

Universidade Federal de Santa Catarina  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Uma nova técnica de aproximação para o  
método de Galerkin aplicado às equações  
integrais de contorno

Tese submetida à Universidade Federal de  
Santa Catarina para obtenção do grau de  
doutor em Engenharia Mecânica

Lauro Cesar Nicolazzi

Florianópolis, janeiro de 2000

## Lauro Cesar Nicolazzi

*Nascido em 18 de janeiro de 1954, em Cricúma, SC. Engenheiro mecânico pela Universidade Federal de Santa Catarina em dezembro de 1977. Professor do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina desde agosto de 1978. Mestre em engenharia mecânica pela Universidade Federal de Santa Catarina em janeiro de 1982.*

UMA NOVA TÉCNICA DE APROXIMAÇÃO PARA O MÉTODO DE  
GALERKIN APLICADO ÀS EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO

Lauro Cesar Nicolazzi

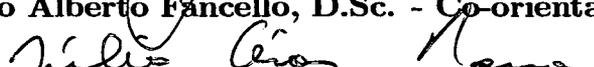
ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

DOUTOR EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA  
FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA

  
Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D. - Orientador

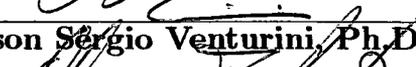
  
Eduardo Alberto Fancello, D.Sc. - Co-orientador

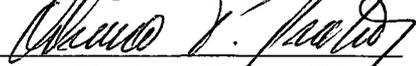
  
Júlio César Passos, Dr. - Coordenador do Curso

BANCA EXAMINADORA

  
Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D. - Presidente

  
Webe João Mansur, Ph.D. - Relator

  
Wilson Sérgio Venturini, Ph.D.

  
Álvaro Toubes Prata, Ph.D.

  
Antônio Fábio Carvalho da Silva, Dr.Eng.

*Dedico este trabalho aos meus amores Yeda e Laura Helena, as minhas filhas mais velhas  
Débora e Denise, a minha mãe Vilma e aos meus irmãos Melânia e Paulo.*

## Agradecimentos

*Agradeço a todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para o desenvolvimento e conclusão deste trabalho, e em especial,*

*Ao professor Clovis Sperb de Barcellos por sua amizade e orientação;*

*Ao professor Eduardo Alberto Fancello por sua amizade, incentivo, orientação e pelas inúmeras sugestões que resultaram na forma atual deste trabalho;*

*Ao professor Domingos Boechat Alves, por sua dedicação como meu professor em várias disciplinas;*

*Ao meu grande amigo, Luiz Teixeira do Vale Pereira, pelo incentivo, companheirismo e correção precisa do texto final;*

*Ao meu bom e prestativo amigo, Tancredo Westphal Junior, pelo incentivo, aulas, explicações e pelos inúmeros artigos enviados da Alemanha;*

*Aos meus colegas de curso e muitas vezes confidentes, Jucélio Tomás Pereira, André Novotny e Valdir Cardoso, pelo companheirismo;*

*À Universidade Federal de Santa Catarina e ao Departamento de Engenharia Mecânica.*

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Generalidades . . . . .	1
1.2	Estado da arte . . . . .	2
1.2.1	Métodos sem malha . . . . .	2
1.2.2	Método de Galerkin e simetrização . . . . .	4
1.3	Organização do trabalho . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Problemas potenciais</b>	<b>10</b>
2.1	Introdução . . . . .	10
2.2	Generalidades a respeito da equação da condução de calor . . . . .	14
2.3	Definições básicas . . . . .	14
2.4	Problema fundamental de condução de calor . . . . .	17
2.5	Equação integral do problema de condução de calor . . . . .	19
2.6	Equação integral do gradiente da resposta . . . . .	20
2.7	Características dos integrandos das equações integrais . . . . .	21
2.8	Discretização das equações integrais . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Método de Galerkin</b>	<b>26</b>
3.1	Introdução . . . . .	26
3.2	Método de Galerkin para elementos de contorno . . . . .	26
3.3	Generalidades a respeito do método de Galerkin . . . . .	29
3.3.1	Galerkin fortemente singular - "Forte" . . . . .	29
3.3.2	Galerkin hipersingular - "Hiper" . . . . .	29

3.3.3	Galerkin simétrico - "Simétrica" . . . . .	29
3.4	Algumas observações . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Funções de interpolação para o método das nuvens</b>	<b>32</b>
4.1	Introdução . . . . .	32
4.2	Mínimos quadrados com ponderação móvel para o método das nuvens . . . . .	32
4.3	Partição da unidade para contornos . . . . .	36
4.3.1	Definições preliminares . . . . .	36
4.3.2	Propriedades da matriz $\tilde{A}$ . . . . .	38
4.3.3	Construção da partição da unidade para contornos . . . . .	40
4.4	Enriquecimento das funções de interpolação . . . . .	42
4.5	Escolha da função peso . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Indicador de erro – adaptatividade <math>p</math></b>	<b>49</b>
5.1	Introdução . . . . .	49
5.2	Indicador de erro . . . . .	53
5.3	Comentários adicionais. . . . .	55
<b>6</b>	<b>Procedimentos de integração e regularização</b>	<b>57</b>
6.1	Introdução . . . . .	57
6.2	Integração e regularização . . . . .	58
6.2.1	Método RISP e procedimento adaptativo de integração . . . . .	60
6.2.2	Integrais fracamente singulares . . . . .	62
6.2.3	Integrais fortemente singulares . . . . .	62
6.2.4	Integral hipersingular . . . . .	63
6.3	Integração hipersingular – considerações . . . . .	65
<b>7</b>	<b>Programa e resultados numéricos</b>	<b>73</b>
7.1	Introdução . . . . .	73
7.2	Código computacional . . . . .	73

7.2.1	Programação orientada a objeto – generalidades . . . . .	73
7.2.2	Programa BEM-CLOUD++ . . . . .	74
7.3	Cálculo do erro . . . . .	76
7.4	Número de condição . . . . .	78
7.5	Placa retangular com solução regular . . . . .	79
7.6	Problema de Motz . . . . .	95
7.6.1	Motz – primeira estratégia de análise . . . . .	97
7.6.2	Motz – segunda estratégia de análise . . . . .	99
7.6.3	Motz – terceira estratégia de análise . . . . .	101
7.6.4	Motz – quarta estratégia de análise . . . . .	103
7.6.5	Motz – análise da convergência da discretização . . . . .	105
7.6.6	Motz – análise da distribuição do grau da discretização . . . . .	109
7.7	Problema do domínio L . . . . .	116
<b>8</b>	<b>Conclusões e horizontes para futuros desenvolvimentos</b>	<b>121</b>
8.1	Generalidades . . . . .	121
8.2	Conclusão . . . . .	121
8.3	Horizontes para futuros desenvolvimentos . . . . .	123

# Lista de símbolos

- $a$  - Constante  $\in \mathfrak{R}$ , taxa de convergência.
- $a_i(\mathbf{y})$  -  $i$ -ésima coordenada generalizada.
- $\vec{a}_i(\mathbf{y})$  - Vetor de coordenadas generalizadas.
- $\hat{a}(\mathbf{y})$  - Vetor qualquer de coordenadas generalizadas.
- $A_i$  -  $i$ -ésima coordenada generalizada.
- $A_{ij}(\mathbf{y})$  - Elemento da matriz  $\tilde{A}(\mathbf{y})$ .
- $\tilde{A}(\mathbf{y})$  - Matriz quadrada.
- $b$  - Constante positiva  $\in \mathfrak{R}$ .
- $\mathbf{B}^i$  - Matriz  $n \times 2$  referente aos graus de liberdade adicionais do enriquecimento da  $i$ -ésima nuvem.
- $c$  - Constante  $\in \mathfrak{R}$ , capacidade calorífica de um material.
- $\hat{c}$  - Vetor referente aos graus de liberdade adicionais do enriquecimento da  $i$ -ésima nuvem.
- $c_1, c_2$  - Constantes  $\in \mathfrak{R}$ .
- $C, C^*$  - Constantes positivas  $\in \mathfrak{R}$ .
- $C^s(\Gamma)$  - Conjunto de todas as funções  $u$  com até a  $s$ -ésima derivada contínua em  $\Gamma$ .
- $C_0^s$  - Sub-conjunto de  $C^s(\Gamma)$  com suporte compacto.
- $Cond$  - Número de condição.
- $d_i$  -  $i$ -ésima componente do vetor  $\mathbf{d}$ .
- $ds, d\Gamma$  - Elemento infinitesimal do contorno  $\Gamma$ .
- $d\Omega$  - Elemento infinitesimal de  $\Omega$ .
- $dQ$  - Infinitésimo da quantidade de calor.
- $\mathbf{d}$  - Vetor posição do ponto fonte.

- $D, D(\cdot)$  - Coeficiente de difusão, símbolo de derivada.
- $D^i$  - Matriz  $2 \times 2$  referente aos graus de liberdade adicionais do enriquecimento da  $i$ -ésima nuvem.
- $e_i$  -  $i$ -ésimo vetor unitário da base ortonormal do espaço euclidiano.
- $e^Q$  - Erro no fluxo.
- $e^T$  - Erro na temperatura.
- $E$  - Campo elétrico.
- $E_y(u_y)$  - Funcional para o método dos mínimos quadrados com ponderação móvel.
- $f_\alpha$  - Valor da função  $f(\mathbf{x})$  em  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\alpha$ .
- $f(\mathbf{x})$  - Função  $\in C^\infty$ .
- $\vec{f}$  - Vetor dos valores  $f_\alpha$ .
- $F$  - Vetor força.
- $\vec{F}(\mathbf{y})$  - Vetor carga do método dos mínimos quadrados com ponderação móvel.
- $fp$  - Símbolo que indica que a integral é avaliada por parte finita de Hadamard.
- $g(\mathbf{x})$  - Função  $\in C^\infty$ .
- $\hat{g}^i$  - Vetor referente aos graus de liberdade adicionais do enriquecimento da  $i$ -ésima nuvem.
- $G$  - Constante universal.
- $h_\alpha$  - Raio da bola  $\omega_\alpha$ .
- $H$  - Campo magnético.
- $H$  - Espaço de Hilbert, espaço pivotal.
- $H^s$  - Espaço de Sobolev de ordem  $s$ .
- $I$  - Operador identidade, resultado de uma integral de linha.
- $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$  - Fluxo de substância.

$k$	- Condutividade térmica para materiais isotrópicos.
$K$	- Real positivo, temperatura absoluta em Kelvin.
$K(\mathbf{x}, \mathbf{d})$	- Núcleo.
$l$	- Altura de um retângulo.
$L_2$	- Espaço das funções quadraticamente integráveis.
$L_i(x)$	- Polinômio de Legendre de grau $i$ .
$Ls_T$	- Produto tensorial de polinômios.
$m$	- Metro.
$m_i$	- Massa da $i$ -ésima partícula.
$M$	- Inteiro $\geq 0$ .
$n$	- Dimensão do espaço ( $n = 1, 2$ ou $3$ ), número de graus de liberdade anterior ao enriquecimento da $i$ -ésima nuvem.
$N_{A-}, N_{A+}$	- Número de nuvens à esquerda e a direita do ponto $A$ .
$N$	- Número inteiro ou número de nuvens.
$NCond$	- Logaritmo do número de condição $Cond$ .
$NGL$	- Número de graus de liberdade.
$O(\cdot)$	- Indica a ordem da singularidade do núcleo $K(\mathbf{x}, \mathbf{d})$ ou a ordem do erro.
$pv$	- Símbolo que indica que a integral é avaliada no sentido do valor principal de Cauchy.
$P_i$	- $i$ -ésima componente de $\mathbf{P}$ .
$\mathbf{P}$	- Base completa de polinômios.
$q_{A-}$	- Fluxo à esquerda do ponto $A$ .
$q_{A+}$	- Fluxo à direita do ponto $A$ .
$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$	- Fluxo de calor.

$Q_N$	- Conjunto de coordenadas do centro das bolas $\omega_\alpha$ .
$Q(t)$	- Quantidade de calor.
$r$	- Coordenada polar.
$r_i$	- Distância da $i$ -ésima partícula a um dado ponto.
$R$	- Resíduo da equação diferencial.
$R_N$	- Resíduo do operador traço na região de condição de contorno de Neumann.
$R_D$	- Resíduo do operador traço na região de condição de contorno de Dirichlet.
$R_{fs}(\mathbf{d})$	- Resíduo da formulação integral fortemente singular ou clássica.
$R_{hs}(\mathbf{d})$	- Resíduo da formulação integral hipersingular.
$R_{\Gamma_D}^i$	- Resíduo da formulação integral fortemente singular para a $i$ -ésima nuvem.
$R_{\Gamma_N}^i$	- Resíduo da formulação integral hiper-singular para a $i$ -ésima nuvem.
$\tilde{R}_{\Gamma_D}^i$	- Resíduo da formulação integral fortemente singular para a $i$ -ésima nuvem enriquecida.
$\tilde{R}_{\Gamma_N}^i$	- Resíduo da formulação integral hiper-singular para a $i$ -ésima nuvem enriquecida.
$s$	- Inteiro $\geq 0$ , real positivo.
$S$	- Comprimento de arco.
$s(\mathbf{x},t)$	- Densidade da fonte ou sumidouro.
$supp$	- Suporte de uma função.
$t$	- Variável tempo.
$\tilde{T}(\mathbf{x})$	- Solução exata para o campo de temperaturas.
$T(\mathbf{x},t), T(\mathbf{x})$	- Campo de temperaturas.

$T_i(\mathbf{x})$	- Temperatura no ponto campo.
$T_j(\mathbf{d})$	- Temperatura no ponto fonte.
$T^*(\mathbf{d}, \mathbf{x})$	- Solução fundamental.
Temp.	- Temperatura.
$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$	- Campo de velocidades.
$u(\mathbf{x})$	- Solução aproximada.
$\tilde{u}(\mathbf{x})$	- Solução exata.
$u_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$	- Aproximação de $f(\mathbf{x})$ .
$V$	- Energia potencial.
$\tilde{V}$	- Matriz gerada pelos polinômios $P_i$ nos pontos $\mathbf{x}_\alpha$ .
$\tilde{V}^T$	- Transposta de $\tilde{V}$ .
$w(\mathbf{x}, t)$	- Função peso $\in \mathcal{U}'$ .
$W(\mathbf{d})$	- Função teste.
$W$	- Conjunto das funções peso $\mathcal{W}_\alpha(\mathbf{y})$ , potência em Watt.
$W_i^{Máx}, W_i^{Mín}$	- Valores singulares máximo e mínimo.
$\mathbf{x}$	- Vetor posição, posição do ponto campo, resposta do sistema linear.
$\hat{\mathbf{x}}$	- Resposta do sistema linear do passo anterior ao enriquecimento da $i$ -ésima nuvem.
$\mathbf{x}_\alpha$	- Vetor posição do centro da bola $\omega_\alpha$ .
$x_i$	- $i$ -ésima componente do vetor $\mathbf{x}$ .
$x_1, x_2, x_3$	- Coordenadas espaciais.

- $\alpha$  - Inteiro  $\geq 0$ .  
 $\beta$  - Inteiro  $\geq 0$ .  
 $\Gamma$  - Contorno do domínio  $\Omega$ .  
 $\Gamma_1, \Gamma_D$  - Região do contorno com temperatura especificada.  
 $\Gamma_2, \Gamma_N$  - Região do contorno com fluxo especificado.  
 $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{d})$  - Função generalizada delta de Dirac.  
 $\Delta T(\mathbf{x}, t)$  - Variação da temperatura.  
 $\Delta t$  - Intervalo de tempo.  
 $\varepsilon$  - Raio da bola acrescida sobre o contorno  $\Gamma$ .  
 $\varepsilon_0$  - Permissividade do meio.  
 $\zeta$  - Escala.  
 $\eta$  - Erro relativo percentual da energia.  
 $\eta$  - Posição do ponto de integração.  
 $\theta$  - Inteiro  $\geq 0$ , coordenada polar.  
 $\Theta(\eta)$  - Função de  $\eta$  resultado de uma integração em  $\xi$ .  
 $\lambda^i, \lambda_1^i, \lambda_2^i$  - Indicadores de erro.  
 $\mu_0$  - Permeabilidade do meio.  
 $\xi$  - Posição do ponto de integração.  
 $\xi_{\Gamma_N(\mathbf{x}_i)}$  - Erro relativo percentual da temperatura para um ponto  $\mathbf{x}_i$ .  
 $\xi_{\Gamma_D(\mathbf{x}_i)}$  - Erro relativo percentual do fluxo para um ponto  $\mathbf{x}_i$ .  
 $\rho, \rho(\mathbf{x}, t)$  - Densidade, métrica, concentração.  
 $\rho(\mathbf{y})_{\mathbb{R}^n}$  - Distância do centro da bola  $\omega_\alpha$  a um ponto  $\mathbf{y}$ .

- $\varphi(\mathbf{x}, t)$  - Função potencial de velocidade.
- $\varphi_i(\mathbf{x})$  - Função de interpolação para uma variável da posição campo.
- $\varphi_j(\mathbf{d})$  - Função de interpolação para uma variável da posição fonte.
- $\Upsilon$  - Salto percentual relativo da temperatura.
- $\phi(\mathbf{x}), \phi(\boldsymbol{\xi})$  - Função potencial, polinômio em  $\boldsymbol{\xi}$ .
- $\Phi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$  - Núcleo.
- $\psi_m, \psi(\boldsymbol{\eta})$  - Função de interpolação enriquecedora, polinômio em  $\boldsymbol{\eta}$ .
- $\Psi_i(\mathbf{x})$  - Função de interpolação da geometria.
- $\Psi$  - Salto percentual relativo do fluxo.
- $\omega_\alpha$  -  $\alpha$ -ésima bola.
- $\Omega$  - Domínio do problema no  $\mathfrak{R}^n$ .
- $\bar{\Omega}$  - Fechamento de  $\Omega$ .
- $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})$  - Espaço das funções teste.
- $\mathcal{D}, \mathcal{D}^*$  - Operador traço na região de condição de contorno de Dirichlet e seu transposto.
- $\mathfrak{S}_N$  - Cobertura aberta do contorno  $\Gamma$ .
- $\mathcal{F}_N^{k,p}, \mathcal{F}_N^p$  - Conjunto de funções composto pela partição da unidade e correspondentes funções enriquecidas.
- $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}'$  - Espaço de Hilbert e seu dual.
- $\mathcal{I}(\mathbf{d})$  - Função da posição fonte.
- $\mathcal{J}_\Gamma$  - Integral hiper-singular com  $\Gamma$  acrescido de uma bola com raio  $\varepsilon$ .
- $\mathcal{L}[\cdot]$  e  $\mathcal{L}'[\cdot]$  - Operador diferencial linear e seu transposto.
- $\mathcal{L}^*[\cdot]$  - Operador adjunto formal.

$\mathfrak{W}$ e $\mathfrak{W}'$	- Espaço de Hilbert e seu dual.
$\mathcal{N}_\alpha$	- $\alpha$ -ésima nuvem.
$\mathcal{N}$ , $\mathcal{N}^*$	- Operador traço na região de condição de contorno de Neumann e seu transposto.
$\mathfrak{R}$	- Conjunto dos números reais.
$\mathfrak{R}^n$	- Produto cartesiano $n$ -dimensional do conjunto $\mathfrak{R}$ .
$\mathfrak{U}$ e $\mathfrak{U}'$	- Espaço de Hilbert e seu dual.
$\mathcal{W}_\alpha(\mathbf{y})$	- Função peso do método dos mínimos quadrados com ponderação móvel.
$\widetilde{\mathcal{W}}(\mathbf{y})$	- Matriz diagonal das funções peso $\mathcal{W}_\alpha(\mathbf{y})$ .
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	- Produto escalar dos vetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ .
$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$	- Produto vetorial dos vetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ .
$\frac{d(\cdot)}{dt}$	- Derivada material.
$\frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{x}}$	- Derivada parcial em relação a variável $\mathbf{x}$ .
$\frac{\partial(\cdot)}{\partial n(\mathbf{x})}$ , $\frac{\partial(\cdot)}{\partial n(\mathbf{d})}$	- Derivada normal nos pontos campo e fonte.
$\frac{\partial(\cdot)}{\partial \Gamma(\mathbf{x})}$ , $\frac{\partial(\cdot)}{\partial \Gamma(\mathbf{d})}$	- Derivada tangencial nos pontos campo e fonte.
$\nabla(\cdot)$	- Gradiente.
$\nabla^2(\cdot)$	- Operador de Laplace.
$\forall$	- Para todo.
$\in$	- Indica que um elemento pertence a um conjunto.
$\cup$	- União entre conjuntos.
$\cap$	- Interseção entre conjuntos.
$\emptyset$	- Conjunto vazio.
$\ \cdot\ $	- Norma euclidiana $\ell_2$ .

- $\|\cdot\|_{H^\gamma}$  - Norma de Sobolev  $H^\gamma$ .
- $\|e^T\|^2$  - Medida de erro da energia.
- $\|T(\mathbf{x})\|_E^2$  - Energia.
- $\|\mathbf{r}\|$  - Distância entre ponto fonte e ponto campo.
- $B(\cdot, \cdot)$  - Operador bilinear.
- $\Lambda_{\Gamma_N} \langle \cdot, \cdot \rangle$  - Operador traço na região de condição de contorno de Neumann.
- $\Lambda_{\Gamma_D} \langle \cdot, \cdot \rangle$  - Operador traço na região de condição de contorno de Dirichlet.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{N}}$  - Paridade dual em  $\mathcal{N} \times \mathcal{N}'$

# Lista de Figuras

4.1	Grupo de nuvens cobrindo um contorno. . . . .	37
4.2	Nuvens $\mathcal{N}_\alpha$ , funções peso e partição da unidade para elementos de contorno. . . . .	47
4.3	<i>Tenda</i> simétrica enriquecida até o polinômio de Legendre com ordem 3. . . . .	48
4.4	<i>Tenda</i> não-simétrica enriquecida até o polinômio de Legendre com ordem 3. . . . .	48
6.1	Variação do número de pontos para cada passo da integração adaptativa. . . . .	61
6.2	Contorno com caminho de integração. . . . .	64
6.3	Nuvens $\mathcal{N}_\alpha$ coincidentes e funções associadas da partição da unidade. . . . .	66
6.4	Funções $\varphi_\alpha$ associadas a nuvens $\mathcal{N}_\alpha$ vizinhas a um vértice $k$ do contorno. . . . .	70
7.1	Placa retangular com as dimensões e os carregamentos impostos. . . . .	79
7.2	Erros na temperatura para duas nuvens não enriquecidas por contorno. . . . .	81
7.3	Erros no fluxo para duas nuvens não enriquecidas por contorno. . . . .	81
7.4	Erros na temperatura para cinco nuvens não enriquecidas por contorno. . . . .	82
7.5	Erros no fluxo para cinco nuvens não enriquecidas por contorno. . . . .	82
7.6	Erros na temperatura para dez nuvens não enriquecidas por contorno. . . . .	83
7.7	Erros no fluxo para dez nuvens não enriquecidas por contorno. . . . .	83
7.8	Erros na temperatura para trinta e uma nuvens não enriquecidas por contorno. . . . .	84
7.9	Erros no fluxo para trinta e uma nuvens não enriquecidas por contorno. . . . .	84
7.10	Placa retangular para análise do efeito do final de fronteira. . . . .	86
7.11	Erro de temperatura no ponto B para o caso de 12 nuvens não enriquecidas no contorno. . . . .	87
7.12	Erro de fluxo no ponto A para o caso de 12 nuvens não enriquecidas no contorno. . . . .	88

7.13 Erro de temperatura no ponto B para o caso de 22 nuvens não enriquecidas no contorno. . . . .	88
7.14 Erro de fluxo no ponto A para o caso de 22 nuvens não enriquecidas no contorno. . . . .	89
7.15 Erro de temperatura no ponto B para o caso de 40 nuvens não enriquecidas no contorno. . . . .	89
7.16 Erro de fluxo no ponto A para o caso de 40 nuvens não enriquecidas no contorno. . . . .	90
7.17 Modelo para análise do efeito de escala. . . . .	91
7.18 Número de condição em função do número de nuvens. . . . .	94
7.19 Problema de Motz, suas dimensões e carregamentos. . . . .	95
7.20 Erro $\eta$ para três nuvens por contorno com enriquecimento $p$ e espaçamento uniformes. . . . .	97
7.21 Erro $\eta$ para seis nuvens por contorno com enriquecimento $p$ e espaçamento uniformes. . . . .	98
7.22 Erro $\eta$ para sete nuvens por contorno com enriquecimento $p$ e espaçamento uniformes. . . . .	98
7.23 Erro $\eta$ para três nuvens por contorno com enriquecimento $p$ adaptativo e espaçamento uniforme. . . . .	99
7.24 Erro $\eta$ para seis nuvens por contorno com enriquecimento $p$ adaptativo e espaçamento uniforme. . . . .	100
7.25 Erro $\eta$ para sete nuvens por contorno com enriquecimento $p$ adaptativo e espaçamento uniforme. . . . .	100
7.26 Erro $\eta$ para três nuvens com espaçamento não uniforme e enriquecimento $p$ uniforme. . . . .	101
7.27 Erro $\eta$ para seis nuvens por contorno com enriquecimento $p$ uniforme e espaçamento não uniforme. . . . .	102

7.28	Erro $\eta$ para sete nuvens por contorno com enriquecimento $p$ uniforme e espaçamento não uniforme. . . . .	102
7.29	Erro $\eta$ para o caso de três nuvens por fronteira em progressão geométrica e enriquecimento $p$ adaptativo. . . . .	103
7.30	Erro $\eta$ para o caso de seis nuvens por fronteira em progressão geométrica e enriquecimento $p$ adaptativo. . . . .	104
7.31	Erro $\eta$ para o caso de sete nuvens por fronteira em progressão geométrica e enriquecimento $p$ adaptativo. . . . .	104
7.32	Distribuição das nuvens ao longo do contorno para a análise do problema de Motz com 30 nuvens. . . . .	109
7.33	Distribuição das nuvens ao longo do contorno para a análise do problema de Motz com 35 nuvens. . . . .	110
7.34	Distribuição do grau da solução aproximada para cada nuvem do contorno do problema de Motz analisado com 30 nuvens pela versão Forte. . . . .	110
7.35	Distribuição do grau da solução aproximada para cada nuvem do contorno do problema de Motz analisado com 30 nuvens pela versão Hiper. . . . .	111
7.36	Distribuição do grau da solução aproximada para cada nuvem do contorno do problema de Motz analisado com 30 nuvens pela versão Simétrica. . . . .	111
7.37	Distribuição do grau da solução aproximada para cada nuvem do contorno do problema de Motz analisado com 35 nuvens pela versão Forte. . . . .	112
7.38	Distribuição do grau da solução aproximada para cada nuvem do contorno do problema de Motz analisado com 35 nuvens pela versão Hiper. . . . .	112
7.39	Distribuição do grau da solução aproximada para cada nuvem do contorno do problema de Motz analisado com 35 nuvens pela versão Simétrica. . . . .	113
7.40	Problema do domínio L e suas condições de contorno. . . . .	117
7.41	Modelo usado para obter os resultados por elementos finitos. . . . .	118
7.42	Comparação dos resultados do fluxo para a versão Forte versus elementos finitos. . . . .	119

7.43	Comparação dos resultados do fluxo para a versão Hiper versus elementos finitos. . . . .	119
7.44	Comparação dos resultados do fluxo para a versão Simétrica versus elementos finitos. . . . .	120

# Lista de Tabelas

7.1	Distribuição das nuvens por modelo. . . . .	87
7.2	Salto do fluxo para a formulação Hiper. . . . .	93
7.3	Salto do fluxo para a formulação Simétrica. . . . .	93
7.4	Salto da temperatura para a formulação Hiper. . . . .	93
7.5	Salto da temperatura para a formulação Simétrica. . . . .	94
7.6	Taxas de convergência para o caso de 30 nuvens. . . . .	105
7.7	Taxa de convergência para 35 nuvens. . . . .	106
7.8	Taxa do erro para 30 nuvens com enriquecimento $p$ adaptativo. . . . .	106
7.9	Taxa de convergência para 35 nuvens com enriquecimento $p$ adaptativo. . . . .	106
7.10	Erro $\eta$ para as versões Forte, Hiper e Simétrica na primeira estratégia. . . . .	107
7.11	Erro $\eta$ para as versões Forte, Hiper e Simétrica na segunda estratégia. . . . .	108
7.12	Distribuição do grau da aproximação para a quarta estratégia. . . . .	113
7.13	Distribuição do grau da aproximação para a quarta estratégia. . . . .	114

## Resumo

No presente trabalho é apresentada uma nova estratégia de adaptatividade  $p$  para a aproximação de Galerkin das equações integrais de contorno. Essa nova proposta é baseada no método hp-Clouds (Duarte, 1996), desenvolvido para os elementos finitos.

O problema analisado é o de Laplace bidimensional, sendo a aproximação de Galerkin desenvolvida para a equação fracamente singular (ou clássica), para a hipersingular e para a formulação simétrica ou variacional.

A adaptatividade  $p$  tem o objetivo de melhorar a qualidade da solução aproximada independentemente da influência do analista, porém, para isso, são necessários critérios matematicamente consistentes. No presente trabalho, o critério de disparo do enriquecimento  $p$  da solução é baseado na ortogonalização do resíduo, das equações integrais, em relação as funções da base de aproximação. Esse critério é semelhante ao Método dos Resíduos em Elemento (Duarte, 1991) para o Método dos Elementos Finitos.

Os procedimentos de integração das equações integrais são analítico-numéricos, sendo empregada a integração por partes para a redução da singularidade do núcleo hipersingular. Também é apresentado um cuidadoso detalhamento do procedimento de integração do núcleo hipersingular, para os vértices do contorno.

Para verificar a formulação aqui desenvolvida, bem como o algoritmo implementado, é feita a comparação dos resultados obtidos com a solução de alguns exemplos clássicos.

# Abstract

*This work introduces a new  $p$  adaptive strategie to the Galerkin approximation for boundary integral equations. This new approach is based on the  $hp$ -Cloud Method (Duarte 1996), which was firstly developed for the finite elements method.*

*The problems under consideration are modeled by the Laplace bidimensional equation, and the Galerkin approximation was developed for the weakly singular equation (or classical), for the hypersingular equation and for the symmetric or variational formulation.*

*The main goal of  $p$  adaptive strategies is to improve the quality of the approximated solution independently of the analyst interaction, but, for that purpose, it is mandatory the use of mathematically consistent criteria. In this work, the triggering criterion for the  $p$  improvement is based on orthogonalization of the integral equations residues with respect to the functions of the approximation basis. This criterion is similar to the Element Residual Method (Duarte, 1991) developed for the Finite Element Method.*

*The procedures for performing the integrations are based on analytical-numerical methods. Integration by parts was used in order to reduce the singularity of the hypersingular kernel. In addition, the integration of the hypersingular nucleous is here carefully detailed at the boundary vertices.*

*In order to confirm the efficiency of the developed formulation, as well as the implemented algorithm, the obtained results are compared with some known classical examples.*

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Generalidades

Na modelagem de problemas da engenharia, e de diversas áreas das ciências onde os fenômenos são governados por equações diferenciais, uma das dificuldades reside na solução do modelo matemático associado, normalmente um sistema de equações diferenciais parciais e um conjunto de condições de contorno e condições iniciais. Dependendo da geometria do domínio é possível o emprego de técnicas analíticas para a obtenção da solução exata do modelo, porém a aplicação destas técnicas se restringe a uma pequena classe de problemas. De maneira a contornar esta restrição, os engenheiros, os físicos, os matemáticos, os geneticistas etc., utilizam métodos aproximados na solução do modelo matemático relacionado com o problema da sua área. Dentre estes métodos aproximados pode-se citar alguns, com sólida conceituação matemática e amplamente difundidos na comunidade científica, tais como:

- *Método dos Elementos Finitos;*
- *Método dos Elementos de Contorno;*
- *Método das Diferenças Finitas;*
- *Método dos Volumes Finitos;*
- *Métodos Espectrais;*
- *Método da Função Local de Green Modificada.*

Para estes, a qualidade das suas respostas depende de fatores tais como:

- *problema;*
- *método em si;*
- *experiência do analista;*
- *precisão das máquinas usadas no cálculo;*
- *representação da geometria etc.*

Os erros causados por alguns destes fatores só terão solução a médio e longo prazo com o desenvolvimento da tecnologia de construção de computadores. Os erros dos demais, porém, podem ser minimizados com cuidados especiais no projeto dos programas, como por exemplo com a escolha de funções mais adequadas para mapeamentos da geometria e para a solução aproximada propriamente dita. Na discretização do problema, bem como na escolha do modelo matemático, a influência da inexperiência dos analistas é minorada com o emprego dos métodos adaptativos, nos quais se incluem a adaptatividade  $h$ ,  $p$  e  $hp$ , referências, [1], [4], [18], [21], [51], [56] e [58], bem como a adaptatividade de modelo matemático [66].

## 1.2 Estado da arte

### 1.2.1 Métodos sem malha

Todos os métodos anteriormente citados têm como ponto em comum a necessidade de construção de uma malha ou partição do domínio, com características adequadas ao método específico. No caso dos elementos finitos, esta malha define o suporte das funções de interpolação assim como a sua conectividade. Nos últimos anos tem-se intensificada a pesquisa sobre os métodos denominados sem malha, isto é, que precisam desta apenas como suporte das funções base.

Segundo Belytschko [9], os métodos sem malha nasceram há cerca de vinte anos com o método denominado *Smooth Particle Hydrodynamics* (SHP), na tentativa de modelagem de

problemas astrofísicos sem contorno, tais como problemas de explosão de estrelas e nuvens de poeira cósmica.

Independentemente dos métodos sem malha é desenvolvido o procedimento de ajustagem de curvas através de polinomiais para a computação gráfica denominado de *Moving Least Squares* (MLS) [41], aqui traduzido como Método dos Mínimos Quadrados com Ponderação Móvel. Essa técnica, empregada pela primeira vez no método de Galerkin por Nayroles, Touzot e Vilon em 1992, é denominada de *Diffuse Element Method* (DEM). Posteriormente, Belytschko, após a introdução de algumas modificações, a rebatizou de *Element - Free Galerkin Method*, (EFG) [8]. Estes refinamentos e modificações consistem em:

- *introdução de multiplicadores de Lagrange para garantir correta aplicação das condições de contorno;*
- *cálculo correto das derivadas das funções de interpolação e*
- *procedimento de integração mais adequado ao método.*

O escopo do EFG é bastante amplo, podendo ser citado o trabalho de Kryl *et alii* [40], onde a metodologia é aplicada para o problema de propagação dinâmica de trincas tridimensionais.

Li e Liu [43] e [44] também apresentam um método sem malha para o Método dos Elementos Finitos. Este método, que também é uma variação do MLS, denominada de *Reproducing Kernel Hierarchical Partition of Unity* (RKPM) é empregado por estes autores na solução da equação de Helmholtz e outras equações diferenciais.

Os trabalhos de Duarte e Oden [20] e [21], de 1995, bem como o de Babuška e Melenk [5], em 1996, desenvolvidos independentemente um do outro, foram os responsáveis por um grande passo na generalização dos métodos sem malha em problemas integrais de domínio. Nestes artigos os autores batizaram suas variações do MLS de *Clouds Method* e *Partition of Unity Method*, respectivamente.

De maneira geral, é possível afirmar que o método dos mínimos quadrados com ponderação móvel (MLS), é a base da maioria dos métodos sem malha. Porém, as propostas de

enriquecimento da partição da unidade de Duarte e Oden, Babuška e Melenk se apresentam como as mais adequadas para os processos  $p$  adaptativos, já que a metodologia de enriquecimento do grau das funções da base da solução aproximada é mais flexível e eficiente que as demais.

Nicolazzi *et alii* [47] e [48], em 1996, propõe o uso da metodologia *hp Clouds* de Duarte e Oden para o método do Elementos de Contorno de Galerkin, enquanto Mukherjee *et alii* [46], em 1997, aplicam o MLS para o Método dos Elementos de Contorno e o denominam de *Boundary Node Method*. Como é de se esperar, o Método das Nuvens também apresenta como vantagem, em relação ao *Boundary Node Method*, a facilidade de enriquecimento das funções base para a aplicação dos procedimentos de adaptatividade  $p$  no Método dos Elementos de Contorno.

Ainda em 1997, Scremim [60] aplica a metodologia *hp Clouds* ao método dos elementos de contorno por colocação no problema de Laplace bidimensional.

No presente trabalho propõe-se a extensão dos métodos sem malha com adaptatividade  $p$  para o método dos elementos de contorno de Galerkin direto [36] na equação de Laplace bidimensional. O método de Galerkin dos elementos de contorno permite a construção de sistemas simétricos que, além de aproveitar as vantagens matemáticas e numéricas que os sistemas com esta característica possuem, visam o acoplamento deste método com o dos elementos finitos em desenvolvimentos futuros. A abordagem do método em problemas simples, tal como o de Laplace, é ideal para este nível de desenvolvimento, já que os conceitos aqui desenvolvidos são facilmente estendidos para problemas mais complexos.

### 1.2.2 Método de Galerkin e simetrização

Em 1988, Polizzoto [55] deu um formalismo matemático, em termos de princípios energéticos, ao método de Galerkin para os Elementos de Contorno, mostrando que o mesmo é dotado de algumas propriedades importantes que o seu congênere por colocação não possui. Naquele artigo, é provado no contexto de corpos elásticos contínuos que as soluções por elementos de contorno de Galerkin apresentam as seguintes características:

- a solução aproximada é única;
- a solução aproximada converge assintoticamente para a solução exata;
- as matrizes resultantes são simétricas.

Isso significa dizer que uma boa solução aproximada para o problema irá depender apenas do processo de discretização, de maneira análoga ao que acontece no método de discretização dos elementos finitos, característica esta fundamental para a aplicação de técnicas adaptativas. Depois do trabalho de Polizzoto, a abordagem de Galerkin para o método dos elementos de contorno passou a ser denominada de forma variacional dos elementos de contorno.

Wendland *et alii* [72], [59] tratam da existência e da unicidade da solução para o método dos elementos de contorno de Galerkin aplicado aos operadores diferenciais elípticos. Na segunda parte da referência [59], bem como em Bonnet [10], é feita uma rigorosa análise dos espaços de Sobolev envolvidos pelos operadores integrais, bem como a convergência teórica para a adaptatividade  $h$ . Vários autores, podendo-se citar Wendland [72] (1981), Stephan e Suri [64] (1989), Postell e Stephan [56] (1990), Babuška *et alii* [3] (1990), Yu [75] e [76] (1991) e Stephan [65] (1996), investigam de maneira conclusiva a convergência da forma variacional simétrica dos Elementos de Contorno nos procedimentos adaptativos  $h$ ,  $p$  e  $hp$  para os problemas bi e tridimensionais.

Kanarachos e Provatidis [34], em 1988, apresentam uma proposta alternativa de formulação simétrica para o método dos elementos de contorno. A formulação indireta [11] é empregada para gerar as funções de interpolação da aproximação utilizando em seguida a formulação fraca de Galerkin, para gerar o sistema simétrico de equações. Nesta proposta, as integrais fracamente singulares são calculadas como no método da colocação. A segunda integração, necessária para o método de Galerkin em elementos de contorno, é feita da forma tradicional, dado que no método dos resíduos ponderados, usado para gerar a forma fraca, a solução fundamental não é empregada como função peso.

Em 1989, Parreira e Guiggiani [53] aplicam o método de Galerkin para o método dos elementos de contorno na forma clássica, ou seja, a formulação não-simétrica, para o problema

de elasticidade plana. Neste trabalho é abordado o procedimento de solução das integrais fracamente e fortemente singulares através de transformações de coordenadas e integração de Gauss (convencional e com pesos especiais). São apresentados resultados relativos a uma placa submetida a carregamentos de tração e cisalhamento, bem como o de um tubo cilíndrico submetido a pressão, para funções da base da aproximação lineares e quadráticas.

Em 1992, Sirtori *et alii* [62] tratam novamente da abordagem de Galerkin para os elementos de contorno no problema de elasticidade linear, como Polizzoto [55]. Utilizam variáveis complexas no processo de integração que é resolvido analiticamente, já que os elementos são lineares e os contornos, retos.

Em 1993 a abordagem de Galerkin simétrica é estendida para elementos curvos nos problemas de calor e de elasticidade plana por Kane & Balakrishna [35]. Neste artigo as equações integrais que geram o problema simétrico são regularizadas através de soluções simples, sendo que a segunda integração é feita com o processo padrão de Gauss.

Ainda neste ano, a metodologia de Galerkin é aplicada na equação de Helmholtz, para acústica, por Karafiat *et alii* [37]. Neste artigo são feitas comparações entre resultados da formulação convencional, da hipersingular e da solução exata. Os resultados apresentados são muito satisfatórios, inclusive para os casos das frequências denominadas proibidas.

Holzer [32], em 1993, mostrou a potencialidade do método de Galerkin simétrico com a aplicação da adaptatividade  $p$  e com as propostas de subestruturação e de interfaceamento deste método com o dos elementos finitos.

Kane [36] apresentou, de forma mais estendida e sistematizada, o método de Galerkin simétrico para os elementos de contorno bem como as maneiras de regularizar as equações integrais fortemente singulares e hipersingulares.

Os procedimentos de regularização das equações integrais, a partir de soluções simples tais como deslocamento de corpo rígido ou aquecimento isotérmico para os problemas de elasticidade e condução de calor, respectivamente, apesar de serem gerais, apresentam o ônus de aumentar bastante o número de termos a serem integrados. De maneira a reduzir um pouco o esforço computacional, Kane *et alii* [7] apresentam uma proposta de integração

analítica para o caso de elementos curvos isoparamétricos.

Petersdorff e Schwab [54], em 1994, usam *Wavelet Approximations* para os elementos de contorno de Galerkin aplicados à equação de Laplace e ao problema de elasticidade linear. Estes autores apresentam a maneira de gerar a partição da unidade para esta metodologia, que pode ser traduzida como um refinamento  $h$  da malha, bem como uma cuidadosa análise dos estimadores de erro *a priori* para a adaptatividade  $h$  e dos espaços envolvidos na aproximação.

O método de Galerkin para os elementos de contorno tem tido uma diversificação bastante grande na sua aplicação nos últimos tempos, podendo ser citados os seguintes pesquisadores: Frangi e Bonnet [25] resolvendo o problema de placas de Kirchoff; Chen *et alii* [16] no acoplamento dos Elementos Finitos com os de Contorno aplicado para o problema elasto-acústico e Chang e Demkowicz [15] com o acoplamento dos métodos elementos finitos-elementos de contorno e adaptatividade  $hp$  para o problema de acústica linear.

### 1.3 Organização do trabalho

Este trabalho é desenvolvido em capítulos de maneira que o conteúdo de cada um, sem pretensão de esgotar os assuntos relacionados, permite uma boa visualização e compreensão das etapas na construção do modelo numérico. De maneira a visualizar a estrutura deste trabalho, é feita a seguir uma descrição sucinta de cada capítulo.

No Capítulo 2 é feita uma introdução aos problemas potenciais com a intenção de mostrar o seu escopo na engenharia, com um direcionamento para os problemas de condução de calor em meios isotrópicos sem fontes e/ou sumidouros, ou seja, a equação de Laplace. Logo a seguir, o método dos resíduos ponderados é usado para gerar a equação integral da equação de Laplace, o que caracteriza a formulação direta. São discutidas as características dos integrandos das equações obtidas e, finalmente, é deduzida a equação denominada *gradiente da resposta* do problema em questão.

No Capítulo 3 são apresentadas as variações possíveis do método de Galerkin, cujas denominações neste trabalho são: formulação Forte, obtida a partir da equação fortemente

singular, formulação Hiper, gerada a partir da equação hipersingular, e, finalmente, a formulação Simétrica, obtida a partir da combinação das formulações Forte e Hiper em função das condições de contorno da região fonte. Adicionalmente são tecidas algumas observações a respeito do procedimento de integração do método dos elementos de contorno de Galerkin.

No Capítulo 4 é apresentada a metodologia do método dos mínimos quadrados com ponderação móvel, que é empregado pelo maioria dos métodos sem malha na geração da *partição da unidade* bem como a sua particularização para os elementos de contorno. Posteriormente é mostrada a maneira de enriquecer hierarquicamente a *partição da unidade* a partir de bases polinomiais completas. Por último, é proposta a função peso empregada, pelo método dos mínimos quadrados com ponderação móvel, na geração da *partição da unidade*.

No Capítulo 5 é apresentado um estimador de erro *a posteriori* que é consistente com o método dos elementos de contorno de Galerkin.

No Capítulo 6 é apresentado o detalhamento do procedimento de integração dos núcleos fracamente, fortemente e hipersingular para os elementos de contorno de Galerkin. Inicialmente é abordado o problema de integração da situação em que não há pontos em comum nas regiões fonte e campo. Posteriormente é tratada a integração onde há pontos comuns das regiões fonte e campo. Nesta última situação todas as integrais são semi-analíticas, porém na hiper singular é utilizado um procedimento de regularização adicional.

O Capítulo 7 tem a finalidade de avaliar o desempenho da metodologia proposta. A análise do desempenho é feita a partir da comparação de resultados obtidos para alguns problemas acadêmicos, tais como uma placa retangular isolada em duas faces opostas e submetida a temperaturas prescritas nas outras duas. Quanto ao teste da adaptatividade  $p$ , são utilizados dois problemas com singularidades, sendo estes o problema de Motz e o do domínio na forma de L. A solução do problema de Motz é analítica na forma de séries, enquanto que a do problema do domínio L é numérica.

No Capítulo 8 são apresentadas as conclusões, bem como é delineado o horizonte e a potencialidade da metodologia para trabalhos futuros. Também é apresentada uma lista das contribuições do presente trabalho para o método dos elementos de contorno. Também são

---

apresentados os problemas inerentes ao método, detectados ao longo desse desenvolvimento.

# Capítulo 2

## Problemas potenciais

### 2.1 Introdução

Dentre os problemas da engenharia abordados através de equações diferenciais, neste trabalho há um interesse especial naqueles cujas soluções são obtidas a partir de uma função escalar denominada de função potencial. Com a intenção de ilustrar a importância desta classe de problemas, seguem alguns exemplos:

- *Partícula em um campo de força conservativo* [29]. A força que um campo conservativo exerce sobre uma partícula é expressada por

$$\mathbf{F} = -\nabla V, \quad (2.1)$$

onde  $V$  é a energia potencial da partícula submetida à ação do campo.

Para a função potencial dada por:

$$V = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i}, \quad (2.2)$$

onde  $G$  é a constante universal,  $m_i$  a massa da  $i$ -ésima partícula,  $r_i$  a distância entre a  $i$ -ésima partícula e o ponto de interesse e  $n$  o número de partículas que compõem o sistema conservativo, a equação (2.1) resulta na lei da gravitação universal de Newton.

- *Torção de eixos prismáticos* [70]. Para uma barra prismática submetida somente a conjugados, na direção axial e com sentidos opostos, em seus extremos livres, L. Prandtl propôs para a determinação da distribuição de tensões a seguinte formulação:

$$-\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset (R^2), \quad (2.3)$$

onde  $\phi(\mathbf{x})$ , denominada nos textos de elasticidade de função tensão de Prandtl, é uma função potencial.

• *Eletricidade e eletromagnetismo* [12]. A equação que rege este tipo de problema é a equação de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} + \mu_o \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset (R^3), \quad (2.4)$$

onde  $\mathbf{E}$  é o campo elétrico,  $\mu_o$  a permeabilidade,  $t$  o tempo e  $\mathbf{H}$  o campo magnético.

Para o caso eletrostático a equação acima se reduz a

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset (R^3). \quad (2.5)$$

Se esta condição acontece em todos os pontos do domínio, o campo elétrico  $\mathbf{E}$  é chamado de irrotacional. Este campo é obtido por

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi(\mathbf{x}), \quad (2.6)$$

onde a função  $\phi(\mathbf{x})$  é denominada de potencial eletrostático. Adotando como relação constitutiva a primeira equação de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o}, \quad (2.7)$$

onde  $\rho$  é a densidade de carga e  $\epsilon_o$ , a permissividade do meio, o problema do potencial elétrico é formulado como

$$-\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = \frac{\rho}{\epsilon_o} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset (R^3), \quad (2.8)$$

que é a equação de Poisson.

• *Difusão* [12] Os problemas referentes à difusão de certas substâncias em algum meio (por exemplo: difusão de poluentes na atmosfera ou em águas, de nêutrons em um reator nuclear ou de um produto químico em um solvente) podem obedecer a uma relação constitutiva, denominada de lei de Fick, dada por

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = -D \nabla \rho(\mathbf{x}, t), \quad (2.9)$$

onde  $\mathbf{j}$  é o fluxo da substância,  $\rho$  é a sua concentração,  $t$ , o tempo e  $D$ , o coeficiente de difusão da substância no meio.

Supondo que a substância difundida possa ser emitida (absorvida) pelo meio, a equação de equilíbrio do sistema é dada por

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = s(\mathbf{x}, t), \quad (2.10)$$

onde  $s$  é a densidade da fonte (sumidouro).

Substituindo a relação constitutiva nesta última expressão, tem-se:

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 \rho(\mathbf{x}, t) + s(\mathbf{x}, t), \quad (2.11)$$

que é a equação que rege o problema da difusão para regimes transientes com emissão (absorção) de substância.

• *Condução de calor* [12]. Seja um corpo de volume arbitrário  $\Omega$  ( $\Omega \subset R^3$ ), limitado pelo contorno  $\Gamma$ , recebendo uma quantidade de calor  $Q$  durante um intervalo de tempo  $\Delta t$  proveniente de um fluxo  $\mathbf{q}$  de calor que atravessa suas fronteiras e de uma fonte (sumidouro) interna,  $s(\mathbf{x}, t)$ . A representação formal deste enunciado pode ser dada por

$$Q(t) = \left[ - \int_{\Gamma} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{s} + \int_{\Omega} s(\mathbf{x}, t) d\Omega \right] \Delta t \quad (2.12)$$

onde:

$\int_{\Gamma} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{s}$  - quantidade de calor que cruza a fronteira  $\Gamma$  do corpo  $\Omega$ ;

$s(\mathbf{x}, t)$  - quantidade de calor gerado (dissipado) no interior do corpo por uma fonte (sumidouro);

$d\mathbf{s}$  - elemento característico de  $\Gamma$ ;

$d\Omega$  - elemento característico de  $\Omega$ .

Pela calorimetria, sabe-se que uma determinada quantidade de calor  $dQ$  eleva a temperatura de um infinitésimo de matéria  $\rho d\Omega$  em uma quantidade  $\Delta T(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ , de acordo com a relação

$$dQ = c\rho \Delta T(\mathbf{x}, t) d\Omega, \quad (2.13)$$

onde:

$\rho$  - densidade do corpo;

$c$  - capacidade calorífica do material do corpo;

$\Delta T(\mathbf{x}, t)$  - variação da temperatura.

A substituição da equação (2.13) em (2.12) resulta em

$$-\int_{\Gamma} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Omega} [c\rho \frac{\Delta T(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} - s(\mathbf{x}, t)] d\Omega, \quad (2.14)$$

onde  $\Delta t$  é um incremento de tempo.

Tomando o limite de  $\Delta t \rightarrow 0$ , e aplicando o teorema da divergência, obtém-se

$$-\nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = c\rho \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - s(\mathbf{x}, t) \quad (2.15)$$

que é a equação geral da condução de calor.

Adotando a lei de Fourier para materiais isotrópicos como relação constitutiva,

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -k \nabla T(\mathbf{x}, t),$$

a equação (2.15) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \nabla^2 T(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c\rho} s(\mathbf{x}, t), \quad (2.16)$$

expressão esta semelhante à equação da difusão apresentada neste item.

Generalizando, pode-se escrever para todos problemas da difusão que

$$\frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = a^2 \nabla^2 T(\mathbf{x}, t) + b s(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.17)$$

sendo que as constantes  $a$  e  $b \in \Re$  dependem do tipo do problema. Para regimes permanentes e ausência de fontes ou sumidouros, esta equação se reduz à equação de Laplace.

• *Escoamentos potenciais* [61]. Em escoamentos irrotacionais de fluidos submetidos a ação de forças de campo conservativas, o campo de velocidades  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  pode ser obtido a partir da relação

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \varphi(\mathbf{x}, t) \quad (2.18)$$

onde  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  é denominado de potencial de velocidade.

A equação da continuidade, para o caso de inexistência de fontes e ou sumidouros, tem a sua forma mais geral dada por

$$\frac{d\rho(\mathbf{x}, t)}{dt} + \rho(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.19)$$

onde:

$\frac{d(\cdot)}{dt}$  - derivada material;

$\rho$  - densidade do fluido.

A combinação das equações (2.18) e (2.19), para a condição de regime permanente e escoamento isocórico, resulta no problema de Laplace,

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.20)$$

onde  $\nabla^2(\cdot)$  é classificado como um *operador diferencial linear fortemente elíptico* [50].

No desenvolvimento que segue é dado um enfoque especial aos problemas de Laplace, em particular o de condução de calor em meios isotrópicos.

## 2.2 Generalidades a respeito da equação da condução de calor

No item 2.1, mostrou-se que o problema homogêneo de condução de calor se reduz à equação de Laplace. Assim, definido um domínio aberto  $\Omega$ , limitado por um contorno regular  $\Gamma \in C^\infty$ , a condição de equilíbrio térmico consiste em determinar a função  $T(\mathbf{x})$  tal que

$$\nabla^2 T(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.21)$$

$$T(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_1 \text{ e } f(\mathbf{x}) \in C^\infty, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n} = g(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_2 \text{ e } g(\mathbf{x}) \in C^\infty, \quad (2.23)$$

onde:

$\Gamma_1$  - região do contorno onde a temperatura é especificada (Dirichlet);

$\Gamma_2$  - região do contorno onde o fluxo de calor é especificado (Neumann);

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma \text{ e } \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset.$$

## 2.3 Definições básicas

Seja um operador diferencial linear,  $\mathcal{L}[\cdot]$ , que atuando sobre um espaço de Hilbert  $\mathcal{U}$  o mapeia continuamente sobre outro espaço de Hilbert ( $\mathfrak{F}$ ), representado por

$$\mathcal{L}[\tilde{u}(\mathbf{x})] = q(\mathbf{x}), \quad q(\mathbf{x}) \in \mathfrak{F}, \quad \tilde{u}(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2. \quad (2.24)$$

O domínio  $\Omega$  é um conjunto aberto real bidimensional limitado por um contorno lipschitziano  $\Gamma$  e cujo fechamento  $\bar{\Omega}$  representa o lugar ocupado pelo corpo no qual ocorre o fenômeno regido pela equação (2.24).

Sejam  $\mathfrak{U}'$  e  $\mathfrak{F}'$  os espaços duais de  $\mathfrak{U}$  e  $\mathfrak{F}$ , satisfazendo as condições:

- i -  $\mathfrak{F}$  é pivotal;
- ii - o operador transposto  $\mathcal{L}'[\cdot]$  mapeia  $\mathfrak{F}'$  de forma contínua e injetora em  $\mathfrak{U}'$ .

Sob estas condições o operador diferencial  $\mathcal{L}[\cdot]$  e seu transposto satisfazem a *fórmula generalizada de Green* (Oden & Reddy [50]),

$$\langle \mathcal{L}'[w(\mathbf{x})], \tilde{u}(\mathbf{x}) \rangle_{\mathfrak{U}} = \langle w(\mathbf{x}), \mathcal{L}[\tilde{u}(\mathbf{x})] \rangle_{\mathfrak{F}}, \quad (2.25)$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{U}}$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{F}}$  denotam a paridade dual em  $\mathfrak{U} \times \mathfrak{U}'$  e  $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}'$ . Considerando que  $\mathfrak{U}$  esteja densamente embutido em um espaço pivotal  $H$ , e sendo a restrição injetora do operador transposto  $\mathcal{L}'[\cdot]$  no espaço  $\mathfrak{W} \equiv \{w(\mathbf{x}) \in \mathfrak{F}' : \forall \mathcal{L}'[w(\mathbf{x})] \in \mathfrak{U}'\}$  o operador adjunto formal  $\mathcal{L}^*[\cdot]$  de  $\mathcal{L}[\cdot]$ , define-se assim o produto interno:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}[\tilde{u}(\mathbf{x})] - q(\mathbf{x}), w(\mathbf{x}) \rangle_{\mathfrak{F}} &= \int_{\Omega} (\mathcal{L}[\tilde{u}(\mathbf{x})] - q(\mathbf{x})) w(\mathbf{x}) \, d\Omega \\ \forall \tilde{u}(\mathbf{x}) \in \mathfrak{U} \text{ e } \forall w(\mathbf{x}) \in \mathfrak{W}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Com esta definição, a condição de ortogonalidade fica estabelecida a partir de

$$\langle \mathcal{L}[\tilde{u}(\mathbf{x})] - q(\mathbf{x}), w(\mathbf{x}) \rangle_{\mathfrak{F}} = \int_{\Omega} (\mathcal{L}[\tilde{u}(\mathbf{x})] - q(\mathbf{x})) w(\mathbf{x}) \, d\Omega = 0. \quad (2.27)$$

A equação (2.27), integrada por partes, até que todas as derivadas da função  $\tilde{u}(\mathbf{x})$  sejam eliminadas, resulta na forma transposta do operador diferencial e numa série de termos de contorno. O resultado deste procedimento é representado genericamente por

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{L}[\tilde{u}(\mathbf{x})] w(\mathbf{x}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \tilde{u}(\mathbf{x}) \mathcal{L}^*[w(\mathbf{x})] \, d\Omega &= \int_{\Gamma} \mathcal{N}[\tilde{u}(\mathbf{x})] \mathcal{D}^*[w(\mathbf{x})] \, d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma} \mathcal{D}[\tilde{u}(\mathbf{x})] \mathcal{N}^*[w(\mathbf{x})] \, d\Gamma \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde  $\Gamma$  é o contorno do corpo  $\Omega$ ; com  $\mathcal{N}$  e  $\mathcal{D}$  sendo os operadores traço. Os operadores  $\mathcal{L}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{D}^*$  são as formas transpostas de  $\mathcal{L}, \mathcal{N}, \mathcal{D}$ , respectivamente. Os traços gerados no

procedimento de integração representam dois tipos de condições de contorno: as essenciais, ou de Dirichlet, em uma determinada região do contorno, e as naturais, ou de Neumann, no restante do contorno. Para o caso de operadores diferenciais autoadjuntos, ou seja  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$ , os operadores traço apresentam a característica  $\mathcal{D} = \mathcal{D}^*$  e  $\mathcal{N} = \mathcal{N}^*$ . Simbolicamente, a equação (2.28), com estas últimas considerações, é reescrita como:

$$\langle \mathcal{L}[\tilde{u}(\mathbf{x})], w(\mathbf{x}) \rangle_{\mathfrak{F}} - \langle \tilde{u}(\mathbf{x}), \mathcal{L}[w(\mathbf{x})] \rangle_H = \Lambda_{\Gamma} \langle \mathcal{N}[\tilde{u}(\mathbf{x})], \mathcal{D}[w(\mathbf{x})] \rangle - \Lambda_{\Gamma} \langle \mathcal{D}[\tilde{u}(\mathbf{x})], \mathcal{N}[w(\mathbf{x})] \rangle \quad (2.29)$$

onde:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}[\tilde{u}(\mathbf{x})], w(\mathbf{x}) \rangle_{\mathfrak{F}} &= \int_{\Omega} \mathcal{L}[\tilde{u}(\mathbf{x})] w(\mathbf{x}) \, d\Omega \\ \langle \tilde{u}(\mathbf{x}), \mathcal{L}[w(\mathbf{x})] \rangle_H &= \int_{\Omega} \tilde{u}(\mathbf{x}) \mathcal{L}[w(\mathbf{x})] \, d\Omega \\ \Lambda_{\Gamma} \langle \mathcal{N}[\tilde{u}(\mathbf{x})], \mathcal{D}[w(\mathbf{x})] \rangle - \Lambda_{\Gamma} \langle \mathcal{D}[\tilde{u}(\mathbf{x})], \mathcal{N}[w(\mathbf{x})] \rangle &= \int_{\Gamma} \mathcal{N}[\tilde{u}(\mathbf{x})] \mathcal{D}[w(\mathbf{x})] \, d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma} \mathcal{D}[\tilde{u}(\mathbf{x})] \mathcal{N}[w(\mathbf{x})] \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Segundo Oden & Reddy [50], os termos do lado direito da equação (2.29) são denominados de *concomitante bilinear* do operador  $\mathcal{L}[\cdot]$ , ou seja, é uma forma bilinear da extensão de  $\tilde{u}(\mathbf{x})$  e  $w(\mathbf{x})$  para o contorno  $\Gamma$ . Evidentemente, a forma do concomitante bilinear depende do operador  $\mathcal{L}[\cdot]$ .

Introduzindo as condições de contorno na equação (2.29) e integrando por partes, até que qualquer derivada sobre  $w(\mathbf{x})$  seja removida, obtém-se o *problema direto*, simbolicamente escrito como

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}[\tilde{u}(\mathbf{x})] - q(\mathbf{x}), w(\mathbf{x}) \rangle_{\mathfrak{F}} &= \Lambda_{\Gamma_{\mathcal{N}}} \left\langle (\mathcal{N}[\tilde{u}(\mathbf{x})] - \overline{\mathcal{N}[\tilde{u}(\mathbf{x})]}), \mathcal{D}[w(\mathbf{x})] \right\rangle - \\ &\Lambda_{\Gamma_{\mathcal{D}}} \left\langle (\mathcal{D}[\tilde{u}(\mathbf{x})] - \overline{\mathcal{D}[\tilde{u}(\mathbf{x})]}), \mathcal{N}[w(\mathbf{x})] \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde as quantidades com sobretraço são especificadas no contorno.

Para a solução numérica de equações diferenciais, a solução exata do problema  $\tilde{u}(x)$  é substituída por uma aproximada,  $u(\mathbf{x})$ , pertencente a um espaço de dimensão finita (normalmente gerado por uma base de polinomiais). A introdução desta solução aproximada na equação (2.30) resulta no que se chama de *Método dos Resíduos Ponderados*, sendo o nome

relacionado com a idéia da equação se tratar de uma ponderação de resíduos no contorno e no domínio em relação a função  $w(\mathbf{x})$ . A representação simbólica do método é dada por

$$\langle R, w(\mathbf{x}) \rangle_{\mathfrak{F}} = \Lambda_{\Gamma_{\mathcal{N}}} \langle R_{\mathcal{N}}, \mathcal{D}[w(\mathbf{x})] \rangle - \Lambda_{\Gamma_{\mathcal{D}}} \langle R_{\mathcal{D}}, \mathcal{N}[w(\mathbf{x})] \rangle \quad (2.31)$$

onde:

$$R = \mathcal{L}[u(\mathbf{x})] - q(\mathbf{x}) \text{ em } \Omega ;$$

$$R_{\mathcal{N}} = \mathcal{N}[u(\mathbf{x})] - \overline{\mathcal{N}[u(\mathbf{x})]} \text{ em } \Gamma_{\mathcal{N}} ;$$

$$R_{\mathcal{D}} = \mathcal{D}[u(\mathbf{x})] - \overline{\mathcal{D}[u(\mathbf{x})]} \text{ em } \Gamma_{\mathcal{D}} .$$

Integrando por partes a equação (2.31), até que o operador envolvido em  $R$  seja transposto para  $w(\mathbf{x})$ , tem-se o que é denominado de *problema inverso*,

$$\begin{aligned} \langle u(\mathbf{x}), \mathcal{L}[w(\mathbf{x})] \rangle_H - \langle q(\mathbf{x}), w(\mathbf{x}) \rangle_{\mathfrak{F}} &= \Lambda_{\Gamma_{\mathcal{D}}} \langle \mathcal{D}[u(\mathbf{x})], \mathcal{N}[w(\mathbf{x})] \rangle \\ &- \Lambda_{\Gamma_{\mathcal{N}}} \langle \mathcal{N}[u(\mathbf{x})], \mathcal{D}[w(\mathbf{x})] \rangle . \end{aligned} \quad (2.32)$$

As equações integrais apresentam um caráter especial que é o de remover uma das integrais de domínio quando uma solução do problema fundamental é empregada como função peso no Método dos Resíduos Ponderados. A adoção da solução fundamental como função peso,  $w(\mathbf{x})$ , torna a equação (2.32) o ponto de partida para o método dos elementos de contorno. Assim sendo, um tratamento mais detalhado do problema fundamental, especialmente o de condução de calor, se faz necessário.

## 2.4 Problema fundamental de condução de calor

Para uma melhor compreensão do desenvolvimento que se seguirá, é necessária a definição da notação vetorial que será empregada:

*Vetor no plano:*

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2, \quad i = 1, 2 \quad (2.33)$$

*Gradiente:*

$$\nabla(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_2} \mathbf{e}_2, \quad i = 1, 2 \quad (2.34)$$

Operador de Laplace:

$$\nabla^2(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_2^2}, \quad i = 1, 2 \quad (2.35)$$

Derivada direcional:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial t(\mathbf{y})} = \nabla(\cdot) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{y})$$

Norma euclidiana  $\ell_2$ :

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_i x_i} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (2.36)$$

Soma de vetores:

$$\mathbf{x} = \mathbf{r} + \mathbf{d} = (r_i + d_i)\mathbf{e}_i = (r_1 + d_1)\mathbf{e}_1 + (r_2 + d_2)\mathbf{e}_2. \quad (2.37)$$

Nestas representações,  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  são os vetores unitários da base ortonormal do espaço euclidiano  $\ell_2$ .

Com isto definido, estabelece-se o problema fundamental de condução de calor em um meio bidimensional infinito como:

$$-\nabla^2 T^*(\mathbf{d}, \mathbf{x}) = \frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{d})}{k}, \quad (2.38)$$

onde:

$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{d})$  - é a função generalizada delta de Dirac;

$\mathbf{x}$  - é um ponto do domínio, denominado de ponto *campo*;

$\mathbf{d}$  - é a localização da fonte de calor, denominada de ponto *fonte*;

$k$  - condutividade térmica;

$T^*(\mathbf{d}, \mathbf{x})$  - distribuição de temperaturas do problema fundamental.

Distributivamente, esta equação tem como uma de suas soluções a função

$$T^*(\mathbf{d}, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi k} \ln \|\mathbf{r}\|, \quad (2.39)$$

onde  $\|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{d}\|$ .

É importante observar que a solução fundamental  $T^*(\mathbf{d}, \mathbf{x})$  é função de duas variáveis, a posição do ponto fonte e a posição do ponto campo, podendo ser interpretada como a

temperatura em um ponto campo  $\mathbf{x}$  devida à aplicação de uma fonte unitária puntiforme no ponto fonte  $\mathbf{d}$ . Esta solução, uma das muitas da família de soluções do problema fundamental, é empregada por quase todos os autores no método dos elementos de contorno com excelentes resultados, por isto é empregada no presente trabalho.

A abordagem aqui apresentada para a determinação da solução do problema fundamental é bastante simples, porém generalizações dos problemas fundamentais bem como métodos de obtenção das respectivas soluções são tratadas por vários autores do Método dos Elementos de Contorno, e.g. Westphal, de Barcellos e Pereira [74].

## 2.5 Equação integral do problema de condução de calor

No item 2.2 é apresentado o problema de valor no contorno para condução de calor em regime permanente para meios isotrópicos. No item 2.4 determinou-se a solução fundamental deste problema. A transformação do problema de condução de calor para a forma integral, estabelecida no item 2.3, é feita a partir da definição das seguintes identidades:

$$u(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}), \quad (2.40)$$

$$w(\mathbf{x}) = T^*(\mathbf{d}, \mathbf{x}), \quad (2.41)$$

$$\mathcal{L} = \nabla^2, \quad (2.42)$$

$$\mathcal{L}T^*(\mathbf{d}, \mathbf{x}) = \nabla^2 T^*(\mathbf{d}, \mathbf{x}) = -\frac{\delta(\mathbf{d} - \mathbf{x})}{k}, \quad (2.43)$$

$$\mathcal{D} = I, \quad (2.44)$$

$$\mathcal{N}[u(\mathbf{x})] = \mathcal{N}[T(\mathbf{x})] = \nabla T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})}, \quad (2.45)$$

$$\mathcal{N}[w(\mathbf{x})] = \mathcal{N}[T^*(\mathbf{d}, \mathbf{x})] = \nabla T^*(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\partial T^*(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})}. \quad (2.46)$$

Assim a *forma inversa*, equação (2.32), para o problema de condução de calor é escrita simbolicamente como

$$\left\langle T(\mathbf{x}), -\frac{\delta(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{k} \right\rangle_H = -\Lambda_{\Gamma_N} \left\langle \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})}, T^*(\mathbf{x}) \right\rangle + \Lambda_{\Gamma_D} \left\langle T(\mathbf{x}), \frac{\partial T^*(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} \right\rangle \quad (2.47)$$

ou, na forma integral, como

$$\int_{\Omega} T(\mathbf{x}) \frac{\delta(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{k} d\Omega(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} T^*(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} T(\mathbf{x}) \frac{\partial T^*(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}). \quad (2.48)$$

Considerando as propriedades da "função" delta de Dirac, a equação (2.48), multiplicada pela condutividade térmica,  $k$ , transforma-se em:

$$c_1 T(\mathbf{d}) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} k T^*(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + pv \int_{\Gamma} T(\mathbf{x}) k \frac{\partial T^*(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}), \quad (2.49)$$

que, com as definições dadas por

$$G(\mathbf{d}, \mathbf{x}) = k T^*(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \ln \|\mathbf{r}\|, \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} = k \frac{\partial T^*(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} = -\frac{n_k(x_k - d_k)}{2\pi r^2}, \quad (2.51)$$

pode ser reescrita como

$$c_1 T(\mathbf{d}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) - pv \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} T(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}), \quad (2.52)$$

que, por sua vez, para uma situação particular descrita na seção 2.7, pode ser escrita como

$$T(\mathbf{d}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} T(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}). \quad (2.53)$$

A equação (2.52), denominada de *Boundary Integral Equation* (em inglês BIE), é a equação integral usada como ponto de partida para o método dos elementos de contorno. O símbolo  $pv$  e a constante  $c_1$  têm os seus significados justificados na seção 2.7.

## 2.6 Equação integral do gradiente da resposta

A solução do sistema de equações integrais é neste trabalho denominada de *resposta primária*. A temperatura e/ou o fluxo no interior do corpo, denominados de *resposta secundária*, são determinados indiretamente a partir do pós-processamento da resposta obtida para o contorno. Para a determinação da temperatura secundária é utilizada a equação (2.53), enquanto para a determinação do fluxo é necessário desenvolver uma expressão dedicada, obtida a partir desta mesma equação, como mostrado a seguir.

Considerando que o contorno  $\Gamma$  é *smooth* em quase todos os pontos e que a integral da equação (2.53) resulta em uma função em  $\mathbf{d}$ , entende-se que  $T(\mathbf{d})$  é *smooth* em quase todo lugar de  $\bar{\Omega}$ . Com estas considerações, a derivada primeira de  $T(\mathbf{d})$  em relação a  $\mathbf{d}$  é finita e existe em quase todo lugar de  $\bar{\Omega}$ . Com estas hipóteses, o gradiente de  $T(\mathbf{d})$ , denominado de *gradiente da resposta da equação integral* (em inglês RGBIE), tem a forma dada por

$$\nabla T(\mathbf{d}) = \frac{\partial T(\mathbf{d})}{\partial d_i} \mathbf{e}_i = \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial d_i} \mathbf{e}_i \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial d_i \partial n(\mathbf{x})} \mathbf{e}_i T(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}). \quad (2.54)$$

Da projeção do RGBIE, equação (2.54), segundo uma direção qualquer,  $\mathbf{n}(\mathbf{d})$ , tem-se a derivada direcional da resposta naquela direção dada por

$$\frac{\partial T(\mathbf{d})}{\partial n(\mathbf{d})} = \nabla T(\mathbf{d}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{d}) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d})} \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d}) \partial n(\mathbf{x})} T(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (2.55)$$

que é interpretada como o fluxo de calor na direção  $\mathbf{n}(\mathbf{d})$  em um ponto  $\mathbf{d} \in \Omega$ .

A formulação singular da equação (2.55) é obtida ao se deslocar o ponto fonte para o contorno de  $\Omega$ , impondo a condição que o vetor  $\mathbf{n}(\mathbf{d})$  seja normal a  $\Gamma$ . Para um contorno,  $\Gamma$ , *smooth*, esta última equação é escrita como

$$c_2 \frac{\partial T(\mathbf{d})}{\partial n(\mathbf{d})} = pv \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d})} \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) - fp \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d}) \partial n(\mathbf{x})} T(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}). \quad (2.56)$$

O símbolo  $fp$  e a constante  $c_2$  também têm seus significados justificados na seção 2.7.

A resposta obtida a partir desta equação é exatamente a mesma que a obtida na equação (2.52), sendo que estas equações se diferenciam apenas nas derivadas da solução fundamental  $G(\mathbf{d}, \mathbf{x})$ .

## 2.7 Características dos integrandos das equações integrais

As soluções fundamentais têm um comportamento definido na matemática como singular, sendo o ponto onde a fonte puntiforme está aplicada denominado de *ponto singular* ou *pólo*. Isto é devido ao fato de a função não ser limitada quando a distância entre o ponto fonte e

o ponto campo se anula. As equações (2.52) e (2.56) contêm em seus integrandos a solução fundamental bem como as suas derivadas direcionais. Mais detalhadamente apresentadas elas são mostradas a seguir:

$$G(\mathbf{d}, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \ln \|\mathbf{r}\|, \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d})} = \frac{1}{2\pi} \frac{n_j(\mathbf{d})(x_j - d_j)}{r^2}, \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} = -\frac{1}{2\pi} \frac{n_j(\mathbf{x})(x_j - d_j)}{r^2}, \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial^2 G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d})\partial n(\mathbf{x})} = -\frac{1}{2\pi} \left[ 2 \frac{n_j(\mathbf{x})(x_j - d_j)}{r^2} \frac{n_i(\mathbf{d})(x_i - d_i)}{r^2} - \frac{n_j(\mathbf{x})n_j(\mathbf{d})}{r^2} \right]. \quad (2.60)$$

Estas últimas quatro expressões são denominadas de *núcleos*. O núcleo definido pela equação (2.57) é classificado como fracamente singular, enquanto os definidos pelas equações (2.58) e (2.59), apresentando singularidades do tipo

$$\frac{(x_j - d_j)}{r^2} := O(r^{-1}), \quad (2.61)$$

são classificados como fortemente singular. O último núcleo, definido na equação (2.60), apresentando singularidade do tipo

$$\frac{(x_j - d_j)^2}{r^4} := O(r^{-2}), \quad (2.62)$$

é denominado de hipersingular.

Se o ponto fonte  $\mathbf{d}$  presente nos núcleos (2.57) a (2.60) está situado sobre o contorno  $\Gamma$ , estes núcleos se tornam singulares quando integrados nas equações (2.52) e (2.56). Assim estas integrais devem ser calculadas com procedimentos apropriados, cuja análise é feita no Capítulo 6.

Consideram-se as seguintes alternativas de localização do ponto fonte:

1.  $\mathbf{d} \in \Omega$  – Nesta situação,  $c_1 = c_2 = 1$  e os símbolos  $pv$  e  $fp$  não são colocados junto às integrais, o que indica que as equações integrais não apresentam qualquer singularidade.

Isto caracteriza a formulação regular dada por

$$\begin{aligned} T(\mathbf{d}) &= \int_{\Gamma} G(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} T(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}), \\ \frac{\partial T(\mathbf{d})}{\partial n(\mathbf{d})} &= \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d})} \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d})\partial n(\mathbf{x})} T(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.63)$$

2.  $\mathbf{d} \notin \bar{\Omega}$  – Novamente se caracteriza uma formulação regular dada por

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} G(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} T(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}), \\ 0 &= \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d})} \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d}) \partial n(\mathbf{x})} T(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2.64)$$

onde  $c_1 = c_2 = 0$ .

3.  $\mathbf{d} \in \Gamma$  – Neste caso, o ponto fonte está localizado sobre o contorno  $\Gamma$  e as integrais são impróprias, o que causa dificuldades para qualquer procedimento de integração convencional, analítico ou numérico. Por este motivo, os equacionamentos obtidos a partir de (2.52) e (2.56) são denominados de *Formulação Singular* [36]. As integrais porém existem no sentido do *valor principal* e os símbolos *pv* e *fp* significam que as integrais devem ser avaliadas no sentido do *valor principal de Cauchy* e por *parte finita de Hadamard* [67], respectivamente. As constantes  $c_1$  e  $c_2$  dependem da suavidade do contorno, sendo para o caso particular de contorno *smooth* iguais a  $\frac{1}{2}$  ([11], [36] e [30]).

Tanaka *et alli* [67] apresentam uma classificação das singularidades dos integrandos das equações integrais de acordo com a dimensão do domínio e com a singularidade do núcleo. Com o objetivo de utilizar esta classificação no presente trabalho, as integrais singulares das equações (2.52) e (2.56) são representadas pelo produto entre uma função regular e outra singular,

$$\mathcal{I}(\mathbf{d}) = \int_{\Gamma} f(\mathbf{x}) K(\mathbf{d}, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}),$$

onde  $f(\mathbf{x})$  é uma função limitada e  $K(\mathbf{d}, \mathbf{x})$  é o *núcleo* contendo a singularidade. Segundo Tanaka, para um espaço  $n$  dimensional, tem se:

1. Núcleo com singularidade do tipo  $\ln(\frac{1}{r})$ , para  $n = 2$ , ou  $r^{(-1)}$ , para  $n = 3$ . A integral  $\mathcal{I}(\mathbf{d})$  é fracamente singular e integrável;
2. Núcleo com singularidade do tipo  $r^{1-n}$ . A integral  $\mathcal{I}(\mathbf{d})$  é fortemente singular e deve ser avaliada no sentido do valor principal de Cauchy;

3. Núcleo com singularidade do tipo  $r^{-N}$ ,  $N \geq n$ . A integral  $\mathcal{I}(\mathbf{d})$  é hipersingular e deve ser avaliada no sentido do valor principal de Hadamard, que é a denominação geral do procedimento de avaliação das integrais que apresentam comportamento singular.

Na solução numérica das equações integrais, a formulação singular resulta em sistemas lineares melhor condicionados que os obtidos com a formulação regular cujo condicionamento depende da localização dos pontos fonte na geração das equações. Por este motivo, pode-se concluir que a formulação regular não é um procedimento robusto para a solução de problemas não acadêmicos. Em consequência disto, são empregadas neste trabalho as *formulações singulares* na geração do sistema de equações a ser resolvido.

Mansur *et alli* [45], em 1992, mostram, para os problemas de potenciais bidimensionais, que as integrais que contêm núcleos do tipo  $\frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n}$  são "bem comportadas" e não necessitam de tratamento numérico especial de integração, mesmo quando  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{d}$ . Mesmo assim, no presente texto, convencionou-se denominar essas integrais de fortemente singulares.

Os textos de cálculo avançado recomendam que as integrais, cujos núcleos sejam fortemente singulares ou hipersingulares, devem ser evidenciadas com um sinal, tal como o símbolo *pv* ou outra convenção qualquer. Neste trabalho, como sempre é empregada a formulação singular, convencionou-se não usar qualquer diferenciação gráfica para evidenciar estas integrais impróprias.

## 2.8 Discretização das equações integrais

Com o objetivo de encontrar soluções numéricas para as equações (2.52) e (2.56), propõe-se uma base de aproximação das variáveis  $T(\cdot)$  e  $\frac{\partial T(\cdot)}{\partial n(\cdot)}$ , dada pelas funções  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i = 1, N$ :

$$T(\mathbf{x}) \cong \sum_{i=1}^N \varphi_i(\mathbf{x}) T_i, \quad (2.65)$$

$$T(\mathbf{d}) \cong \sum_{j=1}^N \varphi_j(\mathbf{d}) T_j, \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} \cong \sum_{i=1}^N \varphi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial T_i}{\partial n}, \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial T(\mathbf{d})}{\partial n(\mathbf{d})} \cong \sum_{j=1}^N \varphi_j(\mathbf{d}) \frac{\partial T_j}{\partial n}. \quad (2.68)$$

O inteiro  $N$  indica a dimensão do espaço  $\mathcal{F}_N^{k,p}$  gerado por estas funções e cuja construção é detalhada no Capítulo 4.

O contorno, por outro lado, faz uso de um mapeamento adequado que, no possível, o representa de forma exata. Formalmente,

$$\mathbf{x} \cong \sum_{i=1}^N \Psi_i(\mathbf{x}) \mathbf{x}_i. \quad (2.69)$$

Convenciona-se, para este trabalho, a não utilização do símbolo  $\sum$  em favor de um texto mais compacto para as equações.

A escolha de uma abordagem não isoparamétrica para o presente trabalho é determinada pelo fato de que uma das fontes de erro do método dos elementos de contorno é a fraca representação que as funções de interpolação permitem do contorno. O mapeamento do contorno pode ser realizado por funções mais adequadas ao modelamento geométrico, tais como a B-Splines convencionais ou então as NURBS. Isto facilita a interface do programa desenvolvido para este trabalho com programas de CAD & CAM, já que estas funções são ferramentas básicas dos modelamentos de superfícies e sólidos deste ramo da engenharia.

Com a introdução das expansões (2.65), (2.66), (2.67) e (2.68) nas equações (2.52) e (2.56), tem-se as equações integrais discretizadas, como segue:

$$c_1 \varphi_j(\mathbf{d}) T_j = \int_{\Gamma} G(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \varphi_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \frac{\partial T_i}{\partial n} - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} \varphi_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) T_i, \quad (2.70)$$

$$c_2 \varphi_j(\mathbf{d}) \frac{\partial T_j}{\partial n} = \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d})} \varphi_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \frac{\partial T_i}{\partial n} - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d}) \partial n(\mathbf{x})} \varphi_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) T_i. \quad (2.71)$$

É necessário salientar que os termos com índices repetidos se somam até  $N$ .

As equações (2.70) e (2.71) são o ponto de partida para a abordagem de Galerkin que é apresentada no Capítulo 3.

# Capítulo 3

## Método de Galerkin

### 3.1 Introdução

O método dos elementos de contorno é uma alternativa eficiente para a solução de certas classes de problemas de engenharia, quando comparado com outros métodos numéricos. Entretanto as formulações de elementos de contorno apresentam algumas desvantagens, dentre estas podem-se citar:

- a sua aplicação é somente possível em problemas que têm solução fundamental;
- a formulação por elementos de contorno por colocação não é consistente variacionalmente (ou seja, não é obtida a partir de um princípio variacional).

Com o objetivo de contornar a segunda desvantagem é apresentada, no presente Capítulo, a formulação de Galerkin para as equações integrais do problema de condução de calor. Esta abordagem é bastante semelhante àquelas tratadas por vários autores, por exemplo Kane [36], Parreira [53], Guiggiani [52] e Polizzotto [55].

### 3.2 Método de Galerkin para elementos de contorno

O ponto de partida para o método de Galerkin em elementos de contorno são as equações integrais (2.52) e (2.56), que representam as condições contínuas ou exatas do equilíbrio térmico:

$$c_1 \tilde{T}(\mathbf{d}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{T}(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} \tilde{T}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

$$c_2 \frac{\partial \tilde{T}(\mathbf{d})}{\partial n(\mathbf{d})} = \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d})} \frac{\partial \tilde{T}(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d}) \partial n(\mathbf{x})} \tilde{T}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}). \quad (3.2)$$

A partir destas duas equações são definidos os resíduos  $R_{fs}(\mathbf{d})$  e  $R_{hs}(\mathbf{d})$  como segue:

$$R_{fs}(\mathbf{d}) = -c_1 T(\mathbf{d}) + \int_{\Gamma} G(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} T(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}), \quad (3.3)$$

$$R_{hs}(\mathbf{d}) = -c_2 \frac{\partial T(\mathbf{d})}{\partial n(\mathbf{d})} + \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d})} \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d}) \partial n(\mathbf{x})} T(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}). \quad (3.4)$$

Estas funções resíduo são iguais a zero para a distribuição exata de temperatura e fluxo do problema. Estabelecida uma base para estas distribuições, as equações (2.70) e (2.71) fornecem expressões discretizadas deste resíduo:

$$R_{fs}(\mathbf{d}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \varphi_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \frac{\partial T_i}{\partial n} - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} \varphi_i(\mathbf{x}) T_i d\Gamma(\mathbf{x}) - c_1 \varphi_i(\mathbf{d}) T_i, \quad (3.5)$$

$$R_{hs}(\mathbf{d}) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d})} \varphi_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \frac{\partial T_i}{\partial n} - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d}) \partial n(\mathbf{x})} \varphi_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - c_2 T_i \varphi_i(\mathbf{d}) \frac{\partial T_j}{\partial n}. \quad (3.6)$$

A ortogonalização destes resíduos em relação a funções peso resulta na forma fraca destas formulações. A classe de funções peso e o procedimento de ortogonalização são detalhados a seguir.

Seja  $H$  um espaço de Sobolev associado ao produto dual definido como

$$\langle R_{fs}(\mathbf{d}), W(\mathbf{d}) \rangle_H = \int_{\Gamma} R_{fs}(\mathbf{d}) W(\mathbf{d}) d\Gamma(\mathbf{d}) \quad \forall W(\mathbf{d}) \in \mathcal{D}(\mathfrak{R}), \quad (3.7)$$

$$\langle R_{hs}(\mathbf{d}), W(\mathbf{d}) \rangle_H = \int_{\Gamma} R_{hs}(\mathbf{d}) W(\mathbf{d}) d\Gamma(\mathbf{d}) \quad \forall W(\mathbf{d}) \in \mathcal{D}(\mathfrak{R}), \quad (3.8)$$

onde  $\mathcal{D}(\mathfrak{R})$  é o espaço das funções teste e  $\mathfrak{R}$  o conjunto dos números reais. As expressões

$$\langle R_{fs}(\mathbf{d}), W(\mathbf{d}) \rangle_H = \int_{\Gamma} R_{fs}(\mathbf{d}) W(\mathbf{d}) d\Gamma(\mathbf{d}) = 0 \quad \forall W(\mathbf{d}) \in \mathcal{D}(\mathfrak{R}), \quad (3.9)$$

$$\langle R_{hs}(\mathbf{d}), W(\mathbf{d}) \rangle_H = \int_{\Gamma} R_{hs}(\mathbf{d}) W(\mathbf{d}) d\Gamma(\mathbf{d}) = 0 \quad \forall W(\mathbf{d}) \in \mathcal{D}(\mathfrak{R}), \quad (3.10)$$

representam a ortogonalização dos resíduos em relação às funções do espaço  $\mathcal{D}(\mathfrak{R})$ .

A escolha do espaço  $\mathcal{D}(\mathfrak{R})$  das funções teste é crítica, porque deste dependem as propriedades das equações resultantes. Para o método de Galerkin, o espaço  $\mathcal{D}(\mathfrak{R})$  a ser adotado

é idêntico ao da família  $\mathcal{F}_N^{k,p}$  citado no item 2.8 do Capítulo 2 e apresentado formalmente no Capítulo 4. Matematicamente,

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{R}) \equiv \mathcal{F}_N^{k,p}, \quad (3.11)$$

$$\mathcal{F}_N^{k,p} = \{\varphi_\alpha(\mathbf{d}) : \mathbf{d} \in \mathfrak{R}^n, n = 1 \text{ ou } 2, 0 \leq \alpha \leq M, M \geq N, k \geq 0, p < \infty\}, \quad (3.12)$$

onde as funções  $\varphi_\alpha(\mathbf{d})$  são as funções de aproximação do espaço, de forma tal que, dados os parâmetros reais  $A_i$ ,

$$W(\mathbf{d}) = A_i \varphi_i(\mathbf{d}) \in \mathfrak{D}(\mathfrak{R}). \quad (3.13)$$

Com estas definições, as condições de ortogonalidade (3.9) e (3.10) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} \langle R_{fs}(\mathbf{d}), W \rangle_H = & \int_{\Gamma} \left\{ \int_{\Gamma} G(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \varphi_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \frac{\partial T_i}{\partial n} \right. \\ & \left. - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} \varphi_i(\mathbf{x}) T_i d\Gamma(\mathbf{x}) - c_1 \varphi_i(\mathbf{d}) T_i \right\} A_k \varphi_k(\mathbf{d}) d\Gamma(\mathbf{d}) = 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \langle R_{hs}(\mathbf{d}), W \rangle_H = & \int_{\Gamma} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d})} \varphi_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \frac{\partial T_i}{\partial n} - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d}) \partial n(\mathbf{x})} \varphi_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) T_i \right. \\ & \left. - c_2 T_i \varphi_i(\mathbf{d}) \frac{\partial T_j}{\partial n} \right\} A_k \varphi_k(\mathbf{d}) d\Gamma(\mathbf{d}) = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Estas expressões são conhecidas como formulação de Galerkin fortemente singular e hipersingular do problema de condução de calor em meios isotrópicos.

É interessante destacar que cada uma das equações acima representa um sistema linear com número de equações igual ao número de componentes da base das funções teste. Como a constante  $A_k$  é arbitrária pode-se escrever que

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{d}) d\Gamma(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{d}) \frac{\partial T_i}{\partial n} \\ & - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} \varphi_i(\mathbf{x}) T_i \varphi_k(\mathbf{d}) d\Gamma(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{d}) - c_1 \int_{\Gamma} \varphi_i(\mathbf{d}) \varphi_k(\mathbf{d}) d\Gamma(\mathbf{d}) T_i \end{aligned} \quad (3.16)$$

e

$$0 = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d})} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{d}) d\Gamma(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{d}) \frac{\partial T_i}{\partial n} - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d}) \partial n(\mathbf{x})} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{d}) d\Gamma(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{d}) T_i$$

$$-c_2 \int_{\Gamma} T_i \varphi_i(\mathbf{d}) \varphi_k(\mathbf{d}) d\Gamma(\mathbf{d}) \frac{\partial T_j}{\partial n}, \quad (3.17)$$

condições estas conhecidas como as equações do Método de Galerkin para os Elementos de Contorno.

### 3.3 Generalidades a respeito do método de Galerkin

O método de Galerkin resulta em três abordagens diferentes dependendo da combinação das equações (3.16) e (3.17) usada. Estas abordagens, diferenciadas pelos núcleos dos operadores integrais, são batizadas neste texto de Forte, Hiper e Simétrica. A seguir é explanado procedimento de obtenção de cada formulação.

#### 3.3.1 Galerkin fortemente singular - "Forte"

A abordagem do método de Galerkin com o emprego da equação (3.16) resulta em um sistema de equações não simétrico. Esta abordagem, por conveniência, é denominada de Forte. A escolha do nome Forte é devida à presença do núcleo fortemente singular  $\frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})}$ .

#### 3.3.2 Galerkin hipersingular - "Hiper"

A abordagem de Galerkin obtida a partir da equação (3.17), denominada de Hiper, também resulta em um sistema linear de equações não simétrico. O nome Hiper é devido ao núcleo hipersingular,  $\frac{\partial^2 G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d}) \partial n(\mathbf{x})}$ .

#### 3.3.3 Galerkin simétrico - "Simétrica"

A obtenção do sistema de equações simétrico a partir da abordagem de Galerkin, equações (3.16) e (3.17), e por isto denominado de Simétrica, não é tão óbvia como a das formas Forte e Hiper, sendo assim necessária uma explanação mais detalhada do procedimento.

Os núcleos dos integrandos destas equações, aqui repetidos em forma estendida, são:

$$G(\mathbf{d}, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x_j - d_j)(x_j - d_j)}, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} = -\frac{1}{2\pi} \frac{n_j(\mathbf{x})(x_j - d_j)}{r^2}, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d})} = \frac{1}{2\pi} \frac{n_j(\mathbf{d})(x_j - d_j)}{r^2}, \quad (3.20)$$

e

$$\frac{\partial^2 G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d}) \partial n(\mathbf{x})} = -\frac{1}{2\pi} \left[ 2 \frac{n_j(\mathbf{x})(x_j - d_j)}{r^2} \frac{n_i(\mathbf{d})(x_i - d_i)}{r^2} - \frac{n_j(\mathbf{x})n_j(\mathbf{d})}{r^2} \right]. \quad (3.21)$$

É evidente que as expressões (3.18) e (3.21) são simétricas em relação à troca de posição entre ponto fonte e ponto campo, propriedade esta não compartilhada pelas expressões (3.19) e (3.20). Adicionalmente, observa-se que as duas últimas equações citadas são antisimétricas, ou seja:

$$\frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} = -\frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d})}. \quad (3.22)$$

A partir destas observações é possível construir um sistema de equações simétrico baseado na seguinte estratégia:

- 1 - *Emprego da equação (3.16) para as equações do sistema cujos pontos fontes estão localizados em regiões de condição de contorno de Dirichlet;*
- 2 - *Emprego da equação (3.17) com o sinal trocado (em função da propriedade (3.22)) para as equações do sistema cujos pontos fontes estão localizados em regiões de condição de contorno de Neumann.*

Pode-se afirmar categoricamente que a solução do sistema é a mesma, independente do uso de uma ou de outra formulação. Isto se deve ao fato de a equação (3.17) nada mais ser do que a equação (3.16) após as transformações lineares de derivação e produto por cossenos diretores. Sabe-se da Álgebra Linear que transformações lineares sobre sistemas de equações não afetam o resultado.

Polizzoto, na referência [55], prova que as equações geradas pelo método de Galerkin simétrico coincidem com aquelas por ele obtidas pelo princípio variacional de Hu-Washizu no problema de elasticidade. O operador diferencial do problema de elasticidade pertence à classe dos operadores diferenciais *fortemente elípticos* (Oden & Reddy [50]) da mesma forma que o operador de Laplace (condução de calor) e, assim, compartilham das mesmas propriedades. Por este motivo, pode-se garantir que o problema de condução de calor formulado

por Galerkin simétrico também é variacionalmente consistente. Em função do desenvolvimento apresentado por Polizzotto, alguns autores, por exemplo Holzer [33], denominam a abordagem de Galerkin simétrica de *método dos elementos de contorno variacional*.

### 3.4 Algumas observações

O emprego do método de Galerkin, especialmente a formulação Simétrica, é vantajosa em relação ao método da colocação por garantir consistência variacional. Porém, esta vantagem tem como contrapartida o crescimento explosivo do custo de integração, pois o método de Galerkin implica uma integração a mais das equações integrais em relação ao método da colocação. Exemplo: para uma placa triangular modelada com três elementos cuja quadratura é feita com apenas três pontos de integração, o método da colocação opera vinte e sete vezes os pesos e as coordenadas dos pontos de integração, enquanto o método de Galerkin faz três vezes mais as mesmas operações.

Esta desvantagem pode ser compensada especialmente para a formulação simétrica, pois a solução do sistema linear manipula apenas a parte superior ou a inferior da matriz. Ademais, com o crescente aumento da velocidade dos computadores, o tempo gasto com o procedimento de integração tem a tendência de deixar de ser um entrave de sua aplicação e, assim, as suas propriedades variacionais poderão ser exploradas na sua plenitude, especialmente em processos adaptativos.

## Capítulo 4

# Funções de interpolação para o método das nuvens

### 4.1 Introdução

Na simulação de problemas físicos através de métodos numéricos tais como elementos finitos, elementos de contorno, volumes finitos etc., há um gasto expressivo de tempo computacional dedicado à confecção das malhas. Dessa forma, a expectativa do emprego de um método que dispense a execução desta tarefa é animadora, especialmente para problemas onde processos de re-geração são freqüentes, como por exemplo: análise de sólidos considerando grandes deformações, adaptatividade, otimização de forma etc.

Neste Capítulo é apresentada a construção da base de aproximação utilizada neste trabalho, que é a geração das funções da partição da unidade e seu enriquecimento hierárquico. Vale acrescentar que a idéia básica para o desenvolvimento da proposta está fundamentada no método dos resíduos com ponderação móvel, detalhadamente apresentado por Lancaster & Šalkauskas na referência [41].

### 4.2 Mínimos quadrados com ponderação móvel para o método das nuvens

O método dos mínimos quadrados com ponderação móvel, que é uma generalização do método de mínimos quadrados convencional, apresenta a importante propriedade de permitir ponderar de forma diferenciada as informações de pontos próximos e distantes da região de aproximação. Isto o torna aplicável para generalizar o procedimento de geração de funções

chamadas de *partição da unidade*. Sendo assim, uma revisão deste método se faz necessária.

Seja um corpo ocupando um domínio  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ,  $n = 1, 2$  ou  $3$ , com contorno  $\Gamma$ , e sejam  $f_\alpha$ ,  $\alpha = 0, 1, 2, 3, \dots, N$ , os valores conhecidos de uma função  $f(\mathbf{x})$  em um número finito de pontos  $\mathbf{x}_\alpha \in \Omega$ , isto é:

$$f_\alpha = f(\mathbf{x}_\alpha). \quad (4.1)$$

A partir destes dados, constrói-se uma aproximação  $u_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$  de  $f(\mathbf{x})$  num ponto  $\mathbf{y}$ , de tal forma que  $u_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$  dependa fundamentalmente dos valores  $f_\alpha$  vizinhos ao ponto  $\mathbf{y}$ . Várias são as formas de induzir esta característica, sendo que uma delas é o método dos mínimos quadrados com ponderação móvel [41].

Define-se o funcional  $E_{\mathbf{y}}(u_{\mathbf{y}})$ , ponderado por pesos  $\mathcal{W}_\alpha(\mathbf{y})$ , da seguinte forma:

$$E_{\mathbf{y}}(u_{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^N \mathcal{W}_\alpha(\mathbf{y}) [u_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_\alpha) - f_\alpha]^2, \quad (4.2)$$

onde

$\mathcal{W}_\alpha(\mathbf{y}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são funções de valores não negativos com a característica de serem monotonicamente decrescentes com o aumento da distância  $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_\alpha\|$ .

Para o presente trabalho são escolhidas funções peso de suporte compacto  $\omega_\alpha$  com continuidade maior ou igual a zero. Estas funções pertencem ao espaço  $W$  definido como

$$W = \{\mathcal{W}_\alpha(\mathbf{y}) \in C_0^s(\omega_\alpha), s \geq 0 : \mathcal{W}_\alpha(\mathbf{y}) \geq 0, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n\}, \quad (4.3)$$

onde os suportes  $\omega_\alpha$  das funções peso são bolas abertas de raio  $h_\alpha$  centradas em  $\mathbf{x}_\alpha$ , isto é,

$$\omega_\alpha = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha\|_{\mathbb{R}^n} \leq h_\alpha, \text{ tal que } \bar{\Omega} \subset \bigcup_{\alpha=0}^N \omega_\alpha\}. \quad (4.4)$$

A discussão detalhada do tipo das funções peso para a ponderação do funcional é apresentada neste mesmo Capítulo, seção 4.5.

A aproximação  $u_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$  da função  $f$  é construída, dentre várias alternativas possíveis, a partir de uma combinação linear de polinomiais:

$$u_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^m a_j P_j(\mathbf{x}), \quad (4.5)$$

onde  $a_j$  são coordenadas generalizadas.

As funções  $P_j(\mathbf{x})$  são componentes da base completa  $P$  de polinômios de ordem  $m \leq N$ ,

$$\mathbf{P} = \{P_0(\mathbf{x}), P_1(\mathbf{x}), \dots, P_j(\mathbf{x}), \dots, P_m(\mathbf{x})\} \quad (4.6)$$

com propriedades

$$\mathbf{P} = \{P_i : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}, P_i \in C^l(\Gamma) \ l \geq 0 \ i = 0, 1, \dots, m\}.$$

A minimização do funcional dado pela equação (4.2), em relação às coordenadas generalizadas, resulta em um sistema de  $m+1$  equações, denominado por Lancaster & Šalkauskas [41] de “Moving Least Squares“, e aqui por método dos mínimos quadrados com ponderação móvel (MQPM). A determinação dos parâmetros  $a_i$  que minimizam o funcional da equação (4.2) definem uma função de aproximação  $u_{\mathbf{y}}$  dos valores nodais  $f_{\alpha}$ . No método dos mínimos quadrados tradicional, a função peso  $W_{\alpha}(\mathbf{y})$  é igual à unidade e, conseqüentemente, as coordenadas generalizadas são constantes. No caso do método MQPM estas coordenadas dependem do ponto de aproximação local  $\mathbf{y}$ . Para salientar esta característica, a equação (4.5) é reescrita como

$$u_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^m a_j(\mathbf{y}) P_j(\mathbf{x}), \quad (4.7)$$

podendo ser interpretada como uma aproximação local  $u_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$  para cada  $\mathbf{y}$ .

Para facilitar o entendimento do desenvolvimento a seguir, são definidas as seguintes matrizes:

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} P_0(\mathbf{x}_0) & P_1(\mathbf{x}_0) & P_2(\mathbf{x}_0) & P_3(\mathbf{x}_0) & \dots & P_m(\mathbf{x}_0) \\ P_0(\mathbf{x}_1) & P_1(\mathbf{x}_1) & P_2(\mathbf{x}_1) & P_3(\mathbf{x}_1) & \dots & P_m(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P_0(\mathbf{x}_N) & P_1(\mathbf{x}_N) & P_2(\mathbf{x}_N) & P_3(\mathbf{x}_N) & \dots & P_m(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

$$\widetilde{\mathcal{W}}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_0(\mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{W}_1(\mathbf{y}) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathcal{W}_N(\mathbf{y}) \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

$$\vec{a}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} a_0(\mathbf{y}) \\ a_1(\mathbf{y}) \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m(\mathbf{y}) \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

e

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_N \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Com esta notação, a aproximação local  $u_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$  e o funcional  $E_{\mathbf{y}}(u_{\mathbf{y}})$  podem ser reescritos como

$$u_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \tilde{V}\vec{a}(\mathbf{y}) \quad (4.12)$$

e

$$E_{\mathbf{y}}(u_{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2}\widetilde{\mathcal{W}}(\mathbf{y})(\tilde{V}\vec{a}(\mathbf{y}) - \vec{f}) \cdot (\tilde{V}\vec{a}(\mathbf{y}) - \vec{f}). \quad (4.13)$$

O mínimo de  $E_{\mathbf{y}}$  se obtém com a função  $u_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \tilde{V}\hat{a}$  para a qual a variação de  $E_{\mathbf{y}}$  na direção arbitrária  $\hat{u} = \tilde{V}\hat{a}$  é nula, isto é,

$$DE_{\mathbf{y}}(u_{\mathbf{y}})[\hat{u}] = \widetilde{\mathcal{W}}(\mathbf{y})(\tilde{V}\hat{a}(\mathbf{y}) - \vec{f}) \cdot \tilde{V}\hat{a} = 0, \quad \forall \hat{a} \in \mathfrak{R}^n.$$

Operando matricialmente, obtém-se

$$(\tilde{V}^T\widetilde{\mathcal{W}}(\mathbf{y})\tilde{V}\vec{a}(\mathbf{y}) - \tilde{V}^T\widetilde{\mathcal{W}}(\mathbf{y})\vec{f}) \cdot \hat{a} = 0, \quad \forall \hat{a} \in \mathfrak{R}^n, \quad (4.14)$$

condição esta que resulta no seguinte sistema de equações:

$$\tilde{V}^T\widetilde{\mathcal{W}}(\mathbf{y})\tilde{V}\vec{a}(\mathbf{y}) = \tilde{V}^T\widetilde{\mathcal{W}}(\mathbf{y})\vec{f}. \quad (4.15)$$

A solução deste sistema fornece o vetor de parâmetros  $\vec{a}$ . Em uma forma mais compacta, tem-se

$$\tilde{A}(\mathbf{y})\vec{a}(\mathbf{y}) = \vec{F}(\mathbf{y}), \quad (4.16)$$

onde

$$\tilde{A}(\mathbf{y}) = \tilde{V}^T \tilde{W}(\mathbf{y}) \tilde{V}, \quad (4.17)$$

e

$$\vec{F}(\mathbf{y}) = \tilde{V}^T \tilde{W}(\mathbf{y}) \vec{f}. \quad (4.18)$$

A matriz  $\tilde{A}(\mathbf{y})$  deve satisfazer a um conjunto de propriedades mínimas para garantir a inversibilidade. Este assunto é discutido na seção 4.3.2.

## 4.3 Partição da unidade para contornos

### 4.3.1 Definições preliminares

Dado que no Método dos Elementos de Contorno a definição de um espaço de aproximação está restrita à fronteira do problema, torna-se necessária a adaptação do método MQPM bem como os conceitos apresentados por Duarte e Oden [20], para esta situação.

Seja  $\Gamma$  a fronteira do domínio aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2$  ou  $3$ , representada por um conjunto finito de contornos  $\Gamma_i$ , onde  $\Gamma = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i$  e  $\Gamma_j \cap \Gamma_i = \emptyset$  para  $i \neq j$ . Seja também  $\mathfrak{S}_N$  um conjunto de  $N + 1$  bolas  $\omega_\alpha$  centradas em pontos  $\mathbf{x}_\alpha \in \Gamma$ , denominados de nós e pertencentes ao conjunto  $Q_N = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\} = \{\mathbf{x}_\alpha\}_{\alpha=0}^N$ . A definição de bola, adaptada para contornos a partir da definição (4.4), é dada por

$$\omega_\alpha := \{\mathbf{y} \in \Gamma : \rho(\mathbf{y})_{\mathbb{R}^n} \leq h_\alpha; \bar{\Gamma} \subset \bigcup_{\alpha=0}^N \omega_\alpha\} \quad (4.19)$$

onde

$\rho(\mathbf{y})_{\mathbb{R}^n}$  é a distância entre o centro da bola  $\mathbf{x}_\alpha$  e o ponto  $\mathbf{y}$ , de acordo com a métrica  $\rho$  em  $\mathbb{R}^n$ , e

$h_\alpha$  é o raio da bola.

Estas bolas devem sobrepor-se de tal forma que nenhum ponto do contorno  $\Gamma$  deixe de pertencer a alguma delas, o que caracteriza uma cobertura aberta  $\mathfrak{S}_N$  do contorno  $\Gamma$ . Esta cobertura, formalmente definida como

$$\mathfrak{S}_N := \{\omega_\alpha\}_{\alpha=0}^N, \tag{4.20}$$

é mostrada na Figura 4.1. A condição de sobreposição das bolas é fundamental para a construção da *Partição da Unidade*, como é visto a seguir.

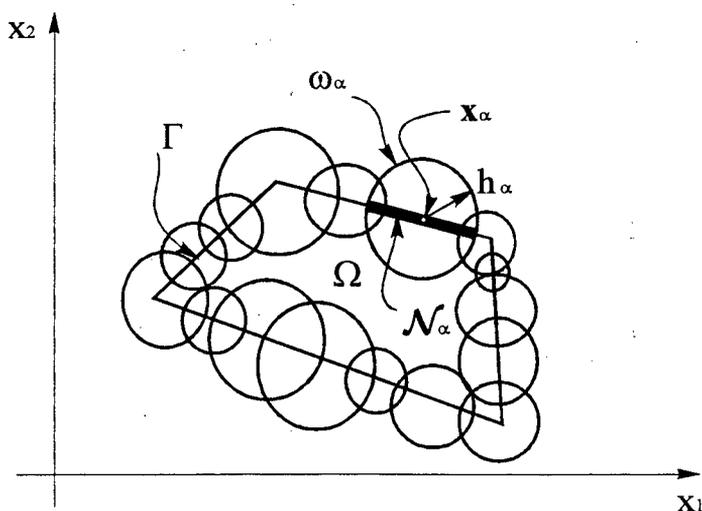


Figura 4.1: Grupo de nuvens cobrindo um contorno.

Com isto posto, denomina-se *nuvem*  $\mathcal{N}_\alpha$  (Figura 4.1) a interseção do contorno, ou parte dele, com a bola  $\omega_\alpha$ , ou seja,

$$\mathcal{N}_\alpha := \Gamma \cap \omega_\alpha. \tag{4.21}$$

Partindo destas definições, o próximo passo consiste em construir um conjunto de funções  $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=0}^N$ , denominada *Partição da Unidade* em relação à cobertura  $\mathfrak{S}_N$ . Este conjunto possui as seguintes propriedades [20]:

$$\varphi_\alpha \in C_0^\infty(\omega_\alpha) \quad 0 \leq \alpha \leq N; \tag{4.22}$$

$$\sum_{\alpha=0}^N \varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (4.23)$$

Uma relaxação da condição de continuidade  $C_0^{\infty}(\omega_{\alpha})$  para  $C_0^s(\omega_{\alpha})$ ,  $s \geq 0$ , é conveniente para a aplicação destas funções nos métodos numéricos, pois permite um aumento do escopo de funções candidatas a função peso.

### 4.3.2 Propriedades da matriz $\tilde{A}$

A determinação dos parâmetros  $\vec{a}(\mathbf{y})$  depende da solução do sistema (4.16), só possível se a matriz  $\tilde{A}$  possuir inversa. Para analisar esta propriedade, define-se a seguinte família de funcionais bilineares contínuos sobre o contorno  $\Gamma$  [20]:

$$(h, g)_{\mathbf{y}} := \sum_{\alpha=0}^N \mathcal{W}_{\alpha}(\mathbf{y}) h(\mathbf{x}_{\alpha}) g(\mathbf{x}_{\alpha}); \quad f, g : \Gamma \rightarrow \mathfrak{R}, \quad (4.24)$$

onde

$h, g \in C^l$ ,  $l \geq 0$  e  $\mathcal{W}_{\alpha}(\mathbf{y})$  são funções peso pertencentes ao conjunto

$$W_{\Gamma} = \{\mathcal{W}_{\alpha} : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R} \quad \forall \mathbf{y} \in \Gamma, \mathcal{W}_{\alpha}(\mathbf{y}) \geq 0, \text{ e } \mathcal{W}_{\alpha} \in C_0^s, s \geq 0\}. \quad (4.25)$$

Substituindo as funções  $h$  e  $g$  pelas componentes  $P_i$  e  $P_j$  da base polinomial  $\mathbf{P}$  definida em (4.6), é possível observar que

$$(P_i, P_j)_{\mathbf{y}} = \sum_{\alpha=0}^N \mathcal{W}_{\alpha}(\mathbf{y}) P_i(\mathbf{x}_{\alpha}) P_j(\mathbf{x}_{\alpha}) = A_{ij}(\mathbf{y}). \quad (4.26)$$

Ou seja, os termos  $A_{ij}(\mathbf{y})$  da matriz  $\tilde{A}(\mathbf{y})$ , equação (4.17), nada mais são do que a forma quadrática definida na equação (4.24).

Com a definição do funcional, bem como com a relação deste com os termos da matriz  $\tilde{A}(\mathbf{y})$  do método MQPM, pode-se definir quais as propriedades matemáticas que a matriz  $\tilde{A}(\mathbf{y})$  deve satisfazer para que exista a sua inversa e, conseqüentemente, ser possível a determinação dos parâmetros  $\vec{a}(\mathbf{y})$  definidos no vetor (4.10). Este conjunto de hipóteses e propriedades, apresentados a seguir, é uma extensão para os métodos de fronteira da proposta apresentados por Duarte e Oden [20] para os métodos de domínio.

*Hipótese 1* - As funções peso  $\mathcal{W}_\alpha(\mathbf{y})$ , definidas em (4.25), e o conjunto de funções polinômicas  $\mathbf{P} = \{P_0(\mathbf{x}), P_1(\mathbf{x}), \dots, P_i(\mathbf{x}), \dots, P_m(\mathbf{x})\}$ , definido em (4.6), são tais que, para qualquer  $\mathbf{x} \in \Gamma \cup \Omega$ ,

$$\sum_{k=0}^m a_k (P_k, P_l)_y \equiv 0 \text{ onde } l = 0, 1, 2, 3, \dots, m \quad (4.27)$$

se e somente se

$$a_k \equiv 0 \text{ para } k = 0, 1, 2, 3, \dots, m. \diamond$$

Esta condição implica que as funções da base  $\mathbf{P} = \{P_0(\mathbf{x}), P_1(\mathbf{x}), \dots, P_m(\mathbf{x})\}$  são linearmente independentes em relação ao funcional definido na equação (4.24).

*Proposição* - Sendo a Hipótese 1 satisfeita, o funcional definido na equação (4.24) é um produto interno no espaço gerado por  $\mathbf{P} = \{P_0(\mathbf{x}), P_1(\mathbf{x}), \dots, P_m(\mathbf{x})\}$ , com a norma definida por

$$(g, g)_y = \sum_{\alpha=0}^N \mathcal{W}_\alpha(\mathbf{y}) [g(\mathbf{x}_\alpha)]^2. \diamond \quad (4.28)$$

A prova desta proposição esta desenvolvida na referência [20].

*Teorema 1* - A condição necessária para que a Hipótese 1 seja satisfeita é que para qualquer  $\mathbf{y} \in \Gamma$  existem índices  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k, k > m$ , tal que

$$\mathbf{y} \subset \bigcap_{j=1}^k \text{supp}(\mathcal{W}_{\alpha_j}). \quad (4.29)$$

Se  $m = 0$ , a condição acima é também suficiente.  $\diamond$

A prova destas duas hipóteses e a do teorema estão na referência [20].

Com estas condições a matriz  $\tilde{A}$  gerada pela equação (4.26) é positiva definida e portanto inversível, permitindo o cálculo dos parâmetros  $\vec{a}(\mathbf{y})$ .

### 4.3.3 Construção da partição da unidade para contornos

Com as propriedades e as considerações definidas nas subseções 4.3.1 e 4.3.2, a *partição da unidade* pode agora ser construída para os contornos. Considerando as equações (4.16) a (4.18), tem-se que

$$\vec{a}(\mathbf{y}) = \tilde{A}^{-1}(\mathbf{y}) \tilde{V}^T \tilde{W}(\mathbf{y}) \vec{f}, \quad (4.30)$$

ou, na forma indicial equivalente,

$$a_i(\mathbf{y}) = \sum_{j=0}^m \sum_{\alpha=0}^N A_{ij}^{-1}(\mathbf{y}) P_j(\mathbf{x}_\alpha) \mathcal{W}_\alpha(\mathbf{y}) f_\alpha. \quad (4.31)$$

Substituindo (4.31) em (4.7), obtém-se

$$u_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \sum_{\alpha=0}^N P_i(\mathbf{x}) A_{ij}^{-1}(\mathbf{y}) P_j(\mathbf{x}_\alpha) \mathcal{W}_\alpha(\mathbf{y}) f_\alpha, \quad (4.32)$$

ou, em forma mais compacta,

$$u_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=0}^N \varphi_\alpha(\mathbf{x}) f_\alpha, \quad (4.33)$$

onde

$$\varphi_\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m P_i(\mathbf{x}) A_{ij}^{-1}(\mathbf{y}) P_j(\mathbf{x}_\alpha) \mathcal{W}_\alpha(\mathbf{y}). \quad (4.34)$$

Observa-se que a função  $u_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$  depende apenas parametricamente do ponto de aproximação local  $\mathbf{y}$ . Finalmente, se o ponto de aproximação  $\mathbf{y}$  se movimenta junto à variável  $\mathbf{x}$ , isto é,  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ , tem-se

$$u(\mathbf{x}) = u_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=0}^N \varphi_\alpha(\mathbf{x}) f_\alpha, \quad (4.35)$$

onde

$$\varphi_\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m P_i(\mathbf{x}) A_{ij}^{-1}(\mathbf{x}) P_j(\mathbf{x}_\alpha) \mathcal{W}_\alpha(\mathbf{x}). \quad (4.36)$$

O conjunto de funções linearmente independentes formado pelas  $N + 1$  funções  $\varphi_\alpha(\mathbf{x})$  determinadas pela equação (4.36) forma uma *partição da unidade*  $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=0}^N$ . As propriedades destas funções, bem como a influência que o grau das polinomiais  $P_i$  exerce na qualidade das mesmas, são analisadas a seguir.

*Lema 1:* Se  $P_i \in C^n$  e  $W_\alpha \in C^s(\Gamma)$ , com  $i = 0, 1, 2, \dots, m$ ,  $\alpha = 0, 1, 2, \dots, N$ ,  $n \geq 0$ ,  $s \geq 0$ , então o conjunto partição da unidade dado por (4.36) tem a propriedade  $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=0}^N \in C^{\min(n,s)}(\Gamma)$ .  $\diamond$

*Teorema 3:* Seja  $1 \in \mathbf{P}$ , isto é,  $\mathbf{P} = \{1, P_1(\mathbf{x}), \dots, P_m(\mathbf{x})\}$ . Então as funções  $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=0}^N$  satisfazem as condições definidas pelas equações (4.22) e (4.23) da partição da unidade. Adicionalmente esta base é  $\mathbf{P}$ -reduzível para o conjunto  $Q_N$ , ou, explicitamente,

$$P_j(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=0}^N P_j(\mathbf{x}_\alpha) \varphi_\alpha(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \text{ onde } j = 0, 1, 2, \dots, m. \diamond \quad (4.37)$$

As provas do lema e dos teoremas se encontram na referência [20].

O *Lema 1* define a regularidade das funções de aproximação em função da regularidade das funções peso,  $W_\alpha$ , e do conjunto polinomial  $\mathbf{P}$ .

O *Teorema 3* prova que as funções de aproximação construídas formam uma partição da unidade e são capazes de representar qualquer função polinomial contida no conjunto  $\mathbf{P}$ .

Não obstante esta última propriedade seja bastante atraente, é possível observar que o uso de funções polinômicas da base  $\mathbf{P}$  com ordem maior do que zero exige uma inversão da matriz  $\tilde{A}$  para a construção das funções  $\varphi_\alpha(\mathbf{x})$  em cada ponto de integração. Isso torna o procedimento computacionalmente oneroso. Por outro lado, Duarte e Oden [20] provam que a taxa de convergência da solução independe da ordem das polinomiais da base  $\mathbf{P}$ . Estas observações levam a adotar a base polinomial mais simples, isto é,

$$\mathbf{P} = \{P_0\} = \{1\}. \quad (4.38)$$

Com essa simplificação, a dependência da variável  $\mathbf{x}$  do produto interno definido na equação (4.26) desaparece. Além disso, a matriz  $\tilde{V}$  da equação (4.8) se reduz apenas à

primeira coluna com todas as suas componentes iguais à unidade. Dessa forma, a matriz  $\tilde{A}$  pode ser escrita como

$$\tilde{A}(\mathbf{x}) = \tilde{V}^T \tilde{W}(\mathbf{y}) \tilde{V} = \sum_{k=0}^N \mathcal{W}_k(\mathbf{x}). \quad (4.39)$$

A sua inversa é facilmente calculada:

$$\tilde{A}^{-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sum_{k=0}^N \mathcal{W}_k(\mathbf{x})}. \quad (4.40)$$

Finalmente, as funções da *partição da unidade* tomam a expressão

$$\varphi_\alpha(\mathbf{x}) = \tilde{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathcal{W}_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{W}_\alpha(\mathbf{x})}{\sum_{k=0}^N \mathcal{W}_k(\mathbf{x})}. \quad (4.41)$$

O conjunto das  $N + 1$  funções linearmente independentes, gerado pela equação (4.41), denominado na literatura *esquema de Shepard*, e.g. Lancaster e Šalkauskas [41], é a *partição da unidade* utilizada neste trabalho.

## 4.4 Enriquecimento das funções de interpolação

Os procedimentos adaptativos consistem em enriquecer a ordem polinomial das funções da *partição da unidade*,  $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=0}^N$ , para melhorar a qualidade da resposta da solução numérica. Dado que Duarte e Oden provam que o enriquecimento da base através do aumento do grau dos polinômios da base  $\mathbf{P}$  é ineficiente, uma excelente alternativa para melhorar as propriedades de aproximação das funções da *partição da unidade* consiste no produto destas por funções de enriquecimento adequadas como polinomiais, harmônicas ou até funções que façam parte da solução do problema de valor no contorno. É exatamente esse procedimento de enriquecimento da base que torna o método das nuvens muito mais flexível e viável do que a maioria dos demais métodos sem malhas para os procedimentos  $p$  e  $hp$  adaptativos.

Essa maneira de enriquecimento  $p$  proposta por Duarte e Oden gera uma família  $\mathcal{F}_N^{k,p}$  de funções a partir da partição da unidade da forma esquematizada a seguir:

$$\mathcal{F}_N^{k,p} = \left\{ \begin{array}{cccc} \varphi_0^k L_{s_0} & \varphi_1^k L_{s_0} & \dots & \varphi_N^k L_{s_0} \\ \varphi_0^k L_{s_1} & \varphi_1^k L_{s_1} & \dots & \varphi_N^k L_{s_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0^k L_{s_M} & \varphi_1^k L_{s_M} & \dots & \varphi_N^k L_{s_M} \end{array} \right\} \quad (4.42)$$

Nesse conjunto,  $N$  é o número de nuvens sobre o contorno, o sobre-índice  $k$  especifica o maior grau das polinomiais da base  $\mathbf{P} = \{P_0, P_1, \dots, P_m\}$  usada para gerar a partição da unidade e, por último,  $p$  é a dimensão do maior espaço polinomial contido no espaço gerado pela família  $\mathcal{F}_N^{k,p}$ . Como exemplo, seja  $L_{s_T}$ ,  $T = 0, 1, 2, \dots, M$ , a família gerada pela combinação de todos os termos do produto tensorial no  $\mathfrak{R}^3$  de polinômios de Legendre:

$$L_{s_T} = L_i(\mathbf{x}_1)L_j(\mathbf{x}_2)L_l(\mathbf{x}_3) \quad 0 \leq i, j, l \leq p, \quad (4.43)$$

onde  $L_m$  é uma polinomial de grau  $m$  em  $\mathfrak{R}$  e  $T = p = i + j + l$ .

É importante salientar que outros conjuntos de funções, além dos polinômios de Legendre, tais como polinomiais harmônicas generalizadas, funções anisotrópicas e funções com o mesmo tipo de singularidade que a do problema a ser analisado, podem ser usados com a finalidade de enriquecer a base de funções para o método.

Para ilustrar a metodologia, o caso bidimensional é bastante adequado:

$$L_{s_2} = L_2(\mathbf{x}_1)L_0(\mathbf{x}_2), L_1(\mathbf{x}_1)L_1(\mathbf{x}_2), L_0(\mathbf{x}_1)L_2(\mathbf{x}_2) \quad (4.44)$$

o qual corresponde à quarta linha do triângulo de Pascal mostrado abaixo.

$$\begin{array}{cccccc} T = p = 0 & & & & & L_0L_0 \\ T = p = 1 & & & L_1L_0 & & L_0L_1 \\ T = p = 2 & & L_2L_0 & & L_1L_1 & & L_0L_2 \\ T = p = 3 & L_3L_0 & & L_1L_2 & & L_2L_1 & & L_0L_3 \end{array} \quad (4.45)$$

Para o caso unidimensional, o triângulo de pascal se degenera em uma coluna, como mostrado a seguir:

$$\begin{array}{l} T = p = 0 \quad L_0 \\ T = p = 1 \quad L_1 \\ T = p = 2 \quad L_2 \\ T = p = 3 \quad L_3, \end{array} \quad (4.46)$$

sendo aplicável em formulações restritas aos contornos retos, como a do presente trabalho.

O mecanismo de enriquecimento da partição da unidade  $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=0}^N$ , ou seja, a família  $\mathcal{F}_N^{k,p}$ , é formalmente definido para o espaço tridimensional como

$$\mathcal{F}_N^{k,p} = \{\{\varphi_\alpha^k(\mathbf{x})\} \cup \{\varphi_\alpha^k(\mathbf{x})L_i(x_1)L_j(x_2)L_k(x_3)\} : 0 \leq \alpha \leq N; 0 \leq i, j, l \leq p, p \geq k\}, \quad (4.47)$$

ou

$$\mathcal{F}_N^{k,p} = \{\{\varphi_\alpha^k(x)\} \cup \{\varphi_\alpha^k(x)Li(x)\} : 0 \leq \alpha \leq N; 0 \leq i \leq p, p \geq k\} \quad (4.48)$$

para o espaço unidimensional.

Esta família possui as propriedades estabelecidas nos teoremas que seguem.

*Teorema 4 - O conjunto  $\mathcal{F}_N^{k,p}$  de funções em um espaço  $\mathbb{R}^n$  possui as seguintes propriedades:*

- i - Se a partição da unidade  $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=0}^N$  é linearmente independente em  $\mathbb{R}^n$  a família  $\mathcal{F}_N^{k,p}$  também o é;*
- ii -  $\dim \mathcal{F}_N^{k,p} = N + N((p+1)^n - (k+1)^n)$  se o produto tensorial de polinômios for usado;*
- iii -  $\dim \mathcal{F}_N^{k,p} = N + N\left(\binom{p+n}{n} - \binom{k+n}{n}\right)$  se conjuntos  $\Pi_k(\mathbb{R}^n)$  e  $\Pi_p(\mathbb{R}^n)$  completos de polinomiais forem usados.  $\diamond$*

*Teorema 5 -  $Ls_T$  pertence ao espaço gerado pela família  $\{\mathcal{F}_N^{k,p}\}$ , para  $0 \leq i, j, l \leq p$ .  $\diamond$*

As provas destes dois últimos teoremas também estão apresentadas na referência [20].

A família  $\mathcal{F}_N^{k,p}$  para o caso das funções de Shepard correspondem a:

$$\mathcal{F}_N^{k=0,p=0} = \{\varphi_\alpha\}_{\alpha=0}^N \quad (4.49)$$

a qual, enriquecida por um conjunto completo  $\Pi_p(\mathbb{R}^n)$  de polinomiais, é representado daqui por diante por:

$$\mathcal{F}_N^p = \{\varphi_\alpha\}_{\alpha=0}^N. \quad (4.50)$$

## 4.5 Escolha da função peso

Na introdução do método dos mínimos quadrados com ponderação móvel, item 4.2, nada é afirmado a respeito da função peso além de que ela pertence ao conjunto das funções de suporte compacto  $C_0^s(\omega_\alpha)$  e de ser ela positiva para qualquer ponto dentro deste suporte. O objetivo deste item é o de estabelecer uma função peso de maneira a satisfazer alguns pré-requisitos, tais como: facilidade na integração analítica (pois são empregados neste trabalho procedimentos analíticos-numéricos na integração dos termos que apresentam singularidades), eficiência na representação dos campos de interesse (pois é necessário que a partição da unidade represente bem deslocamentos de corpo rígido) e, finalizando, um bom condicionamento das matrizes resultantes, o que é vital para a precisão do processo de solução do sistema linear de equações. Assim, a seguir são apresentadas e analisadas algumas propostas de função peso encontradas na bibliografia.

Lancaster e Šalkauskas [41], propõem várias funções, obtidas a partir das seguintes expressões generalizadas:

$$\mathcal{W}_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{s}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha\|^\theta e^{K\rho\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha\|^\beta}} \quad (4.51)$$

e

$$\mathcal{W}_\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{s}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha\|^\theta} \left\{1 - \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha\|}{h_\alpha}\right\}^\beta & \text{se } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha\| < h_\alpha \\ 0 & \text{se } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha\| \geq h_\alpha \end{cases}, \quad (4.52)$$

onde  $s$  e  $K$  são constantes reais positivas,  $\theta$  e  $\beta$  são números inteiros positivos iguais ou maiores que zero e  $h_\alpha$ , o raio da  $\alpha$ -ésima bola.

Duarte e Oden [20], propõem a seguinte função peso:

$$\mathcal{W}_\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sqrt{4/\pi} \left\{1 - \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha\|^2}{h_\alpha^2}\right\}^4 = k \left\{1 - \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha\|^2}{h_\alpha^2}\right\}^4 & \text{se } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha\| < h_\alpha \\ 0 & \text{se } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha\| \geq h_\alpha \end{cases} \quad (4.53)$$

que é um caso particular da equação (4.52), bem como a expressão

$$\mathcal{W}(z_\alpha) = \begin{cases} \frac{C}{h_\alpha^n} \left[1 - \frac{3}{2}z_\alpha^2 + \frac{3}{4}z_\alpha^3\right] & \text{se } 0 \leq z_\alpha \leq 1 \\ \frac{C}{4h_\alpha^n} [2 - z_\alpha]^3 & \text{se } 1 \leq z_\alpha \leq 2 \\ 0 & \text{se } 2 \leq z_\alpha, \end{cases} \quad (4.54)$$

onde

$n$  é a dimensão do problema;

$C$  é uma constante que depende da dimensão do espaço do problema;

$$z_\alpha = \frac{2}{h_\alpha} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha\|_{\mathbb{R}^n}.$$

É interessante salientar que, além das funções propostas, qualquer uma que satisfaça as condições definidas na equação (4.3) é candidata potencial à função peso, podendo-se citar, com interesse especial, a função-tenda usada como base do "PUFEM Method" de Babuška & Melenk [5], e como *Partição da Unidade* dos elementos de contorno lineares.

Como existe uma gama bastante grande de alternativas na escolha da função peso, a seleção desta deve se basear em critérios técnicos, de maneira que se consiga um bom desempenho da formulação com pouco esforço computacional.

O emprego de funções peso singulares, tais como as dadas pelas equações (4.51) e (4.52), é evitado no presente trabalho porque aumentam o grau de singularidade dos integrandos, acarretando problemas de integração mais severos do que os já existentes com as singularidades dos núcleos forte e hiper-singular.

A função peso (4.53), apesar de apresentar propriedades satisfatórias (pertencem ao espaço  $C_0^\infty(\omega_\alpha)$ ), não é utilizada no presente trabalho. Isto acontece porque, ao aparecerem termos irracionais, sua integração analítica (utilizada neste trabalho) se torna difícil. Na referência [48], Nicolazzi *et alii* propõem uma variação da equação (4.53). Esta última, bem como a equação (4.54), apresenta os mesmos problemas de integração analítica daquela que foi derivada.

Uma análise quantitativa de uma série de funções peso (incluídas algumas das citadas acima) é apresentada por de Barcellos *et alii* [17], onde é estudada a influência das funções peso na convergência e no condicionamento das matrizes, o efeito da sobreposição das nuvens e a sensibilidade da classe das funções enriquecedoras na adaptatividade do *hp Clouds Method* aplicado ao problema da viga de Timoshenko. As conclusões deste trabalho são sintetizadas nas seguintes recomendações:

- a taxa de convergência no enriquecimento  $p$  cresce com a redução do grau da função peso;

- o super-recobrimento não melhora a taxa de convergência;
- o super-recobrimento aumenta o custo do cálculo da partição da unidade;
- o número de condição cresce mais lentamente para as funções peso de menor grau no enriquecimento  $p$ .

Estas conclusões, apesar de relativas ao Método dos Elementos Finitos, orientam a escolha da função peso para o Método de Elementos de Contorno de Galerkin, feita a seguir. Assim a função peso adotada no presente trabalho é composta por funções lineares por partes, como mostrado na Figura 4.2, sendo denominada a partir de agora de função-tenda.

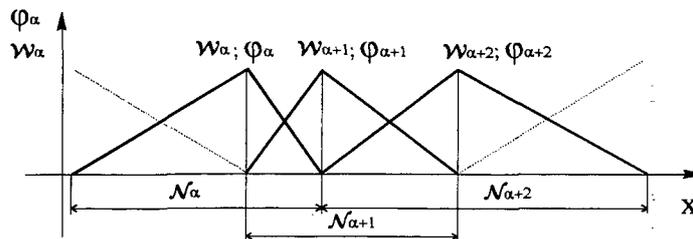


Figura 4.2: Nuvens  $\mathcal{N}_\alpha$ , funções peso e partição da unidade para elementos de contorno.

Esta função, também usada no desenvolvimento do "PUFEM Method" [5], pertence ao conjunto  $C_0^0(\omega_\alpha)$ . Ao ser aplicada no esquema de Shepard, equação (4.41), resulta na própria função partição da unidade, também mostrada na Figura 4.2. Sendo assim, esta escolha não diferencia o presente método do caso clássico de elementos de contorno linear ou do "PUFEM Method".

A grande e importante diferença do presente método em relação ao convencional reside no enriquecimento  $h$  adaptativo, realizado por simples adição de nós  $\mathbf{x}_\alpha$  e suas nuvens associadas e, especialmente, no enriquecimento  $p$  adaptativo com a construção da família  $\mathcal{F}_N^p$  a partir do enriquecimento  $p$  da partição da unidade  $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=0}^N$ . Isso torna os procedimentos  $p$  e  $hp$  adaptativos uma propriedade natural do método dos elementos de contorno.

Para ilustrar o enriquecimento da partição da unidade, é apresentada nas Figuras 4.3 e 4.4, nas quais os vértices da *tenda* estão localizados em  $x = 0$  e  $x = 0.8$ , a família  $\mathcal{F}_N^3$  para a  $N$ -ésima nuvem de um dado contorno reto.

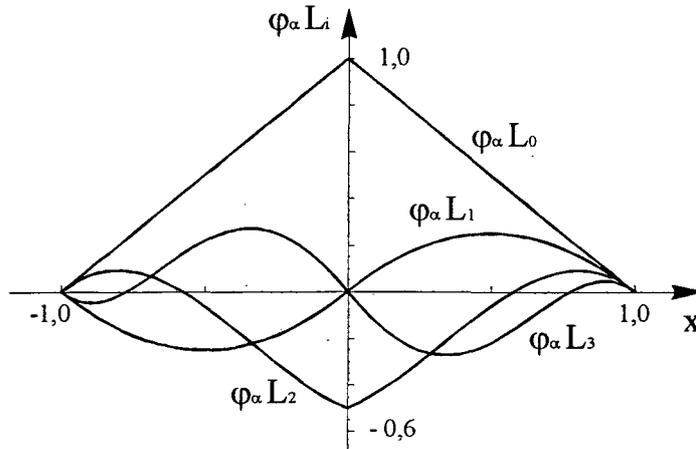


Figura 4.3: *Tenda* simétrica enriquecida até o polinômio de Legendre com ordem 3.

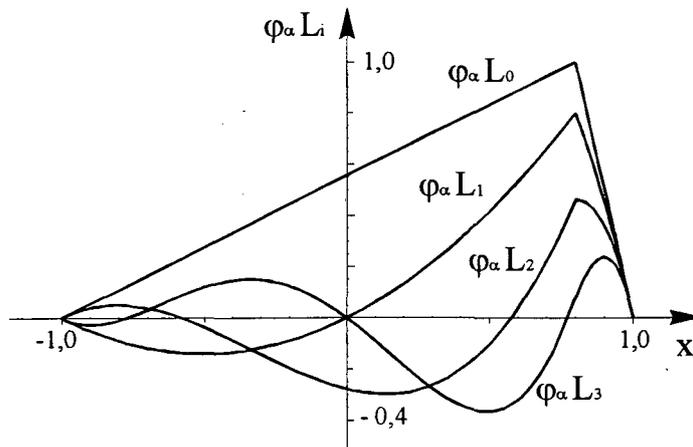


Figura 4.4: *Tenda* não-simétrica enriquecida até o polinômio de Legendre com ordem 3.

Nestas figuras,  $L_i$  representa o polinômio enriquecedor com ordem  $i$ , onde  $0 \leq i \leq 3$ ,  $\varphi_\alpha L_i$  é a partição da unidade referente à  $\alpha$ -ésima nuvem enriquecida por um polinômio de ordem  $i$ , e  $\varphi_\alpha L_0$  é a própria partição da unidade  $\varphi_\alpha$ .

É conveniente salientar que as funções enriquecidas também pertencem ao conjunto  $C_0^0(\omega_\alpha)$ , sendo isto mais facilmente observado na Figura.4.4, como determina o *Lema 1*.

# Capítulo 5

## Indicador de erro – adaptatividade $p$

### 5.1 Introdução

Em qualquer método numérico de solução de equações diferenciais um dos aspectos importantes é o controle dos erros de aproximação. Estes erros são gerados por diversas fontes de naturezas diferentes, dentre as quais podem ser citados:

1. *erro na modelagem matemática; o modelo matemático, sendo apenas uma abstração do sistema real, é fonte de erros que podem ser contornados via modelagem matemática adaptativa;*
2. *erro na representação do contorno, usualmente contornado com o emprego de funções apropriadas para mapeamento de geometrias;*
3. *erros de arredondamento, reduzidos com o uso de alto número (porém finito) de dígitos significativos;*
4. *erro na representação da solução causado pela malha, pois a solução do modelo matemático, que tem infinitos graus de liberdade, é representada por um espaço de menor dimensão;*
5. *erros de integração, que, particularmente, no método dos elementos de contorno são a maior fonte de erro.*

No presente trabalho é feito o controle referente a quarta e a quinta fonte de erros acima citadas. Neste capítulo é tratado o erro relativo a quarta fonte, enquanto que o relativo a

quinta fonte é tratado no Capítulo 6. O erro de mapeamento, no presente trabalho, é nulo, pois a geometria das peças analisadas é limitada apenas aos contornos retos.

É de conhecimento comum que a qualidade da aproximação de uma análise numérica depende fortemente do fator *experiência do analista*. Esta experiência o permite, dentre outras coisas, fazer uma escolha adequada da malha e do tipo de funções de aproximação para cada problema. De maneira a minimizar a necessidade de conhecimento prévio, os procedimentos adaptativos são atraentes, já que o julgamento de qual malha a ser usada para a simulação numérica depende, basicamente, do programa e do estimador de erro. Dado que no método dos elementos de contorno variacional, ou de Galerkin, a convergência da solução é formalmente demonstrada por Polizzoto [55], a idéia da adaptatividade torna-se confiavelmente exequível para os procedimentos  $h$ ,  $p$  e  $hp$ .

A dificuldade principal para a aplicação de procedimentos adaptativos no método dos elementos de contorno é a característica não local dos operadores integrais, o que implica sempre um custo computacional adicional em relação aos métodos com características locais, mais especificamente o método dos elementos finitos. Em contrapartida, esse esforço é recompensado pela melhoria sensível na qualidade das aproximações.

O tipo de indicador de erro, vital em qualquer aplicação de procedimentos adaptativos, depende fundamentalmente das características do espaço onde a solução aproximada está definida, bem como do princípio variacional usado na formulação do método integral. A seguir é feita uma apresentação sucinta de alguns indicadores e estimadores de erro encontrados na literatura para o método dos elementos finitos e de contorno.

Ainsworth *et alii* [1] propõem, para o método dos elementos finitos em problemas elípticos lineares, um estimador de erro baseado na norma de energia do resíduo local da equação diferencial e do salto do fluxo inter-elementos. As vantagens deste procedimento, denominado por vários autores de Método do Pós-Processamento da Solução, está no fato de que o indicador de erros é facilmente implementado na maioria dos programas existentes.

Oden *et alii* [51] fazem a análise de vários indicadores de erros *a posteriori* tais como: Método dos Resíduos em Elemento, onde o resíduo da solução numérica calculado sobre cada

elemento é usado como informação do erro local medido na norma de energia; Método Dual, válido somente para problemas elípticos auto-adjuntos, baseado no princípio da energia potencial mínima e na energia complementar mínima para estabelecer a estimativa de um limite superior para o erro global medido na norma de energia; Método dos Resíduos em Subdomínios, aplicável para problemas elípticos lineares, baseado na norma de energia do resíduo local e do salto do fluxo inter-elementos; Método da Interpolação, baseado na teoria de interpolação dos elementos finitos para gerar estimativas locais de erro; Método do Pós-Processamento da Solução, já comentado anteriormente.

Duarte [19] propõe uma alteração do problema local do Método dos Resíduos em Elemento de maneira que a construção do problema local fique semelhante à construção da matriz de rigidez e do vetor carregamento para um elemento, o que torna o cálculo do indicador de erro um procedimento natural do método.

Alarcon e Reverter [2], em um dos trabalhos pioneiros na adaptatividade  $p$  em elementos de contorno, propõem dois indicadores de erro baseados no resíduo da equação integral fortemente singular para os elementos de contorno por colocação. Segundo os autores, o primeiro indicador de erro é semelhante à proposta de Peano, para elementos finitos, e o segundo, baseado na norma  $L_2$  do erro. Segundo a análise, os dois indicadores de erro apresentam bons resultados, porém o segundo é mais robusto.

Parreira [52] propõe um indicador de erros baseado no resíduo da equação integral do método da colocação e medido na norma  $L_2$ . No seu trabalho, desenvolvido para o problema de elasticidade, este indicador é aplicado na adaptatividade  $p$  tanto para os métodos da colocação como para Galerkin não-simétrico.

Postell e Stephan [56], propõem um estimador de erro *a posteriori* para a adaptatividade  $h$ ,  $p$  e  $hp$  na formulação indireta dos elementos de contorno de Galerkin. Esse estimador de erro é obtido a partir do resíduo da equação integral fortemente singular e da hipersingular. A abordagem, desenvolvida para contornos abertos, mostra uma razoável concordância com os estimadores de erro *a priori*.

Karafiat, Oden e Geng [37] propõem para a formulação variacional dos elementos de contorno um estimador de erro baseado na norma  $L_2$  do resíduo da equação integral fortemente singular e da hipersingular. Esse desenvolvimento é feito para o problema de valor no contorno da equação de Helmholtz em uma análise  $hp$  adaptativa. Segundo os autores, o estimador, que é obtido a partir da soma dos indicadores de erro de cada elemento, apresenta bons resultados quando comparado com os estimadores teóricos dessa classe de problemas.

Cerrolaza [14] propõe, para o método da colocação aplicado no problema de elasticidade plana, um indicador baseado no resíduo da equação diferencial com o erro medido na norma de energia. As medidas do erro são feitas nas regiões de contorno de Dirichlet e de Neumann de forma independente.

Castensen *et alii* [13] propõem, para a formulação indireta dos elementos de contorno, um estimador de erros *a posteriori* baseado na derivada tangencial do resíduo das equações integrais e medido na norma  $L_2$ . Naquele trabalho, voltado para a adaptatividade  $h$  em problemas potenciais, também é apresentado todo o formalismo matemático do cálculo de erro para a formulação de Galerkin.

Yuuki *et alii* [77] classificam os indicadores de erros em dois grupos: os baseados em resíduos e os não baseados em resíduos. Assim eles propõem um indicador de erro baseado na diferença das soluções do problema obtidas a partir das formulações singular e regular dos elementos de contorno por colocação. Em tempo, esclarece-se que na formulação regular o ponto fonte é localizado fora do domínio de definição do problema. A metodologia é aplicada na adaptatividade  $r$  do problema de elasticidade linear.

Wendland e Yu [73] desenvolvem um estimador de erros para o Método de Elementos de Contorno de Galerkin, bem como a conceituação matemática a ele pertinente, baseado no resíduo da equação integral e no erro medido nas normas de Sobolev.

Neste trabalho, usa-se um indicador de erros baseado no resíduo das equações integrais, como é feito pela a maioria dos autores acima citados, pois os métodos que não usam esta abordagem, como por exemplo o proposto por Yuuki [77], têm os seus resultados influenciados pela posição do ponto fonte na formulação regular. Adicionalmente é evitado o uso das

normas de Sobolev pois, para os espaços  $H^s$ , com  $s \geq 1$ , o cálculo destas implica o uso de equações integrais com singularidade maior do que as existentes nas formulações fortemente singular e hipersingular. Dentre esses procedimentos para determinar a sensibilidade do erro aos graus de liberdade incluídos em uma metodologia adaptativa  $p$ , opta-se pela adaptação do Método de Resíduos em Elementos [19]. Segundo Oden [18], [51], [58] e Duarte [19], este procedimento, que consiste em projetar o resíduo da solução numérica no subespaço gerado pelas funções enriquecedoras de cada elemento, é uma aproximação local da função erro em cada elemento.

Os resultados apresentados por Duarte [19] indicam que o Método dos Resíduos por Elementos é mais robusto quando as ordens das funções adicionais incluem dois graus acima das já utilizadas, no caso do enriquecimento ser polinomial. Apesar desta última informação ter sido obtida pelos elementos finitos, a mesma é aplicada no presente trabalho.

Como o conceito de *elemento* não é usado no presente trabalho, o Método de Resíduos em Elementos é rebatizado de *Método de Resíduos em Nuvens*, já que o conceito de nuvem é aqui aplicado.

## 5.2 Indicador de erro

No desenvolvimento do método dos elementos de contorno variacional são empregadas a formulação fortemente singular e a hipersingular. Assim, os resíduos da formulação fortemente singular e da hipersingular para a  $i$ -ésima nuvem são, respectivamente,

$$R_{\Gamma_D}^i = \varphi_j(\mathbf{d})T_j - \int_{\Gamma} G(\mathbf{d}, \mathbf{x})\varphi_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x})\frac{\partial T_k}{\partial n} + \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})}\varphi_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x})T_k, \quad (5.1)$$

e

$$\begin{aligned} R_{\Gamma_N}^i &= \varphi_j(\mathbf{d})\frac{\partial T_j}{\partial n} - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d})}\varphi_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x})\frac{\partial T_k}{\partial n} \\ &\quad + \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d})\partial n(\mathbf{x})}\varphi_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x})T_k. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Com o enriquecimento da base da  $i$ -ésima nuvem por duas funções  $\psi_m \in \mathcal{F}_N^p$ ,  $m = 1, 2$ ,

os resíduos dados pelas equações (5.1) e (5.2) mudam para

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\Gamma_D}^i &= \varphi_j(\mathbf{d})T_j + \psi_m(\mathbf{d})a_m - \int_{\Gamma} G(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \left[ \varphi_k(\mathbf{x}) \frac{\partial T_k}{\partial n} + \psi_m(\mathbf{x})b_m \right] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &+ \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} [\varphi_k(\mathbf{x})T_k + \psi_m(\mathbf{x})a_m] d\Gamma(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.3)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\Gamma_N}^i &= \varphi_j(\mathbf{d}) \frac{\partial T_j}{\partial n} + \psi_m(\mathbf{d})b_m - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d})} \left[ \varphi_k(\mathbf{x}) \frac{\partial T_k}{\partial n} + \psi_m(\mathbf{d})b_m \right] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &+ \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d}) \partial n(\mathbf{x})} [\varphi_k(\mathbf{x})T_k d + \psi_m(\mathbf{d})a_m] \Gamma(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde  $a_m$  e  $b_m$  são coeficientes associados ao tipo de condição de contorno da nuvem, porém sem sentido físico.

Requer-se agora que estes resíduos sejam ortogonais ao subespaço  $\{\psi_1, \psi_2\} \subset \mathcal{F}_N^p$ , ou seja,

$$\langle \tilde{R}_{\Gamma_c}^i, \psi_m(\mathbf{d}) \rangle_H = \int_{\Gamma} \tilde{R}_{\Gamma_c}^i \psi_m(\mathbf{d}) d\Gamma(\mathbf{d}) = 0 \quad \forall \psi_m(\mathbf{d}) \in \{\psi_1, \psi_2\}, \quad (5.5)$$

onde  $m = 1, 2$  e  $c = \mathcal{D}$  ou  $\mathcal{N}$  para os resíduos (5.3) e (5.4), respectivamente. Deste procedimento de ortogonalização resulta um sistema de equações, que é escrito como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^i \\ (\mathbf{B}^i)^T & \mathbf{D}^i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{c}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{f}} \\ \hat{\mathbf{g}}^i \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

As matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}^i$ ,  $\mathbf{D}^i$  e os vetores  $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{c}}$  e  $\hat{\mathbf{g}}^i$  têm dimensões  $n \times n$ ,  $n \times 2$ ,  $2 \times 2$ ,  $n$ ,  $2$  e  $2$ , respectivamente, e  $n$  é o número de graus de liberdade do enriquecimento anterior.

Como um estimador de erros deve ser de baixo custo computacional, considera-se que o enriquecimento da partição da unidade para a  $i$ -ésima nuvem altera significativamente a resposta do problema apenas numa região restrita a esta nuvem. Com esta hipótese o sistema a ser resolvido é

$$\mathbf{D}^i \hat{\mathbf{c}} \cong \hat{\mathbf{g}}^i - (\mathbf{B}^i)^T \mathbf{x}, \quad (5.7)$$

sendo  $\mathbf{x}$  o vetor solução do problema no passo anterior ao enriquecimento.

A partir da resposta da equação (5.7), estabelece-se um primeiro e simples critério de indicação de erro como sendo

$$\lambda^i = D_{jk}^i c_j c_k, \quad (5.8)$$

o qual, se for superior a um valor especificado, indica a necessidade da nuvem ser enriquecida.

Um critério simplificado adicional, dado por

$$\lambda_1^i = D_{11}^i (c_1^i)^2, \quad (5.9)$$

e

$$\lambda_2^i = D_{22}^i (c_2^i)^2, \quad (5.10)$$

onde  $i$  não soma, quando acoplado ao primeiro, equação (5.8), permite determinar a importância relativa de cada polinomial enriquecedora na solução aproximada.

Esses indicadores de erro representam uma medida local da variação da solução aproximada causada pelo enriquecimento da base local por  $\psi_m$  na norma  $L_2$ , que na linguagem simbólica é definida pelo seguinte produto dual:

$$\lambda = \|\Delta \mathbf{u}\|_{H=L_2}^2 = \langle \tilde{R}_{\Gamma_c}^i(\psi_1 + \psi_2), \psi_1 + \psi_2 \rangle_{H=L_2}, \{\psi_1, \psi_2\} \subset \mathcal{F}_N^p \subset L_2.$$

Esses indicadores de erros são, na sua essência, idênticos ao desenvolvido por Postell e Stephan [56] para a adaptatividade no método de elementos de contorno de Galerkin. No Capítulo 7 é avaliada a performance do indicador proposto.

### 5.3 Comentários adicionais.

A convergência dos elementos de contorno só é garantida para a formulação variacional, que corresponde à versão Simétrica do presente desenvolvimento. Porém a aplicação do indicador de erros desenvolvido para as versões Forte e Hiper é válida para observar o comportamento deste em todas as versões do método de Galerkin, visto que as duas outras versões também tem um campo de aplicação promissor, especialmente a versão Forte, em função da sua simplicidade de implementação e integração dos seus núcleos, e da Hiper, em classes especiais de problemas, tal como na mecânica da fratura.

Para finalizar, é interessante frisar que os custos computacionais associados aos indicadores de erro para o método dos elementos de contorno não tem paralelos com os dos elementos finitos, pois este último têm características locais, contrariamente aos elementos de contorno que não as tem. Assim, qualquer comparação entre os custos computacionais dos estimadores de erros é sempre desvantajosa para os elementos de contorno se o número de graus de liberdade para os dois métodos não for considerado.

# Capítulo 6

## Procedimentos de integração e regularização

### 6.1 Introdução

Na abordagem singular do método dos elementos de contorno as integrais são impróprias, o que implica procedimentos especiais de integração. Uma gama bastante extensa de procedimentos para a regularização e transformação dos integrandos destas equações se encontra nos trabalhos de vários autores. Por exemplo: Kane [36] propõe o uso de soluções simples para regularização das integrais singulares; Sladek *et alii* [63] e [67] fazem uma análise crítica de um conjunto de métodos encontrados na bibliografia para integrações de núcleos fortemente e hipersingulares; Ghosh *et alii* [27], bem como Frangi *et alii* [24] propõem que os núcleos sejam escritos como derivadas tangenciais do contorno de maneira a permitir a integração por partes, o que reduz as singularidades dos integrandos; Telles [68] propõe mudanças de coordenadas que deslocam a posição dos pontos de integração para perto da singularidade permitindo que o procedimento de integração capte os fortes gradientes dos integrandos de integrais quase singulares e fracamente singulares.

Neste trabalho, o procedimento de integração dos termos que apresentam qualquer singularidade é semi-analítico, enquanto que nos regulares se usa apenas a integração numérica. A integração analítica é usada em função da qualidade da resposta necessária para os procedimentos adaptativos, visto que uma das principais fontes de erro do método dos elementos de contorno é a integração dos termos singulares.

## 6.2 Integração e regularização

O formulação variacional do método dos elementos de contorno implica o aumento da ordem de integração dos núcleos em relação ao método de colocação, já que as integrais além de serem feitas na região campo também devem ser feitas na região fonte. Este acréscimo está relacionado com a dimensão do domínio: nos domínios bi e tridimensionais são necessárias uma e duas integrações adicionais, respectivamente.

Em domínios bidimensionais as integrais de linha dos elementos de contorno de Galerkin são expressas genericamente por:

$$I = \int_{\Gamma_\eta} \int_{\Gamma_\xi} \Phi(\xi, \eta) \phi(\xi) \psi(\eta) d\Gamma_\xi d\Gamma_\eta \quad (6.1)$$

onde

$\xi$  e  $\eta$  identificam a posição dos pontos de integração nas regiões de contorno  $\Gamma_\xi$  e  $\Gamma_\eta$  respectivamente;

$\Phi(\xi, \eta)$  é o núcleo, podendo ser fracamente singular, fortemente singular ou hipersingular, e

$\phi(\xi)$  e  $\psi(\eta)$  são polinômios em  $\xi$  e  $\eta$  respectivamente.

A equação (6.1) pode ser reescrita como:

$$I = \int_{\Gamma_\eta} \Theta(\eta) \psi(\eta) d\Gamma_\eta, \quad (6.2)$$

sendo

$$\Theta(\eta) = \int_{\Gamma_\xi} \Phi(\xi, \eta) \phi(\xi) d\Gamma_\xi. \quad (6.3)$$

Esta separação tem como objetivo isolar a singularidade presente no termo  $\Phi(\xi, \eta)$ , que é integrado analiticamente mediante (6.3). Uma vez obtido o termo  $\Theta(\eta)$ , o integrando de (6.2) é regular, sendo a integral calculada pelo método padrão de Gauss.

$$I = \int_{\Gamma_\eta} \Theta(\eta) \psi(\eta) d\Gamma_\eta = \sum_{i=1}^k \Theta(\eta_i) \psi(\eta_i) W_i \quad (6.4)$$

onde

$\eta_i$  é a  $i$ -ésima coordenada dos pontos de integração;

$\Theta(\eta_i)$  e  $\psi(\eta_i)$  são os valores do integrando em  $\eta_i$ ;

$W_i$  é o peso associado à coordenada  $\eta_i$ , e

$k$  é o número total de pontos de integração.

Procedimentos de regularizações e transformações de coordenadas para a integração da equação (6.3) com núcleos fortemente e hipersingulares são encontradas, e.g., nas referências [36], [63], [67], [27], [68], [24]. Para os núcleos fracamente singulares, particularmente o logarítmico, a integração de Gauss com pesos especiais é amplamente utilizada e dispensa comentários adicionais.

No presente trabalho são empregados dois procedimentos para a integração da equação (6.3), quando na presença de núcleos singulares. Para os núcleos com singularidade baixa adota-se a integração analítica enquanto que para o núcleo hipersingular adota-se a solução analítica acoplada com o método apresentado por Ghosh [27].

A escolha da abordagem de Ghosh no presente trabalho é devida ao fato desta não utilizar qualquer aproximação e permitir uma fácil implementação na estrutura computacional. O ponto de partida deste procedimento é a utilização da integração por partes, ou seja:

$$I = \int u \, dv = u \, v - \int v \, du. \quad (6.5)$$

Com modificações adequadas nos núcleos fortemente e hipersingulares das equações integrais, o conceito de integração por partes pode ser empregado para reduzir a singularidade destes. O problema de elasticidade tratado com este enfoque está apresentado nas referências [27] e [24]. A idéia chave é determinar novos núcleos escritos em forma de derivadas tangenciais ao contorno e não de derivadas normais a este, como freqüentemente usado nas equações dos elementos de contorno convencionais.

Nos casos em que os núcleos são regulares, as integrações duplas das equações (3.16) e (3.17) são efetuadas numericamente pelo processo padrão de Gauss – Legendre.

### 6.2.1 Método RISP e procedimento adaptativo de integração

No Método dos Elementos de Contorno um dos fatores mais importantes sobre o tempo de cálculo é o processo de integração dos termos das matrizes, que pode ser significativamente reduzido com o emprego do método RISP, proposto por Kane [36]. Esse procedimento, também aplicável aos métodos de Galerkin, consiste em fazer inicialmente a integração em relação aos pontos fonte mantendo o ponto campo fixo. Isso equivale a montar as matrizes em colunas em vez de linhas, procedimento este contrário ao tradicionalmente feito nos programas apresentados pela maioria dos autores, por exemplo Brebbia [11]. A vantagem reside no fato que os jacobianos, valores da função de interpolação e derivadas direcionais nos pontos fonte, se mantêm fixos durante o procedimento de integração dos termos de uma coluna da matriz, evitando o cálculo repetitivo daqueles.

Os integrandos das equações para o problema de condução de calor, aqui analisado, têm núcleos do tipo  $\log(r)$ ,  $1/r$  e  $1/r^2$ . Estes núcleos variam suavemente se o ponto fonte e o ponto campo são distantes entre si, permitindo o uso de pequena quantidade de pontos de integração. Em contrapartida, estes integrandos apresentam altos gradientes se a distância entre fonte e campo é pequena, obrigando o uso de um número grande de pontos de integração. Assim, com o objetivo de melhorar a integração dos termos regulares das matrizes, bem como para facilitar o acoplamento com a metodologia RISP, é empregado o procedimento de integração hierárquico proposto por Nicolet *et alii* [49]. Nesse procedimento são adicionados novos pontos aos já anteriormente existentes, sendo que as coordenadas destes são definidas procurando integrar exatamente uma polinomial com a ordem mais alta possível [49]. Por exemplo, se o número de pontos de partida é igual a um, o próximo será três, em seguida sete, quinze, trinta e um e assim subsequentemente. A distribuição de pontos de integração para essa regra é mostrada na Figura 6.1.

Esse modelo hierárquico, denominado *Patterson Method* [49], integra exatamente com  $n$  pontos uma polinomial com grau  $k$ , dado por:

$$k = (3n - 1)/2. \quad (6.6)$$

O modelo de Gauss otimizado integra com os mesmos  $n$  pontos uma polinomial com grau

$$k = 2n - 1. \tag{6.7}$$

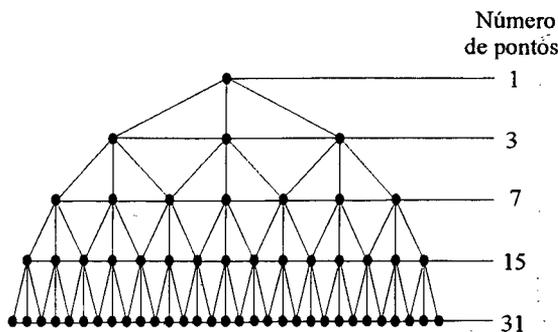


Figura 6.1: Variação do número de pontos para cada passo da integração adaptativa.

Apesar do método de integração de Patterson não ser tão eficiente quanto a regra de Gauss otimizada, o mesmo é empregado neste trabalho em função de suas propriedades hierárquicas. As coordenadas dos pontos de integração do passo anterior são usadas nos passos seguintes, reduzindo o tempo gasto no resgate das propriedades geométricas e valores das funções associadas a esses pontos da integração.

No presente trabalho o limite superior do número de pontos de integração é trinta e um (31), o que corresponde à integração exata de um polinômio de grau  $k = 46$  (comparativamente, Gauss otimizado integra exatamente uma polinomial de grau  $k = 61$ ).

Vale a pena salientar que os pesos associados a cada ponto de integração mudam com o número de pontos, desvantagem impossível de ser contornada, porém comum a todos os procedimentos de integração. Também é interessante frisar que os pesos e as coordenadas dos pontos de integração do método de Gauss e o modelo hierárquico para um e três pontos de integração são idênticos.

O processo de integração hierárquica é iniciado com a integração do termo da matriz com apenas um (01) ponto de integração seguido com a de três (03), sendo a parada do processo definida quando o resultado entre duas integrações subsequentes for menor que uma dada

tolerância ( $10^{-6}$  neste trabalho), ou seja

$$|A_{ij}^r - A_{ij}^{r+1}| < tol, \quad (6.8)$$

onde  $A_{ij}^r$  e  $A_{ij}^{r+1}$  são as componentes  $A_{ij}$  integradas nos passos  $r$  e  $r + 1$ , respectivamente.

### 6.2.2 Integrais fracamente singulares

A integração numérica dos núcleos logarítmicos no método de Galerkin é tratada da mesma forma como no método da colocação, com a diferença de que, em vez de pontos de colocação singulares, existe uma região singular no contorno  $\Gamma$  associada aos pontos compartilhados pelas nuvens que estão sendo integradas.

O emprego da integração numérica do núcleo logarítmico com pesos especiais de Gauss, equação (6.3), demanda um tempo considerável no cálculo ou resgate dos jacobianos e dos valores das funções de interpolação nos pontos de integração. Neste trabalho, com o objetivo de minimizar esta perda de tempo, integra-se analiticamente este núcleo em relação à variável fonte como primeiro passo da integração dupla, sendo que a função resultante integrada com Gauss padrão (equação (6.4)) em relação à variável campo encerra o procedimento de integração dupla.

### 6.2.3 Integrais fortemente singulares

No presente desenvolvimento a forma dos contornos está limitada a retas, o que permite simplificar a integração dos núcleos fortemente singulares. Nessa situação, as integrações dos termos fortemente singulares das equações (3.16) e (3.17) se reduzem a uma expressão do tipo:

$$\int_{\Gamma} \varphi_j(\mathbf{d}) \varphi_k(\mathbf{d}) d\Gamma(\mathbf{d}). \quad (6.9)$$

Essa simplificação é resultante da ortogonalidade entre o vetor normal e o gradiente da solução fundamental para os contornos retos, ou seja:

$$\frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} = \nabla G(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0 \quad (6.10)$$

e

$$\frac{\partial G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d})} = \nabla G(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{d}) = 0. \quad (6.11)$$

Os problemas com a integração dos núcleos fortemente singulares se manifestam apenas nos pontos onde as extremidades de dois contornos contíguos se tocam. Nessa situação, optou-se pela integração analítica de uma das integrais, sendo a segunda integral obtida por Gauss convencional, não sendo adotada qualquer transformação ou processo de regularização para os núcleos.

### 6.2.4 Integral hipersingular

De acordo com a proposta de Ghosh, comentada no início deste capítulo, a integral hipersingular da equação (3.17), dada por

$$\int_{\Gamma_d} \int_{\Gamma_x} \frac{\partial^2 G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d}) \partial n(\mathbf{x})} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{d}) d\Gamma(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{d}), \quad (6.12)$$

tem o seu núcleo modificado para ser integrada. A chave do procedimento está em escolher a função

$$H(\mathbf{d}, \mathbf{x}) = -G(\mathbf{d}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln \|r\| \quad (6.13)$$

que satisfaz à condição

$$\frac{\partial^2 G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d}) \partial n(\mathbf{x})} = \frac{\partial^2 H(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{d}) \partial \Gamma(\mathbf{x})}, \quad (6.14)$$

como novo núcleo da integral hipersingular, equação (6.12).

Sendo assim, a equação (6.12) é reescrita como

$$\int_{\Gamma_d} \int_{\Gamma_x} \frac{\partial^2 G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d}) \partial n(\mathbf{x})} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{d}) d\Gamma(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{d}) = \int_{\Gamma_d} \varphi_k(\mathbf{d}) \left\{ \int_{\Gamma_x} \frac{\partial^2 H(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{d}) \partial \Gamma(\mathbf{x})} \varphi_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right\} d\Gamma(\mathbf{d}) \quad (6.15)$$

onde

$\frac{\partial(\cdot)}{\partial \Gamma}$  é o operador derivada tangencial;

$\Gamma_d$  é a região de integração da função fonte;

$\Gamma_x$  é a região de integração da função campo.

Após a definição deste novo núcleo, integra-se por partes a expressão (6.15), com o objetivo de reduzir a singularidade desta. Porém, um desenvolvimento adicional é necessário para o bom entendimento deste procedimento.

Seja o domínio  $\Omega$ , mostrado na Figura 6.2, limitado por um contorno  $\Gamma$ , onde  $\Gamma(\mathbf{d}) \equiv \Gamma_d$  e  $\Gamma(\mathbf{x}) \equiv \Gamma_x$  são as regiões fonte e campo disjuntas, o que caracteriza uma situação de núcleos regulares na qual a integração em  $\Gamma(\mathbf{x})$  da equação (6.15) resulta em

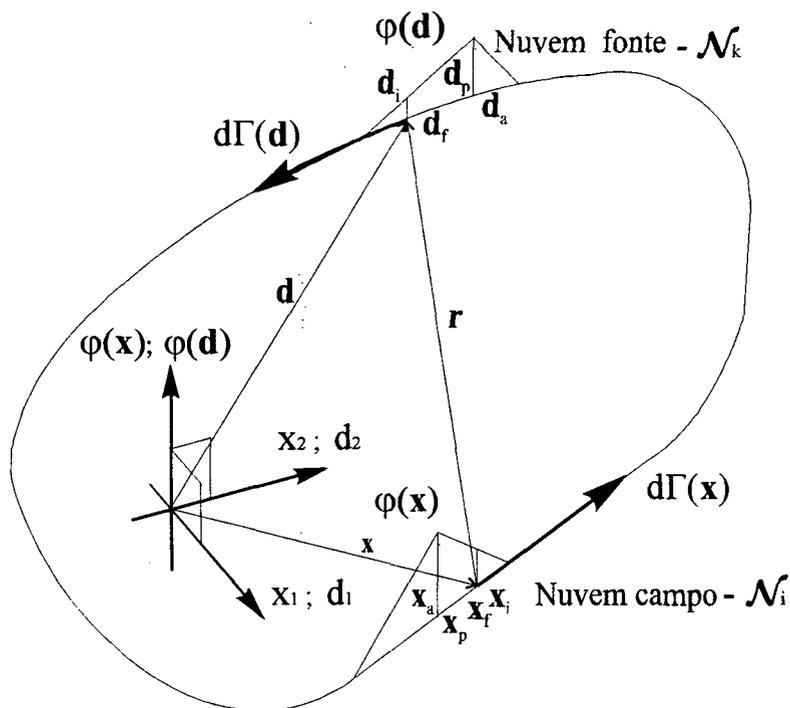


Figura 6.2: Contorno com caminho de integração.

$$\begin{aligned}
 I(\mathbf{d}) &= \int_{\Gamma_x} \frac{\partial^2 H(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{d}) \partial \Gamma(\mathbf{x})} \varphi_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \frac{\partial H(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{d})} \varphi_i(\mathbf{x}) \Big|_{x_i}^{x_f} \\
 &\quad - \int_{\Gamma_x} \frac{\partial H(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{d})} \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}), \tag{6.16}
 \end{aligned}$$

onde  $x_i$  e  $x_f$  denotam o início e o final do contorno fechado  $\Gamma(\mathbf{x})$ . Observa-se nesta equação, que o núcleo  $\frac{\partial H(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{d})}$  apresenta singularidade menor do que  $\frac{\partial^2 H(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{d}) \partial \Gamma(\mathbf{x})}$ .

Com a substituição dos limites de integração, a equação (6.16) é reescrita como

$$I(\mathbf{d}) = \frac{\partial H(\mathbf{d}, \mathbf{x}_a)}{\partial \Gamma(\mathbf{d})} \varphi_i(\mathbf{x}_a) - \frac{\partial H(\mathbf{d}, \mathbf{x}_p)}{\partial \Gamma(\mathbf{d})} \varphi_i(\mathbf{x}_p) - \int_{\Gamma_x} \frac{\partial H(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{d})} \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}). \quad (6.17)$$

Substituindo a expressão (6.17) na equação (6.15) e integrando por partes sucessivas vezes obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_d} \int_{\Gamma_x} \frac{\partial^2 G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d}) \partial n(\mathbf{x})} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{d}) d\Gamma(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{d}) &= \varphi_i(\mathbf{x}_a) \varphi_k(\mathbf{d}_a) H(\mathbf{d}_a, \mathbf{x}_a) \\ &- \varphi_i(\mathbf{x}_a) \varphi_k(\mathbf{d}_p) H(\mathbf{d}_p, \mathbf{x}_a) - \varphi_i(\mathbf{x}_a) \int_{\Gamma_d} \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{d})}{\partial \Gamma(\mathbf{d})}(\mathbf{d}) H(\mathbf{d}, \mathbf{x}_a) d\Gamma(\mathbf{d}) \\ &- \varphi_i(\mathbf{x}_p) \varphi_k(\mathbf{d}_a) H(\mathbf{d}_a, \mathbf{x}_p) + \varphi_i(\mathbf{x}_p) \varphi_k(\mathbf{d}_p) H(\mathbf{d}_p, \mathbf{x}_p) \\ &+ \varphi_i(\mathbf{x}_p) \int_{\Gamma_d} \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{d})}{\partial \Gamma(\mathbf{d})}(\mathbf{d}) H(\mathbf{d}, \mathbf{x}_p) d\Gamma(\mathbf{d}) - \varphi_k(\mathbf{d}_a) \int_{\Gamma_x} \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{x})} H(\mathbf{d}_a, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &+ \varphi_k(\mathbf{d}_p) \int_{\Gamma_x} \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{x})} H(\mathbf{d}_p, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &- \int_{\Gamma_d} \int_{\Gamma_x} \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{d})}{\partial \Gamma(\mathbf{d})} H(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{d}), \end{aligned} \quad (6.18)$$

onde  $\mathbf{d}_a$ ,  $\mathbf{x}_a$ ,  $\mathbf{d}_p$  e  $\mathbf{x}_p$  são as coordenadas dos pontos onde  $\varphi_k(\mathbf{d}) = \varphi_i(\mathbf{x}) = 1$ .

### 6.3 Integração hipersingular – considerações

No desenvolvimento de integração do termo hipersingular, anteriormente apresentado, considera-se que as nuvens não possuem pontos em comum, o que implica integração regular. Porém, em determinadas situações há sobreposição de pelo menos um ponto das duas nuvens, o que caracteriza um integração singular. A sobreposição ocorre quando:

- as nuvens são coincidentes;
- as nuvens são vizinhas;
- nuvens com apenas um ponto em comum;
- nuvens com um vértice do contorno em comum.

A análise do primeiro caso é equivalente à análise do segundo e do terceiro caso. Assim, na Figura 6.3 são mostradas as nuvens campo e fonte coincidentes e as funções  $\varphi_i$  da *partição da unidade*.

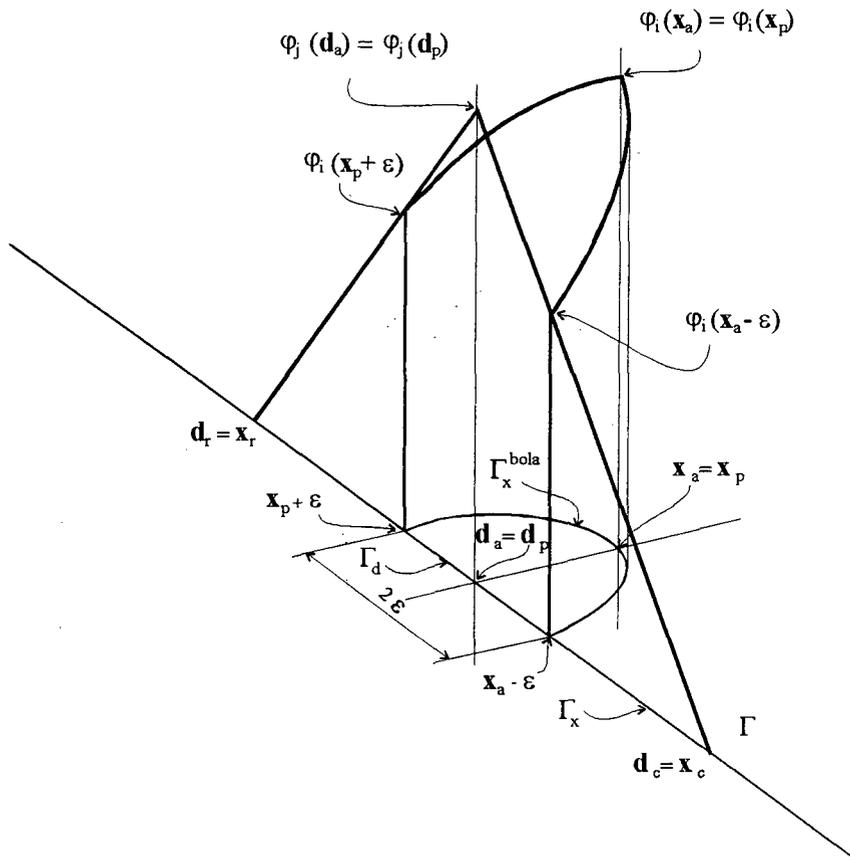


Figura 6.3: Nuvens  $\mathcal{N}_\alpha$  coincidentes e funções associadas da partição da unidade.

Como no método de Galerkin a integral ao longo do contorno é feita em relação a  $\Gamma(\mathbf{d})$  e a  $\Gamma(\mathbf{x})$ , todos os pontos do contorno são singulares, ao contrário do método da colocação no qual somente os pontos de colocação são singulares. Na equação (6.18) observa-se que existem integrais com núcleos fracamente singulares bem como termos logarítmicos da distância entre dois pontos fixos. Estes últimos podem possuir valor ilimitado em determinadas situações, merecendo atenção especial. De maneira a avaliar a contribuição destes termos, considera-se o caso de nuvens coincidentes mostrado na Figura 6.3. O contorno do domínio é alterado com a adição de uma bola com raio  $\epsilon$  centrada exatamente onde os valores são

ilimitadas. Obviamente, como foi explanado anteriormente, todos os pontos do contorno são singulares no método de Galerkin. Assim, a análise das integrais fracamente singulares é feita considerando este fato. Com a adição desta bola, a equação (6.18) considerando esta geometria é escrita como

$$\mathfrak{J}_\Gamma = \int_{\Gamma_d} \left[ \int_{\Gamma_x - \Gamma_x^{bola}} \frac{\partial^2 G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d}) \partial n(\mathbf{x})} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{d}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_x^{bola}} \frac{\partial^2 G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d}) \partial n(\mathbf{x})} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{d}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right] d\Gamma(\mathbf{d}), \quad (6.19)$$

ou

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_\Gamma = & \varphi_i(\mathbf{x}_a - \varepsilon) [\varphi_k(\mathbf{d}_a) H(\mathbf{d}_a, \mathbf{x}_a - \varepsilon) - \varphi_k(\mathbf{d}_p) H(\mathbf{d}_a, \mathbf{x}_a - \varepsilon) \\ & - \int_{\Gamma_d} \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{d})}{\partial \Gamma(\mathbf{d})}(\mathbf{d}) H(\mathbf{d}, \mathbf{x}_a - \varepsilon) d\Gamma(\mathbf{d})] \\ & + \varphi_i(\mathbf{x}_a) [\varphi_k(\mathbf{d}_a) H(\mathbf{d}_a, \mathbf{x}_a) - \varphi_k(\mathbf{d}_p) H(\mathbf{d}_p, \mathbf{x}_a) - \int_{\Gamma_d} \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{d})}{\partial \Gamma(\mathbf{d})}(\mathbf{d}) H(\mathbf{d}, \mathbf{x}_a) d\Gamma(\mathbf{d})] \\ & - \varphi_i(\mathbf{x}_a - \varepsilon) [\varphi_k(\mathbf{d}_a) H(\mathbf{d}_a, \mathbf{x}_a - \varepsilon) - \varphi_k(\mathbf{d}_p) H(\mathbf{d}_p, \mathbf{x}_a - \varepsilon) \\ & - \int_{\Gamma_d} \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{d})}{\partial \Gamma(\mathbf{d})}(\mathbf{d}) H(\mathbf{d}, \mathbf{x}_a - \varepsilon) d\Gamma(\mathbf{d})] \\ & + \varphi_i(\mathbf{x}_p + \varepsilon) [\varphi_k(\mathbf{d}_a) H(\mathbf{d}_a, \mathbf{x}_p + \varepsilon) - \varphi_k(\mathbf{d}_p) H(\mathbf{d}_p, \mathbf{x}_p + \varepsilon) \\ & - \int_{\Gamma_d} \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{d})}{\partial \Gamma(\mathbf{d})}(\mathbf{d}) H(\mathbf{d}, \mathbf{x}_p + \varepsilon) d\Gamma(\mathbf{d})] \\ & - \varphi_i(\mathbf{x}_p) [\varphi_k(\mathbf{d}_a) H(\mathbf{d}_a, \mathbf{x}_p) - \varphi_k(\mathbf{d}_p) H(\mathbf{d}_p, \mathbf{x}_p) - \int_{\Gamma_d} \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{d})}{\partial \Gamma(\mathbf{d})}(\mathbf{d}) H(\mathbf{d}, \mathbf{x}_p) d\Gamma(\mathbf{d})] \\ & - \varphi_i(\mathbf{x}_p + \varepsilon) [\varphi_k(\mathbf{d}_a) H(\mathbf{d}_a, \mathbf{x}_p + \varepsilon) - \varphi_k(\mathbf{d}_p) H(\mathbf{d}_p, \mathbf{x}_p + \varepsilon) - \\ & - \int_{\Gamma_d} \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{d})}{\partial \Gamma(\mathbf{d})}(\mathbf{d}) H(\mathbf{d}, \mathbf{x}_p + \varepsilon) d\Gamma(\mathbf{d})] \\ & - \varphi_k(\mathbf{d}_a) \int_{\Gamma_x - \Gamma_x^{bola}} \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{x})} H(\mathbf{d}_a, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \varphi_k(\mathbf{d}_p) \int_{\Gamma_x - \Gamma_x^{bola}} \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{x})} H(\mathbf{d}_p, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ & - \varphi_k(\mathbf{d}_a) \int_{\Gamma_x^{bola}} \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{x})} H(\mathbf{d}_a, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \varphi_k(\mathbf{d}_p) \int_{\Gamma_x^{bola}} \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{x})} H(\mathbf{d}_p, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ & + \int_{\Gamma_d} \int_{\Gamma_x - \Gamma_x^{bola}} \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{d})}{\partial \Gamma(\mathbf{d})} H(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{d}) \end{aligned}$$

$$+ \int_{\Gamma_d} \int_{\Gamma_x^{bola}} \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{d})}{\partial \Gamma(\mathbf{d})} H(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{d}), \quad (6.20)$$

com alguma redundância, pois alguns termos são idênticos aos pares com sinal trocado. É interessante salientar que em favor da simplicidade se convencionou que

$$\mathbf{x}_s \pm \varepsilon = \mathbf{x}_s \pm \frac{\pi \varepsilon}{2}, \quad s = a, p. \quad (6.21)$$

Com essa consideração, pode-se escrever

$$\varepsilon = (\mathbf{d}_a, \mathbf{x}_a) = (\mathbf{d}_a, \mathbf{x}_p) = (\mathbf{d}_p, \mathbf{x}_a) = (\mathbf{d}_p, \mathbf{x}_p), \quad (6.22)$$

$$\varepsilon = (\mathbf{d}_a, \mathbf{x}_a - \varepsilon) = (\mathbf{d}_a, \mathbf{x}_p + \varepsilon), \quad (6.23)$$

$$\varepsilon = (\mathbf{d}_p, \mathbf{x}_a - \varepsilon) = (\mathbf{d}_p, \mathbf{x}_p + \varepsilon). \quad (6.24)$$

Após esse desenvolvimento e lembrando que para esse caso de nuvens coincidentes

$$\varphi_k(\mathbf{d}_a) = \varphi_k(\mathbf{d}_p) \quad (6.25)$$

e

$$\varphi_i(\mathbf{x}_a) = \varphi_i(\mathbf{x}_p), \quad (6.26)$$

bem como

$$\mathbf{d}_a \equiv \mathbf{d}_p; \quad \mathbf{x}_a \equiv \mathbf{x}_p, \quad (6.27)$$

a equação (6.20) resulta apenas em

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\Gamma &= \int_{\Gamma_d} \int_{\Gamma_x - \Gamma_x^{bola}} \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{d})}{\partial \Gamma(\mathbf{d})} H(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{d}) \\ &+ \int_{\Gamma_d} \int_{\Gamma_x^{bola}} \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{d})}{\partial \Gamma(\mathbf{d})} H(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{d}). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ou seja, que os dois contornos coincidam, tem-se

$$\begin{aligned} I_\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\mathcal{J}_\Gamma] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma_d} \int_{\Gamma_x - \Gamma_x^{bola}} \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{d})}{\partial \Gamma(\mathbf{d})} H(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{d}) \right. \\ &\left. + \int_{\Gamma_d} \int_{\Gamma_x^{bola}} \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{d})}{\partial \Gamma(\mathbf{d})} H(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{d}) \right]. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Lembrando que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma_x^{bola}} \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{d})}{\partial \Gamma(\mathbf{d})} H(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) \right] = 0; \quad (6.30)$$

a equação (6.29) se reduz a

$$I_\Gamma = \int_{\Gamma_d} \int_{\Gamma_x} \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{d})}{\partial \Gamma(\mathbf{d})} H(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{d}). \quad (6.31)$$

Essa equação, cujo núcleo é fracamente singular, é integrada da maneira apresentada no item 6.2.2.

Para nuvens que partilham de um mesmo vértice do contorno, a integral hipersingular também tem que ter o seu procedimento de integração cuidadosamente analisado, porque a *partição da unidade* associada a estas nuvens é descontínua, ou seja, não é  $C^0$ . Essa afirmação é ilustrada na Figura 6.4, onde se mostra as nuvens  $\mathcal{N}_{i-1}$ ,  $\mathcal{N}_i$  e  $\mathcal{N}_{i+1}$  associadas a um determinado vértice  $k$ . Observa-se que as funções da *partição da unidade* associadas às nuvens  $i$  e  $i + 1$  são diferentes da função tenda convencional, pois a nuvem  $i$  tem o lado esquerdo correspondente à metade esquerda da tenda e o lado direito é zero, enquanto que a função  $i + 1$  tem o seu lado esquerdo formado pela constante zero e o lado direito formado pela metade do lado direito da tenda. Desse ponto de vista, as funções associadas às nuvens  $i$  e  $i + 1$  não são contínuas ( $C^0$ ) quando contém um vértice em seu suporte. Esse fato implica que a proposta de regularização da integral hipersingular não pode ser tratada como foi feito no caso de nuvens que não contém um vértice, já que os termos ilimitados que surgem do processo de regularização não se anulam entre si. Sendo assim, é necessário introduzir a definição de integral por parte finita de Hadamard.

Essa definição, introduzida em 1923 pelo matemático francês Jacques Hadamard [31], que permite o aumento do escopo da aplicação das integrais hipersingulares na solução de equações diferenciais, é pesquisada atualmente por vários autores do método dos elementos de contorno, como por exemplo Tweed *et alii* [71], apesar de Gray [28] dizer que "o significado físico da definição é dúbio".

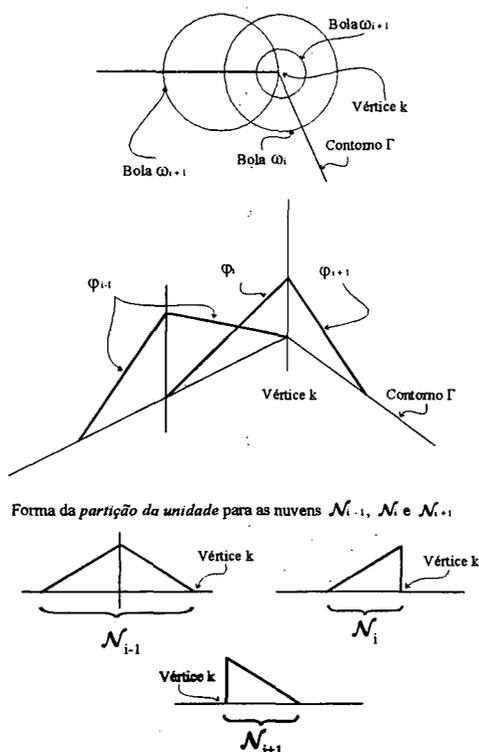


Figura 6.4: Funções  $\varphi_\alpha$  associadas a nuvens  $\mathcal{N}_\alpha$  vizinhas a um vértice  $k$  do contorno.

Assim, define-se integral por parte finita para uma integral imprópria como [39]

$$fp \int_S \frac{f(x)}{(x-c)^\alpha} dx = \lim_{S_\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S-S_\epsilon} \frac{f(x)}{(x-c)^\alpha} dS + A(S_\epsilon) \right\} \quad (6.32)$$

onde  $\alpha \geq 1$ ,  $S_\epsilon$  é uma "superfície" que contém o ponto singular  $c$  e  $fp$  é o símbolo que indica que a integral é avaliada por parte finita.

O termo  $A(S_\epsilon)$  depende da ordem  $\alpha$  da singularidade do núcleo, da superfície  $S_\epsilon$ , bem como das características de regularidade da função densidade  $f(x)$ , que, por sua vez, também dependem da ordem da singularidade do núcleo.

Assim posto, para o exemplo mostrado na Figura 6.4, considerando que a nuvem fonte seja a  $i + 1$  e a campo, a  $i$ , a equação (6.20), com a aplicação do conceito da integração por parte finita de Hadamard, se reduz a apenas

$$\int_{\Gamma_d} \int_{\Gamma_z} \frac{\partial^2 G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d}) \partial n(\mathbf{x})} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_{i+1}(\mathbf{d}) d\Gamma(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{d}) = -\varphi_i(\mathbf{x}_a) \int_{\Gamma_d} \frac{\partial \varphi_{i+1}(\mathbf{d})}{\partial \Gamma(\mathbf{d})}(\mathbf{d}) H(\mathbf{d}, \mathbf{x}_a) d\Gamma(\mathbf{d})$$

$$+\varphi_{i+1}(\mathbf{d}_p) \int_{\Gamma_x} \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{x})} H(\mathbf{d}_p, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma_d} \int_{\Gamma_x} \frac{\partial \varphi_{i+1}(\mathbf{d})}{\partial \Gamma(\mathbf{d})} H(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{d}), \quad (6.33)$$

onde as duas integrais simples do lado direito representam o *jump term*.

Quando a formulação é aplicada para o caso de duas nuvens vizinhas, como por exemplo para as nuvem  $i - 1$  e  $i$ , respectivamente campo e fonte, da Figura 6.4, a expressão (6.20) é escrita como

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_d} \int_{\Gamma_x} \frac{\partial^2 G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d}) \partial n(\mathbf{x})} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{d}) d\Gamma(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{d}) = \varphi_i(\mathbf{x}_a) \varphi_k(\mathbf{d}_a) H(\mathbf{d}_a, \mathbf{x}_a) \\ & - \varphi_i(\mathbf{x}_a) \int_{\Gamma_d} \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{d})}{\partial \Gamma(\mathbf{d})}(\mathbf{d}) H(\mathbf{d}, \mathbf{x}_a) d\Gamma(\mathbf{d}) - \varphi_i(\mathbf{x}_p) \varphi_k(\mathbf{d}_a) H(\mathbf{d}_a, \mathbf{x}_p) \\ & + \varphi_i(\mathbf{x}_p) \int_{\Gamma_d} \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{d})}{\partial \Gamma(\mathbf{d})}(\mathbf{d}) H(\mathbf{d}, \mathbf{x}_p) d\Gamma(\mathbf{d}) - \varphi_k(\mathbf{d}_a) \int_{\Gamma_x} \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{x})} H(\mathbf{d}_a, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ & - \int_{\Gamma_d} \int_{\Gamma_x} \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{d})}{\partial \Gamma(\mathbf{d})} H(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{d}), \end{aligned} \quad (6.34)$$

pois  $\varphi_k(\mathbf{d}_p) = 0$ . Como  $\mathbf{x}_a \equiv \mathbf{x}_p$  e  $\mathbf{d}_a \equiv \mathbf{d}_p$ , o primeiro termo do lado direito se anula com o terceiro, bem como o segundo se anula com o quarto. Observa-se, neste caso, que os termos que se cancelam são limitados e que todas as integrais envolvidas são fracamente singulares.

Com estas considerações, pode-se escrever

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_d} \int_{\Gamma_x} \frac{\partial^2 G(\mathbf{d}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{d}) \partial n(\mathbf{x})} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{d}) d\Gamma(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{d}) = \\ & - \varphi_k(\mathbf{d}_a) \int_{\Gamma_x} \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{x})} H(\mathbf{d}_a, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma_d} \int_{\Gamma_x} \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{d})}{\partial \Gamma(\mathbf{d})} H(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial \Gamma(\mathbf{x})} d\Gamma(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{d}), \end{aligned} \quad (6.35)$$

onde a integral simples é o *jump term*.

Esse procedimento é aplicável em todas as combinações possíveis de localização entre as nuvens que tenham um ponto comum num vértice. A grande virtude dessa metodologia é a redução da singularidade do núcleo para fracamente singular, o que permite usar procedimentos bastante conhecidos, precisos e computacionalmente baratos para a sua integração. Porém, alguns aspectos relacionados com as propriedades das funções de interpolação necessitam ser avaliados com mais cuidado. Os comentários que seguem ajudam a esclarecer alguns pontos aparentemente obscuros.

Krisnasamy *et alii* [39], trabalhando com o método da colocação, alertam que o uso do conceito da integração por parte finita de Hadamard para as integrais hipersingulares, implica o efeito denominado dependência de escala (que é entendido como a relação entre o tamanho de elementos subseqüentes). Segundo esta fonte, o efeito de escala é possível ser removido por algum método empírico, mas os resultados dependem do método e apresentam baixa taxa de convergência. Outras alternativas, como por exemplo o uso de elementos com continuidade  $C^1$ , ou então o emprego dos elementos não-conformes (aqueles onde os nós não estão nos extremos do elemento), são bastante eficientes para evitar o problema de escala. Segundo estes autores, os elementos não-conformes são ideais para o método dos elementos de contorno formulado pelas integrais hipersingulares, porque os pontos de colocação não estão localizados nos extremos, e assim as funções de interpolação são contínuas e infinitamente diferenciáveis.

No presente desenvolvimento, o procedimento de integração adotado consiste em efetuar a integral interna analiticamente e avaliar a integral externa numericamente com número finito de pontos de integração. Esse procedimento implica que estes pontos de integração são os pontos singulares (correspondendo aos nós do elementos de contorno por colocação), os quais nunca (para a integração padrão de Gauss) estão localizados nos extremos do elemento, e conseqüentemente a função de interpolação nesses pontos é contínua e infinitamente diferenciável. Sob este ponto de vista, pode-se considerar que a abordagem de Galerkin é uma extensão dos elementos de contorno não-conformes, e conseqüentemente os resultados independem da escala quando a integração por parte finita é usada, mesmo quando a nuvem contém um vértice do contorno.

# Capítulo 7

## Programa e resultados numéricos

### 7.1 Introdução

Neste capítulo são analisados alguns problemas de condução de calor bidimensional sendo os resultados comparados com soluções analíticas, quando possível. A escolha dos exemplos numéricos tem o objetivo de verificar o comportamento do método desenvolvido em termos de precisão, taxa de convergência, desempenho do indicador de erro e dos enriquecimentos adaptativos em problemas regulares e em problemas contendo singularidades no gradiente da solução.

Adicionalmente é apresentada a estrutura de programação usada na obtenção dos resultados numéricos, seguido de uma descrição sucinta do funcionamento de suas principais funções.

### 7.2 Código computacional

#### 7.2.1 Programação orientada a objeto – generalidades

Um código computacional destinado a ser base laboratorial de desenvolvimentos numéricos deve ser projetado de tal forma que pode ser usado continuamente para pesquisa sem que ocorra o seu envelhecimento precoce e não restrinja a sua aplicação a outras classes de problemas. Nesse contexto, a programação orientada a objeto se apresenta como uma ferramenta adequada, dado que uma de suas premissas é fornecer uma estrutura de programação que permite:

- *modularização do código;*

- possibilidade de organizar os dados em estruturas análogas à do raciocínio matemático;
- proteção dos dados;
- utilização do código, ou parte dele, como funções por vários programas ;
- portabilidade.

A linguagem empregada para o desenvolvimento do código computacional, dentre as mais conhecidas, é C++.

Como não é objeto deste trabalho a discussão das características desta ferramenta de programação, admite-se um conhecimento básico do tema na apresentação da estrutura do código implementado.

## 7.2.2 Programa BEM-CLOUD++

Com o objetivo de construir um código computacional que possua as propriedades acima mencionadas, e conseqüentemente servir de bancada de trabalho, desenvolveu-se o programa BEM-CLOUD++. Este código, não restrito à aplicação de somente uma classe de problemas, tem a sua estrutura gerada de tal forma que as classes que definem propriedades geométricas, graus de liberdade, processos de integração, coordenadas etc. possam ser continuamente atualizadas. Adicionalmente, com o objetivo de evitar dissipação de esforços, são utilizadas várias funções das bibliotecas ACDPOOP e ACDPFEM (LNCC [69]).

As principais classes do programa BEM-CLOUD++, separadas em grupos com atividades afins, são:

*Classes para definição de geometria e informação da discretização.*

### 1. **acKeyPoint**

### 2. **acBoundary**

– **acLine**

– **acArch**

– **acBSpline**

### 3. **acBoundaryGrp**

*Classes para definição dos graus de liberdade e das condições de contorno.*

1. **acDefDOFNode**
2. **acBoundaryCondGrp**

*Classes para construção e solução do sistema linear.*

1. **acAreaGrp**
2. **acAFMatrix**
  - **acFrangi**
  - **acTrefftz** (não implementada)
  - **acElasticidade\_2\_D** (em implementação)

A seguir é dada uma breve descrição da finalidade cada classe.

- **acKeyPoint** - tem a finalidade de manipular leitura, impressão e armazenagem de informações dos nós referentes à definição da geometria do problema.
- **acBoundaryGrp** - guarda informações relacionadas com a definição e discretização do contorno. A sua principal variável é o vetor de objetos da classe **acBoundary**.
- **acBoundary** - classe genérica que manipula informações dos contornos, a partir da qual são herdeiras, ou filhas, as classes: **acLine**, **acArch** e **acBSpline**. O uso das funções virtuais nesta classe torna possível construir um programa principal (*main*) completamente independente da geometria do contorno.
- **acDefDOFNode** - define o número e tipo de graus de liberdade do problema.
- **acBoundaryCondGrp** - manipula os dados de condição de contorno especificada bem como o valor para cada contorno.

- **acAreaGrp** - é a classe que gerencia as áreas que compõem o domínio. Possuindo informações a respeito do problema em análise, manipula os dados necessários para a definição da classe **acAFMatrix**.
- **acAFMatrix** - é a classe genérica de montagem do sistema de equações. Todas as suas funções são virtuais, o que permite construir o programa principal completamente independente do tipo de problema e formulação. São herdeiras desta, as classes específicas que definem os núcleos de integração, tais como: **acFrangi** (problemas potenciais bidimensionais integrados segundo a regularização de Frangi-Novatti), **acTrefftz** (para o problema de potencial usando a metodologia de Trefftz), **acElasticidade\_2\_D** (para o problema de elasticidade bidimensional) etc.

Além dessas classes, existe mais uma série de outras de menor importância para entendimento do funcionamento do programa desenvolvido que não têm o seu funcionamento aqui descrito. O programa é todo desenvolvido para aplicação em computadores pessoais, ou seja, os PC de pequeno porte, tal como um Pentium 200 MHz com 32 Mb de memória real e um disco rígido com capacidade de armazenar 2 Gb de informações.

### 7.3 Cálculo do erro

Uma das maneiras de avaliar a convergência de um método numérico é a obtenção de uma medida global da solução. No presente caso é usada a norma de energia, definida a seguir.

Da condição de ortogonalidade, definida no Capítulo 2 (equação (2.27)),

$$\langle \mathcal{L}[\tilde{u}(\mathbf{x})] - q(\mathbf{x}), k w(\mathbf{x}) \rangle_{\mathfrak{F}} = \int_{\Omega} (\mathcal{L}[\tilde{u}(\mathbf{x})] - q(\mathbf{x})) k w(\mathbf{x}) d\Omega = 0, \quad (7.1)$$

a forma fraca para a equação de Laplace [11] é dada pelo seguinte operador bilinear:

$$\begin{aligned} B(\tilde{T}(\mathbf{x}), w(\mathbf{x})) &= \int_{\Omega} (\nabla \tilde{T}(\mathbf{x}) \cdot \nabla w(\mathbf{x})) d\Omega = \int_{\Gamma_D} (\tilde{T}(\mathbf{x}) - \bar{T}(\mathbf{x})) \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} d\Gamma \\ &+ k \int_{\Gamma_D} \frac{\partial \tilde{T}(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} w(\mathbf{x}) d\Gamma + k \int_{\Gamma_N} w(\mathbf{x}) \overline{\frac{\partial \tilde{T}(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})}} d\Gamma, \end{aligned} \quad (7.2)$$

onde

$\Gamma_D$  e  $\Gamma_N$  são regiões de condições de contorno essenciais ou de Dirichlet e naturais ou de Neumann, respectivamente;

$\bar{T}(\mathbf{x})$  são o valores especificados da temperatura para  $\Gamma_D$ ;

$\overline{\frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})}}$  são o valores especificados do fluxo para  $\Gamma_N$ ;

$\tilde{T}(\mathbf{x})$  é a solução exata do problema.

Ao selecionar a função peso  $w(\mathbf{x}) = \tilde{T}(\mathbf{x})$  fica estabelecida a energia para a equação de Laplace como sendo

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}(\mathbf{x})\|_E^2 &= B(\tilde{T}(\mathbf{x}), \tilde{T}(\mathbf{x})) = \int_{\Omega} (\nabla \tilde{T}(\mathbf{x}) \cdot k \nabla \tilde{T}(\mathbf{x})) d\Omega = \\ &k \int_{\Gamma_D} \bar{T}(\mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{T}(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} d\Gamma + k \int_{\Gamma_N} \tilde{T}(\mathbf{x}) \overline{\frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})}} d\Gamma, \end{aligned} \quad (7.3)$$

onde  $k$  é a condutividade térmica.

A partir de uma solução aproximada para o problema, especificada pelos campos  $T(\mathbf{x})$  e  $\frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})}$  no contorno, define-se as funções erro para a temperatura e para o fluxo como

$$e^T = \tilde{T}(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}) \text{ para } \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D \quad (7.4)$$

e

$$e^Q = \frac{\partial \tilde{T}(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} - \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} \text{ para } \forall \mathbf{x} \in \Gamma_N. \quad (7.5)$$

Para a medida do erro é usada a definição dada por Holzer [32], a qual é reescrita a seguir:

$$\|e^T\|^2 = \left| k \int_{\Gamma_N} \overline{\frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})}} e^T d\Gamma - k \int_{\Gamma_D} \bar{T}(\mathbf{x}) e^Q d\Gamma \right|$$

onde

$$\int_{\Gamma_N} \overline{\frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})}} e^T d\Gamma = \int_{\Gamma_N} \overline{\frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})}} \tilde{T}(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma_N} \overline{\frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})}} T(\mathbf{x}) d\Gamma, \quad (7.6)$$

$$\int_{\Gamma_D} \bar{T}(\mathbf{x}) e^Q d\Gamma = \int_{\Gamma_D} \bar{T}(\mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{T}(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} d\Gamma - \int_{\Gamma_D} \bar{T}(\mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} d\Gamma, \quad (7.7)$$

sendo o erro percentual relativo calculado por

$$\eta = 100 \frac{\|e^T\|}{\|\tilde{T}(\mathbf{x})\|_E}. \quad (7.8)$$

Outra maneira de comparar os resultados é através da relação direta da temperatura e do fluxo em um ponto  $\mathbf{x}_i$ . Para isto são definidas as seguintes medidas percentuais de erro:

$$\xi_{\Gamma_N(\mathbf{x}_i)} = 100 \left| \frac{\tilde{T}(\mathbf{x}_i) - T(\mathbf{x}_i)}{\tilde{T}(\mathbf{x}_i)} \right| \quad (7.9)$$

e

$$\xi_{\Gamma_D(\mathbf{x}_i)} = 100 \left| \frac{\frac{\partial \tilde{T}(\mathbf{x}_i)}{\partial n(\mathbf{x}_i)} - \frac{\partial T(\mathbf{x}_i)}{\partial n(\mathbf{x}_i)}}{\frac{\partial \tilde{T}(\mathbf{x}_i)}{\partial n(\mathbf{x}_i)}} \right| \quad (7.10)$$

para os regiões de condição de contorno de Neumann e Dirichlet, respectivamente.

## 7.4 Número de condição

Nos procedimentos de inversão de matrizes, a qualidade da solução está diretamente relacionada com o número de condição da matriz a ser invertida. Como matrizes malcondicionadas resultam em números de condição elevados e soluções com pouca confiabilidade, o cálculo de um indicador de condicionamento para as matrizes obtidas por um método numérico é vital. Dentre as várias opções de estimativa do número de condição, o critério baseado na decomposição por valor singular, ou simplesmente SVD (sigla do termo inglês *Singular Value Decomposition* [57]), é empregado neste trabalho. A partir do teorema básico da técnica SVD define-se o número de condição *Cond* [57] como

$$Cond = \frac{W_i^{Máx}}{W_i^{Mín}} \quad (7.11)$$

onde  $W_i^{Máx}$  e  $W_i^{Mín}$  são o maior valor e o menor valor singulares obtidos pela técnica SVD.

Normalmente o condicionamento de uma matriz é analisado a partir do logaritmo de *Cond*, definido como segue:

$$NCond = \log Cond. \quad (7.12)$$

## 7.5 Placa retangular com solução regular

Esse exemplo tem o objetivo de avaliar a base proposta e as formulações Forte, Hiper e Simétrica num problema simples, comparável ao conhecido *Patch Test* em elementos finitos.

O problema analisado, bem como as dimensões e condições de contorno, estão ilustrados na Figura 7.1.

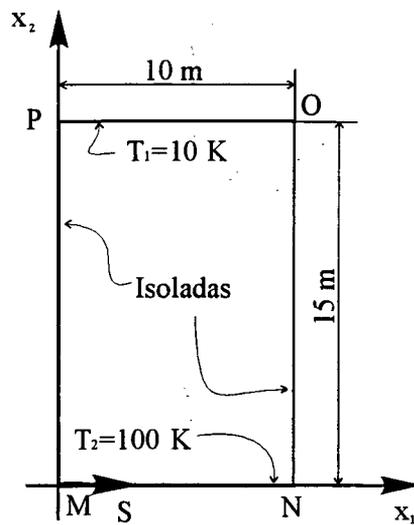


Figura 7.1: Placa retangular com as dimensões e os carregamentos impostos.

A temperatura nas faces  $\overline{MN}$  e  $\overline{OP}$  são  $T_1 = 10\text{ K}$  e  $T_2 = 100\text{ K}$ , respectivamente, enquanto que nas faces  $\overline{NO}$  e  $\overline{PM}$  o fluxo de calor é nulo.

A solução analítica deste problema é linear e descrita pelas expressões que seguem:

$$\tilde{T}(\mathbf{x}) = T_2 + \left[ \frac{T_1 - T_2}{l} \right] x_2 \text{ em } \overline{NO} \text{ e } \overline{PM} \quad (7.13)$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = -k \nabla \tilde{T}(\mathbf{x}) = -k \left[ \frac{\partial \tilde{T}(\mathbf{x})}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \tilde{T}(\mathbf{x})}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 \right] = k \left[ \frac{T_2 - T_1}{l} \right] \mathbf{e}_2 \text{ em } \overline{MN} \text{ e } \overline{OP}. \quad (7.14)$$

Para facilitar os cálculos, toma-se

$$k = 1.0\text{ W m}^{-1}\text{ K}^{-1}. \quad (7.15)$$

Convém frisar que os resultados da análise numérica usados na comparação com a solução exata têm sete algarismos significativos.

As comparações para esse caso são apresentadas para o contorno do retângulo desenvolvido no eixo das abscissas, sendo que as coordenadas dos vértices M, N, O e P são 0, 10, 25, 35 e 50 m, respectivamente, medidos em comprimento de arco, no sentido anti-horário, a partir da origem do sistema de coordenadas  $x_1$  e  $x_2$ . Os erros da temperatura e do fluxo em percentagem, equações (7.9) e (7.10), estão apresentados nos eixos das ordenadas. Para evitar que haja dificuldades de interpretação das figuras onde os resultados são mostrados, decidiu-se apresentar cada análise em duas figuras. Na primeira figura de cada análise, como por exemplo a 7.2, é apresentado o erro da temperatura para as faces  $\overline{NO}$  (intervalo de 10 a 25 m) e  $\overline{PM}$  (intervalo de 35 a 50 m), enquanto que na segunda, por exemplo a 7.3, o erro do fluxo é apresentado para as faces  $\overline{MN}$  (intervalo de 0 a 10 m) e  $\overline{OP}$  (intervalo de 25 a 35 m). Obviamente que a superposição destas duas figuras representa todo o contorno do corpo analisado.

O objetivo desta primeira análise é o de verificar se a partição da unidade consegue representar adequadamente campos de temperatura e fluxo, bem como o de verificar o condicionamento das suas matrizes. Para isso, o problema apresentado na Figura 7.1 é inicialmente discretizado com 2 nuvens por lado, em seguida por 5, 10 e 31 nuvens, o que totaliza 8, 20, 40 e 124, respectivamente.

Nas Figuras 7.2 e 7.3, apresenta-se o comportamento das soluções das abordagens Forte, Hiper e Simétrica para o caso de duas nuvens não enriquecidas em cada um dos quatro contornos, totalizando 8 nuvens para a análise.

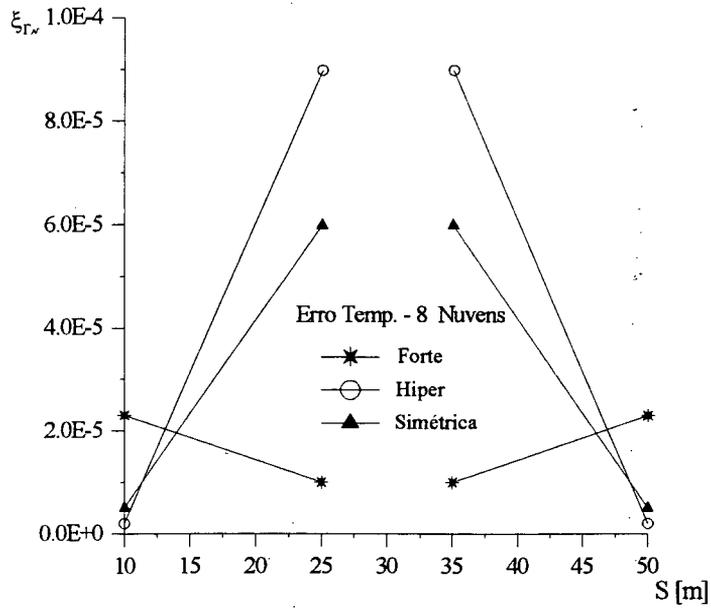


Figura 7.2: Erros na temperatura para duas nuvens não enriquecidas por contorno.

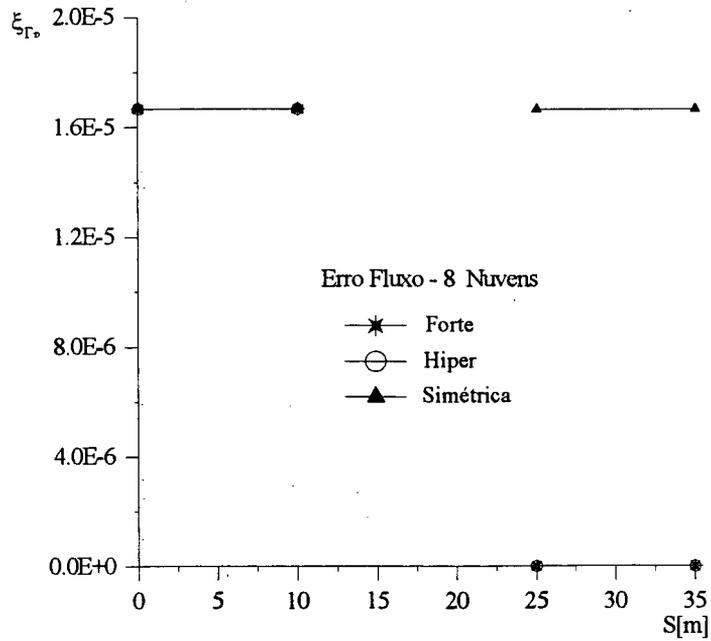


Figura 7.3: Erros no fluxo para duas nuvens não enriquecidas por contorno.

Nas Figuras 7.4 e 7.5, apresenta-se o comportamento das três abordagens com 5 nuvens não enriquecidas e igualmente espaçadas por contorno, totalizando vinte (20) nuvens.

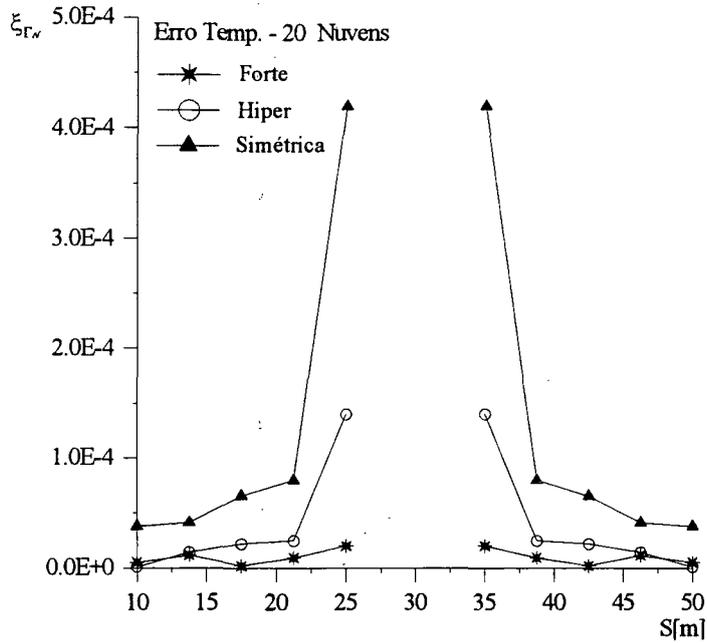


Figura 7.4: Erros na temperatura para cinco nuvens não enriquecidas por contorno.

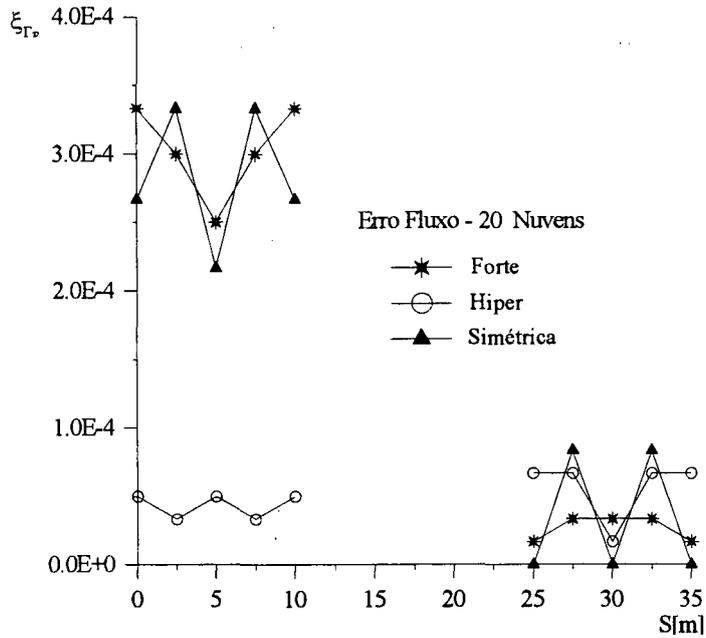


Figura 7.5: Erros no fluxo para cinco nuvens não enriquecidas por contorno.

Nas Figuras 7.6 e 7.7, 7.8 e 7.9, apresenta-se o comportamento das soluções para 10 e 31 nuvens não enriquecidas por contorno, também com espaçamento constante, totalizando 40 e 124 nuvens, respectivamente, na discretização do problema.

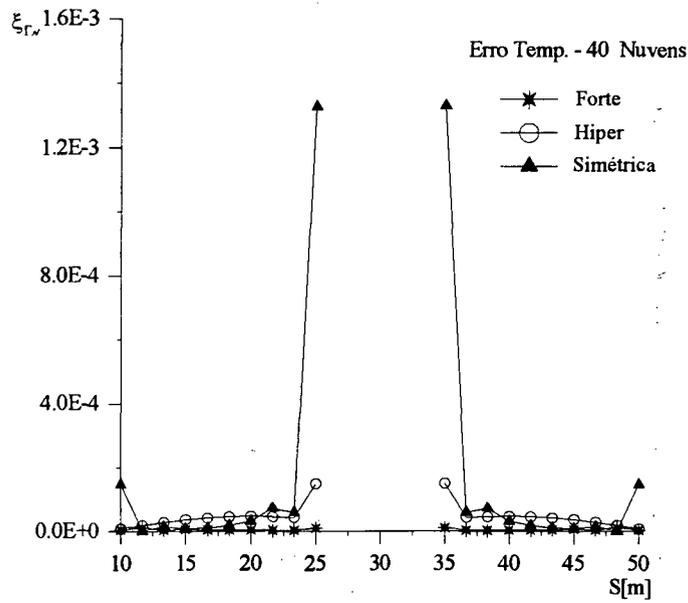


Figura 7.6: Erros na temperatura para dez nuvens não enriquecidas por contorno.

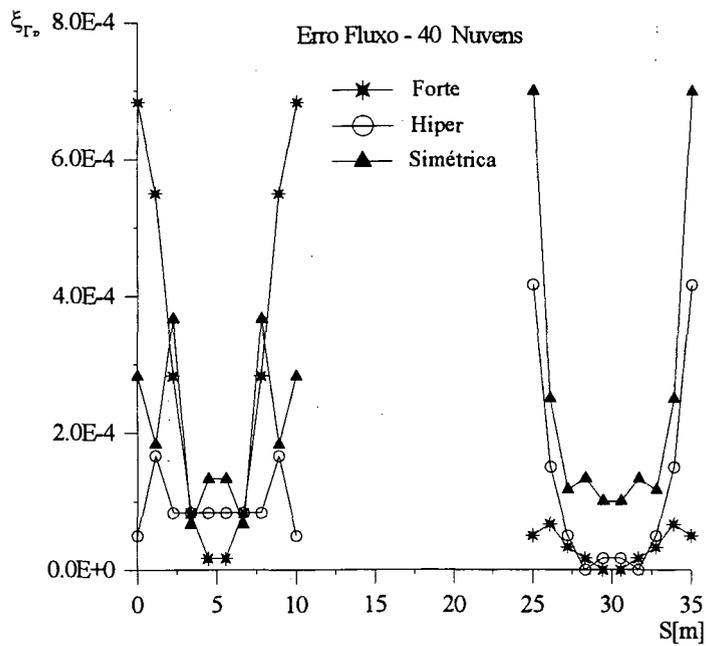


Figura 7.7: Erros no fluxo para dez nuvens não enriquecidas por contorno.

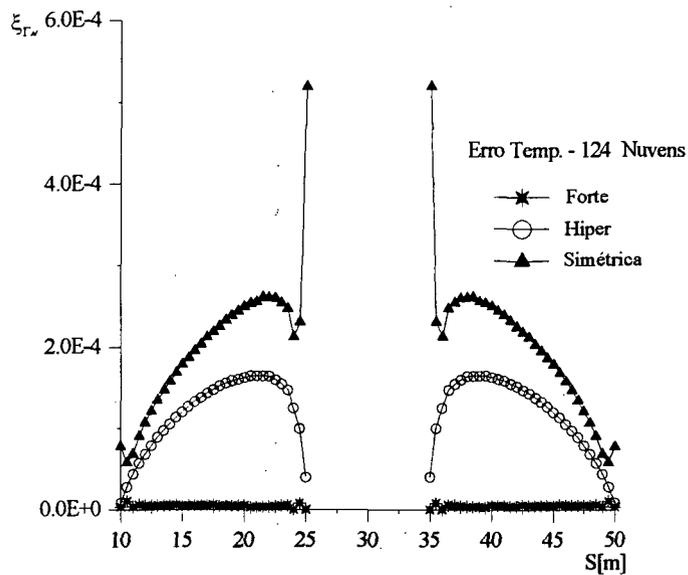


Figura 7.8: Erros na temperatura para trinta e uma nuvens não enriquecidas por contorno.

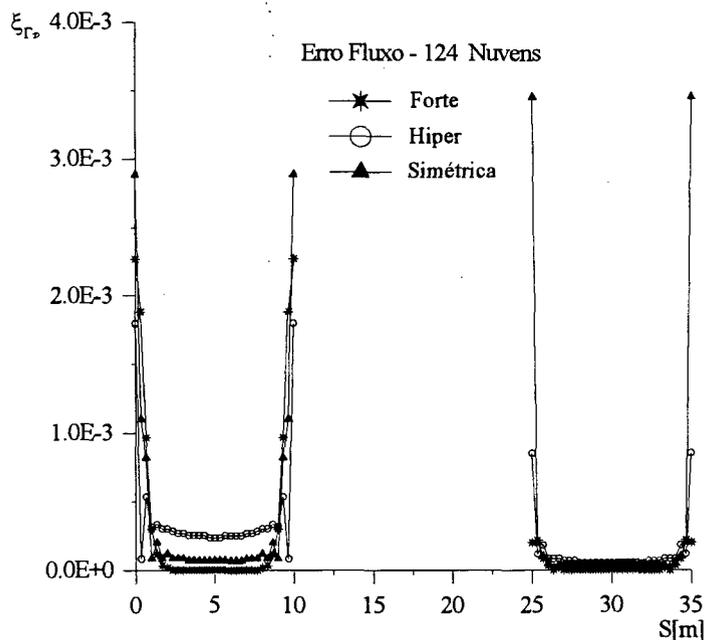


Figura 7.9: Erros no fluxo para trinta e uma nuvens não enriquecidas por contorno.

A seguir são tecidos comentários a respeito do comportamento dos métodos, com o auxílio da coleção de resultados apresentada para este primeiro modelo.

Em relação ao erro da temperatura, observado nas Figuras 7.2, 7.4, 7.6 e 7.8, verifica-se que a formulação que apresenta menor sensibilidade às funções de final de fronteira é a

Forte, seguido de perto pela Hiper e, por último, pela Simétrica. Mesmo assim, o maior erro percentual dessa última, mostrado na Figura 7.6, em relação às demais formulações, é da ordem  $O[10^{-3}]$ , o que é seguramente pequeno em termos absolutos. Quanto ao comportamento da solução em função do enriquecimento  $h$ , nota-se uma tendência dos três métodos se igualarem para locais distantes dos extremos das fronteiras (vértices), porém sempre com melhor desempenho da formulação Forte. Para finalizar a análise do erro na temperatura, pode-se observar que nas situações analisadas há a simetria geométrica de todas as curvas de erro para os lados direito e esquerdo da peça analisada, o que indica consistência numérica dos métodos implementados.

Quanto aos erros do fluxo, Figuras 7.5, 7.7 e 7.9, observa-se uma tendência das formulações apresentarem o mesmo erro, apesar das nuvens dos extremos perturbarem a resposta, em regiões vizinhas aos vértices do retângulo. Mesmo assim os erros dessas regiões são da ordem  $O[10^{-3}]$ , em percentagem, o que não é um erro apreciável em valores absolutos (o uso de uma formulação que impõe continuidade do gradiente da temperatura, nessa região, reduz o erro). Observa-se que para este tipo de condição de contorno não há predominância de melhor desempenho de uma formulação quando há o enriquecimento  $h$ , valendo a pena frisar que o melhor desempenho é obtido por todas as formulações com o número mínimo possível de nuvens. Isso porque a solução exata do problema, que é linear, é obtida com a própria partição da unidade e com apenas duas nuvens por contorno. O enriquecimento  $h$  obviamente induz a um aumento do erro, como percebido nos resultados apresentados, devido às operações realizadas com número finito de algarismos significativos no processo de solução numérica.

No método dos elementos de contorno de Galerkin, na situação em que há uma descontinuidade geométrica ou de carregamento, também ocorre um efeito semelhante ao nó duplo do método dos elementos de contorno por colocação. Isso é causado pela aplicação do método dos resíduos ponderados, onde as equações integrais do problema são ortogonalizadas em relação às funções de interpolação, equações (3.7) e (3.8), do início e do final de cada fronteira. Para analisar a influência desse efeito, faz-se uso do problema da placa retangular

mostrado na Figura 7.1, modelada agora com duas fronteiras de igual tamanho na base  $\overline{MN}$  e na lateral direita  $\overline{NO}$ . Dessa forma, a base da solução gerada é descontínua não apenas nos vértices do domínio, mas também nos pontos  $A$  e  $B$ , como mostrado na Figura 7.10. As posições dos pontos  $A$  e  $B$  estão em locais de mesma condição de contorno, bem como distantes de cantos, de tal maneira a evitar a influência da mudança brusca de condição de contorno e/ou de geometria na análise.

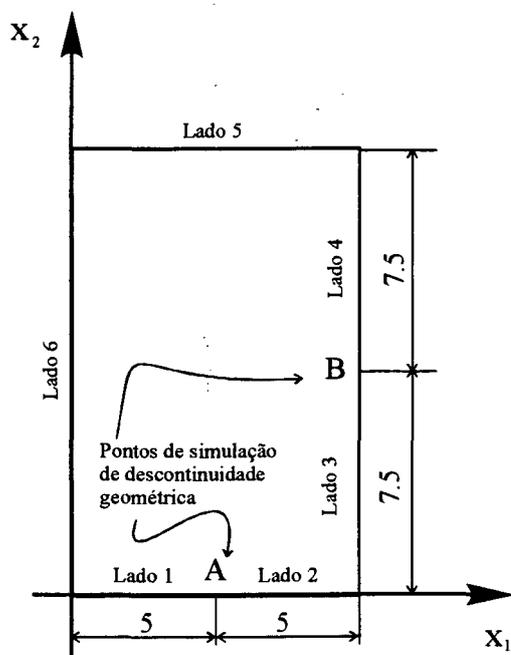


Figura 7.10: Placa retangular para análise do efeito do final de fronteira.

A análise deste efeito é efetuada com modelos constituídos de 12, 22 e 40 nuvens, distribuídas da forma mostrada na Tabela 7.1.

Os resultados para o erro da temperatura estão plotados nas Figuras 7.11, 7.13 e 7.15, enquanto que os erros para o fluxo estão mostrados nas Figuras 7.12, 7.14 e 7.16, sendo que apenas são apresentados os resultados das regiões de interesse, visto que nas demais não há alterações significativas.

Tabela 7.1: Distribuição das nuvens por modelo.

Posição	Número de nuvens por modelo		
	Primeiro	Segundo	Terceiro
Lado 1	2	3	5
Lado 2	2	3	5
Lado 3	2	3	5
Lado 4	2	3	5
Lado 5	2	5	10
Lado 6	2	5	10
Total de nuvens	12	22	40

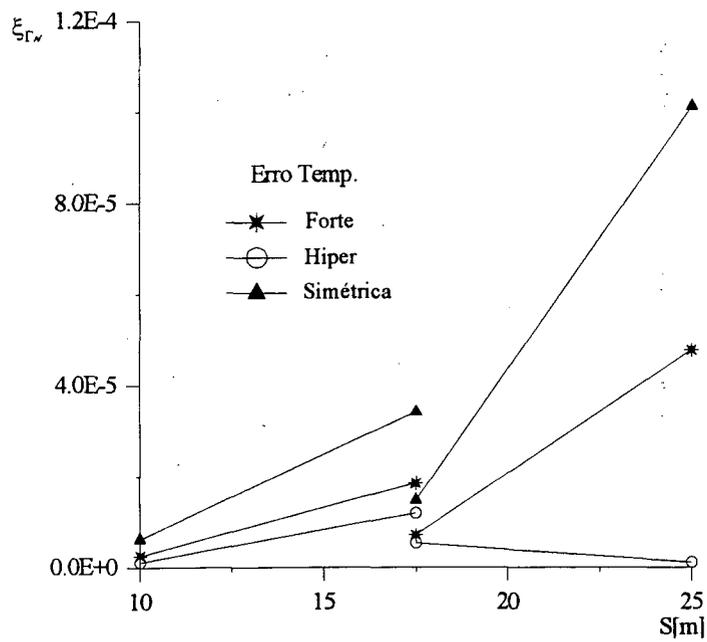


Figura 7.11: Erro de temperatura no ponto B para o caso de 12 nuvens não enriquecidas no contorno.

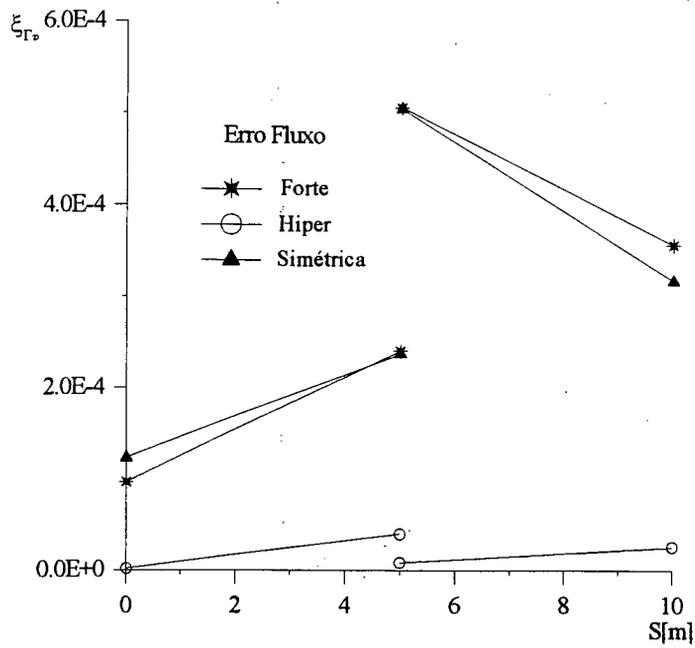


Figura 7.12: Erro de fluxo no ponto A para o caso de 12 nuvens não enriquecidas no contorno.

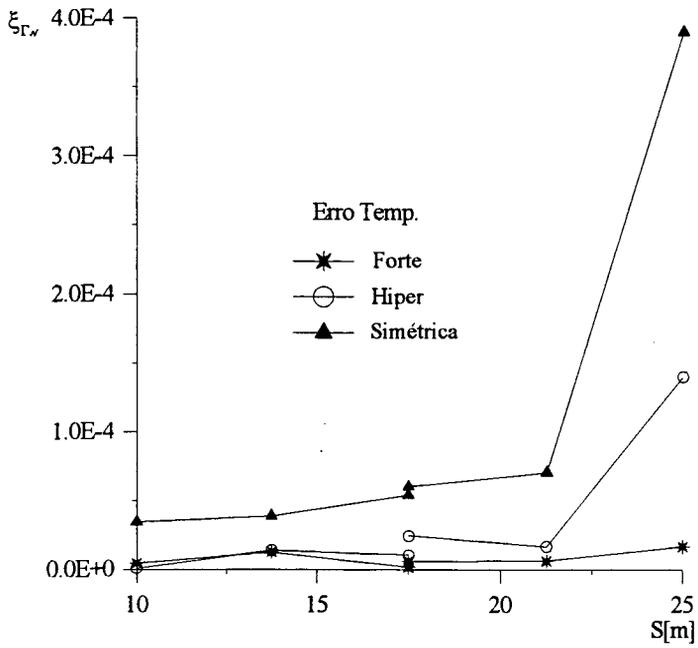


Figura 7.13: Erro de temperatura no ponto B para o caso de 22 nuvens não enriquecidas no contorno.

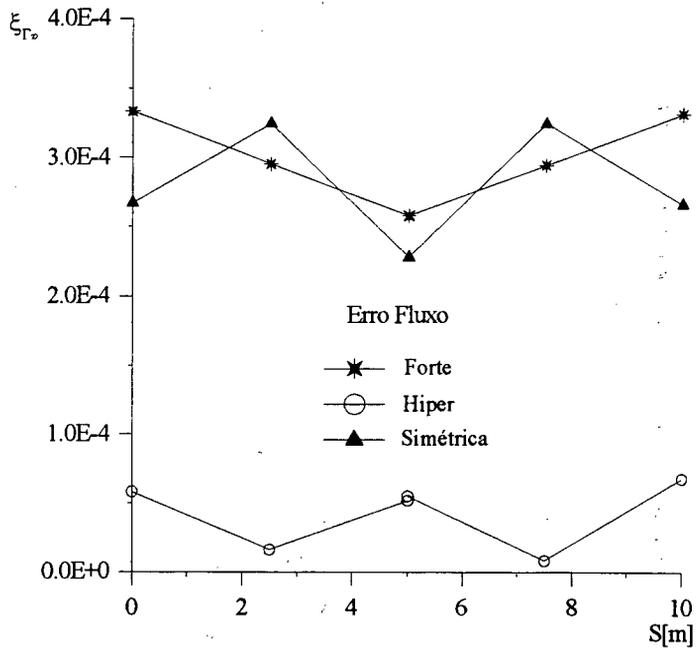


Figura 7.14: Erro de fluxo no ponto A para o caso de 22 nuvens não enriquecidas no contorno.

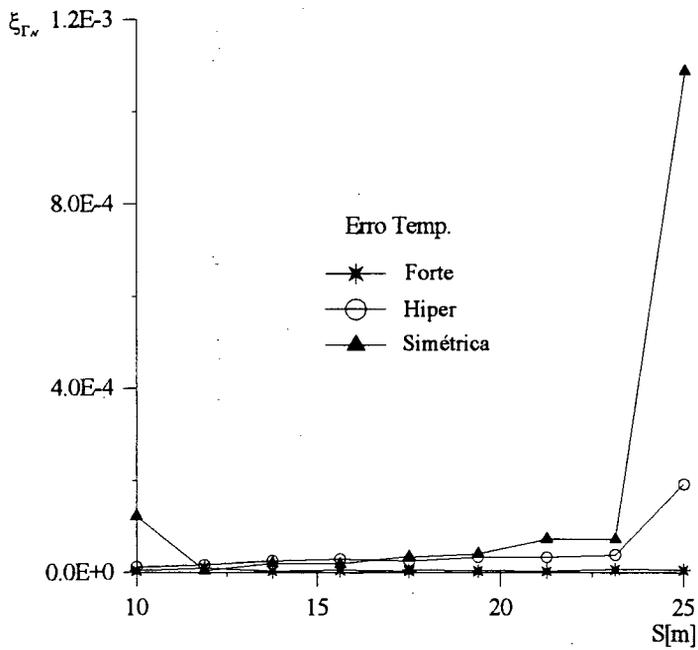


Figura 7.15: Erro de temperatura no ponto B para o caso de 40 nuvens não enriquecidas no contorno.

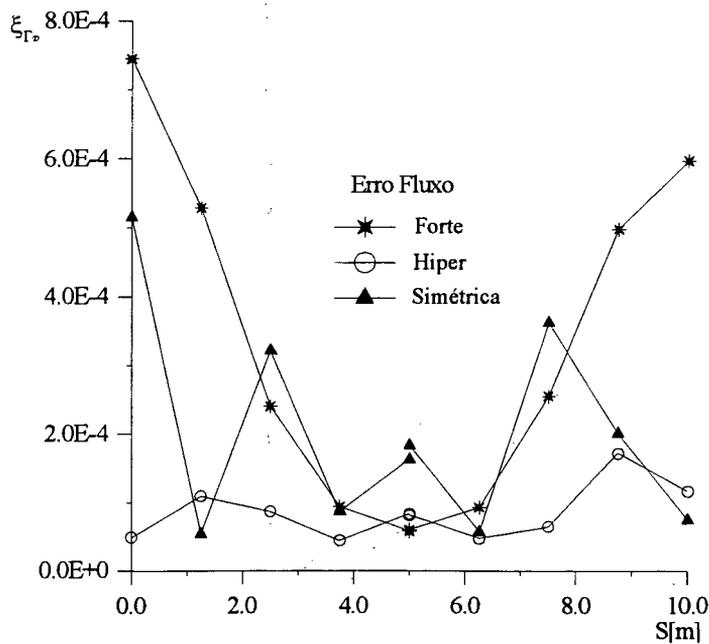


Figura 7.16: Erro de fluxo no ponto A para o caso de 40 nuvens não enriquecidas no contorno.

Pode-se observar que os saltos da solução aproximada para os pontos  $B$  ( $S = 17.5 m$ ) e  $A$  ( $S = 5 m$ ), Figuras 7.11, 7.12, são apenas da ordem de  $O[10^{-5}]$  e  $O[10^{-4}]$  para temperatura e fluxo, respectivamente. Os resultados para um número maior de nuvens por contorno, no caso 22 e 40 nuvens, Figuras 7.13 a 7.16, apresentam descontinuidades desprezáveis.

Apesar da geometria ser bastante favorável para as descontinuidades em  $A$  ( $S = 5 m$ ) e  $B$  ( $S = 17.5 m$ ), pode-se concluir que a presença de um extremo de fronteira em uma dada região do problema não afeta a sua solução de maneira apreciável, especialmente quando o número de nuvens em fronteiras contíguas é maior do que dois.

A seguir esta análise é ampliada para verificar o efeito da integração por parte finita das integrais hipersingulares.

No item 6.3, Capítulo 6, trata-se do efeito denominado dependência de escala que a integração por parte finita de Hadamard causa nas integrais hipersingulares (Krisnasamy et alii [39]). Porém, naquele item, mostra-se que o método dos elementos de contorno de Galerkin não é afetado pela dependência de escala, em função do procedimento de integração. Vale a pena lembrar que a versão Forte não é afetada pelo efeito da escala pelo fato da mesma

não conter integrais hipersingulares na sua formulação.

Com o intuito de provar que os elementos de contorno de Galerkin, que contem integrais hipersingulares em sua formulação não são afetados pelo efeito da escala, são apresentados, a seguir, os resultados do exemplo mostrado na Figura 7.17.

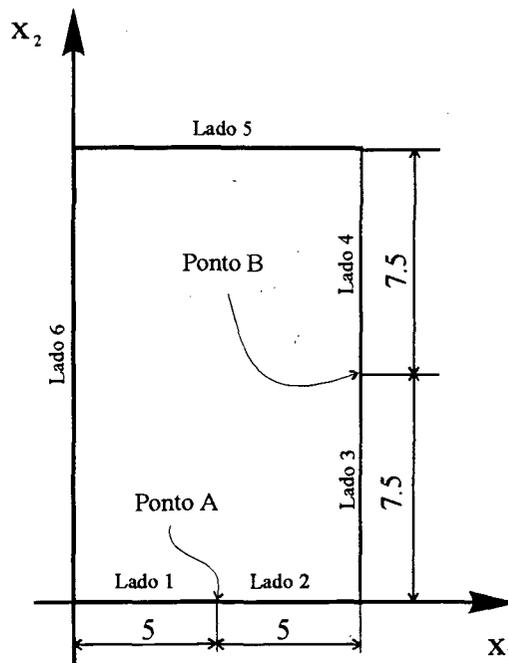


Figura 7.17: Modelo para análise do efeito de escala.

Na primeira etapa é analisado o efeito do fator escala em uma região de condição de contorno de Dirichlet, como por exemplo o ponto  $A$ , e na segunda etapa é analisado o ponto  $B$  da região de contorno de Neumann. Nesses dois pontos, o efeito de descontinuidade é induzido numericamente considerando que duas nuvens tenham os seus centros nestes pontos, como foi feito no exemplo anterior a este.

Convencionou-se ainda que os resultados para fluxo em  $A$  e temperatura em  $B$  são diferentes nos limites à esquerda e à direita, sendo grafados por  $q_{A-}$ ,  $q_{A+}$  e  $T_{B-}$ ,  $T_{B+}$  e que as condições de contorno deste problema são as mostradas na Figura 7.1.

Na primeira etapa, onde é analisado o comportamento do fluxo no ponto  $A$ , o contorno é discretizado da seguinte forma:

Lado 1 - variando de duas (2) a vinte nuvens (20),

Lado 2 - 20 nuvens,

Lado 3 - 10 nuvens,

Lado 4 - 10 nuvens,

Lado 5 - 10 nuvens,

Lado 6 - 10 nuvens.

O salto do fluxo é medido a partir da seguinte definição:

$$\Psi = 100 \left| \frac{q_{A_-} - q_{A_+}}{q_{A_-}} \right|, \quad (7.16)$$

e a escala, para o caso de espaçamento uniforme, é definida por

$$\zeta = \frac{N_{A_-} - 1}{N_{A_+} - 1} \quad (7.17)$$

onde

$q_{A_-}$  é o fluxo no ponto  $A$  pela nuvem a esquerda,

$q_{A_+}$  é o fluxo no ponto  $A$  pela nuvem a direita,

$N_{A_-}$  é o número de nuvens no Lado 1 (de 2 a 20),

$N_{A_+}$  é o número de nuvens no Lado 2 (20).

Sendo assim, os resultados desta primeira etapa estão mostrados nas Tabelas 7.2 e 7.3, para as versões Hiper e Simétrica.

Vale a pena acrescentar que a solução exata do fluxo da região analisada é  $6.0 \frac{W}{m^2}$ .

Na segunda etapa, onde é analisado o salto da temperatura no ponto  $B$ , o contorno é discretizado da seguinte forma:

Lado 1 - 10 nuvens,

Lado 2 - 10 nuvens,

Lado 3 - variando de duas (2) a vinte (20) nuvens,

Lado 4 - 20 nuvens,

Lado 5 - 10 nuvens,

Lado 6 - 10 nuvens.

Tabela 7.2: Salto do fluxo para a formulação Hiper.

<b>Formulação Hiper - Salto do Fluxo</b>			
$\zeta$	$q_{A-}$	$q_{A+}$	$\Psi$
1/19	5.999994	5.999983	0.000183
6/19	5.999993	5.999983	0.000167
10/19	5.999990	5.999984	0.000100
15/19	5.999990	5.999984	0.000100
19/19	5.999984	5.999984	0.0

Tabela 7.3: Salto do fluxo para a formulação Simétrica.

<b>Formulação Simétrica - Salto do Fluxo</b>			
$\zeta$	$q_{A-}$	$q_{A+}$	$\Psi$
1/19	5.999826	6.000322	0.008267
6/19	6.000015	6.000020	0.000083
10/19	6.000015	6.000016	0.000017
15/19	6.000014	6.000014	0.0
19/19	6.000013	6.000013	0.0

O salto da temperatura é medido a partir da seguinte definição:

$$\Upsilon = 100 \left| \frac{T_{B-} - T_{B+}}{T_{B-}} \right|,$$

onde

$T_{B-}$  é a temperatura no ponto  $B$  pela nuvem à esquerda,

$T_{B+}$  é a temperatura no ponto  $B$  pela nuvem à direita.

A escala tem a mesma definição dada pela equação 7.17, porém os lados envolvidos na presente etapa são o Lado 3 e o Lado 4.

Os resultados dessa última etapa, para as versões Hiper e Simétrica, estão mostrados nas Tabelas 7.4 e 7.5.

Tabela 7.4: Salto da temperatura para a formulação Hiper.

<b>Formulação Hiper - Salto da Temperatura</b>			
$\zeta$	$T_{B-}$	$T_{B+}$	$\Upsilon$
1/19	55.00004	55.00003	0.000018
6/19	55.00006	55.00005	0.000018
10/19	55.00007	55.00007	0.0
15/19	55.00009	55.00009	0.0
19/19	55.00011	55.00011	0.0

Tabela 7.5: Salto da temperatura para a formulação Simétrica.

Formulação Simétrica - Salto da Temperatura			
$\zeta$	$T_{B_-}$	$T_{B_+}$	$\Upsilon$
1/19	54.99987	54.99987	0.0
6/19	55.00003	55.00003	0.0
10/19	55.00031	55.00030	0.000018
15/19	55.00088	55.00088	0.0
19/19	55.00161	55.00161	0.0

A solução exata para a temperatura no ponto analisado é 55.0 K.

Como é observado nessa análise, os erros das duas formulações são muito pequenos, o que comprova que o efeito de escala não se manifesta no método dos elementos de contorno de Galerkin. Isso é um fator que assegura uma boa robustez dessa formulação.

Para completar a análise do problema da placa retangular, na Figura 7.18 mostra-se a variação do número de condição  $NCond$ , equação (7.12), em função do número de nuvens para as três abordagens. Observa-se que, com o aumento do número de nuvens, os números de condição para as três abordagens têm comportamento similar entre si.

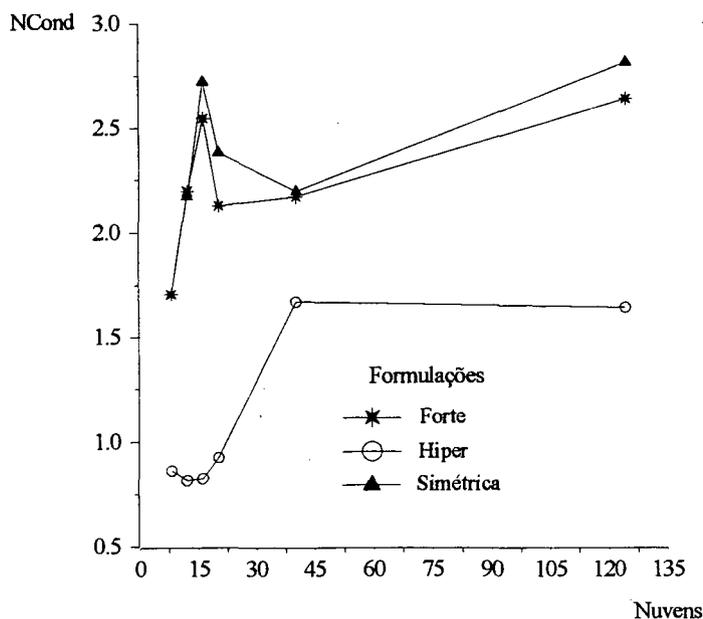


Figura 7.18: Número de condição em função do número de nuvens.

Esse resultado mostra que o condicionamento das matrizes geradas pela partição da

unidade dos três métodos é bom, o que implica uma boa qualidade das suas inversas. Convém salientar que não é empregado qualquer procedimento de pré-condicionamento nas matrizes analisadas.

A análise de condicionamento é restrita apenas às matrizes obtidas com a partição da unidade, porque as geradas pelo enriquecimento hierárquico são singulares. Esse problema é causado pelo fato da partição da unidade ser uma *função tenda* e o enriquecimento ser feito por polinômios de Legendre, o que gera dependência linear entre as linhas das matrizes obtidas. Sendo assim, é necessária a adoção de procedimentos de solução do sistema linear que supere essa dificuldade adicional. Para contornar essa dificuldade, no presente trabalho, a técnica proposta por Duarte *et alli* [22] é utilizada.

## 7.6 Problema de Motz

A robustez de qualquer método numérico para soluções de equações diferenciais é posta à prova na presença de descontinuidades severas de condições de contorno ou de geometria das peças. O problema de Motz, [32] e [42], é um padrão bastante eficaz para este tipo de análise. O problema consiste em uma placa plana com geometria e carregamento mostrados na Figura 7.19.

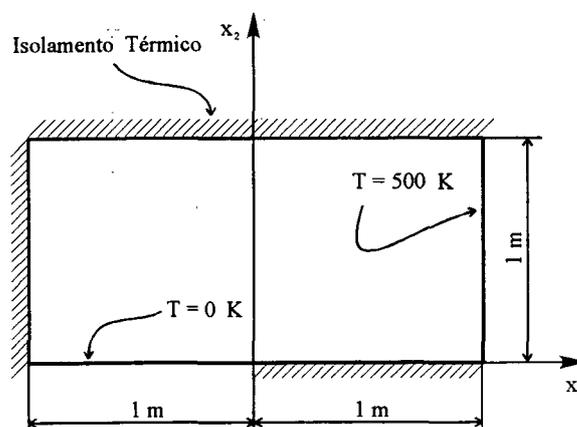


Figura 7.19: Problema de Motz, suas dimensões e carregamentos.

A solução desse problema é dada na forma de séries [42] por:

$$T(r, \theta) = \sum_{l=0}^M b_l r^{l+\frac{1}{2}} \cos\left(l + \frac{1}{2}\right)\theta \quad (7.18)$$

onde  $(r, \theta)$  são coordenadas polares e  $b_l$  são coeficientes da série. Salienta-se que a singularidade dessa solução ocorre no fluxo em  $x_1 = x_2 = 0$ .

A energia para esse problema, equação 7.3, calculada com sete dígitos significativos [32], vale

$$\left\| \tilde{T}(\mathbf{x}) \right\|_E^2 = 85079.28 [W K m^{-1}]. \quad (7.19)$$

A comparação é realizada através de quatro estratégias de modelamento:

1. *malha com espaçamento e enriquecimento uniformes das nuvens;*
2. *malha com espaçamento uniforme e enriquecimento  $p$  adaptativo;*
3. *enriquecimento uniforme e espaçamento em progressão geométrica com razão 0.15 na direção da singularidade;*
4. *enriquecimento  $p$  adaptativo e espaçamento em progressão geométrica na direção da singularidade.*

Cada estratégia tem os seus resultados apresentados em três figuras, onde a primeira figura corresponde ao problema discretizado por quinze (15) nuvens, sendo a segunda e a terceira correspondentes ao problema discretizado por trinta (30) e trinta e cinco (35) nuvens respectivamente. Cada figura representa o erro percentual relativo  $\eta$ , equação (7.8), em função número de graus de liberdade  $NGL$  (que cresce pelo enriquecimento hierárquico).

Em função das estratégias de análise, vale observar que o aumento do número de graus de liberdade da primeira e da terceira estratégias é diretamente relacionado com o grau do polinômio enriquecedor, pois o enriquecimento é uniforme. Assim, o primeiro passo de cada uma das primeiras seis figuras corresponde a um enriquecimento de grau zero, ou seja, a própria partição da unidade. Do segundo até o sexto e último passo tem-se a correspondência dos enriquecimentos por polinômios de Legendre com grau um até cinco, respectivamente.

Nessas seis figuras o grau do polinômio enriquecedor é explicitamente indicado em cada passo do enriquecimento.

Para a segunda e a última estratégias, como o enriquecimento é  $p$  adaptativo e não existe uma correlação óbvia do número de graus de liberdade do modelo com o grau das funções enriquecedoras, a distribuição do grau das funções enriquecedoras de cada nuvem é tratada de forma especial no final deste item.

### 7.6.1 Motz – primeira estratégia de análise

O objetivo dessa primeira estratégia é o de observar a convergência da solução para o caso das nuvens dispostas com espaçamento constante e enriquecimento uniforme.

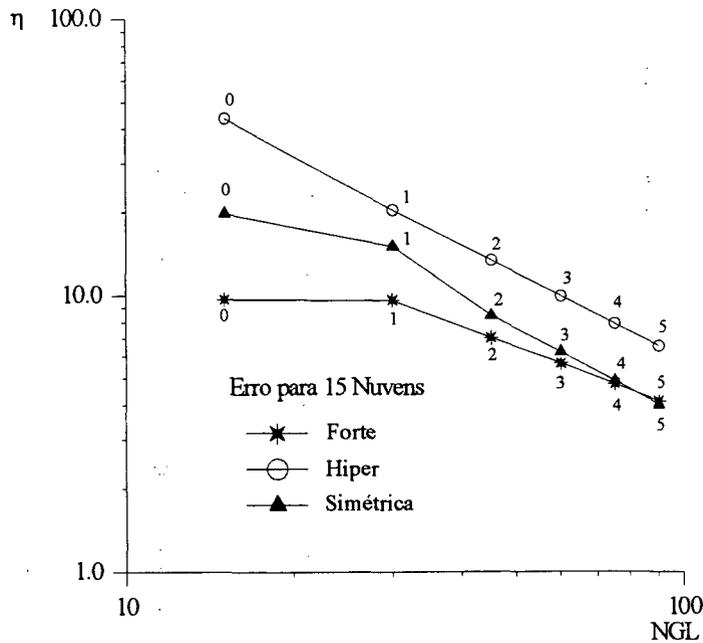


Figura 7.20: Erro  $\eta$  para três nuvens por contorno com enriquecimento  $p$  e espaçamento uniformes.

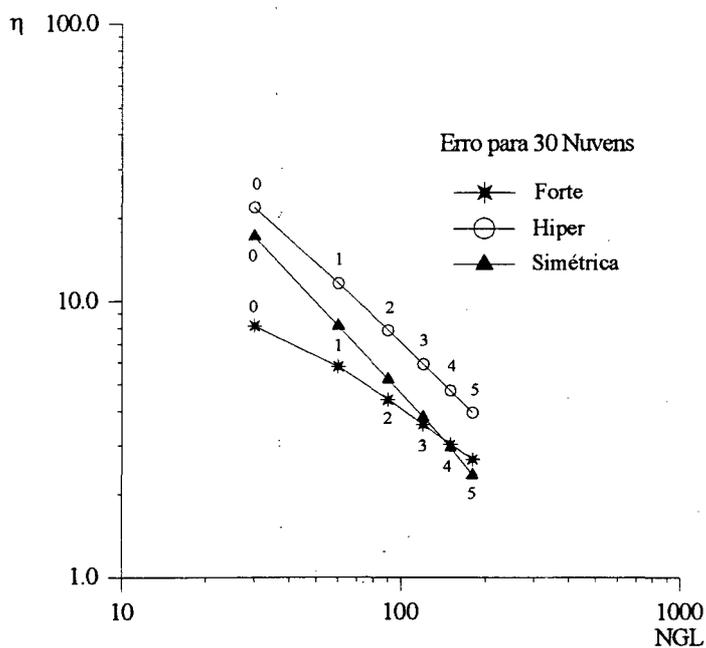


Figura 7.21: Erro  $\eta$  para seis nuvens por contorno com enriquecimento  $p$  e espaçamento uniformes.

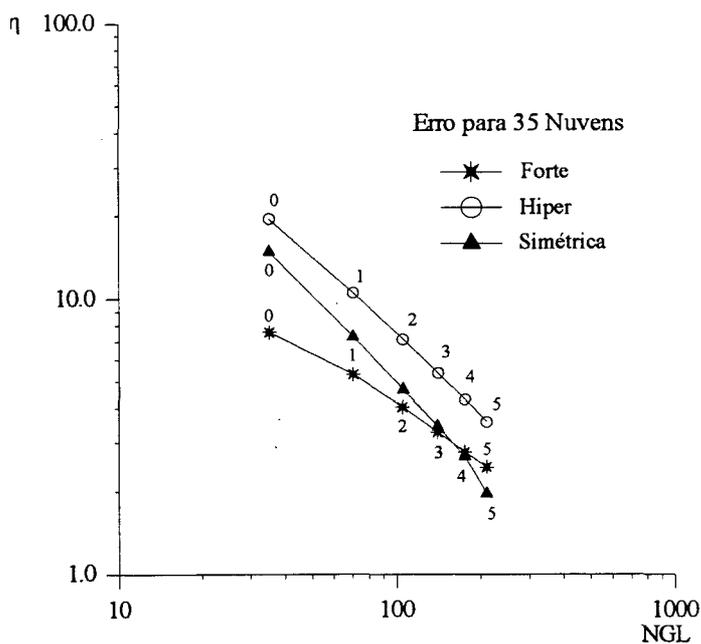


Figura 7.22: Erro  $\eta$  para sete nuvens por contorno com enriquecimento  $p$  e espaçamento uniformes.

### 7.6.2 Motz – segunda estratégia de análise

Nessa segunda estratégia, as nuvens também estão dispostas com espaçamento uniforme, porém o enriquecimento polinomial é adaptativo.

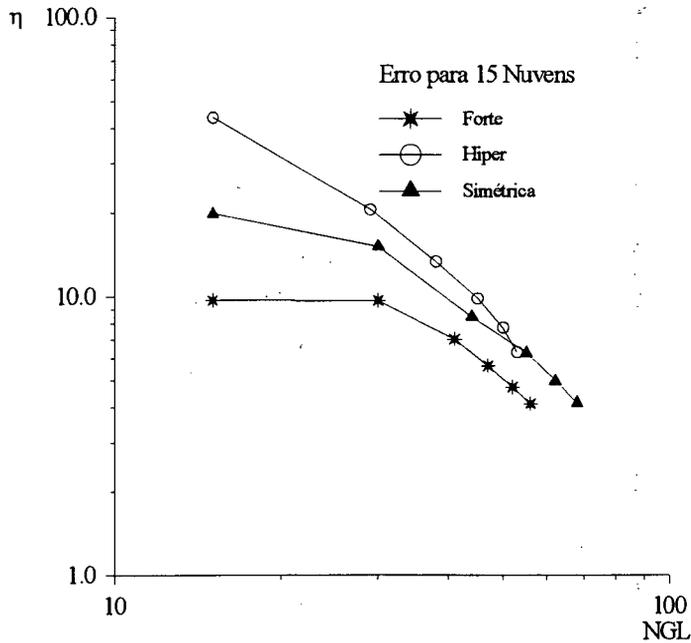


Figura 7.23: Erro  $\eta$  para três nuvens por contorno com enriquecimento  $p$  adaptativo e espaçamento uniforme.

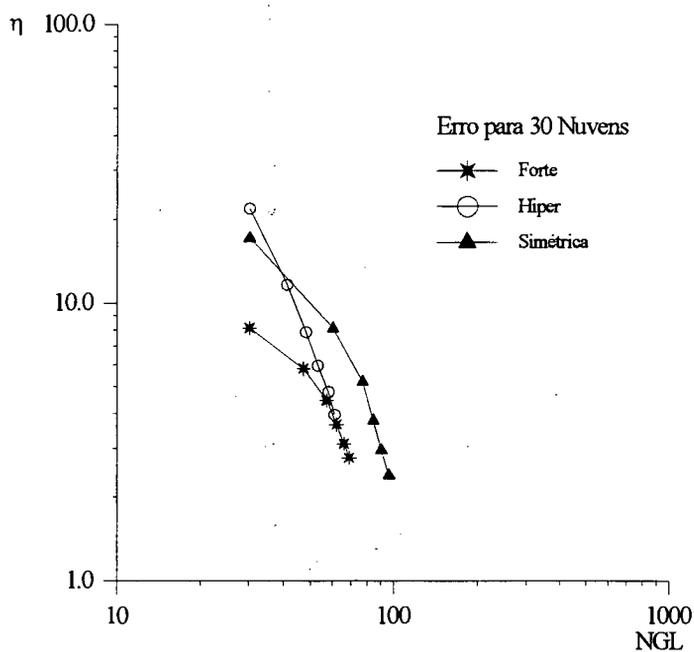


Figura 7.24: Erro  $\eta$  para seis nuvens por contorno com enriquecimento  $p$  adaptativo e espaçamento uniforme.

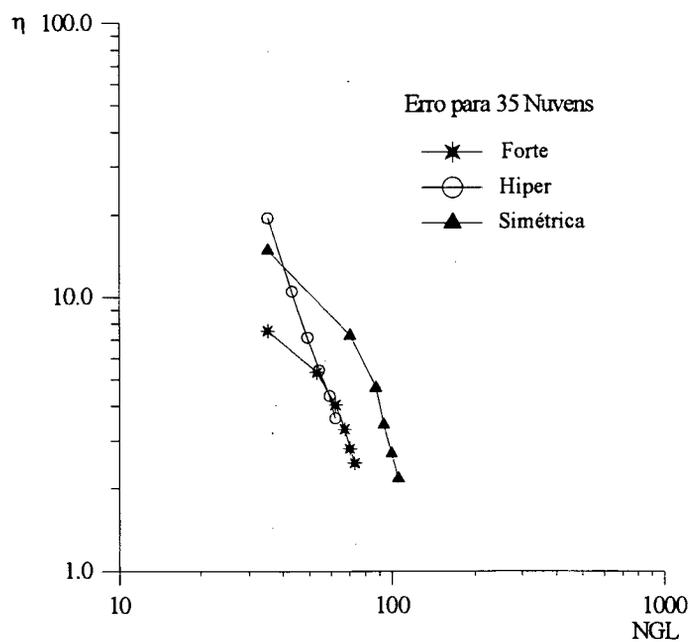


Figura 7.25: Erro  $\eta$  para sete nuvens por contorno com enriquecimento  $p$  adaptativo e espaçamento uniforme.

### 7.6.3 Motz – terceira estratégia de análise

Nessa análise as nuvens estão dispostas com espaçamento em progressão geométrica com razão 0.15 em direção à singularidade, sendo o enriquecimento  $p$  homogêneo ou uniforme. O objetivo dessa análise é o de avaliar o efeito da distribuição das nuvens na convergência do método.

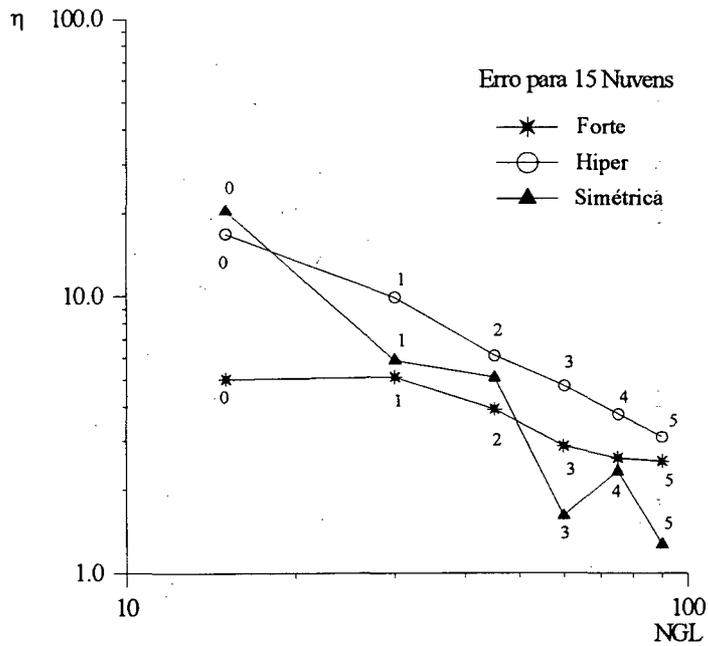


Figura 7.26: Erro  $\eta$  para três nuvens com espaçamento não uniforme e enriquecimento  $p$  uniforme.

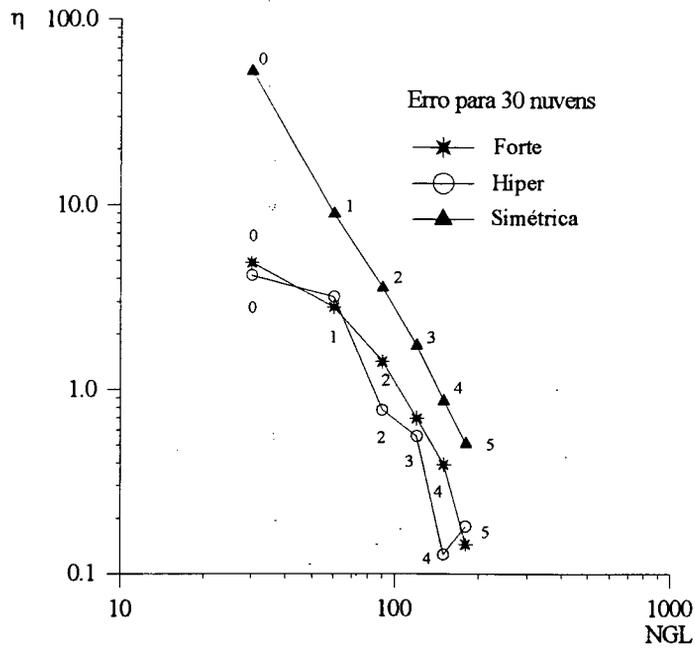


Figura 7.27: Erro  $\eta$  para seis nuvens por contorno com enriquecimento  $p$  uniforme e espaçamento não uniforme.

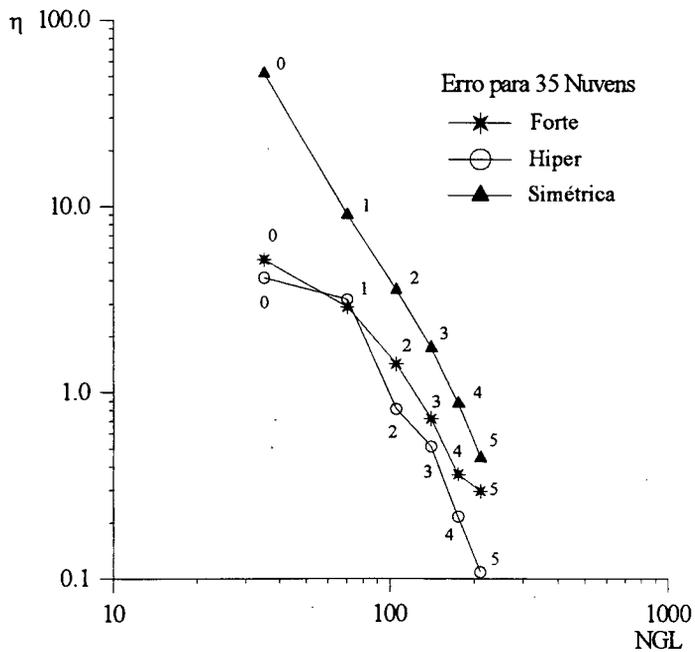


Figura 7.28: Erro  $\eta$  para sete nuvens por contorno com enriquecimento  $p$  uniforme e espaçamento não uniforme.

### 7.6.4 Motz – quarta estratégia de análise

Nessa quarta estratégia as nuvens também estão dispostas com espaçamento em progressão geométrica com razão 0.15 em direção à singularidade, porém o enriquecimento é  $p$  adaptativo, sendo que o objetivo dessa análise é o de verificar o efeito do enriquecimento  $p$  associado à distribuição não uniforme das nuvens na região da perturbação, o que simula um procedimento  $hp$  adaptativo.

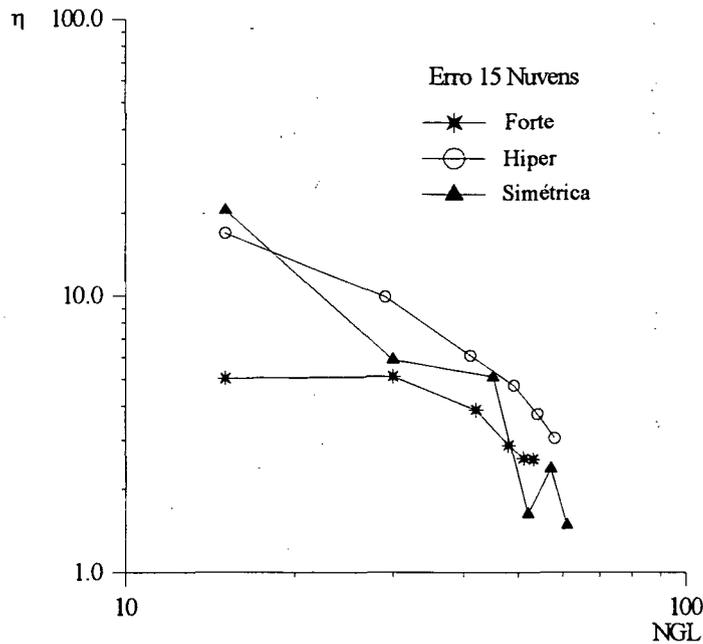


Figura 7.29: Erro  $\eta$  para o caso de três nuvens por fronteira em progressão geométrica e enriquecimento  $p$  adaptativo.

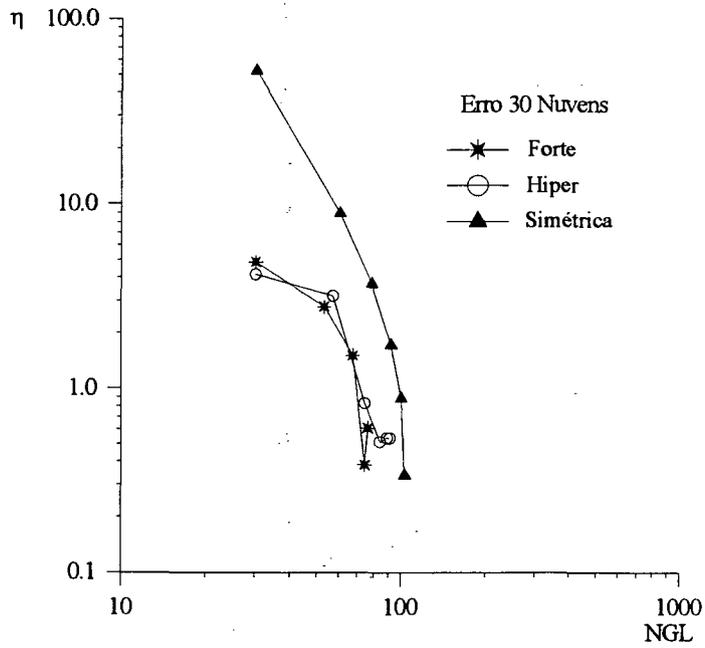


Figura 7.30: Erro  $\eta$  para o caso de seis nuvens por fronteira em progressão geométrica e enriquecimento  $p$  adaptativo.

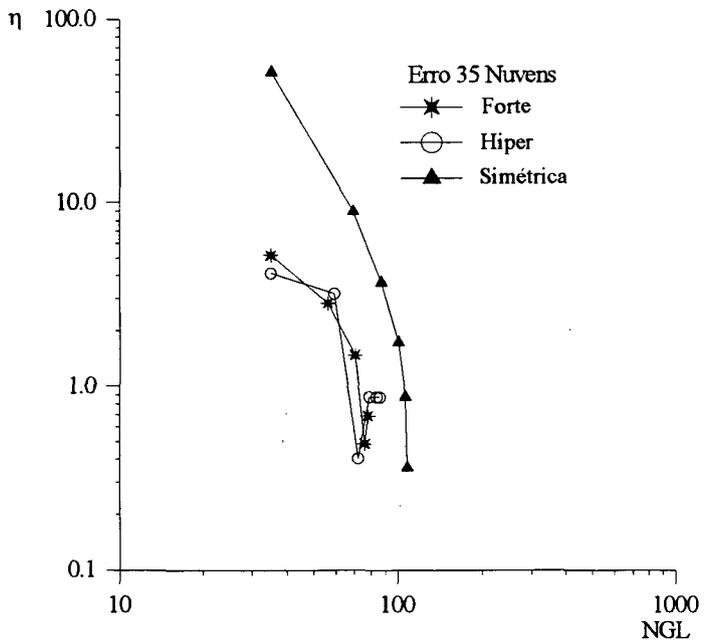


Figura 7.31: Erro  $\eta$  para o caso de sete nuvens por fronteira em progressão geométrica e enriquecimento  $p$  adaptativo.

Tabela 7.6: Taxas de convergência para o caso de 30 nuvens.

Enriquecimento $p$ uniforme - 30 nuvens						
	Forte		Hiper		Simétrica	
$NGL$	$\eta$	$a$	$\eta$	$a$	$\eta$	$a$
30	4.8833	—	4.1764	—	53.0695	—
60	2.8024	0.8012	3.1973	0.3854	8.9439	2.5689
90	1.4197	1.6772	0.7772	3.4881	3.5606	2.2716
120	0.7000	2.4579	0.5607	1.1351	1.7336	2.5019
150	0.3926	2.5917	0.1271	6.6528	0.8686	3.0968
180	0.1443	5.4883	0.1810	-1.9409	0.5081	2.9409

### 7.6.5 Motz – análise da convergência da discretização

Com os resultados apresentados é importante definir uma medida de convergência para a análise destes. Uma medida bastante usada pelos autores do método dos elementos de contorno e finitos, podendo ser citado Holzer [33], é a inclinação da reta que une dois pontos consecutivos dos gráficos  $\eta \times NGL$ . Sendo assim, define-se a taxa de convergência "a" como:

$$a = \frac{\log(\eta_1/\eta_2)}{\log(NGL_1/NGL_2)} \quad (7.20)$$

onde:  $\eta_i$  é o erro correspondente ao  $i$ -ésimo  $NGL_i$ .

Vale observar que a convergência da curva  $\eta \times NGL$  com a taxa "a" constante com o aumento do número de graus de liberdade, é denominada de *algébrica*, enquanto que se as taxas forem continuamente crescentes com o aumento de  $NGL$  a convergência é denominada de *exponencial* (Szabó & Babuška [66]).

Com essa definição, as taxas de convergência dos resultados apresentados nas Figuras 7.27 e 7.28 estão apresentadas nas Tabelas 7.6 e 7.7.

Nas Tabelas 7.8 e 7.9 estão mostradas as taxas de convergência que os três métodos apresentam nas Figuras 7.30 e 7.31, para 30 e 35 nuvens com enriquecimento  $p$  adaptativo.

Tabela 7.7: Taxa de convergência para 35 nuvens.

Enriquecimento $p$ uniforme - 35 nuvens						
	Forte		Hiper		Simétrica	
$NGL$	$\eta$	$a$	$\eta$	$a$	$\eta$	$a$
35	5.1820	—	4.1339	—	51.8	—
70	2.8736	0.8507	3.1530	0.3908	8.9581	2.5317
105	1.4211	1.7366	0.8146	3.3381	3.5501	2.2828
140	0.7236	2.3460	0.5119	1.6148	1.7333	2.4922
175	0.3631	3.0904	0.2149	3.8892	0.8696	3.0909
210	0.2946	1.1476	0.1083	3.7569	0.4444	3.6822

Tabela 7.8: Taxa do erro para 30 nuvens com enriquecimento  $p$  adaptativo.

Enriquecimento $p$ adaptativo - 30 nuvens								
Forte			Hiper			Simétrica		
$NGL$	$\eta$	$a$	$NGL$	$\eta$	$a$	$NGL$	$\eta$	$a$
30	4.8833	—	30	4.1764	—	30	53.069	—
53	2.7912	0.9829	57	3.1995	0.4152	60	8.9439	2.5689
67	1.5144	2.6085	74	0.8329	5.1560	78	3.6976	3.3667
74	0.3836	13.8190	84	0.5128	3.8269	92	1.7263	4.6141
76	0.6105	-17.4257	89	0.5393	-0.8698	100	0.8837	8.0311
—	—	—	91	0.5370	0.1892	103	0.3364	32.677

Tabela 7.9: Taxa de convergência para 35 nuvens com enriquecimento  $p$  adaptativo.

Enriquecimento $p$ adaptativo - 35 nuvens								
Forte			Hiper			Simétrica		
$NGL$	$\eta$	$a$	$NGL$	$\eta$	$a$	$NGL$	$\eta$	$a$
35	4.8833	—	35	4.1764	—	35	51.8	—
56	2.7911	1.2849	59	3.1995	0.4888	69	8.9582	2.5853
70	1.5144	2.9127	72	0.8329	10.3948	87	3.6697	3.8501
76	0.3836	13.516	79	0.5128	-8.3314	100	1.7386	5.3643
78	0.6105	-13.427	84	0.5393	0.0661	106	0.8744	11.795
—	—	—	86	0.5370	0.0639	108	0.3608	47.351

Tabela 7.10: Erro  $\eta$  para as versões Forte, Hiper e Simétrica na primeira estratégia.

Primeira estratégia						
	Forte		Hiper		Simétrica	
Nº de nuvens	<i>NGL</i>	$\eta$	<i>NGL</i>	$\eta$	<i>NGL</i>	$\eta$
15	90	4.1314	90	6.5583	90	4.0172
30	180	2.6784	180	3.9581	180	2.3473
35	210	2.4399	210	3.5613	210	1.9578

### Análise do erro da primeira estratégia

Para a primeira estratégia, onde o problema é analisado com nuvens com espaçamento e enriquecimento uniformes, Figuras 7.20, 7.21 e 7.22, há uma tendência bastante parecida de comportamento dos três métodos com o aumento do número de graus de liberdade, independentemente do número de nuvens. Nessa situação observa-se uma nítida vantagem da versão Forte para um número pequeno de graus de liberdade, sendo que para um número maior de graus de liberdade a vantagem passa a ser da formulação Simétrica. A versão Hiper apresenta o pior desempenho nessa situação. O tipo de convergência apresentada pelas três versões para esta modelagem é a algébrica, pois a inclinação das retas que unem os pontos de cada curva se mantém constante com o aumento do número de graus de liberdade.

### Análise do erro da segunda estratégia

Na segunda estratégia, onde o problema é analisado com nuvens uniformemente espaçadas e enriquecimento  $p$  adaptativo, Figuras 7.23, 7.24 e 7.25, há um comportamento semelhante da convergência dos três métodos com o aumento do número de graus de liberdade *NGL*, independentemente do número de nuvens. Convém salientar que os erros são altos quando o número de nuvens é baixo.

Nessa segunda estratégia observa-se uma nítida vantagem do procedimento de enriquecimento adaptativo em relação ao uniforme, empregado na primeira estratégia. Essa vantagem se traduz em um número de graus de liberdade bem menor para aproximadamente o mesmo erro, como se verifica nas Tabelas 7.10 e 7.11.

O tipo de convergência apresentada pelas três versões para essa modelagem é a algébrica, pois a inclinação das retas que unem os pontos de cada curva, na região assintótica, não

Tabela 7.11: Erro  $\eta$  para as versões Forte, Hiper e Simétrica na segunda estratégia.

Segunda estratégia						
	Forte		Hiper		Simétrica	
Nº de nuvens	<i>NGL</i>	$\eta$	<i>NGL</i>	$\eta$	<i>NGL</i>	$\eta$
15	56	4.1195	53	6.2952	68	4.1469
30	69	2.7871	61	2.7851	96	2.4067
35	73	2.4832	62	3.6181	105	2.1785

crece continuamente com o aumento do número de graus de liberdade.

### Análise do erro da terceira estratégia

Para a terceira estratégia, onde a discretização é feita com o espaçamento em progressão geométrica na direção da singularidade, nota-se um comportamento pré-assintótico na versão Simétrica, quando o número de nuvens é pequeno, como se observa na Figura 7.26. Esse comportamento desaparece quando o número de nuvens é maior, porém o erro apresentado, para um mesmo número de graus de liberdade, é o maior das três versões, como pode ser observado nas Figuras 7.27 e 7.28. Adicionalmente, a versão Forte também apresenta um comportamento pré-assintótico quando o número de nuvens é baixo. O comportamento do erro da Hiper não é algébrico, enquanto que a convergência da solução para as versões Forte e Simétrica é exponencial, como pode ser visualizado nas Figuras 7.27 e 7.28 e nas Tabelas 7.6 e 7.7, respectivamente, exceto para o segmento que liga o enriquecimento de quarta e quinta ordem da versão Forte (Tabela 7.7).

### Análise do erro da quarta estratégia

Para a última estratégia de análise do problema de Motz, onde o enriquecimento é  $p$  adaptativo e o espaçamento é em progressão geométrica na direção da singularidade (malha geométrica [66]), os resultados são apresentados nas Figuras 7.29, 7.30 e 7.31. Observa-se nestas figuras que a formulação Simétrica apresenta comportamento exponencial somente para a análise feita com 30 e 35 nuvens.

Quanto às formulações Forte e Hiper, o comportamento é assintótico desde um número bastante pequeno de nuvens, porém para as análises feitas com 30 e 35 nuvens, Figuras 7.27 e 7.28, respectivamente, há um aumento do erro com o crescimento de *NGL*. Um crescimento

do erro, semelhante ao observado nesta quarta análise, também acontece para a versão Hiper na segunda estratégia, Figura 7.27. Levando em consideração esses comportamentos, fica evidente que o problema é causado pelo mau condicionamento das matrizes com alto enriquecimento. Este efeito não se manifesta quando o espaçamento entre as nuvens em direção à singularidade é constante, Figuras 7.20, 7.21 e 7.22, o que permite concluir que o pequeno tamanho das nuvens próximas à singularidade também está associado ao mau condicionamento das matrizes enriquecidas. Convém salientar que os resultados de Duarte, para o método dos elementos finitos, [23], também apresentam esta característica.

A formulação Simétrica, mesmo com erros iniciais grandes, apresenta um comportamento assintótico com taxas de convergência exponencial, como está sumarizado nas Tabelas 7.8 e 7.9, o que permite a obtenção de erros menores, em relação às outras duas versões, com o aumento do número de graus de liberdade,  $NGL$ . Esse comportamento mais estável da forma Simétrica mostra a menor sensibilidade desta versão aos problemas de condicionamento das suas matrizes.

### 7.6.6 Motz – análise da distribuição do grau da discretização

Para finalizar o estudo do problema de Motz com as três versões desenvolvidas, passa-se a investigar a influência do indicador de erro no enriquecimento  $p$  adaptativo das funções da base. Para isso são usados os resultados das análises da quarta estratégia, Figuras 7.30 e 7.31, obtidos com 30 e 35 nuvens. Para um melhor entendimento do posicionamento das nuvens na discretização, as nuvens de começo e final de cada fronteira são mostradas nas Figuras 7.32 e 7.33.

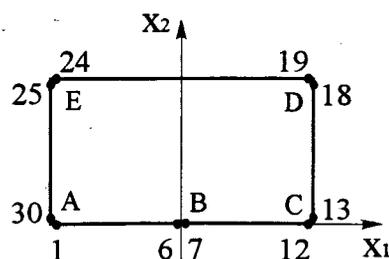


Figura 7.32: Distribuição das nuvens ao longo do contorno para a análise do problema de Motz com 30 nuvens.

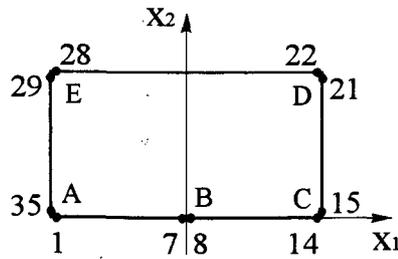


Figura 7.33: Distribuição das nuvens ao longo do contorno para a análise do problema de Motz com 35 nuvens.

Vale observar que a singularidade do fluxo ocorre no ponto B, mostrado nas duas últimas figuras, compartilhado pelas nuvens 6 e 7, bem como pelas nuvens 7 e 8 no modelamento com 30 e 35 nuvens, respectivamente. A distribuição das nuvens de 1 a 6 e a de 7 a 12, bem como a das nuvens 1 a 7 e 8 a 14, mostradas nas Figuras 7.32 e 7.33, é em progressão geométrica com razão 0,15 na direção do ponto B.

Os resultados que estão mostrados nas Figuras 7.34 a 7.39 indicam o grau da polinomial de cada nuvem ao longo do contorno do corpo na solução do problema.

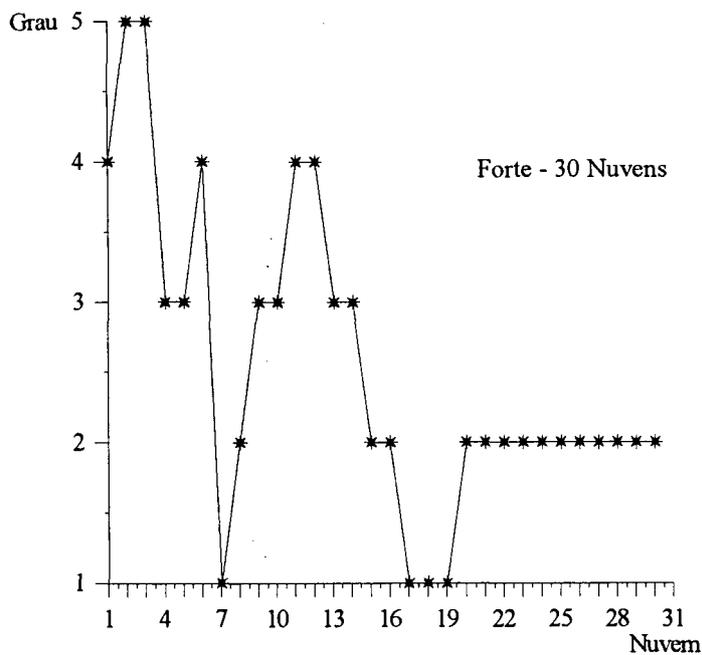


Figura 7.34: Distribuição do grau da solução aproximada para cada nuvem do contorno do problema de Motz analisado com 30 nuvens pela versão Forte.

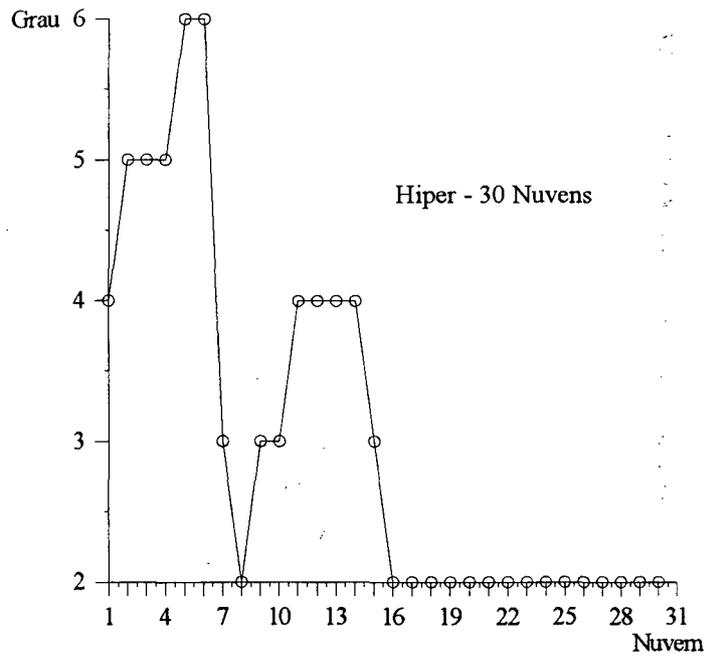


Figura 7.35: Distribuição do grau da solução aproximada para cada nuvem do contorno do problema de Motz analisado com 30 nuvens pela versão Hiper.

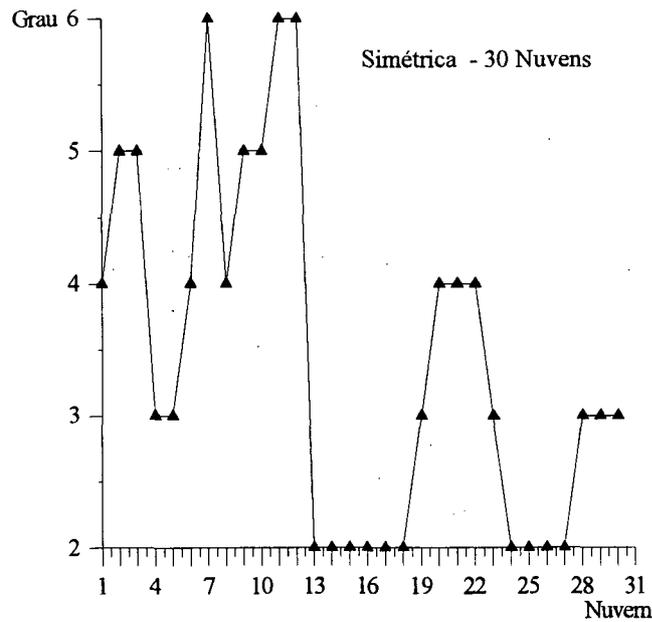


Figura 7.36: Distribuição do grau da solução aproximada para cada nuvem do contorno do problema de Motz analisado com 30 nuvens pela versão Simétrica.

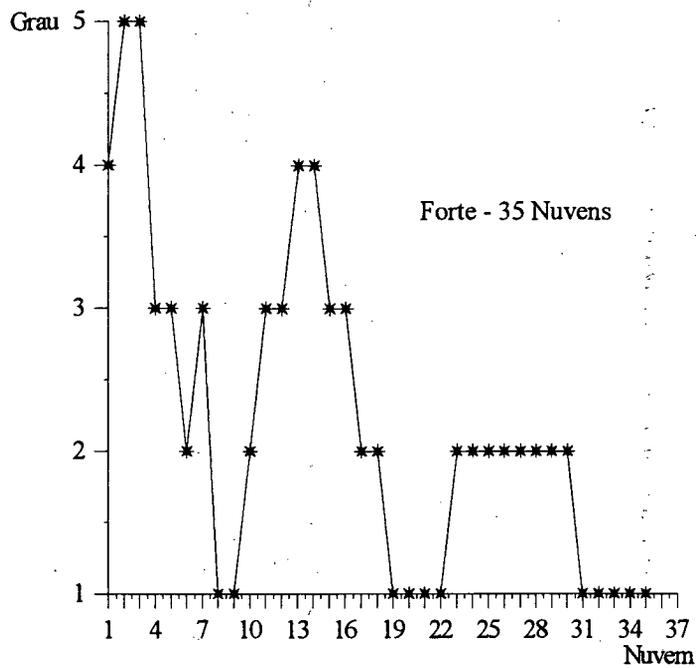


Figura 7.37: Distribuição do grau da solução aproximada para cada nuvem do contorno do problema de Motz analisado com 35 nuvens pela versão Forte.

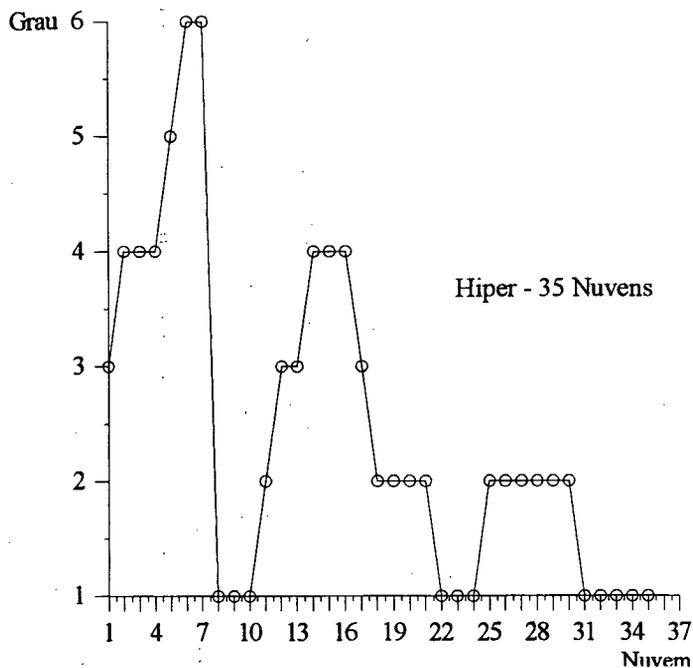


Figura 7.38: Distribuição do grau da solução aproximada para cada nuvem do contorno do problema de Motz analisado com 35 nuvens pela versão Hiper.

Tabela 7.12: Distribuição do grau da aproximação para a quarta estratégia.

Distribuição do grau para Figura 7.32							
	Região BA			Região BC			
Nuvem	Forte	Hiper	Simétrica	Nuvem	Forte	Hiper	Simétrica
6	4	6	4	7	1	3	6
5	3	6	3	8	2	2	4
4	3	5	3	9	3	3	5
3	5	5	5	10	3	3	5
2	5	5	5	11	4	4	6
1	4	4	4	12	4	4	6

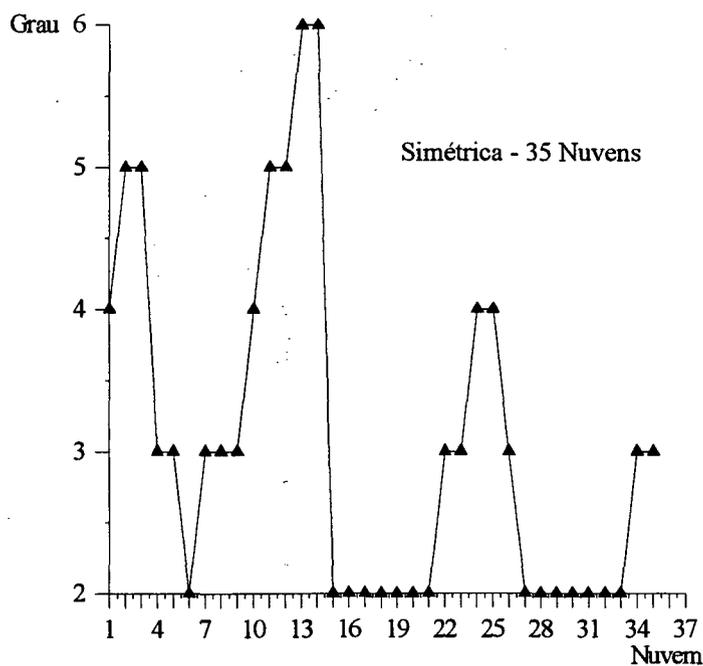


Figura 7.39: Distribuição do grau da solução aproximada para cada nuvem do contorno do problema de Motz analisado com 35 nuvens pela versão Simétrica.

Para facilitar o entendimento das considerações apresentadas no final desse item, os resultados apresentados nas Figuras 7.34 a 7.39 estão sintetizados nas Tabelas 7.12 e 7.13 para as nuvens situadas na região próxima da singularidade, ou seja, nas faces AB e BC das Figuras 7.32 e 7.33. Vale explicar que a primeira linha dessas duas tabelas representa o ponto onde ocorre a singularidade e, a última, os vértices A e C do retângulo mostrado nas Figuras 7.34 a 7.39, o que justifica a numeração decrescente das nuvens das primeiras colunas.

Tabela 7.13: Distribuição do grau da aproximação para a quarta estratégia.

Distribuição do grau para Figura 7.33							
	Região BA			Região BC			
Nuvem	Forte	Hiper	Simétrica	Nuvem	Forte	Hiper	Simétrica
7	3	6	3	8	1	1	3
6	2	6	2	9	1	1	3
5	3	5	3	10	2	1	4
4	3	4	3	11	3	2	5
3	5	4	5	12	3	3	5
2	5	4	5	13	4	3	6
1	4	3	4	14	4	4	6

### Considerações adicionais

A convergência teórica dos processos adaptativos é um importante parâmetro na qualificação de métodos numéricos pretensamente adaptativos. Para o método dos elementos de contorno variacional ou de Galerkin, o estudo teórico da convergência para a adaptatividade  $p$  é feito por uma série de autores da área, podendo ser citados, dentre vários: Schawatz *et alii* [59], Postell e Stephan [56], Stephan e Suri [64] e Yu [75]. Todos estes autores provam que o erro da aproximação para adaptatividade  $p$  em malhas quase uniformes (espaçamento entre as nuvens quase uniforme) é algébrica nas normas de Sobolev, ou seja, as taxas de convergência não são crescentes com o aumento do grau da polinomial empregada na discretização (diretamente relacionado ao número de graus de liberdade  $NGL$ ). A convergência teórica para a adaptatividade  $p$ , segundo os autores acima citados, é dada por

$$\|w - w_p\|_{H^\gamma} \leq Cp^{-(s-\gamma)} \|w\|_{H^s}, \tag{7.21}$$

onde

$\|\cdot\|_{H^\gamma}$  é a norma de Sobolev  $H^\gamma$ ;

$w \in H^s(\Gamma)$  é a solução exata do problema;

$w_p$  é a solução aproximada do problema, pertencente à família  $\mathcal{F}_N^p$ ;

$p = 0, 1, 2, 3, \dots$ ;

$C$  é uma constante independente de  $p$  mas depende da partição de  $\Gamma$  e de  $s$ ;

$\gamma$  é relacionado com a ordem do operador integral;

$H^s$  é o espaço que contém a solução exata do problema.

Como as normas de Sobolev e as normas de energia são equivalentes [38], pode ser afirmado que a convergência geométrica da adaptatividade  $p$  apresentada pela formulação Simétrica, como nas análises feitas na primeira e segunda estratégias, está de acordo com as taxas de convergência teóricas, equação 7.21, para o método dos elementos de contorno de Galerkin simétrico ou variacional.

Quanto às versões Forte e Hiper, o comportamento da convergência assintótica também é geométrico, o que indica que a adaptatividade  $p$ , desenvolvida no presente trabalho, também funciona para estas duas formulações não simétricas.

Nas análises feitas na terceira e quarta estratégias, onde a distribuição das nuvens próximas à singularidade está em progressão geométrica em direção desta, simula-se a adaptatividade  $hp$ . Sendo assim, é possível estabelecer uma relação entre as taxas de convergência apresentadas na terceira e quarta estratégias com a taxa teórica de convergência da adaptatividade  $hp$ . Para a adaptatividade  $hp$ , as taxas de convergência teóricas do erro, Stephan [56] e [65], Babuška [3], nas normas de Sobolev, são dadas por

$$\|e\|_{H^t} \leq C^* e^{-b\sqrt{NGL}}, \quad (7.22)$$

onde

$\|\cdot\|_{H^t}$  é a norma de Sobolev  $H^t$ ;

$e = \Phi - \Phi_p$  é o erro;

$NGL$  é o número de graus de liberdade;

$C^*$  e  $b$  são constantes positivas que dependem da distribuição das nuvens mas não do  $NGL$ .

Os resultados obtidos pela formulação Simétrica na estratégia quatro apresenta este comportamento, o que indica que o Método das Nuvens é eficiente para a adaptatividade  $hp$  nos Elementos de Contorno. As outras duas versões também apresentam taxa de convergência exponencial para esta quarta estratégia, especialmente onde não se manifestam os problemas de mau condicionamento de suas matrizes.

Para que se possa completar esta análise e possam ser traçados paralelos com outro método, no caso os elementos finitos, cita-se Babuška [6]:

- A condição mínima requerida para um algoritmo  $hp$  de elementos finitos é que a sequência de soluções gerada por este convirja. Adicionalmente, se a taxa da convergência assintótica não for a exponencial, o código não pode ser caracterizado como adaptativo.

- "True Optimal Mesh" é a malha onde o tamanho dos seus elementos decresce em progressão geométrica em direção à singularidade e o grau dos elementos cresce em uma função aproximadamente linear ao se afastar desta, contado a partir do segundo elemento. Adicionalmente, o grau do elemento junto à singularidade é maior ou igual ao do segundo elemento.

Os resultados obtidos pela formulação Simétrica para o problema de Motz na estratégia quatro, quanto às taxas de convergência bem como quanto à distribuição do grau dos polinômios da base, Tabelas 7.12 e 7.13, estão em concordância com as afirmações de Babuška. Isso mostra que o Método das Nuvens é uma ferramenta aplicável ao método variacional dos elementos de contorno e aos processos  $p$  e  $hp$  adaptativos.

Adicionalmente, a formulação Forte, para o problema de Motz na estratégia quatro, também apresenta um comportamento bastante próximo das observações de Babuška, o que indica que o Método das Nuvens e o estimador de erros empregado também é robusto para esta abordagem na adaptatividade  $p$  e  $hp$ .

## 7.7 Problema do domínio L

Para finalizar esse capítulo de resultados, faz-se a análise do problema de distribuição de calor em um corpo com formato em L, ou seja, o *L-Shape Domain*. A geometria do problema analisado, o sistema de coordenadas bem como as condições de contorno impostas, estão mostradas na Figura 7.40.

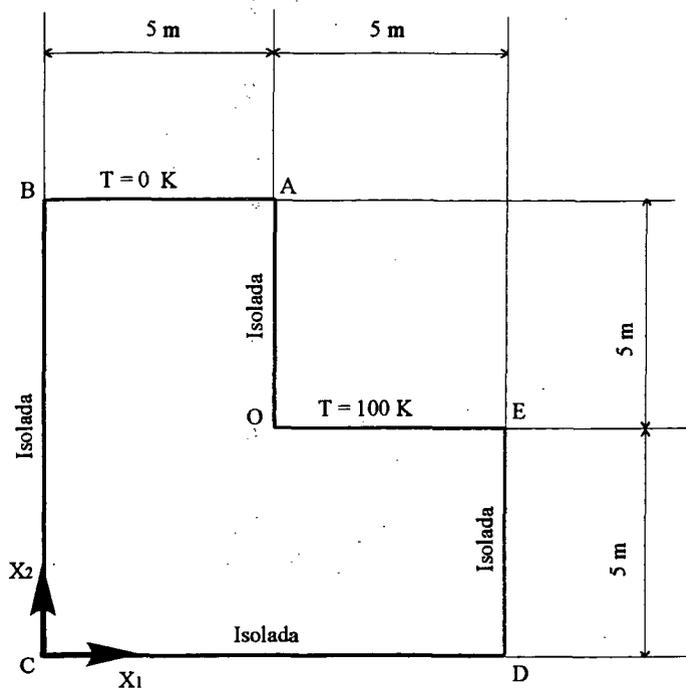


Figura 7.40: Problema do domínio L e suas condições de contorno.

Como esse problema não tem solução exata, um programa comercial de elementos finitos (Ansys versão 5.3), é empregado para a obtenção de outra solução aproximada. Como o programa de elementos finitos empregado não é adaptativo, o objetivo desta análise é de apenas traçar alguns paralelos entre os dois métodos.

Na modelagem por FEM são utilizados elementos quadrilaterais biquadráticos, o que resulta em um sistema com 1872 graus de liberdade. O modelo, mostrado na Figura 7.41, é obtido a partir do gerador automático de malhas do próprio programa, com refinamento do tamanho dos elementos na direção da singularidade, que está localizada no vértice reentrante.

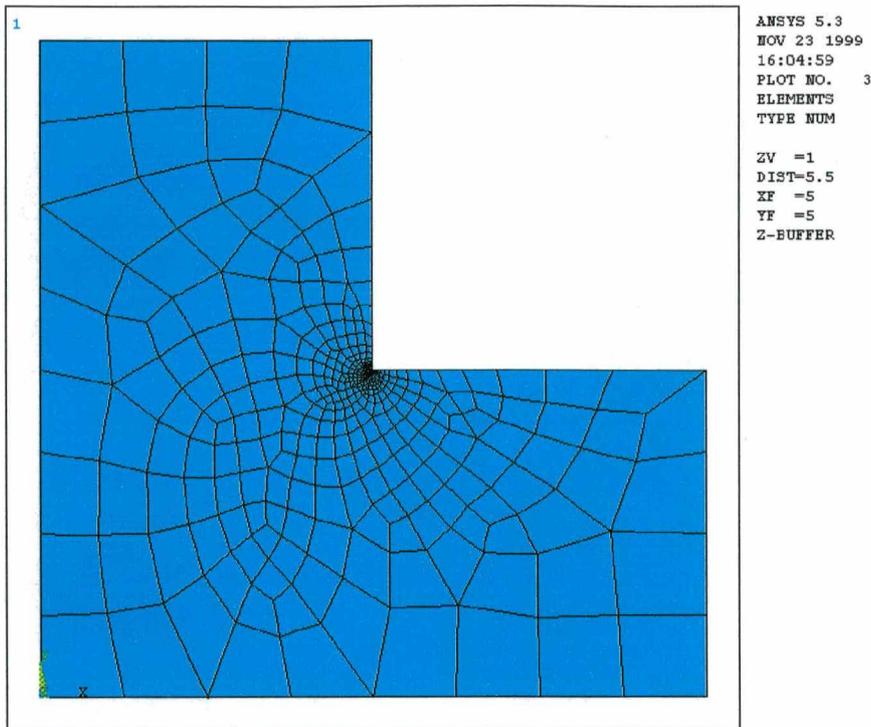


Figura 7.41: Modelo usado para obter os resultados por elementos finitos.

O modelo empregado na obtenção dos resultados, pelas formulações do presente trabalho, tem 20 nuvens uniformemente dispostas nos lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$ , e  $\overline{DE}$ , da Figura 7.40. Os dois últimos lados, respectivamente  $\overline{EO}$  e  $\overline{OA}$ , são discretizados com 26 nuvens, das quais 20 estão uniformemente espaçadas e as 6 restantes estão em progressão geométrica, com razão 0.15 na direção da singularidade, em um intervalo de  $0.25\ m$  em torno do ponto singular. Assim, o modelo ensaiado possui inicialmente 132 graus de liberdade, os quais após o enriquecimento  $p$  adaptativo, aumentam para: 144 na versão Forte, 147 na versão Hiper e 167 na versão Simétrica.

Nas Figuras 7.42, 7.43 e 7.44 é apresentada a comparação direta dos resultados das três versões de Galerkin aqui desenvolvidas, com a solução obtida por elementos finitos. Vale frisar que são apresentados somente os resultados relativos a face  $\overline{EO}$ , mostrada da Figura 7.40, visto que é nesta face que a singularidade no fluxo ocorre. Nesses resultados, as abcissa 5 e 10 correspondem a posição dos pontos O e E mostrados na Figura 7.40.

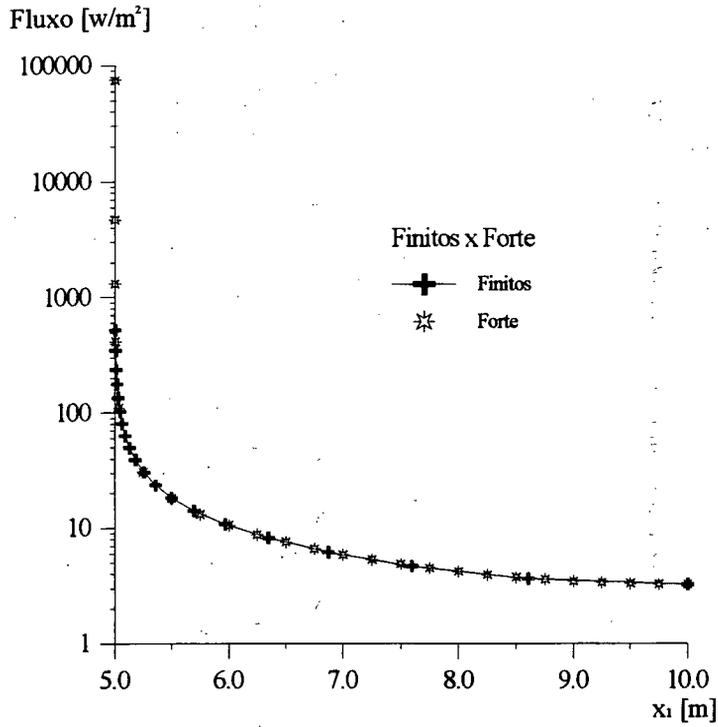


Figura 7.42: Comparação dos resultados do fluxo para a versão Forte versus elementos finitos.

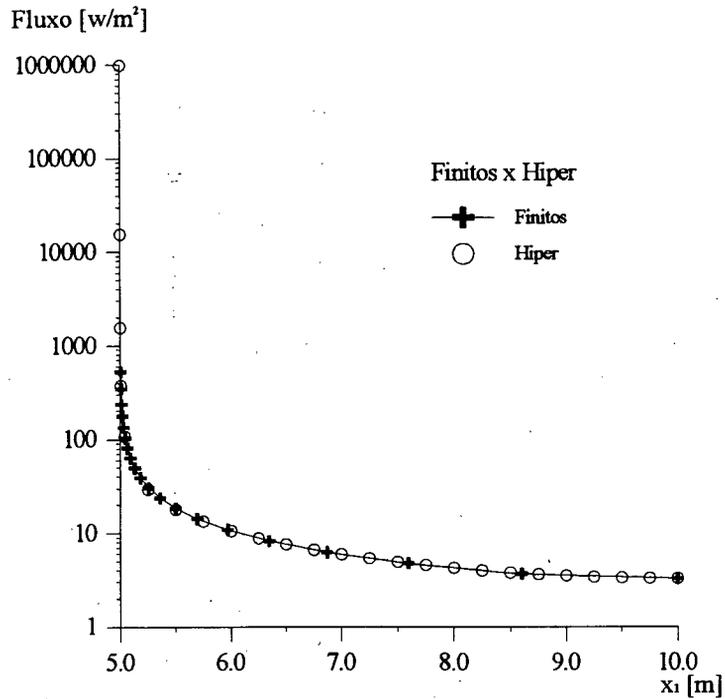


Figura 7.43: Comparação dos resultados do fluxo para a versão Hiper versus elementos finitos.

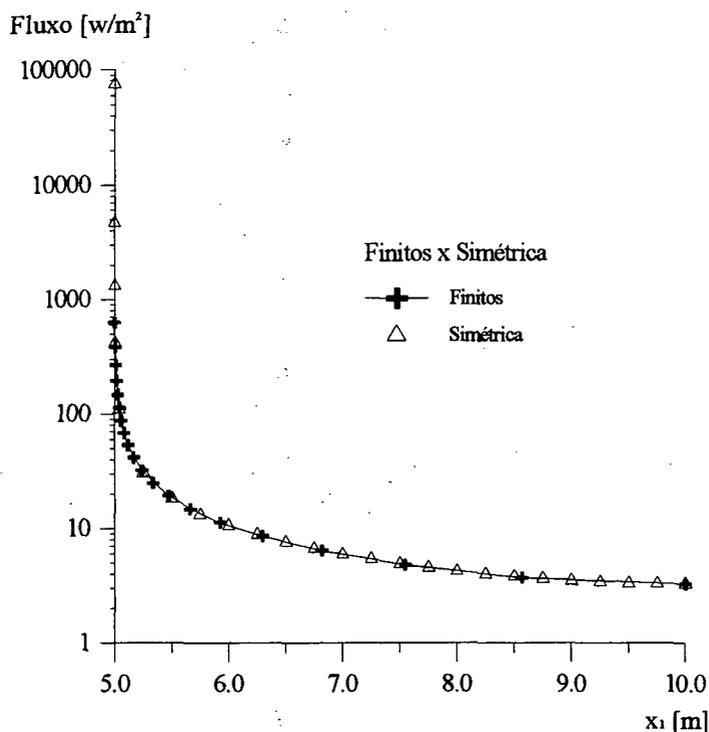


Figura 7.44: Comparação dos resultados do fluxo para a versão Simétrica versus elementos finitos.

Observa-se, nessa análise, que as respostas das metodologias finitos – contorno, tem boa concordância de resultados. Essa concordância ocorre até valores bastante próximos da singularidade (cerca de 0.002 m). Para distâncias menores, o método dos elementos finitos não consegue resultados adequados, como é de se esperar de uma formulação não adaptativa, enquanto que a presente metodologia apresenta resultados coerentes com a expectativa para fluxo no ponto O.

# Capítulo 8

## Conclusões e horizontes para futuros desenvolvimentos

### 8.1 Generalidades

O objetivo principal deste trabalho foi desenvolver e verificar a eficiência dos métodos sem malha, em particular o *hp Clouds Method*, aplicados às formulações integrais de contorno. Um objetivo intermediário atingido foi o domínio da formulação de Galerkin (versões Forte, Hiper e Simétrica) e de seus problemas inerentes (integração, regularização etc.). Os resultados obtidos mostram o potencial da metodologia, sua robustez e versatilidade para soluções adaptativas.

A seguir são apresentadas as principais conclusões alcançadas no decorrer deste trabalho, procurando discriminar aspectos positivos e negativos da técnica proposta.

Adicionalmente é apresentado um delineamento de futuros desenvolvimentos empregando a atual formulação e estrutura computacional desenvolvida.

### 8.2 Conclusão

Durante um desenvolvimento teórico de uma nova metodologia, são esperadas vantagens e desvantagens em relação às metodologias conhecidas. No presente trabalho, as vantagens superam consideravelmente as desvantagens. A seguir são listadas as principais vantagens da presente formulação.

- *O método de Galerkin mostrou-se insensível aos finais de fronteira (equivalente ao nó duplo do método da colocação).*
- *O número de condição para a partição da unidade é baixo, crescendo lentamente com o acréscimo do número de nuvens.*
- *O método de Galerkin, para as abordagens Hiper e Simétrica, não é afetado pelo fator escala em função do procedimento de integração.*
- *O método das nuvens, devido à facilidade natural para a adaptatividade  $p$ , apresenta um comportamento muito satisfatório em processos adaptativos, especialmente para a formulação simétrica de Galerkin.*
- *O enriquecimento  $p$  adaptativo apresenta maior eficiência que o enriquecimento  $p$  uniforme, isto é, menor número de graus de liberdade do sistema de equações para a mesma precisão dos resultados.*
- *A adaptatividade  $p$  em problemas singulares e malhas uniformes apresenta taxas de convergência algébricas.*
- *A adaptatividade  $p$  em problemas singulares com uso de malhas geométricas apresenta taxas de convergência exponenciais.*
- *O esquema de Shepard, empregado pelo método das nuvens, é um procedimento generalizado para a construção de partições da unidade.*
- *O indicador de erros desenvolvido é bastante robusto para a formulação de Galerkin.*
- *O método das nuvens tem boa aplicabilidade à formulação de Galerkin.*
- *A adaptatividade  $p$  acoplada com o método das nuvens é factível e tem bom desempenho no método de Galerkin.*

A seguir são listadas as desvantagens observadas no desenvolvimento.

- *O enriquecimento  $p$  feito com funções de mesmo tipo da partição da unidade (Legendre  $\times$  função tenda) resulta em matrizes singulares.*
- *O emprego da integração analítica para o método de Galerkin na adaptatividade  $p$  torna o código computacional extenso e de difícil depuração.*
- *A construção do sistema de equações na formulação de Galerkin envolve um volume de cálculo muito maior que o da formulação por colocação. A formulação Simétrica compensa esse efeito por dois motivos: o número de termos a ser calculado é menor, e o sistema de equações é simétrico.*

Cotejando as desvantagens e vantagens acima enumeradas, conclui-se que a presente formulação, em relação as existentes, tem boas propriedades para solução de problemas de valores no contorno, o que a torna uma boa ferramenta no aumento do escopo de aplicação da formulação de Galerkin para as equações integrais de contorno.

### 8.3 Horizontes para futuros desenvolvimentos

A adaptatividade  $p$  e o método das nuvens, aqui apresentados, aplicados ao métodos de Galerkin das equações integrais de contorno é apenas um passo inicial, não podendo o tema ser considerado esgotado. Há um caminho muito longo a ser percorrido no desenvolvimento de novas ferramentas de análise para outros tipos de problemas.

Não restringindo o desenvolvimento a outros tópicos, os que seguem são sugestões para desenvolvimentos futuros.

- *Eliminar a restrição da aplicação, do programa desenvolvido, apenas aos problemas limitados por contornos retos. Este trabalho, já se encontra em fase de desenvolvimento.*

- *Introduzir a variável tempo na formulação, de maneira a permitir a análise de problemas transientes.*
- *Aplicar este método para problemas tridimensionais. Este tema, perfeitamente exequível em termos teóricos, apresenta maiores dificuldades nos aspectos computacionais.*
- *Introduzir forças de campo (fontes e sumidouros) na formulação.*
- *Possibilitar que condições de contorno mais complexas possam ser aplicadas.*
- *Verificar a eficiência da integração numérica em relação à semi-analítica que é feita atualmente.*
- *Gerar um banco de dados referente ao número de pontos de integração versus proximidade dos pontos fonte e campo, para maximizar o desempenho da metodologia RISP. Um dos restritores do bom desempenho do método de Galerkin é o custo do cálculo dos termos das matrizes.*
- *Otimizar o programa de tal forma a explorar todas as simetrias possíveis, o que melhoraria o desempenho do método de Galerkin em relação aos elementos de contorno por colocação.*
- *Introduzir novos estimadores de erro a posteriori. Este aspecto constitui um desafio teórico compensador, pois a eficiência do método pode ser substancialmente melhorada se o estimador de erros é adequadamente formulado.*
- *Introduzir a adaptatividade hp no programa desenvolvido bem como indicadores de erros a posteriori associados, já que é mostrada a superioridade do procedimento quando são usadas malhas geométrica na solução de problemas com singularidades.*
- *Introduzir novas partições da unidade, como por exemplo a constante, de tal maneira que fique barato e fácil o cálculo dos termos das matrizes.*

- *Introduzir outras famílias de funções enriquecedoras, tais como funções de Trefftz, com o objetivo de evitar a singularidade das matrizes.*
- *Aplicar a metodologia das nuvens, bem como a adaptatividade  $p$  e  $hp$ , para outros problemas tais como: elasticidade bi e tridimensional, plasticidade, acústica, placas, difusão, eletromagnetismo etc.*

# Referências Bibliográficas

- [1] Ainsworth, M., Zhu, J.Z., Craig, A.W., Zienkiewicz, O.C. Analysis of The Zienkiewicz Zhu A - Posteriori Error Estimator in the Finite Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.28, p.2161-2174, 1989.
- [2] Alarcon, E., Reverter, A. *p*-Adaptative Boundary Elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.23, p.801-829, 1986.
- [3] Babuška, I., Guo. B.Q., Stephan, E.P. The *hp*- Version of the Boundary Element Method With Geometric Mesh on Poligonal Domains. *Computer Methods Appl. Mech. Engrg.*, n.80, p.319-325, 1990.
- [4] Babuška, I., Guo, B.Q. The *h*, *p* and *h-p* Version of the Finite Element Method, Basis Theory and Applications. *Advances in Engineering Software*, v.15, p.159-174, 1992.
- [5] Babuška, I., Melenk, J.M. The particion of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.139, n.1-4, 289-314, 1996.
- [6] Babuška, I., Strouboulis, T., Copps, K. *hp* Optimization of finite element approximations: Analysis of the optimal mesh sequences in one dimension. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, n.150, p.89-108, 1997.
- [7] Balakrishna, C., Gray, L.J., Kane, J.H. Efficient Analytical Integration of Symmetric Galerkin Boundary Integrals over Curved Elements, Elasticity Formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.117, p.157-179, 1994.

- [8] Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L. Element Free Galerkin Methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, n.37, p.229-256, 1994.
- [9] Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M., Krysl, P. Meshless methods: An overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. n.139, p.1-47, 1996.
- [10] Bonnet, M. *Boundary Integral Equations Methods for Solids and Fluids*. England : John Wiley & Sons Ltda., 1995.
- [11] Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., Wrobell, L.C. *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Germany : Springer Verlag, 1984.
- [12] Butkov, E. *Física Matemática*. Brasil : Guanabara Koogan SA., 1988.
- [13] Carstensen, C., Estep, D., Stephan, P. *h-Adaptive boundary element schemes*, *Computational Mechanics*, n.15, p.372-383, 1995.
- [14] Cerrolaza, M. The *p*-adaptative boundary integral equation method. *Advances in Engineering Software*, n.15, p.261-267, 1992.
- [15] Chang, Y.C. Demkowicz, L. Solution of Viscoelastic Scattering Problems in Linear Acoustics Using *hp* Boundary/Finite Element Method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v.44, p.1885-1907, 1999.
- [16] Chen, Z.S., Hofstetter, G., Mang, H. A. A Galerkin-Type BE-FE Formulation for Elasto-Acoustic Coupling. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, n.152, p.147-155, 1998.
- [17] de Barcellos, C.S., Mendonça, P.T.R., Duarte, C.A. Investigations on Timoshenko Beam problems Using the HP- Cloud Meshless FEM. In: IV World Congress on Computation Mechanics. *Anais...* Buenos Aires, Argentina, 1998.
- [18] Demkowicz, L., Oden, J.T., Rachowicz, W., Hardy, O. Toward a Universal h-p Adaptive Finite Element Strategy, Part 1. Constrained Approximation and Data Structure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.77, p.79-112, 1989.

- [19] Duarte, C.A.M. Estudo da Versão p do Método de Elementos Finitos para Problemas da Elasticidade e de Potencial. Brasil. *Dissertação de Mestrado* - UFSC. 1991.
- [20] Duarte, C.A., Oden, J.T. *HP-Clouds* - A Meshless Method to Solve Boundary Value Problems. In: *TICAM Report 95-05*. Austin, Texas, USA, 1995.
- [21] Duarte, C.A., Oden, J.T. *hp Clouds* - an *hp* Meshless Method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, p.1-34, 1996.
- [22] Duarte, C.A.M., Babuška, I., Oden, J.T. Generalized Finite Element Methods for Three Dimensional Structural Mechanics Problems. *To appear in Computers and Structures*, 2000.
- [23] Duarte, C.A.M. The HP Cloud Method - *PhD Thesis*. USA. Austin - Texas 1996.
- [24] Frangi, A., Novati, G. Symmetric BE method in two-dimensional elasticity: evaluation of double integrals for curved elements. *Computational Mechanics*, v.19, p.58-68, 1996.
- [25] Frangi, A., Bonnet, M.A Galerkin Symmetric and Direct BIE Method for Kirchoff Elastic Plates: Formulation and Implementation. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v.41, p.337-369, 1998.
- [26] Fulks, W. *Advanced Calculus*. 2.ed. USA: John Wiley & Sons, Inc., 1969.
- [27] Ghosh, N., Rajiyah, H, Gosh, S., Mukherjee, S. A New Boundary Element Method Formulation for Linear Elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, v.53, p.69-76, 1986.
- [28] Gray, L.J. Evaluation of Singular and Hypersingular Galerkin Integrals: Direct Limits and Symbolic Computation. *ORNL Report. Computer Science and Mathematics Division, Oak Ridge National Laboratory, USA* 1997.
- [29] Greenwood, D.T. *Principles of Dynamics*. USA : Prentice - Hall, Inc Englewood Cliffs, 1965.
- [30] Guiggiani, M. Hypersingular formulation for boundary stress evaluation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, n.13: p.169-179, 1994.

- [31] Hadamard, Jacques. *Lectures on Cauchy's Problems in Linear Partial Differential Equations*. USA : Dover Publications. 1952.
- [32] Holzer, S.M. A  $p$ -Extension of the Symmetric Boundary Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, n.71, p.339-357, 1993.
- [33] Holzer, S.M. The  $h$ -,  $p$ - and  $hp$ - Version of the BEM in Elasticity: Numerical Results. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v.11, p.255-265, 1995.
- [34] Kanarachos, A., Provatidis, C. On the Symmetrization of the BEM Formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, n.71, p.151-165, 1988.
- [35] Kane, J.H., Balakrishna, C. Symmetric Galerkin Boundary Formulations Employing Curved Elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.36, p.2157-2187, 1993.
- [36] Kane, J.H. *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. USA : Prentice Hall Inc., 1994.
- [37] Karafiat, A., Oden, J.T., Geng, P. Variational Formulations and  $h-p$  Boundary Element Aproximations for Hypersingular Integral Equations for Helmholtz Exterior Boundary - Value Problems in Two Dimensions. *Int. J. Engng Sci.*, v.31, n.4, p.649-672, 1993.
- [38] Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V. *Introductory Real Analysis*. USA : Dover Publications, Inc., 1994.
- [39] Krisnasamy, G., Rizzo, F.J., Rudolphi, T.J. Hypersingular Boundary Integral Equations: Their Occurrence, Interpretation, Regularization and Computation. Developments in Boundary Element Methods. v.7, Chapter 6. *Advanced Dynamic Analysis by Boundary Element Methods*. Edited by, P. K. Banerjee and S. Kobayashi. Elsevier Applied Science, 1991.
- [40] Krysl, P., Belytschko, T. The Element Free Galerkin Method for Dynamic Propagation of Arbitrary 3D Cracks. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v.44, p.767-800, 1999.

- [41] Lancaster, P., Šalkauskas, K. *Curve and Surface Fitting. An Introduction*. Orlando - Florida USA : Academic Press Inc. 1986.
- [42] Li, Z.C., Manthou, R., Sermer, P. Boundary Methods for Solving Elliptic Problems with Singularities and Interfaces. *SIAM J. Numer. Anal.*, v.24, n.3, p.487-498, 1987.
- [43] Li, S., Liu, W.K. Reproducing Kernel Hierarchical Partition of Unity, Part I - Formulation and Theory. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v.45, p.251-288, 1999.
- [44] Li, S., Liu, W.K. Reproducing Kernel Hierarchical Partition of Unity, Part II - Applications. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v.45, p.289-317, 1999.
- [45] Mansur, W.J., Telles, J.C.F., Prodanoff, J.H.A., Fauches, E. On BEM singular integrals for two-dimensional potential applications. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, n.9, p.185-187, 1992.
- [46] Mukherjee, Y.X., Mukherjee, S. The Boundary Method for Potential Problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.40, p.797-815, 1997.
- [47] Nicolazzi, L.C., Duarte, C.A., Fancello, E.A., de Barcellos, C.S. *hp* Clouds - A Meshless Method in Boundary Elements. Part I: Formulation. In: First Brazilian Seminar on the Boundary Element Method in Engineering. *Anais...Rio de Janeiro, RJ, Brazil, 1996*, e no *International Journal of Boundary Element Methods and Communications*, v.8, p.80-82, 1997.
- [48] Nicolazzi, L.C., Duarte, C.A., Fancello, E.A., de Barcellos, C.S. *hp* Clouds - A Meshless Method in Boundary Elements. Part II: Implementation. In: First Brazilian Seminar on the Boundary Element Method in Engineering. *Anais...Rio de Janeiro, RJ, Brazil, August 1996*, e no *International Journal of Boundary Element Methods and Communications*, v.8, p.83-85, 1997.
- [49] Nicolet A., Genon, A., Legros, W., Umé, M., Delincé, F. An Optimal Adaptive Numerical Integration Method. *Boundary Element Technology VII*, Elsevier Applied Science, p.919-933, 1992.

- [50] Oden, J.T., Reddy, J.N. *An Introduction to Mathematical Theory of Finite Elements*. USA : John Wiley & Sons, 1976.
- [51] Oden, J.T., Demkowicz, L., Rachowicz, W., Westermann, T.A. Toward a Universal h-p Adaptive Finite Element Strategy, Part 2. A Posteriori error Estimation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, n.77, p.113-180, 1989.
- [52] Parreira, P.G.S.V. Análise do Erro no Método dos Elementos de Fronteira em Elasticidade. *Tese de doutoramento*. Lisboa, Portugal. 1987.
- [53] Parreira, P., Guiggiani, M. On the Implementation of The Galerkin Approach in the Boundary Element Method. *Computers & Structures*, v.33, n.1, p.269-79, 1989.
- [54] Petersdorff, T. von, Schwab, C. Wavelet Approximations for First Kind Boundary Integral Equations on Polygons. *Technical Note BN-1157*. Institute for Physical Science and Technology. University of Maryland at College Park. USA. 1994.
- [55] Polizzoto, C. An Energy Approach to the Boundary Element Method. Part I , Elastic Solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, n.69, p.167-184, 1988.
- [56] Postell, F.V., Stephan, E.P. On the  $h$ ,  $p$  and  $hp$  Versions of Boundary Element Method - Numerical Results. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.83, p.69 - 89, 1990.
- [57] Press, W.H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. *Numerical Recips: The Art of Scientific Computing*. USA : Cambridge University Press, 1986.
- [58] Rachowicz, W., Oden, J.T., Demkowicz, L. Toward a Universal h-p Adaptive Finite Element Strategy, Part 3. Design of h-p Meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, n.77, p.181-212, 1989.
- [59] Schatz, A.H., Thomée, V., Wendland, W.L. *Mathematical Theory of Finite and Boundary Element Methods*. Germany : Birkhäuser Verlag Basel, 1990.

- [60] Scremin, Adriano. Solução de Problemas da Mecânica do Contínuo na Forma de Integrais de Contorno pelo Método das Nuvens HP: Aplicação a Problemas Bidimensionais de Laplace. *Tese de Doutorado*. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Brasil. 1997.
- [61] Shames, J.H. *Mecânica dos Fluidos*. v.1-2, Brasil : Edgard Blücher LTDA., 1973.
- [62] Sirtori, S., Maier, G., Novati, G., Miccloli, S. A Galerkin Symmetric Boundary Element Method in Elasticity: Formulation and Implementation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.35, p.255-282, 1992.
- [63] Sladek, V., Sladek, J., Tanaka, M. Regularization of Hypersingular and Nearly Singular Singular Integrals in Potential Theory and Elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.36, p.1609-1628, 1993.
- [64] Stephan, E.P., Suri, M. On the Convergence of the  $p$ - Version of the Boundary Element Galerkin Method. *Mathematics of Computation*, v.52, n.185, 3p.1-48, 1989.
- [65] Stephan, E.P. The  $hp$ - boundary element method for solving 2- and 3-dimensional problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, n.133, p.183-208, 1996.
- [66] Szabó, B.A., Babuška, I. *Finite Element Analysis*. USA : John Wiley & Sons Inc. 1991.
- [67] Tanaka, M., Sladek, V., Sladek, J. Regularization Techniques Applied to Boundary Element Methods. *Appl. Mech.*, v.47, n.10, p.457-499, 1994.
- [68] Telles, J.C.F. A Self - Adaptative Co-Ordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.24, p.959-973, 1987.
- [69] Theoretical and Computational Solid Mechanics Group: <http://www.lncc.br/~feijo>
- [70] Timoshenko, S.P., Goodier, J.N. *Teoria da Elasticidade*. 3.ed. Brasil : Guanabara Dois S.A, 1980.

- [71] Tweed, J., John, R.St., Dunn, M.H. Algorithms for the Numerical Solution of a Finite-Part Integral Equation. *Applied Mathematics Letters*, n.12, p.3-9, 1999.
- [72] Wendland, W.L. On the Asymptotic Convergence of Boundary Integral Method. Boundary Element Methods. *In: Proceedings of the Third International Seminar. Anais... Irnine, California, July 1981, (Editd by C. A. Brebbia), p.412-430, 1981.*
- [73] Wendland, W.L., Yu, De-hao. Adaptive Boundary Element Methods for Strongly Elliptic Equations. *Numerisch Mathematic*, n.53, p.539-558, 1988.
- [74] Westphal Jr., T, de Barcellos, C.S., Pereira, J.T. On General Fundamental Solution of Some Linear Elliptic Differential Operators. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.17, p.279-285, 1996.
- [75] Yu, De-hao. Mathematical foundation of adaptative boundary element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, n.91, p.1237-1243, 1991.
- [76] Yu, De-hao. A posteriori local error estimates for some finite and boundary element Methods. *Advances in Engineering Software*, n.15, p.175-179, 1992.
- [77] Yuuki, R., Cao, G.Q., Tamaki, M. Efficient error estimation and adaptive meshing method for boundary element analysis. *Advances in Engineering Software*, n.15, p.279-287, 1992.