODELO B3

$$u_{2i}'(x_1, 0) = b' \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)^{1/2}$$

$$b' = \frac{2 a \sigma}{E}$$

Posição x_1	Deslocamentos u_{2i}' (PROASE)	Deslocamentos do ajustamento $u_{2i}' = b'x' + c$	b' obtido após u_{2i}' ajustado
10,00	-	- c -	-
9,776	$0,1993 \times 10^{-4}$	$0,1991 \times 10^{-4}$	$9,458 \times 10^{-5}$
9,329	$0,3444 \times 10^{-4}$	$0,3447 \times 10^{-4}$	$9,571 \times 10^{-5}$
8,658	$0,4771 \times 10^{-4}$	$0,4812 \times 10^{-4}$	$9,616 \times 10^{-5}$
7,764	$0,6027 \times 10^{-4}$	$0,6075 \times 10^{-4}$	$9,640 \times 10^{-5}$
6,646	$0,7148 \times 10^{-4}$	$0,7213 \times 10^{-4}$	$9,654 \times 10^{-5}$
5,304	$0,8165 \times 10^{-4}$	$0,8191 \times 10^{-4}$	$9,663 \times 10^{-5}$
5,000	$0,8363 \times 10^{-4}$	$0,8369 \times 10^{-4}$	$9,665 \times 10^{-5}$
3,750	$0,8969 \times 10^{-4}$	$0,8963 \times 10^{-4}$	$9,669 \times 10^{-5}$
2,500	$0,9400 \times 10^{-4}$	$0,9364 \times 10^{-4}$	$9,672 \times 10^{-5}$
1,250	$0,9640 \times 10^{-4}$	$0,9598 \times 10^{-4}$	$9,673 \times 10^{-5}$
-	$0,9719 \times 10^{-4}$	$0,9673 \times 10^{-4}$	$9,673 \times 10^{-5}$

Placa infinita $b = \frac{2 a \sigma}{E} = 9,524 \times 10^{-5}$

Resultado do ajustamento pelo método dos mínimos quadrados.

Por uma reta qualquer coeficiente de correlação
 $u_{2i}' = 9,731 \times 10^{-3} x' - 5,757 \times 10^{-7}$ $r^2 = 0,9998$

Por uma reta passando pela origem
 $u_{2i}' = 9,661 \times 10^{-5} x'$

Obtenção do fator geométrico ($Y = \frac{b'}{b}$)

(1) $Y = \frac{9,731 \times 10^{-3}}{9,524 \times 10^{-5}} = 1,022$

(2) $Y = \frac{9,661 \times 10^{-5}}{9,524 \times 10^{-5}} = 1,014$

(3) $Y = \frac{9,632 \times 10^{-5}}{9,524 \times 10^{-5}} = 1,011$

OBS: Os demais modelos e geometrias foram analisados dentro dos mesmos critérios e os resultados, para a terceira forma de obtenção de Y, está descrita no capítulo 5.