

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECANICA

ESTUDOS DO COMPORTAMENTO DINAMICO DE ROTORES FLEXIVEIS
ASSIMÉTRICOS ATRAVÉS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECANICA

MARCO TULIO CORREA DE FARIA

FLORIANÓPOLIS , FEVEREIRO DE 1990.

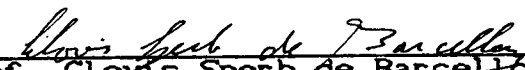
ESTUDOS DO COMPORTAMENTO DINAMICO DE ROTORES FLEXIVEIS
ASSIMETRICOS ATRAVES DO METODO DE ELEMENTOS FINITOS

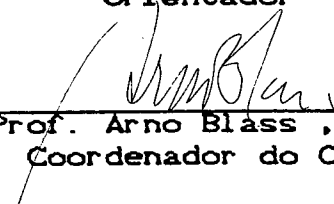
MARCO TULIO CORREA DE FARIA

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TITULO DE

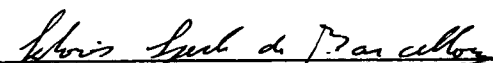
MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECANICA , AREA DE CONCENTRAÇÃO PROJETO,
E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECANICA.


Prof. Clovis Sperb de Barcellos , Ph.D.
Orientador


Prof. Arno Blass , Ph.D.
Coordenador do Curso

BANCA EXAMINADORA :


Prof. Clovis Sperb de Barcellos , Ph.D.
Presidente


Prof. Carlos Alberto de Campos Selke , Ph.D.


Prof. Paulo de Tarso Rocha de Mendonça , M. Eng.

Aos meus pais , pela vida ,
e à Andréa , pelo amor e carinho.

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Clovis Sperb de Barcellos pela competência , solícitude e dedicação na orientação deste trabalho.
- Ao Prof. Paulo de Tarso Rocha de Mendonça pelo auxílio prestado na utilização e na compreensão do programa computacional.
- Aos colegas do Curso de Pós-Graduação Jun Sérgio Ono Fonseca e Tancredo Westphal Júnior pela prestimosidade e cooperação na familiarização com os sistemas operacionais.
- Ao Engenheiro Mecânico Rogério José Marczak pela solícitude e pela execução das figuras e gráficos deste trabalho.
- À Vera Lúcia Sodré Teixeira pela dedicação e pela atenção prestada a todos nós da Pós-Graduação.
- À CAPES , pelo apoio financeiro.

INDICE

| | Página |
|--|--------|
| RESUMO | vii |
| ABSTRACT | viii |
| SIMBOLOGIA | ix |
| CAPITULO 1 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E ESCOPO DO TRABALHO | 01 |
| 1.1 - Introdução | 01 |
| 1.2 - Levantamento Bibliográfico | 03 |
| 1.2.1 - Estabilidade | 03 |
| 1.2.2 - Balanceamento | 11 |
| 1.2.3 - Métodos Numéricos | 13 |
| 1.3 - Escopo do Trabalho | 19 |
| | |
| CAPITULO 2 - FORMULAÇÃO ATRAVÉS DE ELEMENTOS FINITOS DE ROTORES FLEXIVEIS ASSIMÉTRICOS | 21 |
| 2.1 - Introdução | 21 |
| 2.2 - Características de um Rotor Assimétrico | 21 |
| 2.3 - Sistemas de Coordenadas e Funções de Interpolação | 23 |
| 2.4 - Equações do Movimento | 26 |
| 2.4.1 - Equação do Movimento no Sistema Inercial de Coordenadas | 28 |
| 2.4.2 - Equação do Movimento no Sistema Rotativo de Coordenadas | 32 |
| 2.5 - Elemento de Manca | 35 |
| 2.6 - Equação Global do Movimento | 37 |
| | |
| CAPITULO 3 - VELOCIDADES CRÍTICAS E FREQUÊNCIAS NATURAIS | 39 |
| 3.1 - Introdução | 39 |

| | |
|--|----|
| 3.2 - Equações para Determinação das Velocidades Críticas | 39 |
| 3.2.1 - Frequências Naturais para Rotação Nula | 40 |
| 3.2.2 - Velocidades Críticas | 41 |
| 3.3 - Equações para Determinação das Frequências Naturais | 41 |
| | |
| CAPÍTULO 4 - RESPOSTA DESBALANCEADA E BALANCEAMENTO DE ROTORES FLEXÍVEIS | 45 |
| 4.1 - Introdução | 45 |
| 4.2 - Resposta ao Desbalanceamento | 45 |
| 4.2.1 - Desbalanceamento Linearmente Distribuído | 46 |
| 4.2.2 - Referência do Sistema Não-Inercial de Coordenadas | 48 |
| 4.2.3 - Vetor Excentricidade do Centro de Massa | 50 |
| 4.2.4 - Força de Desbalanceamento | 52 |
| 4.2.5 - Resposta ao Desbalanceamento Distribuído | 54 |
| 4.3 - Balanceamento de Rotores Flexíveis | 56 |
| 4.3.1 - Análise de Sensibilidade da Resposta ao Desbalanceamento | 57 |
| 4.3.2 - Metodologia de Balanceamento | 58 |
| 4.3.3 - Parâmetros para o Balanceamento | 63 |
| | |
| CAPÍTULO 5 - RESULTADOS E ANÁLISE | 66 |
| 5.1 - Introdução | 66 |
| 5.2 - Exemplo | 66 |
| 5.2.1 - Velocidades Críticas | 67 |
| 5.2.2 - Balanceamento | 69 |
| 5.2.2.1 - Análise de Sensibilidade | 71 |
| 5.2.2.2 - Massas Balanceadoras | 74 |

| | |
|---|-----|
| CAPITULO 6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES | 79 |
| REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS | 83 |
| APENDICE A - FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO | 91 |
| APENDICE B - ENERGIA CINÉTICA DE UM ELEMENTO DE VIGA ASSIMÉTRICA | 100 |
| APENDICE C - MATRIZ $[M^{\circ}]$ REPRESENTATIVA DA INÉRCIA DE TRANSLAÇÃO E DE TORÇÃO | 105 |
| APENDICE D - MATRIZ $[N^{\circ}]$ REPRESENTATIVA DA INÉRCIA DE ROTAÇÃO | 109 |
| APENDICE E - MATRIZES $[H^{\circ}]$ E $[G^{\circ}]$ REPRESENTATIVAS DOS EFEITOS GIROSCÓPICOS | 113 |
| APENDICE F - MATRIZ DE RIGIDEZ $[K_{o}^{\circ}]$ | 116 |
| APENDICE G - VETOR FORÇA DO DESBALANCEAMENTO DISTRIBUIDO | 118 |
| APENDICE H - VETOR FORÇA DO DESBALANCEAMENTO DEVIDO À MASSA DE TESTE | 121 |
| APENDICE I - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DA RESPOSTA DESBALANCEADA À VARIAÇÃO DE MASSA | 123 |

RESUMO

Neste trabalho, descrevem-se alguns aspectos do comportamento dinâmico de rotores de turbogeradores, que possuem diferentes valores de rigidez em seus dois planos ortogonais de deflexão, através do método de elementos finitos. Esta assimetria elástica de rotores horizontais causa, por ação da gravidade, vibrações dobradas por rotação; conseqüentemente, velocidades críticas adicionais surgem no problema. Utilizam-se os elementos finitos baseados na teoria de vigas de Timoshenko e o modelo permite analisar os problemas de flexão e de torção, que são desacoplados. Um programa computacional é implementado para calcular as frequências naturais, as velocidades críticas e a resposta a um desbalanceamento distribuído de um rotor assimétrico apoiado em mancais discretos elásticos e simétricos. Desenvolve-se uma análise de sensibilidade da resposta desbalanceada para verificação das seções críticas da estrutura à variação de massa, visando a seleção dos planos de balanceamento. Selecionados os planos de colocação das massas balanceadoras, efetua-se a operação de balanceamento através do método dos coeficientes de influência.

ABSTRACT

This work deals with some aspects of the dynamics of turbogenerator rotors, which are described using the finite element method. These rotors have unequal flexural rigidities in their two orthogonal planes. The elastic asymmetry of horizontal rotors causes flexural vibrations at a rate of double the rotational frequency due to the effect of gravity. This results in additional critical speeds. The finite elements based on the Timoshenko beam theory are used and this model allows the study of the flexional and torcional problems, which are uncoupled. A computational program is implemented for computing the natural frequencies, whirl speeds and the unbalance response due to the distributed mass excentricities of an asymmetric rotor, supported by symmetric elastic discrete bearings. The sensitivity analysis of the unbalance response is developed in order to verify the behavior of the structure with the variation of mass. Then it is possible to obtain the critical sections of the structure, which can be selected as the balancing planes. After the selection of the planes in which the balancing masses are placed, the balancing of flexible rotors is achieved by using the influence coefficient method.

SIMBOLOGIA

| | |
|---------------------|---|
| l | - comprimento do elemento finito de viga |
| s | - posição axial de uma seção transversal do elemento |
| v | - coordenada adimensional da posição axial de uma seção |
| V | - deslocamento transversal linear vertical |
| W | - deslocamento transversal linear horizontal |
| β | - deslocamento transversal angular vertical |
| Γ | - deslocamento transversal angular horizontal |
| θ | - deslocamento angular em torno da direção axial |
| ω | - velocidade de rotação do sistema rotativo de coordenadas |
| ψ_i | - funções de interpolação dos deslocamentos lineares |
| ϕ_i | - funções de interpolação dos deslocamentos angulares |
| N_j | - funções de interpolação de torção |
| $\langle q \rangle$ | - coordenadas generalizadas no sistema inercial de referência global |
| $\langle p \rangle$ | - coordenadas generalizadas no sistema rotativo de referência local |
| $[R]$ | - matriz de transformação de coordenadas entre sistemas inercial e rotativo |
| $[D]$ | - matriz das funções de interpolação dos deslocamentos lineares |
| $[W]$ | - matriz das funções de interpolação dos deslocamentos angulares |
| $[E]$ | - matriz das funções de interpolação de torção |
| T | - energia cinética do elemento finito de rotor |
| V | - energia potencial elástica do elemento finito de rotor |
| W | - trabalho das forças externas |

| | |
|-----------------------------|---|
| m | - massa por unidade de comprimento |
| η | - Coeficiente de Poisson |
| I_{db}, I_{dc} | - momentos diametraes de inércia de massa por unidade de comprimento em relação ao sistema local de coordenadas |
| I_{dm} | - momento diametral médio de inércia de massa por unidade de comprimento |
| I_p | - momento polar de inércia de massa por unidade de comprimento |
| Ω | - velocidade de rotação do rotor |
| E | - módulo de elasticidade longitudinal |
| G | - módulo de elasticidade transversal |
| I_z | - momento de inércia de área em relação ao eixo horizontal Z |
| I_y | - momento de inércia de área em relação ao eixo vertical Y |
| I_m | - momento médio de inércia de área |
| A | - área nominal da seção transversal do rotor |
| K_y, K_z | - coeficientes de cisalhamento |
| K | - coeficiente de cisalhamento médio |
| K_t | - constante de torção |
| $\langle F^{\circ} \rangle$ | - vetor força generalizada atuando no elemento finito de rotor |
| $[K_o^{\circ}]$ | - matriz de rigidez do elemento de rotor no sistema rotativo de coordenadas |
| $[K^{\circ}]$ | - matriz de rigidez do elemento de rotor no sistema inercial de coordenadas |
| $[K_s^{\circ}]$ | - parcela da matriz de rigidez $[K^{\circ}]$ independente do tempo e da velocidade angular |

- $[\Delta K^\circ]$ - parcela da matriz de rigidez $[K^\circ]$ dependente do tempo e da velocidade angular
- $[M^\circ]$ - matriz representativa das inércias de translação e de torção do elemento
- $[N^\circ]$ - matriz representativa da inércia de rotação do elemento
- $[G^\circ], [H^\circ]$ - matrizes representativas dos efeitos giroscópicos do elemento
- $[K^m], [C^m]$ - matrizes de rigidez e de amortecimento, respectivamente, do elemento de mancal
- $\langle q_m \rangle$ - Coordenadas dos deslocamentos lineares do mancal
- $\langle Q^m \rangle$ - Vetor força generalizada do mancal
- f_y, f_z - efeitos do cisalhamento transversal
- f - efeito médio do cisalhamento transversal
- λ - razão de frequência (Ω/ω)
- $\langle e(s) \rangle$ - vetor excentricidade de massa
- $m(s)$ - massa por unidade de comprimento
- $\langle \gamma(s) \rangle$ - ângulo de fase do vetor excentricidade
- ϵ - módulo do vetor excentricidade de massa de uma seção transversal qualquer
- e_x, e_y - projeções do vetor excentricidade nas direções horizontal e vertical, em um instante inicial de referência
- γ_0 - ângulo de fase inicial do vetor excentricidade
- Z_M, Y_M - coordenadas do centro de massa
- Z_G, Y_G - coordenadas do centro geométrico
- $\langle e_a \rangle$ - projeção em seno do vetor excentricidade
- $\langle e_c \rangle$ - projeção em cosseno do vetor excentricidade

- $\langle F_c^\circ \rangle$ - projeção em cosseno do vetor força de desbalanceamento do elemento de rotor
- $\langle F_s^\circ \rangle$ - projeção em seno do vetor força de desbalanceamento do elemento de rotor
- $Y^\circ(s)$ - distribuição de excentricidades ao longo do elemento de rotor na direção vertical
- $Z^\circ(s)$ - distribuição de excentricidades ao longo do elemento de rotor na direção horizontal
- Z_E, Y_E - excentricidades de massa na extremidade esquerda do elemento
- Z_D, Y_D - excentricidades de massa na extremidade direita do elemento
- $\langle q_c \rangle$ - projeção em cosseno da resposta desbalanceada
- $\langle q_s \rangle$ - projeção em seno da resposta desbalanceada
- $\langle q_i \rangle$ - resposta ao desbalanceamento distribuído medida no plano i
- $\langle q_{ij} \rangle$ - resposta ao desbalanceamento distribuído e à massa de teste m_j , medida no plano i
- $\langle m_j \rangle$ - vetor massa de teste colocado no plano j
- $\langle A_{ij} \rangle$ - coeficiente de influência complexo
- $[C_{ij}]$ - matriz dos coeficientes de influência para uma determinada velocidade
- $\langle M_j \rangle$ - vetor das massas balanceadoras complexas
- $\langle W \rangle$ - vetor das respostas ao desbalanceamento em várias velocidades
- $\langle W_r \rangle$ - vetor das vibrações residuais em várias velocidades
- $[\bar{C}]$ - matriz das submatrizes dos coeficientes de influência para várias velocidades
- Z_m, Y_m - coordenadas da massa de teste em uma seção transversal

CAPÍTULO 1

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E ESCOPO DO TRABALHO

1.1. INTRODUÇÃO

A capacidade de predição da resposta dinâmica e da estabilidade de rotores se tornou imprescindível para o desenvolvimento de máquinas industriais de alta velocidade e de alta segurança, tais como turbinas a gás e a vapor, motores de combustão interna, compressores centrífugos e alternativos, turbogeradores e turbomáquinas em geral. Na operação dessas máquinas, os rotores estão sujeitos às vibrações de torção e de flexão e, em alguns casos, operam em condições instáveis. Tais rotores são construídos com extrema flexibilidade, o que torna o estudo de seu comportamento dinâmico uma fase essencial do projeto.

Um rotor consiste de um eixo, onde podem estar acoplados discos, engrenagens e outros componentes ou um rotor de motor elétrico ou de gerador, que está apoiado em mancais sobre uma estrutura de suporte. O comportamento dinâmico de um rotor é afetado pelas características dinâmicas do sistema - rotor, mancal e fundação - e por fatores externos. As principais fontes de excitação são as forças eletromagnéticas, aerodinâmicas e mecânicas.

As principais áreas de estudos em Dinâmica de Rotores são o desbalanceamento, a estabilidade e a dinâmica torcional [1]. A bibliografia existente sobre o tema é vasta e continua recebendo

contribuições de um grande número de técnicos e pesquisadores envolvidos com o problema de dinâmica de rotores.

Este trabalho se concentra em rotores de turbogeradores de dois pólos, que possuem diferentes valores de rigidez em seus dois planos ortogonais de deflexão devido à abertura de fendas axiais sobre sua superfície, as quais são preenchidas com condutores, material isolante e cunhas. Analisam-se alguns aspectos do comportamento dinâmico de rotores relacionados com a estabilidade e o desbalanceamento. Para tanto, utilizam-se as ferramentas de análise dos métodos numéricos, da análise de sensibilidade de parâmetros e dos processos de balanceamento de rotores flexíveis.

Relatam-se alguns trabalhos importantes relacionados com a estabilidade e o desbalanceamento de rotores flexíveis em geral. Os trabalhos mais antigos se preocupam com a determinação e a compreensão das variáveis envolvidas no problema e com o desenvolvimento de modelos analíticos que retratem os fenômenos da dinâmica de rotores. Com o advento dos computadores, desenvolveram-se ferramentas de análise poderosas que permitiram ampliar a complexidade do problema.

As referências são divididas em três itens - estabilidade, balanceamento e métodos numéricos - para facilitar a exposição dos temas envolvidos no trabalho. Existem diversos livros que abordam o problema globalmente e existem publicações que se concentram em determinados aspectos.

O último item deste capítulo discorre sobre o escopo do trabalho e os aspectos do comportamento dinâmico de rotores flexíveis que são estudados através do método de elementos finitos.

1.2. LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO

1.2.1. ESTABILIDADE

Os eixos de rotores de turbomáquinas, geralmente, estão apoiados em mancais de deslizamento, que são não conservativos por natureza e cujas propriedades dinâmicas são de difícil determinação. A configuração geométrica do mancal e as propriedades do lubrificante têm grande influência sobre o comportamento dinâmico do sistema. A instabilidade induzida pela ação hidrodinâmica do filme lubrificante tem sido um dos grandes problemas em turbomáquinas. Esta instabilidade é uma vibração auto-excitada resultante das forças do filme lubrificante do mancal. Outro fator importante, que influencia a estabilidade de rotores flexíveis, é o amortecimento interno do eixo e de seus componentes conectados. Uma análise mais elaborada da estabilidade requer a inclusão de não linearidades no sistema.

Primeiramente, apresentam-se alguns trabalhos relacionados com a estabilidade de rotores flexíveis simétricos devido às vibrações de flexão. Relatam-se os trabalhos que abordam a estabilidade devido à ação hidrodinâmica do filme lubrificante e os efeitos do amortecimento interno sobre a estabilidade. Os movimentos orbitais estacionários de um rotor simétrico apoiado em mancais hidrodinâmicos estão sincronizados com a velocidade de rotação e descrevem órbitas elípticas.

Newkirk e Lewis [2] apresentaram uma investigação sobre as condições de operação estável de rotores simétricos apoiados em mancais hidrodinâmicos, através de testes experimentais efetuados.

com lubrificantes de várias viscosidades. Constatou-se que podem ocorrer perturbações no rotor quando se ultrapassa uma determinada velocidade de rotação. Já Parszewski e Cameron [3] constatarem um outro tipo de vibração instável, devido à ação do filme lubrificante nos mancais, que ocorre normalmente quando a frequência de excitação é levemente inferior à metade da velocidade rotacional.

Sternlicht [4] apresentou os vários fenômenos dinâmicos em rotores simétricos sobre mancais hidrodinâmicos, abrangendo os resultados das referências anteriores. Constataram-se os seguintes casos de instabilidades auto-excitadas : a) Vibração de meia frequência (*Half-Frequency Whirl*), que ocorre quando se atinge um valor crítico de velocidade, com o eixo vibrando em uma frequência aproximadamente igual à metade da velocidade de rotação; b) Vibração de fração de frequência (*Fractional-Frequency Whirl*), que é um caso especial de instabilidade geralmente associado com mancais híbridos (hidrodinâmicos e hidrostáticos), ocorre quando se atinge uma determinada velocidade, com o eixo vibrando em uma frequência igual a uma fração da rotação; c) Ressonância do filme de óleo (*Resonant Whip*), que ocorre em velocidades iguais ou superiores a duas vezes a primeira velocidade crítica, com frequência de excitação aproximadamente igual à primeira frequência natural. Nos três casos, o movimento do eixo está no mesmo sentido da rotação.

Foi apresentada por Lund [5] uma análise teórica da estabilidade de rotores simétricos apoiados em mancais lubrificados a gás, com a finalidade de determinar a velocidade inicial da instabilidade. Os casos de instabilidades de Vibração

de meia frequência (*Half-Frequency Whirl*) e de Ressonância do filme de óleo (*Oil Whip*) foram constatados, teoricamente e experimentalmente, por Ono e Tamura [6].

Uma ampla investigação sobre os problemas dinâmicos em rotores de turbomáquinas foi mostrada por Sternlicht e Lewis [7]. Foram abordados os problemas de estabilidade e balanceamento de rotores simétricos em mancais hidrodinâmicos. Mostrou-se que, para se manter o balanço no escoamento dos mancais, um eixo, levemente carregado, tenta vibrar em uma frequência aproximadamente igual à metade da rotação. Quando o balanço é satisfeito, nenhuma pressão é desenvolvida no filme e o mancal perde sua capacidade de sustentação. Para mancais com carregamento elevado, a explicação anterior não é válida, e a instabilidade é vista como a perda da capacidade de amortecimento dos mancais. Uma explicação consistente sobre este tipo de instabilidade foi apresentada por Rao [8].

O estudo das propriedades dinâmicas de um mancal requer a solução da equação de Reynolds para determinar as forças geradas pelo filme lubrificante sobre o eixo. Tolle e Muster [9] apresentaram uma solução da equação de Reynolds assumindo o filme contínuo e com viscosidade constante.

Foi proposto por Lund [10] um procedimento numérico para determinar o valor da velocidade inicial da instabilidade (*Threshold Speed of Instability*) e as velocidades críticas de rotores simétricos, considerando o amortecimento interno histerético e viscoso do eixo. Concluiu-se que o amortecimento interno histerético, que é independente da frequência, tem efeito desestabilizador sobre a vibração do rotor em todas as velocidades, enquanto o amortecimento interno viscoso, que é

dependente da frequência, possui efeito desestabilizador a partir de uma determinada velocidade. Estas conclusões sobre os efeitos do amortecimento interno na estabilidade de rotores concordaram com os estudos anteriormente apresentados por Dimentberg [11].

Vance e Lee [12] estudaram a influência do amortecimento interno sobre a estabilidade de rotores ortotrópicos apoiados em fundação rígida e determinaram a velocidade inicial da instabilidade (*Threshold Speed of Instability*) para a vibração orbital não síncrona induzida pelo amortecimento interno. Constatou-se que a velocidade inicial da instabilidade induzida pelo amortecimento interno depende da relação entre os amortecimentos interno e externo. Para velocidades de rotação Ω superiores a $\omega_d(1+\alpha/\beta)$, o rotor passa a operar na faixa de instabilidade induzida pelo amortecimento interno, sendo que ω_d é a frequência natural amortecida do sistema e α e β representam o amortecimento externo e interno, respectivamente. Também foi observado que a anisotropia elástica dos mancais tende a aumentar a velocidade inicial da instabilidade e que a ortotropia elástica do eixo tem um efeito insignificante sobre a vibração induzida pelo amortecimento interno.

Smith [13] apresentou uma revisão geral dos vários aspectos das vibrações de flexão de rotores flexíveis apoiados em mancais hidrodinâmicos. Foram investigados os problemas de vibração forçada - excitação do desbalanceamento e do desalinhamento do eixo - e os problemas de vibração auto-excitada - instabilidades do filme lubrificante, do atrito interno e da assimetria elástica do eixo, excitação no escoamento pelo fluido de trabalho e interação entre os modos de vibração torcional e flexional - .

Saindo do tema da instabilidade devido à ação hidrodinâmica do lubrificante e ao atrito interno, cita-se o importante trabalho de Eshleman e Eubanks [14], que descreveu a influência do torque axial, do cisalhamento, da inércia rotatória e dos efeitos giroscópicos sobre a vibração de flexão de eixos simétricos. Quando se consideraram o cisalhamento, a inércia rotatória e os efeitos giroscópicos, as velocidades críticas do eixo foram menores do que as de um eixo sem esses efeitos. Mostrou-se também que o torque axial só possui efeitos consideráveis para grandes coeficientes de esbeltez do eixo.

Agora, apresentam-se as referências que abordam os problemas dinâmicos característicos de rotores flexíveis assimétricos. Em rotores com eixo horizontal, a assimetria elástica, em consequência da gravidade, gera vibrações de flexão com frequência igual ao dobro da rotação; por conseguinte, velocidades críticas adicionais surgem no problema. Os movimentos orbitais estacionários do rotor assimétrico podem estar sincronizados com a velocidade de rotação, ou então, devido à assimetria elástica do eixo, podem ter frequência dobrada por revolução. As vibrações dobradas por rotação podem ser da mesma ordem de grandeza das vibrações síncronas devido ao desbalanceamento.

A assimetria elástica do sistema rotor-mancal pode causar instabilidades paramétricas no rotor. A instabilidade paramétrica da assimetria elástica e a instabilidade da ação hidrodinâmica do filme lubrificante existem separadamente. Para se estudar a instabilidade paramétrica, faz-se necessário analisar as equações diferenciais com coeficientes periódicos que descrevem o movimento de rotores assimétricos.

Descrevem-se alguns trabalhos relacionados com o comportamento dinâmico de rotores assimétricos devido às vibrações de flexão. Inicialmente, relatam-se os trabalhos que analisam as características da vibração dobrada por revolução e, posteriormente, são apresentados os trabalhos que tratam do problema de instabilidade paramétrica.

Taylor [15] constatou as vibrações dobradas por rotação e a existência de uma faixa de operação instável, entre as duas velocidades críticas dos dois planos ortogonais de deflexão, para eixos horizontais assimétricos. Kellenberger [16,17] e Kellenberger e Rihak [18] analisaram as equações diferenciais de rotores assimétricos e a influência da gravidade e do desbalanceamento sobre as vibrações de flexão. Dimentberg [11] também apresentou alguns estudos sobre rotores assimétricos. Rao [8], além da vibração dobrada por rotação, tratou do problema de instabilidade paramétrica. Com a preocupação de determinar a distribuição de assimetria elástica de eixos assimétricos, foi proposto um método de estimativa da assimetria de rigidez à flexão, através de comportamentos dinâmicos devido à assimetria, por Matsukura et alii [19].

Passando-se para o tema da instabilidade paramétrica, Foote, Poritsky e Slade [20] apresentaram um dos primeiros trabalhos desenvolvidos sobre a estabilidade de rotores flexíveis assimétricos apoiados em mancais assimétricos. Constatou-se que a assimetria elástica origina uma faixa instável de velocidades próxima à velocidade crítica, cuja largura depende da ordem de grandeza da assimetria. Mostrou-se que, para pequena assimetria do eixo, a faixa instável se divide em três partes, as quais se expandem e se unem para grande assimetria.

Outra relevante contribuição para a compreensão da instabilidade paramétrica foi fornecida por Brosens e Crandall [21]. Apresentou-se um estudo do movimento de rotores assimétricos rígidos sobre mancais assimétricos e constatou-se que alguns rotores eram dinamicamente instáveis a partir de uma certa velocidade. Também foi constatado que alguns desses rotores poderiam retornar à condição de estabilidade dependendo das magnitudes do acoplamento giroscópico e da desigualdade de inércia. Estudou-se o efeito da assimetria dos mancais sobre a estabilidade e concluiu-se que, para pequena assimetria, este efeito é de segunda ordem, mas se a assimetria aumenta, novas regiões de instabilidade podem surgir.

Estudos das vibrações parametricamente excitadas de rotores flexíveis assimétricos apoiados em mancais assimétricos não amortecidos foram apresentados por Black e McTernan [22]. Constatou-se que as assimetrias de inércia e de flexibilidade do eixo e de rigidez dos mancais podem causar vibrações instáveis em zonas próximas às velocidades críticas e próximas às frações de somas ou diferenças dos pares de frequências naturais. Estas regiões instáveis tornam-se mais largas a medida que a frequência aumenta. Mostrou-se que as condições para a ressonância paramétrica, com pequena assimetria, são:

$$\omega \cong \omega_y \quad ; \quad \omega \cong \omega_z \quad \text{e} \quad \omega \cong \frac{1}{2}(\omega_y \pm \omega_z)$$

sendo que ω_y e ω_z são as frequências naturais do eixo nos dois planos ortogonais de deflexão. Se as frequências naturais estão bem próximas, as três zonas instáveis se unem. Quando se tem uma pequena assimetria do eixo, ou seja, as frequências naturais estão levemente separadas, as regiões são distintas. Constataram-se também as instabilidades paramétricas

multi-harmônicas, que ocorrem por exemplo em $\omega \cong \frac{1}{3}(\omega_y \pm \omega_z)$, mas que são muito fracas para pequena assimetria.

Gladwell e Stammers [23] desenvolveram uma análise de perturbação nas equações lineares com coeficientes periódicos de rotores assimétricos para descrever as instabilidades paramétricas. Este trabalho se constituiu numa importante contribuição para a teoria de estabilidade de rotores assimétricos.

Uma revisão geral sobre a estabilidade, que engloba os trabalhos anteriores [20,21,22,23], foi apresentada por Peters e Zvolanek [24]. Constataram-se os vários tipos de instabilidades paramétricas de rotores assimétricos apoiados em mancais assimétricos, que ocorrem quando a frequência natural é um múltiplo par da velocidade rotacional, quando a soma ou diferença de duas frequências naturais se iguala a um múltiplo inteiro par da velocidade, e quando a soma ou diferença é igual a um múltiplo inteiro impar da rotação, sendo que este último caso denomina-se de instabilidade sub-harmônica.

Iwatsubo, Tsujiuchi e Inoue [25] analisaram as vibrações livres e forçadas de rotores flexíveis assimétricos. Apresentaram-se os três casos significativos de instabilidades paramétricas. As soluções das equações tornaram-se instáveis para os três casos seguintes:

(1) Ressonância principal (*Principal Resonance*) :

$$\Omega \cong \Omega_i \quad (i = 1, 3, 5, \dots)$$

(2) Ressonância da combinação do tipo soma :

(*Sum Type Combination Resonance*)

$$\Omega \cong \frac{1}{2}(\Omega_i + \Omega_j) \quad (i, j = 1, 3, 5, \dots; i \neq j)$$

(3) Ressonância da combinação do tipo diferença :

(*Difference Type Combination Resonance*)

$$\Omega \cong \frac{1}{2}(\Omega_i - \Omega_j) \quad (i, j = 1, 3, 5, \dots; i \neq j)$$

os índices das frequências naturais i, j e l assumem valores inteiros ímpares para que uma dada frequência seja completamente separada da outra, pois os autovalores ocorrem em pares conjugados complexos.

1.2.2. BALANCEAMENTO

A principal fonte de excitação das vibrações em rotores é o desbalanceamento, que é devido a propriedades não-homogêneas do material, processos de fabricação, rasgos de chavetas, ranhuras, etc. O comportamento do rotor, com uma determinada distribuição de desbalanceamento, depende de suas condições de operação. Se a velocidade de regime ω é suficientemente inferior à primeira velocidade crítica ω_1 , $\omega < \frac{1}{2} \omega_1$, o rotor é considerado rígido. Se a velocidade de regime for superior a tal valor, $\omega > \frac{1}{2} \omega_1$, o rotor é considerado flexível. Para cada condição, adotam-se diferentes metodologias de balanceamento. Duas técnicas são empregadas no balanceamento de rotores flexíveis: o método dos coeficientes de influência e o balanceamento modal. Uma terceira técnica, baseada em um método híbrido que combina algumas características das duas técnicas citadas, também tem sido utilizada.

Primeiramente, são relatadas as referências que tratam do método dos coeficientes de influência e do balanceamento modal. Um dos primeiros trabalhos desenvolvidos, utilizando o processo de mínimos quadrados para a minimização das vibrações residuais,

sobre o balanceamento via coeficientes de influência foi apresentado por Goodman [26]. Diversos trabalhos [27,28,29,30,31] foram elaborados com o objetivo de aprimorar o procedimento matemático proposto em [26]. Lindley e Bishop [32] apresentaram uma abordagem teórica para o balanceamento modal. Um aprimoramento no balanceamento modal foi proposto por Lund [33].

Citam-se, agora, as referências que tratam dos métodos híbridos de balanceamento e as que descrevem e comentam os métodos de balanceamento de rotores flexíveis e rígidos. Drechsler [34] e Darlow, Smalley e Parkinson [35] desenvolveram métodos híbridos de balanceamento, que procuram combinar as vantagens das duas técnicas. Foram apresentadas as principais vantagens e desvantagens do método dos coeficientes de influência e do balanceamento modal em [35]. Giers [36] forneceu algumas noções das limitações e levantou os problemas práticos das duas técnicas distintas de balanceamento. Com a finalidade de facilitar o balanceamento, Rao [8] elaborou uma classificação dos diversos tipos de rotores e descreveu as técnicas de balanceamento de rotores rígidos e as duas técnicas de rotores flexíveis. Diana [37] apresentou as técnicas empregadas para balanceamento rígido e as três técnicas de balanceamento flexível.

Algumas observações e conclusões podem ser feitas considerando-se as referências citadas sobre o balanceamento de rotores flexíveis. O método dos coeficientes de influência considera o sistema como um bloco fechado e assume uma relação linear entre o desbalanceamento e a resposta desbalanceada. Não há preocupação com o modelo físico que descreve o sistema. Já o balanceamento modal está baseado em aspectos físicos do sistema.

Um requisito importante para o balanceamento modal são as condições de ortogonalidade dos modos de vibração, ou seja, o método pressupõe modos desacoplados. Mas as respostas do rotor nas velocidades críticas contêm contribuições de mais de um modo de vibração, devido ao acoplamento dos modos, que é consequência da anisotropia e do amortecimento dos mancais. Pode-se concluir que o método dos coeficientes de influência não necessita de um modelo analítico na descrição do sistema, ou seja, pode ser usado através de exaustivos procedimentos experimentais.

Um adendo especial é feito para o caso de alguns rotores, tais como os rotores de separadores, centrifugadores e esmerilhadores, cuja operação normal acarreta variação no desbalanceamento, e que necessitam de um processo de balanceamento automático. Gusarov e Shatalov [38] classificaram os métodos de balanceamento automático, onde a correção de massas é efetuada com a máquina em funcionamento, e descreveram alguns procedimentos utilizados na prática.

1.2.3. MÉTODOS NUMÉRICOS

Procedimentos numéricos e técnicas de computação foram desenvolvidos para permitir uma análise pormenorizada dos problemas em dinâmica de rotores. O projeto mecânico de rotores flexíveis tem recebido grande contribuição dos métodos computacionais. São citadas as referências relacionadas com os procedimentos utilizados na modelagem de rotores flexíveis, com os métodos de solução de problemas de autovalor e com a análise de sensibilidade do sistema em relação a suas propriedades.

A análise das vibrações livres e forçadas se situa no estudo do comportamento dinâmico de sistemas mecânicos. As equações das vibrações livres conduzem a problemas de autovalor. A solução do problema de autovalor contém importantes informações das características dinâmicas do sistema, tais como as velocidades críticas e os modos de vibração. Cada tipo de sistema dinâmico, giroscópico ou não, amortecido ou não, possui determinadas características que definem as particularidades do problema de autovalor. Sistemas não giroscópicos e não amortecidos possuem autovalores e autovetores reais, enquanto os sistemas giroscópicos não amortecidos têm autovalores imaginários puros. Se o amortecimento está presente no sistema, os autovalores tornam-se complexos.

São relatadas algumas referências que descrevem os métodos de solução dos problemas de autovalor. Meirovitch [39] propôs um método de solução do problema de autovalor, reduzido a uma forma padronizada, de sistemas giroscópicos. Gupta [40] apresentou um algoritmo para sistemas amortecidos, que está baseado em uma técnica combinada da sequência de Sturm e da iteração inversa. Meirovitch [41] desenvolveu uma teoria de perturbação de segunda ordem para analisar os sistemas giroscópicos levemente amortecidos. Em um trabalho mais completo, Meirovitch [42] apresentou vários algoritmos para a solução dos problemas de autovalor, ressaltando que todos requerem a solução de sistemas de equações algébricas, sendo que somente alguns resolvem o problema completo, enquanto outros produzem somente os autovalores, e ainda outros produzem os autovetores associados com os autovalores. Foram classificados, por Bathe [43], os métodos de solução dos problemas de autovalor em quatro grupos:

1) Métodos de Iteração de vetores; 2) Métodos de Transformação; 3) Técnicas de Iteração polinomial; 4) Métodos baseados nas propriedades da sequência de Sturm. Cada grupo possui uma propriedade básica que é usada como base do algoritmo de solução.

O método dos elementos finitos e o método das matrizes de transferência são, atualmente, dois procedimentos numéricos bastante difundidos na modelagem de rotores flexíveis. Kikuchi [44] apresentou uma formulação de matrizes de transferência para determinar a resposta desbalanceada de rotores flexíveis. Bansal e Kirk [45] e Gu [46] apresentaram alguns desenvolvimentos na formulação via matrizes de transferência. Um procedimento alternativo foi proposto por Childs [47], que está baseado em uma formulação modal, para análise de rotores flexíveis assimétricos.

Um dos primeiros trabalhos desenvolvidos utilizando uma formulação de elementos finitos para rotores flexíveis foi apresentado por Ruhl e Booker [48]. O elemento finito utilizado está baseado na teoria de vigas de Euler-Bernoulli. Diana et alii [49] se preocuparam em analisar a estabilidade de rotores flexíveis considerando na modelagem de elementos finitos os mancais hidrodinâmicos e a estrutura elástica do suporte. Foi apresentada por Dimarogonas [50] uma formulação utilizando os elementos finitos de viga de Rayleigh, que considerou o amortecimento interno histerético e viscoso. Com o objetivo de analisar a estabilidade e a resposta a um desbalanceamento distribuído, Gasch [51] desenvolveu uma das modelagens mais completas de rotores flexíveis simétricos, utilizando os elementos finitos de viga de Euler-Bernoulli, que considerou o amortecimento interno e externo, as forças reativas, os efeitos aerodinâmicos e magnéticos, as forças giroscópicas e a fundação.

Nelson e McVaugh [52] utilizaram os elementos finitos de viga de Rayleigh na modelagem de rotores flexíveis.

Zorzi e Nelson [53] estudaram a estabilidade de rotores flexíveis simétricos, considerando os efeitos do amortecimento interno viscoso e hysterético do eixo, utilizando o mesmo elemento finito de viga de Rayleigh da referência [52]. Confirmaram que o amortecimento interno viscoso não estimula a instabilidade até que a primeira velocidade crítica do rotor seja atingida, enquanto que o amortecimento interno hysterético tem efeito desestabilizador em todas as velocidades. Demonstraram, também, o efeito estabilizador das características de anisotropia elástica e de amortecimento dos mancais sobre o movimento do rotor. A anisotropia elástica ou o amortecimento viscoso dos mancais pode aumentar a velocidade inicial da instabilidade (*Threshold Speed of Instability*).

Rouch e Kao [54] apresentaram uma formulação de rotores, baseada na teoria de vigas de Timoshenko, utilizando as técnicas de redução das matrizes na análise. Nelson [55] desenvolveu uma formulação para elemento finito de rotor, também baseada na teoria de vigas de Timoshenko, que representou um importante desenvolvimento na modelagem através de elementos finitos de rotores flexíveis. Childs e Graviss [56] apresentaram uma formulação alternativa á fornecida por [55] para a solução das equações do movimento de rotores. Utilizando a formulação proposta em [55], Özgüven e Özkan [57] incluíram o amortecimento interno viscoso e hysterético no modelo para analisar a estabilidade e a resposta ao desbalanceamento distribuído de rotores flexíveis simétricos. Observou-se que o amortecimento interno não afeta a resposta do rotor gerada pelo

desbalanceamento distribuído para mancais isotrópicos, mas a altera inteiramente se os mancais são ortotrópicos. Se os mancais são isotrópicos, as forças centrífugas devido ao desbalanceamento fazem o eixo vibrar em órbita circular, isto é, o modo deformado do rotor permanece inalterado durante o movimento, e, conseqüentemente, o amortecimento interno não afeta a amplitude da resposta desbalanceada. Se os mancais são ortotrópicos, a órbita de vibração do eixo é elíptica, o que induz o eixo a vibrar transversalmente, isto é, o raio de curvatura do eixo varia durante a vibração, e, conseqüentemente, o amortecimento interno do eixo representa um importante papel na determinação da resposta desbalanceada.

Todas as referências aqui relatadas sobre o método de elementos finitos apresentaram uma formulação para o problema dinâmico de rotores flexíveis simétricos. Já Diana [37] apresentou um estudo completo do comportamento dinâmico de rotores flexíveis assimétricos, modelados por elementos finitos de viga de Rayleigh, que aborda os diversos problemas de estabilidade, balanceamento e de dinâmica torcional.

Algumas propriedades físicas fundamentais de sistemas linearizados de rotores foram apresentadas por Adams e Padovan [58]. Os modelos linearizados clássicos de rotores utilizam oito coeficientes de rigidez e amortecimento nas matrizes dos elementos de mancal. As propriedades não simétricas dos termos giroscópicos causam a bifurcação no espectro de frequência. Geralmente, as não simetrias do sistema rotor-mancal surgem dos termos giroscópicos e dos mancais.

Durante o projeto de um rotor, frequentemente é requerido alterar alguns parâmetros estruturais para se atingir as

características dinâmicas desejadas do sistema. Para tanto, uma análise dos efeitos sobre as propriedades dinâmicas da estrutura provocados por uma mudança estrutural é de grande importância. Encerrando o levantamento bibliográfico, relatam-se alguns trabalhos concernentes com a análise de sensibilidade.

Plaut e Huseyin [59] obtiveram as expressões das taxas de variação dos autovalores e autovetores em relação a parâmetros do sistema, que são ferramentas importantes na análise de sensibilidade. Done e Hughes [60] analisaram o efeito de uma mudança estrutural sobre a resposta do sistema, em rotores de helicópteros, através de uma formulação de matriz de receptância. Um importante trabalho desenvolvido em análise de sensibilidade foi apresentado por Lund [61]. Utilizou-se uma técnica de perturbação de primeira ordem na formulação de matrizes de transferência do sistema. Palazzolo, Wang e Pilkey [62] apresentaram um método para a reanálise de autovalores de modelos de rotores modificados, utilizando o método generalizado da receptância. Calcularam-se as frequências naturais de rotores modelados por elementos finitos. Foram apresentados por Rajan, Nelson e Chen [63] os coeficientes de sensibilidade dos autovalores para rotores flexíveis simétricos modelados por elementos finitos. As características dinâmicas de rotores flexíveis de maior interesse são as frequências naturais, as velocidades críticas e a resposta estacionária ao desbalanceamento. Apresentou-se também em [63] um método para calcular as velocidades críticas utilizando os coeficientes de sensibilidade do autovalor.

1.3. ESCOPO DO TRABALHO

São descritos neste trabalho alguns aspectos do comportamento dinâmico de rotores flexíveis assimétricos. Os estudos são desenvolvidos sobre alguns tópicos da estabilidade e do balanceamento. O estudo da estabilidade se restringe à determinação das velocidades críticas. A análise das instabilidades induzidas pelo filme lubrificante dos mancais ou pela assimetria elástica do sistema não é realizada. No estudo do balanceamento, considera-se uma distribuição de excentricidades ao longo do rotor para determinar a resposta desbalanceada. Efetua-se a análise de sensibilidade da resposta ao desbalanceamento com o intuito de auxiliar a seleção de parâmetros no processo de balanceamento.

O método de elementos finitos é utilizado para descrever os aspectos desejados do comportamento dinâmico de rotores de turbogeradores. O rotor flexível assimétrico analisado consiste em elementos de viga, com distribuição de massa, rigidez e excentricidade, e em mancais elásticos discretos. O modelo utiliza os elementos finitos baseados na teoria de vigas de Timoshenko e permite analisar os problemas de flexão e torção, que são desacoplados. Os efeitos giroscópicos, os termos inerciais da teoria de vigas de Rayleigh e o cisalhamento estão incluídos na formulação. Nesta primeira etapa de desenvolvimento do trabalho, os mancais são considerados simétricos e não amortecidos.

Analisa-se somente as vibrações de flexão. Determinam-se as frequências naturais, as velocidades críticas síncronas e dobradas por rotação e a resposta a um desbalanceamento

distribuído de rotores flexíveis assimétricos apoiados em mancais simétricos. Verificam-se os pontos críticos de sensibilidade à variação de massa da estrutura, através de uma análise de sensibilidade da resposta desbalanceada, visando a seleção dos planos de balanceamento. Selecionados os planos de balanceamento, efetua-se a operação de balanceamento através do método dos coeficientes de influência.

CAPITULO 2

FORMULAÇÃO ATRAVÉS DE ELEMENTOS FINITOS DE ROTORES FLEXÍVEIS ASSIMÉTRICOS

2.1. INTRODUÇÃO

Desenvolve-se neste capítulo a formulação de elementos finitos para rotores flexíveis assimétricos utilizada no trabalho. O rotor é modelado por elementos finitos de viga de Timoshenko e por elementos elásticos discretos de mancais. Este modelo se presta muito bem para representar o problema de interesse, que são os rotores de turbogeradores de dois pólos. Não são consideradas na formulação as diferentes formas de amortecimento interno e externo.

São descritos neste capítulo os sistemas de referência, as funções de interpolação e as equações do movimento de um elemento finito de rotor assimétrico. As simplificações e as considerações efetuadas na formulação são também citadas. Faz-se uma breve explanação sobre algumas características peculiares de rotores de turboalternadores de dois pólos.

2.2. CARACTERÍSTICAS DE UM ROTOR ASSIMÉTRICO

Dentre os diferentes tipos de rotores flexíveis assimétricos, são estudados os rotores de turboalternadores de dois pólos, que possuem diferentes valores de rigidez em seus dois planos

ortogonais de deflexão. Esta assimetria gera vibrações dobradas por rotação, o que resulta em velocidades críticas adicionais. Para contrabalançar as vibrações dobradas por rotação, o projeto de um rotor é concebido para compensar os dois valores de rigidez à flexão usando, por exemplo, fendas transversais nas zonas dos pólos. As seções transversais reais de um rotor de turboalternador de dois pólos possuem geometria bem complexa (ver Figura 2.1), o que dificulta sobremaneira a determinação dos coeficientes de cisalhamento do eixo.

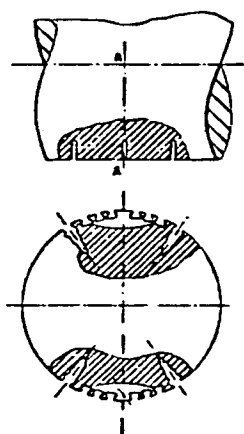


Figura 2.1 - Seção transversal típica de um rotor de turboalternador de dois pólos.

A determinação dos coeficientes de cisalhamento em rotores de turbogeradores de dois pólos é feita através de um procedimento analítico-experimental de identificação de parâmetros, onde o conhecimento das propriedades geométricas e constitutivas do rotor é condição fundamental. Além do acesso a dados construtivos, é necessário o desenvolvimento de um modelo analítico específico para estudar os efeitos do cisalhamento transversal em rotores. Os

elementos finitos sólidos tridimensionais têm sido empregados na modelagem de rotores de turbogeradores de dois pólos para a obtenção dos parâmetros associados com o cisalhamento.

Outra grande preocupação durante a fase de projeto é criar meios de se efetuar o balanceamento do rotor em operação. Para tanto, ao redor de cada fenda transversal, são colocados quatro parafusos grandes, que podem ser deslocados radialmente através da superfície do rotor. Desta maneira, a operação de balanceamento do rotor é efetuada através da modificação das posições radiais dos parafusos, procurando compensar as forças centrífugas geradas pelo desbalanceamento.

Concluindo a apresentação de características de um rotor de turboalternador de dois pólos, cita-se que no projeto de um rotor a assimetria elástica equivalente das seções transversais do eixo é de pequena ordem de grandeza.

2.3. SISTEMAS DE COORDENADAS E FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

O rotor flexível assimétrico analisado consiste em elementos de viga, com distribuição de massa, rigidez e excentricidade, e em mancais elásticos discretos. Na descrição do comportamento dinâmico do rotor são utilizados dois sistemas de coordenadas, como pode ser visto na Figura 2.2. O sistema de referência XYZ está fixo no espaço, enquanto o sistema de referência xyz é rotativo, sendo que os eixos X e x são colineares e coincidentes com a linha que passa pelos centros de equilíbrio dos mancais. A velocidade do sistema rotativo é escrita como ω .

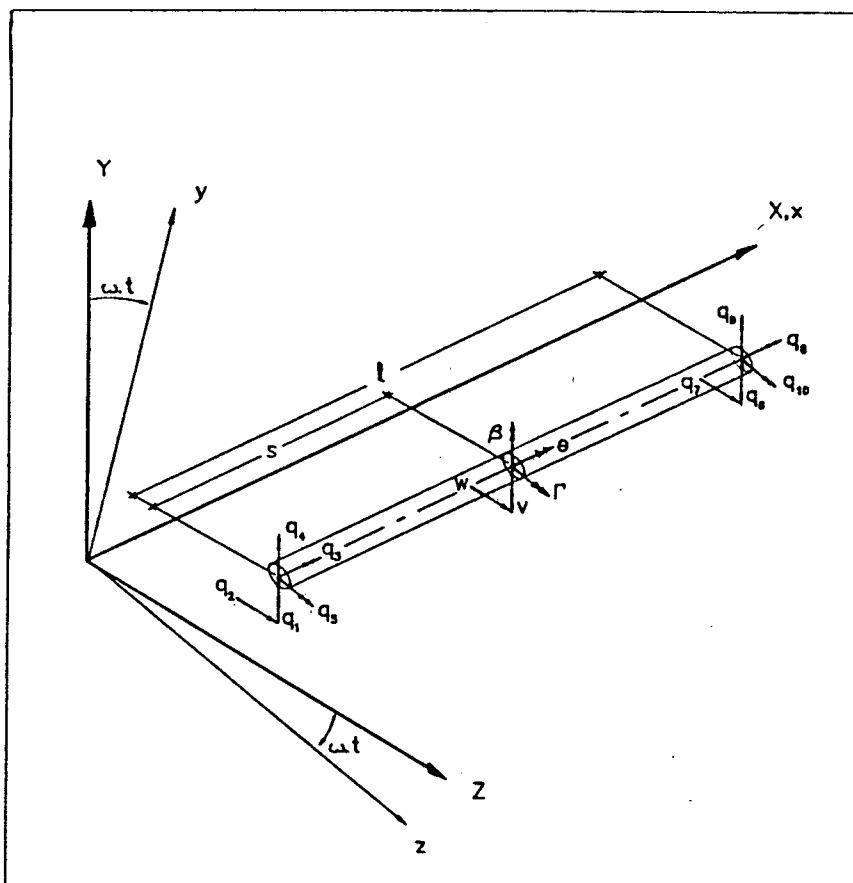


Figura 2.2- Sistemas de Coordenadas do Elemento Finito de Rotor

O elemento finito de rotor com comprimento l possui dez graus de liberdade, ou seja, duas translações (V e W) e três rotações (β , Γ e θ) por nó. Estes graus de liberdade estão associados com os problemas de flexão e torção, sendo que o grau de liberdade torcional é considerado desacoplado dos graus de liberdade de flexão. Uma seção qualquer do elemento, localizada a uma distância s da extremidade inicial (Figura 2.2), translada e gira durante o movimento do rotor. A hipótese de pequenas deformações se aplica ao modelo e, conseqüentemente, os vetores rotação (β , Γ) são aproximadamente colineares com os eixos (Y , Z), respectivamente.

Os deslocamentos lineares (V,W) do centro de uma seção transversal qualquer incluem as contribuições de flexão (Vf,Wf) e de cisalhamento (Vc,Wc). Utilizam-se funções de interpolação clássicas para vigas de Timoshenko na flexão (Apêndice A). Para a torção foram escolhidas funções de interpolação lineares (Apêndice A). A translação e a rotação de uma seção qualquer do elemento são aproximadas pelas seguintes relações:

$$\begin{Bmatrix} V(s,t) \\ W(s,t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1^y & 0 & 0 & 0 & \psi_2^y & \psi_3^y & 0 & 0 & 0 & \psi_4^y \\ 0 & \psi_1^z & 0 & -\psi_2^z & 0 & 0 & \psi_3^z & 0 & -\psi_4^z & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{\bullet}(t) \end{Bmatrix} = \\ \left[D(s) \right] \begin{Bmatrix} q_{\bullet}(t) \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\begin{Bmatrix} \chi(s,t) \\ \Gamma(s,t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_1^z & 0 & \phi_2^z & 0 & 0 & -\phi_3^z & 0 & \phi_4^z & 0 \\ \phi_1^y & 0 & 0 & 0 & \phi_2^y & \phi_3^y & 0 & 0 & 0 & \phi_4^y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{\bullet}(t) \end{Bmatrix} = \\ \left[W(s) \right] \begin{Bmatrix} q_{\bullet}(t) \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\begin{Bmatrix} \theta(s,t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{\bullet}(t) \end{Bmatrix} = \\ \left[E(s) \right] \begin{Bmatrix} q_{\bullet}(t) \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

onde $\langle q_{\bullet} \rangle^T = \langle q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8 \ q_9 \ q_{10} \rangle$

e as funções de interpolação ψ_i , ϕ_i e N_j , $i=1,2,3,4$ e $j=1,2$, representam os modos de deslocamentos estáticos, sendo que cada

uma das funções está associada com o deslocamento unitário de uma das coordenadas, com todas as outras coordenadas com deslocamento restringido a zero. [D],[W] e [E] representam as matrizes das funções de interpolação de deslocamentos lineares, deslocamentos angulares e de torção, respectivamente.

Como o procedimento de identificação de parâmetros associados com o cisalhamento do rotor não se encontra entre os objetivos do trabalho, para se considerarem os efeitos do cisalhamento transversal na formulação, a seção transversal do rotor é considerada aproximadamente circular. Com isso, os coeficientes de cisalhamento K_y e K_z podem ser determinados através de uma simples expressão (referência [64]) :

$$K = K_y = K_z = \frac{6(1+\eta)}{7+6\eta} \quad (2.4)$$

onde K é o coeficiente de cisalhamento médio e η é o coeficiente de Poisson.

2.4. EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

As equações do movimento de um elemento finito de rotor podem ser determinadas pelo Princípio de Hamilton, fazendo-se a primeira variação do funcional

$$\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} (T - V + W) dt \quad (2.5)$$

onde T , V e W representam, respectivamente, a energia cinética, a energia potencial elástica e o trabalho das forças externas.

Determinam-se as equações através da relação:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T-V) + \delta W] dt = 0 \quad (2.6)$$

A energia cinética do elemento consiste das parcelas de translação e rotação do movimento. A parcela rotacional da energia cinética inclui a rotação do eixo e os termos rotacionais da teoria de vigas de Rayleigh.

Na obtenção da expressão da energia cinética do elemento (Apêndice B), no sistema inercial de coordenadas, efetuam-se algumas hipóteses simplificativas. A pequena assimetria da seção transversal permite considerar o rotor inercialmente simétrico, o que evita o aparecimento de coeficientes periódicos na parcela de energia rotacional. Além disso, desprezam-se os termos não lineares que aparecem no desenvolvimento da expressão (2.7):

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \int_0^l m (\dot{v} \dot{w}) \begin{Bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} ds + \frac{1}{2} \int_0^l Idm (\dot{\beta} \dot{\Gamma}) \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\Gamma} \end{Bmatrix} ds + \\ & \frac{1}{2} \int_0^l I_p \dot{\theta} \dot{\theta} ds - \Omega \int_0^l I_p \dot{\Gamma} \beta ds + \\ & \frac{1}{2} \int_0^l I_p (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\theta}) ds \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde m representa a massa por unidade de comprimento; Idm representa o momento diametral médio de inércia de massa por unidade de comprimento; I_p é o momento polar por unidade de

comprimento. A velocidade de rotação do rotor é escrita como Ω . O ponto "·" acima das variáveis significa diferenciação em relação ao tempo.

A energia de deformação elástica devido à flexão, ao cisalhamento e à torção, no sistema rotativo de coordenadas, é escrita como

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l E \langle v_f' \ w_f' \rangle \begin{bmatrix} I_z & 0 \\ 0 & I_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_f' \\ w_f' \end{Bmatrix} ds + \frac{1}{2} \int_0^l A G \langle v_c' \ w_c' \rangle \begin{bmatrix} K_y & 0 \\ 0 & K_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_c' \\ w_c' \end{Bmatrix} ds + \frac{1}{2} \int_0^l G K_t \dot{\theta} \dot{\theta} ds \quad (2.8)$$

onde K_y e K_z são os coeficientes de cisalhamento; K_t é a constante de torção; E e G são os módulos de elasticidade longitudinal e transversal; I_y e I_z são os momentos de inércia de área; A é a área nominal da seção transversal. O apóstrofo "·" acima das variáveis significa diferenciação em relação à posição.

O trabalho virtual das forças externas é devido a um vetor força generalizada $\langle F^* \rangle$:

$$\delta W = \int_0^l \begin{Bmatrix} \delta V \\ \delta W \end{Bmatrix}^T \langle F^* \rangle ds \quad (2.9)$$

2.4.1. EQUAÇÃO DO MOVIMENTO NO SISTEMA INERCIAL DE COORDENADAS

A substituição das funções de interpolação e das coordenadas

generalizadas nas equações (2.7) e (2.8) conduzem às matrizes locais do problema (Apêndices C,D,E e F). Somente a matriz de rigidez é obtida no sistema rotativo de coordenadas, através da equação (2.8), e faz-se necessário expressá-la no sistema de referência global. Para tanto, define-se a matriz [R] de transformação de coordenadas entre o sistema inercial (XYZ) e local (xyz):

$$\begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\omega t & \cos\omega t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\omega t & \cos\omega t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\omega t & -\sin\omega t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}$$

$$\langle q_0 \rangle = [R] \langle p_0 \rangle \quad (2.10)$$

onde $\langle q_0 \rangle$ e $\langle p_0 \rangle$ são as coordenadas generalizadas do elemento nos sistemas inercial e rotativo, respectivamente.

A expressão matricial da energia potencial elástica do elemento finito de rotor, no sistema de referência rotativo, é escrita como :

$$V = \frac{1}{2} \langle p_0 \rangle^T [K_0^0] \langle p_0 \rangle \quad (2.11)$$

onde $[K_0^0]$ é a matriz de rigidez do elemento de rotor no sistema

local de coordenadas (Apêndice F).

Efetuada-se a mudança do sistema de coordenadas, escreve-se a expressão matricial da energia potencial elástica do elemento de rotor no sistema de referência inercial :

$$V = \frac{1}{2} \langle q_0 \rangle^T [R][K_0^0][R]^T \langle q_0 \rangle \quad (2.12)$$

A ortotropia nas propriedades elásticas do rotor gera uma matriz de rigidez periódica, no sistema inercial de coordenadas, com termos dependentes dos momentos diametrais de inércia de área, do tempo e da velocidade angular, através de funções seno e cosseno.

Considerando-se a hipótese de que a seção transversal do rotor é aproximadamente circular, o que permite calcular os coeficientes de cisalhamento, os efeitos do cisalhamento transversal f_y e f_z podem ser determinados da seguinte forma :

$$f = f_y = f_z = 12EI_m/KAGl^2 \quad (2.13)$$

onde f é o efeito médio do cisalhamento transversal e I_m é o momento médio de inércia de área, ou seja, $I_m = \frac{I_y + I_z}{2}$.

Para se evitarem os coeficientes periódicos na equação do movimento, no sistema inercial de referência, cada termo da matriz periódica é separado em duas parcelas. Por exemplo, escolhe-se o termo K_{11} da matriz periódica $[K^0]$ para melhor compreensão do procedimento empregado.

$$K_{11} = \left(12EI_y/(1+f)l^3 \right) \cos^2 \omega t + \left(12EI_z/(1+f)l^3 \right) \sin^2 \omega t \quad (2.14)$$

Este termo, assim como todos os outros termos de $[K^*]$, pode ser separado em duas partes : uma parcela média dos momentos de inércia, independente do tempo e da velocidade, que equivale à parcela da simetria elástica; e uma parcela da diferença dos momentos de inércia, dependente do tempo e da velocidade, que equivale à parcela da assimetria elástica.

$$K_{11} = \left[12EI_m / (1+f) l^3 \right] - \left[12E\Delta I / (1+f) l^3 \right] \cos 2\omega t \quad (2.15)$$

sendo que ΔI é a assimetria de inércia de área, ou seja, $\Delta I = (I_y - I_z) / 2$.

Separando-se todos os termos da matriz periódica $[K^*]$, resultam duas outras matrizes. A primeira parcela da matriz periódica $[K^*]$ é a parcela média dos momentos diametrais de inércia, independente do tempo e da velocidade, que equivale à matriz de simetria elástica do rotor $[K_s^*]$. A segunda parcela é a da diferença dos momentos de inércia, dependente do tempo e da velocidade, que equivale à matriz da assimetria elástica do rotor $[\Delta K^*]$.

$$[K^*] = [K_s^*] + [\Delta K^*] \quad (2.16)$$

Obtidas todas as matrizes do sistema e as expressões matriciais da energia e do trabalho para o elemento finito de rotor, aplica-se o princípio de Hamilton (2.6) para se obter a equação do movimento, no sistema inercial de coordenadas. A equação do movimento possui parâmetros variáveis no tempo, ou seja, é parametricamente excitada, similar à equação de Mathieu:

$$([M^*] + [N^*])\langle \ddot{q}_0 \rangle - \Omega [G^*] \langle \dot{q}_0 \rangle + [Ks^*] \langle q_0 \rangle + [\Delta K^*] \langle q_0 \rangle = \langle F^* \rangle \quad (2.17)$$

$[M^*]$, $[N^*]$ e $[G^*]$ são as matrizes locais representativas da inércia de translação e de torção, da inércia de rotação e dos efeitos giroscópicos, respectivamente. Todas as matrizes são simétricas, exceção feita à matriz $[G^*]$, que é anti-simétrica. $[\Delta K^*] \langle q_0 \rangle$ representa a parcela de auto-excitação e pode ser passada para o lado direito da expressão como carregamento paramétrico.

A equação (2.17) é empregada para determinar as frequências naturais para uma rotação qualquer de sistemas giroscópicos e a resposta ao desbalanceamento distribuído de rotores flexíveis assimétricos.

2.4.2. EQUAÇÃO DO MOVIMENTO NO SISTEMA ROTATIVO DE COORDENADAS

Para a determinação das velocidades críticas do rotor, que são características dinâmicas importantes de rotores, é conveniente expressar as equações do movimento no sistema de referência rotativo. Para isto, utiliza-se a matriz mudança de base dada pela expressão (2.10). Algumas relações entre as coordenadas generalizadas do elemento nos sistemas inercial e rotativo podem ser escritas (referência [52]) :

$$\langle q_0 \rangle = [R] \langle p_0 \rangle \quad (2.18)$$

$$\langle \dot{q}_0 \rangle = [\dot{R}] \langle p_0 \rangle + [R] \langle \dot{p}_0 \rangle \quad (2.19)$$

$$\langle \ddot{q}_0 \rangle = [\ddot{R}] \langle p_0 \rangle + 2[\dot{R}] \langle \dot{p}_0 \rangle + [R] \langle \ddot{p}_0 \rangle \quad (2.20)$$

onde $[\ddot{R}] = -\omega^2 [R]$ e $[\dot{R}] = \omega [T]$.

Substituindo-se as relações (2.18), (2.19) e (2.20) na equação (2.17) e efetuando-se a pré-multiplicação da equação resultante por $[R]^T$, obtém-se a seguinte expressão :

$$\begin{aligned}
 & [R]^T([M^\circ] + [N^\circ])[R]\langle \ddot{p}_\circ \rangle + \\
 & \{ 2\omega [R]^T([M^\circ] + [N^\circ])[T] - \Omega [R]^T[G^\circ][R] \} \langle \dot{p}_\circ \rangle + \\
 & \{ -\omega [R]^T([M^\circ] + [N^\circ])[R] - \Omega \omega [R]^T[G^\circ][T] + [R]^T[Ks^\circ][R] + \\
 & \quad + [R]^T[AK^\circ][R] \} \langle p_\circ \rangle = [R]^T \langle F^\circ \rangle \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

Pode ser verificado que cada uma das submatrizes 2×2 , relacionadas com os graus de liberdade de flexão, das matrizes $[Ks^\circ]$, $[M^\circ]$, $[N^\circ]$ e $[G^\circ]$ ou é diagonal ou é anti-simétrica. Isto permite que certas propriedades algébricas se apliquem à equação (2.21). Para ilustrar essas propriedades, suponha-se que se tenha uma submatriz simétrica $[A]$ qualquer.

1 - As matrizes simétricas e anti-simétricas permanecem simétricas e anti-simétricas quando são pré-multiplicadas e pós-multiplicadas pela matriz $[R]$.

$$[R]^T \begin{bmatrix} [A] & [O] \\ [O] & [A] \end{bmatrix} [R] = \begin{bmatrix} [A] & [O] \\ [O] & [A] \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$[R]^T \begin{bmatrix} [O] & [A] \\ -[A] & [O] \end{bmatrix} [R] = \begin{bmatrix} [O] & [A] \\ -[A] & [O] \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

2 - As matrizes simétricas e anti-simétricas tornam-se anti-simétricas e simétricas, respectivamente, quando são pré-multiplicadas pela matriz $[R]$ e pós-multiplicadas por $[T]$.

$$[R]^T \begin{bmatrix} [A] & [0] \\ [0] & [A] \end{bmatrix} [T] = \begin{bmatrix} [0] & -[A] \\ [A] & [0] \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$[R]^T \begin{bmatrix} [0] & [A] \\ -[A] & [0] \end{bmatrix} [T] = \begin{bmatrix} [A] & [0] \\ [0] & [A] \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Por inspeção, pode também ser verificado que :

$$[G^{\circ}] = 2[R]^T [N^{\circ}] [T] \quad (2.26)$$

Definindo-se a matriz $[\hat{M}^{\circ}] = [R]^T [M^{\circ}] [T]$, que é anti-simétrica, e considerando-se as propriedades algébricas citadas, pode-se reescrever a equação (2.21) como:

$$\begin{aligned} & ([M^{\circ}] + [N^{\circ}]) \langle \ddot{p}_{\bullet} \rangle + \{ 2\omega[\hat{M}^{\circ}] + (\omega - \Omega)[G^{\circ}] \} \langle \dot{p}_{\bullet} \rangle + \\ & \{ -\omega^2([M^{\circ}] + [N^{\circ}]) - 2\omega\Omega[N^{\circ}] + [K_s^{\circ}] + [\Delta K_l^{\circ}] \} \langle p_{\bullet} \rangle = \langle P^{\circ} \rangle \quad (2.27) \end{aligned}$$

onde $[\Delta K_l^{\circ}] = [R]^T [\Delta K^{\circ}] [R]$ e $\langle P^{\circ} \rangle = [R]^T \langle F^{\circ} \rangle$.

Definindo-se λ como a relação entre a rotação do eixo Ω e a rotação do sistema rotativo ω , ou seja, $\lambda = \Omega/\omega$, obtém-se a equação do movimento de um elemento finito de rotor, no sistema rotativo de coordenadas.

$$\begin{aligned}
 & ([M^{\circ}] + [N^{\circ}]) \langle \ddot{p}_{\circ} \rangle + \omega \left\{ 2[\hat{M}^{\circ}] + (1-\lambda)[G^{\circ}] \right\} \langle \dot{p}_{\circ} \rangle + \\
 & \left\{ [Ks^{\circ}] + [AK_l^{\circ}] - \omega^2 \left[[M^{\circ}] + (1-2\lambda)[N^{\circ}] \right] \right\} \langle p_{\circ} \rangle = \langle P^{\circ} \rangle \quad (2.28)
 \end{aligned}$$

2.5. ELEMENTO DE MANCAL

Os modelos linearizados clássicos de mancais utilizam oito coeficientes de rigidez e de amortecimento nas matrizes de cada elemento de mancal.

O vetor força generalizada $\langle Q^m \rangle$ em cada mancal é obtido pela seguinte equação, no sistema de coordenadas inercial :

$$[C^m] \langle \dot{q}_m \rangle + [K^m] \langle q_m \rangle = \langle Q^m \rangle \quad (2.29)$$

onde : $[C^m]$ e $[K^m]$ são as matrizes de amortecimento e de rigidez, respectivamente, do elemento de mancal; $\langle q_m \rangle$ é o vetor dos deslocamentos transversais lineares do mancal, ou seja, $\langle q_m \rangle = \begin{Bmatrix} V \\ W \end{Bmatrix}$.

Os mancais utilizados neste trabalho possuem somente flexibilidade linear, ou seja, oferecem resistência apenas aos deslocamentos transversais lineares do rotor (Figura 2.3).

Como o amortecimento dos mancais não é considerado na atual etapa de desenvolvimento do trabalho, são necessários apenas quatro coeficientes de rigidez para a modelagem do mancal. A matriz de rigidez genérica $[K^m]$ de um mancal com flexibilidade linear, no sistema fixo de coordenadas, pode ser escrita como:

$$[K^m] = \begin{bmatrix} K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

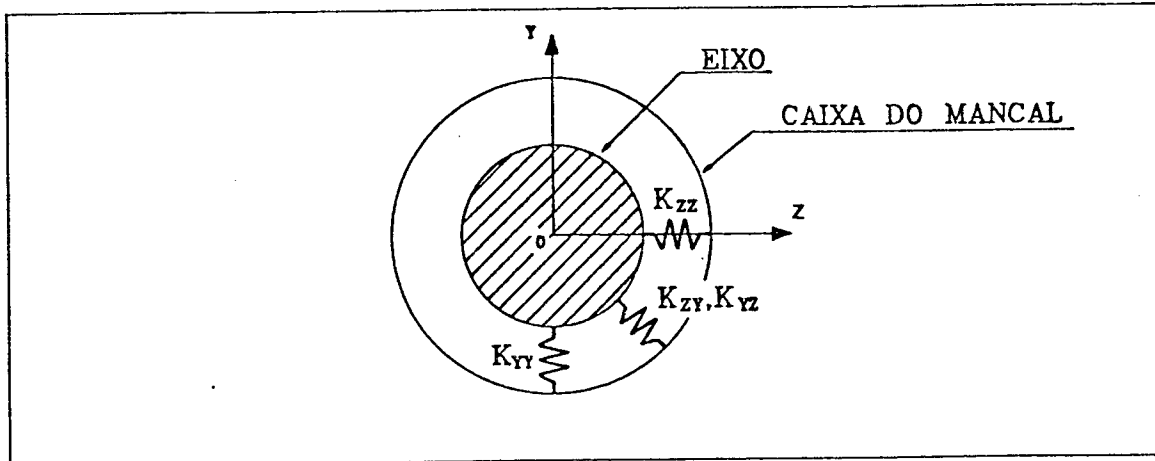


Figura 2.3 - Representação através de elementos de mola de um mancal.

Para se obter a matriz de rigidez de um mancal, no sistema rotativo de coordenadas, efetua-se a mudança de base através da matriz $[R]$ (2.10). Substituindo-se a expressão (2.18) na equação (2.29) e pré-multiplicando-se a equação resultante pela matriz $[R]$, obtém-se a equação de equilíbrio de um mancal no sistema local de coordenadas :

$$[R]^T [C^m] [R] \langle \dot{p}_m \rangle + [R]^T [K^m] [R] \langle p_m \rangle = \langle P^m \rangle \quad (2.31)$$

onde $\langle P^m \rangle$ é o vetor força generalizada em cada mancal, no sistema rotativo de coordenadas, e $\langle p_m \rangle$ é o vetor dos deslocamentos transversais lineares do mancal em coordenadas rotativas.

Para mancais anisotrópicos, as matrizes de amortecimento e de rigidez do elemento de mancal, resultantes da equação (2.31), possuem coeficientes periódicos. Isto resulta em uma equação do movimento do rotor parametricamente excitada, no sistema local de coordenadas. Para mancais isotrópicos, as matrizes do elemento de mancal têm sempre coeficientes constantes.

2.6. EQUAÇÃO GLOBAL DO MOVIMENTO

A equação global do movimento do sistema rotor-mancal é obtida pela sobreposição das equações de equilíbrio dos elementos finitos de rotor e dos elementos discretos de mancal. Como o elemento de mancal utilizado no modelo contribui somente para a rigidez do sistema, apenas a matriz de rigidez global da estrutura é obtida pela sobreposição das matrizes de rigidez dos elementos de rotor e de mancal. Todas as outras matrizes globais do sistema são obtidas pela sobreposição somente das matrizes dos elementos de rotor.

No sistema fixo de coordenadas, a equação global do movimento é obtida a partir das equações (2.17) e (2.29), sendo escrita como :

$$([M]+[N])\langle\ddot{q}\rangle - \Omega[G]\langle\dot{q}\rangle + [K_s]\langle q\rangle + [\Delta K]\langle q\rangle = \langle F\rangle \quad (2.32)$$

onde todas as matrizes e vetores estão relacionados com a estrutura global. Os termos de rigidez de mancal estão embutidos na matriz $[K_s]$.

No sistema rotativo de coordenadas, a equação global da

estrutura é obtida a partir das equações (2.28) e (2.31), sendo escrita como :

$$\begin{aligned}
 & ([M] + [N])\langle \ddot{p} \rangle + \omega \left\{ 2[\hat{M}] + (1-\lambda)[G] \right\} \langle \dot{p} \rangle + \\
 & \left\{ [K_s] + [\Delta K_f] - \omega^2 \left[[M] + (1-2\lambda)[N] \right] \right\} \langle p \rangle = \langle P \rangle \quad (2.33)
 \end{aligned}$$

onde todas as matrizes e vetores são obtidos para a estrutura global. A matriz periódica $[\Delta K_f]$ contém as contribuições de rigidez dos elementos de rotor e dos mancais.

Obtidas as equações de equilíbrio do sistema rotor-mancal, parte-se para a determinação das características dinâmicas de interesse, tais como as frequências naturais, as velocidades críticas e a resposta a um desbalanceamento distribuído de rotores flexíveis assimétricos.

CAPÍTULO 3

VELOCIDADES CRÍTICAS E FREQUÊNCIAS NATURAIS

3.1. INTRODUÇÃO

Deseja-se, agora, conhecer alguns aspectos do comportamento dinâmico de rotores flexíveis assimétricos apoiados em mancais simétricos e isotrópicos. As características dinâmicas de rotores flexíveis de maior interesse são as frequências naturais, as velocidades críticas das vibrações orbitais e a resposta desbalanceada.

Neste capítulo, analisam-se as equações das vibrações livres de um rotor flexível assimétrico, que permitem a determinação das velocidades críticas e das frequências naturais, e apresentam-se os problemas de autovalor para o cálculo dessas características nas rotações desejadas.

3.2. EQUAÇÕES PARA DETERMINAÇÃO DAS VELOCIDADES CRÍTICAS

A determinação das velocidades críticas das vibrações orbitais de um rotor flexível assimétrico é o primeiro problema a ser resolvido. Quando se deseja determinar as rotações críticas do rotor, é conveniente expressar as equações do movimento no sistema rotativo de coordenadas. Reescreve-se, aqui, a equação (2.33), que representa o movimento do rotor nas coordenadas rotativas :

$$([M] + [N])\langle \ddot{p} \rangle + \omega \left\{ 2[\hat{M}] + (1 - \lambda)[G] \right\} \langle \dot{p} \rangle +$$

$$\left\{ [K_s] + [\Delta K_1] - \omega^2 \left[[M] + (1 - 2\lambda)[N] \right] \right\} \langle p \rangle = \langle P \rangle$$

Os mancais do modelo são considerados isotrópicos, o que evita o aparecimento de coeficientes periódicos nas matrizes dos elementos de mancal. Com isso, as contribuições dos elementos de mancal para a rigidez do sistema estão embutidas na matriz global $[K_s]$.

A equação global das vibrações livres, no sistema de referência local, permite a determinação das velocidades críticas, síncronas e dobradas por rotação, e das frequências naturais para rotação nula do rotor. A parcela de auto-excitação $[\Delta K_1]\langle p \rangle$ e o vetor excitação $\langle P \rangle$ são desprezados. Procuram-se as soluções estacionárias do sistema e, assim, o cálculo das velocidades críticas e das frequências naturais para rotação nula se resume ao problema de autovalor :

$$\left\{ [K_s] - \omega^2 \left[[M] + (1 - 2\lambda)[N] \right] \right\} \langle p \rangle = \langle 0 \rangle \quad (3.1)$$

onde todas as matrizes são simétricas.

3.2.1. FREQUÊNCIAS NATURAIS PARA ROTAÇÃO NULA

As frequências naturais para rotação nula são determinadas através da equação (3.1), fazendo-se λ assumir o valor zero. Reescreve-se o problema de autovalor na seguinte forma:

$$\{[Ks] - \omega^2([M] + [N])\}\{p\} = \{0\} \quad (3.2)$$

A equação (3.2) permite calcular as frequências naturais médias para rotação nula, ou seja, os valores médios das frequências naturais nos dois planos ortogonais de deflexão do rotor. Qualquer método de solução dos problemas de autovalor com matrizes reais simétricas pode ser utilizado. Os autovalores e autovetores da equação (3.2) foram determinados pelo método da Iteração Subespacial, utilizando-se um módulo computacional desenvolvido na referência [65].

3.2.2. VELOCIDADES CRÍTICAS

As velocidades críticas síncronas e dobradas por rotação são determinadas através da equação (3.1), fazendo-se λ assumir os valores de +1, -1, +1/2 e -1/2. Os valores positivos de λ estão associados com o cálculo das velocidades progressivas e os valores negativos com as velocidades regressivas.

O algoritmo utilizado para a obtenção dos autovetores e autovalores desse problema foi também o método da Iteração Subespacial.

3.3. EQUAÇÕES PARA DETERMINAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS

A determinação das frequências naturais médias de um rotor flexível assimétrico para qualquer rotação é o segundo problema a ser resolvido. Utiliza-se a equação global do movimento, no

sistema de referência inercial, para calcular as frequências desejadas:

$$([M]+[N])\langle \ddot{q} \rangle - \Omega[G]\langle \dot{q} \rangle + [K_s]\langle q \rangle + [\Delta K]\langle q \rangle = \langle F \rangle$$

A equação das vibrações livres do sistema rotor-mancal, desprezando-se a parcela de auto-excitação $[\Delta K]\langle q \rangle$ e o vetor excitação $\langle F \rangle$, pode ser escrita na seguinte forma :

$$([M]+[N])\langle \ddot{q} \rangle - \Omega[G]\langle \dot{q} \rangle + [K_s]\langle q \rangle = \langle 0 \rangle \quad (3.3)$$

Apresenta-se a seguir o método empregado para obtenção dos autovetores e autovalores do sistema giroscópico (3.3). Como a matriz $[G]$ do sistema é não simétrica, as soluções do problema de autovalor são complexas.

Torna-se conveniente, para aplicação do método de solução do problema de autovalor, a redução da ordem das diferenciações do sistema. Definindo-se um novo vetor $\langle x \rangle$ como sendo igual a $\langle \dot{q} \rangle$, apresenta-se o novo sistema de equações de primeira ordem:

$$\begin{bmatrix} ([M]+[N]) & [0] \\ [0] & [K_s] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Omega[G] & [K_s] \\ -[K_s] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

Nota-se que o sistema (3.4) possui uma matriz equivalente à matriz de amortecimento simétrica e uma matriz equivalente à matriz de rigidez anti-simétrica. A ordem dessas matrizes é duas vezes maior do que a ordem das matrizes do sistema (3.3) de equações diferenciais de segunda ordem.

O primeiro passo no método de solução adotado é compactar o problema (3.4) através da matriz dos primeiros autovetores $[Y]$

obtidos do problema (3.2). O novo vetor deslocamentos em coordenadas modais é da seguinte forma:

$$\langle q \rangle = [Y]^T \langle U \rangle \quad (3.5)$$

Definindo-se um outro vetor $\langle u \rangle$ como sendo igual a $\langle \dot{U} \rangle$, a solução do problema compactado é expressa por:

$$\begin{Bmatrix} u \\ U \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z \\ Z \end{Bmatrix} e^{\alpha t} \quad (3.6)$$

O novo sistema de equações diferenciais de primeira ordem compactado conduz ao seguinte problema de autovalor:

$$\begin{bmatrix} \Omega[\bar{G}] & -\sqrt{[\Lambda]} \\ \sqrt{[\Lambda]} & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ Z \end{Bmatrix} = \alpha \begin{Bmatrix} z \\ Z \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

onde $[\bar{G}] = [Y]^T [G] [Y]$ e $\sqrt{[\Lambda]}$ é a matriz diagonal da raiz quadrada dos autovalores obtidos do problema de autovalor (3.2). Qualquer método de solução dos problemas de autovalor com matrizes reais não simétricas pode ser utilizado. Utilizou-se o método QR (referência [42]) para determinar os autovalores α_i do problema (3.7). Os autovalores ocorrem em pares conjugados puramente imaginários, cujas partes imaginárias são as frequências naturais para uma determinada rotação Ω . Obtida a solução, retorna-se ao sistema de coordenadas original através da relação:

$$\langle q \rangle = [Y]^T \langle Z \rangle \quad (3.8)$$

A expressão (3.8) permite a obtenção dos autovetores,

associados com os autovalores calculados através do problema (3.7), no sistema de coordenadas original. Esta expressão finaliza a apresentação das equações e dos problemas de autovalor que permitem calcular as velocidades críticas, síncronas e dobradas por rotação, as frequências naturais para rotação nula e as frequências naturais para uma rotação qualquer.

CAPÍTULO 4

RESPOSTA DESBALANCEADA E BALANCEAMENTO DE ROTORES FLEXÍVEIS

4.1. INTRODUÇÃO

As equações para a determinação da resposta ao desbalanceamento e o processo de balanceamento são descritos neste capítulo. Na realidade, as respostas ao desbalanceamento de rotores são determinadas experimentalmente e não calculadas. Como este trabalho se preocupa apenas com o desenvolvimento da formulação numérica de rotores flexíveis assimétricos, para se implementar o cálculo da resposta desbalanceada, supõe-se uma distribuição linear de excentricidades ao longo de cada elemento finito de rotor a fim de simular um caso real de rotor desbalanceado.

As seções mais sensíveis à variação de massa do rotor são identificadas, através da análise de sensibilidade da resposta desbalanceada, visando selecionar os planos de colocação das massas balanceadoras. Em sequência, o método dos coeficientes de influência é utilizado para efetuar o balanceamento de rotores flexíveis.

4.2. RESPOSTA AO DESBALANCEAMENTO

O sistema de equações que permite determinar a resposta de um rotor flexível a um desbalanceamento de massa é obtido. As funções

de interpolação lineares são utilizadas para descrever a distribuição de excentricidades ao longo do rotor. Determina-se a expressão da força de excitação do desbalanceamento para se obter a equação das vibrações forçadas de um elemento finito de rotor.

4.2.1. DESBALANCEAMENTO LINEARMENTE DISTRIBUÍDO

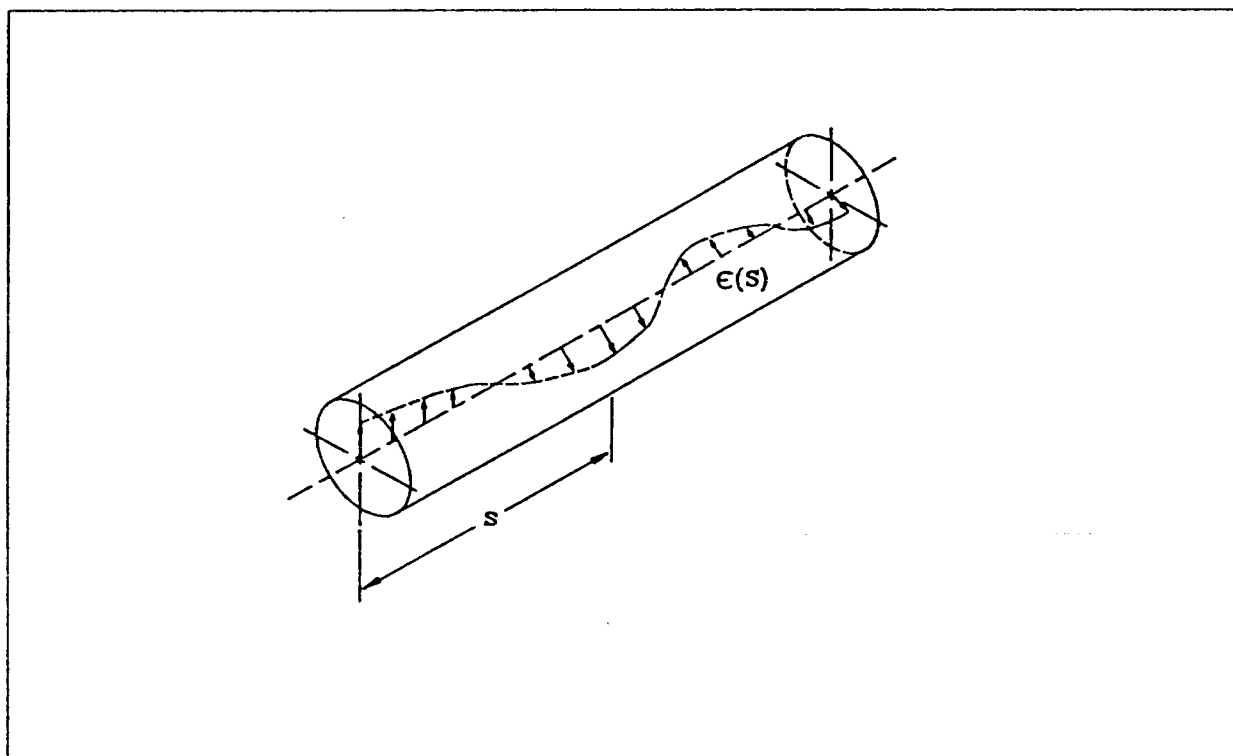


Figura 4.1 - Distribuição de excentricidades.

Um rotor real é constituído de um sólido, dotado de uma certa distribuição de massa, girando em torno de um determinado eixo de rotação. A posição do centro de massa em cada seção transversal do rotor não necessariamente coincide com a posição do centro geométrico. Então, o rotor pode ser considerado como constituído

de inúmeras e sucessivas seções transversais, cada uma delas dotada de um vetor excentricidade $\langle e(s) \rangle$, com módulo $\|e(s)\|$ e fase $\langle \gamma(s) \rangle$, em relação a um sistema de referência, como pode ser visto na figura 4.1.

O desbalanceamento pode então ser descrito pelos vários vetores excentricidade $\langle e(s) \rangle$. Somente pelo efeito de rotação, o rotor será sede de uma distribuição de forças de inércia $\langle dF_i \rangle = \langle e(s) \rangle m(s) \Omega^2 ds$, nas mesmas direções de $\langle e(s) \rangle$, sendo que $m(s)$ é a massa por unidade de comprimento do rotor, na seção s genérica, e Ω é a velocidade de rotação, como é mostrado pela figura 4.2.

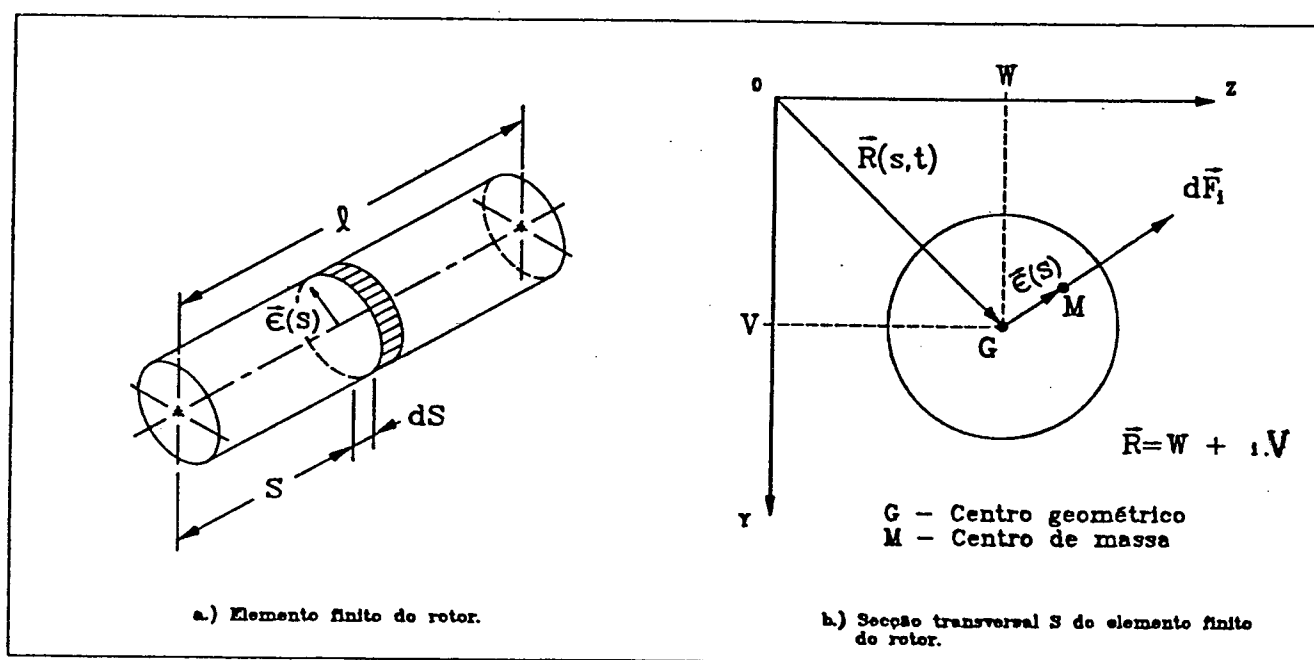


Figura 4.2 - Vetores excentricidade $\langle e(s) \rangle$ e força de inércia $\langle dF_i \rangle$ em uma seção transversal qualquer.

As forças de inércia são proporcionais à aceleração dos centros de massa das seções transversais do rotor. Deseja-se, agora, encontrar a relação entre as coordenadas do centro

geométrico e do centro de massa de uma seção transversal genérica do rotor.

4.2.2. REFERÊNCIA DO SISTEMA NÃO-INERCIAL DE COORDENADAS

As expressões que descrevem o movimento do elemento finito de rotor, neste trabalho, são obtidas utilizando o centro de massa M como ponto de referência para o sistema não-inercial de coordenadas. Mas, no cálculo da resposta a um desbalanceamento distribuído, utiliza-se o centro geométrico G como referência para o sistema não-inercial (ver Figura 4.2). Com isso, a expressão da energia cinética de um elemento finito de rotor com comprimento ds e com massa M , adotando-se G como referência não-inercial, pode ser escrita na seguinte forma (referência [66]) :

$$dT = \frac{1}{2} M(\dot{R})^2 ds + \frac{1}{2} \sum_1^n m_i (\dot{\rho}_i)^2 ds + M(\dot{R}) \langle \dot{e} \rangle ds \quad (4.1)$$

onde : $\langle \dot{R} \rangle$ é o vetor velocidade do centro geométrico G ; $\langle \dot{e} \rangle$ é o vetor velocidade do centro de massa em relação a G ; $\langle \dot{\rho}_i \rangle$ é o vetor velocidade de uma partícula qualquer do elemento, de massa m_i , em relação a G ; o índice n indica o número de partículas m_i que constituem o elemento. Para melhor compreensão das parcelas da expressão (4.1), transcreve-se o teorema de König : "A energia cinética total de um sistema de massa M é igual a soma de : (1) a energia cinética de uma partícula com massa M movendo-se com G ; (2) a energia cinética devido ao movimento do sistema em relação a G ; (3) o produto escalar do vetor quantidade de movimento linear

de uma partícula de massa M movendo-se com G e do vetor velocidade do centro de massa em relação a G ."

Quando se utiliza o centro de massa M como origem do sistema rotativo de coordenadas, o terceiro termo do lado direito da expressão (4.1) se anula e a expressão da energia cinética do elemento finito de rotor pode ser separada em duas parcelas : uma translacional e uma rotacional (Apêndice B). Neste caso, os produtos de inércia de massa da seção transversal do elemento de rotor se anulam, e o tensor de inércia, na expressão (B.4) da energia cinética rotacional, será representado por uma matriz diagonal.

Quando a referência não-inercial passa para o centro geométrico G , os produtos de inércia não serão necessariamente nulos, e, por conseguinte, a matriz representativa do tensor de inércia na expressão (B.4) poderá ter termos não diagonais diferentes de zero.

Fazendo-se a hipótese de que o módulo $\|e(s)\|$ dos vetores excentricidade será bastante pequeno, tal que o centro geométrico G praticamente coincida com o centro de massa M , os produtos de inércia de massa serão bem pequenos em relação aos momentos de inércia e, portanto, serão desprezados na formulação. Assim, as equações do movimento do rotor obtidas com o centro de massa como referência não-inercial podem ser empregadas para a determinação da resposta ao desbalanceamento distribuído.

Pode também ser demonstrado que o terceiro termo do lado direito da expressão (4.1) contribuirá, na equação do movimento de um elemento finito de rotor, com o vetor excitação gerado pelo desbalanceamento distribuído. Para efetuar essa demonstração, escreve-se a equação de Lagrange, desprezando-se as forças

generalizadas não derivadas de potenciais;

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{R}} \right] - \frac{\partial (T-V)}{\partial R} = 0$$

A contribuição da parcela da energia cinética do elemento finito de rotor associada com o movimento do centro de massa em relação a G pode ser dada como:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (M\dot{R})(\dot{e})}{\partial \dot{R}} \right] ds = M\ddot{e} ds$$

Como o vetor excentricidade de uma seção ds qualquer do elemento terá módulo constante, pode-se reescrever a expressão anterior na seguinte forma:

$$M\ddot{e} ds = M(\dot{\Omega})^2(e) ds = -M\Omega^2(e) ds$$

onde o último termo do lado direito representa a força de inércia, em uma seção ds qualquer, devido à excentricidade de massa.

4.2.3. VECTOR EXCENTRICIDADE DO CENTRO DE MASSA

Definem-se aqui o vetor excentricidade e as coordenadas do centro de massa de uma seção transversal qualquer. Na figura 4.3, γ representa o ângulo de fase do vetor excentricidade ($e(s)$) e γ_0 representa o ângulo de fase inicial.

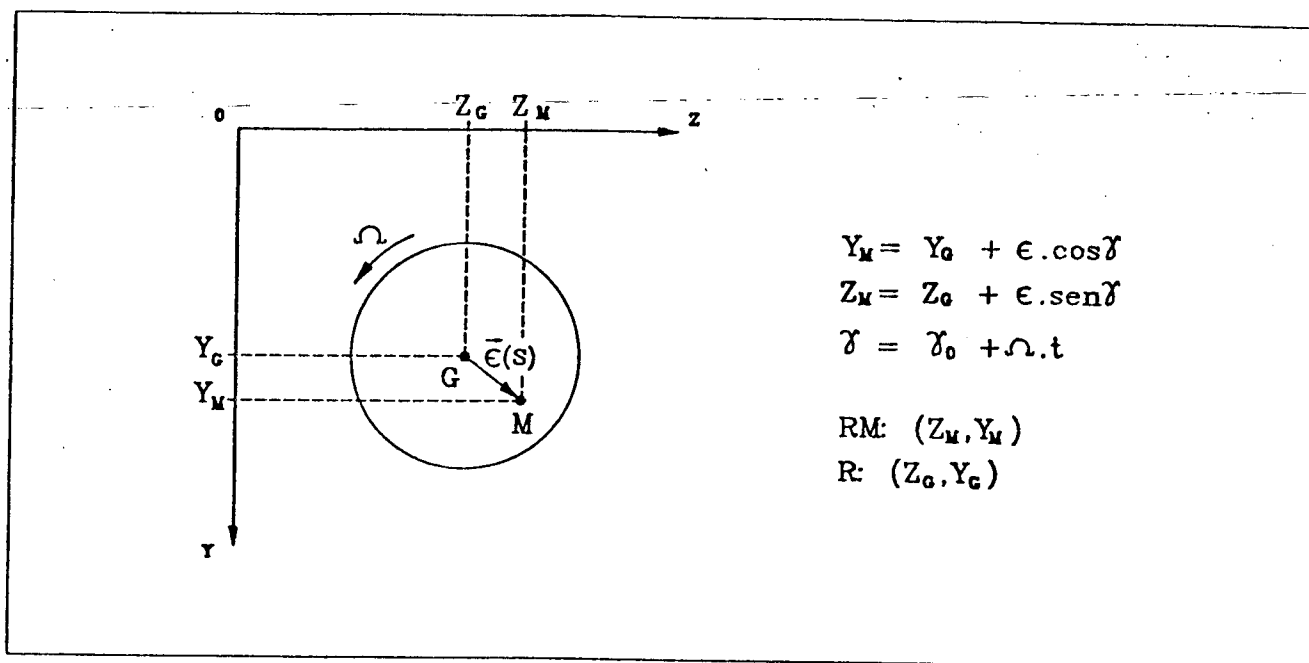


Figura 4.3 - Coordenadas dos centros geométrico G e de massa M.

Pela figura 4.3, escrevem-se as relações:

$$Y_M = Y_0 + \epsilon [\cos \gamma_0 \cos \Omega t - \sin \gamma_0 \sin \Omega t] \quad (4.2)$$

$$Z_M = Z_0 + \epsilon [\sin \gamma_0 \cos \Omega t + \cos \gamma_0 \sin \Omega t] \quad (4.3)$$

Definindo-se as projeções e_z e e_y do vetor excentricidade, nas direções z e y respectivamente, no instante inicial t_0 , como:

$$e_z = \epsilon \sin \gamma_0 \quad (4.4)$$

$$e_y = \epsilon \cos \gamma_0 \quad (4.5)$$

tem-se que :

$$\begin{Bmatrix} Y_M \\ Z_M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_0 \\ Z_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} e_y \\ e_z \end{Bmatrix} \cos \Omega t + \begin{Bmatrix} -e_z \\ e_y \end{Bmatrix} \sin \Omega t \quad (4.6)$$

Os vetores excentricidade, em seno e em cosseno, do elemento finito de rotor são definidos como $\langle \epsilon_s \rangle$ e $\langle \epsilon_c \rangle$.

$$\langle \epsilon_s \rangle = \begin{Bmatrix} -\epsilon_z \\ \epsilon_y \end{Bmatrix} \quad e \quad \langle \epsilon_c \rangle = \begin{Bmatrix} \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

Então, obtém-se a forma final para o vetor posição do centro de massa:

$$\begin{Bmatrix} Y_M \\ Z_M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_G \\ Z_G \end{Bmatrix} + \langle \epsilon_c \rangle \cos \Omega t + \langle \epsilon_s \rangle \sin \Omega t \quad (4.8)$$

onde a expressão do vetor excentricidade da seção transversal é dada por :

$$\langle \epsilon(s) \rangle = \langle \epsilon_c \rangle \cos \Omega t + \langle \epsilon_s \rangle \sin \Omega t \quad (4.9)$$

4.2.4. FORÇA DE DESBALANCEAMENTO

O modo de vibração do rotor se tornará mais ou menos excitado, conseqüentemente o nível de vibração será mais ou menos elevado, em função da distribuição das forças de inércia ao longo do rotor.

Para um elemento finito qualquer do rotor, é possível calcular o trabalho virtual feito pelo desbalanceamento através da seguinte expressão:

$$\delta W = \int_0^l \left\{ \begin{array}{c} \delta V \\ \delta W \end{array} \right\}^T \langle e(s) \rangle m(s) \Omega^2 ds \quad (4.10)$$

$$\delta W = \Omega^2 \int_0^l \left\{ \begin{array}{c} \delta V \\ \delta W \end{array} \right\}^T m(s) \left[\langle e_c \rangle \cos \Omega t + \langle e_a \rangle \sin \Omega t \right] ds \quad (4.11)$$

Substituindo-se as funções de interpolação dos deslocamentos lineares em (4.11), obtém-se a expressão:

$$\delta W = \delta q_0^T \left[\Omega^2 \int_0^l \left[D(s) \right]^T m(s) \left[\langle e_c \rangle \cos \Omega t + \langle e_a \rangle \sin \Omega t \right] ds \right] \quad (4.12)$$

O vetor força de desbalanceamento do elemento finito de rotor pode ser escrito como:

$$\left\{ F^\circ \right\} = \left\{ F_c^\circ \right\} \cos \Omega t + \left\{ F_s^\circ \right\} \sin \Omega t \quad (4.13)$$

Supondo-se uma distribuição linear de desbalanceamento de massa ao longo do elemento finito, as excentricidades nas direções vertical y e horizontal z , medidas em um instante inicial t_0 , podem ser escritas como:

$$e_y = Y^\circ(s) = Y_E(1 - s/l) + Y_D(s/l) \quad (4.14)$$

$$e_z = Z^\circ(s) = Z_E(1 - s/l) + Z_D(s/l) \quad (4.15)$$

onde Y_E , Y_D , Z_E e Z_D são as excentricidades de massa nas extremidades esquerda e direita do elemento finito, nas direções y

e z, medidas na posição inicial do rotor.

O vetor força de desbalanceamento $\langle F^\circ \rangle$ para o elemento finito (Apêndice G) pode ser escrito em termos das excentricidades de massa $Y^\circ(s)$ e $Z^\circ(s)$ como:

$$\{ F^\circ \} = \int_0^l m \Omega^2 [D(s)]^T \left[\begin{Bmatrix} Y^\circ \\ Z^\circ \end{Bmatrix} \cos \Omega t + \begin{Bmatrix} -Z^\circ \\ Y^\circ \end{Bmatrix} \sin \Omega t \right] ds \quad (4.16)$$

4.2.5. RESPOSTA AO DESBALANCEAMENTO DISTRIBUÍDO

No cálculo da resposta desbalanceada gerada pelas excentricidades distribuídas ao longo do rotor, considera-se o trabalho virtual devido apenas ao vetor força de desbalanceamento. A parcela de auto-excitação, que representa o carregamento paramétrico gerado pela assimetria elástica do rotor, é desprezada. A equação global das vibrações forçadas devido ao desbalanceamento é obtida através da expressão (2.32), que descreve o movimento do rotor no sistema inercial de coordenadas:

$$([M] + [N])\langle \ddot{q} \rangle - \Omega [G]\langle \dot{q} \rangle + [Ks]\langle q \rangle = \langle Fc \rangle \cos \Omega t + \langle Fs \rangle \sin \Omega t \quad (4.17)$$

A solução da equação (4.17) consiste da solução homogênea $\langle q_h \rangle$ e da solução não homogênea $\langle q_i \rangle$, que surge por influência do desbalanceamento.

$$\langle q \rangle = \langle q_h \rangle + \langle q_i \rangle \quad (4.18)$$

Quando o eixo está em regime estável, os movimentos causados

por qualquer perturbação desaparecem com o tempo. A solução não homogênea do desbalanceamento é mantida mesmo em regime permanente.

Escrevendo-se o vetor excitação devido ao desbalanceamento na forma complexa como :

$$\langle F \rangle = \langle F_1 \rangle e^{i\Omega t} + \langle F_2 \rangle e^{-i\Omega t} \quad (4.19)$$

onde

$$\langle F_1 \rangle = (\langle F_c \rangle - i\langle F_s \rangle) / 2$$

$$\langle F_2 \rangle = (\langle F_c \rangle + i\langle F_s \rangle) / 2$$

Considerando-se que a solução estacionária para o problema tem a mesma forma complexa do vetor excitação:

$$\langle q \rangle = \langle q_1 \rangle e^{i\Omega t} + \langle q_2 \rangle e^{-i\Omega t} \quad (4.20)$$

e substituindo-se as expressões (4.19) e (4.20) na equação (4.17), obtém-se o sistema de equações algébricas complexas do desbalanceamento:

$$\left[-\Omega^2([M]+[N]) - i\Omega^2[G] + [Ks] \right] \langle q_1 \rangle = \langle F_1 \rangle \quad (4.21)$$

$$\left[-\Omega^2([M]+[N]) + i\Omega^2[G] + [Ks] \right] \langle q_2 \rangle = \langle F_2 \rangle \quad (4.22)$$

A solução do sistema de equações fornece $\langle q_1 \rangle$ e $\langle q_2 \rangle$, e a resposta ao desbalanceamento, em qualquer velocidade de rotação, pode ser obtida na seguinte forma:

$$\langle q \rangle = \langle q_c \rangle \cos \Omega t + \langle q_a \rangle \sin \Omega t \quad (4.23)$$

onde

$$\langle q_c \rangle = \langle q_1 \rangle + \langle q_2 \rangle$$

$$\langle q_a \rangle = \langle q_1 \rangle i - \langle q_2 \rangle i$$

No procedimento numérico de solução do sistema de equações, primeiramente efetua-se a compactação modal das matrizes através da matriz dos primeiros autovetores obtidos do problema de frequências naturais (3.2). Obtida a resposta em coordenadas modais, retorna-se ao sistema original de coordenadas utilizando-se a mesma matriz dos autovetores.

4.3. BALANCEAMENTO DE ROTORES FLEXÍVEIS

Descreve-se nessa seção a formulação da metodologia empregada para o balanceamento de rotores flexíveis. As duas técnicas de balanceamento de rotores flexíveis utilizadas na prática são o método dos coeficientes de influência e o balanceamento modal. Utiliza-se, aqui, o método dos coeficientes de influência pela sua facilidade de implementação e por não ser necessário um modelo analítico na descrição do sistema. A análise de sensibilidade da resposta desbalanceada à variação de massa é efetuada com o objetivo de estabelecer critérios de seleção dos planos de colocação das massas balanceadoras.

4.3.1. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DA RESPOSTA AO DESBALANCEAMENTO

A análise de sensibilidade da resposta desbalanceada é desenvolvida em relação à realocação das posições radiais das massas dos parafusos relativas à linha de centro do eixo. Por variação de massa, para rotores de turboalternadores de dois pólos, se entende variação da posição radial das massas dos parafusos.

Como já foi dito na seção 2.2., os rotores de turboalternadores de dois pólos possuem diversos parafusos distribuídos ao longo de seu comprimento para possibilitar o processo de balanceamento. O balanceamento é efetuado sem retirada ou colocação de massa no sistema, ou seja, sem variação na inércia do rotor. Para balancear o rotor, processa-se a realocação das posições radiais dos parafusos de tal maneira a compensar as forças centrífugas geradas pelo desbalanceamento. Com a mudança da posição radial dos parafusos, está se alterando o vetor excitação devido ao desbalanceamento.

Deseja-se conhecer, dentre um conjunto de seções transversais do rotor, aquelas de maior sensibilidade da estrutura à variação de massa, em cada velocidade selecionada. Um vetor excitação unitário é aplicado em um nó determinado do modelo, ou seja, acrescenta-se o valor de força unitária aos dois termos do vetor excitação do desbalanceamento (Apêndice G) que estão associados com os graus de liberdade dos deslocamentos transversais lineares deste nó, e obtém-se o novo vetor excitação $\langle F^* \rangle$ do rotor. A nova

equação global das vibrações forçadas é similar à expressão (4.17):

$$([M]+[N])\langle\ddot{q}\rangle - \Omega[G]\langle\dot{q}\rangle + [Ks]\langle q\rangle = \langle F^* \rangle \quad (4.24)$$

onde $\langle F^* \rangle$ é o novo vetor excitação.

Calcula-se, em cada velocidade selecionada, a nova resposta desbalanceada do rotor, com a força unitária no nó, e efetua-se a comparação deste novo valor com a resposta desbalanceada original obtida através do sistema de equações (4.21) e (4.22). Em cada rotação de interesse, repete-se o procedimento para todos os nós do modelo e levantam-se os pontos da estrutura que sofrem maior variação da resposta desbalanceada. Os nós mais sensíveis são potencialmente mais efetivos para a realocação das massas dos parafusos, na faixa de velocidades selecionadas para o balanceamento.

Para outros tipos de rotores flexíveis, onde o balanceamento é efetuado através da retirada ou da colocação de massa no sistema, deve ser implementada a análise de sensibilidade da resposta desbalanceada em relação à variação do valor de massa do rotor (Apêndice I). Neste caso, uma massa unitária é adicionada em um nó determinado do modelo, ou seja, a modificação nos coeficientes da equação global do movimento é efetuada na matriz inercial do rotor e não no vetor excitação.

4.3.2. METODOLOGIA DE BALANCEAMENTO

Os requisitos iniciais para o processo de balanceamento são a

definição de um número p de planos de medida da resposta desbalanceada, a escolha de um número n de planos de balanceamento e a seleção de um número k de velocidades de rotação. A escolha dos planos de colocação das massas balanceadoras é feita utilizando os resultados da análise de sensibilidade da resposta desbalanceada à variação de massa.

A primeira etapa do método empregado consiste na determinação dos coeficientes de influência para cada velocidade selecionada Ω_s ($s=1, k$). Para tanto, inicialmente se calcula a resposta ao desbalanceamento nos planos de medida. O passo seguinte é a colocação das massas de teste nos planos de balanceamento para a obtenção da nova resposta desbalanceada, nos planos de medida, gerada pelo desbalanceamento distribuído e pela massa acrescida. Os coeficientes de influência são determinados apenas para os dois graus de liberdade associados com os deslocamentos transversais lineares.

Definindo-se $\langle A_{ij} \rangle$ como o coeficiente de influência complexo, para uma velocidade Ω_s qualquer, pode-se escrever que:

$$\langle A_{ij} \rangle = \frac{\langle q_{ij} \rangle - \langle q_i \rangle}{\langle m_j \rangle} \quad (4.25)$$

onde: $\langle q_i \rangle$ é a resposta complexa ao desbalanceamento distribuído no plano de medida i ($i=1, p$); $\langle m_j \rangle$ é a massa de teste complexa, ou seja, uma massa m_j colocada no plano de balanceamento j ($j=1, n$) com um certo ângulo de fase em relação ao sistema de referência solidário ao eixo; e $\langle q_{ij} \rangle$ é a nova resposta desbalanceada complexa, gerada pelo desbalanceamento distribuído em conjunto com

a massa de teste m_j , medida no plano i . O coeficiente de influência é definido como sendo o valor complexo que fornece a amplitude de vibração no ponto i , devido a uma massa unitária colocada em fase nula no plano de balanceamento j .

Para se calcular a nova resposta desbalanceada $\langle q_{ij} \rangle$, torna-se necessário determinar um novo vetor excitação somente da massa de teste (Apêndice H). Este novo vetor é acrescido ao vetor excitação do desbalanceamento distribuído para se obter a nova resposta.

Variando-se os planos de medida p e os planos de balanceamento n , determinam-se todos os coeficientes de influência $\langle A_{ij} \rangle$ para uma determinada velocidade Ω_s . Definindo-se a matriz complexa dos coeficientes de influência como $[C_{ij}]$, escreve-se que:

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} \langle A_{11} \rangle & \langle A_{12} \rangle & \dots & \dots & \dots & \langle A_{1n} \rangle \\ \langle A_{21} \rangle & \langle A_{22} \rangle & \dots & \dots & \dots & \langle A_{2n} \rangle \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \langle A_{p1} \rangle & \langle A_{p2} \rangle & \dots & \dots & \dots & \langle A_{pn} \rangle \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Determinados os coeficientes de influência, o problema passa a ser a determinação das massas balanceadoras M_j que reduzam as vibrações, tal que seja satisfeita a seguinte condição:

$$\langle q_i \rangle + [C_{ij}] \langle M_j \rangle = \langle 0 \rangle \quad (4.27)$$

onde o vetor $\langle M_j \rangle$ representa as massas balanceadoras complexas nos planos de balanceamento e pode ser escrito como:

$$\langle M_j \rangle^T = \left[\langle M_1 \rangle \langle M_2 \rangle \dots \dots \dots \langle M_n \rangle \right] \quad (4.28)$$

Se o número de planos de balanceamento coincidir com o número de planos de medida ($n=p$), ou seja, a matriz $[C_{ij}]$ for quadrada, a equação (4.27) permite retirar os valores de massa $\langle M_j \rangle$ que reduzam as vibrações, em uma determinada velocidade.

Os coeficientes de influência C_{ij} e a resposta desbalanceada $\langle q_i \rangle$ são funções da velocidade angular. Ao se variar a velocidade de rotação do rotor, ocorrerá variação na contribuição dos vários modos excitados pelo desbalanceamento.

Balancear o rotor para um número k de velocidades significa impor conjuntamente as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \langle q_i(\Omega_1) \rangle + [C_{ij}(\Omega_1)] \langle M_j \rangle &= \langle 0 \rangle \\ \langle q_i(\Omega_2) \rangle + [C_{ij}(\Omega_2)] \langle M_j \rangle &= \langle 0 \rangle \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \langle q_i(\Omega_k) \rangle + [C_{ij}(\Omega_k)] \langle M_j \rangle &= \langle 0 \rangle \end{aligned} \quad (4.29)$$

As massas balanceadoras não anulam totalmente as vibrações causadas pelo desbalanceamento do rotor, mas podem limitá-las. Há sempre, nas várias velocidades de funcionamento, vibrações

residuais. Deseja-se, agora, minimizar essas vibrações residuais e, para tal intento, utiliza-se o método dos mínimos quadrados na determinação das massas balanceadoras.

Definindo-se um novo vetor $\langle W \rangle$, que é o vetor das respostas ao desbalanceamento para todas as velocidades, e uma matriz retangular $[\bar{C}]$, que tem como submatrizes as matrizes dos coeficientes de influência nas várias velocidades, reescreve-se o sistema (4.29) na seguinte forma:

$$\langle W \rangle + [\bar{C}]\langle M_j \rangle = \langle W_r \rangle \quad (4.30)$$

onde $\langle W_r \rangle$ é o vetor das vibrações residuais nas várias velocidades. $\langle W \rangle$ e $[\bar{C}]$ são escritos como:

$$\langle W \rangle = \begin{bmatrix} q_i(\Omega_1) \\ q_i(\Omega_2) \\ \vdots \\ q_i(\Omega_k) \end{bmatrix} \quad e \quad [\bar{C}] = \begin{bmatrix} C_{ij}(\Omega_1) \\ C_{ij}(\Omega_2) \\ \vdots \\ C_{ij}(\Omega_k) \end{bmatrix}$$

A matriz $[\bar{C}]$ será quadrada se $k_p = n$.

As massas balanceadoras $\langle M_j \rangle$ são calculadas tal que se encontrem os mínimos das vibrações residuais $\langle W_r \rangle$. Minimiza-se a soma dos quadrados das vibrações residuais, ou seja, impõe-se que:

$$\langle W_r \rangle^T \langle W_r \rangle = \text{Min} \quad (4.31)$$

Substituindo-se (4.30) em (4.31), tem-se que:

$$\text{Min} = \left[\langle W \rangle + [\bar{C}] \langle M_j \rangle \right]^T \left[\langle W \rangle + [\bar{C}] \langle M_j \rangle \right] \quad (4.32)$$

É possível se definir o vetor $\langle M_j \rangle$ através da condição estacionária:

$$\frac{\partial}{\partial \langle M_j \rangle} \left[\text{Min} \right] = 0 \quad (4.33)$$

Obtém-se, assim, o sistema final de equações para determinação das massas balanceadoras a serem adicionadas nos planos de balanceamento do rotor:

$$[\bar{C}]^T [\bar{C}] \langle M_j \rangle = - [\bar{C}] \langle W \rangle \quad (4.34)$$

O sistema matricial (4.34) permite pois determinar o vetor $\langle M_j \rangle$, única incógnita nas equações, que minimiza as vibrações nos p planos de medida para as k velocidades prescritas. Enfatiza-se que o comportamento das vibrações na velocidade de regime tem uma importância maior em relação a outras velocidades intermediárias.

4.3.3. PARÂMETROS PARA O BALANCEAMENTO

Geralmente, as medidas das vibrações em rotores são feitas em dois planos, onde os mancais estão localizados. Teoricamente, a instalação de mais pontos de medida ao longo do rotor seria de grande facilidade. Mas, na prática, os mancais são os locais onde os medidores de vibração podem ser instalados sem dificuldade e a baixo custo.

Drechsler [34] apresentou algumas considerações importantes sobre a seleção dos parâmetros iniciais no método dos coeficientes de influência. Quando se utilizam planos de medida somente nos mancais, as amplitudes das vibrações, nesses mancais, são algumas vezes minimizadas, mas, em outros pontos do rotor, os níveis de vibração podem ser elevados. Isto pode ser observado quando o número de planos de balanceamento n é menor que $(p+2)$, para a faixa de velocidades de interesse. Se mais planos de colocação de massas são introduzidos, uma pequena vibração residual nos mancais automaticamente implica pequenos níveis de vibração ao longo do rotor. Mas a introdução de mais planos de balanceamento (número maior que p) pode produzir sistemas de equações mal condicionados, que são mais sensíveis às variações das medidas de vibrações.

A solução do sistema de equações (4.34) não é única, ou seja, podem existir diferentes soluções para as massas balanceadoras do problema. Com isso, a matriz $[\bar{C}]$ dos coeficientes de influência pode possuir linhas ou colunas linearmente dependentes, o que provoca o mau condicionamento do sistema de equações. Portanto, a seleção dos parâmetros para o balanceamento deve merecer tratamento meticuloso e, por isso, a análise de sensibilidade da resposta desbalanceada se torna um instrumento importante na escolha dos planos de balanceamento.

Selecionam-se as velocidades de balanceamento na vizinhança da velocidade em que se deseja balancear o rotor. As velocidades críticas, abaixo e próximas da velocidade de rotação nominal do rotor, devem merecer atenção especial no processo de balanceamento.

Quando um modo de vibração possui maior importância no

processo de balanceamento, atribui-se peso maior na sua minimização em relação a outras velocidades. Para tanto, repetem-se mais vezes os valores de $q_i(\Omega_k)$ e $C_{ij}(\Omega_k)$ associados com tal modo na obtenção da matriz $[\bar{C}]$ e do vetor $\langle W \rangle$.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS E ANÁLISE

5.1. INTRODUÇÃO

Alguns resultados são apresentados para um rotor flexível assimétrico, cujas características e propriedades foram apresentadas por Childs [47].

Diferentes procedimentos numéricos, para solução dos problemas de autovalor e dos sistemas de equações complexas, estão contidos no programa computacional utilizado. O programa, desenvolvido em linguagem FORTRAN, possui as seguintes opções de cálculo : 1) Velocidades críticas médias síncronas; 2) Velocidades críticas médias dobradas por rotação; 3) Frequências naturais médias para rotação nula; 4) Frequências naturais médias em uma rotação qualquer; 5) Resposta a um desbalanceamento distribuído; 6) Análise de sensibilidade da resposta desbalanceada; 7) Massas balanceadoras.

Para exposição dos resultados obtidos e de sua análise, o presente capítulo apresenta um exemplo de rotor de turbogerador. Os resultados podem ser divididos em duas etapas: 1) Velocidades críticas e 2) Balanceamento.

5.2. EXEMPLO

Modela-se um rotor com dimensões nominais de um alternador de dois pólos de 500 MW. O rotor está apoiado em suas

extremidades por dois mancais elásticos sem amortecimento.

Os dados do modelo são apresentados:

DADOS DO ROTOR

$$E I_y = 1,4835 \cdot 10^{10} \text{ N.m}^2$$

$$E I_z = 1,3422 \cdot 10^{10} \text{ N.m}^2$$

$$\text{Comprimento} = L = 11,115 \text{ m}$$

$$\text{Diâmetro nominal} = D_{\text{nom}} = 1,07 \text{ m}$$

$$\text{Velocidade nominal} = 3600 \text{ rpm (60 Hz)}$$

RIGIDEZ DE MANCAL

$$K_{yy} = K_{zz} = 2,63 \cdot 10^{10} \text{ N/m}$$

5.2.1. VELOCIDADES CRITICAS

Na Tabela 1, comparam-se os resultados para frequências naturais médias com rotação nula fornecidos pela referência [47] com os valores calculados pelo programa. Foram obtidas as frequências para modelos de elementos finitos (MEF) com 4, 10 e 30 elementos. Os valores calculados para os modelos de 4, 10 e 30 elementos apresentaram um desvio médio em relação aos valores fornecidos por [47] de 2,2%, 1,0% e 1,2%, respectivamente. Os resultados apresentados por Childs [47] foram obtidos para um rotor modelado com 21 massas concentradas interconectadas por elementos elásticos de viga sem massa, apoiado em mancais elásticos, através de uma formulação modal.

Constata-se que os modelos de elementos finitos discretizados com poucos elementos apresentaram bons resultados para as primeiras frequências naturais. Quando se deseja obter a frequência crítica de um modo de vibração elevado, é necessário a

utilização de um número maior de elementos finitos no modelo, de tal maneira que se consiga representar o modo desejado.

Tabela 1 - Resultados Comparados de Frequências Naturais para rotação nula (em Hz).

| Freq. | Ref. [47] | MEF4 | MEF10 | MEF30 |
|----------------|-----------|---------|---------|---------|
| 1 ^a | 17,712 | 18,068 | 18,057 | 18,056 |
| 2 ^a | 68,045 | 69,129 | 68,557 | 68,491 |
| 3 ^a | 143,727 | 148,089 | 142,914 | 142,332 |

A Tabela 2 mostra os valores calculados para as três primeiras velocidades críticas médias regressivas (RCR) e progressivas (RCP). Apresentam-se as velocidades síncronas e dobradas por rotação, para o rotor do exemplo, modelado com 10 elementos.

Tabela 2 - Velocidades Críticas em Hz.

| RCP ($\lambda=+1$) | RCR ($\lambda=-1$) | RCP ($\lambda=+1/2$) | RCR ($\lambda=-1/2$) |
|-------------------------|-------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 17,988 | 17,957 | 18,107 | 18,007 |
| 67,703 | 67,326 | 69,195 | 67,935 |
| 139,919 | 138,589 | 145,189 | 140,714 |

Concluindo a apresentação dos resultados obtidos para os problemas de autovalor de rotores flexíveis assimétricos, a Tabela 3 mostra os valores das frequências naturais para várias rotações do rotor. São apresentadas as frequências naturais médias regressivas (R) e progressivas (P) para nove velocidades de rotação, obtidas para o rotor modelado com 30 elementos.

Tabela 3 - Frequências naturais para uma dada rotação.

| rotação (rpm) | Frequências naturais (Hz) | | | | | |
|------------------|---------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| | 1 ^o (R) | 1 ^o (P) | 2 ^o (R) | 2 ^o (P) | 3 ^o (R) | 3 ^o (P) |
| 500 | 18,037 | 18,074 | 68,430 | 68,552 | 142,229 | 142,434 |
| 1000 | 18,019 | 18,093 | 68,370 | 68,613 | 142,126 | 142,537 |
| 1500 | 18,000 | 18,111 | 68,309 | 68,674 | 142,024 | 142,640 |
| 2000 | 17,982 | 18,130 | 68,249 | 68,735 | 141,922 | 142,743 |
| 2500 | 17,963 | 18,148 | 68,188 | 68,796 | 141,819 | 142,284 |
| 3000 | 17,945 | 18,167 | 68,127 | 68,857 | 141,717 | 142,948 |
| 3500 | 17,927 | 18,185 | 68,067 | 68,918 | 141,615 | 143,052 |
| 4000 | 17,908 | 18,204 | 68,007 | 68,979 | 141,513 | 143,155 |
| 4500 | 17,890 | 18,223 | 67,946 | 69,040 | 141,411 | 143,258 |

Vale salientar que, na literatura pesquisada, não foram encontrados exemplos com modelos de turbogeradores para comparação. A obtenção de dados, relativos a propriedades geométricas e constitutivas de rotores flexíveis assimétricos, é quase impossível na vasta bibliografia existente sobre o tema.

5.2.2. BALANCEAMENTO

No estudo da metodologia de balanceamento, o rotor foi modelado com 30 elementos e considerou-se uma certa distribuição de excentricidades ao longo de seu comprimento, que está mostrada na Tabela 4.

Na realidade, a distribuição de excentricidades de massa de um rotor não é conhecida e nem determinada. O método dos coeficientes de influência, assim como as outras metodologias de balanceamento, é um procedimento experimental. Os valores das respostas ao desbalanceamento são medidos diretamente de uma

instalação de rotor. Como este trabalho se preocupa apenas com o desenvolvimento da formulação numérica para rotores flexíveis, utiliza-se uma certa distribuição de excentricidades para simular um caso real de rotor desbalanceado. Dessa forma, é possível implementar numericamente a metodologia de balanceamento.

Para que a rotina numérica desenvolvida no trabalho seja utilizada efetivamente no balanceamento de rotores, deve ser implementado, conjuntamente, um procedimento analítico-experimental de identificação de parâmetros para ajustar o modelo a medida que se processam as alterações na estrutura.

Tabela 4 - Distribuição de excentricidades (m).

| Nó | Eixo Y | Eixo Z |
|----|------------|------------|
| 1 | 0,00 | 0,0 |
| 2 | 0,00001 | -0,00001 |
| 3 | -0,0000002 | 0,0 |
| 4 | -0,0000001 | -0,0000001 |
| 5 | -0,0000001 | -0,0000002 |
| 6 | -0,00001 | 0,00001 |
| 7 | -0,0000002 | 0,0000002 |
| 8 | -0,0000005 | 0,0000005 |
| 9 | -0,000001 | 0,000001 |
| 10 | -0,000001 | 0,000002 |
| 11 | 0,00 | 0,000001 |
| 12 | 0,00001 | 0,00002 |
| 13 | 0,0000002 | 0,0000002 |
| 14 | 0,0000009 | 0,0000005 |
| 15 | 0,000001 | 0,000001 |
| 16 | 0,000002 | 0,000002 |
| 17 | 0,000003 | 0,000001 |
| 18 | 0,000002 | 0,0 |
| 19 | 0,000002 | -0,0000001 |
| 20 | 0,00002 | -0,00001 |
| 21 | 0,000002 | -0,000002 |
| 22 | 0,000002 | -0,000002 |
| 23 | 0,0000009 | -0,000002 |
| 24 | 0,0000005 | -0,0000005 |
| 25 | 0,0000001 | -0,0000004 |
| 26 | 0,0 | -0,0000001 |
| 27 | 0,0 | -0,000001 |
| 28 | 0,0 | -0,000002 |
| 29 | 0,000001 | -0,000001 |
| 30 | 0,00001 | -0,00001 |
| 31 | 0,0 | 0,0 |

5.2.2.1. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Foi efetuada a análise de sensibilidade da resposta ao desbalanceamento em todos os nós do modelo. As seções transversais mais sensíveis à variação do vetor excitação do rotor foram identificadas para a faixa de velocidades que compreende a primeira e a segunda velocidades críticas. As Figuras 5.1, 5.2 e 5.3 mostram as curvas que relacionam a sensibilidade da resposta desbalanceada do rotor com o nó do modelo onde foi aplicada a força unitária, para os mancais esquerdo (nó 1) e direito (nó 31) do modelo de 30 elementos.

Na faixa de velocidades próximas à primeira frequência crítica, o ponto de maior sensibilidade se encontrou em torno do nó 16. A figura 5.1 mostra as curvas de sensibilidade da resposta desbalanceada do rotor medida nos mancais direito e esquerdo, na velocidade de 1100 rpm. A linha contínua fornece a curva de sensibilidade para o mancal esquerdo do modelo, enquanto a linha tracejada dá a curva para o mancal direito.

Entre a primeira velocidade crítica e a segunda, as seções mais sensíveis vão mudando de posição. A figura 5.2 mostra as curvas de sensibilidade para os mancais esquerdo e direito, na velocidade de 3600 rpm. A linha contínua está associada com o mancal esquerdo e a linha tracejada está relacionada com o mancal direito.

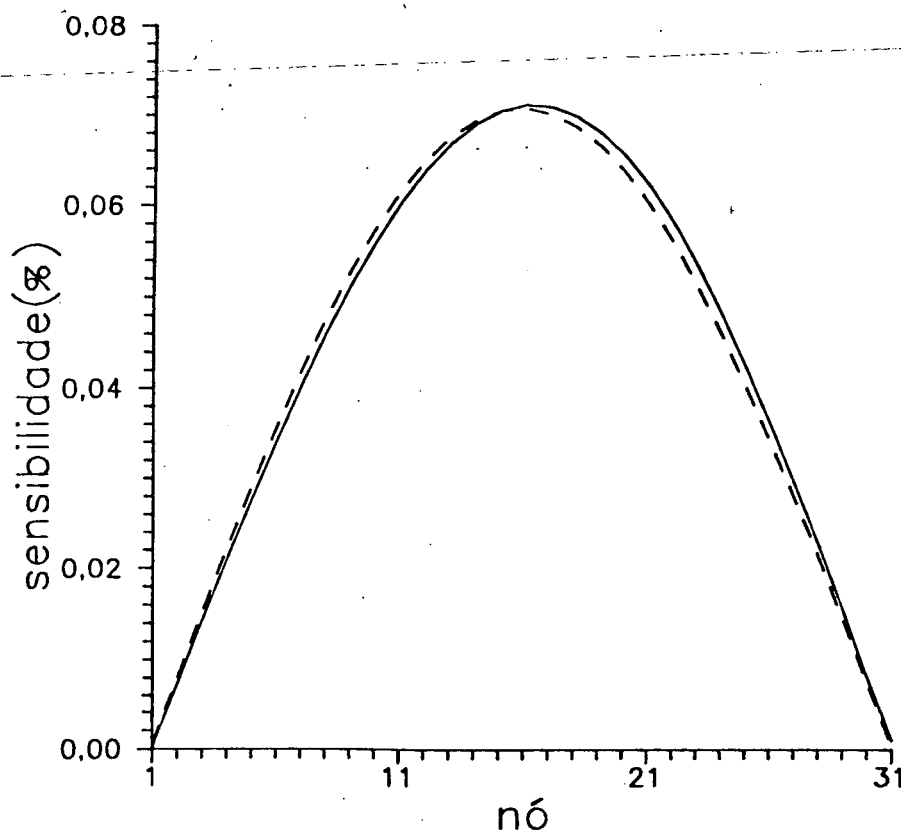


Figura 5.1 - Curvas de sensibilidade da resposta desbalanceada do rotor à variação de massa, na velocidade de 1100 rpm. A linha contínua é a curva para o mancal esquerdo e a linha tracejada é a curva para o mancal direito.

Na faixa de velocidades próximas à segunda velocidade crítica, as seções mais sensíveis se localizaram nos nós 8 e 24. A figura 5.3 mostra as curvas de sensibilidade para os mancais esquerdo e direito, na velocidade de 4200 rpm. Aqui, a linha contínua também está associada ao mancal esquerdo e a linha tracejada ao mancal direito.

A explicação para a diferença, constatada pelas figuras 5.1, 5.2 e 5.3, de sensibilidade entre os mancais esquerdo e direito está na distribuição não simétrica de excentricidades ao longo do comprimento do rotor. Axialmente, as forças centrífugas geradas pelo desbalanceamento distribuído não possuem simetria.

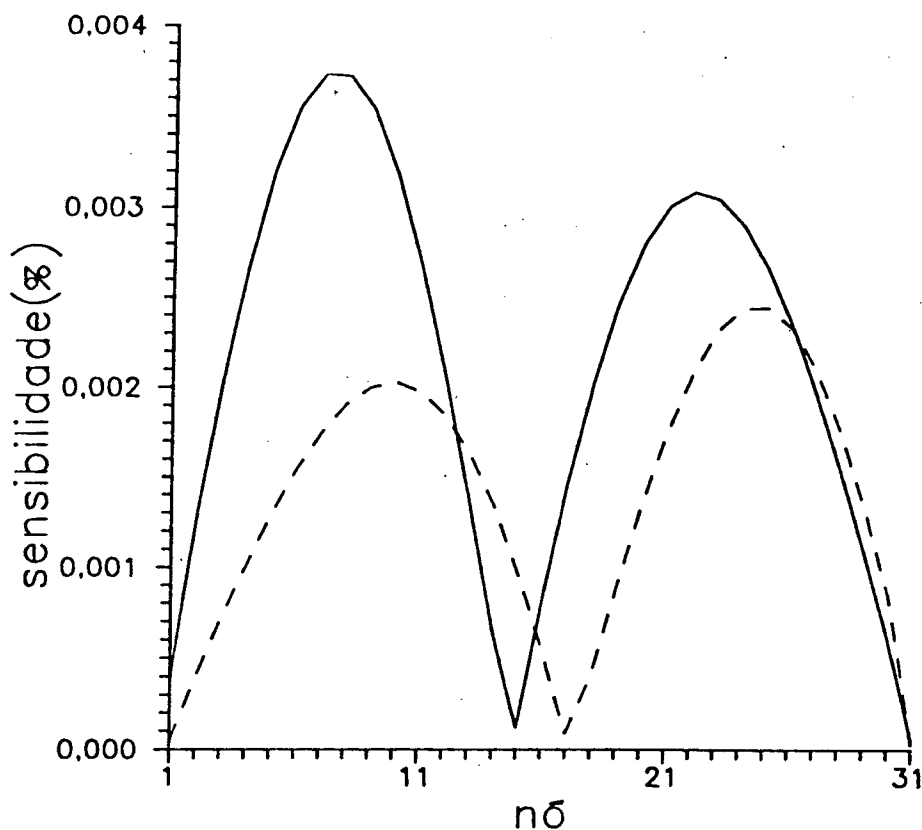


Figura 5.2 - Curvas de sensibilidade da resposta desbalanceada do rotor à variação de massa, na velocidade de 3600 rpm. A linha contínua é a curva para o mancal esquerdo e a linha tracejada é a curva para o mancal direito.

Sintetizando os resultados mostrados pelas curvas de sensibilidade, a Tabela 5 apresenta a localização das seções mais sensíveis do rotor nas três velocidades analisadas.

Tabela 5 - Pontos de maior sensibilidade.

| rotação (rpm) | Nós mais sensíveis |
|---------------|--------------------|
| 1100 | 15,16 |
| 3600 | 7,8,22,23 |
| 4200 | 8,24 |

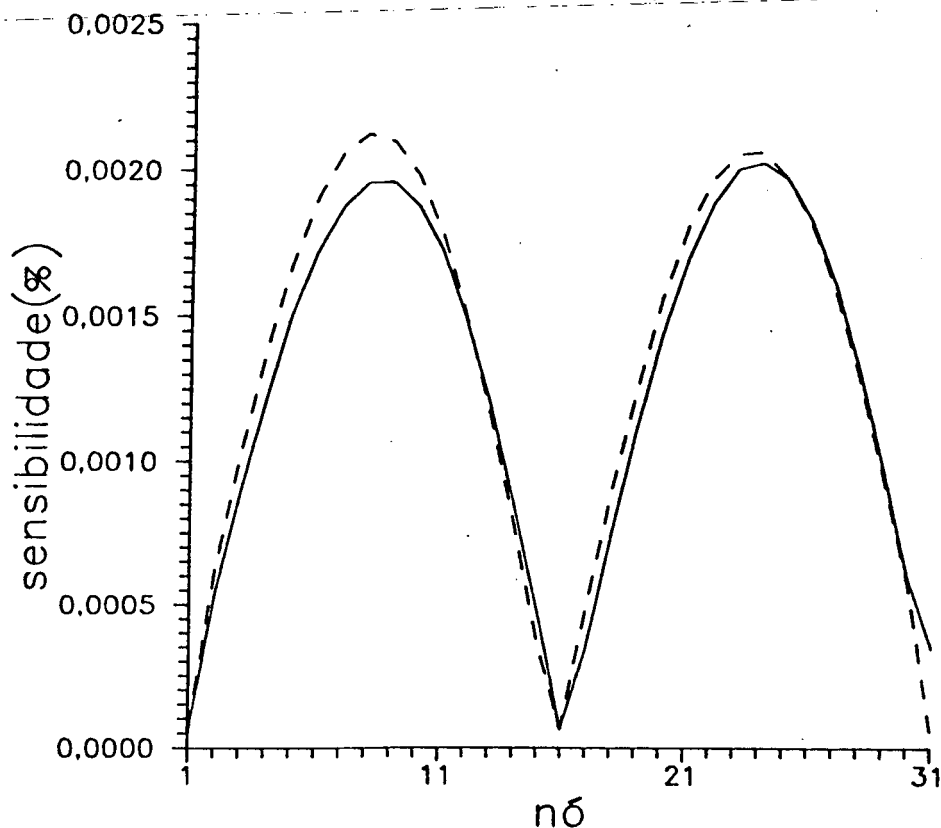


Figura 5.3 - Curvas de sensibilidade da resposta desbalanceada do rotor à variação de massa, na velocidade de 4200 rpm. A linha contínua é a curva para o mancal esquerdo e a linha tracejada é a curva para o mancal direito.

5.2.2.2. MASSAS BALANCEADORAS

Diversos exemplos, com diferentes parâmetros selecionados para o balanceamento, foram testados. Utilizaram-se somente dois planos de medida das vibrações, que foram colocados sobre os mancais do rotor. Dependendo dos parâmetros iniciais escolhidos, o sistema de equações para determinação das massas balanceadoras pode se tornar mal condicionado. Em vários exemplos testados, as massas balanceadoras calculadas não geraram um bom balanceamento. Em outros exemplos, o conjunto de massas de correção do desbalanceamento propiciou bons resultados. Neste

trabalho, não foi efetuado um estudo minucioso sobre a influência dos parâmetros iniciais do balanceamento na determinação das massas balanceadoras. Pode-se afirmar que a análise de sensibilidade da resposta desbalanceada à variação de massa se apresentou como um instrumento criterioso na seleção dos planos de balanceamento.

Dentre os exemplos testados, que geraram bons resultados para o balanceamento, foram selecionados dois casos para apresentação no trabalho. Em cada caso, preocupou-se em efetuar o cálculo das massas de correção do desbalanceamento nas velocidades próximas às duas primeiras velocidades críticas.

As massas balanceadoras do primeiro exemplo foram obtidas para dois planos de balanceamento. Apenas a velocidade de 1100 rpm foi selecionada para o cálculo das massas e os nós 15 e 16 receberam os planos de colocação dessas massas. Neste primeiro exemplo, as massas balanceadoras (Tabela 6) foram calculadas utilizando-se somente o primeiro modo de vibração do rotor.

Tabela 6 - Massas balanceadoras para dois planos de balanceamento.

| Nó | Massa (kg.m) | Fase (rad) |
|----|--------------|------------|
| 15 | 0,632842 | 2,604 |
| 16 | 0,656431 | -0,686 |

No segundo exemplo, as massas foram calculadas para três planos de balanceamento. Os nós 8, 16 e 24 receberam os planos de colocação das massas e as velocidades de 4100 rpm e 4200 rpm foram selecionadas para o cálculo dessas massas. A obtenção das massas (Tabela 7), neste segundo exemplo, foi realizada utilizando-se somente o segundo modo de vibração do rotor.

Tabela 7 - Massas balanceadoras para três planos de balanceamento.

| Nó | Massa (kg.m) | Fase (rad) |
|----|--------------|------------|
| 8 | 0,058036 | 2,860 |
| 16 | 0,079292 | -1,998 |
| 24 | 0,074463 | -0,735 |

Para os dois exemplos, foi realizada a verificação da nova resposta desbalanceada do rotor com as massas de correção. A Figura 5.4 apresenta as curvas que mostram a relação entre a amplitude de vibração, medida em um plano colocado sobre o mancal esquerdo (nó 1), e a rotação. Já a Figura 5.5 apresenta as mesmas curvas para o plano de medida colocado sobre o mancal direito (nó 31). O eixo vertical dos gráficos está em escala logarítmica para permitir melhor visualização do comportamento das curvas.

Pode ser verificado que, para os exemplos apresentados, as massas balanceadoras obtidas propiciaram um balanceamento eficiente, em toda a faixa de velocidades que abrange as duas primeiras velocidades críticas.

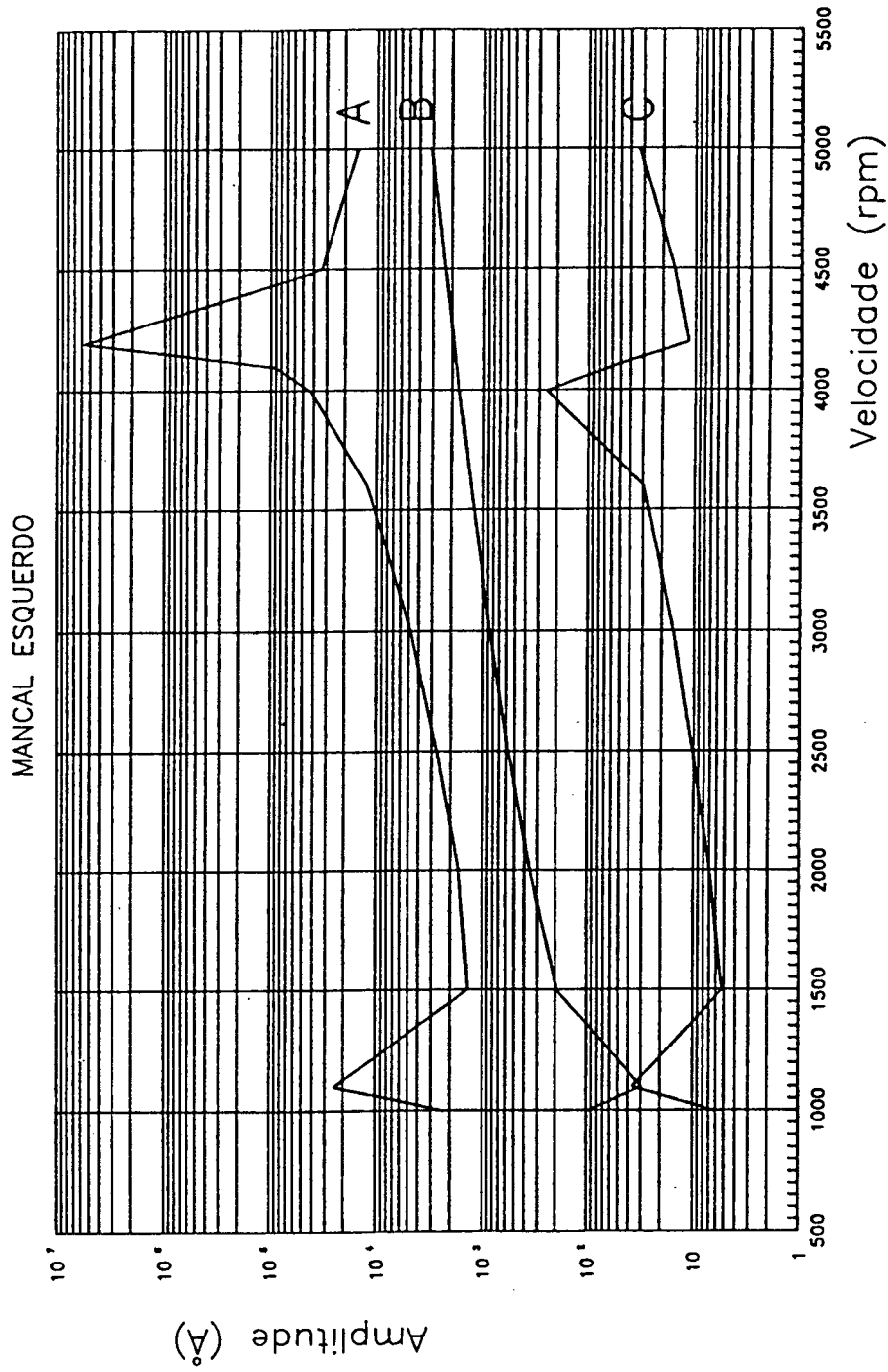


Figura 5.4 - Verificação do balanceamento do rotor. A curva A representa a resposta desbalanceada original. A curva B é a resposta para 2 planos de balanceamento. A curva C mostra a resposta para 3 planos de balanceamento.

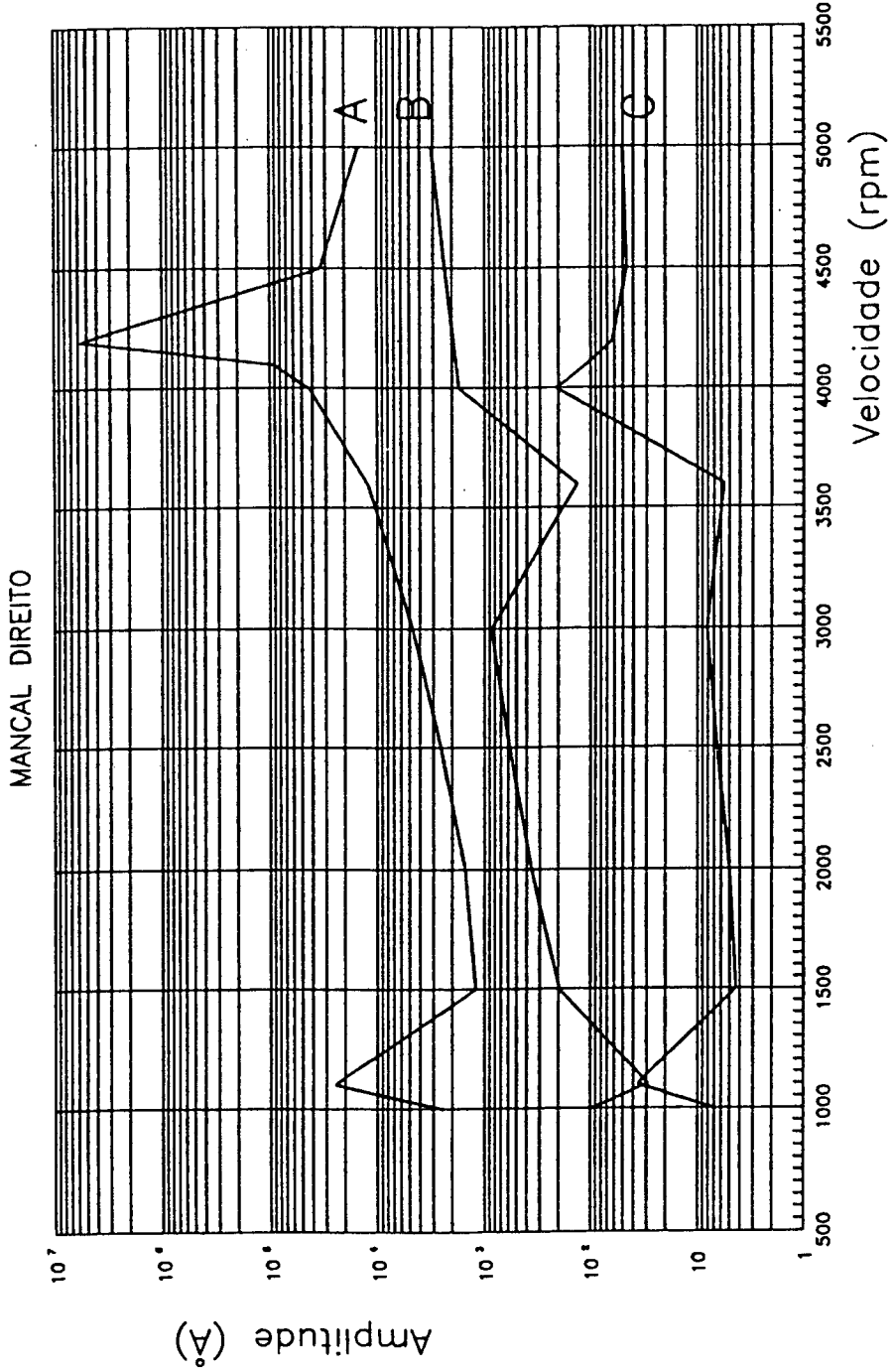


Figura 5.5 - Verificação do balanceamento do rotor. A curva A mostra a resposta desbalanceada original. A curva B apresenta a resposta para 2 planos de balanceamento. A curva C é a resposta para 3 planos de balanceamento.

CAPITULO 6

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O presente trabalho apresentou o estudo de alguns aspectos do comportamento dinâmico de rotores de turbogeradores através do método de elementos finitos.

A motivação principal do trabalho foi fornecer uma ferramenta de análise para rotores flexíveis assimétricos, que permitisse identificar comportamentos característicos e prever mudanças estruturais durante as etapas preliminares de projeto.

O modelo utilizado no trabalho inclui os elementos finitos baseados na teoria de vigas de Timoshenko e elementos elásticos discretos de mancais. A inclusão do cisalhamento no modelo é feita através da hipótese simplificativa de considerar a seção transversal do rotor aproximadamente circular, o que torna possível o cálculo dos coeficientes de cisalhamento. Nenhum tipo de amortecimento é considerado no sistema e o modelo se presta bem para representar rotores de turbogeradores de dois pólos.

O trabalho pode ser dividido em duas partes: estabilidade e balanceamento. Os problemas de autovalor que permitem obter os valores das frequências naturais e das velocidades críticas representam os aspectos analisados da estabilidade de rotores. A determinação das massas balanceadoras e da resposta de rotores desbalanceados e a análise de sensibilidade dessa resposta constituem os aspectos analisados do balanceamento.

Na primeira parte do trabalho, utilizaram-se algoritmos computacionais para a solução dos problemas de autovalor de

sistemas giroscópicos não amortecidos. As frequências naturais e as velocidades críticas podem ser determinadas com boa precisão.

Na segunda parte do trabalho, os sistemas de equações complexas foram resolvidos através de algoritmos computacionais já existentes. Consegue-se calcular a resposta a um desbalanceamento distribuído ao longo do comprimento do rotor. A análise de sensibilidade da resposta desbalanceada à variação de massa foi implementada como um critério na seleção de parâmetros para o balanceamento. O método dos coeficientes de influência se apresentou como uma metodologia eficiente no balanceamento de rotores flexíveis.

Apesar das simplificações e limitações da formulação, os resultados alcançados com o modelo foram satisfatórios. Vale salientar que a modelagem completa do problema dinâmico de rotores de turbogeradores ainda enfrenta grandes dificuldades. A inclusão, nos modelos numéricos, dos problemas de mancais de deslizamento, das vibrações induzidas por fluxo, das oscilações eletromagnéticas e da estrutura de suporte depende da eficiência do processo de identificação de parâmetros e do desenvolvimento de modelos analíticos que descrevam precisamente as variáveis envolvidas.

Inúmeras sugestões para melhorar o modelo desenvolvido neste trabalho e para ampliar os estudos dos aspectos da dinâmica de rotores flexíveis assimétricos podem ser apresentadas. Algumas melhorias computacionais no programa podem ser efetuadas visando o aperfeiçoamento dos procedimentos de cálculo, como, por exemplo, na análise de sensibilidade e na verificação do balanceamento, e a apresentação de resultados através de recursos gráficos.

Modificações no modelo utilizado no trabalho podem ampliar seu raio de aplicação. Uma primeira modificação significativa estaria na introdução de um elemento discreto de mancal mais abrangente. A implementação no programa de um elemento de mancal anisotrópico amortecido permitiria a análise dos vários casos de apoios em rotores flexíveis. Em diversos tipos de rotores, sob determinadas condições de operação, um elemento de mancal ortotrópico, com ou sem amortecimento, representa um qualitativo avanço no modelo.

Uma segunda alteração significativa estaria na inclusão do amortecimento interno, viscoso e histerético, na formulação. Os sistemas giroscópicos amortecidos possuem autovalores complexos. Poder-se-ia, então, implementar o estudo da influência do amortecimento interno sobre a estabilidade de rotores flexíveis.

É importante reafirmar que os estudos efetuados neste trabalho compreendem apenas uma pequena parcela dos fenômenos associados com rotores flexíveis assimétricos. Estudos de outros aspectos podem propiciar muitas linhas de trabalhos. O problema da instabilidade induzida pelo filme lubrificante, em rotores apoiados em mancais hidrodinâmicos, e o problema da instabilidade paramétrica gerada pela assimetria elástica de sistemas rotor-mancal constituem duas importantes áreas de pesquisas.

A rotina de balanceamento foi implementada considerando-se uma distribuição de excentricidades de massa ao longo do rotor. Para que essa rotina se torne um instrumento efetivo e útil para engenheiros, mecanismos e procedimentos devem ser desenvolvidos tal que se consiga a alimentação do programa de balanceamento com medidas tomadas diretamente de uma bancada ou de uma instalação de rotor. Além disso, conjuntamente deve ser implementado um

procedimento analítico-experimental de identificação de parâmetros para ajustar o modelo a medida que ocorram alterações no sistema rotor-mancal. Alimentando a rotina de balanceamento com dados experimentais e implementado o processo de identificação de parâmetros, o algoritmo desenvolvido se tornará efetivamente uma ferramenta útil no balanceamento de rotores flexíveis.

Finalmente, observa-se que a formulação de elementos finitos utilizada pode receber modificações. A busca de uma formulação mais generalizada, que possa ser aplicada a diferentes tipos de rotores, deve ser uma preocupação para trabalhos futuros. Em muitas aplicações de rotores flexíveis, tais como os rotores de grande comprimento utilizados em bombas de prospecção petrolífera, a hipótese de pequenas deformações pode ser revista e a introdução de não linearidades geométricas e de material no modelo pode ser analisada com o objetivo de se obter uma representação mais fiel da realidade. Já existem alguns trabalhos, desenvolvidos para rotores de grande flexibilidade, que consideram as variações locais da velocidade angular induzidas pela deformação do rotor. Enfim, um estudo pormenorizado de alterações na formulação de elementos finitos pode conduzir a uma nova e mais precisa formulação de rotores flexíveis assimétricos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] RIEGER, N.F., Rotor-bearing Dynamics - State-of-the-art, Mechanism and Machine Theory, Vol.12, 1977, pp261-270.
- [2] NEWKIRK, B.L. & LEWIS, J.F., Oil-Film Whirl - An Investigation of Disturbances Due to Oil Films in Journal Bearings, Trans. ASME, Vol.78, No.1, January 1956, pp21-27.
- [3] PARSZEWSKI, Z. & CAMERON, A., Oil Whirl of Flexible Rotors, Proceedings of I. Mech. E., Vol.176, No.22, 1962, pp523-531.
- [4] STERNLICHT, B., Stability and Dynamics of Rotors Supported on Fluid-Film Bearings, Trans. ASME, Journal of Engineering for Power, October 1963, pp331-342.
- [5] LUND, J.W., The Stability of an Elastic Rotor in Journal Bearings With Flexible, Damped Supports, Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics, December 1965, pp911-920.
- [6] ONO, K. & TAMURA, A., On the Vibrations of Horizontal Shaft Supported in Oil Lubricated Journal Bearings, Bulletin of the JSME, Vol.11, No.47, 1968, pp813-824.
- [7] STERNLICHT, B. & LEWIS, P., Vibration Problems With High-Speed Turbomachinery, Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, February 1968, pp174-186.
- [8] RAO, J.S., Rotor Dynamics, Wiley Eastern Limited, New Delhi, India, 1985.
- [9] TOLLE, G.C. & MUSTER, D., An Analytic Solution for Whirl in a Finite Journal Bearing With a Continuous Lubricating Film, Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, November 1969, pp1189-1195.
- [10] LUND, J.W., Stability and Damped Critical Speeds of a Flexible Rotor in Fluid-Film Bearings, Trans. ASME, Journal of

Engineering for Industry, May 1974, pp509-517.

[11] DIMENTBERG, F. M., Flexural Vibrations of Rotating Shafts, Butterworths, London, England, 1961.

[12] VANCE, J. M. & LEE, J., Stability of High Speed Rotors With Internal Friction, Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, August 1974, pp960-968.

[13] SMITH, D. M., Recognition of the Causes of Rotor Vibration in Turbomachinery, Paper C261/80, I. Mech. E. Conference, Vibrations in Rotating Machinery, Cambridge, September 1980, pp01-04.

[14] ESHLEMAN, R. L. & EUBANKS, R. A., On the Critical Speeds of a Continuous Rotor, Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, November 1969, pp1180-1188.

[15] TAYLOR, H. D., Critical-Speed Behavior of Unsymmetrical Shafts, Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics, June 1940, ppA71-A79.

[16] KELLENBERGER, W., Forced, Double-Frequency, Frequency Vibrations in a Rotating, Horizontal, Cylindrical Shaft, The Brown Boveri Review, Vol. 42, No. 3, March 1955, pp79-85.

[17] KELLENBERGER, W., Flexural Vibrations in a Non-Circular Shaft Rotating About the Horizontal Axis, The Brown Boveri Review, Vol. 46, No. 3, March 1959, pp182-193.

[18] KELLENBERGER, W. & RIHAK, P., Double-Frequency Vibration in Large Turbo-generator Rotors - A Design Problem, pp37-47.

[19] MATSUKURA, Y., INOUE, T., KISO, M., TOMISAWA, M. & OISHI, N., Estimation of the Distributing Cross Sectional Asymmetry along the Rotor Axis, Bulletin of the JSME, Vol. 22, No. 166, 1979, pp491-496.

[20] FOOTE, W. R., PORITSKY, H. & SLADE JR., J. J., Critical Speeds of a Rotor With Unequal Shaft Flexibilities, Mounted in Bearings of

Unequal Flexibility - I, Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics, June 1943, ppA77-A84.

[21] BROSENS, P. J. & CRANDALL, S. H., Whirling of Unsymmetrical Rotors, Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics, September 1961, pp355-362.

[22] BLACK, H. F. & McTERNAN, A. J., Vibration of a Rotating Asymmetric Shaft Supported in Asymmetric Bearings, Journal Mechanical Engineering Science, Vol. 10, No. 3, 1968, pp252-261.

[23] GLADWELL, G. M. & STAMMERS, C. W., Prediction of the Unstable Regions of a Reciprocal System Governed by a Set of Linear Equations With Periodic Coefficients, Journal of Sound and Vibration, Vol. 8(3), 1968, pp457-468.

[24] PETERS, D. A. & ZVOLANEK, I., A Physical Explanation of Parametric Instabilities in Unsymmetric Rotors, Paper C261/80, I. Mech. E. Conference, Vibrations in Rotating Machinery, Cambridge, September 1980, pp77-82.

[25] IWATSUBO, T., TSUJIUCHI, N. & INOUE, T., Vibration of Asymmetric Rotor Supported by Oil Film Bearings, Ingenieur-Archiv, Vol. 56, 1986, pp1-15.

[26] GOODMAN, T. P., A Least-Squares Method for Computing Balance Corrections, Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, August 1964, pp273-279.

[27] LUND, J. W. & TONNESEN, J., Analysis and Experiments on Multi-Plane Balancing of a Flexible Rotor, Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, February 1972, pp233-242.

[28] TESSARZIK, J. M., BADGLEY, R. H. & ANDERSON, W. J., Flexible Rotor Balancing by the Exact Point-Speed Influence Coefficient Method, Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, February 1972, pp148-158.

[29] DRECHSLER, J., Systematic Combination of Experiments and Data Processing in Balancing of Flexible Rotors, Paper C179/76, I. Mech. E. Conference, Vibrations in Rotating Machinery, September 1976, pp129-132.

[30] TESSARZIK, J. M., BADGLEY, R. H. & FLEMING, D. P., Experimental Evaluation of Multiplane-Multispeed Rotor Balancing Through Multiple Critical Speeds, Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, August 1976, pp988-998.

[31] BALDA, M., Balancing Flexible Rotors as a Problem of Mathematical Programming, Paper C288/80, I. Mech. E. Conference, Vibrations in Rotating Machinery, Cambridge, September 1980, pp253-257.

[32] LINDLEY, A. L. G. & BISHOP, R. E. D., Some Recent Research on the Balancing of Large Flexible Rotors, Proceedings of I. Mech. E., Vol. 177, No. 30, 1963, pp811-841.

[33] LUND, J. W., A Method for Using the Free Shaft Modes in Rotor Balancing, I. Mech. E. Conference, Vibrations in Rotating Machinery, Paper C169/76, September 1976, pp65-71.

[34] DRECHSLER, J., A Combination of Modal Balancing and the Influence Coefficient Method, I. Mech. E. Publications, Fourth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms CIV IFToMM, Newcastle, 1975, pp81-86.

[35] DARLOW, M. S., SMALLEY, A. J. & PARKINSON, A. G., A Unified Approach to Flexible Rotor Balancing: Outline and Experimental Verification, Paper C340/80, I. Mech. E. Conference, Vibrations in Rotating Machinery, Cambridge, September 1980, pp437-444.

[36] GIERS, A., Practice of Flexible Rotor Balancing, Paper C165/76, I. Mech. E. Conference, Vibrations in Rotating Machinery, Cambridge, September 1976, pp33-42.

[37] DIANA, G., *Appunti di Dinamica e Vibrazioni delle Machine - Dinamica dei Rotori*, Edizioni Spiegel, Italia, 1984.

[38] GUSAROV, A. A. & SHATALOV, L. N., *Automatic Balancing of Rotors*, Paper C343/80, I. Mech. E. Conference, *Vibrations in Rotating Machinery*, Cambridge, September 1980, pp457-461.

[39] MEIROVITCH, L., *A New Method of Solution of the Eigenvalue Problem for Gyroscopic Systems*, *AIAA Journal*, Vol.12, No.10, October 1974, pp1337-1342.

[40] GUPTA, K. K., *Eigenproblem Solution of Damped Structural Systems*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.8, 1974, pp877-911.

[41] MEIROVITCH, L. & RYLAND, G., *Response of Slightly Damped Gyroscopic Systems*, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.67(1), 1979, pp1-19.

[42] MEIROVITCH, L., *Computational Methods in Structural Dynamics*, Sijthoff & Noordhoff, Maryland, U.S.A., 1980.

[43] BATHE, K. J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A., 1982.

[44] KIKUCHI, K., *Analysis of Unbalance Vibration of Rotating Shaft System With Many Bearings and Disks*, *Bulletin of the JSME*, Vol.13, No.61, 1970, pp864-872.

[45] BANSAL, P. N. & KIRK, R. G., *Stability and Damped Critical Speeds of Rotor-Bearing Systems*, *Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry*, November 1975, pp1325-1332.

[46] GU, J. L., *An Improved Transfer Matrix-Direct Integration Method for Rotor Dynamics*, *Trans. ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol.108, April 1986, pp182-188.

- [47] CHILDS, D. W., A Modal Transient Simulation Model for Flexible Asymmetric Rotors, Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, February 1976, pp312-319.
- [48] RUHL, R. L. & BOOKER, J. F., A Finite Element Model for Distributed Parameter Turborotor Systems, Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, February 1972, pp126-132.
- [49] DIANA, G., MASSA, E., PIZZIGONI, B. & DI PASQUANTONIO, F., A Finite Element Method for Computing Oil Whirl Instability of a Rotating Shaft Supported by Elastic Bearings, I. Mech. E. Publications, IV IFTOMM, Newcastle, 1975, pp659-663.
- [50] DIMAROGONAS, A. D., A General Method for Stability Analysis of Rotating Shafts, Ingenieur-Archiv, Vol. 44, 1975, pp9-20.
- [51] GASCH, R., Vibration of Large Turbo-Rotors in Fluid-Film Bearings on an Elastic Foundation, Journal of Sound and Vibration, Vol. 47(1), 1976, pp53-73.
- [52] NELSON, H. D. & McVAUGH, J. M., The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements, Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, May 1976, pp593-600.
- [53] ZORZI, E. S. & NELSON, H. D., Finite Element Simulation of Rotor-Bearing Systems With Internal Damping, Trans. ASME, Journal of Engineering for Power, January 1977, pp71-76.
- [54] ROUCH, K. E. & KAO, J. S., Dynamic Reduction in Rotor Dynamics by the Finite Element Method, Trans. ASME, Journal of Mechanical Design, Vol. 102, April 1980, pp360-368.
- [55] NELSON, H. D., A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory, Trans. ASME, Journal of Mechanical Design, Vol. 102, October 1980, pp793-803.
- [56] CHILDS, D. W. & GRAVISS, K., A Note on Critical-Speed Solutions for Finite-Element-Based Rotor Models, Trans. ASME, Journal of

Mechanical Design, Vol.104, April 1982, pp412-416.

[57] ÖZGÜVEN, H.N. & ÖZKAN, Z.L., Whirl Speeds and Unbalance Response of Multibearings Rotors Using Finite Elements, Trans. ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol.106, January 1984, pp72-79.

[58] ADAMS, M.L. & PADOVAN, J., Insights Into Linearized Rotor Dynamics, Journal of Sound and Vibration, Vol.76(1), 1981, pp129-142.

[59] PLAUT, R.H. & HUSEYIN, K., Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors in Non-Self-Adjoint Systems, AIAA Journal, Vol.11, No.2, February 1973, pp250-251.

[60] DONE, G.T.S. & HUGHES, A.D., The Response of a Vibrating Structure as a Function of Structural Parameters, Journal of Sound and Vibration, Vol.38(2), 1976, pp255-266.

[61] LUND, J.W., Sensitivity of the Critical Speeds of a Rotor to Changes in the Design, Trans. ASME, Journal of Mechanical Design, Vol.102, January 1980, pp115-121.

[62] PALAZZOLO, A.B., WANG, B.P. & PILKEY, W.D., Eigensolution Reanalysis of Rotor Dynamic Systems by the Generalized Receptance Method, Trans. ASME, Journal of Engineering for Power, Vol.105, July 1983, pp543-550.

[63] RAJAN, M., NELSON, H.D. & CHEN, W.J., Parameter Sensitivity in the Dynamics of Rotor-Bearing Systems, Trans. ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol.108, April 1986, pp197-206.

[64] COWPER, G.R., The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory, Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics, June 1966, pp335-340.

[65] GÖES, T.C. & BARCELLOS, C.S., MÓDULO AVISE: Determinação de

Autovalores e Autovetores Através do Método da Iteração

Subespacial, Publicação Interna 04/84, GRANTE, Departamento de Engenharia Mecânica, UFSC, Florianópolis, 1984.

[66] GREENWOOD, D.T. , Principles of Dynamics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A. , 1965.

 APENDICE A

FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

Para o problema de flexão, as funções de interpolação são obtidas diretamente do problema estático de viga, considerando os efeitos de flexão e cisalhamento conjuntamente. Na torção, utilizam-se funções de interpolação lineares. As funções de interpolação para ambos os problemas são descritas a seguir.

Para facilitar a descrição das funções, denota-se por ν a variável adimensional que descreve a posição de uma seção transversal qualquer do elemento em relação a sua extremidade inicial. Sendo s a variável que define cada seção do elemento de rotor a partir do nó inicial (ver Figura 2.2) e sendo l o comprimento do elemento, a variável adimensional é escrita como

$$\nu = s/l.$$

A.1. FLEXÃO

As funções de interpolação de flexão são obtidas somente no plano de deflexão XY. Os efeitos do cisalhamento transversal f_y e f_z são distintos para os dois planos de deflexão XY e XZ do rotor:

$$\text{PLANO XY : } f_y = (12 E I_z) / (K_y A G l^2)$$

$$\text{PLANO XZ : } f_z = (12 E I_y) / (K_z A G l^2)$$

onde f_y e f_z serão constantes se as propriedades geométricas e elásticas forem constantes.

Para a obtenção das funções de interpolação no plano XZ, basta substituir os termos f_y e I_z por f_z e I_y nas funções obtidas no plano XY.

A.1.1. FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO ψ_1^y e ϕ_1^y :

A partir da Figura A.1, as equações diferenciais no plano XY são escritas na seguinte forma:

$$E I_z V_f'' = F s - M \quad (\text{A.1})$$

$$K_y G A V_c' = -F = \text{constante} \quad (\text{A.2})$$

onde: $V = V_f + V_c$, sendo que V_f e V_c são as contribuições de flexão e cisalhamento, respectivamente; as haspas " e o apóstrofo significam diferenciação de segunda e primeira ordem em relação à posição.

A solução geral das equações é escrita como:

$$E I_z V = \frac{1}{6} F s^3 - \frac{1}{2} M s^2 + \left(C_1 - F \frac{f_y l^2}{12} \right) s + C_2$$

$$E I_z V' = \frac{F s^2}{2} - M s + \left(C_1 - F \frac{f_y l^2}{12} \right)$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração.

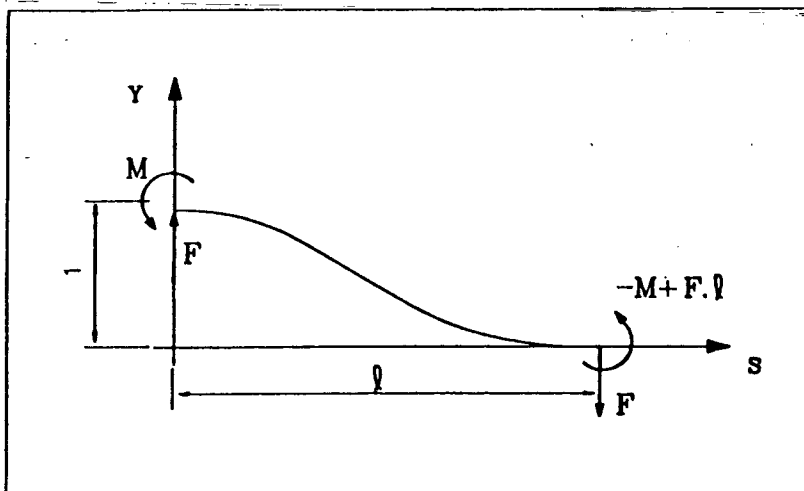


Figura A.1 - Deslocamento linear do primeiro nó igual a um.

As condições de contorno do problema são as seguintes:

$$\text{Em } s = \nu = 0, \quad V'_c = V' = -F / (K_y G A)$$

$$\text{Em } s = l, \quad V'_c = V'$$

$$\text{Em } s = \nu = 0, \quad V = 1$$

Então, obtém-se a expressão de ψ_1^y :

$$\psi_1^y = \frac{1}{(1+fy)} \left[1 - 3\nu^3 + 2\nu^2 + fy(1 - \nu) \right]$$

e derivando-se ψ_1^y em relação à posição, obtém-se ϕ_1^y :

$$\phi_1^y = \frac{1}{(1+fy)} \left[\frac{1}{l} (6\nu^2 - 6\nu) \right]$$

A.1.2. FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO ψ_2^y E ϕ_2^y :

Pela figura A.2., as condições de contorno são escritas na seguinte forma:

$$\text{Em } s = 0, \quad v = 0 \text{ e } v' = v'_f$$

$$\text{Em } s = l, \quad v = 0 \text{ e } v' = v'_c$$

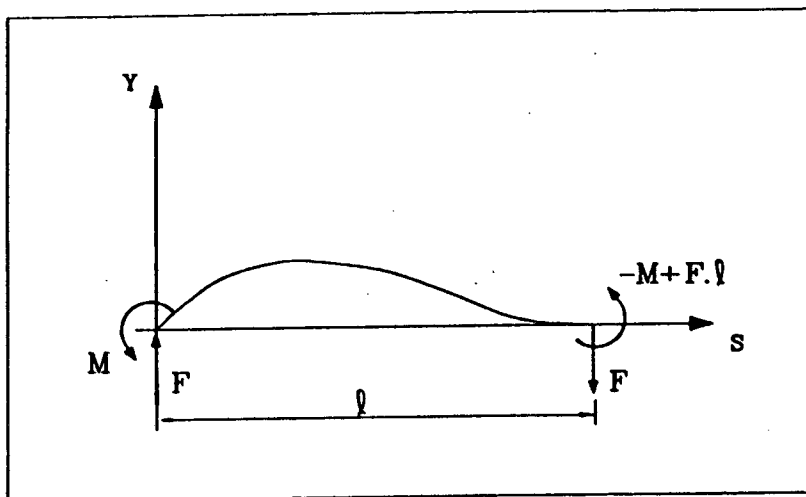


Figura A.2 - Deslocamento angular do primeiro nó igual a um.

Considerando-se as equações (A.1) e (A.2) e as condições de contorno, obtém-se a relação entre F e V:

$$E I_z V = \frac{F s^3}{6} - \frac{M s^2}{2} + \left[\frac{M l}{2} - \frac{F l^2}{6} \right] s$$

e a equação da linha elástica é escrita como:

$$E I_z v = \frac{F l^2}{6} \left[l(\nu^3 - 2\nu^2 + \nu) + fy \frac{l}{2} (-\nu^2 + \nu) \right]$$

Então, obtém-se a expressão de ψ_2^y :

$$\psi_2^y = \frac{1}{1 + f_y} \left[l(\nu^3 - 2\nu^2 + \nu) + f_y \left(\frac{l}{2} (\nu - \nu^2) \right) \right]$$

Para se obter ϕ_2^y , deriva-se a equação da elástica:

$$E I_z V' = \frac{F l^2}{6} \left[(3\nu^2 - 4\nu + 1) + \frac{1}{2} f_y (1 - 2\nu) \right]$$

Mas como a rotação ρ_0 em $s = 0$ possui o seguinte valor:

$$E I_z \rho_0 = \frac{F l^2}{6} (1 + f_y)$$

deve-se adicionar a deformação $(F l^2 f_y) / 12$ em $E I_z V'$ para se obter a rotação das seções. Dai se obtém a expressão de ϕ_2^y :

$$\phi_2^y = \frac{1}{1 + f_y} \left[1 - 4\nu + 3\nu^2 + f_y (1 - \nu) \right]$$

A.1.3. FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO ψ_s^y E ϕ_s^y :

A partir da Figura A.3, as equações diferenciais são agora escritas como:

$$E I_z V'' = (F l - M) - F s \quad (A.3)$$

$$K_y G A V_c' = F = \text{constante} \quad (A.4)$$

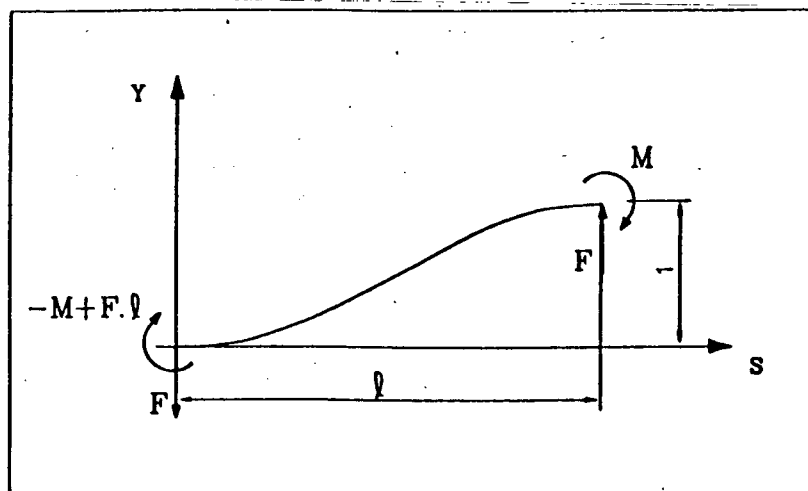


Figura A.3 - Deslocamento linear do segundo nó igual a um.

A solução geral das equações é dada pela expressão seguinte:

$$E I_z V = \frac{1}{2} (Fl - M) s^2 - \frac{1}{6} F s^3 + \left(C_1 + F \frac{f y l^2}{12} \right) s + C_2$$

As condições de contorno são dadas na seguinte forma:

$$\text{Em } s = 0, \quad V = 0 \quad \text{e} \quad V' = V_c$$

$$\text{Em } s = l, \quad V = 1 \quad \text{e} \quad V' = V_c$$

A equação da elástica pode ser escrita como:

$$E I_z V = \frac{F l^3}{12} (3\nu^2 - 2\nu^3 + f y \nu)$$

Então, a expressão de ψ_s^y é dada por :

$$\psi_s^y = \frac{1}{1 + f y} \left[3\nu^2 - 2\nu^3 + f y (\nu) \right]$$

Efetuada-se a diferenciação em relação à posição, obtém-se a expressão de ϕ_s^y :

$$\phi_s^y = \frac{1}{1 + fy} \left[\frac{1}{l} (\delta v - \delta v^2) \right]$$

A.1.4. FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO ψ_4^y E ϕ_4^y :

Obtém-se as equações diferenciais através da figura A.4:

$$E I_z V'' = (M - Fl) + Fs \quad (A.5)$$

$$K_y G A V' = - F \quad (A.6)$$

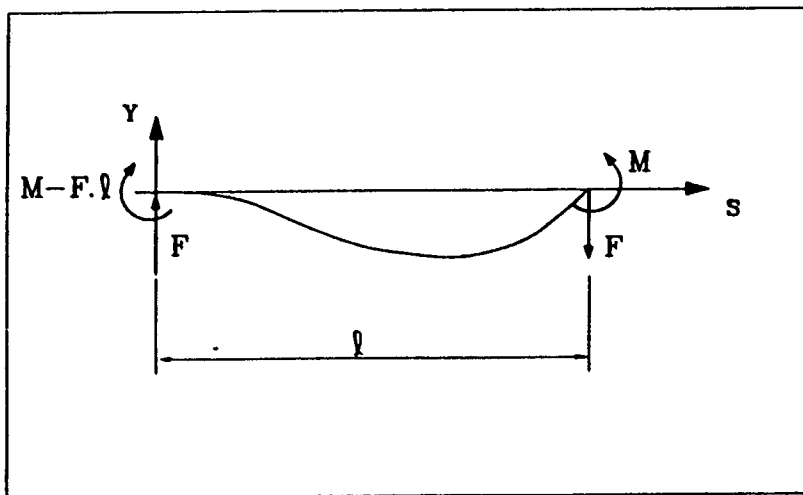


Figura A.4 - Deslocamento angular do segundo nó igual a um.

A solução geral das equações (A.5) e (A.6) é dada por:

$$E I_z V = \frac{1}{2} (M - Fl) s^2 + \frac{1}{6} F s^3 + (C_1 - F \frac{f y l^2}{12}) s + C_2$$

As condições de contorno são escritas como:

$$\text{Em } s = 0, \quad V = 0 \quad \text{e} \quad V' = V'_0 = -F/(K_yGA)$$

$$\text{Em } s = l, \quad V = 0 \quad \text{e} \quad V'_l = V'_{c_l} + V'_{f_l}$$

A equação da elástica pode ser escrita como:

$$E Iz V = \frac{Fl^2}{6} \left[\frac{l}{2} (2\nu^3 - 2\nu^2) + fy \frac{l}{2} (-\nu + \nu^2) \right]$$

Então, a expressão de ψ_4^y é escrita na seguinte forma:

$$\psi_4^y = \frac{1}{1 + fy} \left[l(\nu^3 - \nu^2) + fy \frac{l}{2} (-\nu + \nu^2) \right]$$

Para se obter a expressão de ϕ_4^y , efetua-se a diferenciação da equação da elástica em relação à posição.

$$E Iz V' = \frac{Fl^2}{6} \left[\frac{1}{2} (6\nu^2 - 4\nu) + \frac{1}{2} fy (-1 + 2\nu) \right]$$

Mas como a rotação ρ_0 em $s = 0$ possui o seguinte valor:

$$E Iz \rho_0 = -\frac{F l^2}{12} fy$$

deve-se adicionar $Fl^2fy/12$ ao termo $E Iz V'$ para se obter a rotação das seções. Daí se obtém a expressão de ϕ_4^y :

$$\phi_4^y = \frac{1}{1 + fy} \left[3\nu^2 - 2\nu + fy(\nu) \right]$$

A. 2. TORÇÃO

Considera-se comportamento linear para as funções de interpolação de torção:

$$N_1 = (1 - \nu)$$

$$N_2 = \nu$$

Com as funções N_1 e N_2 , encerra-se a apresentação de todas as funções de interpolação utilizadas na formulação.

APENDICE B

ENERGIA CINÉTICA DE UM ELEMENTO DE VIGA ASSIMÉTRICA

A expressão da energia cinética do centro de massa de um elemento de viga assimétrica com comprimento ds consiste das parcelas de energia de translação T_t e rotação T_{rot} :

$$T = T_t + T_{rot}$$

(B.1)

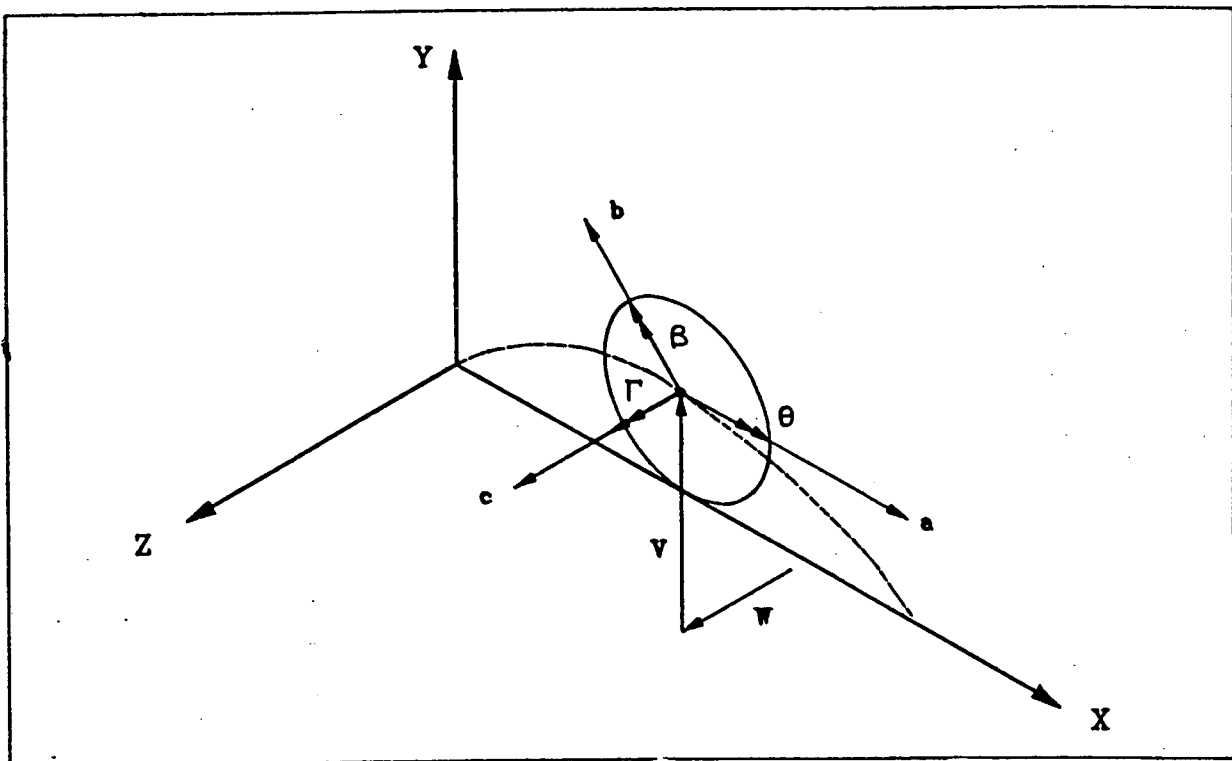


Figura B.1. - Sistema de Coordenadas abc do centro de massa do elemento ds .

A parcela de energia cinética de translação do centro de massa pode ser escrita como:

$$dTt = \frac{1}{2} m \left(\dot{v} \dot{w} \right) \left\{ \begin{array}{c} \dot{v} \\ \dot{w} \end{array} \right\} ds \quad (B.2)$$

onde m é a massa do elemento por unidade de comprimento. O ponto "." acima das variáveis significa diferenciação em relação ao tempo.

Para a obtenção da parcela de energia cinética de rotação, inicialmente referencia-se o movimento de rotação do elemento no sistema de coordenadas abc (Figura B.1), que está fixo no centro de massa, sendo que o eixo a é normal à seção transversal do elemento. A expressão da energia cinética rotacional é obtida, no sistema inercial de coordenadas, utilizando-se os seguintes ângulos de Euler (referência [52]):

- Γ - rotação em torno do eixo z definindo o sistema $a'' b'' c''$.
- β - rotação em torno do eixo b'' definindo o sistema $a' b' c'$.
- θ - rotação em torno do eixo a' definindo o sistema abc .

Pode-se escrever a taxa de movimento angular do elemento em relação ao sistema XYZ fixo no espaço:

$$\left\{ \begin{array}{c} w_a \\ w_b \\ w_c \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} -\text{sen}\beta & 1 & 0 \\ \text{cos}\beta \text{sen}\theta & 0 & \text{cos}\theta \\ \text{cos}\beta \text{cos}\theta & 0 & -\text{sen}\theta \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{\Gamma} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta} \end{array} \right\} \quad (B.3)$$

A parcela da energia cinética de rotação pode ser escrita por:

$$dTrot = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} w_a & w_b & w_c \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_{db} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_a \\ w_b \\ w_c \end{Bmatrix} ds \quad (B.4)$$

onde I_p , I_{db} e I_{dc} são os momentos polar e diametrais de inércia de massa por unidade de comprimento.

A pequena assimetria da seção transversal permite considerar o rotor inercialmente simétrico. Esta suposição torna-se necessária a fim de evitar o aparecimento de coeficientes periódicos na parcela de energia rotacional. Então, sob o ponto de vista inercial, o rotor é simétrico, ou seja, os momentos diametrais de inércia de massa são iguais a um valor médio:

$$I_{dm} = \frac{I_{db} + I_{dc}}{2} \quad (B.5)$$

Pode-se reescrever a expressão da energia cinética de rotação como:

$$dTrot = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} w_a & w_b & w_c \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_{dm} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_a \\ w_b \\ w_c \end{Bmatrix} ds \quad (B.6)$$

Faz-se a substituição da relação (B.3) na expressão (B.6) e obtém-se a expressão da energia cinética rotacional no sistema inercial:

$$dTrot = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\gamma} & \dot{\theta} & \dot{\beta} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \text{sen}^2\beta I_p + \text{cos}^2\beta I_{dm} & -\text{sen}\beta I_p & 0 \\ -\text{sen}\beta I_p & I_p & 0 \\ 0 & 0 & I_{dm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta} \end{Bmatrix} ds \quad (B.7)$$

Linearizando-se o problema, isto é, considerando que β e Γ sejam pequenos, o que permite escrever $\cos\beta \cong 1$ e $\sin\beta \cong \beta$, e desprezando-se os termos quadráticos em β , a expressão da energia cinética total é dada na seguinte forma:

$$dT = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{m} \begin{pmatrix} \dot{V} \\ \dot{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{V} \\ \dot{W} \end{pmatrix} + \text{Idm} \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\Gamma} \end{pmatrix} + \right. \\ \left. I_p \dot{\theta} \dot{\theta} - 2I_p \dot{\theta} \dot{\Gamma} \beta \right\} ds \quad (\text{B.8})$$

A taxa de variação do ângulo de rotação $\dot{\theta}$ tem as contribuições da velocidade de rotação Ω e da taxa de variação do ângulo de torção $\dot{\alpha}$:

$$\dot{\theta} = \dot{\alpha} + \Omega \quad (\text{B.9})$$

Efetuando-se a substituição da relação (B.9) na expressão (B.8) e desprezando-se os termos não lineares, tem-se a nova expressão para dT :

$$dT = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{m} \begin{pmatrix} \dot{V} \\ \dot{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{V} \\ \dot{W} \end{pmatrix} + \text{Idm} \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\Gamma} \end{pmatrix} + I_p \dot{\alpha} \dot{\alpha} + \right. \\ \left. - 2 I_p \Omega \dot{\Gamma} \beta + I_p (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\alpha}) \right\} ds \quad (\text{B.10})$$

Pela substituição das funções de interpolação e das coordenadas generalizadas do elemento na expressão (B.10), obtém-se a expressão matricial da energia cinética de um elemento finito de rotor através da integração ao longo do comprimento l :

$$T = \frac{1}{2} \langle \dot{q}_0 \rangle^T \left([M^0] + [N^0] \right) \langle \dot{q}_0 \rangle - \Omega \langle \dot{q}_0 \rangle^T [H^0] \langle q_0 \rangle + \frac{1}{2} I_p \Omega^2 l + \Omega [L] \langle \dot{q}_0 \rangle \quad (B.11)$$

onde $[M^0]$, $[N^0]$ e $[H^0]$ são as matrizes locais representativas da inércia de translação e de torção, da inércia de rotação e dos efeitos giroscópicos, respectivamente. $[L]$ é definida por :

$$[L] = \int_0^l I_p [E(s)] ds \quad (B.12)$$

 APENDICE C

MATRIZ $[M^e]$ REPRESENTATIVA DA INERCIA DE TRANSLAÇÃO E DE TORÇÃO

A matriz $[M^e]$ é obtida, no sistema inercial de coordenadas, pela substituição das funções de interpolação (2.1, 2.2 e 2.3) na expressão da energia cinética do elemento finito de rotor (2.7). As parcelas de energia cinética de translação e de torção são dadas por:

$$T_M = \frac{1}{2l} \int_0^l m \langle \dot{v} \dot{w} \rangle \begin{Bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} ds + \frac{1}{2l} \int_0^l I_p \dot{\theta} \dot{\theta} ds \quad (C.1)$$

onde o ponto "." acima das variáveis significa diferenciação em relação ao tempo.

Substituindo-se as funções de interpolação em (C.1), a expressão matricial de T_M pode ser escrita como:

$$T_M = \frac{1}{2l} \langle \dot{q}_e \rangle^T \int_0^l m \begin{bmatrix} D(s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} D(s) \end{bmatrix} ds \langle \dot{q}_e \rangle + \frac{1}{2l} \langle \dot{q}_e \rangle^T \int_0^l I_p \begin{bmatrix} E(s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E(s) \end{bmatrix} ds \langle \dot{q}_e \rangle \quad (C.2)$$

Fazendo a integração ao longo do elemento, obtém-se a matriz $[M^e]$ do elemento finito de rotor.

$$T_M = \frac{1}{2l} \left\{ \dot{q}_e \right\}^T \left[M^e \right] \left\{ \dot{q}_e \right\} \quad (C.3)$$

A matriz $[M^0]$ representativa da inércia de translação e de torção, no sistema inercial de coordenadas, é apresentada a seguir. Para se obter a matriz no sistema rotativo de coordenadas basta substituir os efeitos do cisalhamento transversal f_y e f_z por seu valor médio f .

$$\begin{bmatrix}
 M_{11} & 0 & 0 & 0 & M_{15} & M_{16} & 0 & 0 & 0 & M_{110} \\
 & M_{22} & 0 & M_{24} & 0 & 0 & M_{27} & 0 & M_{29} & 0 \\
 & & M_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{38} & 0 & 0 \\
 & & & M_{44} & 0 & 0 & M_{47} & 0 & M_{49} & 0 \\
 & & & & M_{55} & M_{56} & 0 & 0 & 0 & M_{510} \\
 & & & & & M_{66} & 0 & 0 & 0 & M_{610} \\
 \text{Simétrica} & & & & & & M_{77} & 0 & M_{79} & 0 \\
 & & & & & & & M_{88} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & M_{99} & 0 \\
 & & & & & & & & & M_{1010}
 \end{bmatrix}$$

A matriz $[M^0]$ é simétrica e esparsa. São apresentadas as expressões dos termos genéricos diferentes de zero mostrados na matriz.

$$M_{11} = K \left(\frac{156 + 294f_y + 140f_y^2}{(1 + f_y)^2} \right)$$

$$M_{15} = K \left(\frac{22l + 38,5lf_y + 17,5lf_y^2}{(1 + f_y)^2} \right)$$

$$M_{16} = K \left(\frac{54 + 126f_y + 70f_y^2}{(1 + f_y)^2} \right)$$

$$M_{110} = K \left[\frac{-13l - 31,5lfy - 17,5lfy^2}{(1 + fy)^2} \right]$$

$$M_{22} = K \left[\frac{156 + 294fz + 140fz^2}{(1 + fz)^2} \right]$$

$$M_{24} = K \left[\frac{-22l - 38,5lfz - 17,5lfz^2}{(1 + fz)^2} \right]$$

$$M_{27} = K \left[\frac{54 + 126fz + 70fz^2}{(1 + fz)^2} \right]$$

$$M_{20} = K \left[\frac{13l + 31,5lfz + 17,5lfz^2}{(1 + fz)^2} \right]$$

$$M_{33} = \frac{1}{3} Ipl$$

$$M_{38} = \frac{1}{6} Ipl$$

$$M_{44} = K \left[\frac{4l^2 + 7l^2fz + 3,5l^2fz^2}{(1 + fz)^2} \right]$$

$$M_{47} = K \left[\frac{-13l - 31,5lfz - 17,5lfz^2}{(1 + fz)^2} \right]$$

$$M_{40} = K \left[\frac{-3l^2 - 7l^2fz - 3,5l^2fz^2}{(1 + fz)^2} \right]$$

$$M_{55} = K \left[\frac{4l^2 + 7l^2fy + 3,5l^2fy^2}{(1 + fy)^2} \right]$$

$$M_{56} = K \left[\frac{13l + 31,5lfy + 17,5lfy^2}{(1 + fy)^2} \right]$$

$$M_{510} = K \left[\frac{-3l^2 - 7l^2fy - 3,5l^2fy^2}{(1 + fy)^2} \right]$$

$$M_{66} = K \left[\frac{156 + 294fy + 140fy^2}{(1 + fy)^2} \right]$$

$$M_{610} = K \left[\frac{-22l - 38,5lfy - 17,5lfy^2}{(1 + fy)^2} \right]$$

$$M_{77} = K \left[\frac{156 + 294fz + 140fz^2}{(1 + fz)^2} \right]$$

$$M_{70} = K \left[\frac{22l + 38,5lfz + 17,5lfz^2}{(1 + fz)^2} \right]$$

$$M_{88} = \frac{1}{3} Ipl$$

$$M_{00} = K \left[\frac{4l^2 + 7l^2fz + 3,5l^2fz^2}{(1 + fz)^2} \right]$$

$$M_{010} = K \left[\frac{4l^2 + 7l^2fy + 3,5l^2fy^2}{(1 + fy)^2} \right]$$

onde K tem a seguinte forma:

$$K = (m l) / 420$$

 APENDICE D

MATRIZ [N°] REPRESENTATIVA DA INÉRCIA DE ROTAÇÃO

A matriz de inércia rotacional do elemento finito de rotor é obtida, no sistema inercial de coordenadas, pela substituição das funções de interpolação na expressão da energia cinética (2.7). A parcela de energia cinética de rotação é dada por:

$$T_N = \frac{1}{2} \int_0^L I_{dm} \langle \dot{\beta} \dot{\Gamma} \rangle \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\Gamma} \end{Bmatrix} ds \quad (D.1)$$

onde o ponto "." acima das variáveis significa diferenciação em relação ao tempo.

Substituindo-se as funções de interpolação em (D.1), obtém-se a expressão matricial de T_N :

$$T_N = \frac{1}{2} \left\{ \dot{q}_e \right\}^T \int_0^L I_{dm} \begin{bmatrix} W(s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W(s) \end{bmatrix} ds \left\{ \dot{q}_e \right\} \quad (D.2)$$

Efetuando-se a integração ao longo do comprimento do elemento finito de rotor, a matriz [N°] pode ser obtida:

$$T_N = \frac{1}{2} \left\{ \dot{q}_e \right\}^T \begin{bmatrix} N^\circ \end{bmatrix} \left\{ \dot{q}_e \right\} \quad (D.3)$$

A matriz [N°], no sistema inercial de coordenadas, é apresentada a seguir. Para se obter a matriz no sistema rotativo de coordenadas, basta substituir os efeitos de cisalhamento transversal f_y e f_z por seu valor médio f .

$$\begin{bmatrix}
 N_{11} & 0 & 0 & 0 & N_{15} & N_{16} & 0 & 0 & 0 & N_{110} \\
 & N_{22} & 0 & N_{24} & 0 & 0 & N_{27} & 0 & N_{29} & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & N_{44} & 0 & 0 & N_{47} & 0 & N_{49} & 0 \\
 & & & & N_{55} & N_{56} & 0 & 0 & 0 & N_{510} \\
 & & & & & N_{66} & 0 & 0 & 0 & N_{610} \\
 & & & & & & N_{77} & 0 & N_{79} & 0 \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & N_{99} & 0 \\
 & & & & & & & & & N_{1010}
 \end{bmatrix}$$

Simétrica

A matriz $[N^e]$ é simétrica e esparsa. São apresentados os termos genéricos diferentes de zero mostrados na matriz.

$$N_{11} = K \left[\frac{36}{(1 + f_y)^2} \right]$$

$$N_{15} = K \left[\frac{3l - 15lf_y}{(1 + f_y)^2} \right]$$

$$N_{16} = K \left[\frac{-36}{(1 + f_y)^2} \right]$$

$$N_{110} = K \left[\frac{3l - 15lf_y}{(1 + f_y)^2} \right]$$

$$N_{22} = K \left[\frac{36}{(1 + f_z)^2} \right]$$

$$N_{24} = K \left[\frac{-3l + 15lf_z}{(1 + f_z)^2} \right]$$

$$N_{27} = K \left(\frac{-36}{(1 + fz)^2} \right)$$

$$N_{29} = K \left(\frac{-3l + 15lfz}{(1 + fz)^2} \right)$$

$$N_{44} = K \left(\frac{4l^2 + 5l^2fz + 10l^2fz^2}{(1 + fz)^2} \right)$$

$$N_{47} = K \left(\frac{3l - 15lfz}{(1 + fz)^2} \right)$$

$$N_{49} = K \left(\frac{-l^2 - 5l^2fz + 5l^2fz^2}{(1 + fz)^2} \right)$$

$$N_{55} = K \left(\frac{4l^2 + 5l^2fy + 10l^2fy^2}{(1 + fy)^2} \right)$$

$$N_{56} = K \left(\frac{-3l + 15lfy}{(1 + fy)^2} \right)$$

$$N_{510} = K \left(\frac{-l^2 - 5l^2fy + 5l^2fy^2}{(1 + fy)^2} \right)$$

$$N_{66} = K \left(\frac{36}{(1 + fy)^2} \right)$$

$$N_{610} = K \left(\frac{-3l + 15lfy}{(1 + fy)^2} \right)$$

$$N_{77} = K \left(\frac{36}{(1 + fz)^2} \right)$$

$$N_{79} = K \left(\frac{3l - 15lfz}{(1 + fz)^2} \right)$$

$$N_{99} = K \left(\frac{4l^2 + 5l^2fz + 10l^2fz^2}{(1 + fz)^2} \right)$$

$$N_{1010} = K \left[\frac{4l^2 + 5l^2fy + 10l^2fy^2}{(1 + fy)^2} \right]$$

onde K é dado na seguinte forma:

$$K = Idm/30l$$

 APENDICE E

MATRIZES $[H^\circ]$ e $[G^\circ]$ REPRESENTATIVAS DOS EFEITOS GIROSCÓPICOS

A matriz $[H^\circ]$ é obtida, no sistema inercial de coordenadas, através da expressão da energia cinética do elemento finito de rotor (2.7). A parcela dos efeitos giroscópicos da energia cinética é escrita como:

$$T_G = -\Omega \int_0^L I_p \dot{\Gamma} \beta \, ds \quad (E.1)$$

onde o ponto "." acima da variável significa diferenciação em relação ao tempo.

Os vetores rotação β e Γ são escritos na seguinte forma:

$$\left\{ \beta \right\} = \left[W_U \right] \left\{ q_\bullet \right\} \quad (E.2)$$

$$\left\{ \Gamma \right\} = \left[W_I \right] \left\{ q_\bullet \right\} \quad (E.3)$$

Substituindo-se as relações (E.2) e (E.3) em (E.1), obtém-se a expressão matricial de T_G :

$$T_G = -\Omega \left\{ \dot{q}_\bullet \right\}^T \int_0^L I_p \left[W_I \right]^T \left[W_U \right] \, ds \left\{ q_\bullet \right\} \quad (E.4)$$

Integrando-se ao longo do comprimento do elemento finito do rotor, obtém-se a matriz $[H^\circ]$:

$$T_G = -\Omega \left\{ \dot{q}_\bullet \right\}^T \left[H^\circ \right] \left\{ q_\bullet \right\} \quad (E.5)$$

A matriz $[G^\circ]$ representativa dos efeitos giroscópicos, no sistema inercial de coordenadas, é dada por :

$$[G^\circ] = [H^\circ] - [H^\circ]^T \quad (E.6)$$

É apresentada, a seguir, a matriz $[G^\circ]$ do elemento finito de rotor, no sistema inercial de coordenadas. Para se obter a matriz no sistema de referência rotativo, basta substituir os efeitos do cisalhamento transversal f_y e f_z por seu valor médio f .

$$\begin{bmatrix} 0 & G_{12} & 0 & G_{14} & 0 & 0 & G_{17} & 0 & G_{19} & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & G_{25} & G_{26} & 0 & 0 & 0 & G_{210} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & G_{45} & G_{46} & 0 & 0 & 0 & G_{410} \\ & & & & 0 & 0 & G_{57} & 0 & G_{59} & 0 \\ & & & & & 0 & G_{67} & 0 & G_{69} & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & G_{710} \\ & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & G_{910} \\ & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Anti-Simétrica

A matriz $[G^\circ]$ é anti-simétrica e esparsa. São apresentadas as expressões dos termos genéricos diferentes de zero da matriz.

$$G_{12} = C (-36)$$

$$G_{14} = C (3l - 15lfz)$$

$$G_{17} = C (36)$$

$$G_{19} = C (3l - 15lfz)$$

$$G_{25} = C (3l - 15lfy)$$

$$G_{26} = C (-36)$$

$$G_{210} = C (3l - 15lfy)$$

$$G_{45} = C (-4l^2 - 2,5l^2fz - 2,5l^2fy - 10l^2fyfz)$$

$$G_{46} = C (3l - 15lfz)$$

$$G_{410} = C (l^2 + 2,5l^2fy + 2,5l^2fz - 5l^2fyfz)$$

$$G_{57} = C (3l - 15lfy)$$

$$G_{59} = C (-l^2 - 2,5l^2fy - 2,5l^2fz + 5l^2fyfz)$$

$$G_{67} = C (-36)$$

$$G_{69} = C (-3l + 15lfz)$$

$$G_{710} = C (-3l + 15lfy)$$

$$G_{910} = C (-4l^2 - 2,5l^2fy - 2,5l^2fz + 10l^2fyfz)$$

onde C é uma expressão dada na seguinte forma:

$$C = \frac{I_p}{30l(1+fz)(1+fy)}$$

 APENDICE F

MATRIZ DE RIGIDEZ [K^o]

A matriz de rigidez do elemento finito de rotor [K^o], no sistema rotativo de coordenadas, é obtida através da expressão da energia potencial elástica (2.8). Substituindo-se as funções de interpolação em (2.8), obtém-se a seguinte expressão matricial da energia potencial elástica:

$$\begin{aligned}
 v = & \frac{1}{2} \int_0^l E \langle p_{\bullet} \rangle^T \left[D' \langle s \rangle \right]^T \begin{bmatrix} I_z & 0 \\ 0 & I_y \end{bmatrix} \left[D' \langle s \rangle \right] \langle p_{\bullet} \rangle ds + \\
 & \frac{1}{2} \int_0^l AG \langle p_{\bullet} \rangle^T \left[D' \langle s \rangle \right]^T \begin{bmatrix} K_y & 0 \\ 0 & K_z \end{bmatrix} \left[D' \langle s \rangle \right] \langle p_{\bullet} \rangle ds + \\
 & \frac{1}{2} \int_0^l GKl \langle p_{\bullet} \rangle^T \left[E' \langle s \rangle \right] \langle p_{\bullet} \rangle ds \quad (F.1)
 \end{aligned}$$

$$v = \frac{1}{2} \langle p_{\bullet} \rangle^T \left[K_{\bullet}^{\bullet} \right] \langle p_{\bullet} \rangle \quad (F.2)$$

onde o apóstrofo "'" acima das variáveis significa diferenciação em relação à posição.

As parcelas matriciais da equação (F.1) são integradas ao longo do comprimento l do elemento finito de rotor para se obter a expressão (F.2).

$$\begin{bmatrix}
 12EIz/(1+fy)l^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6EIz/(1+fy)l^2 & -12EIz/(1+fy)l^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6EIz/(1+fy)l^2 \\
 0 & 12EIy/(1+fz)l^3 & 0 & -6EIy/(1+fz)l^2 & 0 & 0 & -12EIy/(1+fz)l^3 & 0 & 0 & -12EIy/(1+fz)l^3 & 0 & -6EIy/(1+fz)l^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & GKl/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GKl/l & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -6EIy/(1+fz)l^2 & 0 & (4+fz)EIy/(1+fz)l & 0 & 0 & (4+fz)EIy/(1+fz)l^2 & 0 & 0 & 6EIy/(1+fz)l^3 & 0 & (2-fz)EIy/(1+fz)l & 0 & 0 & 0 \\
 6EIz/(1+fy)l^2 & 0 & 0 & 0 & (4+fy)EIz/(1+fy)l & -6EIz/(1+fy)l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (2-fy)EIz/(1+fy)l & 0 & 0 & 0 \\
 -12EIz/(1+fy)l^3 & 0 & 0 & 0 & -6EIz/(1+fy)l^2 & 12EIz/(1+fy)l^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6EIz/(1+fy)l^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -12EIy/(1+fz)l^3 & 0 & 6EIy/(1+fz)l^2 & 0 & 0 & 12EIy/(1+fz)l^3 & 0 & 0 & 6EIy/(1+fz)l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -GKl/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GKl/l & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -6EIy/(1+fz)l^2 & 0 & (2-fz)EIy/(1+fz)l & 0 & 0 & (2-fz)EIy/(1+fz)l^2 & 0 & 0 & 6EIy/(1+fz)l & 0 & (4+fz)EIy/(1+fz)l & 0 & 0 & 0 \\
 6EIz/(1+fy)l^2 & 0 & 0 & 0 & (2-fy)EIz/(1+fy)l & -6EIz/(1+fy)l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (4+fy)EIz/(1+fy)l & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

 APENDICE G

VETOR FORÇA DO DESBALANCEAMENTO DISTRIBUIDO

As projeções em seno e em cosseno do vetor força do desbalanceamento linearmente distribuído, para um elemento finito de rotor, são dadas pelas seguintes expressões:

$$\left\{ F_c^\circ \right\} = \Omega^2 \int_0^l m [D]^T \begin{Bmatrix} Y_R(1-s/l) + Y_D(s/l) \\ Z_R(1-s/l) + Z_D(s/l) \end{Bmatrix} ds \quad (I.1)$$

$$\left\{ F_s^\circ \right\} = \Omega^2 \int_0^l m [D]^T \begin{Bmatrix} -Z_R(1-s/l) - Z_D(s/l) \\ Y_R(1-s/l) - Y_D(s/l) \end{Bmatrix} ds \quad (I.2)$$

onde m representa a massa do rotor por unidade de comprimento.

Substituindo-se as funções de interpolação nas expressões (I.1) e (I.2) e efetuando-se a integração ao longo do comprimento l do elemento de rotor, obtêm-se todos os termos dos vetores excitação em seno e em cosseno.

$$\left\{ F_c^* \right\} = m \Omega^2 \left[\begin{array}{c}
 \frac{1}{1+f_y} \left[\frac{7l}{20} Y_E + \frac{3l}{20} Y_D + f_y \left(\frac{l}{3} Y_E + \frac{l}{6} Y_D \right) \right] \\
 \frac{1}{1+f_z} \left[\frac{7l}{20} Z_E + \frac{3l}{20} Z_D + f_z \left(\frac{l}{3} Z_E + \frac{l}{6} Z_D \right) \right] \\
 0 \\
 \frac{1}{1+f_z} \left[\frac{-l^2}{20} Z_E - \frac{l^2}{30} Z_D + f_z \left(\frac{-l^2}{24} Z_E - \frac{l^2}{24} Z_D \right) \right] \\
 \frac{1}{1+f_y} \left[\frac{l^2}{20} Y_E + \frac{l^2}{30} Y_D + f_y \left(\frac{l^2}{24} Y_E + \frac{l^2}{24} Y_D \right) \right] \\
 \frac{1}{1+f_y} \left[\frac{3l}{20} Y_E + \frac{7l}{20} Y_D + f_y \left(\frac{l}{6} Y_E + \frac{l}{3} Y_D \right) \right] \\
 \frac{1}{1+f_z} \left[\frac{3l}{20} Z_E + \frac{7l}{20} Z_D + f_z \left(\frac{l}{6} Z_E + \frac{l}{3} Z_D \right) \right] \\
 0 \\
 \frac{1}{1+f_z} \left[\frac{l^2}{30} Z_E + \frac{l^2}{20} Z_D + f_z \left(\frac{l^2}{24} Z_E + \frac{l^2}{24} Z_D \right) \right] \\
 \frac{1}{1+f_y} \left[\frac{-l^2}{30} Y_E - \frac{l^2}{20} Y_D + f_y \left(\frac{-l^2}{24} Y_E - \frac{l^2}{24} Y_D \right) \right]
 \end{array} \right]$$

$$\left\{ F_s^0 \right\} = m \Omega^2 \left[\begin{array}{c} \frac{1}{1+f_y} \left[\frac{-7l}{20} Z_E - \frac{3l}{20} Z_D + f_y \left(\frac{-l}{3} Z_E - \frac{l}{6} Z_D \right) \right] \\ \frac{1}{1+f_z} \left[\frac{7l}{20} Y_E + \frac{3l}{20} Y_D + f_z \left(\frac{l}{3} Y_E + \frac{l}{6} Y_D \right) \right] \\ 0 \\ \frac{1}{1+f_z} \left[\frac{-l^2}{20} Y_E - \frac{l^2}{30} Y_D + f_z \left(\frac{-l^2}{24} Y_E - \frac{l^2}{24} Y_D \right) \right] \\ \frac{1}{1+f_y} \left[\frac{-l^2}{20} Z_E - \frac{l^2}{30} Z_D + f_y \left(\frac{-l^2}{24} Z_E - \frac{l^2}{24} Z_D \right) \right] \\ \frac{1}{1+f_y} \left[\frac{-3l}{20} Z_E - \frac{7l}{20} Z_D + f_y \left(\frac{-l}{6} Z_E - \frac{l}{3} Z_D \right) \right] \\ \frac{1}{1+f_z} \left[\frac{3l}{20} Y_E + \frac{7l}{20} Y_D + f_z \left(\frac{l}{6} Y_E + \frac{l}{3} Y_D \right) \right] \\ 0 \\ \frac{1}{1+f_z} \left[\frac{l^2}{30} Y_E + \frac{l^2}{20} Y_D + f_z \left(\frac{l^2}{24} Y_E + \frac{l^2}{24} Y_D \right) \right] \\ \frac{1}{1+f_y} \left[\frac{l^2}{30} Z_E + \frac{l^2}{20} Z_D + f_y \left(\frac{l^2}{24} Z_E + \frac{l^2}{24} Z_D \right) \right] \end{array} \right]$$

APENDICE H

VETOR FORÇA DO DESBALANCEAMENTO DEVIDO À MASSA DE TESTE

O vetor desbalanceamento da massa de teste é obtido colocando-se em um ponto determinado, na periferia da seção transversal do rotor, uma massa m .

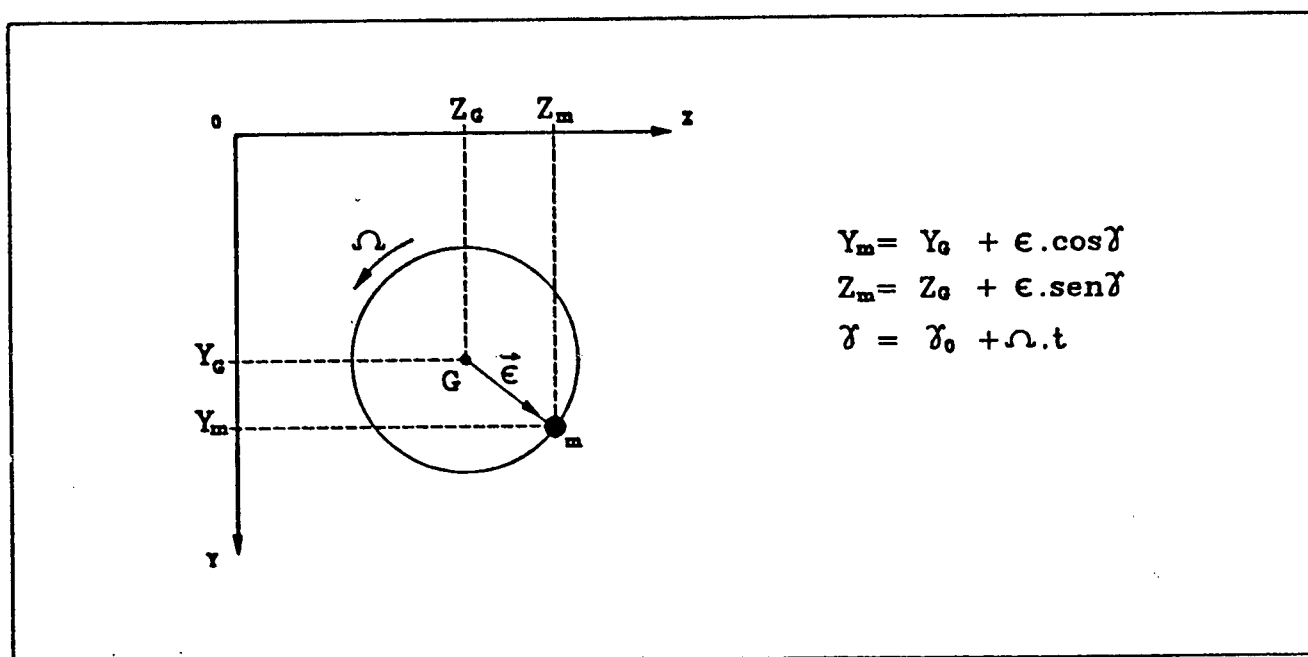


Figura J.1 - Massa de teste na periferia de uma seção.

$$Y_m = Y_G + \epsilon [\cos \gamma_0 \cos \Omega t - \sin \gamma_0 \sin \Omega t] \quad (J.1)$$

$$Z_m = Z_G + \epsilon [\sin \gamma_0 \cos \Omega t + \cos \gamma_0 \sin \Omega t] \quad (J.2)$$

$$\begin{Bmatrix} Y_m \\ Z_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_G \\ Z_G \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \epsilon \cos \gamma_0 \\ \epsilon \sin \gamma_0 \end{Bmatrix} \cos \Omega t + \begin{Bmatrix} -\epsilon \sin \gamma_0 \\ \epsilon \cos \gamma_0 \end{Bmatrix} \sin \Omega t \quad (J.3)$$

No instante $t=t_0$, tem-se que:

$$e_z = e \operatorname{sen} \gamma_0$$

$$e_y = e \operatorname{cos} \gamma_0$$

e reescreve-se a expressão (J.3) como:

$$\begin{Bmatrix} Y_m \\ Z_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_G \\ Z_G \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} e_y \\ e_z \end{Bmatrix} \operatorname{cos} \Omega t + \begin{Bmatrix} -e_z \\ e_y \end{Bmatrix} \operatorname{sen} \Omega t \quad (\text{J.4})$$

A força desbalanceadora nodal é dada por:

$$\{ F \} = \left[\begin{Bmatrix} Y_m \\ Z_m \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Y_G \\ Z_G \end{Bmatrix} \right] m \Omega^2 \quad (\text{J.5})$$

$$\{ F \} = m \Omega^2 \begin{Bmatrix} e_y \\ e_z \end{Bmatrix} \operatorname{cos} \Omega t + m \Omega^2 \begin{Bmatrix} -e_z \\ e_y \end{Bmatrix} \operatorname{sen} \Omega t \quad (\text{J.6})$$

$$\{ F \} = \{ F_c \} \operatorname{cos} \Omega t + \{ F_s \} \operatorname{sen} \Omega t \quad (\text{J.7})$$

Tem-se um desbalanceamento de massa concentrado em um nó do elemento. As excentricidades de massa nas direções vertical y e horizontal z , medidas em um instante $t=t_0$, são escritas como:

$$e_y = Y \quad \text{e} \quad e_z = Z$$

onde Y e Z são as coordenadas da massa no nó, medidas na posição inicial do elemento do rotor.

APENDICE I

ANALISE DE SENSIBILIDADE DA RESPOSTA DESBALANCEADA
A VARIACÃO DE MASSA

Para determinadas aplicações de rotores flexíveis, o balanceamento é efetuado através da variação na inércia do sistema. Neste caso, o objetivo é a determinação, dentre um conjunto de seções transversais do rotor, daquelas de maior sensibilidade da estrutura à variação de massa, em cada velocidade selecionada. Uma massa unitária é colocada em um nó determinado do modelo, ou seja, acrescenta-se o valor de massa unitária aos dois termos da matriz de inércia global da estrutura, que estão associados com os graus de liberdade dos deslocamentos transversais lineares deste nó, e obtém-se a nova matriz inercial $[M^*]$ do rotor. A nova equação global das vibrações forçadas é similar à expressão (4.17):

$$[M^*]\langle\ddot{q}\rangle - \Omega[G]\langle\dot{q}\rangle + [Ks]\langle q\rangle = \langle F\rangle \quad (I.1)$$

onde $[M^*]$ é a nova matriz representativa da inércia de translação, de torção e de rotação.

Calcula-se, em cada velocidade selecionada, a nova resposta desbalanceada do rotor, com a massa concentrada no nó, e efetua-se a comparação deste novo valor com a resposta desbalanceada original obtida através do sistema de equações (4.21) e (4.22). Em

cada rotação de interesse, repete-se o procedimento para todos os nós do modelo e levantam-se os pontos da estrutura que sofrem maior variação da resposta desbalanceada. Os nós mais sensíveis são potencialmente mais efetivos para a colocação das massas balanceadoras, na faixa de velocidades selecionadas para o balanceamento.

Exemplificando o procedimento aqui exposto, efetua-se a análise de sensibilidade para o exemplo de rotor apresentado no capítulo 5, modelado com 30 elementos. As seções transversais mais sensíveis do rotor foram identificadas para a faixa de velocidades que compreende a primeira e a segunda velocidades críticas. As figuras I.1, I.2 e I.3 mostram as curvas que relacionam a sensibilidade com o nó do modelo onde está colocada a massa unitária, para os mancais esquerdo (nó 1) e direito (nó 31). A linha continua das figuras representa a curva para o mancal esquerdo e a linha tracejada a curva para o mancal direito.

A figura I.1 apresenta as curvas para a velocidade de 1100 rpm, ou seja, na faixa de velocidades próximas à primeira velocidade crítica.

A figura I.2 mostra as curvas de sensibilidade para a velocidade de 3600 rpm, que está na faixa de velocidades intermediárias entre a primeira e a segunda crítica.

Já a figura I.3 fornece as curvas para a velocidade de 4200 rpm, que se encontra na faixa de velocidades próximas à segunda frequência crítica. As linhas continua e tracejada praticamente se superpõem.

Sintetizando os resultados mostrados pelas figuras, a tabela I.1 apresenta a localização das seções mais sensíveis do rotor nas três velocidades analisadas.

Tabela I.1 - Pontos de maior sensibilidade

| rotação (rpm) | Nós mais sensíveis |
|------------------|--------------------|
| 1100 | 15,16 |
| 3600 | 7,8,25,26 |
| 4200 | 8,24 |

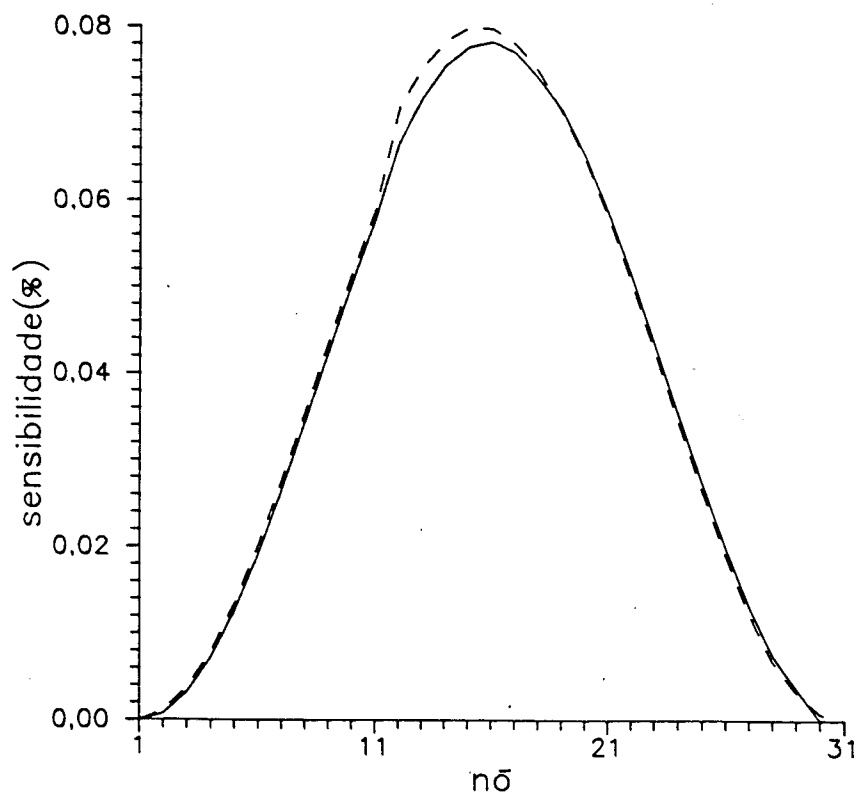


Figura I.1 - Curvas de sensibilidade da resposta desbalanceada do rotor à variação de massa, na velocidade de 1100 rpm.

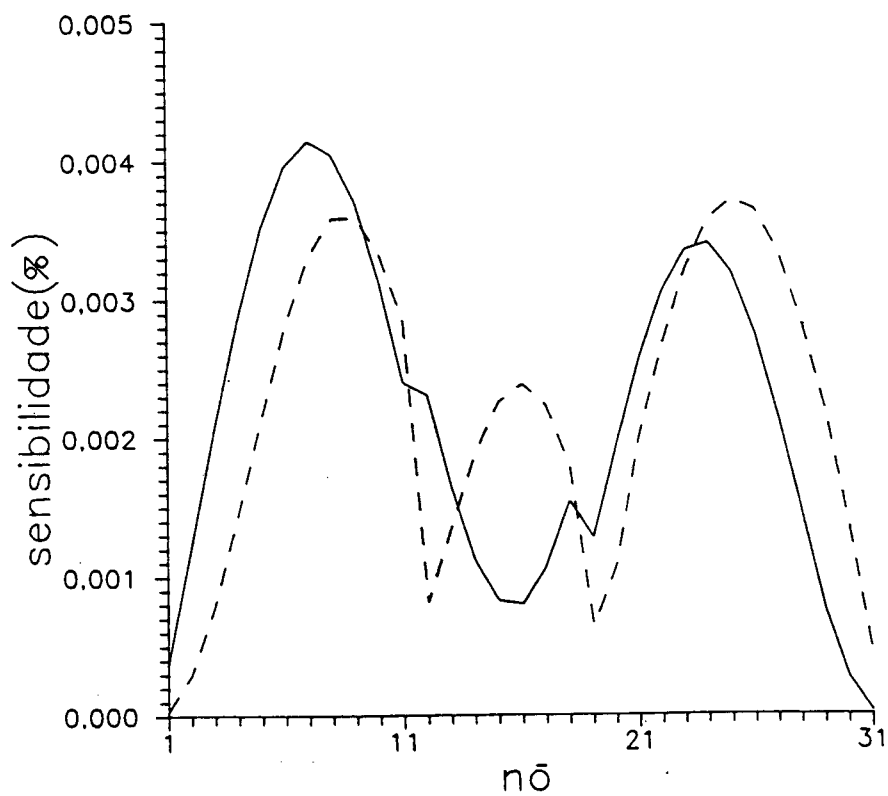


Figura I.2 - Curvas de sensibilidade da resposta desbalanceada do rotor à variação de massa, na velocidade de 3600 rpm.

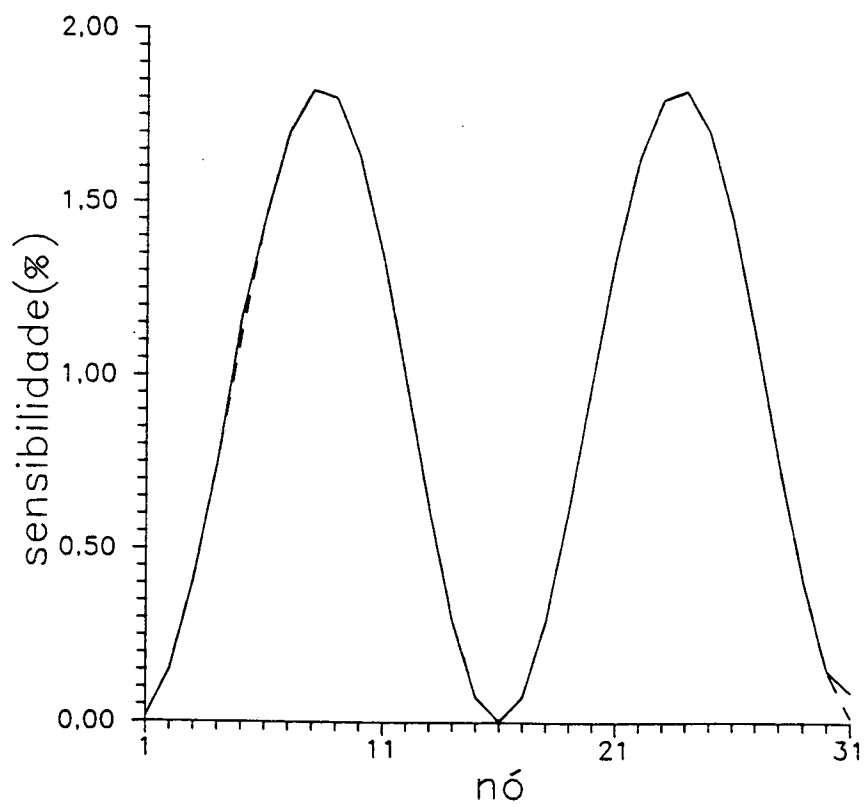


Figura I.3 - Curvas de sensibilidade da resposta desbalanceada do rotor à variação de massa, na velocidade de 4200 rpm.