

**JORGE LUIZ ERTHAL**

**MODELO CINESTÁTICO PARA  
ANÁLISE DE ROLAGEM EM  
VEÍCULOS**

**FLORIANÓPOLIS**

**2010**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**MODELO CINESTÁTICO PARA ANÁLISE DE  
ROLAGEM EM VEÍCULOS**

Tese submetida à  
Universidade Federal de Santa Catarina  
como parte dos requisitos para a  
obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica

**JORGE LUIZ ERTHAL**

Florianópolis, Abril de 2010

Catálogo na fonte pela Biblioteca Universitária  
da  
Universidade Federal de Santa Catarina

E73m Erthal, Jorge Luiz  
Modelo cinestático para análise de rolagem em veículos  
[tese] / Jorge Luiz Erthal ; orientador, Daniel Martins.  
- Florianópolis, SC, 2010.  
130 p.: il., grafs., tabs.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia mecânica. 2. Capotamento. 3. Helicóides.  
4. Centro de rolagem. 5. Método de Davies. I. Martins,  
Daniel. II. Universidade Federal de Santa Catarina.  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III.  
Título.

CDU 621

# **MODELO CINESTÁTICO PARA ANÁLISE DE ROLAGEM EM VEÍCULOS**

**JORGE LUIZ ERTHAL**

Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Mecânica, Área de concentração Projeto de Sistemas Mecânicos, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina.

---

Prof. Daniel Martins, Dr.Eng.  
Orientador

---

Prof. Lauro C. Nicolazzi, Dr.Eng.  
Co-orientador

---

Prof. Eduardo Alberto Fancello, D.Sc.  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Banca Examinadora:

---

Prof. Daniel Martins, Dr.Eng.  
Presidente

---

Prof. Tarcisio Antonio H. Coelho, Dr.  
Relator

---

Prof. Edison da Rosa, Dr.Eng.

---

Prof. Franco Giuseppe Dedini, Dr.

---

Prof. Henrique Simas, Dr.Eng.



*Siga o mestre,  
enfrente o demônio,  
lute até o fim,  
termine o jogo.  
(Sathya Sai Baba)*





## AGRADECIMENTOS

Ao meus orientadores, professores Daniel e Lauro, pela competência, respeito e paciência. Vocês me ensinaram muito mais do que imaginam.

À Tania e à Natália, pela certeza de que, mesmo estando distante, vocês sempre estiveram dentro do meu coração.

Aos meus pais e irmãos, Tata (in memoriam), Mãe (in memoriam), Teto, Nicha, Jura, Gaia, Ique e Nene, pela torcida e pelo amor compartilhado ao nosso jeito.

Aos meus colegas e amigos do Grupo de Análise Estrutural, Eduardo, Samuel, Carlos Henrique, Jucélio, Bavastri, Marco e Maurizio, pelo voto de confiança e pelo enorme esforço em garantir minha tranquilidade para concluir o trabalho. Extendo este agradecimento àqueles professores do DAMEC que, das mais variadas formas, me deram força.

Ao professor Acires Dias, pelo empréstimo da frase: "Aos trabalhadores brasileiros que, através de seus impostos, sustentam a estrutura universitária neste país, meus especiais agradecimentos."

À minha querida Família da Mística Andina, que Patchamama continue lhes dando alegria, amor, leveza, luz e inspiração para que possam reinventar a vida das pessoas.

Ao professor Kazuo, pela oportunidade concedida para participar do projeto PQI que viabilizou o doutorado.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Aos professores do GRANTE e do LAR, pelo convívio e pelo aprendizado.

Aos companheiros de luta Pedro "Firmino-ALfá", Juliana, Armin, Ronaldo, Françaó, Carol, Antonio, Diego, Dyego, Pam e a tantos outros (graças a Deus!) com quem tive o prazer de conviver durante este período da minha vida: VALEU GALERA!!!

Ao Humberto Sacolinha, meu amigo "véio", por me mostrar que a vida é bonita e é pra ser vivida - é só dar valor! Você é grande!

Às minhas queridas gurus Silvinha, Cláudia e Jana, por me ajudarem a explorar um pouco este universo desconhecido chamado "eu".

À vida, pelos momentos de alegria, tristeza, luta, brincadeiras, raiva, fluidez, ... e por ela ter-me oferecido tudo isso em forma de aprendizado.

Neste momento, meu coração é pura gratidão!



Resumo da Tese apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica.

## **MODELO CINESTÁTICO PARA ANÁLISE DE ROLAGEM EM VEÍCULOS**

**Jorge Luiz Erthal**

Abril / 2010

Orientador: Prof. Daniel Martins, Dr.Eng..

Co-orientador: Prof. Lauro C. Nicolazzi, Dr.Eng..

Área de Concentração: Projeto de Sistemas Mecânicos.

Palavras-chave: capotamento, helicoides, centro de rolagem, método de Davies.

Número de Páginas: 130

Este trabalho tem como objetivo propor um modelo matemático para análise do comportamento de um veículo submetido a um carregamento lateral crescente até atingir o limiar do capotamento. Modelos simplificados existentes não levam em conta o comportamento da cinemática da suspensão o que inviabiliza a representação da cambagem, bitola, transferência de carga, posição do centro de gravidade e, principalmente, a posição do centro de rolagem, normalmente considerado fixo no plano médio. Trata-se de um modelo quase-estático, com representação plano-frontal e com dois graus de liberdade. Compõe-se de carroceria e duas rodas, conectadas à carroceria através de duas suspensões tipo *McPherson*. A rigidez equivalente das molas é levada em consideração. A formulação matemática aplicada baseia-se no método de Davies, que propõe uma forma sistemática para a geração e solução das equações da cinemática e da estática de mecanismos. O método utiliza a teoria dos helicoides, a teoria dos grafos e as leis de Kirchhoff. Através do modelo, é possível analisar o movimento da carroceria, a migração do centro de rolagem e do centro de gravidade, a transferência de carga e a distribuição da carga vertical, até ser atingido o limiar do capotamento, em resposta a uma aceleração lateral. Também pode-se avaliar a diferença em relação ao Fator de Estabilidade Estática, parâmetro utilizado para avaliar a tendência de capotamento de um veículo. Para demonstrar o comportamento do centro de rolagem no mecanismo de dois graus de liberdade, é dado o enfoque de mecanismos em que o centro de rolagem e os polos são considerados como centros instantâneos de rotação. A contribuição está relacionada

com a representação cinemática mais apropriada proporcionada pelo modelo (com dois graus de liberdade), que consegue reproduzir, de forma adequada, a variação da cambagem, da bitola e, principalmente, a migração do centro de rolagem. Outra contribuição diz respeito à forma de geração das equações e da obtenção dos resultados, notavelmente facilitados pela aplicação do método de Davies.

Abstract of Thesis presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Mechanical Engineering.

## **A KINESTATIC MODEL FOR VEHICLE ROLLOVER ANALYSIS**

**Jorge Luiz Erthal**

April / 2010

Advisor: Prof. Daniel Martins, Dr.Eng..

Co-advisor: Prof. Lauro C. Nicolazzi, Dr.Eng..

Area of Concentration: Mechanical System Design.

Keywords: rollover, screw theory, roll center, Davies's Method.

Number of pages: 130

The present work aims at proposing a mathematical model for analyzing the performance of a vehicle submitted to an increasing lateral load till it reaches the rollover threshold. The existing simplified models do not take into account the kinematic behavior of the suspension mechanism and this makes it infeasible to have a representation of camber, track width, load transfer, center of gravity position - usually considered fixed to the midplane. It is a quasi-static model, with frontal plane representation, and two degrees of freedom. It consists of a body and two wheels connected to that body by means of two McPherson-type suspension mechanisms. The equivalent stiffness of the springs is taken into account. The applied mathematical formulation is based on Davies's method, which proposes a systematic way of generating and solving equations concerning kinematics and statics of mechanisms. The method uses screw theory, graph theory, and Kirchhoff's laws. Using this model, it is possible to analyze body movement, roll center and center of gravity migrations, load transfer, and vertical load distribution till it reaches the rollover threshold in response to a lateral acceleration. One can also assess the difference concerning the Static Stability Factor, a parameter used to evaluate the rollover tendency of a vehicle. In order to demonstrate the roll center behavior in a two-degree freedom mechanism, the theory of mechanisms' approach - in which the roll center and the poles are considered instant centers of rotation - was adopted. The contribution of the present work concerns a more adequate kinematic representation provided by the model (with two degrees of freedom), which manages to reproduce, in a more adequate way, the variation of camber, track width, and specially the roll center migration.

Another contribution is related to the form of generating equations and obtaining results, remarkably facilitated by the application of Davies's method.

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	p. 27
1.1	Localização do problema .....	p. 27
1.2	Motivação .....	p. 28
1.3	Definição do problema .....	p. 28
1.4	Objetivos .....	p. 29
1.5	Justificativa .....	p. 29
1.6	Organização do documento .....	p. 30
2	CENTRO DE ROLAGEM .....	p. 33
2.1	Fator de Estabilidade Estática .....	p. 33
2.2	Transferência de carga .....	p. 37
2.3	Centro de rolagem e polos .....	p. 37
2.4	Centro de rolagem e polos sob a ótica da teoria de mecanismos .....	p. 40
2.4.1	Teorema de Aronhold-Kennedy .....	p. 41
2.4.2	Diagrama do polígono .....	p. 42
2.4.3	Obtenção dos centros instantâneos a partir das velocidades .....	p. 43
2.4.4	Cadeias indeterminadas .....	p. 43
2.4.5	Mecanismos com mais de 1GL .....	p. 47
2.4.6	Técnicas baseadas na velocidade .....	p. 48
2.5	Comentários .....	p. 51
3	FERRAMENTAS DE ANÁLISE .....	p. 53
3.1	Análise de posição .....	p. 53
3.1.1	Método de Denavit-Hartenberg .....	p. 53
3.1.2	Método dos deslocamentos helicoidais sucessivos .....	p. 54
3.1.3	Comparação .....	p. 57
3.2	Análise cinestática (Método de Davies) .....	p. 57
3.2.1	Leis de Kirchhoff .....	p. 57
3.2.2	Helicoides .....	p. 58
3.2.2.1	Helicoides unitários .....	p. 60
3.2.2.2	Grau de liberdade .....	p. 63
3.2.2.3	Matrizes dos helicoides unitários .....	p. 64
3.2.2.4	Heliforças unitárias no plano .....	p. 65
3.2.3	Grafos .....	p. 67

3.2.4	Descrição do Método de Davies . . . . .	p. 71
3.2.4.1	Grafos $G_C$ , $G_M$ e $G_A$ do mecanismo . . .	p. 72
3.2.4.2	Matrizes de rede . . . . .	p. 72
3.2.4.3	Montagem dos sistemas . . . . .	p. 73
3.2.4.4	Solução dos sistemas . . . . .	p. 74
3.2.4.5	Procedimento proposto por Cazangi . .	p. 75
3.3	Obtenção do centro instantâneo através do método de Davies	p. 78
3.3.1	Caso plano . . . . .	p. 79
3.4	Comentários . . . . .	p. 80
4	DESCRIÇÃO DO MODELO . . . . .	p. 83
4.1	Visão geral do modelo . . . . .	p. 83
4.2	Caracterização da cadeia cinemática . . . . .	p. 84
4.3	Grafos . . . . .	p. 85
4.4	Cinemática de posição . . . . .	p. 90
4.4.1	Variáveis de posição . . . . .	p. 90
4.4.2	Configuração de referência . . . . .	p. 91
4.4.3	Posição e orientação atuais das juntas . . . . .	p. 93
4.4.4	Posição atual das extremidades da cadeia . . . . .	p. 95
4.4.5	Matriz erro de posição . . . . .	p. 96
4.4.6	Orientação atual da extremidade da cadeia . . . . .	p. 96
4.4.7	Vetor das restrições cinemáticas . . . . .	p. 97
4.5	Cinemática de velocidade . . . . .	p. 97
4.5.1	Matriz dos movimentos unitários normalizados . .	p. 97
4.5.2	Magnitudes dos movimentos . . . . .	p. 98
4.5.3	Matriz de rede dos movimentos unitários normalizados . . . . .	p. 98
4.5.4	Sistema de equações dos movimentos . . . . .	p. 99
4.6	Estática . . . . .	p. 100
4.6.1	Ações internas e externas . . . . .	p. 100
4.6.2	Matriz de rede das ações unitárias normalizadas . .	p. 103
4.6.3	Vetor das ações nos cortes . . . . .	p. 103
4.6.4	Solução da estática . . . . .	p. 104
4.7	Cinestática de posição . . . . .	p. 104
4.7.1	Relações constitutivas das molas . . . . .	p. 104
4.7.2	Vetor das restrições cinestáticas . . . . .	p. 104
4.7.3	Vetor das magnitudes cinestáticas . . . . .	p. 105
4.7.4	Solução do sistema . . . . .	p. 105
4.7.5	Etapa 1 - Solução da cinemática de posição . . . .	p. 105



4.7.6	Etapa 2 - Solução da estática . . . . .	p. 106
4.7.7	Etapa 3 - Solução da cinestática . . . . .	p. 107
4.8	Ângulo de rolagem da carroceria . . . . .	p. 107
4.9	Posição do centro de rolagem e dos polos . . . . .	p. 108
4.10	Verificação da influência do número de graus de liberdade . . . . .	p. 109
4.11	Diagrama do modelo proposto . . . . .	p. 110
4.12	Comentários . . . . .	p. 112
5	RESULTADOS . . . . .	p. 113
5.1	Descrição do teste . . . . .	p. 113
5.2	Magnitudes das posições e das cargas nas juntas . . . . .	p. 114
5.3	Fator de estabilidade estática . . . . .	p. 116
5.4	Polos e centro de rolagem . . . . .	p. 118
6	CONCLUSÕES . . . . .	p. 121
6.1	Conclusões . . . . .	p. 121
6.1.1	Sobre o modelo . . . . .	p. 121
6.1.2	Sobre o centro de rolagem . . . . .	p. 122
6.2	Recomendações para trabalhos futuros . . . . .	p. 123



## LISTA DE FIGURAS

1	Veículo rígido em uma curva para a direita. . . . .	p. 34
2	Veículo rígido em uma curva para a direita, no limiar do capotamento. . . . .	p. 35
3	Obtenção gráfica dos polos e do centro de rolagem de uma suspensão de braços sobrepostos . . . . .	p. 38
4	Centro de rolagem de uma suspensão de semi-eixos oscilantes conforme Aronhold-Kennedy. . . . .	p. 39
5	Centros instantâneos de um mecanismo de quatro barras . . . . .	p. 42
6	Polígono dos centros instantâneos do mecanismo de quatro barras. . . . .	p. 43
7	Centros instantâneos primários de um mecanismo de seis elos . . . . .	p. 44
8	Determinação do centro instantâneo $I_{36}$ . . . . .	p. 45
9	Posição dos centros instantâneos. . . . .	p. 45
10	Mecanismo dupla-borboleta. . . . .	p. 47
11	Mecanismo de cinco elos com dois graus de liberdade . . . . .	p. 48
12	Posição do centro instantâneo de rotação para $\omega_a = 1rad/s$ e $v_d = 2mm/s$ . . . . .	p. 49
13	Posição do centro instantâneo de rotação para $\omega_a = 1rad/s$ e $v_d = 35mm/s$ . . . . .	p. 49
14	Posição do centro instantâneo de rotação para $\omega_a = 0rad/s$ e $v_d = 35mm/s$ . . . . .	p. 50
15	Centro instantâneo de rotação - Q. . . . .	p. 50
16	Parâmetros cinemáticos de Denavit-Hartenberg. . . . .	p. 54
17	Posição de referência de um mecanismo de quatro barras. . . . .	p. 56
18	Configuração atual. . . . .	p. 56
19	Componentes de ações em cada tipo de junta. . . . .	p. 66
20	Mecanismo de Stephenson e seu grafo $G_C$ . . . . .	p. 67
21	Três percursos diferentes entre o nó 1 e o nó 4. . . . .	p. 68
22	Os dois circuitos do grafo da Figura 20. . . . .	p. 69
23	Árvore do grafo da Figura 20 gerada retirando-se as arestas $c$ e $f$ . . . . .	p. 69
24	Circuitos do grafo da Figura 20, gerados pelas respectivas cordas. . . . .	p. 70
25	Cortes sobre a árvore do grafo da Figura 20. . . . .	p. 70
26	Diagrama da análise cinestática através do Método de Davies. . . . .	p. 75

27	Diagrama da análise cinestática através do Método de Davies incluindo a contribuição de Cazangi (2008). . . . .	p. 77
28	Centro instantâneo de rotação representado por um heligiro.	p. 78
29	Centro instantâneo de rotação representado por um heligiro no plano. . . . .	p. 79
30	Esquema cinemático do modelo. . . . .	p. 83
31	Cadeia cinemática do modelo. . . . .	p. 84
32	Dimensões do modelo. . . . .	p. 85
33	Grafo dos acoplamentos diretos - $G_C$ . . . . .	p. 86
34	Abertura dos circuitos nas cordas. . . . .	p. 89
35	Grafo dos Movimentos - $G_M$ . . . . .	p. 90
36	Grafo das Ações - $G_A$ . . . . .	p. 90
37	Grafo das Ações com os cortes. . . . .	p. 91
38	Identificação das variáveis de posição das juntas. . . . .	p. 92
39	Cadeia cinemática na configuração de referência (posição zero). . . . .	p. 92
40	Caminhos para atingir as extremidades da cadeia aberta. . . . .	p. 94
41	Configuração inicial para a solução da cinemática de posição. . . . .	p. 95
42	Configuração inicial para a solução da cinestática. . . . .	p. 107
43	Diagrama do modelo proposto. . . . .	p. 111
44	Aplicação das forças externas. . . . .	p. 113
45	Variação da cambagem com a aceleração lateral. . . . .	p. 114
46	Variação da bitola com a aceleração lateral. . . . .	p. 114
47	Forças nas molas. . . . .	p. 115
48	Velocidades dos amortecedores. . . . .	p. 115
49	Transferência de carga em função da aceleração lateral. . . . .	p. 115
50	Ângulo de rolagem em função da aceleração lateral. . . . .	p. 115
51	Deslocamento do centro de gravidade. . . . .	p. 116
52	Deslocamento do centro de rolagem. . . . .	p. 116
53	Influência da rigidez equivalente das molas sobre o fator de estabilidade estática. . . . .	p. 117
54	Influência da altura do centro de gravidade sobre o fator de estabilidade estática. . . . .	p. 117
55	Mudança da configuração com a aplicação da carga lateral. . . . .	p. 119
56	Alinhamento dos centros de rolagem . . . . .	p. 119
57	Variação do ângulo de rolagem para duas posições do centro de gravidade. . . . .	p. 120

## LISTA DE TABELAS

1	Tipos de suspensão utilizadas em veículos utilitários esportivos de luxo . . . . .	p. 30
2	Valores típicos do Fator de Estabilidade Estática . . . . .	p. 36
3	Valores constantes utilizados no modelo. . . . .	p. 86
4	Variáveis de posição das juntas . . . . .	p. 93
5	Magnitudes das ações nas juntas . . . . .	p. 101
6	Valores iniciais para a solução da cinemática de posição . .	p. 106
7	Variação do fator de estabilidade com a rigidez equivalente das molas. . . . .	p. 117
8	Variação do fator de estabilidade com a altura do centro de gravidade. . . . .	p. 118
9	Posição do centro de rolagem em função das velocidades. .	p. 120



## LISTA DE SÍMBOLOS

$SSF$	Fator de Estabilidade Estática
$n$	número total de elos de um mecanismo
$N_P$	número de polos de um mecanismo
$\$^M$	heligiro
$\$^A$	heliforça
$\hat{\$}^M$	heligiro normalizado
$\varphi$	magnitude de um heligiro
$\hat{\$}^A$	heliforça normalizada
$\psi$	magnitude de uma heliforça
$\lambda$	ordem do sistema de helicoides
$d$	dimensão do helicóide
$e$	número de juntas de uma cadeia cinemática
$f_i$	grau de liberdade unitário de uma junta
$c_i$	grau de restrição unitário de uma junta
$F$	grau bruto de liberdade da cadeia cinemática
$C$	grau bruto de restrição da cadeia super-restringida
$[\mathbf{M}_D]_{d,F}$	matriz dos movimentos unitários
$[\mathbf{A}_D]_{d,C}$	matriz das ações unitárias
$[\hat{\mathbf{M}}_D]_{d,F}$	matriz dos movimentos unitários normalizados
$[\hat{\mathbf{A}}_D]_{d,C}$	matriz das ações unitárias normalizadas
$\{\boldsymbol{\varphi}\}_{F,1}$	vetor das magnitudes dos movimentos unitários
$\{\boldsymbol{\psi}\}_{C,1}$	vetor das magnitudes das ações unitárias
$l$	número de circuitos de um grafo
$k$	número de cortes existentes no grafo
$[\hat{\mathbf{M}}_N]_{dl,F}$	matriz de rede dos movimentos unitários normalizados
$[\hat{\mathbf{A}}_N]_{dk,C}$	matriz de rede das ações unitárias normalizadas

$F_N$	grau líquido de liberdade da cadeia cinemática
$C_N$	grau líquido de restrição da cadeia super-restringida
$\{\boldsymbol{\varphi}_P\}_{F_N,1}$	vetor das magnitudes dos heligiros primários
$\{\boldsymbol{\psi}_P\}_{C_N,1}$	vetor das magnitudes das heliforças primárias
$\{\boldsymbol{\varphi}_S\}_{dl,1}$	vetor das magnitudes dos heligiros secundários
$\{\boldsymbol{\psi}_S\}_{dk,1}$	vetor das magnitudes das heliforças secundárias
$[\hat{\mathbf{M}}_{NP}]_{dl,F_N}$	matriz de rede dos heligiros primários
$[\hat{\mathbf{A}}_{NP}]_{dk,C_N}$	matriz de rede das heliforças primárias
$[\hat{\mathbf{M}}_{NS}]_{dl,dl}$	matriz de rede dos heligiros secundários
$[\hat{\mathbf{A}}_{NS}]_{dk,dk}$	matriz de rede das heliforças secundárias
$\mathbf{I}_C$	matriz de incidência
$\mathbf{Q}_{A_{int}}$	matriz dos cortes expandida
$\mathbf{Q}_{A_{ext}}$	matriz dos cortes das ações externas
$\mathbf{Q}_A$	matriz dos cortes ampliada
$\mathbf{q}_{P_{11,1}}$	vetor das magnitudes de posição das juntas
$\mathbf{P}_0$	matriz das posições de referência das juntas
$\mathbf{U}_0$	matriz das orientações de referência das juntas
$\mathbf{P}_{0_{cam1}}$	matriz das posições de referência das extremidades da cadeia aberta percorrendo os caminhos 1
$\mathbf{P}_{0_{cam2}}$	matriz das posições de referência das extremidades da cadeia aberta percorrendo os caminhos 2
$\mathbf{s}_0$	vetor posição atual da junta
$\mathbf{s}$	vetor orientação atual da junta
$\mathbf{P}_{cam1}$	matriz das posições atuais das extremidades da cadeia aberta percorrendo os caminhos 1
$\mathbf{P}_{cam2}$	matriz das posições atuais das extremidades da cadeia aberta percorrendo os caminhos 2
$\boldsymbol{\varepsilon}_P$	matriz dos erros de posição



<b>R</b>	matriz de rotação
<b>I</b>	matriz identidade
$\boldsymbol{\varepsilon}_\theta$	vetor erro de orientação
$\boldsymbol{\varepsilon}$	vetor das restrições cinemáticas de posição
$\hat{\mathbf{A}}_{D_{int}}$	matriz das ações normalizadas internas
$\mathbf{P}_{ext}$	matriz das posições de referência das ações externas
$k_{mola}$	rigidez equivalente das molas
$L_0$	comprimento inicial das molas
$\boldsymbol{\Theta}$	vetor das restrições cinestáticas
$\phi$	ângulo de rolagem
$(X_R, Y_R)$	coordenadas do centro de rolagem
$(X_P, Y_P)$	coordenadas do polo
$SSF_{DIN}$	fator de estabilidade estática segundo a norma DIN
$SSF_{mod}$	fator de estabilidade estática calculado através do modelo
$(X_G, Y_G)$	coordenadas do centro de gravidade do veículo



## 1 INTRODUÇÃO

### 1.1 Localização do problema

Os fatores que envolvem o capotamento de veículos têm sido intensamente investigados tendo em vista o aumento da ocorrência de acidentes. As estatísticas colocam o capotamento como o maior causador de mortes em acidentes com veículos utilitários e caminhões (NHTSA, 2005).

A tendência ao capotamento pode ser identificada pelo Fator de Estabilidade Estática (*Static Stability Factor - SSF*), definido pela relação entre a metade da bitola e a altura do centro de gravidade a partir do nível da pista (HAC, 2002). Este índice, no entanto, desconsidera quaisquer influências decorrentes do movimento da suspensão, rigidez das molas, rigidez dos pneus e carga transportada.

A influência da suspensão sobre o fator de estabilidade se dá através da variação da bitola, da transferência de forças para a carroceria, do posicionamento do centro de rolagem e do ângulo de rolagem. Segundo Hac (2002), em uma situação de manobra de emergência, o fator de estabilidade estática pode sofrer variações de até 25% caso se esteja ou não levando em consideração os efeitos da suspensão.

Modelos desenvolvidos para o estudo preliminar da dinâmica de veículos utilizam esquemas simplificados, restringindo o deslocamento da suspensão somente na vertical, como por exemplo em (GILLESPIE, 1992) e (HAC, 2002). Modelos mais precisos levam em conta as características cinemáticas da suspensão, podendo representar a variação da cambagem da bitola e da convergência (BLUNDELL; HARTY, 2004). No entanto, quanto maior o grau de realismo do modelo, mais complexo ele se torna e mais trabalhosa é a geração e a solução das equações que representam o fenômeno.

Como forma alternativa aos métodos tradicionais para a solução da cinemática e da estática, a **teoria dos helicoides**, *screw theory*, tem-se mostrado uma ferramenta bastante versátil para a construção das equações cinemáticas e de equilíbrio nos mecanismos (TSAI, 1999). O uso da teoria dos grafos permite que tais equações possam ser obtidas de forma sistemática (WOJNAROWSKI, 1995). O **método de Davies** utiliza as teorias dos helicoides e dos grafos juntamente com as leis de Kirchhoff para equacionar e resolver a cinemática e a estática de mecanismos de forma concisa e compacta (DAVIES, 2000). Já consagrado na pesquisa da robótica no Laboratório de Robótica da UFSC (CAMPOS, 2004) (DOURADO, 2005) (SANTOS, 2006) (CRUZ, 2007) (SIMAS, 2008) (CAZANGI, 2008), o método possui um grande potencial de uso na

modelagem de veículos, em particular em sistemas mecânicos tais como suspensões e sistemas de direção, devido à facilidade de se estabelecer e resolver relações entre força e velocidade.

Este trabalho tem o objetivo de apresentar um modelo matemático para análise do comportamento de um veículo em curva, desenvolvendo uma velocidade crescente até se atingir limiar do capotamento. Mesmo sendo relativamente simples, o modelo fornece informações importantes relacionadas ao deslocamento do centro de gravidade e do centro de rolagem, permitindo avaliar com maior precisão o fator de estabilidade estática.

Por representar corretamente a geometria da suspensão, o modelo permite que se obtenha a variação da cambagem e da bitola, parâmetros que são utilizados na análise do comportamento da suspensão.

## 1.2 Motivação

Apesar da disponibilidade de programas voltados para modelagem e simulação de sistemas multicorpos, tais como *ADAMS* (MSC SOFTWARE CORPORATION, 2006) e *SIMPACK* (INTECH GMBH, 2009), nem sempre é possível o acesso a estas plataformas, por conta de aspectos como custo e complexidade. Mesmo no caso de programas mais simples como o *Working Model 2D* (DESIGN SIMULATION TECHNOLOGIES, 2010), o uso de programas fechados diminui a sensibilidade do projetista quanto a detecção de eventuais instabilidades no comportamento matemático do modelo, pela falta de visualização das equações algébricas.

A teoria dos helicoides tem sido aplicada em manipuladores robóticos, e, em menor escala, em mecanismos de suspensão. No entanto, não se tem notícias, até então, de publicações envolvendo a aplicação do método de Davies na análise de suspensões.

Auxiliado pela teoria dos helicoides, o método de Davies propõe uma forma sistemática para a obtenção das equações cinemáticas e de equilíbrio estático em cadeias cinemáticas, possibilitando o seu uso em rotinas computacionais.

## 1.3 Definição do problema

Tendo em vista a imprecisão no cálculo do fator de estabilidade estática e as potencialidades do método de Davies, propõe-se o desenvolvimento de um modelo matemático quase-estático, utilizando o método de Davies, que permita a análise do comportamento lateral de um veículo até o limiar do

capotamento. São incorporadas as características cinemáticas específicas da suspensão e as propriedades das molas.

#### **1.4 Objetivos**

O trabalho tem como objetivo geral aplicar o método de Davies em um modelo matemático que represente o comportamento de capotamento de veículos, incluindo a cinemática da suspensão e as características das molas.

Como objetivos específicos, tem-se:

- Criar um modelo quase-estático plano de um veículo, contendo carroceria, suspensões direita e esquerda do tipo McPherson, molas e pneus, utilizando a representação por helicoides.
- Aplicar a teoria dos grafos ao modelo a fim de avaliar sua eficiência na montagem dos sistemas de equações representativas do modelo.
- Utilizando o método de Davies, desenvolver e resolver as equações da cinemática e da estática do modelo para se obter as informações necessárias à análise do comportamento lateral do veículo.

#### **1.5 Justificativa**

Um modelo matemático deve ser tão complexo quanto necessário e tão simples quanto possível. Esforço computacional, disponibilidade de tempo, facilidade de implementação e análise são fatores que devem ser levados em consideração na formulação de um modelo. Deve-se utilizar elementos que agilizem a obtenção das equações e facilitem a busca e análise dos resultados.

O método de Davies sistematiza a geração das equações de interesse bem como facilita a obtenção e a análise dos resultados. Centros instantâneos e o centro de rolagem são obtidos através do grafo dos movimentos e das propriedades relativas aos helicoides.

O modelo pode servir como base para o desenvolvimento de uma ferramenta de análise do comportamento lateral de veículos, auxiliando no desenvolvimento do projeto de suspensões.

A escolha do tipo de suspensão deve-se à existência de elos deslizantes, o que deixa o modelo cinemático mais abrangente. Além disso, trata-se de um tipo de suspensão que também é utilizado nos veículos utilitários de luxo, conforme apresentado na Tabela 1.

Tabela 1: Tipos de suspensão utilizadas em veículos utilitários esportivos de luxo (EDITORA ABRIL, 2010) (BEST CARS WEB SITE, 2010) (WEBMOTORS, 2010)

fabricante / modelo	dianteira		traseira		
	braços sobrepostos	McPherson	braços sobrepostos	multibraços	eixo rígido
Mercedes Benz / Classe M	X			X	
Toyota / Hilux	X				X
BMW / X5	X			X	
VW / Touareg	X		X		
Porsche / Cayenne	X			X	
Ford / Edge		X		X	
GM / Captiva		X		X	
Honda / CRV		X	X		
Hundai / Tucson		X		X	
Suzuki / Gran Vitara		X		X	
Mitsubishi / Pajero TR4		X		X	
Mitsubishi / L200	X				X
Mitsubishi / Pajero Full	X			X	

A principal contribuição deste trabalho relaciona-se com a aplicação do método de Davies na modelagem de suspensões de veículos, já que não se tem encontrado publicações neste sentido.

## 1.6 Organização do documento

Os símbolos em negrito representam vetores e matrizes e seguem o padrão utilizado em Davies (2000).

A tese está dividida em seis capítulos, buscando estabelecer a sequência natural entre a introdução ao tema, a definição e características do centro de rolagem, as ferramentas utilizadas para a análise, a descrição do modelo proposto, os resultados obtidos e as conclusões.

No Capítulo 2 apresenta-se a definição e os métodos de obtenção do centro de rolagem, incluindo a sua obtenção pelo método de Davies.

No Capítulo 3, apresentam-se as ferramentas matemáticas utilizadas na composição do modelo, no que diz respeito à análise de posição, velocidade e estática. Faz-se a descrição do Método de Davies e de suas ferramentas básicas: os helicoides, os grafos e as leis de Kirchhoff.

O modelo proposto é descrito no Capítulo 4. Nele se inclui o cálculo da posição, da velocidade e da condição de equilíbrio estático do modelo cinemático proposto. A partir dos resultados obtidos, calcula-se as posições do centro de gravidade e do centro de rolagem e as demais características necessárias para a análise do comportamento lateral do veículo (cambagem, bitola, transferência de carga) em função das características geométricas e elásticas da suspensão. Todos os cálculos são desenvolvidos através da representação por helicoides.

No Capítulo 5 são apresentados os resultados obtidos do modelo, enfatizando o comportamento do centro de rolagem.

No Capítulo 6 apresentam-se as conclusões referentes aos resultados obtidos a partir do modelo e também sobre a aplicação das ferramentas matemáticas apresentadas.





## 2 CENTRO DE ROLAGEM

O centro de rolagem tem sido utilizado na análise do comportamento das suspensões devido à facilidade de identificação e por servir como referência na análise do comportamento da cambagem, da distância entre rodas (bitola) e da rolagem de um veículo. É utilizado como centro de movimento da carroceria e como ponto de aplicação das forças originadas do contato do pneu com o piso.

O uso do centro de rolagem, no entanto, limita-se a pequenos giros da carroceria pois é definido por norma como um ponto situado no plano médio do veículo (GILLESPIE, 1992). Tal definição não pode ser utilizada na análise da tendência ao capotamento, visto que nesta situação o ângulo de rolagem do chassi é significativo. Além disso, quando a carroceria rola, o centro de rolagem desloca-se tanto lateralmente quanto verticalmente e a definição dada pela norma não mais pode ser aplicada (MITCHELL, 2007).

Modelos planos tem representado inadequadamente o comportamento da suspensão visto que consideram o mecanismo com apenas um grau de liberdade (GILLESPIE, 1992) (HAC, 2002) (MILLIKEN; MILLIKEN, 1995). Isto faz com que o movimento da carroceria não seja representado da forma correta, o mesmo acontecendo para o centro de rolagem.

Neste capítulo são apresentados os parâmetros que interferem no comportamento lateral e na tendência ao capotamento de um veículo enfatizando a influência do centro de rolagem.

Apresentam-se ainda técnicas de obtenção do centro de rolagem sob a ótica da teoria cinemática de mecanismos, nas quais o centro de rolagem e os polos são tratados como centros instantâneos de rotação.

Demonstra-se que a maioria das abordagens apresentadas aplicam-se apenas a mecanismos com um grau de liberdade, casos em que os centros instantâneos dependem apenas da configuração cinemática. Métodos baseados nas velocidades, entre os quais está o método de Davies, são os mais usados em mecanismos com mais de um grau de liberdade.

### 2.1 Fator de Estabilidade Estática

Apesar de representar uma pequena porcentagem de todos os acidentes, o capotamento é a maior causa de ferimentos graves e mortes (NHTSA, 2005), (SAFERCAR, 2005). Pesquisas apontam no sentido de investigar as causas de acidentes e os efeitos sobre os ocupantes com o objetivo de sugerir medidas preventivas no projeto de veículos e na construção de estradas

(PARENTEAU; SHAH, 2000), (WINKLER, 2000).

A forma mais simples de se estimar a tendência ao capotamento de um veículo é através do **Fator de Estabilidade Estática** (HAC, 2002), cuja obtenção é descrita a seguir.

Enquanto descreve uma curva, a força, centrípeta produzida pelo contato dos pneus com a pista, obriga o veículo a se manter sobre a curva. Nesta condição, o veículo está submetido às forças representadas na Figura 1, caso em que ele faz uma curva para a direita. As grandezas  $h_{CG}$  e  $b$  representam, respectivamente a altura do centro de gravidade e a bitola.

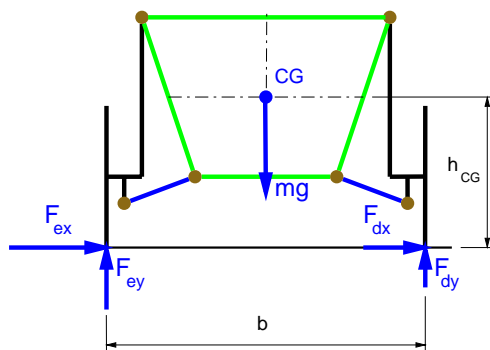


Figura 1: Veículo rígido em uma curva para a direita.

Os esforços a que o modelo está submetido são:

- $F_{e_x}$  e  $F_{d_x}$  - forças de atrito nas rodas esquerda e direita respectivamente;
- $m.g$  - força peso, correspondente à massa suspensa, sendo  $g$  a aceleração da gravidade;
- $F_{e_y}$  e  $F_{d_y}$  - forças verticais de contato nas rodas esquerda e direita respectivamente.

Equacionando-se as forças horizontais, tem-se

$$F_{e_x} + F_{d_x} = m.a_c \quad (2.1)$$

sendo  $a_c$  a aceleração centrípeta.

Do somatório das forças verticais, tem-se

$$F_{e_y} + F_{d_y} = m.g \quad (2.2)$$

No limiar do capotamento, a roda interna à curva, a direita neste exemplo, perde o contato com a pista.

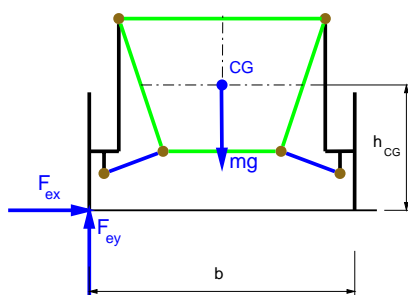


Figura 2: Veículo rígido em uma curva para a direita, no limiar do capotamento.

Nas expressões (2.1) e (2.2), as reações  $F_{dx}$  e  $F_{dy}$  se anulam, restando

$$F_{ex} = m \cdot a_c \quad (2.3)$$

e

$$F_{ey} = m \cdot g. \quad (2.4)$$

Do somatório de momentos em relação ao centro de gravidade, tem-se

$$F_{ex} \cdot h_{CG} - F_{ey} \cdot \frac{b}{2} = 0. \quad (2.5)$$

Substituindo-se (2.3) e (2.4) em (2.5), tem-se

$$m \cdot a_c \cdot h_{CG} - m \cdot g \cdot \frac{b}{2} = 0 \quad (2.6)$$

e, isolando-se a aceleração, chega-se a

$$\frac{a_c}{g} = \frac{b}{2 \cdot h_{CG}} = SSF \quad (2.7)$$

sendo SSF o **Fator de Estabilidade Estática**, do inglês *Static Stability Factor*, dado por

$$SSF = \frac{b}{2 \cdot h_{CG}}. \quad (2.8)$$

A Tabela 2 apresenta alguns valores típicos para o fator de estabilidade estática.

Tabela 2: Valores típicos do fator de estabilidade estática (SSF) (MELO; BARBIERI; BARBIERI, 2006),(NHTSA, 2005).

Veículo	Fator de estabilidade estática (SSF)
Carros de passeio	1,3 a 1,5
Picapes e furgões	0,8 a 1,2
Caminhões pesados	0,5
Caminhões-tanques	0,26

O fator de estabilidade estática leva em conta somente as medidas da bitola e da altura do centro de gravidade e considera que o veículo é um corpo rígido. No entanto, quando o veículo é submetido a acelerações laterais elevadas, a suspensão sofre deflexões que alteram a posição do centro de gravidade e a bitola, alterando assim o valor do fator de estabilidade estática em relação ao valor fornecido pela expressão (2.8) (HAC, 2002).

Segundo Hac (2002), no caso de veículos utilitários, caso seja levada em consideração a influência da suspensão, pode ocorrer uma redução aceleração lateral limite de até 25% do valor obtido pela expressão (2.8).

Técnicas para melhorar a estimativa do limiar do capotamento tem sido propostas. Gillespie (1992) desenvolve expressões analíticas para a obtenção do fator de estabilidade estática, levando em conta o deslocamento lateral do centro de gravidade. Dixon (1996) inclui a deformação lateral dos pneus e os efeitos giroscópicos devido à rotação das rodas. Hac (2002) propõe linearizações no deslocamento da suspensão para representar a elevação do centro de gravidade e a variação da bitola.

Chagas, Neves e Sarzeto (2005) comparam o comportamento das suspensões com braços sobrepostos e McPherson com relação ao fator de estabilidade estática. Os resultados apresentados mostram a forte influência do tipo de suspensão na dinâmica de rolagem de veículos. Travis et al. (2004) utilizam veículos rádio-controlados em escala para investigar a influência de parâmetros como rigidez das molas, amortecedores, altura do centro de rolagem e tipos de pneus, na tendência ao capotamento.

Whitehead et al. (2004) estudam a influência da altura do centro de gravidade, peso total e distribuição das massas na tendência ao capotamento. Apesar de não levarem em consideração os efeitos da cinemática da suspensão, os autores reconhecem que tais efeitos influenciam na posição dos cen-

tros de rolagem, na variação da bitola e que podem introduzir as chamadas forças de macaqueamento, que tendem a elevar o veículo quando solicitado pelas forças laterais.

A linearização imposta ao comportamento cinemático da suspensão inviabiliza a aplicação dos modelos citados na análise da rolagem e capotamento, devido aos grandes deslocamentos que ocorrem nestas situações.

## 2.2 Transferência de carga

A transferência de carga influencia significativamente na estabilidade lateral dos veículos, principalmente aqueles com centro de gravidade elevado tais como vans e caminhonetes. Para manter o veículo longe da condição de capotamento, os fabricantes procuram limitar a aceleração lateral máxima. Isto é feito controlando-se a aderência dos pneus através do balanço da rolagem entre a dianteira e a traseira de modo a modificar a transferência de carga nos eixos (NICOLAZZI; ROSA; LEAL, 2001).

Unindo-se o centro de rolagem dianteiro com o traseiro tem-se o eixo de rolagem, que é o eixo em torno do qual o veículo rola durante uma manobra em curva. O eixo de rolagem só tem significado quando na presença do centro de gravidade. A distância entre centro de gravidade e o eixo de rolagem gera um braço de momento. Na presença de uma aceleração lateral, o tamanho do braço, combinado com a rigidez das molas e das barras estabilizadoras, definem o quanto a carroceria rola e a quantidade de carga transferida entre as rodas. Utilizando-se diferentes tipos de suspensão e rigidez de molas nos eixos dianteiro e traseiro pode-se distribuir o momento da massa suspensa de forma a produzir maior ou menor transferência de carga e assim equilibrar o veículo da forma desejada (NICOLAZZI; ROSA; LEAL, 2001).

## 2.3 Centro de rolagem e polos

Devido à facilidade de localização e visualização, o centro de rolagem se torna um parâmetro de referência bastante útil nos estágios iniciais do projeto, sem necessidade de se utilizar modelos complicados ou protótipos. A estimativa prévia do centro de rolagem permite que ele seja ajustado para satisfazer os requisitos de desempenho do veículo relacionados com o ângulo de rolagem e a transferência de carga em cada um dos eixos (MITCHELL, 2007).

O centro de rolagem é o único ponto de um plano vertical que passa pelo centro do eixo que, num determinado momento, permanece sem movimento. É, portanto, o ponto em torno do qual a carroceria começa a girar

quando submetida a uma força lateral. Sua posição determina:

- a transferência de carga entre as rodas,
- o desgaste dos pneus, visto que a variação da sua altura altera o valor da bitola e
- a variação da cambagem.

A cambagem muda com o deslocamento da suspensão e com a rolagem da carroceria. Pequenas alterações na cambagem dianteira e traseira podem ser usadas para regular a dirigibilidade. Contudo, cambagem excessiva pode resultar em perda de eficiência na frenagem devido à redução da área de contato dos pneus com o piso. A variação da cambagem quando a suspensão é comprimida pode ser estimada pela posição do centro de rolagem (MILLIKEN; MILLIKEN, 1995).

Segundo as normas SAE J670e (GILLESPIE, 1992) e DIN 70000 (REIMPELL; STOLL; BETZLER, 2001), o centro de rolagem é o ponto sobre o plano vertical transversal ao longo dos centros das rodas e equidistante delas, onde forças laterais podem ser aplicadas sobre a massa suspensa, sem produzir deslocamento angular (rolagem) na carroceria.

Segundo a norma DIN, o centro de rolagem é obtido pela interseção do plano médio vertical do veículo com a linha que liga o centro de contato do pneu com o piso até o centro instantâneo da suspensão, denominado de **polo**. A Figura 3 mostra a obtenção dos polos e do centro de rolagem para a suspensão de braços sobrepostos transversais.

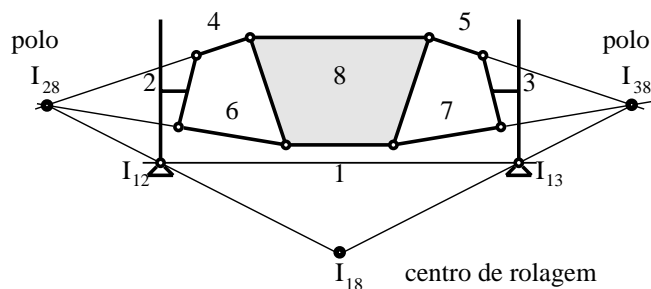


Figura 3: Obtenção gráfica dos polos e do centro de rolagem de uma suspensão de braços sobrepostos (JAZAR, 2008).

O cruzamento das retas definidas pelos braços 4 e 6 define o **polo**  $I_{28}$ , que representa o centro instantâneo de rotação entre a roda esquerda (2) e

carroceria (8). O cruzamento das retas definidas pelos braços 5 e 7 define o **polo**  $I_{38}$ . Os centros  $I_{12}$  e  $I_{13}$  representam os centros instantâneos entre o piso (1) e cada roda (2 e 3).

O **centro de rolagem**  $I_{18}$ , entre a carroceria (8) e o piso (1), é obtido pelo cruzamento da reta passando pelos pontos  $I_{28}$  e  $I_{12}$  com a reta que une os pontos  $I_{38}$  e  $I_{13}$ .

A determinação geométrica do centro de rolagem, para vários tipos de suspensão, pode ser encontrada em Milliken e Milliken (1995), Dixon (1996), Reimpell, Stoll e Betzler (2001), Jazar (2008) e em Nicolazzi, Rosa e Leal (2001).

A definição dada pela norma limita-se à posição simétrica, ou seja, ao caso em que a carroceria não está rolando e também considera que o mecanismo possui apenas um grau de liberdade. Mitchell (2007) explica que carros de série raramente são submetidos a grandes forças laterais. Poucos motoristas utilizam mais do que 0,3g mesmo em situações de emergência. Consequentemente, a análise de carros de série é limitada a pequenas cargas laterais, ignorando-se a rolagem e o movimento da suspensão e tratando-se o centro de rolagem como um ponto estático.

Caso se deseje analisar o mecanismo de transferência de carga ou o limiar do capotamento, é necessário avaliar o que acontece com o centro de rolagem e os polos em condições assimétricas, como é o caso de uma curva.

A Figura 4 mostra que, numa situação de curva, as configurações das suspensões direita e esquerda são diferentes e o centro de rolagem sofre um deslocamento, não permanecendo no plano médio do veículo.

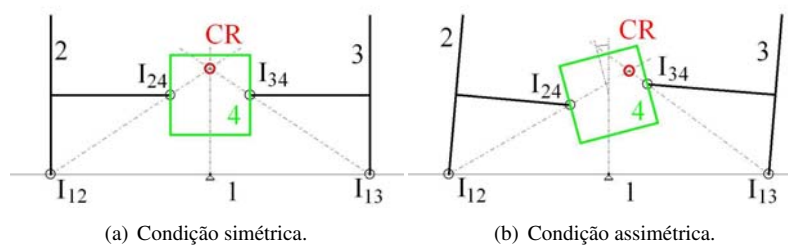


Figura 4: Centro de rolagem de uma suspensão de semi-eixos oscilantes conforme Aronhold-Kennedy.

Além do centro de rolagem, os polos também são pontos de referência

importantes na análise do comportamento da suspensão. Milliken e Milliken (1995), Mitchell et al. (2008) e Gillespie (1992) apresentam uma forma prática de se visualizar o efeito da posição dos polos. A suspensão é representada por um único braço virtual ligando o cubo da roda ao respectivo polo, denominado de **braço oscilante equivalente**. A posição e o ângulo do braço oscilante equivalente controlam a altura do centro de rolagem, a variação da cambagem e a variação da bitola. Enquanto o centro de rolagem é uma função do comprimento e altura do braço oscilante, a variação da cambagem é função somente do comprimento do braço.

O ganho de cambagem é definido com a variação da cambagem quando a carroceria rola. Projetistas utilizam a posição do polo para estimar o ganho de cambagem em curva. Posicionando-se o polo em regiões específicas pode-se aumentar o ganho de cambagem negativa, diminuindo a necessidade de cambagem estática (A cambagem é negativa quando a parte superior da roda inclina-se aproximando-se da carroceria). Assim, o ganho de cambagem pode melhorar tanto o desempenho em retas quanto em curvas. Obtém-se o máximo contato possível melhorando a dirigibilidade e a tração (MILLIKEN; MILLIKEN, 1995).

Numa pista ondulada, se ocorre variação de bitola, o caminho da roda não é uma linha reta. A variação de bitola introduz componentes laterais de velocidade no pneu que, quando adicionadas à velocidade longitudinal, alteram as derivas, resultando em perturbações no veículo (JAZAR, 2008). Observando-se a posição dos polos, pode-se prever a variação da bitola. A intensidade com que a bitola varia depende da posição horizontal do polo e da sua altura a partir do chão.

## 2.4 Centro de rolagem e polos sob a ótica da teoria de mecanismos

A obtenção geométrica do centro de rolagem, de fato, origina-se na análise dos centros instantâneos de rotação existentes no mecanismo da suspensão.

De acordo com Shigley e Uicker (1995), o centro instantâneo é definido como a localização instantânea de um par de pontos coincidentes de dois corpos rígidos distintos, para a qual as velocidades absolutas dos dois pontos são iguais. Também pode ser definido como a localização de um par de pontos coincidentes de dois corpos rígidos distintos para a qual a velocidade relativa de um dos pontos é zero quando vista por um observador situado no outro corpo.

Para cada par de corpos existe um centro instantâneo. Um mecanismo



com  $n$  elos possui um número total de centros instantâneos  $N_P$  igual a

$$N_P = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (2.9)$$

No estudo dos mecanismos planos, é possível estabelecer a cinemática instantânea de velocidades e o comportamento estático de mecanismos através dos centros instantâneos (ERDMAN; SANDOR; KOTA, 2001). A análise de configurações singulares pode ser feita levando em conta que alguns centros instantâneos coincidem ou situam-se em linhas retas particulares (HUNT, 1978), (GREGORIO, 2009).

Segundo Foster e Pennok (2003), os centros instantâneos definidos por elos diretamente conectados são denominados **centros primários** e são obtidos por inspeção da cadeia cinemática. O centro instantâneo de dois elos conectados por uma junta rotativa é o próprio eixo de articulação. Nas juntas prismáticas, o centro instantâneo se encontra no infinito, sobre uma reta perpendicular ao deslocamento da junta. Os demais centros, que representam o movimento entre elos indiretamente conectados, denominados de **centros secundários**. No exemplo apresentado na Figura 3, os centros  $I_{12}$  e  $I_{13}$  são considerados primários. Os polos  $I_{28}$  e  $I_{38}$  e o centro de rolagem  $I_{18}$  são centros secundários.

#### 2.4.1 Teorema de Aronhold-Kennedy

Os centros instantâneos secundários podem ser obtidos através do **teorema de Aronhold-Kennedy** ou teorema dos três centros (HUNT, 1978), (SHIGLEY; UICKER, 1995) e (JAZAR, 2008). Segundo o teorema, *os três centros compartilhados por três corpos rígidos, dois a dois, diretamente conectados ou não mas em movimento relativo entre si, situam-se sobre uma mesma reta.*

Como exemplo, a Figura 5 apresenta um mecanismo de quatro barras que, de acordo com a expressão 2.9, possui 6 centros instantâneos. A identificação segue a numeração dos corpos associados a ele. Assim,  $I_{ij}$  identifica o centro associado aos elos  $i$  e  $j$ . São 4 centros instantâneos primários ( $I_{12}$ ,  $I_{23}$ ,  $I_{34}$  e  $I_{14}$ ) e dois secundários ( $I_{13}$  e  $I_{24}$ ).

De acordo com o teorema de Aronhold-Kennedy, o centro  $I_{13}$  é obtido pelo cruzamentos da reta que une os centros  $I_{12}$  e  $I_{23}$  com a reta que une os centros  $I_{14}$  e  $I_{34}$ . Da mesma forma, o cruzamento da reta  $I_{12}$ - $I_{14}$  com  $I_{23}$ - $I_{34}$  fornece o centro  $I_{24}$ .

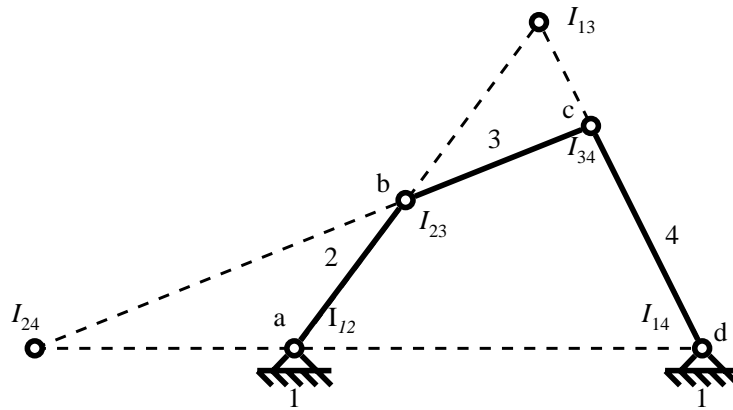


Figura 5: Centros instantâneos de um mecanismo de quatro barras.

#### 2.4.2 Diagrama do polígono

A obtenção dos centros instantâneos secundários pode ser feita através do diagrama do polígono (NORTON, 2003). Constrói-se um polígono cujos vértices são numerados de acordo com a identificação dos elos. A Figura 6 representa o diagrama do polígono para o mecanismo de quatro barras da Figura 5. Cada centro instantâneo é representado por uma linha que liga dois vértices (elos) quaisquer. O procedimento de construção obedece os seguintes passos:

1. Identificar todas os elos da cadeia cinemática (o corpo 1 é o fixo).
2. Desenhar o polígono de modo que a cada vértice corresponde um elo.
3. Representar os centros instantâneos primários (articulações) por uma linha grossa entre os vértices correspondentes do polígono.
4. O centro desconhecido corresponde à diagonal do paralelogramo cujos lados são centros instantâneos conhecidos.

Tome-se como exemplo o centro instantâneo  $I_{13}$ . A linha correspondente ao centro  $I_{13}$  é a diagonal do paralelogramo formado pelos lados 1-2, 2-3, 1-4 e 4-3, todos centros instantâneos conhecidos.

O diagrama do polígono se torna cada vez mais necessário à medida que a complexidade da cadeia aumenta. A Figura 7 apresenta um mecanismo

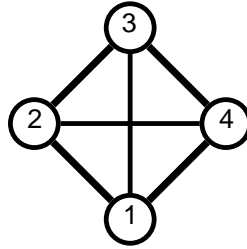


Figura 6: Polígono dos centros instantâneos do mecanismo de quatro barras da Figura 5.

de cadeia composta com 6 elos e um grau de liberdade. No total são 15 centros instantâneos. O diagrama do polígono encontra-se na Figura 7(b).

O centro  $I_{13}$  é obtido pelo cruzamento da reta formada pelos centros  $I_{12}$  e  $I_{23}$  com a reta formada pelos centros  $I_{14}$  e  $I_{34}$ . Isto corresponde ao que se apresenta na Figura 8 com relação aos lados dos paralelogramo formado pelos lados 1-2, 2-3, 1-4 e 4-3.

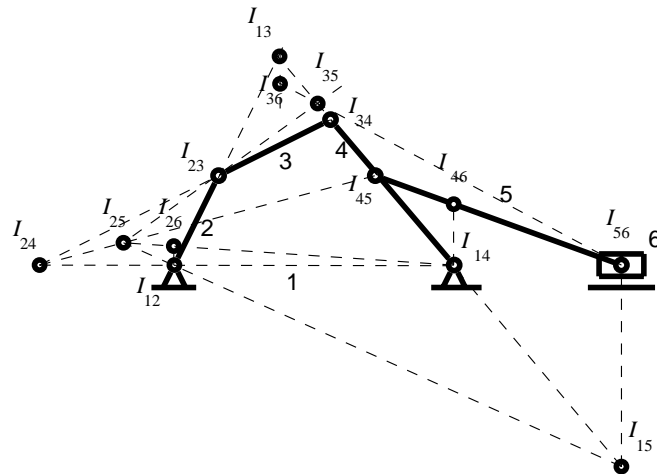
### 2.4.3 Obtenção dos centros instantâneos a partir das velocidades

As posições dos centros instantâneos também podem ser obtidas a partir de velocidades conhecidas. Na Figura 9 apresenta-se a obtenção do centro instantâneo  $I_{13}$  a partir das velocidades absolutas dos pontos  $b$  e  $c$  e da velocidade relativa do ponto  $c$  em relação ao ponto  $b$ , para duas velocidades diferentes da junta  $a$  ( $\omega_a = 0,8 \text{ rad/s}$  e  $\omega_a = 1,5 \text{ rad/s}$ ).

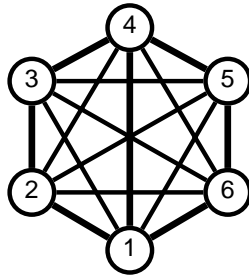
O centro instantâneo não muda de posição com a variação da velocidade. A localização do centro é obtida exclusivamente pela geometria. Isto acontece somente quando o mecanismo possui apenas um grau de liberdade (SHIGLEY; UICKER, 1995) e (GREGORIO, 2008). Se a velocidade de acionamento é dobrada, o polígono de vetores permanece proporcional, mantendo os centros na mesma posição. Quando o mecanismo possui mais de um grau de liberdade, as velocidades interferem no posicionamento dos centros instantâneos, como pode ser visto na Seção 2.4.5.

### 2.4.4 Cadeias indeterminadas

O método baseado na aplicação direta do teorema Aronhold-Kennedy e do diagrama do polígono não se aplica para mecanismos com um grau de



(a) Polos.



(b) Diagrama do Polígono.

Figura 7: Centros instantâneos de um mecanismo de seis elos com um grau de liberdade.

liberdade com arquiteturas mais complexas. São as chamadas cadeias indeterminadas. Foster e Pennok (2003) definem **cadeia indeterminada** como sendo a cadeia cinemática que representa um mecanismo com um grau de liberdade cujos centros instantâneos secundários não podem ser localizados pela aplicação direta do teorema de Aronhold Kennedy. Isto significa que, em cadeias indeterminadas, o método esbarra em pontos onde não há duas retas polares relacionadas com o centro instantâneo secundário a ser determinado.

Técnicas gráficas e analíticas tem sido desenvolvidas para a obtenção

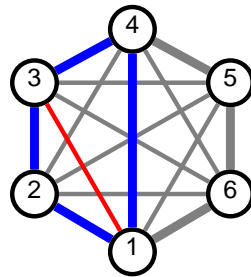
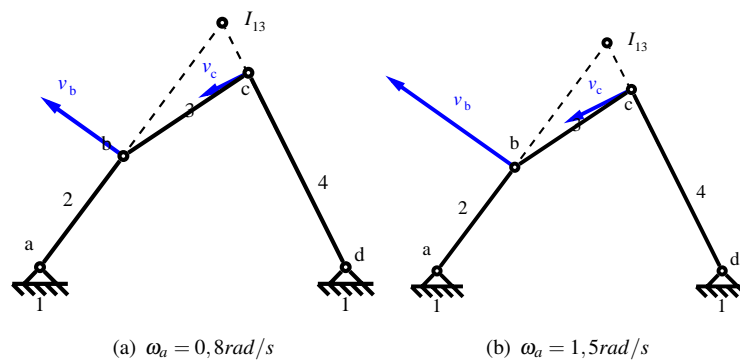
Figura 8: Determinação do centro instantâneo  $I_{36}$ .

Figura 9: Posição dos centros instantâneos.

dos centros instantâneos secundários em cadeias indeterminadas.

Foster e Pennok (2003) apresentam uma técnica gráfica para localizar os centros instantâneos secundários para a cadeia dupla borboleta. Através da técnica, obtém-se de um dos centros secundários e, a partir dele, obtém-se os demais centros pelo teorema de Aronhold-Kennedy. O centro secundário é obtido pela decomposição da cadeia cinemática em duas cadeias de seis elos cada, juntamente com a substituição de elos específicos por outros com as mesmas velocidades instantâneas que as permitidas pelos elos originais. Da análise de centros de cada um dos mecanismos resultam duas retas, em cujo cruzamento se encontra o centro instantâneo procurado. Os demais são obtidos pelo teorema de Aronhold-Kennedy.

Foster e Pennock (2005) estendem a técnica para outros mecanismos utilizando a conversão da cadeia indeterminada com um grau de liberdade em uma cadeia com dois graus de liberdade através da substituição de elos específicos. Demonstra que um centro secundário de uma cadeia com dois graus de liberdade deve situar-se em uma única linha reta.

Apesar de fornecerem a visualização do comportamento cinemático do mecanismo, métodos baseados na utilização de técnicas gráficas não são facilmente implementados em computadores (KUNG; WANG, 2009).

Gregorio (2008) apresenta um método analítico para localizar todos os centros de um mecanismo plano com um grau de liberdade. Baseado no teorema de Aronhold-Kennedy, cada centro desconhecido é obtido pelo equacionamento de retas polares com coeficientes angulares a serem determinados. Através de informações provenientes da configuração do mecanismo, o método fornece um conjunto de equações que expressam analiticamente o alinhamento dos centros.

Kung e Wang (2009) propõem uma metodologia em que os centros instantâneos secundários são agrupados em três classes. A Classe I é composta por aqueles centros que podem ser obtidos por pelo menos duas retas polares formadas pelos centros primários. Sua localização é independente dos outros centros secundários e pode ser facilmente obtida. Por isso eles podem ser considerados também como centros primários, já que sua obtenção é imediata. A Classe II é composta pelos centros em que apenas uma das retas polares pode ser obtida dos centros primários. A Classe III corresponde aos centros secundários cujas retas polares não podem ser determinadas a partir dos centros instantâneos primários.

Como exemplo, apresenta-se na Figura 10 um mecanismo dupla borboleta. Os centros  $I_{12}$ ,  $I_{17}$ ,  $I_{18}$ ,  $I_{23}$ ,  $I_{24}$ ,  $I_{35}$ ,  $I_{46}$ ,  $I_{56}$ ,  $I_{58}$  e  $I_{67}$  são primários. Os centros  $I_{13}$ ,  $I_{14}$ ,  $I_{15}$ ,  $I_{16}$ ,  $I_{25}$ ,  $I_{26}$ ,  $I_{27}$ ,  $I_{28}$ ,  $I_{36}$ ,  $I_{38}$ ,  $I_{47}$ ,  $I_{57}$ ,  $I_{68}$  e  $I_{78}$  são secundários classe II, e os centros  $I_{37}$  e  $I_{48}$  são classe III.

Com base nesta classificação e na utilização do diagrama do polígono, introduz-se um grafo direcionado, denominado **grafo dos centros instantâneos**. Utilizando um algoritmo de procura, cria-se uma fórmula recursiva para o cálculo das coordenadas dos centros instantâneos situados sobre um caminho do grafo.

As técnicas apresentadas são aplicadas em mecanismos com apenas um grau de liberdade, em que os centros instantâneos não dependem das velocidades do mecanismo.

Na presença de mais de um grau de liberdade, as velocidades passam a ter influência. Numa mesma configuração, os centros mudam de local de

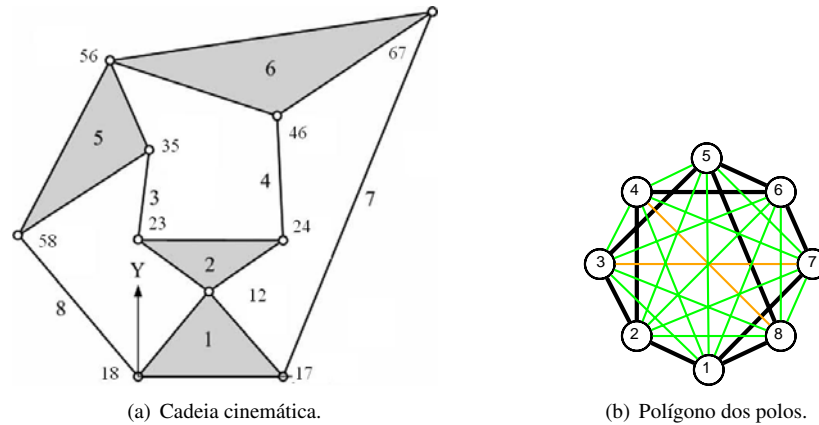


Figura 10: Mecanismo dupla-borboleta (KUNG; WANG, 2009).

acordo com as velocidades impostas.

A seguir são apresentados métodos para a obtenção dos centros instantâneos secundários para mecanismos com mais de um grau de liberdade.

#### 2.4.5 Mecanismos com mais de 1GL

Para mecanismos com mais de um grau de liberdade, o procedimento geométrico não se aplica, como se observa no exemplo apresentado na Figura 11(a). Trata-se de um mecanismo de cinco elos com dois graus de liberdade. Observa-se que o método do polígono não se aplica pois não se pode combinar os centros primários dois a dois para se determinar os centros secundários.

Em seu trabalho sobre análise de singularidades de mecanismos, Gregorio (2009) apresenta uma propriedade importante que define a posição do centro instantâneo de um determinado elo pela expressão:

$$\omega.C = \sum \omega_i.C_i. \quad (2.10)$$

Nesta expressão,  $\omega$  é a velocidade angular do elo e  $C$  é a posição do seu centro instantâneo,  $\omega_i$  é a velocidade do elo quando somente a junta  $i$  se movimentar e  $C_i$  é a posição do centro instantâneo do elo quando somente a junta  $i$  se movimentar.

Cada velocidade  $\omega_i$  pode ser interpretada como um peso associado

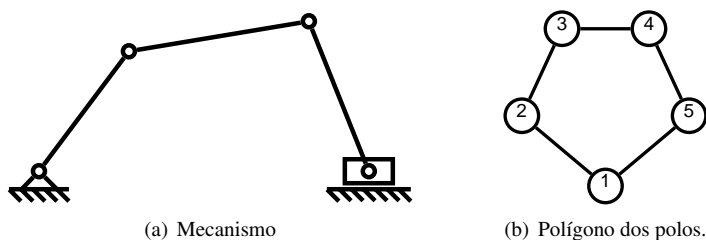


Figura 11: Mecanismo de cinco elos com dois graus de liberdade.

ao centro instantâneo  $C_i$ . Assim, para um mecanismo com dois graus de liberdade, o centro  $C$  de um determinado elo, deve situar-se sobre uma reta passando por  $C_1$  e  $C_2$ , sendo  $C_1$  o centro instantâneo do elo quando somente a primeira variável se move e  $C_2$  o centro instantâneo do mesmo elo quando somente a segunda variável se move.

Nas figuras 12 a 14 apresenta-se a posição do centro  $I_{13}$  em três situações distintas de velocidade das juntas  $a$  e  $d$ , que controlam o movimento do mecanismo. Devido à variação das velocidades, ocorre o deslocamento do centro instantâneo sobre a reta  $bP$ . Quando  $\omega_a \rightarrow 0$ , o polo desloca-se na direção da junta  $b$ . Quando  $v_d \rightarrow 0$ , o polo desloca-se na direção do ponto  $P$ , ponto que representaria a posição do centro  $I_{13}$  caso o mecanismo não possuísse o elo 5.

#### 2.4.6 Técnicas baseadas na velocidade

A forma tradicional de obtenção dos centros instantâneos entre corpos rígidos com movimento relativo baseia-se nas velocidades dos corpos. Jazar (2008) e Shigley e Uicker (1995) apresentam uma expressão analítica (2.11) para o cálculo do centro instantâneo de rotação de um corpo em movimento plano. A simbologia utilizada aqui é a mesma apresentada pelos autores.

De acordo com a Figura 15, tem-se um sistema móvel  $(x, y)$ , fixo no corpo, do qual são conhecidas a posição ( ${}^G d_B$ ) e a velocidade ( ${}^G \dot{d}_B$ ) da origem, representadas no sistema global  $(X, Y)$ . O corpo gira com uma velocidade angular ( ${}^G \omega_B$ ). A expressão obtida fornece a posição ( ${}^G r_Q$ ) do centro instantâneo de rotação ( $Q$ ) do corpo (JAZAR, 2008).

$${}^G r_Q = {}^G d_B + \frac{1}{\omega^2} ({}^G \omega_B \times {}^G \dot{d}_B). \quad (2.11)$$



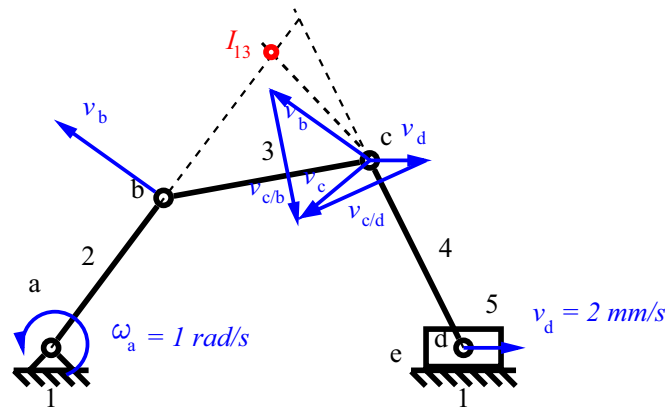


Figura 12: Posição do centro instantâneo de rotação para  $\omega_a = 1 \text{ rad/s}$  e  $v_d = 2 \text{ mm/s}$ .

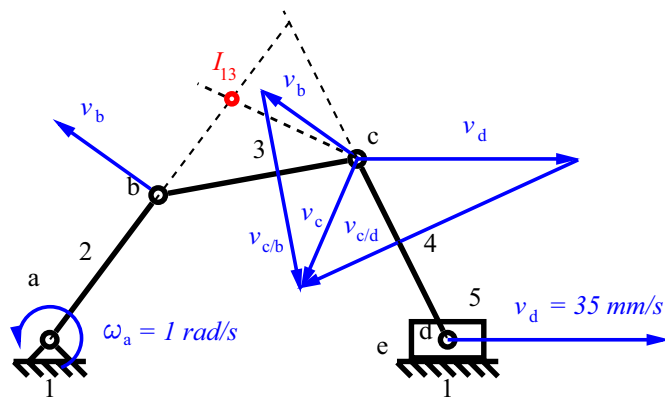


Figura 13: Posição do centro instantâneo de rotação para  $\omega_a = 1 \text{ rad/s}$  e  $v_d = 35 \text{ mm/s}$ .

Da Figura 15, a posição do centro instantâneo  $Q$  vale

$${}^G \mathbf{r}_Q = {}^G \mathbf{d}_B - {}^G \mathbf{r}_{o/Q} = {}^G \mathbf{d}_B + {}^G \mathbf{r}_{Q/o} \quad (2.12)$$

sendo  ${}^G \mathbf{r}_{o/Q}$  o vetor posição da origem do sistema móvel em relação ao centro instantâneo de rotação.

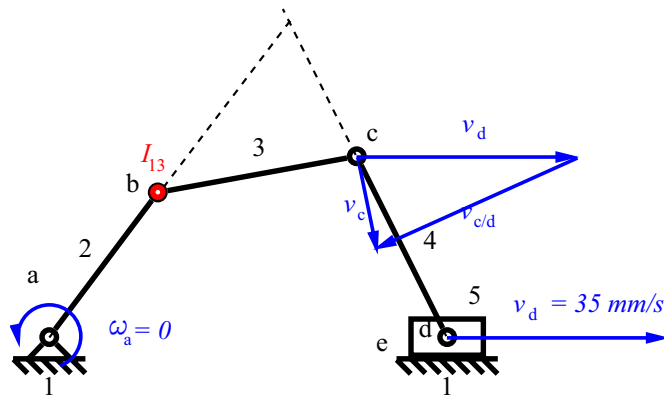


Figura 14: Posição do centro instantâneo de rotação para  $\omega_a = 0 \text{ rad/s}$  e  $v_d = 35 \text{ mm/s}$ .

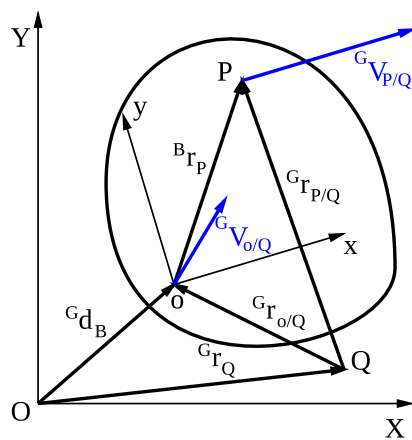


Figura 15: Centro instantâneo de rotação - Q.

Da expressão (2.12), tem-se

$${}^G \mathbf{r}_{Q/o} = {}^G \mathbf{r}_Q - {}^G \mathbf{d}_B \quad (2.13)$$

que, de acordo com a expressão (2.11), resulta

$${}^G \mathbf{r}_{Q/o} = \frac{1}{\omega^2} ({}^G \boldsymbol{\omega}_B \times {}^G \dot{\mathbf{d}}_B). \quad (2.14)$$

Se a origem do sistema móvel coincidir com a origem do sistema fixo,  ${}^G \mathbf{r}_Q = {}^G \mathbf{r}_{Q/o}$ . Logo,

$${}^G \mathbf{r}_Q = \frac{{}^G \boldsymbol{\omega}_B \times {}^G \dot{\mathbf{d}}_B}{\omega^2}. \quad (2.15)$$

Neste caso particular, em que a origem do sistema móvel (localizado no corpo) coincide com a origem do sistema fixo, a velocidade  ${}^G \dot{\mathbf{d}}_B$  representa a velocidade de um ponto sobre o corpo que instantaneamente está passando sobre a origem fixa.

A expressão (2.15) comprova a dependência entre as velocidades e a posição do centro instantâneo, já que a velocidade  ${}^G \boldsymbol{\omega}_B$  do corpo depende das velocidades primárias do acionamento do mecanismo.

Este procedimento, apesar de fornecer todos os centros instantâneos secundários, necessita de atenção quanto à definição dos sistemas de coordenadas fixo e móvel. Para um determinado centro instantâneo entre dois corpos, o sistema fixo deve estar localizado em um dos corpos e o móvel no outro.

## 2.5 Comentários

O método convencional para a obtenção do centro de rolagem limita-se à condição simétrica e leva em conta que o mecanismo possui apenas um grau de liberdade.

Um modelo para análise do comportamento lateral de um veículo deve possuir pelo menos dois graus de liberdade para que se possa representar a variação da bitola de forma adequada. Isto leva a um aumento da complexidade do modelo.

O método de Davies e o método dos helicoides sucessivos oferecem a vantagem de permitir a geração das equações e a obtenção dos resultados de forma bastante simples e direta.

O próximo capítulo apresenta a descrição dos métodos utilizados no modelo.



### 3 FERRAMENTAS DE ANÁLISE

Neste capítulo são apresentados os conceitos relacionados com as ferramentas matemáticas utilizadas no modelo proposto: o método dos helicoides sucessivos e o método de Davies.

O método de Davies é utilizado para a solução da cinestática (cinemática infinitesimal e estática). Na sua forma original, o método considera conhecida a configuração instantânea. Como o modelo deve admitir variação na sua configuração, é necessário que se inclua a cinemática de posição, resolvida através do método dos deslocamentos helicoidais sucessivos.

#### 3.1 Análise de posição

A forma clássica de análise de mecanismos baseia-se nas chamadas **equações cinemáticas**, cuja obtenção depende da forma como o mecanismo é representado. A representação mais comum é a vetorial, em que os elos são representados por vetores com os mesmos comprimentos característicos dos elos (NORTON, 2003). O posicionamento dos vetores pode ser feito através da aplicação de matrizes de transformação de coordenadas entre sistemas localizados sobre os elos e um sistema global.

A definição de parâmetros característicos do mecanismo permite a aplicação de regras que facilitam a criação de tais matrizes. Assim, tem-se o método de Denavit-Hartenberg e o método dos deslocamentos helicoidais sucessivos, utilizados no estudo de robôs manipuladores ( TSAI, 1999).

##### 3.1.1 Método de Denavit-Hartenberg

O método de Denavit-Hartenberg ( TSAI, 1999) baseia-se na combinação de quatro transformações (duas translações e duas rotações) entre sistemas localizados nos eixos das juntas, conforme apresentado na Figura 16.

Cada transformação define um parâmetro:  $\theta_i$  é o ângulo do elo  $i$ ;  $d_i$  é o deslocamento do elo  $i$ ;  $a_i$  é o comprimento do elo  $i$  e  $\alpha_i$  é a torção do elo  $i$ .

A matriz de transformação segundo Denavit-Hartenberg é representada por

$${}^{i-1}\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i)\sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i)\sin(\theta_i) & a_i\cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i)\cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i)\cos(\theta_i) & a_i\sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

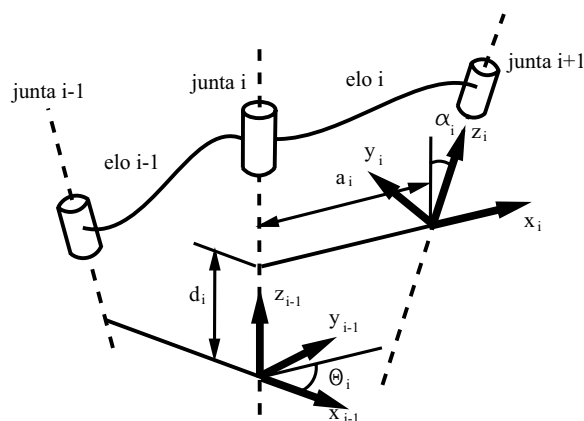


Figura 16: Parâmetros cinemáticos de Denavit-Hartenberg.

Os parâmetros  $a_i$  e  $\alpha_i$  são constantes. No caso da junta  $i$  ser rotativa, a variável é  $\theta_i$  e  $d_i$  permanece constante. Se a junta  $i$  for prismática,  $d_i$  é a variável e  $\theta_i$  é constante.

Conhecidos os parâmetros de Denavit-Hartenberg de todas as juntas, obtém-se as equações cinemáticas pela expressão (3.2). Sendo  $n$  o número de juntas do mecanismo, as equações cinemáticas são obtidas por

$${}^0\mathbf{A}_1{}^1\mathbf{A}_2{}^2\mathbf{A}_3 \dots {}^{n-1}\mathbf{A}_n = {}^0\mathbf{A}_n, \quad (3.2)$$

sendo  $n$  o número de juntas do mecanismo.

A matriz  ${}^0\mathbf{A}_n$  representa o posicionamento de um ponto na extremidade da cadeia. No caso de uma cadeia aberta,  ${}^0\mathbf{A}_n$  representa a orientação e a posição de um sistema localizado no ponto extremo. Para uma cadeia fechada,  ${}^0\mathbf{A}_n = \mathbf{I}$ , sendo  $\mathbf{I}$  a matriz identidade.

### 3.1.2 Método dos deslocamentos helicoidais sucessivos

O deslocamento helicoidal de um corpo rígido é representado por uma rotação  $\theta$  em torno de um eixo e uma translação  $t$  ao longo do mesmo eixo. O eixo de referência dos deslocamentos é o eixo do helicóide.

A posição  $\mathbf{p}_2$  de um corpo após o deslocamento helicoidal, a partir de uma posição  $\mathbf{p}_1$  é dada por

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_1. \quad (3.3)$$

A matriz  $\mathbf{A}$  é uma matriz  $4 \times 4$ , na qual está incluída a matriz de rotação, dada pelos elementos

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= (s_x^2 - 1)(1 - \cos\theta) + 1 \\
 a_{12} &= s_x s_y (1 - \cos\theta) - s_z \sin\theta \\
 a_{13} &= s_x s_z (1 - \cos\theta) + s_y \sin\theta \\
 a_{21} &= s_y s_x (1 - \cos\theta) + s_z \sin\theta \\
 a_{22} &= (s_y^2 - 1)(1 - \cos\theta) + 1 \\
 a_{23} &= s_y s_z (1 - \cos\theta) - s_x \sin\theta \\
 a_{31} &= s_z s_x (1 - \cos\theta) - s_y \sin\theta \\
 a_{32} &= s_z s_y (1 - \cos\theta) + s_x \sin\theta \\
 a_{33} &= (s_z^2 - 1)(1 - \cos\theta) + 1
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

e o vetor de translação, dado pela última coluna,

$$\begin{aligned}
 a_{14} &= t s_x - s_{0x}(a_{11} - 1) - s_{0y} a_{12} - s_{0z} a_{13} \\
 a_{24} &= t s_y - s_{0x} a_{21} - s_{0y}(a_{22} - 1) - s_{0z} a_{23} \\
 a_{34} &= t s_z - s_{0x} a_{31} - s_{0y} a_{32} - s_{0z}(a_{33} - 1).
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Os elementos

$$a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0 \quad \text{e} \quad a_{44} = 1 \tag{3.6}$$

completam a matriz.

O vetor  $\mathbf{s}$  representa a orientação do eixo do helicóide e o vetor  $\mathbf{s}_0$ , a posição de um ponto sobre o eixo. A rotação  $\theta$  e a translação  $t$  são chamados de **parâmetros do helicóide**. O eixo do helicóide mais os parâmetros definem completamente o deslocamento do corpo.

A configuração instantânea qualquer de uma cadeia cinemática aberta é obtida partindo-se da chamada **posição de referência** ou **posição zero** (TSAI, 1999) e (KAZEROUNIAN, 1987). A posição zero é convenientemente escolhida de modo que as coordenadas de todas as juntas são consideradas zero. Este tipo de descrição tem a vantagem de não ser propensa a erros de interpretação (GUPTA, 1986).

A posição de referência é formada pelos vetores posição  $\mathbf{s}_{0r}$  e orientação  $\mathbf{s}_r$  dos centros das juntas. A Figura 17 apresenta a posição zero de um mecanismo de quatro barras.

A posição de cada junta é atualizada aplicando-se sucessivamente as matrizes de deslocamentos helicoidais das juntas anteriores a ela. Assim, a





Simas (2008) substituiu este vetor por uma cadeia equivalente, denominada de **cadeia virtual de erro** e apresenta uma forma de solução da cinemática de posição aplicada no planejamento de trajetórias de manipuladores robóticos.

### 3.1.3 Comparação

Tanto Denavit-Hartenberg quanto os deslocamentos helicoidais apresentam uma forma estruturada de representação através das matrizes de transformação. O que diferencia os dois métodos são os parâmetros de entrada.

No método de Denavit-Hartenberg, são necessários quatro parâmetros por junta sendo três constantes e uma variável. A obtenção destes parâmetros é um tanto trabalhosa devido à imposição de regras para a definição dos sistemas de coordenadas. A complexidade aumenta com o aumento do número de graus de liberdade e da dimensão do espaço de representação.

O método dos deslocamentos helicoidais sucessivos exige que se conheça a posição e a orientação de cada junta na posição de referência que pode ser convenientemente escolhida de modo a facilitar a visualização e a montagem da cadeia. Esta característica se torna vantajosa quando se trata de cadeias complexas e por esta razão optou-se pela aplicação dos deslocamentos helicoidais sucessivos no modelo proposto neste trabalho.

## 3.2 Análise cinestática (Método de Davies)

O método de Davies utiliza três conceitos principais: a teoria dos helicoides, a teoria dos grafos e as leis de Kirchhoff. Os helicoides são utilizados na representação da posição, das velocidades e das forças, em substituição à representação vetorial tradicional. Os grafos são utilizados para representar a conectividade da cadeia e a conexão entre as velocidades e forças do mecanismo. As leis de Kirchhoff adaptadas à teoria de mecanismos, fornece os meios para se obter as equações da cinestática.

### 3.2.1 Leis de Kirchhoff

Kirchhoff enunciou duas leis relacionadas com malhas de circuitos elétricos. São elas:

**LEI DAS MALHAS:** A soma algébrica das tensões ao longo de qualquer percurso fechado é zero.

**LEI DOS NÓS:** A soma algébrica das correntes que entram em um nó é igual a zero.

Davies (1981) estabelece uma analogia entre um mecanismo e um circuito elétrico, levando em conta a similaridade entre força e corrente e também entre velocidade relativa e diferença de potencial. O método de Davies propõe a aplicação das Leis das Malhas e dos Nós em mecanismos.

Considerando as analogias, as Leis de Kirchhoff aplicadas aos mecanismos passam a ter os seguintes enunciados (DAVIES, 1981):

**LEI DOS CIRCUITOS:** A soma algébrica dos heligiros ao longo de qualquer percurso fechado é zero.

**LEI DOS CORTES:** A soma algébrica das heliforças que pertencem a um mesmo corte é igual a zero.

### 3.2.2 Helicoides

Um helicóide, representado pelo símbolo  $\$$ , é um elemento geométrico composto por uma **reta direcionada** e por um parâmetro escalar denominado de **passo** (CAMPOS, 2004).

Qualquer quantidade física que requer uma linha de ação e um passo pode ser representada por um helicóide. É o caso dos movimentos e das ações, termos utilizados por Davies (1995b) para designar as velocidades e os carregamentos (forças e momentos).

A teoria dos helicóides tem sido empregada com sucesso na solução de problemas da cinemática de manipuladores robóticos, principalmente na análise de singularidades de robôs paralelos.

Segundo Pennock e Meehan (2000), a teoria dos helicóides é usada para fornecer uma visão geométrica em problemas da cinemática inversa e estática de robôs manipuladores mas que, como técnica matemática para a solução de problemas em mecânica, só é reconhecida por um público limitado, voltado para a teoria cinemática. Os autores apresentam ainda a razão pela qual a teoria dos helicóides tem encontrado aceitação cada vez maior no campo da robótica em relação ao cálculo vetorial: as equações da cinemática e da dinâmica de corpos rígidos podem ser expressas elegantemente numa forma compacta. As expressões concisas, obtidas a partir da formulação, facilitam a manipulação simbólica e algébrica o que também fornece vantagem computacional.

Tsai (1999) compara a formulação clássica e por helicóides de análise cinemática e estática de robôs seriais e paralelos, mostrando a facilidade

como são montadas as equações da cinemática e como se pode obter matrizes jacobianas esparsas valendo-se da seleção adequada do sistema de referência.

Martins (2002) estuda o problema de singularidades em robôs seriais, redundantes e paralelos e apresenta um algoritmo para a solução do problema cinemático inverso de robôs seriais baseado no método de Davies.

Liu e Li (2002) e Ottaviano e Ceccarelli (2002) aplicam técnicas de otimização em um modelo baseado em helicoides, para melhorar o desempenho de manipuladores paralelos dentro do espaço de trabalho e regiões próximas a singularidades.

Gallardo et al. (2003) propõem um modelo dinâmico baseado na teoria dos helicoides e no princípio dos trabalhos virtuais, para o cálculo das ações nos acionamentos em função das ações externas aplicadas.

Fundamentos da teoria dos helicoides podem ser encontrados em Hunt (1978), Tsai (1999), Campos (2004), Davidson e Hunt (2004), Cazangi (2008) e Simas (2008).

Utilizando a terminologia adotada por Campos (2004), os helicoides que representam movimentos, denominam-se **heligiros** ( $\mathcal{S}^M$ ) e os que representam **ações** (forças e momentos) denominam-se **heliforças** ( $\mathcal{S}^A$ ).

De forma genérica, o heligiros é representado por

$$\mathcal{S}^M = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{v}_P \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{v}_t + \mathbf{s}_0 \times \boldsymbol{\omega} \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

sendo  $\boldsymbol{\omega}$  a velocidade angular do corpo e  $\mathbf{v}_t$  a velocidade de translação, ambas em relação ao eixo do heligiros.

A heliforça é representada pelo vetor

$$\mathcal{S}^A = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{M}_P \\ \mathbf{F} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{C} + \mathbf{s}_0 \times \mathbf{F} \\ \mathbf{F} \end{array} \right\}, \quad (3.9)$$

sendo  $\mathbf{C}$  o momento e  $\mathbf{F}$  a força aplicados sobre o corpo.

O vetor  $\mathbf{s}_0$  representa a posição do eixo do heligiros ou da heliforça em relação ao sistema de referência.

Em mecanismos, juntas **rotativas** não possuem a velocidade de translação ( $\mathbf{v}_t = 0$ ) e juntas **prismáticas** não possuem a velocidade angular ( $\boldsymbol{\omega} = 0$ ). Logo, de acordo com (3.8), juntas rotativas e prismáticas são representadas, respectivamente, pelos heligiros

$$\mathcal{S}^M = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{s}_0 \times \boldsymbol{\omega} \end{array} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{S}^M = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_t \end{array} \right\}. \quad (3.10)$$

O heligiro é decomposto em sua **magnitude** multiplicada pelo seu **heligiro normalizado**, da seguinte forma

$$\mathbf{\$}^M = \begin{Bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{s}_0 \times \mathbf{s} \end{Bmatrix} \omega \quad \text{e} \quad \mathbf{\$}^M = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{s} \end{Bmatrix} v_t, \quad (3.11)$$

sendo  $\mathbf{s}_0$  o vetor posição de um ponto sobre o eixo do heligiro e  $\mathbf{s}$  o vetor unitário na direção do eixo do heligiro. Numa forma mais compacta, (3.11) é representada por

$$\mathbf{\$}^M = \hat{\mathbf{\$}}^M \cdot \varphi, \quad (3.12)$$

sendo  $\hat{\mathbf{\$}}^M$  e  $\varphi$ , respectivamente, o heligiro normalizado e sua magnitude.

A heliforça é representada de forma análoga. De acordo com (3.9), a força e o momento são representados respectivamente por

$$\mathbf{\$}^A = \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_0 \times \mathbf{F} \\ \mathbf{F} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{\$}^A = \begin{Bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (3.13)$$

A decomposição da heliforça fornece

$$\mathbf{\$}^A = \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_0 \times \mathbf{s} \\ \mathbf{s} \end{Bmatrix} F \quad \text{e} \quad \mathbf{\$}^A = \begin{Bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} C, \quad (3.14)$$

sendo  $\mathbf{s}_0$  o vetor posição de um ponto sobre o eixo da heliforça e  $\mathbf{s}$  o vetor unitário na direção do eixo da heliforça. Numa forma mais compacta, (3.14) é representada por

$$\mathbf{\$}^A = \hat{\mathbf{\$}}^A \cdot \psi, \quad (3.15)$$

sendo  $\hat{\mathbf{\$}}^A$  a heliforça normalizada e  $\psi$  a magnitude da heliforça.

### 3.2.2.1 Helicoides unitários

A dimensão do espaço onde o mecanismo está representado denomina-se **ordem do sistema**, sendo representada pelo símbolo  $\lambda$ . No espaço tridimensional, a ordem do sistema vale  $\lambda = 6$ . Assim, são necessários seis heligiros independentes e seis heliforças independentes para representar os movimentos e as ações. Estes dois conjuntos de helicoides são denominados de **helicoides unitários** (DAVIES, 2000).

Existem situações em que a ordem necessária pode ser menor do que 6. Mecanismos planos, por exemplo, necessitam de um sistema de ordem  $\lambda = 3$  (duas translações e uma rotação). Alguns trens de engrenagens podem

ser representados em um sistema de ordem  $\lambda = 2$  (DAVIES, 1995a) (CAZANGI, 2008). Denomina-se **ordem mínima** do sistema, o menor valor de  $\lambda$  que permite a representação completa do mecanismo pelos helicoides.

Cada movimento unitário é representado por um heligiros unitário. No espaço tridimensional, em que a ordem mínima vale  $\lambda = 6$ , os heligiros unitários, correspondentes aos movimentos unitários  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ ,  $v_x$ ,  $v_y$  e  $v_z$ , respectivamente, são:

$$\begin{aligned} \mathbf{\$}_1^M &= \begin{Bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_z \cdot \omega_x \\ -p_y \cdot \omega_x \end{Bmatrix} & \mathbf{\$}_2^M &= \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_y \\ 0 \\ -p_z \cdot \omega_y \\ 0 \\ p_x \cdot \omega_y \end{Bmatrix} & \mathbf{\$}_3^M &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \\ p_y \cdot \omega_z \\ -p_x \cdot \omega_z \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \mathbf{\$}_4^M &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} & \mathbf{\$}_5^M &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_y \\ 0 \end{Bmatrix} & \mathbf{\$}_6^M &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_z \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

As heliforças unitárias correspondentes às ações unitárias  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ,  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$ , são:

$$\begin{aligned} \mathbf{\$}_1^A &= \begin{Bmatrix} M_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} & \mathbf{\$}_2^A &= \begin{Bmatrix} 0 \\ M_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} & \mathbf{\$}_3^A &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \mathbf{\$}_4^A &= \begin{Bmatrix} 0 \\ p_z \cdot F_x \\ -p_y \cdot F_x \\ F_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} & \mathbf{\$}_5^A &= \begin{Bmatrix} -p_z \cdot F_y \\ 0 \\ p_x \cdot F_y \\ 0 \\ F_y \\ 0 \end{Bmatrix} & \mathbf{\$}_6^A &= \begin{Bmatrix} p_y \cdot F_z \\ -p_x \cdot F_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_z \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Nas expressões (3.16) e (3.17),  $p_x$ ,  $p_y$  e  $p_z$  representam as coordenadas de um ponto localizado sobre o eixo do helicoides.

De acordo com as expressões (3.12) e (3.15), os heligiros e as helifor-

ças unitárias podem ser decompostos em uma magnitude multiplicada pelo helicoide normalizado. Assim, os heligros unitários tomam a seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \mathbf{\$}_1^M &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ p_z \\ -p_y \end{pmatrix} \cdot \omega_x & \mathbf{\$}_2^M &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -p_z \\ p_x \end{pmatrix} \cdot \omega_y & \mathbf{\$}_3^M &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ p_y \\ -p_x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \omega_z \\
 \mathbf{\$}_4^M &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot v_x & \mathbf{\$}_5^M &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot v_y & \mathbf{\$}_6^M &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot v_z.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

e as heliforças unitárias tomam a forma

$$\begin{aligned}
 \mathbf{\$}_1^A &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot M_x & \mathbf{\$}_2^A &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot M_y & \mathbf{\$}_3^A &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot M_z \\
 \mathbf{\$}_4^A &= \begin{pmatrix} 0 \\ p_z \\ -p_y \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot F_x & \mathbf{\$}_5^A &= \begin{pmatrix} -p_z \\ 0 \\ p_x \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot F_y & \mathbf{\$}_6^A &= \begin{pmatrix} p_y \\ -p_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot F_z.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Para um sistema de ordem mínima menor do que 6, a ordem  $\lambda$  do sistema indica quantas magnitudes são diferentes de zero. No caso plano, por exemplo, a ordem mínima é  $\lambda = 3$ , tendo somente as magnitudes  $v_x$ ,  $v_y$  e  $\omega_z$  para os heligros e  $F_x$ ,  $F_y$  e  $M_z$  para as heliforças. Restam, portando, os

heliros unitários

$$\mathbf{\$}_3^M = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ p_y \\ -p_x \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \omega_z \quad \mathbf{\$}_4^M = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot v_x \quad \mathbf{\$}_5^M = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot v_y. \quad (3.20)$$

e as heliforças unitárias

$$\mathbf{\$}_3^A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot M_z \quad \mathbf{\$}_4^A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -p_y \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot F_x \quad \mathbf{\$}_5^A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_x \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot F_y. \quad (3.21)$$

Como a primeira, a segunda e a sexta coordenadas são nulas, os heli-ros unitários atuantes no plano assumem a seguinte forma final:

$$\mathbf{\$}_3^M = \begin{Bmatrix} 1 \\ p_y \\ -p_x \end{Bmatrix} \cdot \omega_z \quad \mathbf{\$}_4^M = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot v_x \quad \mathbf{\$}_5^M = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot v_y. \quad (3.22)$$

e as heliforças unitárias,

$$\mathbf{\$}_3^A = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot M_z \quad \mathbf{\$}_4^A = \begin{Bmatrix} -p_y \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot F_x \quad \mathbf{\$}_5^A = \begin{Bmatrix} p_x \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot F_y. \quad (3.23)$$

O número de componentes do helicóide é representado pela **dimensão do helicóide**  $d$  e seu valor corresponde à ordem  $\lambda$  do espaço em que está sendo representado.

### 3.2.2.2 Grau de liberdade

Uma cadeia cinemática possui  $e$  juntas. Uma junta  $i$  possui  $f_i$  movimentos independentes, denominados de **grau de liberdade unitário da junta**, sendo  $1 \leq f_i < 6$ . A mesma junta possui  $c_i$  restrições, denominadas de **grau de restrição unitário da junta**, sendo  $1 \leq c_i < 6$ . Para cada junta, vale

a relação

$$f + c = \lambda. \quad (3.24)$$

A soma dos  $f_i$  movimentos unitários de todas as  $e$  juntas define o **grau bruto de liberdade**,  $F$ , da cadeia cinemática.

$$F = \sum_{i=1}^e f_i. \quad (3.25)$$

A soma de todas as  $c_i$  ações unitárias das juntas define o **grau bruto de restrição**,  $C$ , da cadeia.

As forças externas são incluídas através das juntas ativas, que são juntas virtuais incorporadas ao mecanismo. As juntas ativas também possuem o seu grau unitário de restrição que deve ser adicionado às restrições construtivas já existentes. Seja  $e_a$  o número de juntas ativas e  $c_j$  o grau de restrição unitária de cada uma delas. O grau bruto de restrição é então calculado por

$$C = \sum_{i=1}^e c_i + \sum_{j=1}^{e_a} c_j. \quad (3.26)$$

### 3.2.2.3 Matrizes dos helicoides unitários

Os heligiros unitários que atuam nas juntas do mecanismo são agrupados na **matriz dos movimentos unitários**  $[\mathbf{M}_D]_{d,F}$ ,

$$[\mathbf{M}_D]_{d,F} = \begin{bmatrix} \mathbf{\$}_a^M & \mathbf{\$}_b^M & \dots & \mathbf{\$}_F^M \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Todas as heliforças unitárias, inclusive as externas, são agrupadas na **matriz das ações unitárias**  $[\mathbf{A}_D]_{d,C}$

$$[\mathbf{A}_D]_{d,C} = \begin{bmatrix} \mathbf{\$}_a^A & \mathbf{\$}_b^A & \dots & \mathbf{\$}_C^A \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

O número de linhas das duas matrizes correspondem à dimensão  $d$  dos helicoides. O número de colunas de  $[\mathbf{M}_D]_{d,F}$  corresponde ao grau bruto de liberdade  $F$ , dado pela expressão (3.25). O número de colunas de  $[\mathbf{A}_D]_{d,C}$  corresponde ao grau bruto de restrição  $C$ , dado pela expressão (3.26).

Os heligiros que compõem a matriz dos movimentos unitários da expressão (3.27) e as heliforças que compõem a matriz das ações unitárias da expressão (3.28) são decompostos na forma de helicoides normalizados e suas respectivas magnitudes, de acordo com as expressões (3.12) e (3.15).



A **matriz dos movimentos unitários normalizados**,  $[\hat{\mathbf{M}}_D]_{d,F}$ , é formada pelos heligiros unitários normalizados, definidos de acordo com a expressão (3.18), sendo dada por

$$[\hat{\mathbf{M}}_D]_{d,F} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_a^M & \hat{\mathbf{s}}_b^M & \dots & \hat{\mathbf{s}}_F^M \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

A **matriz das ações unitárias normalizadas**,  $[\hat{\mathbf{A}}_D]_{d,C}$ , é formada pelas heliforças unitárias normalizadas, definidas de acordo com a expressão (3.19), sendo dada por

$$[\hat{\mathbf{A}}_D]_{d,C} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_a^A & \hat{\mathbf{s}}_b^A & \dots & \hat{\mathbf{s}}_C^A \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Utiliza-se o acento circunflexo (^) nas matrizes normalizadas  $\hat{\mathbf{M}}_D$  e  $\hat{\mathbf{A}}_D$  para diferenciá-las das matrizes dos movimentos  $\mathbf{M}_D$  e das ações,  $\mathbf{A}_D$ .

As magnitudes dos heligiros são agrupadas no **vetor das magnitudes dos movimentos**,  $\{\boldsymbol{\varphi}\}_{F,1}$ , enquanto que as magnitudes das heliforças são agrupadas no **vetor das magnitudes das ações**,  $\{\boldsymbol{\psi}\}_{C,1}$ , da seguinte forma:

$$\{\boldsymbol{\varphi}\}_{F,1} = \begin{Bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \dots \\ \varphi_F \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{\boldsymbol{\psi}\}_{C,1} = \begin{Bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \dots \\ \psi_C \end{Bmatrix}. \quad (3.31)$$

#### 3.2.2.4 Heliforças unitárias no plano

Cada coluna da matriz das ações normalizadas  $\hat{\mathbf{A}}_D$  representa uma heliforça. A Figura 19 apresenta as heliforças unitárias para juntas rotativas e prismáticas.

Se a junta for **rotativa**, tem-se uma força em cada direção dos eixos  $x$  e  $y$ . Representadas na forma de heliforças, tem-se

$$\hat{\mathbf{s}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_0 \times \mathbf{F} \\ \mathbf{F} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ s_{0x} \cdot F_Y - s_{0y} \cdot F_X \\ F_X \\ F_Y \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -s_{0Y} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot F_X + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ s_{0X} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot F_Y \quad (3.32)$$

Se a junta for **prismática**, tem-se uma força normal à junta e um momento em torno da junta. Seja  $\mathbf{s}_N$  um vetor unitário normal à direção da junta.

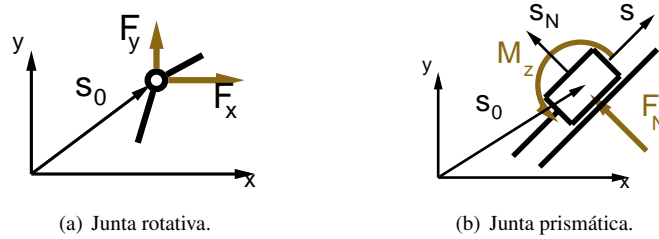


Figura 19: Componentes de ações em cada tipo de junta.

A heliforça normal será

$$\hat{\mathbf{s}}_N = \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_0 \times \mathbf{F}_N \\ \mathbf{F}_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_0 \times \mathbf{s}_N \\ \mathbf{s}_N \end{Bmatrix} \cdot F_N \quad (3.33)$$

No plano, a direção da força normal ao deslocamento da junta pode ser obtida por

$$\mathbf{s}_N = \mathbf{z} \times \mathbf{s} = \begin{Bmatrix} -s_Y \\ s_X \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.34)$$

sendo  $\mathbf{z}$  o vetor unitário normal ao plano. Substituindo-se em (3.33), resulta

$$\hat{\mathbf{s}}_N = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ s_{0X} \cdot s_X + s_{0Y} \cdot s_Y \\ -s_Y \\ s_X \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.35)$$

Assim, o par de ações correspondente a uma junta prismática é dado por

$$\hat{\mathbf{s}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ s_{0X} \cdot s_X + s_{0Y} \cdot s_Y \\ -s_Y \\ s_X \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot F_N + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot M_Z \quad (3.36)$$

No caso plano, as linhas 1, 2 e 6 são nulas e devem ser eliminadas.

### 3.2.3 Grafos

O uso dos grafos facilita e sistematiza a montagem das equações da cinemática e da estática, principalmente quando se trata de cadeias complexas. Através deles, são determinados os circuitos independentes, que definem as equações cinemáticas, e os cortes, que definem as equações de equilíbrio da estática. Através do grafo pode-se identificar movimentos particulares utilizados na definição dos centros instantâneos e, particularmente, do centro de rolagem.

Detalhes sobre a teoria dos grafos podem ser encontrados em (DAVIES, 1995b), (TSAI, 2000) e (FAYET, 2000).

Um grafo consiste de um conjunto de vértices conectados por um conjunto de arestas, sendo representado pelo símbolo  $G(V,A)$  onde  $V$  são os vértices ou nós do grafo e  $A$  é o conjunto de pares ordenados  $a = (v,w)$  representando as arestas (TSAI, 2000).

Quando o grafo representa uma cadeia cinemática, os **vértices** simbolizam os **elos** e as **arestas** podem representar as **juntas**, os **movimentos** ou as **ações** nelas contidos.

As arestas dos grafos são orientadas a fim de se definir o sentido dos movimentos ou das ações representados.

O grafo dos acoplamentos de um mecanismo é representado pelo símbolo  $G_C$ . Na Figura 20 apresenta-se um mecanismo de Stephenson e seu grafo  $G_C$  (TSAI, 2000).

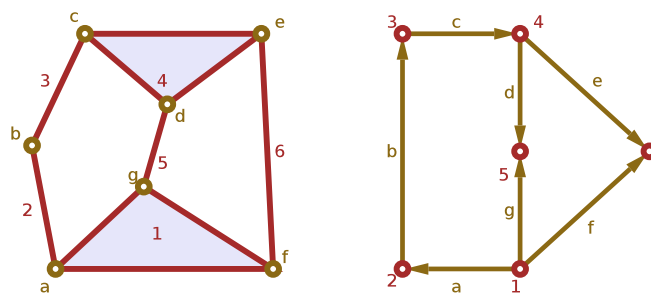


Figura 20: Mecanismo de Stephenson e seu grafo  $G_C$  (TSAI, 2000).

Os vértices de  $G_C$  correspondem aos corpos e as arestas correspondem

às juntas. As arestas são identificadas por meio de letras minúsculas e os vértices por números. A numeração é feita em ordem crescente, seguindo a orientação dada às arestas: o número do vértice de chegada é sempre maior do que o do de partida. É conveniente que o elo fixo seja identificado com o menor número.

Um **percurso** ou caminho é uma seqüência de vértices e arestas, iniciando e terminando em um vértice. Na Figura 21 são apresentados três percursos diferentes iniciando no nó 1 e terminando no nó 4.

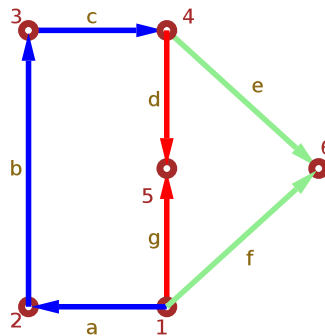


Figura 21: Três percursos diferentes entre o nó 1 e o nó 4.

Observe-se o sentido das arestas. No percurso azul, todas as arestas são positivas e o percurso torna-se  $(a + b + c)$ . Já nos outros dois percursos existem inversões de sinais devido ao sentido adotado para as arestas. Do percurso vermelho resulta  $(+g - d)$  e do verde,  $(+f - e)$ . O conceito de percurso é aplicado no cálculo da velocidade relativa entre elos que não estão diretamente conectados.

Um **circuito** ou **malha** é um percurso que inicia e termina no mesmo vértice. Os dois circuitos,  $c$  e  $f$ , apresentados na Figura 22, são formados, respectivamente, pelas arestas  $a, b, c, d$  e  $g$  e pelas arestas  $f, e, d$  e  $g$ .

Uma **árvore** de um grafo é um subgrafo que contém todos os vértices do grafo original mas nenhum circuito. A Figura 23 apresenta uma árvore possível para o grafo da Figura 20, gerada retirando-se as arestas  $c$  e  $f$ . As arestas que pertencem à árvore são chamadas de **ramos** e aquelas que são retiradas para gerar a árvore, são as **cordas**.

Para cada **corda** do grafo há um **circuito** correspondente, com um sentido positivo, conforme mostrado na Figura 24. Cada circuito é identi-

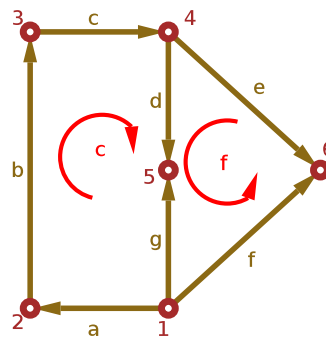


Figura 22: Os dois circuitos do grafo da Figura 20.

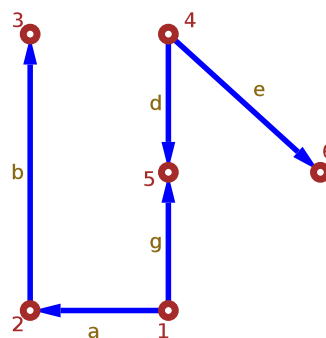


Figura 23: Árvore do grafo da Figura 20 gerada retirando-se as arestas  $c$  e  $f$ .

cado pela mesma letra da corda que o gerou. Além disso define-se o sentido positivo do circuito de acordo com o sentido positivo da corda que o definiu. Assim, o circuito  $c$  possui sentido anti-horário e o circuito  $f$ , o sentido horário, de acordo com as orientações das suas respectivas cordas.

Um **corte** é uma linha que cruza uma ou mais cordas e que corta apenas um dos ramos da árvore. A Figura 25 apresenta os cortes passando pelos ramos do grafo da Figura 20.

Para cada **ramo** há um único **corte** correspondente, com um sentido positivo que corresponde ao sentido positivo do ramo que o corte atravessa.

O conceito de corte é particularmente importante no estudo da estática visto que um corte divide o mecanismo em duas partes, sendo que cada uma

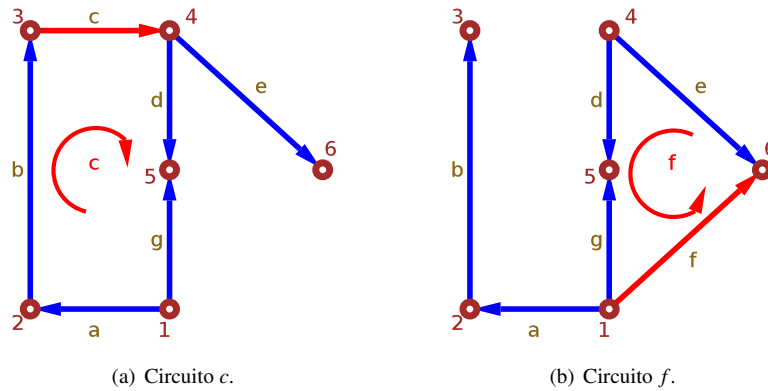


Figura 24: Circuitos do grafo da Figura 20, gerados pelas respectivas cordas.

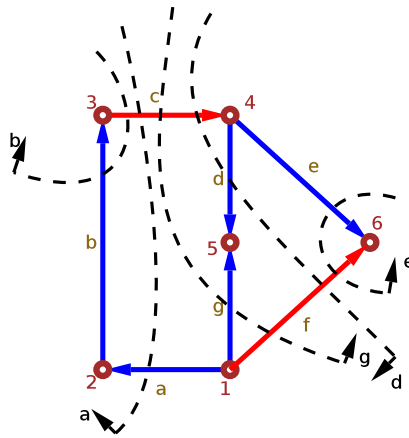


Figura 25: Cortes sobre a árvore do grafo da Figura 20.

delas satisfaz as condições de equilíbrio das heliforças.

Os grafos dos acoplamentos, dos circuitos e dos cortes são representados, respectivamente, pelas matrizes de incidência, dos circuitos e dos cortes.

A **matriz de incidência**  $[I_C]_{n,e}$ , de um grafo representa a forma como os vértices são ligados pelas arestas. Cada elemento  $(i, j)$  pode assumir os

valores 0, +1 ou -1, da seguinte forma:

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se o vértice } i \text{ não se conecta pela aresta } j; \\ +1 & \text{se a aresta } j \text{ parte do vértice } i; \\ -1 & \text{se a aresta } j \text{ chega ao vértice } i. \end{cases} \quad (3.37)$$

A **matriz dos circuitos**  $[B_M]_{l,e}$  de um grafo representa os circuitos independentes existentes no grafo. Nesta matriz,  $l$  é o **número de circuitos** e  $e$  é número de arestas. Cada elemento  $b_{ij}$  de  $B_{l,e}$  pode assumir os valores 0, +1 ou -1, da seguinte forma:

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se o circuito } i \text{ não inclui a aresta } j; \\ +1 & \text{se o sentido positivo do circuito } i \text{ coincide com o} \\ & \text{da aresta } j, \text{ pertencente a ele;} \\ -1 & \text{se esses sentidos forem opostos.} \end{cases} \quad (3.38)$$

Os cortes são representados pela **matriz dos cortes**,  $[Q_A]_{k,e}$ , sendo  $k$  o número de cortes e  $e$  o número de arestas. Cada elemento  $q_{ij}$  de  $[Q]_{k,e}$  pode assumir os valores 0, +1, ou -1, da seguinte forma:

$$q_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se o corte } i \text{ não inclui a aresta } j; \\ +1 & \text{se o sentido positivo do corte } i \text{ coincide com o da} \\ & \text{aresta } j \text{ pertencente ao corte;} \\ -1 & \text{se os sentidos forem opostos.} \end{cases} \quad (3.39)$$

#### 3.2.4 Descrição do Método de Davies

Pelo método de Davies, o mecanismo é tratado de duas formas diferentes. Para efeito de análise dos movimentos, ele é considerado como uma **cadeia cinemática** controlada pelo número necessário de juntas. Do ponto de vista da estática, o mecanismo é considerado uma **cadeia super-restringida** onde as forças ativas e reativas promovem a super-restrição.

Como as análises cinemática e estática são feitas simultaneamente, utiliza-se a terminologia **análise cinestática**, proposta por Davies (2000) e adotada neste texto.

Partindo-se do grafo dos acoplamentos ( $G_C$ ), gera-se dois grafos que representam os movimentos ( $G_M$ ) e as ações ( $G_A$ ) existentes no mecanismo. Os circuitos identificados no grafo dos movimentos estabelecem as relações de dependência entre as velocidades. Os cortes identificados no grafo das ações estabelecem as equações de equilíbrio dos corpos que formam o meca-

nismo.

Os movimentos e as ações são representados por seus heligiros e heli-forças correspondentes.

Da aplicação das Leis de Kirchhoff resultam os dois sistemas lineares de equações que resolvem a cinemática de velocidades e a estática.

As etapas dos métodos são descritas a seguir.

#### 3.2.4.1 Grafos $G_C$ , $G_M$ e $G_A$ do mecanismo

A cadeia cinemática do mecanismo é representada pelo seu grafo dos acoplamentos diretos  $G_C$ , que contém a forma como é feita a conexão entre os elos do mecanismo.

A partir do grafo  $G_C$ , gera-se os grafos dos movimentos,  $G_M$ , e o grafo das ações,  $G_A$ .

Do grafo dos movimentos extrai-se a matriz dos circuitos do mecanismo e do grafo das ações, a matriz dos cortes.

Os circuitos são utilizados para gerar as equações cinemáticas dos movimentos possíveis no mecanismo. Os cortes fornecem as informações para a geração das equações de equilíbrio estático do mecanismo.

Ao grafo  $G_M$  está associada a matriz dos movimentos,  $\mathbf{B}_M$ . Cada linha de  $\mathbf{B}_M$  representa um circuito. Cada elemento de  $\mathbf{B}_M$  é definido de acordo com a expressão (3.38).

O grafo  $G_A$  fornece a matriz dos cortes,  $\mathbf{Q}_A$ . Cada linha de  $\mathbf{Q}_A$  representa um corte. Cada elemento de  $\mathbf{Q}_A$  é definido de acordo com a expressão (3.39).

#### 3.2.4.2 Matrizes de rede

A **matriz de rede dos movimentos unitários normalizados**  $[\hat{\mathbf{M}}_N]_{d,l,F}$  estabelece a relação de pertinência entre os  $F$  heligiros normalizados, agrupados em  $[\hat{\mathbf{M}}_D]_{d,F}$  (expressão 3.29), com os  $l$  circuitos, definidos pela matriz dos circuitos,  $[\mathbf{B}_M]_{l,F}$ . Cada linha de  $[\mathbf{B}_M]_{l,F}$  informa quais os heligiros pertencem ao circuito correspondente àquela linha, considerando seus sinais. Se o heligiro não pertence ao circuito, preenche-se o seu espaço com um vetor nulo com a mesma dimensão  $d$  dos heligiros. Assim, para cada circuito, constrói-se  $d$  linhas na matriz de rede. Ao final da montagem, a matriz de rede de movimentos unitários possui dimensão  $d.l \times F$ .

A **matriz de rede das ações unitárias normalizadas**  $[\hat{\mathbf{A}}_N]_{d,k,C}$  estabelece a relação de pertinência entre as  $C$  heli-forças agrupadas em  $[\hat{\mathbf{A}}_D]_{d,C}$



(expressão 3.30), com os  $k$  cortes, definidos pela matriz dos cortes,  $[\mathcal{Q}_A]_{k,C}$ . Cada linha de  $[\mathcal{Q}_A]_{k,C}$  informa quais as heliforças pertencem ao corte correspondente àquela linha, considerando seus sinais. Se a heliforça não pertencer ao corte, preenche-se o seu espaço com um vetor nulo com a dimensão  $d$  adequada. Assim, para cada corte, constrói-se  $d$  linhas na matriz de rede. Ao final da montagem, a matriz de rede das ações unitárias possui dimensão  $d.k \times C$ .

### 3.2.4.3 Montagem dos sistemas

A **lei dos circuitos** de Kirchhoff aplicada a um mecanismo estabelece que a soma dos heli-giros pertencentes a um mesmo circuito é igual a zero. Para  $l$  circuitos tem-se:

$$[\hat{\mathbf{M}}_N]_{dl,F} \cdot \{\boldsymbol{\varphi}\}_{F,1} = \{\mathbf{0}\}_{dl,1}, \quad (3.40)$$

sendo  $[\hat{\mathbf{M}}_N]_{dl,F}$  a matriz de rede dos movimentos unitários normalizados, definida na Seção 3.2.4.2, e  $\{\boldsymbol{\varphi}\}_{F,1}$  o vetor de magnitudes dos movimentos, definido na expressão (3.31).

Considerando que não haja equações redundantes, para  $l$  circuitos independentes tem-se  $d.l$  equações impondo restrições sobre as  $F$  magnitudes desconhecidas. Assim sendo, são necessárias  $F - d.l$  variáveis primárias (independentes) para descrever o movimento da cadeia. Tem-se assim o **grau líquido de liberdade**,  $F_N$ , da cadeia cinemática, dado por

$$F_N = F - d.l. \quad (3.41)$$

Para as ações existentes na cadeia super-restringida, a **lei dos cortes** estabelece que a soma das heliforças pertencentes a um mesmo corte é igual a zero. Fisicamente, tem-se a aplicação das equações de equilíbrio sobre as parcelas do mecanismo delimitadas pelos cortes. Para  $k$  cortes, tem-se

$$[\hat{\mathbf{A}}_N]_{dk,C} \cdot \{\boldsymbol{\psi}\}_{C,1} = \{\mathbf{0}\}_{dk,1}, \quad (3.42)$$

sendo  $[\hat{\mathbf{A}}_N]_{dk,C}$  a matriz de rede das ações normalizadas, definida na Seção 3.2.4.2, e  $\{\boldsymbol{\psi}\}_{C,1}$  o vetor de magnitudes dos movimentos, definido na expressão (3.31).

Não havendo equações redundantes, para  $k$  cortes independentes há  $d.k$  equações impondo restrições sobre as  $C$  magnitudes de ações desconhecidas. Assim sendo, são necessárias  $C - d.k$  variáveis primárias (independentes).

dentes) para impor o equilíbrio na cadeia. Tem-se assim o grau líquido de restrição,  $C_N$ , da cadeia super-restringida, dado por

$$C_N = C - d.k. \quad (3.43)$$

### 3.2.4.4 Solução dos sistemas

Para se obter a solução dos sistemas (3.40) e (3.42) é necessário escolher, em ambos os casos, um conjunto de variáveis primárias, compatível com as quantidades  $F_N$  (expressão (3.41)) e  $C_N$  (expressão (3.43)).

Uma vez identificados estes conjuntos, os sistemas são reorganizados separando-se as variáveis primárias das secundárias, resultando

$$\left[ \begin{array}{c} [\hat{\mathbf{M}}_{NS}]_{dl,dl} \\ \vdots \\ [\hat{\mathbf{M}}_{NP}]_{dl,F_N} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{\boldsymbol{\varphi}_S\}_{dl,1} \\ \vdots \\ \{\boldsymbol{\varphi}_P\}_{F_N,1} \end{array} \right\} = \{\mathbf{0}\}_{m,1} \quad (3.44)$$

e

$$\left[ \begin{array}{c} [\hat{\mathbf{A}}_{NS}]_{dk,dk} \\ \vdots \\ [\hat{\mathbf{A}}_{NP}]_{dk,C_N} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{\boldsymbol{\psi}_S\}_{dk,1} \\ \vdots \\ \{\boldsymbol{\psi}_P\}_{C_N,1} \end{array} \right\} = \{\mathbf{0}\}_{dk,1}, \quad (3.45)$$

sendo  $\{\boldsymbol{\varphi}_P\}_{F_N,1}$  e  $\{\boldsymbol{\psi}_P\}_{C_N,1}$  os **vetores das magnitudes primárias**,  $\{\boldsymbol{\varphi}_S\}_{dl,1}$  e  $\{\boldsymbol{\psi}_S\}_{dk,1}$  os **vetores das magnitudes secundárias**,  $[\hat{\mathbf{M}}_{NP}]_{dl,F_N}$  e  $[\hat{\mathbf{A}}_{NP}]_{dk,C_N}$  as **matrizes de rede primárias** e  $[\hat{\mathbf{M}}_{NS}]_{dl,dl}$  e  $[\hat{\mathbf{A}}_{NS}]_{dk,dk}$  as **matrizes de rede secundárias**.

Divide-se os sistemas em duas parcelas separando-se as variáveis primárias das secundárias e isola-se as variáveis secundárias e chegando-se às soluções

$$\{\boldsymbol{\varphi}_S\}_{dl,1} = - [\hat{\mathbf{M}}_{NS}]_{dl,dl}^{-1} [\hat{\mathbf{M}}_{NP}]_{dl,F_N} \{\boldsymbol{\varphi}_P\}_{F_N,1} \quad (3.46)$$

$$\{\boldsymbol{\psi}_S\}_{dk,1} = - [\hat{\mathbf{A}}_{NS}]_{dk,dk}^{-1} [\hat{\mathbf{A}}_{NP}]_{dk,C_N} \{\boldsymbol{\psi}_P\}_{C_N,1} \quad (3.47)$$

A solução da cinemática fornece as magnitudes dos movimentos secundários  $\{\boldsymbol{\varphi}\}_{dl,1}$  expressas em termos das  $F_N$  magnitudes primárias  $\{\boldsymbol{\varphi}\}_{F_N,1}$ . A solução da estática fornece as magnitudes das ações secundárias de  $\{\boldsymbol{\psi}\}_{dk,1}$  expressas em termos das  $C_N$  magnitudes primárias  $\{\boldsymbol{\psi}\}_{C_N,1}$ .

Obtidas as magnitudes secundárias, de ambos os sistemas, pode-se reconstruir os vetores das magnitudes dos movimentos ( $\{\boldsymbol{\varphi}\}_{F,1}$ ) e das ações ( $\{\boldsymbol{\psi}\}_{C,1}$ ), dadas pelas expressões (3.31), e também as matrizes dos movimen-

tos  $([M_D]_{d,F})$  e das ações  $([A_D]_{d,C})$ , dadas pelas expressões (3.27) e (3.28), respectivamente.

Um esquema do método de Davies é apresentado na Figura 26.

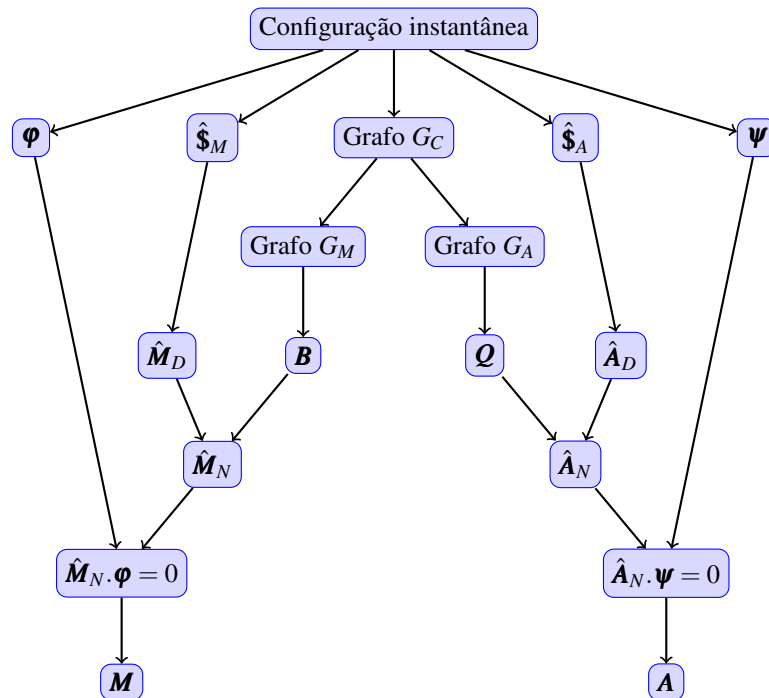


Figura 26: Diagrama da análise cinestática através do Método de Davies.

### 3.2.4.5 Procedimento proposto por Cazangi

No método originalmente proposto por Davies, a obtenção das matrizes dos circuitos e dos cortes é feita a partir dos seus respectivos grafos.

Cazangi (2008) propõe um procedimento, baseado em Christofides (1975), para a obtenção destas matrizes, fazendo uso da ortogonalidade entre as matrizes dos cortes e dos circuitos.

O procedimento consiste em se definir a matriz de incidência, a partir dela se extrair a matriz dos cortes e, utilizando a ortogonalidade, se chegar à matriz dos circuitos.

Define-se como **matriz fundamental** a matriz, dos cortes ou dos circuitos, que possui suas colunas ordenadas iniciando-se pelas cordas e depois pelos ramos da árvore (CHRISTOFIDES, 1975).

Por esta definição, as matrizes dos circuitos e dos cortes adquirem, respectivamente o seguinte formato:

$$[\mathbf{B}]_{l,e} = \begin{bmatrix} [\mathbf{I}]_{l,l} & \vdots & [\tilde{\mathbf{B}}]_{l,k} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{Q}]_{k,e} = \begin{bmatrix} [\tilde{\mathbf{Q}}]_{k,l} & \vdots & [\mathbf{I}]_{k,k} \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

A matriz identidade  $\mathbf{I}_{l,l}$  estabelece a relação entre as  $l$  cordas e os circuitos correspondentes. Da mesma forma, a matriz identidade  $\mathbf{I}_{k,k}$  representa a relação entre os  $k$  cortes e os ramos correspondentes.

A matriz fundamental dos cortes é obtida escalonando-se a matriz de Incidência do grafo  $G_C$ .

Para se chegar à matriz dos circuitos, parte-se do princípio de que, segundo Christofides (1975), a matriz fundamental dos circuitos e a transposta da matriz fundamental dos cortes são ortogonais.

Sendo assim, tem-se

$$[\mathbf{B}]_{l,e} [\mathbf{Q}]_{e,k}^T = [\mathbf{0}]_{l,k}. \quad (3.49)$$

Substituindo-se as relações (3.48) em (3.49), obtém-se a relação

$$[\tilde{\mathbf{B}}]_{l,k} = -[\tilde{\mathbf{Q}}]_{l,k}^T. \quad (3.50)$$

Portanto, a matriz dos cortes pode ser obtida de forma imediata desde que a matriz dos circuitos seja conhecida. O contrário também é verdadeiro.

O método de Davies, modificado por Cazangi (2008), se apresenta conforme o diagrama da Figura 27. Pode-se observar que os grafos  $G_M$  e  $G_A$  passam a ser apenas representativos, não sendo necessários na construção das equações. Mesmo assim eles ainda são extremamente úteis para a visualização das dependências e no cálculo de parâmetros cinemáticos e estáticos secundários, como apresentado no Capítulo 4.

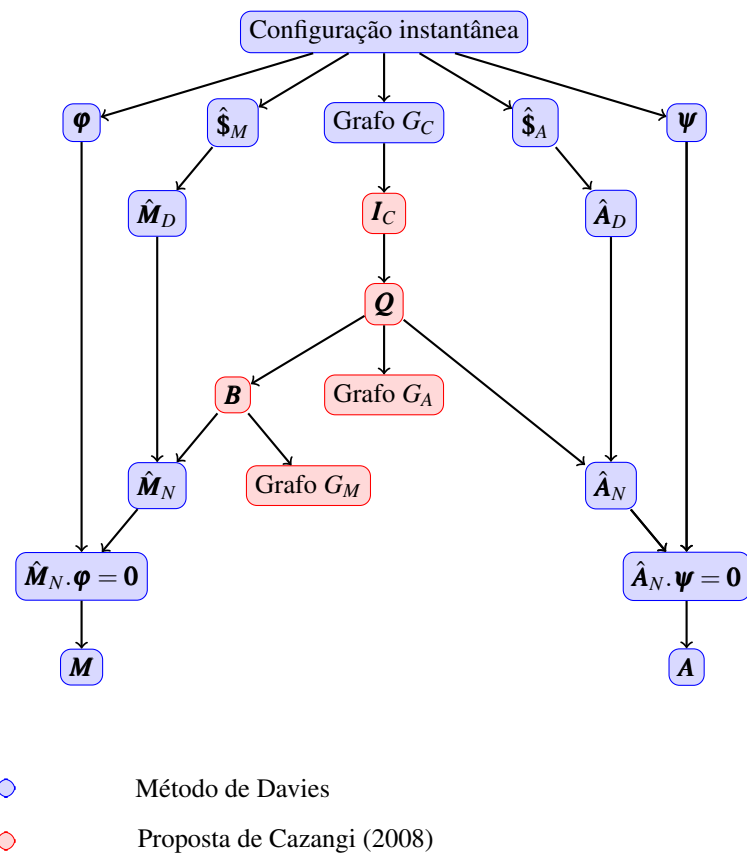


Figura 27: Diagrama da análise cinestática através do Método de Davies incluindo a contribuição de Cazangi (2008).

### 3.3 Obtenção do centro instantâneo através do método de Davies

No método de Davies, o movimento do corpo rígido é representado por um heligiço, na forma da Figura 28. A posição do centro instantâneo é representada pelo vetor  $\mathbf{s}_0$ , no sistema fixo. O ponto P, cuja velocidade  $\mathbf{v}_P$  é tomada como referência, coincide instantaneamente com a origem do sistema fixo. O vetor velocidade angular do corpo é  $\boldsymbol{\omega}$ .

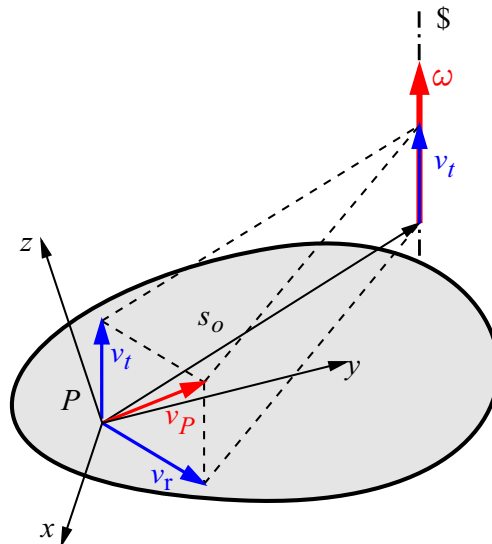


Figura 28: Centro instantâneo de rotação representado por um heligiço.

Decompondo-se a velocidade  $\mathbf{v}_P$  nas direções paralela ( $\mathbf{v}_t$ ) e perpendicular ( $\mathbf{v}_r$ ) à direção do heligiço, o produto vetorial entre  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\mathbf{v}_P$  vale

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_P &= \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_t + \mathbf{v}_r) \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_t + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r\end{aligned}\quad (3.51)$$

$$\begin{aligned}&= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r \\ &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times -\mathbf{s}_0) \\ &= \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{s}_0 \times \boldsymbol{\omega})\end{aligned}\quad (3.52)$$

Conhecendo-se a propriedade do produto triplo  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) -$

$c(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , tem-se

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_P &= \mathbf{s}_o(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{s}_o) \\ &= \mathbf{s}_o(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) \\ &= \mathbf{s}_o \omega^2,\end{aligned}\tag{3.53}$$

de onde se pode obter a expressão para o cálculo da posição do eixo do heligi-ro:

$$\mathbf{s}_o = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_P}{\omega^2}.\tag{3.54}$$

Assim, se o ponto de referência P coincidir instantaneamente com a origem do sistema fixo,  $\mathbf{s}_o$  torna-se a distância da origem até o eixo do heligi-ro e, no caso plano, é a própria posição do heligi-ro, ou o centro instantâneo de rotação do corpo.

Comparando-se as expressões (3.54) e (2.15) observa-se que elas se equivalem.

### 3.3.1 Caso plano

A Figura 29 representa um corpo no plano, cujo movimento está representado instantaneamente pelo heligi-ro  $\$$ . A posição  $\mathbf{s}_o$  do heligi-ro representa o centro instantâneo de rotação do corpo.

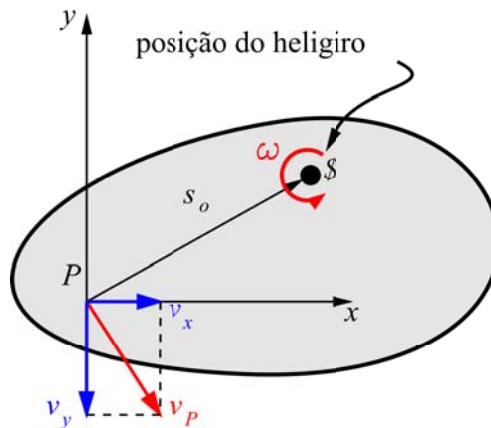


Figura 29: Centro instantâneo de rotação representado por um heligi-ro no plano.

No plano, a velocidade angular e a velocidade do ponto de referência são representadas, respectivamente, por

$$\boldsymbol{\omega} = \{ 0 \quad 0 \quad \omega \}^T \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_P = \{ v_x \quad v_y \quad 0 \}^T, \quad (3.55)$$

que, na forma de heligiro, são representadas por

$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} \omega \\ v_x \\ v_y \end{Bmatrix} \quad (3.56)$$

Aplicando-se a expressão (3.54) para o caso plano, e, levando-se em conta as velocidades (3.55), tem-se:

$$\mathbf{s}_o = \frac{1}{\omega^2} \begin{Bmatrix} -v_y \cdot \omega \\ v_x \cdot \omega \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -v_y / \omega \\ v_x / \omega \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.57)$$

A expressão (3.57) fornece o centro instantâneo de rotação de um corpo no plano, desde que se conheça as coordenadas do heligiro resultante correspondente do corpo.

Ao contrário do da forma tradicional, dada pela expressão (2.15), não há necessidade de se definir os sistemas fixo e móvel para cada centro visto que os heligiros são representados em apenas um sistema de coordenadas.

### 3.4 Comentários

O método de Davies permite que se possa gerar as equações da cinemática e da estática de forma direta, utilizando as vantagens do uso dos helicoides e dos grafos. Isto acontece também na obtenção do centro de rolagem.

A sistemática proposta por Davies, contudo, considera conhecida a configuração instantânea do mecanismo. Além disso não existe acoplamento entre movimentos e ações o que permite que eles possam ser obtidos de forma independente.

No caso em que ocorre dependência entre força e deslocamento, presentes nas molas da suspensão, é preciso estabelecer um sistema de equações que permita o acoplamento das equações cinemáticas de posição com as equações de equilíbrio através das relações constitutivas entre ações nas molas e os deslocamentos.



Neste sentido, o modelo proposto sugere uma adaptação do método de Davies para que a relação entre força e deslocamento possa ser incorporada.



## 4 DESCRIÇÃO DO MODELO

Este capítulo apresenta a descrição do modelo proposto, as equações pertinentes e a forma como os resultados são obtidos.

### 4.1 Visão geral do modelo

O modelo representa, de forma simplificada, um veículo visto do plano frontal, contendo a carroceria e duas rodas, esquerda e direita, cada uma conectada à carroceria através de duas suspensões tipo McPherson. A Figura 30 apresenta os componentes do modelo.

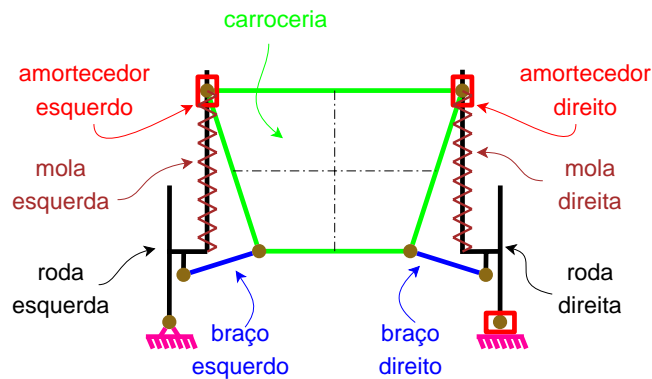


Figura 30: Esquema cinemático do modelo.

Considera-se que o veículo descreve uma trajetória curvilínea, de raio constante, no plano horizontal, partindo do repouso e aumentando sua velocidade com aceleração constante até chegar no limiar do capotamento.

O movimento ocorre de modo que a roda esquerda seja a roda externa à curva sendo, por isso, a roda que está articulada ao piso. A roda direita desliza sobre o piso sem descolar dele, até o limiar do capotamento.

São adotadas as seguintes hipóteses:

- Por se tratar de um modelo quase-estático as inércias são desprezadas (STEJSKAL et al., 2001).
- A carroceria é o único componente cuja massa é considerada.

- Não se considera o atrito dos pneus com o solo.
- O movimento lateral é impedido pelo travamento do deslocamento lateral da roda externa à curva (roda esquerda).
- Todos os componentes, exceto as molas, são considerados rígidos.
- Os amortecedores possuem apenas função cinemática.
- As molas possuem comportamento linear.

A formulação matemática baseia-se no método dos helicoides sucessivos para a geração das equações de posição e no método de Davies, para a geração das equações de velocidade e das equações de equilíbrio estático.

O modelo matemático foi implementado no programa de prototipagem matemática Matlab (THE MATHWORKS, 2009) o que permitiu a obtenção das equações na forma simbólica.

A verificação dos resultados foi feita através do programa de análise dinâmica Working Model (DESIGN SIMULATION TECHNOLOGIES, 2010).

#### 4.2 Caracterização da cadeia cinemática

A cadeia cinemática representativa do modelo está apresentada na Figura 31, sendo composta por 9 corpos e 11 juntas. Os corpos são identificados por números, sendo: 1 - Pista, 2 - Roda esquerda, 3 - Braço transversal esquerdo, 4 - Amortecedor esquerdo, 5 - Bitola, 6 - Roda direita, 7 - Braço transversal direito, 8 - Amortecedor direito e 9 - Carroceria.

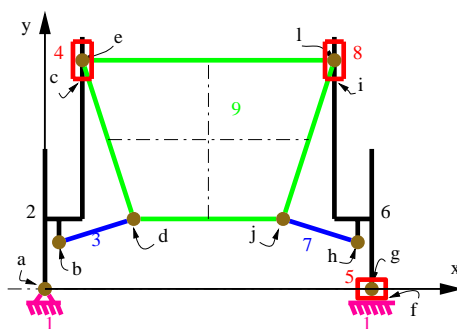


Figura 31: Cadeia cinemática do modelo.

As juntas são identificadas por letras minúsculas, sendo rotativas as juntas  $a, b, d, e, g, h, j$  e  $l$  e prismáticas as juntas  $c, f, e i$ .

O mecanismo possui dois graus de liberdade o que permite o desacoplamento entre o deslocamento vertical e a rolagem do chassi. Assim, tanto o centro de rolagem quanto o centro de gravidade mudam de posição, na direções vertical e lateral. O elo deslizante 5 permite a variação da bitola.

A origem do sistema de referência está localizada no ponto de contato da roda esquerda com o piso, coincidindo com a junta  $a$ .

As dimensões utilizadas no modelo estão apresentadas na Figura 32 e na Tabela 3. Todos os valores adotados são hipotéticos e equivalem, a um veículo pequeno com um ocupante.

O veículo possui uma massa total de 920 kg e o centro de gravidade (CG) localiza-se a uma distância  $C_4$  da base da carroceria.

O comprimento inicial das molas é definido de modo que a base da carroceria fique alinhada com os eixos das rodas

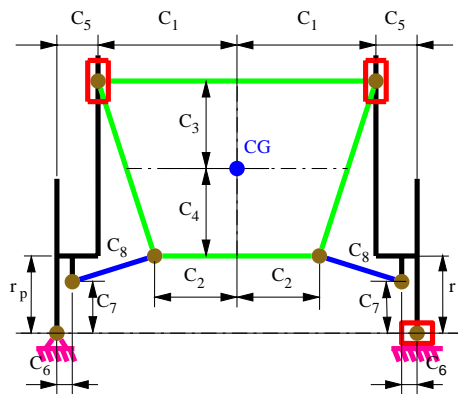


Figura 32: Dimensões do modelo.

### 4.3 Grafos

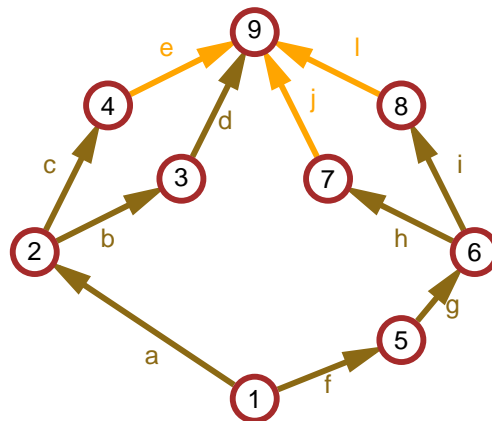
O grafo dos acoplamentos diretos ( $G_C$ ) do modelo, apresentado na Figura 33, é composto por 9 vértices (corpos) e 11 arestas (juntas).

O vértice 1 representa o piso e o vértice 9, a carroceria. Os demais vértices representam os componentes das suspensões: roda esquerda (2), roda direita (6), braço esquerdo (3), braço direito (7), amortecedor esquerdo (4) e

Tabela 3: Valores constantes utilizados no modelo.

constante	valor	unid.	descrição
$C_1$	0,500	$m$	metade da largura do topo da carroceria
$C_2$	0,300	$m$	metade da largura da base da carroceria
$C_3$	0,350	$m$	distância do ponto de referência ao topo da carroceria
$C_4$	0,300	$m$	distância do ponto de referência à base da carroceria
$C_5$	0,150	$m$	distância entre o amortecedor e a roda
$C_6$	0,050	$m$	comprimento da ponta de eixo
$C_7$	0,200	$m$	altura da articulação inferior a partir do solo
$C_8$	0,316	$m$	comprimento dos braços transversais
$r_p$	0,300	$m$	raio do pneu
$g$	10,00	$m/s^2$	aceleração da gravidade
$k_{mola}$	100000	$N/m$	rigidez equivalente das duas molas de um dos lados do veículo
$L_0$	0,693	$m$	comprimento inicial das molas

amortecedor direito (8). O bloco deslizante entre a roda direita e o piso é representado pelo corpo 5.

Figura 33: Grafo dos acoplamentos diretos -  $G_C$ .

Do grafo  $G_C$ , obtém-se a matriz de incidência  $\mathbf{I}_C$ , conforme apresentado na expressão (3.37).

$$\mathbf{I}_{C,11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

De acordo com Cazangi (2008), a matriz de incidência fornece as matrizes dos cortes e dos circuitos.

A matriz dos cortes  $\mathbf{Q}$  é obtida escalonando-se a matriz de incidência, através de operações sobre linhas e colunas, de modo a se obter uma sub-matriz identidade, uma sub-matriz retangular e uma linha de zeros que é descartada. A sub-matriz identidade representa os ramos do grafo  $G_C$  e a matriz retangular representa as cordas.

Escalonando-se a matriz de incidência (4.1), eliminando-se a linha nula e reordenando-se as colunas, resulta

$$\mathbf{Q}_{8,11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Cada linha de  $\mathbf{Q}$  representa um corte e as colunas, as juntas. Os ramos correspondem às juntas  $a, b, c, d, f, g, h$  e  $i$ . As cordas correspondem às juntas  $e, j$  e  $l$ . A orientação de cada corte é definida pela orientação do ramo que o identifica.

Conforme apresentado na Seção 3.2.2.4, uma junta possui duas ações internas a elas, correspondentes a duas forças, no caso de uma junta rotativa,

ou uma força e um momento, no caso de uma junta prismática. Para representar estas ações internas, define-se a matriz dos cortes expandida  $\mathbf{Q}_{A_{int}}$ , obtida pela duplicação das colunas da matriz dos cortes  $\mathbf{Q}$ .

$$\mathbf{Q}_{A_{int},22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & & & & & \\ \dots & & & & & & & & & & & \\ \dots & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

As ações externas (peso, força lateral e forças nas molas) são representadas na matriz dos cortes das ações externas,  $\mathbf{Q}_{A_{ext}}$

$$\mathbf{Q}_{A_{ext},4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

As matrizes dos cortes expandida ( $\mathbf{Q}_{A_{int}}$ ) e a matriz dos cortes das ações externas ( $\mathbf{Q}_{A_{ext}}$ ) são agrupadas na matriz dos cortes ampliada  $\mathbf{Q}_A$

$$\mathbf{Q}_{A,26} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{A_{int},22} & \mathbf{Q}_{A_{ext},4} \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

A matriz dos circuitos  $\mathbf{B}$  é obtida, seguindo-se o procedimento proposto por Cazangi (2008), aplicando-se o princípio da ortogonalidade entre



as matrizes dos cortes e dos circuitos.

$$\mathbf{B}_{3,11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

As linhas de  $\mathbf{B}$  representam os circuitos correspondentes às cordas  $e$ ,  $j$  e  $l$ . Cada linha apresenta as juntas que pertencem ao respectivo circuito.

As cordas são as responsáveis pelo fechamento dos circuitos. Sendo assim, elas representam as juntas que devem ser desconectadas para a definição da cadeia aberta conforme a Figura 34.

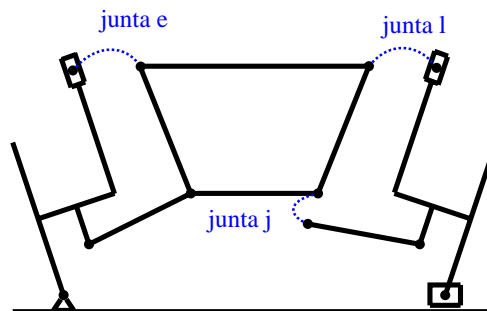
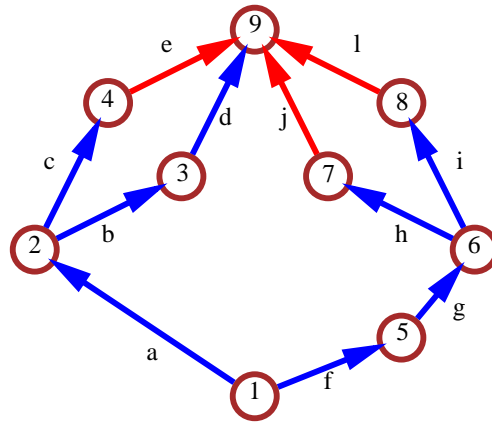
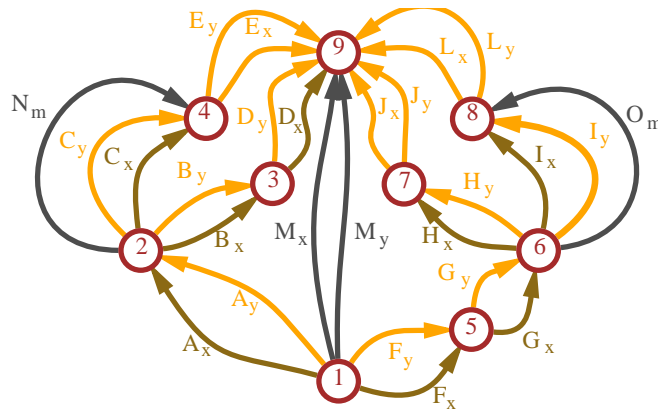


Figura 34: Abertura dos circuitos nas cordas.

Conhecidos os ramos e as cordas, tem-se os grafos dos circuitos ( $G_M$ ) e dos cortes ( $G_A$ ). O grafo  $G_M$  está representado na Figura 35.

O grafo  $G_A$  das ações, apresentado na Figura 36, representa todas as ações internas e externas existentes no mecanismo. As arestas  $A_x$ ,  $B_x$ ,  $C_x$ ,  $D_x$ ,  $F_x$ ,  $G_x$ ,  $H_x$  e  $I_x$  representam os ramos da árvore do grafo. As ações internas estão representadas pelas arestas de  $A$  até  $L$ , com os índices  $x$  e  $y$ . As ações externas estão representadas pelas arestas  $N_m$  e  $O_m$ , correspondendo às ações nas molas, e pelas arestas  $M_x$  e  $M_y$ , correspondendo ao peso e à inércia lateral.

Para cada ramo da árvore existe um corte, apresentados na Figura 37. Cada corte é identificado pelo ramo correspondente e é feito de acordo com as informações apresentadas na matriz dos cortes (4.2).

Figura 35: Grafo dos Movimentos -  $G_M$ .Figura 36: Grafo das Ações -  $G_A$ .

#### 4.4 Cinemática de posição

##### 4.4.1 Variáveis de posição

As variáveis de posição, descritas na Tabela 4, e apresentadas na Figura 38, representam as magnitudes das juntas (ângulos ou comprimentos) e

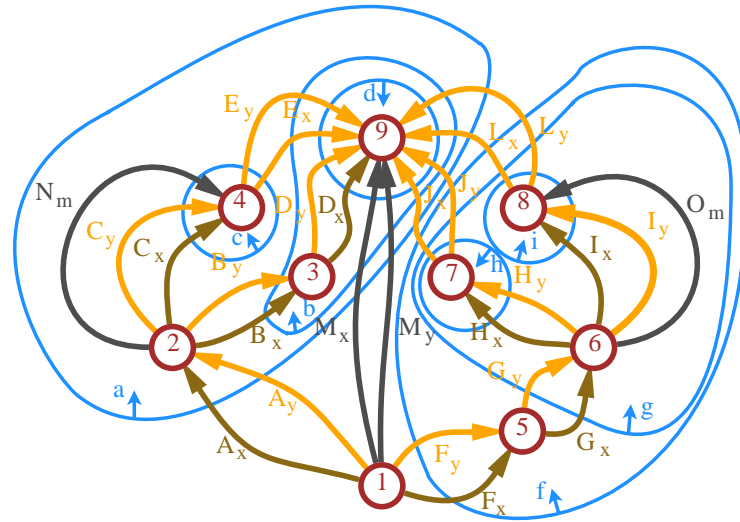


Figura 37: Grafo das Ações com os cortes.

formam o **vetor das magnitudes de posição**,  $\mathbf{q}_{P_{11,1}}$ .

$$\mathbf{q}_{P_{11,1}} = \{ q_a \ q_b \ q_c \ q_d \ q_e \ q_f \ q_g \ q_h \ q_i \ q_j \ q_l \}^T. \quad (4.7)$$

#### 4.4.2 Configuração de referência

A montagem da cadeia cinemática utiliza o método dos helicoides sucessivos (TSAI, 1999) descrito na Seção 3.1.2. A posição inicial da cadeia cinemática, denominada **configuração de referência**, é a configuração a partir da qual são medidos os deslocamentos das juntas. É a configuração em que todas as juntas assumem o valor 0, sendo também denominada de **posição zero**.

A Figura 39 apresenta a configuração de referência do modelo. Todos os circuitos da cadeia estão abertos nas juntas  $e$ ,  $j$  e  $l$ , que correspondem às cordas do grafo  $G_C$ .

Na configuração de referência, a posição e a orientação de todas as juntas bem como a posição do centro de gravidade são previamente conhecidos. A posição e a orientação de referência das juntas são agrupadas nas

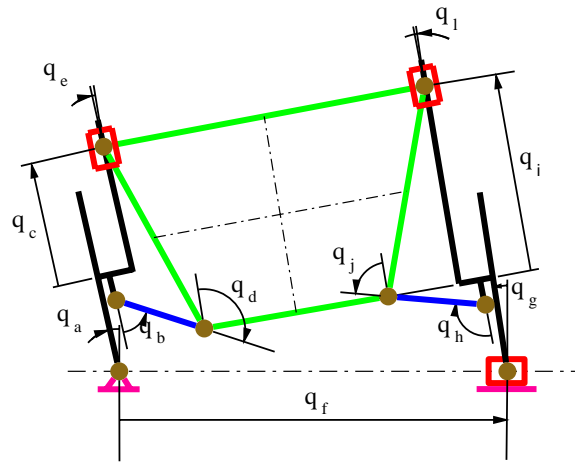


Figura 38: Identificação das variáveis de posição das juntas.

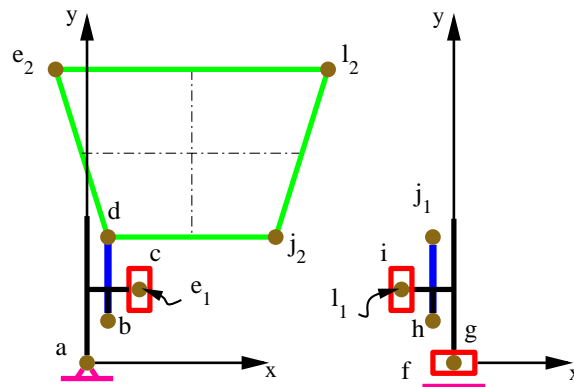


Figura 39: Cadeia cinemática na configuração de referência (posição zero).

matrizes  $\mathbf{P}_0$  e  $\mathbf{U}_0$ , respectivamente.

As juntas desconectadas  $e$ ,  $j$  e  $l$  são acessadas por dois caminhos distintos, definidos com base no grafo  $G_C$ , conforme mostrado na Figura 40. Os caminhos  $l-e$ ,  $l-j$  e  $l-l$  seguem pelas rodas, passando respectivamente pelos corpos 1-2-4, 1-5-6-7 e 1-5-6-8. Os caminhos  $2-e$ ,  $2-j$  e  $2-l$  passam pela carroceria, através dos corpos 1-2-3-9.

Tabela 4: Variáveis de posição das juntas

	variável	descrição
1	$q_a$	ângulo entre o eixo vertical e o plano da roda esquerda (cambagem esquerda)
2	$q_b$	ângulo entre o plano da roda esquerda e o braço transversal esquerdo
3	$q_c$	comprimento do amortecedor esquerdo a partir do eixo da roda
4	$q_d$	ângulo entre o braço transversal esquerdo e a vertical da carroceria
5	$q_e$	ângulo entre o eixo do amortecedor esquerdo e o eixo vertical da carroceria
6	$q_f$	distância entre eixos (bitola)
7	$q_g$	ângulo entre o eixo vertical e o plano da roda direita (cambagem direita)
8	$q_h$	ângulo entre o plano da roda direita e o braço transversal direito
9	$q_i$	comprimento do amortecedor direito a partir do eixo da roda
10	$q_j$	ângulo entre o braço transversal direito e o eixo vertical da carroceria
11	$q_l$	ângulo entre o eixo do amortecedor direito e o eixo vertical da carroceria

A matriz  $\mathbf{P}_{0cam_1}$  reúne as posições de referência das juntas  $e$ ,  $j$  e  $l$ , seguindo pelos caminhos  $1-e$ ,  $1-j$  e  $1-l$ , do grafo  $G_C$ :

$$\mathbf{P}_{0cam_1} = [ \mathbf{p}_{0e_1} \quad \mathbf{p}_{0j_1} \quad \mathbf{p}_{0l_1} ]. \quad (4.8)$$

A posição das juntas abertas, passando pelos caminhos  $2-e$ ,  $2-j$  e  $2-l$ , está representada pela matriz  $\mathbf{P}_{0cam_2}$ .

$$\mathbf{P}_{0cam_2} = [ \mathbf{p}_{0e_2} \quad \mathbf{p}_{0j_2} \quad \mathbf{p}_{0l_2} ] \quad (4.9)$$

#### 4.4.3 Posição e orientação atuais das juntas

Os vetores **posição** ( $\mathbf{s}_0$ ) e **orientação** ( $\mathbf{s}$ ) **atuais** de cada junta são obtidos através do produto das matrizes de transformação (Seção 3.1.2) corres-

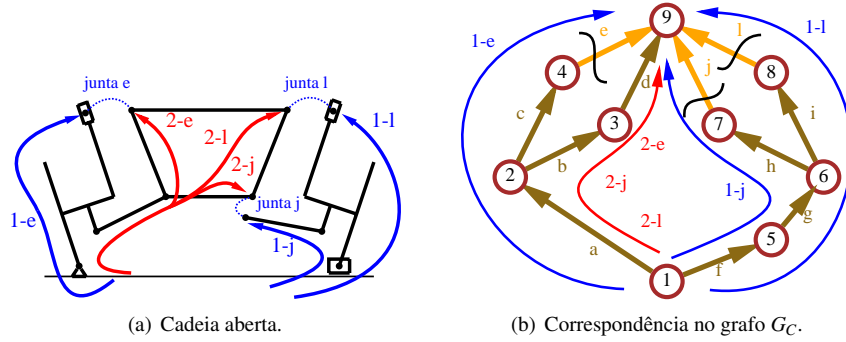


Figura 40: Caminhos para atingir as extremidades da cadeia aberta.

pondentes às juntas pertencentes ao caminho no grafo  $G_C$  até a junta desejada.

As juntas rotativas sofrem a influência dos deslocamentos até a junta imediatamente anterior a elas enquanto que as juntas prismáticas ( $c$ ,  $f$  e  $i$ ) sofrem a influência dos deslocamentos incluindo a própria junta.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}_{0a} &= \mathbf{P}_{0a} \\
 \mathbf{s}_{0b} &= \mathbf{A}_a \cdot \mathbf{P}_{0b} \\
 \mathbf{s}_{0c} &= \mathbf{A}_a \cdot \mathbf{A}_c \cdot \mathbf{P}_{0c} \\
 \mathbf{s}_{0d} &= \mathbf{A}_a \cdot \mathbf{A}_b \cdot \mathbf{P}_{0d} \\
 \mathbf{s}_{0e1} &= \mathbf{A}_a \cdot \mathbf{A}_c \cdot \mathbf{P}_{0e1} \\
 \mathbf{s}_{0f} &= \mathbf{A}_f \cdot \mathbf{P}_{0f} \\
 \mathbf{s}_{0g} &= \mathbf{A}_f \cdot \mathbf{P}_{0g} \\
 \mathbf{s}_{0h} &= \mathbf{A}_f \cdot \mathbf{A}_g \cdot \mathbf{P}_{0h} \\
 \mathbf{s}_{0i} &= \mathbf{A}_f \cdot \mathbf{A}_g \cdot \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{P}_{0i} \\
 \mathbf{s}_{0j1} &= \mathbf{A}_f \cdot \mathbf{A}_g \cdot \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{P}_{0j1} \\
 \mathbf{s}_{0l1} &= \mathbf{A}_f \cdot \mathbf{A}_g \cdot \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{P}_{0l1}.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

As juntas  $e$ ,  $j$  e  $l$  estão identificadas com o índice 1 para indicar que estão sendo acessadas pelo caminho das rodas (caminho 1). Quando acessadas pela carroceria (caminho 2), elas são obtidas por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}_{0e2} &= \mathbf{A}_a \cdot \mathbf{A}_b \cdot \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{P}_{0e2} \\
 \mathbf{s}_{0j2} &= \mathbf{A}_a \cdot \mathbf{A}_b \cdot \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{P}_{0j2} \\
 \mathbf{s}_{0l2} &= \mathbf{A}_a \cdot \mathbf{A}_b \cdot \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{P}_{0l2}.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

As orientações atuais são obtidas utilizando-se as matrizes de rotação  $\mathbf{R}$ , sub-matrizes de rotação contidas nas matrizes  $\mathbf{A}$ .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}_a &= \mathbf{u}_{0a} \\
 \mathbf{s}_b &= \mathbf{R}_a \cdot \mathbf{u}_{0b} \\
 \mathbf{s}_c &= \mathbf{R}_a \cdot \mathbf{R}_c \cdot \mathbf{u}_{0c} \\
 \mathbf{s}_f &= \mathbf{R}_a \cdot \mathbf{R}_b \cdot \mathbf{u}_{0d} \\
 \mathbf{s}_{e1} &= \mathbf{R}_a \cdot \mathbf{R}_c \cdot \mathbf{u}_{0e1} \\
 \mathbf{s}_f &= \mathbf{R}_f \cdot \mathbf{u}_{0f} \\
 \mathbf{s}_g &= \mathbf{R}_f \cdot \mathbf{u}_{0g} \\
 \mathbf{s}_h &= \mathbf{R}_f \cdot \mathbf{R}_g \cdot \mathbf{u}_{0h} \\
 \mathbf{s}_i &= \mathbf{R}_f \cdot \mathbf{R}_g \cdot \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{u}_{0i} \\
 \mathbf{s}_{j1} &= \mathbf{R}_f \cdot \mathbf{R}_g \cdot \mathbf{R}_h \cdot \mathbf{u}_{0j1} \\
 \mathbf{s}_{l1} &= \mathbf{R}_f \cdot \mathbf{R}_g \cdot \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{u}_{0l1}.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

A Figura 41 mostra a cadeia cinemática gerada pelo modelo, após a aplicação de valores às magnitudes das juntas. A cadeia permanece aberta existindo uma diferença de posição nas as juntas  $e$ ,  $j$  e  $l$ .

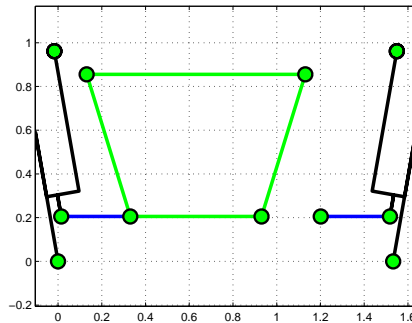


Figura 41: Configuração inicial para a solução da cinemática de posição.

#### 4.4.4 Posição atual das extremidades da cadeia

Pelo caminho 1 da Figura 40, a posição atual das extremidades da cadeia cinemática é dada pela matriz  $\mathbf{P}_{cam_1}$ .

$$\mathbf{P}_{cam_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{0e1} & \mathbf{s}_{0j1} & \mathbf{s}_{0l1} \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

Pelo caminho 2, passando pela carroceria, a posição atual das mesmas extremidades é dada pela matriz  $\mathbf{P}_{cam_2}$ .

$$\mathbf{P}_{cam_2} = [ \mathbf{s}_{0e2} \quad \mathbf{s}_{0j2} \quad \mathbf{s}_{0l2} ] \quad (4.14)$$

#### 4.4.5 Matriz erro de posição

A **matriz dos erros de posição**  $\boldsymbol{\varepsilon}_P$  define a diferença de posição das juntas  $e$ ,  $j$  e  $l$ , medidas pelos dois caminhos mostrados na Figura 40, sendo calculada pela diferença entre as posições dadas pelas expressões (4.13) e (4.14).

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{P_{2,3}} = [\mathbf{P}_{cam_2} - \mathbf{P}_{cam_1}] \quad (4.15)$$

#### 4.4.6 Orientação atual da extremidade da cadeia

A orientação da carroceria em relação ao piso é obtida pelo produto das matrizes de rotação das juntas pertencentes a um mesmo caminho do grafo  $G_M$ , que liga o piso à carroceria.

Como pode-se chegar à carroceria por quatro caminhos distintos, estabelece-se as seguintes relações entre as matrizes de rotação  $\mathbf{R}$  das juntas pertencentes a cada caminho:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_a \cdot \mathbf{R}_b \cdot \mathbf{R}_d &= \mathbf{R}_a \cdot \mathbf{R}_c \cdot \mathbf{R}_e \\ \mathbf{R}_a \cdot \mathbf{R}_b \cdot \mathbf{R}_d &= \mathbf{R}_f \cdot \mathbf{R}_g \cdot \mathbf{R}_h \cdot \mathbf{R}_j \\ \mathbf{R}_a \cdot \mathbf{R}_b \cdot \mathbf{R}_d &= \mathbf{R}_f \cdot \mathbf{R}_g \cdot \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_l \end{aligned} \quad (4.16)$$

Agrupando-se as matrizes no mesmo lado da igualdade, chega-se à  $\mathbf{I}$  matriz identidade.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_b \cdot \mathbf{R}_d \cdot \mathbf{R}_e^T \cdot \mathbf{R}_c^T &= \mathbf{I} \\ \mathbf{R}_a \cdot \mathbf{R}_b \cdot \mathbf{R}_d \cdot \mathbf{R}_j^T \cdot \mathbf{R}_h^T \cdot \mathbf{R}_g^T \cdot \mathbf{R}_f^T &= \mathbf{I} \\ \mathbf{R}_a \cdot \mathbf{R}_b \cdot \mathbf{R}_d \cdot \mathbf{R}_l^T \cdot \mathbf{R}_i^T \cdot \mathbf{R}_g^T \cdot \mathbf{R}_f^T &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Nas três equações, o ângulo referente à rotação resultante deve ser zero, ou



seja:

$$\begin{aligned} q_b + q_d - q_e &= 0 \\ q_a + q_b + q_d - q_g - q_h - q_j &= 0 \\ q_a + q_b + q_d - q_g - q_l &= 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Como inicialmente a cadeia está aberta, tem-se um erro, denominado **vetor erro de orientação**,  $\boldsymbol{\varepsilon}_\theta$ , dado por

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\theta,1} = \begin{Bmatrix} q_b + q_d - q_e \\ q_a + q_b + q_d - q_g - q_h - q_j \\ q_a + q_b + q_d - q_g - q_l \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

#### 4.4.7 Vetor das restrições cinemáticas

As restrições de posição (4.15) e de orientação (4.19) são agrupadas no **vetor das restrições cinemáticas de posição**,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , dado por

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{9,1} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_\theta \\ \boldsymbol{\varepsilon}_p^{<1>} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_p^{<2>} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_p^{<3>} \end{Bmatrix}, \quad (4.20)$$

sendo o super-índice a coluna da matriz dos erros de posição apresentada na expressão (4.15).

O vetor das restrições cinemáticas representa o sistema de nove equações e onze incógnitas que resolve a cinemática de posição.

## 4.5 Cinemática de velocidade

As equações para a solução da cinemática de velocidades são obtidas utilizando o método de Davies na sua forma original, partindo-se do princípio que a cinemática instantânea de posição já está resolvida.

### 4.5.1 Matriz dos movimentos unitários normalizados

A matriz dos movimentos unitários normalizados,  $\hat{\mathbf{M}}_D$ , é composta pelos heligiros unitários correspondentes a cada junta, de acordo com (3.27).

$$\hat{\mathbf{M}}_{D_{3,11}} = [ \hat{\$}_a \ \hat{\$}_b \ \hat{\$}_c \ \hat{\$}_d \ \hat{\$}_e \ \hat{\$}_f \ \hat{\$}_g \ \hat{\$}_h \ \hat{\$}_i \ \hat{\$}_j \ \hat{\$}_l ]. \quad (4.21)$$

O formato de cada helicóide depende do tipo da junta. De acordo com a expressão (3.11), para as juntas rotativas,  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $j$  e  $l$ , os heliíros unitários normalizados são dados por

$$\hat{\$} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{s} \\ \mathbf{s}_0 \times \mathbf{s} \end{array} \right\} \quad (4.22)$$

e para as juntas prismáticas,  $c$ ,  $f$  e  $i$ , dados por

$$\hat{\$} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{s} \end{array} \right\}. \quad (4.23)$$

Os vetores  $\mathbf{s}_0$  e  $\mathbf{s}$  correspondem às posições (4.10) e (4.11) e às orientações (4.12) atuais das juntas, sendo funções dos valores instantâneos das variáveis de posição.

#### 4.5.2 Magnitudes dos movimentos

O vetor das magnitudes dos movimentos,  $\boldsymbol{\varphi}$ , é formado pelas onze magnitudes de velocidade das juntas.

$$\boldsymbol{\varphi}_{11,1} = \{ \omega_a \ \omega_b \ v_c \ \omega_d \ \omega_e \ v_f \ \omega_g \ \omega_h \ v_i \ \omega_j \ \omega_l \}^T. \quad (4.24)$$

#### 4.5.3 Matriz de rede dos movimentos unitários normalizados

A matriz de rede dos movimentos unitários normalizados,  $\hat{\mathbf{M}}_N$ , distribui os heliíros unitários normalizados pelos circuitos da cadeia cinemática. Para isto, ela utiliza a matriz dos circuitos  $\mathbf{B}$  e a matriz dos heliíros unitários  $\hat{\mathbf{M}}_D$ .

A distribuição ocorre multiplicando-se a matriz dos heliíros unitários por três matrizes diagonais sendo cada diagonal formada por uma linha da matriz dos circuitos, da seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{M}}_{N_{9,11}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}_D \cdot \text{diag}(\mathbf{B}_1) \\ \hat{\mathbf{M}}_D \cdot \text{diag}(\mathbf{B}_2) \\ \hat{\mathbf{M}}_D \cdot \text{diag}(\mathbf{B}_3) \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

sendo  $diag(\mathbf{B}_i)$  a matriz diagonal cuja diagonal é formada pela linha  $i$  de  $\mathbf{B}$ .

Procedendo-se desta maneira, a matriz de rede dos movimentos unitários normalizados toma o seguinte formato:

$$\hat{\mathbf{M}}_{N9,11} = \begin{bmatrix} 0 & -\$b & \$c & -\$d & \$e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\$a & -\$b & 0 & -\$d & 0 & \$f & \$g & \$h & 0 & \$j & 0 \\ -\$a & -\$b & 0 & -\$d & 0 & \$f & \$g & 0 & \$i & 0 & \$l \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

#### 4.5.4 Sistema de equações dos movimentos

As equações dos movimentos são obtidas pelo produto da matriz de rede  $\hat{\mathbf{M}}_N$  pelo vetor das magnitudes  $\varphi$

$$[\hat{\mathbf{M}}_N]_{9,11} \cdot \{\varphi\}_{11,1} = \{\mathbf{0}\}_{9,1} \quad (4.27)$$

Para se chegar à solução do sistema, são necessárias duas variáveis primárias, correspondentes aos dois graus de liberdade do mecanismo. A solução é obtida por

$$\varphi_{S9,1} = -[\hat{\mathbf{M}}_{NS}]_{9,9}^{-1} \cdot [\hat{\mathbf{M}}_{NP}]_{9,2} \cdot \{\varphi_P\}_{2,1}, \quad (4.28)$$

sendo  $\{\varphi_S\}_{9,1}$  o vetor das magnitudes das velocidades secundárias,  $[\hat{\mathbf{M}}_{NS}]_{9,9}$  a matriz de rede dos movimentos unitários secundários,  $[\hat{\mathbf{M}}_{NP}]_{9,2}$  a matriz de rede dos movimentos unitários primários e  $\{\varphi_P\}_{2,1}$  o vetor das magnitudes das velocidades primárias.

Como resultado, tem-se

$$\varphi_{S9,1} = [\hat{\mathbf{M}}_{NR}]_{9,2} \cdot \{\varphi_P\}_{2,1}. \quad (4.29)$$

Deve-se escolher um par de velocidades primárias dentre as combinações possíveis, de modo que não provoquem a queda do posto da matriz  $[\hat{\mathbf{M}}_{NS}]_{9,9}$ .

Combinando-se 11 juntas duas a duas, tem-se um total de 55 combinações possíveis. Destas, 12 são inválidas por provocarem a queda do posto da matriz. Dentre as combinações possíveis, selecionou-se  $v_c$  e  $v_f$  como ve-

localidades primárias. Assim, (4.28) resulta em

$$\begin{pmatrix} \omega_a \\ \omega_b \\ \omega_d \\ \omega_e \\ \omega_g \\ \omega_h \\ v_i \\ \omega_j \\ \omega_l \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} M_{ac} & M_{af} \\ M_{bc} & M_{bf} \\ M_{dc} & M_{df} \\ M_{ec} & M_{ef} \\ M_{gc} & M_{gf} \\ M_{hc} & M_{hf} \\ M_{ic} & M_{if} \\ M_{jc} & M_{jf} \\ M_{lc} & M_{lf} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_c \\ v_f \end{Bmatrix}. \quad (4.30)$$

Logo, cada velocidade secundária é representada por duas parcelas, cada uma contendo a influência de uma variável primária.

## 4.6 Estática

As equações para o cálculo da estática são obtidas utilizando o método de Davies com a Lei dos Cortes. São 24 equações e 26 variáveis sendo as 2 ações externas (peso e força lateral) consideradas conhecidas.

### 4.6.1 Ações internas e externas

O conjunto das ações unitárias normalizadas internas forma a **matriz das ações normalizadas internas**,  $\hat{A}_{D_{int}}$ .

$$\hat{A}_{D_{int3,22}} = \begin{bmatrix} \hat{\$}_{A_x} & \hat{\$}_{A_y} & \dots & \hat{\$}_{L_x} & \hat{\$}_{L_y} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

As magnitudes das ações internas são representadas por letras maiúsculas, indicativas das juntas, acrescidas de um índice correspondente à direção de aplicação. As ações externas obedecem a sequência do alfabeto, sem relação com o símbolo da junta.

As magnitudes das ações (internas e externas) estão definidas na Tabela 5. Elas formam o vetor das magnitudes das ações,  $\Psi$ , apresentado na expressão 4.32.

Tabela 5: Magnitudes das ações nas juntas

	variável	descrição
1	$A_x$	força horizontal na junta a
2	$A_y$	força vertical na junta a
3	$B_x$	força horizontal na junta b
4	$B_y$	força vertical na junta b
5	$C_n$	força normal ao deslocamento da junta c
6	$C_z$	momento na junta c
7	$D_x$	força horizontal na junta d
8	$D_y$	força vertical na junta d
9	$E_x$	força horizontal na junta e
10	$E_y$	força vertical na junta e
11	$F_n$	força normal ao deslocamento da junta f
12	$F_z$	momento na junta f
13	$G_x$	força horizontal na junta g
14	$G_y$	força vertical na junta g
15	$H_x$	força horizontal na junta h
16	$H_y$	força vertical na junta h
17	$I_n$	força normal ao deslocamento da junta i
18	$I_z$	momento na junta i
19	$J_x$	força horizontal na junta j
20	$J_y$	força vertical na junta j
21	$L_x$	força horizontal na junta l
22	$L_y$	força vertical na junta l
23	$M_x$	força lateral no centro de massa da carroceria
24	$M_y$	força peso no centro de massa da carroceria
25	$N_m$	força na mola esquerda
26	$O_m$	força na mola direita

$$\Psi_{26,1} = \left\{ \begin{array}{cccccccccccccccccccc} A_x & A_y & B_x & B_y & C_n & C_z & D_x & D_y & E_x & E_y & F_n & \dots & \dots & F_z & G_x & G_y & H_x & H_y & I_n & I_z & J_x & J_y & L_x & \dots & \dots & L_y & M_x & M_y & N_m & O_m \end{array} \right\}^T \quad (4.32)$$

São quatro as ações externas aplicadas na cadeia: a força peso, a força lateral e as duas forças nas molas.

A força peso,  $M_y$ , é aplicada no centro de gravidade da carroceria.

Considerando que o modelo cinemático é observado sobre um plano vertical que se movimenta com o veículo ao longo da curva, a força centrípeta  $A_x$  equilibra-se com a reação de inércia  $M_x = m \cdot a_c$ , aplicada no centro de gravidade. sendo  $a_c$  a aceleração centrípeta.

As forças das molas,  $N_m$  e  $O_m$ , são aplicadas na direção das juntas prismáticas  $c$  e  $i$ .

Tanto a posição do centro de gravidade quanto a das juntas prismáticas mudam a cada instante sendo necessário atualizá-las.

A posição de referência dos pontos de aplicação das ações externas é definida na matriz  $\mathbf{P}_{ext}$ . A primeira coluna refere-se à posição do centro de gravidade e as outras duas colunas representam os pontos de aplicação das forças nas molas.

$$\mathbf{P}_{ext} = [ \mathbf{p}_{rCG} \quad \mathbf{p}_{rc} \quad \mathbf{p}_{ri} ] \quad (4.33)$$

A orientação de referência das forças nas molas coincide com a orientação das juntas prismáticas  $c$  e  $i$ .

Como as orientações do peso e da carga lateral são fixas, elas não precisam ser atualizadas.

Seguindo o mesmo procedimento usado para o cálculo da posição e orientação das juntas, a posição e a orientação atual das ações externas são obtidas aplicando-se as matrizes de transformação, seguindo o caminho da grafo  $G_M$ .

A posição atual do centro de gravidade é dada por

$$\mathbf{s}_{0CG} = \mathbf{A}_a \cdot \mathbf{A}_b \cdot \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{p}_{rCG}. \quad (4.34)$$

As posições das molas já foram definidas nas equações (4.10).

As orientações da força peso e da força lateral são fixas, dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{CGx} &= \{ 1 \ 0 \ 0 \}^T \quad (M_x) \\ \mathbf{s}_{CGy} &= \{ 0 \ 1 \ 0 \}^T \quad (M_y). \end{aligned} \quad (4.35)$$

A orientação das forças nas molas segue a orientação das juntas  $c$  e  $i$ , dadas pelas equações (4.12).

Por se tratar de forças puras, cada coluna da matriz das ações externas normalizadas é formada por uma heliforça no formato da expressão (3.14)

$$\hat{\mathbf{s}} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{s}_{0ext} \times \mathbf{s}_{ext} \\ \mathbf{s}_{ext} \end{array} \right\} \quad (4.36)$$

Aplicando-se (4.10), (4.34) e (4.35) em (4.36), obtém-se a matriz das ações externas normalizadas

$$\hat{\mathbf{A}}_{D_{ext3,4}} = \begin{bmatrix} \hat{\$}_{M_x} & \hat{\$}_{M_y} & \hat{\$}_{N_m} & \hat{\$}_{O_m} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

A matriz das ações normalizadas na posição atual é formada pelas matrizes das ações internas (4.31) e externas (4.37).

$$\hat{\mathbf{A}}_{D_{3,26}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{D_{int3,22}} & \hat{\mathbf{A}}_{D_{ext3,4}} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

#### 4.6.2 Matriz de rede das ações unitárias normalizadas

A matriz de rede das ações unitárias normalizadas,  $\hat{\mathbf{A}}_{N_{24,26}}$ , distribui as heliforças unitárias normalizadas pelos cortes da cadeia cinemática. É obtida multiplicando-se a matriz das ações normalizadas,  $\hat{\mathbf{A}}_{D_{3,26}}$ , (4.38) por oito matrizes diagonais, sendo cada diagonal formada por uma linha da matriz dos cortes ampliada,  $\mathbf{Q}_{A_{8,26}}$ , (4.5).

$$\hat{\mathbf{A}}_{N_{24,26}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_D \cdot \text{diag}(\mathbf{Q}_{A_1}) \\ \hat{\mathbf{A}}_D \cdot \text{diag}(\mathbf{Q}_{A_2}) \\ \hat{\mathbf{A}}_D \cdot \text{diag}(\mathbf{Q}_{A_3}) \\ \hat{\mathbf{A}}_D \cdot \text{diag}(\mathbf{Q}_{A_4}) \\ \hat{\mathbf{A}}_D \cdot \text{diag}(\mathbf{Q}_{A_5}) \\ \hat{\mathbf{A}}_D \cdot \text{diag}(\mathbf{Q}_{A_6}) \\ \hat{\mathbf{A}}_D \cdot \text{diag}(\mathbf{Q}_{A_7}) \\ \hat{\mathbf{A}}_D \cdot \text{diag}(\mathbf{Q}_{A_8}) \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

sendo  $\text{diag}(\mathbf{Q}_{A_i})$  a matriz diagonal cuja diagonal é formada pela linha  $i$  de  $\mathbf{Q}_A$ .

#### 4.6.3 Vetor das ações nos cortes

Multiplicando-se a matriz de rede das ações unitárias normalizadas pelo vetor das magnitudes  $\boldsymbol{\Psi}$ , obtém-se o vetor das ações nos cortes, que representa as equações de equilíbrio do sistema de ações.

$$\mathbf{A}_{24,1} = \hat{\mathbf{A}}_{N_{24,26}} \cdot \boldsymbol{\Psi}_{26,1} \quad (4.40)$$

#### 4.6.4 Solução da estática

A força peso ( $\mathbf{M}_y$ ) e a inércia lateral ( $\mathbf{M}_x$ ) são consideradas conhecidas, sendo agrupadas no vetor das magnitudes primárias  $\boldsymbol{\Psi}_p$ . O restante das variáveis formam o vetor das variáveis secundárias  $\boldsymbol{\Psi}_s$ . A solução é obtida pela equação

$$\boldsymbol{\Psi}_{S24,1} = - \left[ \hat{\mathbf{A}}_{NS} \right]_{24,24}^{-1} \left[ \hat{\mathbf{A}}_{NP} \right]_{24,2} \{ \boldsymbol{\Psi}_p \}_{2,1}. \quad (4.41)$$

### 4.7 Cinestática de posição

A presença das molas produz o acoplamento entre posição e força. Isto faz com que seja necessário a solução simultânea da cinemática de posição e da estática. O termo Cinestática é aplicado por Davies (2000) para o estudo simultâneo da cinemática infinitesimal e da estática. Para tratar da cinemática de posição juntamente com a estática, utiliza-se neste trabalho o termo **cinestática de posição**.

#### 4.7.1 Relações constitutivas das molas

As molas são consideradas lineares, com rigidez equivalente  $k_{mola}$  e comprimento inicial  $L_0$ . O valor das forças depende das posições  $q_c$  e  $q_i$  das juntas prismáticas  $c$  e  $i$ . As forças nas molas são dadas por

$$\begin{aligned} N_m &= k_{mola} \cdot (q_c - L_0) \\ O_m &= k_{mola} \cdot (q_i - L_0) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Estas relações formam o vetor das relações constitutivas  $\mathbf{A}_{rel}$

$$\mathbf{A}_{rel2,1} = \left\{ \begin{array}{l} N_m - k_{mola} \cdot (q_c - L_0) \\ O_m - k_{mola} \cdot (q_i - L_0) \end{array} \right\} \quad (4.43)$$

#### 4.7.2 Vetor das restrições cinestáticas

O vetor das restrições cinestáticas,  $\Theta$ , agrupa as restrições cinemáticas (4.20), as ações nos cortes (4.40) e as relações constitutivas (4.43), formando



um vetor com trinta e cinco equações.

$$\Theta_{35,1} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{9,1} \\ \mathbf{A}_{24,1} \\ \mathbf{A}_{rel2,1} \end{Bmatrix} \quad (4.44)$$

#### 4.7.3 Vetor das magnitudes cinestáticas

As variáveis de posição (4.7) e da estática (4.32), formam o vetor das magnitudes cinestáticas,  $\boldsymbol{\theta}$ .

$$\boldsymbol{\theta}_{37,1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{P11,1} \\ \boldsymbol{\psi}_{26,1} \end{Bmatrix} \quad (4.45)$$

#### 4.7.4 Solução do sistema

Tem-se um sistema não-linear, com 35 equações (4.44) e 37 incógnitas (4.45). As duas variáveis primárias são a força peso ( $M_y$ ) e a carga lateral ( $M_x$ ).

Para que os valores iniciais das variáveis secundárias sejam coerentes e garantam a convergência para a solução desejada, resolve-se inicialmente um problema cinemático e um estático para uma configuração pré-definida. Assim, a solução segue as etapas:

**Etapla 1 - Solução da cinemática de posição** Produz o fechamento da cadeia cinemática na configuração pré-definida.

**Etapla 2 - Solução da estática** Para a configuração obtida na Etapa 1, calcula-se as ações no sistema, sem a aplicação das relações constitutivas das molas.

**Etapla 3 - Solução da cinestática** Obtida a partir dos valores iniciais calculados nas Etapas 1 e 2.

#### 4.7.5 Etapa 1 - Solução da cinemática de posição

A solução da cinemática de posição passa pelas seguintes definições:

1. Configuração de referência, apresentada na Figura 39.
2. A configuração inicial, apresentada na Figura 41 com os valores da Tabela 6, escolhida de modo a se obter um posicionamento próximo

do fechamento da cadeia. As constantes  $C_2$ ,  $C_6$  e  $C_8$  estão definidas na Tabela 3.

3. Solução numérica do sistema de equações (4.20), selecionando-se como variáveis primárias as posições  $q_c$  e  $q_i$ .

Tabela 6: Valores iniciais para a solução da cinemática de posição

variável	valor inicial
$q_a$	$10^\circ$
$q_b$	$-100^\circ$
$q_c$	550 mm ← variável primária
$q_d$	$90^\circ$
$q_e$	$0^\circ$
$q_f$	$2.3 * (C_2 + C_6 + C_8)$ mm
$q_g$	$-q_a$
$q_h$	$-q_b$
$q_i$	$q_c$ ← variável primária
$q_j$	$-q_d$
$q_l$	$-q_e$

A solução do sistema de equações é obtida através da função para solução de sistemas não-lineares (*fsolve*), do programa de prototipagem matemática MATLAB (THE MATHWORKS, 2009), considerando a norma máxima do resíduo igual a  $10^{-8}$ . A visualização da solução obtida pelo modelo está apresentada na Figura 42.

A escolha das variáveis  $q_c$  e  $q_i$  como variáveis primárias foi feita para facilitar o posicionamento inicial da carroceria.

#### 4.7.6 Etapa 2 - Solução da estática

Com a cadeia fechada, a solução da estática é obtida considerando o peso  $M_y$  e a inércia lateral  $M_x$  como variáveis. Nesta etapa o problema ainda não está acoplado de modo que as forças produzidas pelas molas não estão relacionadas com o seu comprimento, sendo consideradas forças externas.

A solução das ações secundárias é obtida através da expressão (4.41).

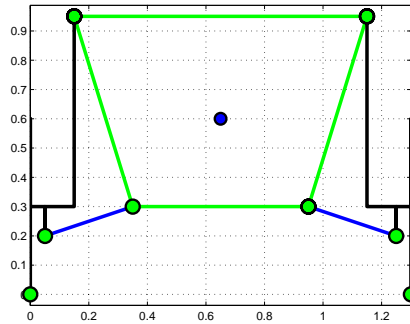


Figura 42: Configuração inicial para a solução da cinestática.

#### 4.7.7 Etapa 3 - Solução da cinestática

Utilizando-se os valores de posição e ações obtidos nas etapas 1 e 2 como valores iniciais para as variáveis secundárias, resolve-se o sistema (4.44), sendo as ações externas  $M_x$  e  $M_y$ , as variáveis primárias.

A solução numérica é obtida através da função *fsolve* do programa MATLAB, utilizando a configuração padrão e norma máxima do resíduo igual a  $10^{-8}$ .

O processo se repete a cada incremento de carga e finaliza quando a reação vertical na roda direita ( $G_y$ ) se anula.

### 4.8 Ângulo de rolagem da carroceria

O grafo  $G_M$  (Figura 35) fornece os caminhos para o cálculo do ângulo de rolagem,  $\phi$ , da carroceria.

Pode-se obter o ângulo de rolagem por meio de um dos quatro caminhos possíveis no grafo  $G_C$ :  $a-b-d$ ,  $a-c-e$ ,  $f-g-h-j$  ou  $f-g-i-l$ .

Os caminhos são definidos pelo produto das sub-matrizes de rotação dos helicoides sucessivos.

$$\begin{aligned}
 \text{caminho 1} & \quad (a-b-d) : & \mathbf{R}_a \cdot \mathbf{R}_b \cdot \mathbf{R}_d \\
 \text{caminho 2} & \quad (a-c-e) : & \mathbf{R}_a \cdot \mathbf{R}_c \cdot \mathbf{R}_e \\
 \text{caminho 3} & \quad (f-g-h-j) : & \mathbf{R}_f \cdot \mathbf{R}_g \cdot \mathbf{R}_h \cdot \mathbf{R}_j \\
 \text{caminho 4} & \quad (f-g-i-l) : & \mathbf{R}_f \cdot \mathbf{R}_g \cdot \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_l
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

O ângulo de rolagem corresponde ao ângulo de rotação da carroceria, obtido por qualquer um dos quatro caminhos.

Por se tratar de um problema no plano, a matriz de rotação resultante, em cada caminho, é uma rotação em  $z$ , na forma

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

O ângulo de rotação  $\alpha$  é dado por

$$\alpha = \text{atan}\left(\frac{R_{21}}{R_{11}}\right) \quad (4.48)$$

#### 4.9 Posição do centro de rolagem e dos polos

A posição do centro de rolagem é obtida a partir do heligiros resultante dos movimentos entre o piso (1) e a carroceria (9), calculado com base nos caminhos representados no Grafo  $G_M$  (Figura 35).

O heligiros resultante é calculado pela soma dos heligiros pertencentes a cada caminho. O resultado é o mesmo para qualquer caminho tomado.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= \hat{\mathcal{S}}_a \cdot \omega_a + \hat{\mathcal{S}}_b \cdot \omega_b + \hat{\mathcal{S}}_d \cdot \omega_d \\ \mathcal{S}_2 &= \hat{\mathcal{S}}_a \cdot \omega_a + \hat{\mathcal{S}}_c \cdot v_c + \hat{\mathcal{S}}_e \cdot \omega_e \\ \mathcal{S}_3 &= \hat{\mathcal{S}}_f \cdot v_f + \hat{\mathcal{S}}_g \cdot \omega_g + \hat{\mathcal{S}}_h \cdot \omega_h + \hat{\mathcal{S}}_j \cdot \omega_j \\ \mathcal{S}_4 &= \hat{\mathcal{S}}_f \cdot v_f + \hat{\mathcal{S}}_g \cdot \omega_g + \hat{\mathcal{S}}_i \cdot v_i + \hat{\mathcal{S}}_l \cdot \omega_l \end{aligned} \quad (4.49)$$

O heligiros que representa a velocidade de um corpo em relação a outro tem a forma da expressão 3.56. Assim, as coordenadas do centro de rolagem,  $(X_R, Y_R)$ , podem ser obtidas pela expressão (3.57)

$$X_R = \frac{-v_y}{\omega} \quad \text{e} \quad Y_R = \frac{v_x}{\omega}. \quad (4.50)$$

Como o modelo possui dois graus de liberdade, a posição do centro de rolagem sofre influência também das velocidades. Para se obter as magnitudes das velocidades dos heligiros de (4.49), é necessário que se resolva a cinemática de velocidade.

Os polos são obtidos de forma similar, levando em conta, no entanto, que eles representam os centros instantâneos entre a carroceria e cada roda.

Do grafo  $G_M$  (Figura 35), seguindo os caminhos possíveis entre a roda esquerda e a carroceria, obtém-se os seguintes heligiros

$$\begin{aligned}\$_{1e} &= \hat{\$}_b \cdot \omega_b + \hat{\$}_d \cdot \omega_d \\ \$_{2e} &= \hat{\$}_c \cdot v_c + \hat{\$}_e \cdot \omega_e.\end{aligned}\quad (4.51)$$

Os caminhos entre a roda direita e a carroceria fornecem os heligiros

$$\begin{aligned}\$_{1d} &= \hat{\$}_h \cdot \omega_h + \hat{\$}_j \cdot \omega_j \\ \$_{2d} &= \hat{\$}_i \cdot v_i + \hat{\$}_l \cdot \omega_l.\end{aligned}\quad (4.52)$$

A posição de cada polo é obtida aplicando-se (3.57) em (4.51) e em (4.52)

$$X_P = \frac{-v_y}{\omega} \quad \text{e} \quad Y_P = \frac{v_x}{\omega}, \quad (4.53)$$

sendo  $(X_P, Y_P)$  as coordenadas de cada polo.

#### 4.10 Verificação da influência do número de graus de liberdade

A influência do número de graus de liberdade na definição do centro de rolagem e dos polos pode ser verificada nas equações de velocidades obtidas do modelo.

Tome-se, por exemplo, o caminho 1 das expressões (4.49), para o cálculo do centro de rolagem

$$\$_1 = \$_a + \$_b + \$_d. \quad (4.54)$$

Admitindo a forma apresentada na expressão (3.22), o caminho é dado por

$$\$_1 = \begin{Bmatrix} \omega_a \\ \omega_a \cdot s_{y_a} \\ -\omega_a \cdot s_{x_a} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \omega_b \\ \omega_b \cdot s_{y_b} \\ -\omega_b \cdot s_{x_b} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \omega_d \\ \omega_d \cdot s_{y_d} \\ -\omega_d \cdot s_{x_d} \end{Bmatrix} \quad (4.55)$$

ou

$$\$_1 = \begin{Bmatrix} \omega_a + \omega_b + \omega_d \\ \omega_a \cdot s_{y_a} + \omega_b \cdot s_{y_b} + \omega_d \cdot s_{y_d} \\ -\omega_a \cdot s_{x_a} - \omega_b \cdot s_{x_b} - \omega_d \cdot s_{x_d} \end{Bmatrix} \quad (4.56)$$

Sabendo-se que cada velocidade secundária é função de duas veloci-

dades primárias, conforme expressão (4.30), tem-se

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{array}{l} (M_{ac} + M_{bc} + M_{dc}) \cdot v_c + (M_{af} + M_{bf} + M_{df}) \cdot v_f \\ (M_{ac} \cdot s_{ya} + M_{bc} \cdot s_{yb} + M_{dc} \cdot s_{yd}) \cdot v_c + (M_{af} \cdot s_{ya} + M_{bf} \cdot s_{yb} + M_{df} \cdot s_{yd}) \cdot v_f \\ -(M_{ac} \cdot s_{xa} + M_{bc} \cdot s_{xb} + M_{dc} \cdot s_{xd}) \cdot v_c - (M_{af} \cdot s_{xa} + M_{bf} \cdot s_{xb} + M_{df} \cdot s_{xd}) \cdot v_f \end{array} \right\}. \quad (4.57)$$

Aplicando-se (4.57) em (4.50), chega-se às coordenadas do centro de rolagem:

$$X_R = \frac{(M_{ac} \cdot s_{xa} + M_{bc} \cdot s_{xb} + M_{dc} \cdot s_{xd}) \cdot v_c + (M_{af} \cdot s_{xa} + M_{bf} \cdot s_{xb} + M_{df} \cdot s_{xd}) \cdot v_f}{(M_{ac} + M_{bc} + M_{dc}) \cdot v_c + (M_{af} + M_{bf} + M_{df}) \cdot v_f} \quad (4.58)$$

e

$$Y_R = \frac{(M_{ac} \cdot s_{ya} + M_{bc} \cdot s_{yb} + M_{dc} \cdot s_{yd}) \cdot v_c + (M_{af} \cdot s_{ya} + M_{bf} \cdot s_{yb} + M_{df} \cdot s_{yd}) \cdot v_f}{(M_{ac} + M_{bc} + M_{dc}) \cdot v_c + (M_{af} + M_{bf} + M_{df}) \cdot v_f}. \quad (4.59)$$

O resultado mostra a influência das velocidades primárias no cálculo do centro de rolagem para mecanismos com dois ou mais graus de liberdade, conforme comentado na Seção 2.4.5.

Também pode-se notar que, se o mecanismo possui apenas um grau de liberdade, a velocidade se cancela e o centro de rolagem passa a depender exclusivamente da configuração instantânea do mecanismo.

#### 4.11 Diagrama do modelo proposto

A Figura 43 apresenta a estrutura do modelo proposto, em comparação com o método de Davies original (Figura 26) e com o método proposto por Cazangi (2008) (Figura 27).

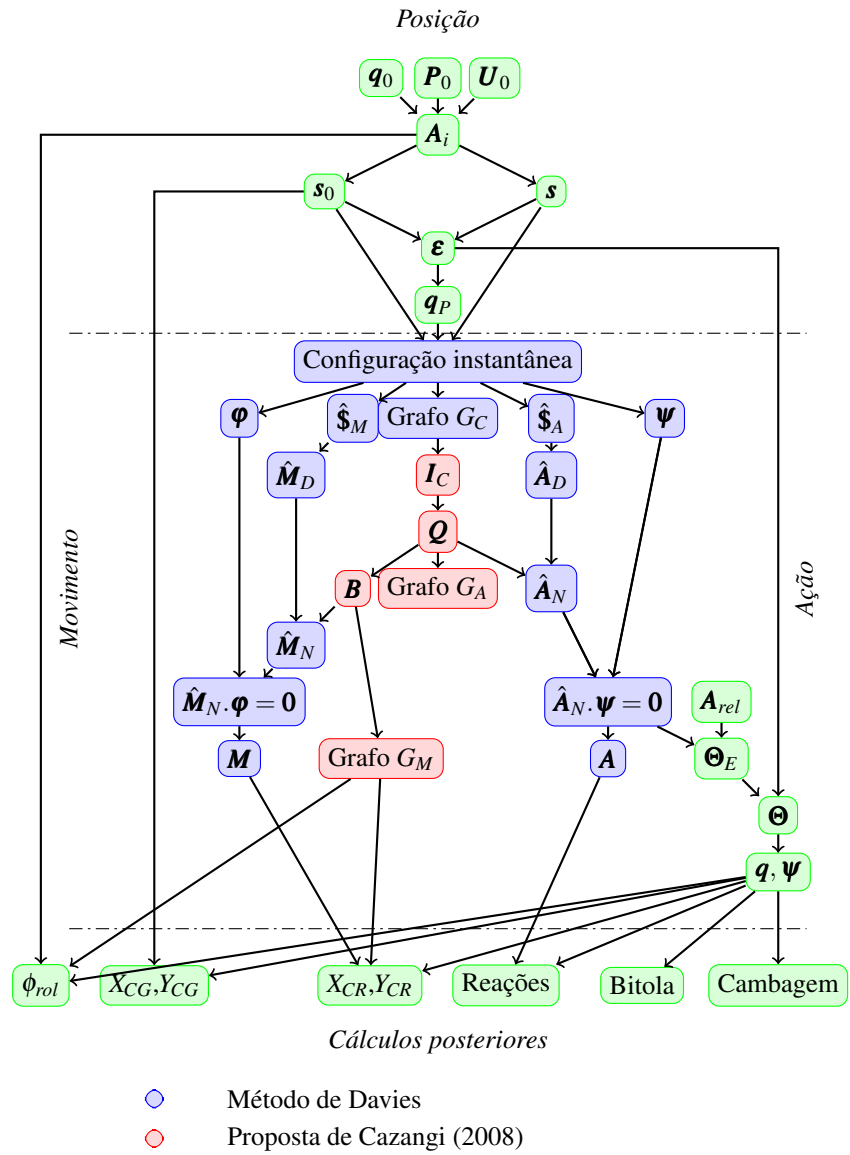


Figura 43: Diagrama do modelo proposto.

#### 4.12 Comentários

Os valores instantâneos do vetor das magnitudes cinestáticas,  $\theta_{37,1}$ , dado pela expressão (4.45), são obtidos diretamente da solução do sistema formado pelas equações cinestáticas dado pela expressão (4.44). As magnitudes fornecem diretamente os valores da cambagem das rodas ( $q_a$  e  $q_g$ ), bitola ( $q_f$ ), comprimento instantâneo das molas ( $q_c$  e  $q_i$ ), carga nas molas ( $N_m$  e  $O_m$ ) e a carga vertical nas rodas ( $A_y$  e  $G_y$ ).

As magnitudes fornecem também as forças atuantes em todas as juntas do mecanismo.

Demais valores são obtidos mediante cálculo adicional, fazendo uso das propriedades dos helicoides sucessivos, dos heligiros e das heliforças. Neste grupo se incluem o fator de estabilidade estática, a posição do centro de gravidade, a posição do centro de rolagem e o ângulo de rolagem.



## 5 RESULTADOS

Este capítulo apresenta os resultados obtidos do modelo. Para cada intervalo de tempo de aplicação da carga lateral, são apresentados os gráficos das posições, das magnitudes das velocidades e das reações em cada junta do mecanismo. Também estão representadas as posições instantâneas do centro de gravidade e do centro de rolagem mostrando a diferença de comportamento entre a previsão do capotamento calculada pela norma DIN e a apresentada no modelo.

### 5.1 Descrição do teste

De acordo com o que está apresentado na Seção 4.1, o veículo descreve uma trajetória curvilínea de raio constante, partindo do repouso e acelerando constantemente até atingir o limiar do capotamento.

A força centrípeta produzida entre a roda esquerda e o piso produz a rolagem na carroceria, conforme mostrado na Figura 44.

Por hipótese, o raio da curva é de 60 m e a aceleração longitudinal do veículo é de  $2 \text{ m/s}^2$ .

Considera-se que o início do capotamento ocorre quando a força vertical ( $G_y$ ) de contato da roda direita, interna à curva, se anula.

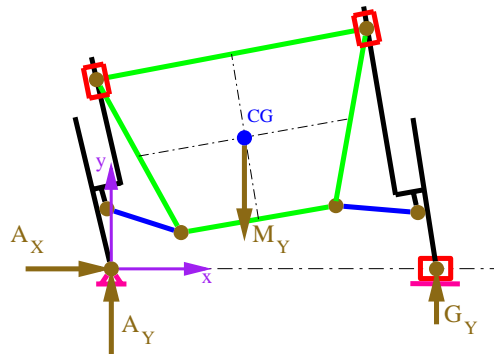


Figura 44: Aplicação das forças externas.

## 5.2 Magnitudes das posições e das cargas nas juntas

A seguir, são apresentados os resultados para cambagem, bitola, força nas molas, velocidade dos amortecedores, carga vertical nas rodas e as posições do centro de gravidade e do centro de rolagem, em relação à aceleração lateral.

As variações da cambagem e da bitola estão apresentados nas Figuras 45 e 46.

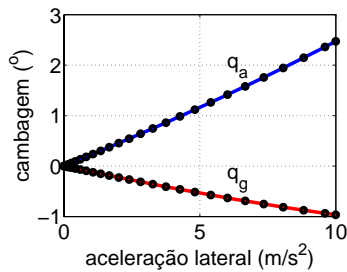


Figura 45: Variação da cambagem com a aceleração lateral.

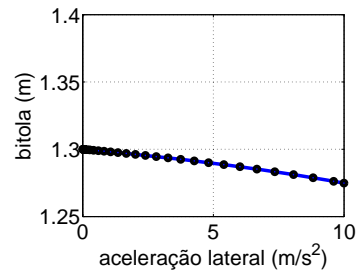


Figura 46: Variação da bitola com a aceleração lateral.

Nota-se que a cambagem da roda esquerda ( $q_a$ ) tende a aumentar para o lado positivo enquanto que a cambagem da roda direita ( $q_g$ ) tende a aumentar para o lado negativo. Isto sugere que o veículo tende a escorregar mais à medida que aumenta a carga lateral, não somente pelo aumento da carga lateral mas também pela mudança na cambagem.

Quanto à variação da bitola, observa-se a sua diminuição em relação ao valor inicial aumentando a tendência ao capotamento.

Nas Figuras 47 e 48 apresentam-se os valores das forças e das velocidades nas molas em função da aceleração lateral.

No início do movimento, as forças nas molas são iguais às forças verticais de contato das rodas com o piso em função da configuração inicial adotada. Nesta configuração, os amortecedores encontram-se na vertical e o peso se distribui por igual entre as duas molas.

As forças verticais ( $A_y$  e  $G_y$ ), de contato da roda com o piso, são apresentadas na Figura 49, em função da aceleração lateral. No início do movimento, as cargas verticais nas rodas são iguais à metade do peso devido à condição de simetria. À medida que a força centrípeta aumenta, a transferência ocorre até que se atinge o limiar do capotamento, quando a aceleração

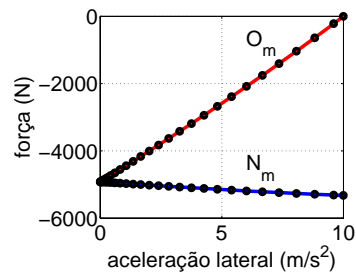


Figura 47: Forças nas molas.

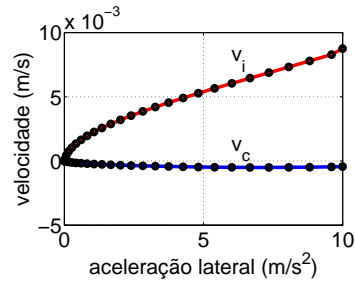


Figura 48: Velocidades dos amortecedores.

atinge o valor de  $9,9983 \text{ m/s}^2$ . Neste ponto a reação na roda direita  $G_y$  se anula.

O ângulo de rolagem é apresentado na Figura 50.

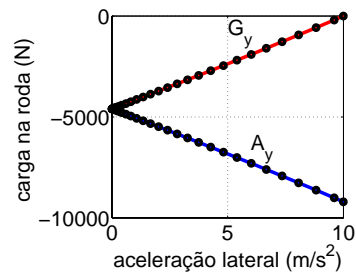


Figura 49: Transferência de carga em função da aceleração lateral.

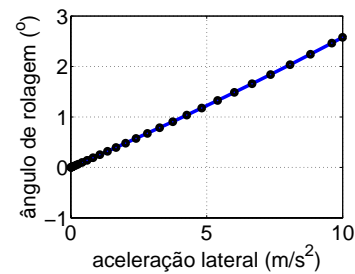


Figura 50: Ângulo de rolagem em função da aceleração lateral.

Os deslocamentos do centro de gravidade e do centro de rolagem estão apresentados nas Figuras 51 e 52.

O centro de gravidade desloca-se para a esquerda e para cima o que favorece a tendência ao capotamento. Tal tendência aumenta ainda mais com a diminuição da bitola, mostrada na Figura 46.

O afastamento vertical entre o centro de gravidade e o centro de rolagem produz aumento no momento de rolagem levando ao aumento do ângulo de rolagem.

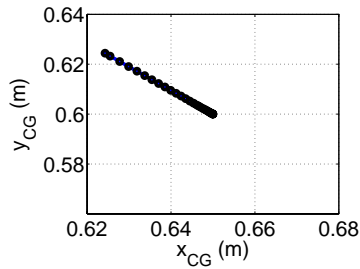


Figura 51: Deslocamento do centro de gravidade.

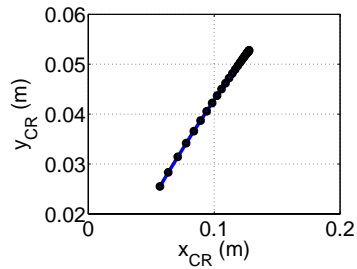


Figura 52: Deslocamento do centro de rolagem.

### 5.3 Fator de estabilidade estática

A título de comparação, são calculados dois fatores de estabilidade estática: pela norma DIN ( $SSF_{DIN}$ ) e pelos resultados do modelo ( $SSF_{mod}$ ). O cálculo pela norma DIN é feito pela expressão (2.8) e considera que tanto o centro de gravidade quanto a bitola não variam.

$$SSF_{DIN} = \frac{b}{2h_{CG}}. \quad (5.1)$$

No modelo, o cálculo é feito através da expressão (5.2), que considera a posição instantânea do centro de gravidade no limiar do capotamento e não leva em consideração a bitola:

$$SSF_{mod} = \frac{X_{CG}}{Y_{CG}}, \quad (5.2)$$

sendo  $(X_G, Y_G)$  as coordenadas instantâneas do centro de gravidade do veículo.

A condição utilizada para o cálculo do fator de estabilidade segundo a norma DIN corresponde à bitola de 1,3 m e altura do centro de gravidade igual a 0,6 m, obtendo-se um fator igual a 1,0833.

Utilizando-se a expressão (5.2), com a posição do centro de gravidade ( $X_{CG} = 0,6243$  m e  $Y_{CG} = 0,6244$  m) obtida no limiar do capotamento, chega-se a um fator igual a 0,9998, o que corresponde a uma redução de 7,7% em relação ao resultado fornecido pela norma.

Hac (2002) relata que, dependendo da geometria da suspensão, tal redução pode superar os 20%.

O fator de estabilidade estática varia com a altura do centro de gravidade e com a rigidez das molas, conforme mostrado nas Figuras 53 e 54.

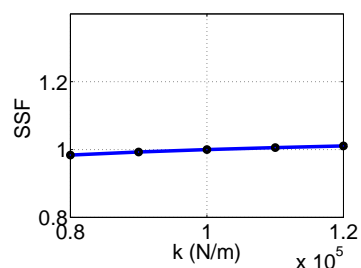


Figura 53: Influência da rigidez equivalente das molas sobre o fator de estabilidade estática.

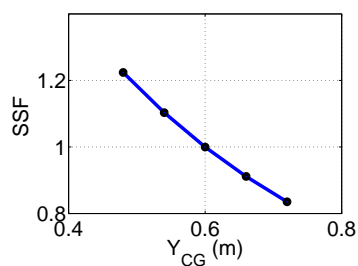


Figura 54: Influência da altura do centro de gravidade sobre o fator de estabilidade estática.

O valor central de cada gráfico corresponde aos valores de referência utilizados na análise do modelo: rigidez equivalente de 100 kN/m e altura inicial do centro de gravidade igual a 0,6 m. Os demais valores correspondem à variação de até 20%, para cima e para baixo dos valores de referência. Observa-se a forte influência da posição do centro de gravidade sobre o fator de estabilidade estática.

As variações percentuais estão apresentadas nas Tabelas 7 e 8.

Tabela 7: Variação do fator de estabilidade com a rigidez equivalente das molas.

k (kN/m)	$SSF_{MOD}$ (-)	variação percentual em relação ao padrão (%)
$\infty$	1,0833	8,35
120	1,0106	1,08
110	1,0057	0,59
100	0,9998	-
90	0,9927	-0,71
80	0,9837	-1,61

A primeira linha da Tabela 7 corresponde à rigidez infinita, ou seja, a suspensão é considerada completamente rígida e, neste caso, o fator de estabilidade encontrado equivale ao valor obtido pela norma.

O fator de estabilidade aumenta com o aumento da rigidez equivalente das molas.

Tabela 8: Variação do fator de estabilidade com a altura do centro de gravidade.

$Y_{CG}$ (m)	$SSF_{MOD}$ (-)	variação em relação ao padrão (%)
0,72	0,8353	-16,45
0,66	0,9113	-8,85
0,60	0,9998	-
0,54	1,1033	10,35
0,48	1,2240	22,42

O aumento do centro de gravidade diminui o valor do fator de estabilidade estática.

Pelas Figuras 53 e (54) observa-se que o fator de estabilidade é mais sensível à variação da altura do centro de gravidade do que à variação da rigidez equivalente das molas.

#### 5.4 Polos e centro de rolagem

A Figura 55 apresenta as posições do mecanismo obtidas enquanto a carga lateral é aplicada. Nela se pode observar os deslocamentos do centro de gravidade ( $CG$ ) e do centro de rolagem ( $CR$ ). O ponto  $R$  representa o centro de rolagem definido de acordo com a norma DIN, conforme apresentado na Seção 2.3.

Segundo Gregorio (2009), para um mecanismo com dois graus de liberdade, o centro instantâneo de um corpo localiza-se sobre uma reta que une os dois centros instantâneos do mesmo mecanismo, quando se considera cada uma das velocidades primárias igual a zero, conforme a expressão (2.10).

A Figura 56 apresenta o centro de rolagem  $CR$  numa configuração qualquer do mecanismo, em que as velocidades primárias são  $v_c$  e  $v_f$ . O ponto  $C$  corresponde ao centro instantâneo da carroceria quando  $v_c = 0$  e o ponto  $F$  representa o centro instantâneo da carroceria quando  $v_f = 0$ .

Tome-se como exemplo a configuração em que as velocidades das juntas  $c$  e  $f$  valem  $v_c = -4,9381 \cdot 10^{-4}$  m/s e  $v_f = -0,0032$  m/s. O centro de rolagem situa-se nas coordenadas  $X_{CR} = 0,0941$  e  $Y_{CR} = 0,0406$ .

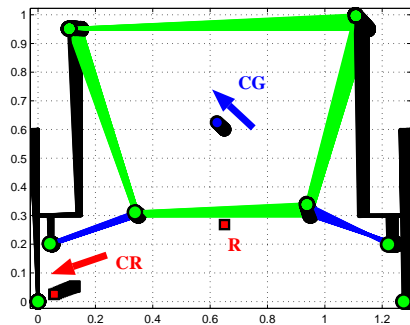


Figura 55: Mudança da configuração com a aplicação da carga lateral.

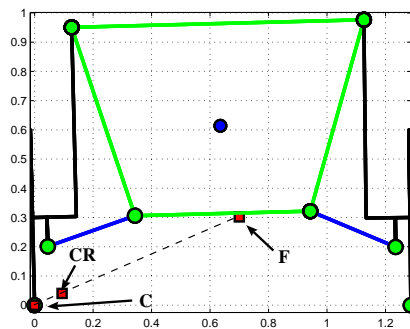


Figura 56: Alinhamento dos centros de rolagem, segundo Gregorio (2009) e a expressão (2.10).

Calculando-se, para esta posição, o centro de rolagem na condição em que a velocidade de uma das juntas é zero, obtém-se os valores apresentados na Tabela 9. Pode-se comprovar o alinhamento dos três centros, considerando que eles situam-se sobre uma mesma reta.

A distância entre o centro de gravidade e o centro de rolagem define o quanto a carroceria rola, para um mesmo conjunto de molas. Quanto menor for a distância, menor é o momento absorvido pelas molas e menor será a rolagem (MILLIKEN; MILLIKEN, 1995). Isto pode ser observado na Figura 57,

Tabela 9: Posição do centro de rolagem em função das velocidades.

$v_c$ (m/s)	$v_f$ (m/s)	$X_{CR}$ (m)	$Y_{CR}$ (m)
$-4,9381 \cdot 10^{-4}$	-0,0032	0,0941	0,0406
$-4,9381 \cdot 10^{-4}$	0	0,7277	0,3260
0	-0,0032	0	0

onde se apresenta a variação do ângulo de rolagem com a aceleração lateral para duas posições do centro de gravidade, localizados a 600 mm (referência) e a 480 mm (baixo) a partir do piso.

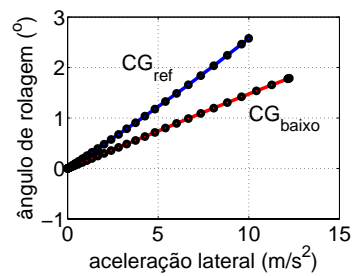


Figura 57: Variação do ângulo de rolagem para duas posições do centro de gravidade.

Observa-se que, com a redução da altura do centro de gravidade, o ângulo de rolagem da carroceria é menor. Isto ocorre devido à diminuição do momento de rolagem, causada pela redução da distância entre o centro de gravidade e o centro de rolagem.

A Figura mostra ainda que, a redução da altura do centro de gravidade diminui a tendência ao capotamento, visto que, nesta condição ( $CG_{baixo}$ ), o veículo suporta uma aceleração lateral maior do que na posição de referência ( $CG_{ref}$ ).



## 6 CONCLUSÕES

### 6.1 Conclusões

Esta tese propõe um modelo cinemático plano-frontal de um veículo, com dois graus de liberdade, com comportamento quase-estático, para análise da rolagem, até atingir o limiar do capotamento.

O veículo é representado no plano vertical-frontal, por uma carroceria e duas suspensões. O acoplamento entre forças e deslocamentos ocorre através das molas da suspensão.

Todos os componentes da cadeia cinemática são considerados rígidos e não existe atrito entre eles.

As ferramentas matemáticas utilizadas na modelagem são os deslocamentos helicoidais sucessivos (na análise de posição) e o método de Davies (na análise cinestática).

Como ferramentas computacionais utilizou-se o programa de simulação matemática Matlab (THE MATHWORKS, 2009) para o desenvolvimento simbólico das equações e para a implementação da rotina.

Para a verificação dos resultados, utilizou-se o programa de simulação dinâmica Working Model (DESIGN SIMULATION TECHNOLOGIES, 2010).

#### 6.1.1 Sobre o modelo

Uma contribuição dada no modelo é a aplicação do método de Davies em mecanismos com configuração variável. Na sua forma original, o método se aplica a situações em que a configuração do mecanismo já é conhecida e não existem componentes elásticos. As equações obtidas resolvem as equações cinemáticas de velocidade e as de equilíbrio, de forma independente.

No caso do modelo, no entanto, o acoplamento entre a estática e a cinemática de posição, criado pela presença das molas na suspensão, exigiu a solução simultânea das equações cinemáticas de posição e de equilíbrio, conforme apresentado na expressão (4.44).

O método dos deslocamentos helicoidais sucessivos, utilizado para a obtenção das equações cinemáticas de posição, apresentado na seção 3.1.2, facilita a montagem da cadeia cinemática. Isto favorece sua aplicação em cadeias cinemáticas complexas devido à facilidade de visualização dos elos na posição de referência.

As equações de equilíbrio (4.40), obtidas na forma simbólica através do método de Davies, juntamente com as relações constitutivas das molas

(4.42), formam o conjunto de equações da estática.

Os dois conjuntos de equações foram obtidos automaticamente via processamento simbólico.

Outra contribuição refere-se à utilização de uma cadeia cinemática com dois graus de liberdade, o que permite o desacoplamento entre o movimento vertical e a rotação da carroceria, bem como a representação da variação da bitola, inexistente nos modelos com um grau de liberdade.

A solução da cinestática fornece a posição, a velocidade e as ações em cada junta do mecanismo.

Valores instantâneos da cambagem ( $q_a$  e  $q_g$ ), da bitola ( $q_f$ ) e das ações nas juntas são retirados diretamente do vetor das magnitudes cinestáticas, dado pela expressão (4.45), obtido na solução do sistema, descrita na Seção 4.7.4.

Outros parâmetros, tais como posição do centro de rolagem e ângulo de rolagem, são obtidos mediante cálculo adicional. A posição do centro de rolagem é calculada pela expressão (4.50), cujos valores são obtidos através do vetor posição do heligiro resultante entre o chassi e o piso. Este heligiro é obtido percorrendo-se qualquer caminho entre o piso e a carroceria no grafo  $G_M$ , conforme apresentado na Figura 35 e nas expressões (4.49).

As variações da cambagem (Figura 45), da bitola (Figura 46), do centro de gravidade (Figura 51) e do centro de rolagem (Figura 52), mostram que a geometria da suspensão influencia significativamente no comportamento em curva do veículo.

O limiar do capotamento ocorre quando a reação da roda interna à curva se anula. Isto pode ser observado na Figura 49 que apresenta a transferência de carga entre as duas rodas.

No limiar do capotamento, tem-se os valores reais da posição do centro de gravidade, considerando as deflexões ocorridas na suspensão. Assim, foi possível calcular o fator de estabilidade estática com maior precisão, através da expressão (5.2). No exemplo apresentado, obteve-se uma redução de 7,7% no fator de estabilidade estática em relação ao valor calculado pela norma, dado pela expressão (5.1).

### 6.1.2 Sobre o centro de rolagem

A principal conclusão que se tira a respeito do centro de rolagem é que ele não pode ser considerado um ponto fixo para efeito de análise do capotamento, conforme se apresenta na Figura 52.

A obtenção do centro de rolagem, da forma como é definida pela

norma DIN, constitui um conceito idealizado e limitado, não representando o centro instantâneo de rotação verdadeiro do chassi.

O modelo proposto mostra que é possível se obter a posição do centro de rolagem em qualquer configuração entre a simétrica, sem carga lateral, e o limiar do capotamento.

Apesar de fornecer o centro instantâneo para qualquer configuração da cadeia cinemática, o método do diagrama do polígono juntamente com o teorema de Aronhold-Kennedy só é válido para mecanismos com um grau de liberdade e com cadeias determinadas, conforme apresentado na Seção 2.4.4.

Como o modelo proposto neste trabalho possui dois graus de liberdade, a utilização do método do diagrama do polígono não foi possível.

Através do método de Davies, é possível obter os centros instantâneos de rotação de forma simples e sistemática. Utilizando o conceito de heligiro resultante, chegou-se à posição do centro de rolagem e dos polos da suspensão, através das expressões (4.50) e (4.53).

No caso do centro de rolagem, o heligiro resultante foi obtido pela soma dos heligiros pertencentes a um dos caminhos entre o piso e a carroceria, conforme apresentado nas expressões (4.49).

Os heligiros resultantes para o cálculo da posição dos polos foram obtidos através dos caminhos dados pelas expressões (4.52) e (4.51), respectivamente para o polo direito e esquerdo.

## **6.2 Recomendações para trabalhos futuros**

Para melhorar a representatividade do modelo, sugere-se:

- Inserir as propriedades de contato do pneu com a pista, que implica na alteração das juntas que representam o contato. A junta articulada  $a$  deve ser substituída por um conjunto similar ao existente no contato da roda direita com o piso.
- Incluir a influência da inclinação lateral da pista.
- Adaptar o modelo para estudos da dinâmica longitudinal (aceleração e frenagem), para verificação do efeito anti-mergulho, por exemplo.
- Expandir o modelo para o espaço tridimensional, permitindo o estudo do comportamento completo do veículo, em qualquer situação de manobras com diferentes tipos de suspensão na dianteira e na traseira.

- Avaliar a influência das massas suspensa e não-suspensa no comportamento de rolagem do veículo.
- Desenvolver um procedimento de otimização da rolagem do veículo, através da definição da geometria ideal da suspensão, para se atingir níveis ótimos de conforto e estabilidade.

As simplificações impostas ao modelo podem ser eliminadas pela transformação do modelo quase-estático para modelo dinâmico completo, através da inclusão das propriedades de inércia e de amortecimento na forma de helicoides. Assim, pode-se chegar a uma previsão mais precisa do limiar do capotaento, levando-se em conta os efeitos transitórios nos quais o comportamento dos amortecedores torna-se relevante

## REFERÊNCIAS

- BEST CARS WEB SITE. *Testes*. Acesso em 15/04/2010 2010. Disponível em: <<http://www2.uol.com.br/bestcars/bestcars.htm>>.
- BLUNDELL, M.; HARTY, D. *The Multibody Systems Approach to Vehicle Dynamics*. Warrendale: SAE International, 2004. ISBN 0768014964.
- CAMPOS, A. *Cinemática diferencial de manipuladores empregando cadeias virtuais*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004.
- CAZANGI, H. R. *Apliação do Método de Davies para Análise Cinemática e Estática de Mecanismos com Múltiplos Graus de Liberdade*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2008.
- CHAGAS, C. F. d. M.; NEVES, M. R. d. R.; SARZETO, C. A. P. Modelagem e simulação da dinâmica lateral de veículos com suspensão Duplo A. In: SAE BRASIL. *XIV Congresso e Exposição Internacionais da Tecnologia da Mobilidade*. São Paulo, 2005. Em CD, n. 2005-01-4029, p. 8.
- CHRISTOFIDES, N. *Graph theory: An algorithmic approach (Computer science and applied mathematics)*. Orlando, FL: Academic Press Inc., 1975. ISBN 0-12-174350-0.
- CRUZ, D. F. M. da. *Implementação da Cinemática Inversa de Robôs Redundantes Operando em Ambientes Confinados no Protótipo do ROBOTURB*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2007.
- DAVIDSON, J. K.; HUNT, K. H. *Robots and Screw Theory: Applications of Kinematics and Statics to Robotics*. New York: Oxford University Press, 2004. ISBN 0198562454.
- DAVIES, T. H. Kirchhoff's circulation law applied to multi-loop kinematic chains. *Mechanism and Machine Theory*, v. 16, n. 3, p. 171–183, 1981.
- DAVIES, T. H. Circuit actions attributable to active couplings. *Mechanism and Machine Theory*, v. 30, n. 7, p. 1001–1012, 1995.
- DAVIES, T. H. Couplings, coupling networks and their graphs. *Mechanism and Machine Theory*, v. 30, n. 7, p. 991–1000, 1995.

- DAVIES, T. H. The 1887 committee meets again. subject: freedom and constraint. In: *Ball 2000 Conference*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. p. 56.
- DESIGN SIMULATION TECHNOLOGIES. *Working Model*. Acesso em 14/03/2010 2010. Disponível em: <<http://www.design-simulation.com/>>.
- DIXON, J. C. *Tires, Suspension, and Handling*. 2. ed. Warrendale: SAE International, 1996. ISBN 1560918314.
- DOURADO, A. O. *Cinemática de Robôs Cooperativos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Junho 2005.
- EDITORA ABRIL. *Quatro Rodas*. Acesso em 15/04/2010 2010. Disponível em: <<http://quatorodas.abril.com.br>>.
- ERDMAN, A. G.; SANDOR, G. N.; KOTA, S. *Mechanism design*. NJ: Prentice-Hall Englewood Cliffs, 2001.
- FAYET, M. Wrench-twist duality in over-constrained mechanisms. In: *Ball 2000 Conference*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. p. 21.
- FOSTER, D. E.; PENNOCK, G. R. Graphical methods to locate the secondary instant centers of single-degree-of-freedom indeterminate linkages. *Journal of Mechanical Design*, ASME, v. 127, n. 2, p. 249–256, 2005. Disponível em: <<http://link.aip.org/link/?JMD/127/249% -/1>>.
- FOSTER, D. E.; PENNOCK, G. R. A graphical method to find the secondary instantaneous centers of zero velocity for the double butterfly linkage. *Journal of Mechanical Design*, v. 125, p. 268–274, 2003.
- GALLARDO, J. et al. Dynamics of parallel manipulators by means of screw theory. *Mechanism and Machine Theory*, v. 38, n. 11, p. 1113–1131, 2003.
- GILLESPIE, T. D. *Fundamentals of Vehicle Dynamics*. Warrendale: SAE International, 1992. ISBN 1560911999.
- GREGORIO, R. D. An algorithm for analytically calculating the positions of the secondary instant centers of indeterminate linkages. *Journal of Mechanical Design*, v. 130, p. 9, 2008.

- GREGORIO, R. D. A novel method for the singularity analysis of planar mechanisms with more than one degree of freedom. *Mechanism and Machine Theory*, Elsevier, v. 44, n. 1, p. 83–102, 2009.
- GUPTA, K. Kinematic analysis of manipulators using the zero reference position description. *The International Journal of Robotics Research*, Multimedia Archives, v. 5, n. 2, p. 5, 1986.
- HAC, A. Rollover Stability Index Including Effects of Suspension Design. In: SAE INTERNATIONAL. *SAE 2002 World Congress*. Detroit, 2002. p. 11.
- HUNT, K. H. *Kinematic geometry of mechanisms*. Oxford: Clarendon Press, 1978. ISBN 0198561245.
- INTECH GMBH. *SIMPACK*. Acesso em 23/02/2009 2009. Disponível em: <www.simpack.com>.
- JAZAR, R. N. *Vehicle Dynamics: Theory and Applications*. Berlin: Springer, 2008.
- KAZEROUNIAN, K. On the numerical inverse kinematics of robotic manipulators. *J. Mech. Transmissions Autom. Design.*, v. 109, n. 1, p. 8–13, 1987.
- KUNG, C.; WANG, L. Analytical method for locating the secondary instant centres of indeterminate planar linkages. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Prof Eng Publishing, v. 223, n. 2, p. 491–502, 2009.
- LIU, G. F.; LI, Z. X. General geometric algorithms for optimal design of parallel manipulators. In: Clément M. Gosselin; Imme Ebert-Uphoff (Ed.). *The Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*. [S.l.: s.n.], 2002.
- MARTINS, D. *Análise cinemática hierárquica de robôs manipuladores*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2002.
- MELO, R. P. d.; BARBIERI, N.; BARBIERI, R. Estabilidade lateral de conjuntos de veículos de carga. In: SAE BRASIL. *IV Colloquium Internacional de Suspensões e Implementos Rodoviários e Mostra de Engenharia*. Caxias do Sul: SAE International, 2006. p. 8.

- MILLIKEN, W. F.; MILLIKEN, D. L. *Race Car Vehicle Dynamics*. Warrendale: Society of Automotive Engineers, 1995. ISBN 1560915269.
- MITCHELL, W. Roll center - myths and reality. 2007. Disponível em: <[http://www.neohio-scca.org/comp\\_clinic/hand\\_out\\_reprints/Vehicle%20Dynamics2007.pdf](http://www.neohio-scca.org/comp_clinic/hand_out_reprints/Vehicle%20Dynamics2007.pdf)>.
- MITCHELL, W. et al. Suspension Geometry: Theory vs K & C Measurement. *SAE Technical Paper Series*, SAE International, n. 2008-01-2948, p. 11, 2008.
- MSC SOFTWARE CORPORATION. *ADAMS*. Acesso em 25/03/2006 2006. Disponível em: <<http://www.mscsoftware.com/products/adams%-.cfm>>.
- NHTSA. *National Highway Traffic Safety Administration*. Acesso em 10/04/2005 2005. Disponível em: <<http://www.nhtsa.dot.gov>>.
- NICOLAZZI, L. C.; ROSA, E. da; LEAL, L. da C. M. Uma introdução à modelagem quase-estática de veículos automotores de rodas. Publicação interna do Departamento de Engenharia Mecânica da UFSC. 2001.
- NORTON, R. L. *Design of Machinery: An Introduction to the Synthesis and Analysis of Mechanisms and Machines*. New York: McGraw-Hill Higher Education, 2003. ISBN 0072864478.
- OTTAVIANO, E.; CECCARELLI, M. Optimum design of parallel manipulators for workspace and singularity performances. In: *Proceedings of the Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*. [S.l.: s.n.], 2002. p. 98-105.
- PARENTEAU, C. S.; SHAH, M. Driver Injuries in US Single-Event Rollovers. In: SAE INTERNATIONAL. *SAE 2000 World Congress*. Detroit, 2000. p. 8.
- PENNOCK, G. R.; MEEHAN, P. J. Geometric insight into the dynamics of a rigid body using the theory of screws. In: *Ball 2000 Conference*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. p. 32.
- REIMPELL, J.; STOLL, H.; BETZLER, J. W. *The Automotive Chassis: Engineering Principles*. Warrendale: Society of Automotive Engineers, 2001. ISBN 0768006570.



- SAFERCAR. *Rollover*. Acesso em 24/04/2005 2005. Disponível em: <<http://www.safercar.gov>>.
- SANTOS, C. H. F. dos. *Movimento coordenado de sistemas veículo-manipulador submarinos utilizando técnicas de inteligência artificial e sistemas híbridos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006.
- SHIGLEY, J. E.; UICKER, J. J. *Theory of machines and mechanisms*. 2. ed. New York: McGraw-Hill Inc., 1995.
- SIMAS, H. *Planejamento de Trajeórias e Evitamento de Colisões em Tarefas de Manipuladores Redundantes Operando em Ambientes Confinados*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2008.
- STEJSKAL, V. et al. *Mechanics with Matlab Project*. Acesso em 25/03/2006 2001. Disponível em: <<http://www.fs.cvut.cz/en/U2052/mechmat1.html>>.
- THE MATHWORKS. *Matlab*. Acesso em 20/01/2009 2009. Disponível em: <<http://www.mathworks.com/>>.
- TRAVIS, W. E. et al. Using scaled vehicles to investigate the influence of various properties on rollover propensity. In: AACC. *Proceedings of the 2004 American Controls Conference*. Boston, 2004. p. 3381–3386.
- TSAI, L.-W. *Robot Analysis - The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. New York: John Wiley & Sons, 1999. ISBN 0-471-32593-7.
- TSAI, L.-W. *Mechanism Design: Enumeration of Kinematic Structures According to Function*. London: CRC Press, 2000. ISBN 0849309018.
- WEBMOTORS. *Revista*. Acesso em 15/04/2010 2010. Disponível em: <<http://www.webmotors.com.br>>.
- WHITEHEAD, R. et al. A Study of the Effect of Various Vehicle Properties on Rollover Propensity. In: SAE INTERNATIONAL. *SAE Technical Paper in http://www.sae.org*. Warrendale, 2004. p. 8.
- WINKLER, C. Rollover of Heavy Commercial Vehicles. In: *UMTRI Research Review*. Ann Harbor: Research Information and Publications Center of the University of Michigan Transportation Research Institute, 2000. p. 23.

WOJNAROWSKI, J. Graph representations of mechanical systems. *Mechanism and Machine Theory*, v. 30, n. 7, p. 1099–1112, 1995.