

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
MECÂNICA

ANÁLISE DINÂMICA DE ROTORES FLEXÍVEIS DE  
MATERIAIS COMPOSTOS POR ELEMENTOS FINITOS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL  
DE SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE  
MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

SANDRO PAULO DALDIN

FLORIANÓPOLIS, FEVEREIRO DE 2001

ANÁLISE DINÂMICA DE ROTORES FLEXÍVEIS DE MATERIAIS COMPOSTOS  
POR ELEMENTOS FINITOS

SANDRO PAULO DALDIN

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

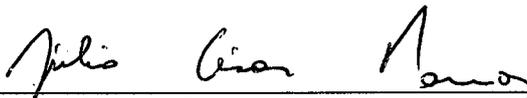
MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA FORMA  
FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
MECÂNICA



---

Prof. PAULO DE TARSO ROCHA MENDONÇA, Ph. D.  
ORIENTADOR



---

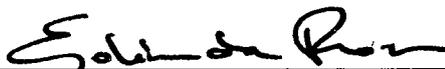
Prof. JÚLIO CÉSAR PASSOS, Dr. Eng.  
COORDENADOR DO CURSO

BANCA EXAMINADORA



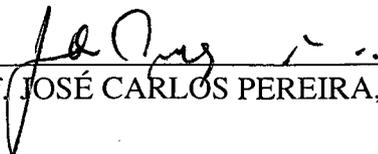
---

Prof. JOSÉ JOÃO DE ESPÍNDOLA, Ph. D.  
PRESIDENTE



---

Prof. EDISON DA ROSA, Dr. Eng.



---

Prof. JOSÉ CARLOS PEREIRA, Dr. Eng.

Aos meus pais,  
Moacir e Glacy.

# Agradecimentos

A Deus, pela capacidade de pensar.

Aos meus pais, pela vida.

Ao professor Paulo de Tarso R. Mendonça, pela dedicação na orientação deste trabalho.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Ao professor Eduardo A. Fancello, pelos preciosos conselhos.

A André, Fernando, Jean, Jucélio e Yuji, pela amizade e apoio.

Aos colegas do GRANTE, pelo companheirismo e as ajudas das mais diversas formas.

À Alessandra, pelo amor, incentivo e compreensão em todos os momentos.

## Resumo

Neste trabalho é estudada a resposta dinâmica de rotores compostos laminados verticais axissimétricos. As frequências naturais são calculadas através de duas formulações de elementos finitos: um elemento sólido de revolução e um elemento de casca delgada. O campo de deslocamentos é expresso como um produto de funções polinomiais no plano longitudinal e funções trigonométricas na direção circunferencial, permitindo a representação de modos assimétricos a partir de um modelo axissimétrico. As funções polinomiais são discretizadas em cada lâmina ortotrópica através de funções isoparamétricas regulares. São incluídos os efeitos de inércia translacional e rotacional, giroscópicos e de deformação por cisalhamento transversal. O elemento sólido possibilita a modelagem mais precisa de detalhes geométricos como anéis de reforço, tampas e suportes dos mancais. Os resultados são comparados com os resultados de uma formulação de elemento de viga. São investigados os efeitos de vários parâmetros como ângulo de orientação das fibras, número de camadas e as relações espessura-raio e comprimento-raio.

# Abstract

This work studies the dynamic response of axisymmetric vertical laminated composite rotors. The natural frequencies are calculated by two finite element formulations: a solid of revolution and a thin shell element. The displacement field is expressed as a product of polynomial functions in longitudinal plane and trigonometric functions along the circumferential direction, which enables representation of asymmetric modes by the axisymmetric models. The polynomial functions are discretized in each orthotropic layer by using the regular isoparametric functions. The formulations include the effects of inplane and rotational inertias, as well as the gyroscopic effect and transverse shear deformation. The solid element allows a more accurate modeling of geometric details such as reinforcement rings, covers and bearing supports. The results are compared to the beam element formulation. The effects of various parameters such as ply-angle, number of layers, thickness-to-radius and length-to-radius ratios are also investigated.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>4</b>
1.1	Revisão bibliográfica . . . . .	5
1.2	Objetivo . . . . .	8
<b>2</b>	<b>MATERIAIS COMPOSTOS</b>	<b>10</b>
2.1	Materiais compostos laminados reforçados por fibras . . . . .	11
2.2	Comportamento macromecânico de uma lâmina . . . . .	12
2.2.1	Relações tensão-deformação no sistema de coordenadas cilíndrico . . . . .	14
2.2.2	As relações tensão-deformação no estado plano de tensões . . . . .	14
2.3	Módulos de elasticidade equivalentes para vigas . . . . .	16
<b>3</b>	<b>O PROBLEMA DINÂMICO</b>	<b>19</b>
3.1	Equações do movimento . . . . .	19
3.2	Cálculo dos autovalores e autovetores . . . . .	21
3.2.1	Cálculo das frequências naturais para $\Omega = 0$ . . . . .	22
3.2.2	Técnica de Shifting . . . . .	22
3.2.3	Cálculo das frequências naturais a uma determinada rotação do rotor . . . . .	23
<b>4</b>	<b>FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DOS ELEMENTOS</b>	<b>26</b>
4.1	Método dos Elementos Finitos . . . . .	26
4.2	Sistema de coordenadas . . . . .	26
4.3	Elemento sólido de revolução . . . . .	27
4.3.1	Dedução da matriz de rigidez . . . . .	29
4.3.2	Cálculo das matrizes inerciais do elemento . . . . .	33
4.4	Elemento de casca laminada . . . . .	37
4.4.1	Dedução da matriz de rigidez . . . . .	37
4.4.2	Cálculo das matrizes inerciais do elemento de casca . . . . .	43
<b>5</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>48</b>
5.1	Comparação com <i>software</i> comercial . . . . .	49
5.2	Comparação dos elementos para material isotrópico . . . . .	50
5.3	Comparação dos elementos para material composto . . . . .	53
5.4	Estudo da variação das frequências naturais com as relações geométricas . . . . .	54
5.5	Estudo da variação das frequências naturais com a sequência de empilhamento . . . . .	58
5.6	Análise de um rotor de geometria complexa . . . . .	60

CONTEÚDO

2

**6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES**

**64**

# Lista de Figuras

1.1	Centrífuga para separação de gases. . . . .	4
2.1	Laminado formado por lâminas reforçadas por fibras. . . . .	11
2.2	Esquema de uma lâmina com as suas direções principais. . . . .	12
4.1	Sistema de coordenadas e deslocamentos de um ponto genérico. . . . .	27
4.2	Elemento sólido no domínio real e padrão. . . . .	28
4.3	Modelagem de espessura variável com elementos sólidos. . . . .	28
4.4	Representação dos coeficientes da série de Fourier para o primeiro harmônico. . . . .	29
4.5	Deslocamentos e rotações da seção. . . . .	34
5.1	Dimensões da casca cilíndrica. . . . .	48
5.2	Os três primeiros modos sob flexão. . . . .	50
5.3	Modelos de elementos sólidos, de casca e de viga. . . . .	51
5.4	Diagrama de Campbell para um rotor isotrópico com relações geométricas $L/r=1$ e $h/r=0,1$ . . . . .	52
5.5	Diagrama de Campbell para um rotor isotrópico com relações geométricas $L/r=10$ e $h/r=0,1$ . . . . .	52
5.6	Diagrama de Campbell para um rotor de material composto com relações geométricas $L/r=1$ e $h/r=0,1$ . . . . .	54
5.7	Diagrama de Campbell para um rotor de material composto com relações geométricas $L/r=10$ e $h/r=0,1$ . . . . .	55
5.8	Variação da primeira frequência natural com a relação $L/r$ . . . . .	56
5.9	Variação da primeira frequência natural com a rotação do rotor para uma relação $L/r$ . . . . .	56
5.10	Variação na primeira frequência natural com a relação $h/r$ . . . . .	57
5.11	Variação na primeira frequência natural com a rotação do rotor para uma relação $h/r$ . . . . .	57
5.12	Influência do ângulo de orientação das fibras nas frequências naturais de um rotor de material composto a rotação nula. . . . .	59
5.13	Influência do ângulo de orientação das fibras nas frequências naturais de um rotor de material composto a rotação de 12000 rpm. . . . .	59
5.14	Influência do ângulo de orientação das fibras nas frequências naturais de um rotor de material composto a rotação de 30000 rpm. . . . .	60
5.15	a) Corte longitudinal do rotor; b) Detalhe do modelo da tampa superior; c) Detalhe do modelo da tampa inferior. . . . .	61
5.16	Diagrama de Campbell do rotor. . . . .	63

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

Com a finalidade de separar gases e isótopos, a indústria química tem a necessidade de rotores cada vez maiores e operando em faixas de rotação cada vez mais altas. Atualmente os aços de alta resistência, dos quais tradicionalmente são fabricados os rotores dos ultracentrifugadores, vem sendo substituídos por materiais compostos, afim de reduzir a inércia dos rotores, facilitar a operação de controle e reduzir os efeitos de desbalanceamentos.

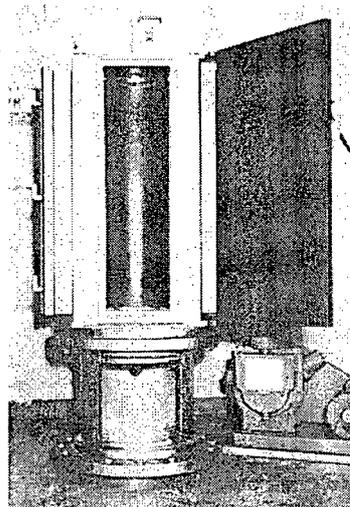


Figura 1.1: Centrífuga para separação de gases.

Faz-se necessário conhecer com razoável precisão as frequências naturais de um rotor para que ele não opere próximo a uma destas frequências, entrando em ressonância, o que pode provocar o colapso do rotor. Isto é de extrema importância quando esses rotores contém gases tóxicos ou radioativos.

Entretanto, a determinação das frequências naturais deste tipo de rotores é de uma certa complexidade. Se um rotor apresenta uma considerável inércia rotacional em relação ao seu eixo, suas frequências naturais são fortemente dependentes da frequência de rotação do rotor (efeito giroscópico) e esse efeito é não linear. Além disso, ainda há o efeito da anisotropia dos materiais compostos e o amortecimento interno, dentre outros.

Neste capítulo é apresentada uma revisão bibliográfica e os objetivos desta dissertação.

O capítulo 2 apresenta de forma breve as características de materiais compostos, especialmente dos laminados, e como eles são tratados no cálculo das frequências naturais, incluindo as hipóteses simplificadoras.

O capítulo 3 apresenta o problema dinâmico, as hipóteses simplificadoras e a solução através do Método de Elementos Finitos. Nele também são comentados os métodos numéricos para a obtenção dos autovalores e ortogonalização.

O capítulo 4 trata da formulação dos elementos sólido e de casca. São abordadas as aplicações, limitações e simplificações, descritos os graus de liberdade e deduzidas as matrizes de rigidez e inércia para cada um dos elementos.

No capítulo 5 são apresentados e discutidos os resultados e, finalmente, o capítulo 6 trata das conclusões e sugestões.

## 1.1 Revisão bibliográfica

Os primeiros estudos e trabalhos publicados sobre cascas cilíndricas rotativas já têm mais de um século. Mas foi com o aumento da demanda por máquinas maiores e mais velozes, que a dinâmica de rotores ganhou importância. Desta forma, somente nos últimos trinta anos é que estes estudos se intensificaram devido ao grande número de aplicações em engenharia, tais como turbinas a gás e a vapor, motores elétricos, turbogeradores, centrífugas, compressores e outros.

Em 1971, embora trabalhando com cascas cilíndricas não rotativas, Nelson *et alli* [23] propuseram um método para a análise de vibrações livres em que os deslocamentos eram

representados por funções trigonométricas nas direções axial e tangencial e por um campo de deslocamentos aproximado na direção radial. Desta forma obtiveram um problema de autovalores algébrico que pode ser resolvido através de uma técnica numérica. Variações deste método foram e continuam sendo empregadas por diversos autores, assim como no presente trabalho.

No ano seguinte, Penzes e Kraus [24] desenvolveram a solução exata para a vibração de cascas cilíndricas ortotrópicas, incluindo os efeitos de torção, pressão normal, força axial e as forças centrífugas e de Coriolis. Contudo, esta e outras soluções analíticas apresentavam sérias limitações frente a complexidade dos rotores utilizados na indústria. Passaram a ser empregadas várias técnicas numéricas para o modelamento dos rotores, com destaque para o Método da Matriz de Transferência (ver, por exemplo, Rao [26]) e o Método de Elementos Finitos (ver, por exemplo, Lalanne e Ferraris [14]).

A partir do fim da década de 70, o uso do Método de Elementos Finitos ganhou importância na dinâmica de rotores. Nelson e McVaugh [22] publicaram em 1976 um trabalho no qual apresentavam um procedimento para a modelagem dinâmica de sistemas rotor-mancal através de elementos de viga e de mancal. A formulação incluía os efeitos da inércia rotacional, giroscópicos e carga axial. Com o objetivo de reduzir o número de graus de liberdade, o elemento de viga suportava variações nas propriedades da seção transversal, como o diâmetro, por exemplo. Os autores já previam a importância do Método de Elementos Finitos neste tipo de análise. Mais tarde, Nelson [21] publicou um novo trabalho que complementava o anterior utilizando a Teoria de Vigas de Timoshenko, incluindo o efeito do cisalhamento transversal. Através da comparação de resultados, ele verificou a importância da inclusão deste efeito. Mendonça *et alli* [20] apresentaram formulações para elementos de casca e sólido, ambos de revolução e as compararam com modelos de viga e disco, verificando significativas diferenças para rotores com grande inércia rotacional e a elevadas rotações. Chen *et alli* [6] apresentaram as equações gerais de vibrações de cascas de revolução para altas rotações, considerando o efeito giroscópico e grandes deformações através de um método de aproximação linear. Conseguiram bons resultados através do Método dos Elementos Finitos.

tos na comparação com algumas soluções analíticas para cilindros com condições de contorno especiais.

Outra importante contribuição para a dinâmica de rotores foi o desenvolvimento de métodos numéricos mais eficientes, permitindo redução no custo computacional e permitindo assim análises mais complexas. As frequências naturais e os modos de vibração são obtidos da solução de problemas de autovalores. Cada tipo de sistema dinâmico possui características diferentes, como a presença ou não de amortecimento e/ou efeito giroscópico, que resultam num problema de autovalores particular. Bathe [4] e Meirovitch [18] descrevem alguns métodos clássicos para a solução de problemas de autovalores associados a problemas de grande porte, como aqueles resultantes da aplicação do Método de Elementos Finitos. Mas ao longo do tempo os métodos foram sofrendo melhoramentos e foram surgindo novos métodos mais eficientes. Meirovitch [17] desenvolveu um método para a solução do problema de autovalores para sistemas com efeito giroscópico. Childs e Graviss [7] propuseram um esquema de ordenação das variáveis em modelos de Elementos Finitos que permitiria a solução numérica através de métodos de matriz simétrica para o cálculo das rotações críticas. Kim e Lee [12] desenvolveram uma técnica de redução das matrizes através de uma matriz de transformação obtida na solução do problema não amortecido e sem efeito giroscópico, visando a solução de grandes sistemas matriciais rotor-mancal amortecido.

Especialmente para elevadas rotações, o uso de materiais compostos é interessante na fabricação de rotores por possibilitar a redução na massa e, conseqüentemente, na inércia rotacional. E, na medida que este uso foi aumentando, também as pesquisas foram se voltando para os rotores de materiais compostos laminados. Lam e Loy [15] realizaram um estudo paramétrico sobre as frequências naturais de cascas cilíndricas multi-camadas. Consideraram os efeitos da força centrífuga, aceleração de Coriolis e tensões iniciais. Singh e Gupta [27] analisaram rotores compostos através de duas teorias: vigas de módulo equivalente (conhecida pela sigla EMBT) e de vigas laminadas (conhecida pela sigla LBT), derivada de uma teoria de casca laminada. Os resultados obtidos mostraram que a EMBT pode apresentar resultados imprecisos para seqüências de empilhamento não simétricas. Rand e Stavsky [25]

apresentaram uma formulação e a solução numérica para a resposta e frequências naturais de cascas cilíndricas laminadas sujeitas a velocidades angulares genéricas (rotações paralelas e normais ao eixo). Além disso realizaram um estudo paramétrico envolvendo geometria, propriedades dos materiais e seqüência de empilhamento. Lee e Kim [16] apresentaram soluções analíticas para vibração livre de cascas cilíndricas compostas rotativas com reforçadores axiais e circunferenciais, também chamados reforçadores ortogonais. Realizaram estudos paramétricos envolvendo a geometria do cilindro e dos reforçadores.

Apesar dos inúmeros trabalhos publicados sobre o assunto, a dinâmica de rotores continua sendo um tema de interesse. Entre os trabalhos mais recentes, Chang *et alli* [5] projetaram e construíram um rotor em material composto para um motor a indução de alta rotação otimizando as características dinâmicas e elétricas. Aleyaasin *et alli* [2] estudaram a vibração em flexão de eixos rotativos através de uma técnica híbrida no domínio da frequência. Jain *et alli* [10] apresentaram uma formulação para a análise de singularidade em discos e cascas ortotrópicas rotativas.

Entretanto, os trabalhos sobre dinâmica de rotores laminados ainda são relativamente poucos, quando comparado com os trabalhos sobre rotores isotrópicos ou análise dinâmica de cascas cilíndricas laminadas não rotativas. As análises acima são restritas a geometrias fixas como cilindros uniformes. Como as soluções são em geral analíticas, ou semi-analíticas, não são admitidas variações de diâmetro, espessura e propriedades do material composto, o que as tornam pouco úteis na análise e projeto de rotores reais em seus detalhes construtivos.

## 1.2 Objetivo

Neste trabalho os rotores são analisados através de duas formulações de elementos finitos: sólido e casca, ambos laminados e axissimétricos, incluindo os efeitos giroscópicos e de cisalhamento transversal. A formulação do elemento sólido permite a modelagem de regiões não cilíndricas retas como cones, tampas e anéis. Ambas as formulações admitem ainda variações de espessura, de seqüência de empilhamento de lâminas e de propriedades ortotrópicas das

lâminas. Elas também admitem laminados anisotrópicos gerais, isto é, laminados constituídos por qualquer seqüência de empilhamento, não necessariamente simétrica.

São comparados os resultados obtidos pelas duas formulações. É também estudado o comportamento das frequências naturais com a geometria do rotor e com a seqüência de empilhamento do material composto laminado. Neste último caso se busca verificar até que ponto se pode alterar as frequências naturais do rotor sem que sejam necessárias alterações geométricas, o que representa outra vantagem no emprego de materiais compostos na fabricação dos rotores.

## Capítulo 2

# MATERIAIS COMPOSTOS

Um material composto, segundo Agarwal e Broutman [1], pode ser definido como um material formado por dois ou mais componentes quimicamente distintos e que apresentam uma interface de separação entre eles, ou seja, os materiais compostos apresentam heterogenia.

Jones [11] os classifica em:

- fibrosos, que consistem em fibras, geralmente de alta resistência, e uma matriz;
- de partículas, que consistem em uma matriz impregnada de partículas;
- laminados, que podem ser formados por camadas de materiais diferentes ou lâminas de materiais compostos fibrosos unidirecionais, também chamadas reforçadas por fibras, onde cada lâmina apresenta as fibras orientadas numa determinada direção, Figura 2.1.

É neste último caso que se insere o presente estudo, uma vez que os rotores de materiais compostos são geralmente fabricados pelo processo de bobinagem resultando em camadas ortotrópicas.

O processo de bobinagem consistem em enrolar fibras contínuas impregnadas de resina num mandril. Controlando-se a velocidade do esticador, que faz movimentos de vai e vem paralelos ao mandril, e a rotação do mandril, obtém-se camadas com as fibras paralelas e orientadas a um ângulo determinado para cada camada. Agarwal e Broutman [1], citam como vantagens deste processo a capacidade de automação, permitindo grande produção,

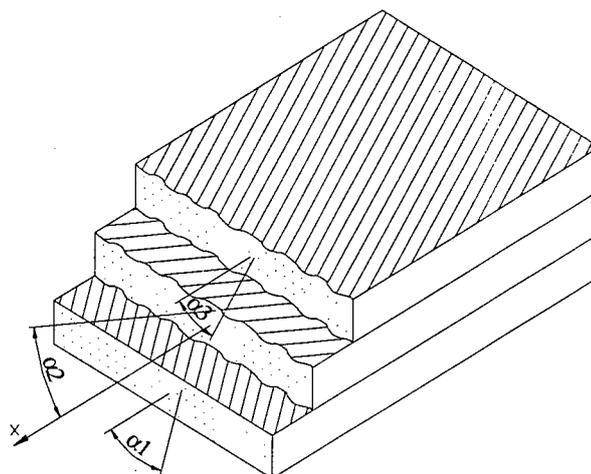


Figura 2.1: Laminado formado por lâminas reforçadas por fibras.

além de um bom controle no posicionamento das fibras e, conseqüentemente, na qualidade do laminado; a versatilidade nos tamanhos dos rotores e o controle da rigidez em diferentes direções. Os mesmos autores citam como limitações do processo a dificuldade para obter curvaturas reversas (concavidades) ou a bobinagem a baixos ângulos e o mal acabamento da superfície externa.

## 2.1 Materiais compostos laminados reforçados por fibras

Os materiais compostos laminados reforçados por fibras são formados por uma ou mais lâminas ortotrópicas coladas, onde cada lâmina apresenta as fibras alinhadas a um dado ângulo com relação a uma direção, que pode ser a principal de carregamento ou a do eixo de simetria, no caso de lâminas cilíndricas. A Figura 2.2 apresenta uma lâmina, bem como as suas direções principais. Estas são referidas pelos eixos 1, 2 e 3 e as direções globais genéricas pelos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , no sistema de coordenadas cartesiano ou  $x$ ,  $\theta$  e  $r$ , no sistema de coordenadas cilíndrico.

A principal vantagem de um laminado multi-lâmina em relação a uma lâmina única é distribuir a resistência em outras direções, permitindo que se tenha tanta resistência quanto

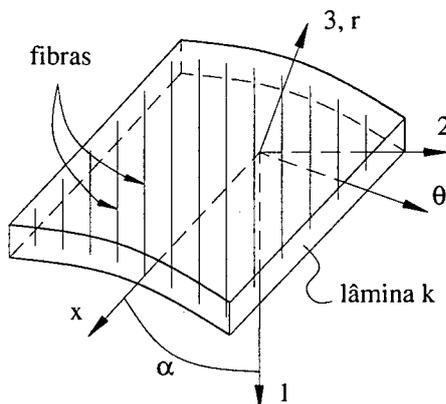


Figura 2.2: Esquema de uma lâmina com as suas dire&#227;ões principais.

necess&#225;ria em cada dire&#227;ão.

A an&#225;lise de uma lâmina pode ser dividida em duas fases. A an&#225;lise micromec&#225;nica estuda o comportamento e a intera&#227;ão entre as fibras e a matriz da lâmina na determina&#227;ão de propriedades equivalentes m&#233;dias, enquanto a an&#225;lise macromec&#225;nica considera a lâmina como um material homog&#232;neo com propriedades equivalentes pr&#233;-determinadas. Neste trabalho &#232; feito apenas a an&#225;lise macromec&#225;nica, sendo desconsideradas as descontinuidades no interior das lâminas. M&#233;todos usados para o c&#225;lculo de propriedades equivalentes podem ser encontrados nas refer&#232;ncias [1] e [11].

## 2.2 Comportamento macromec&#225;nico de uma lâmina

A lei de Hooke generalizada pode ser escrita na forma:

$$\sigma^1 = Q^1 \epsilon^1 \quad (2.1)$$

onde  $\sigma^1$  &#232; o vetor tens&#225;o  $\{\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3 \ \tau_{23} \ \tau_{31} \ \tau_{12}\}^T$ ,  $Q^1$  &#232; a matriz de propriedades nas dire&#227;ões principais da lâmina e  $\epsilon^1$  &#232; o vetor deforma&#227;ão  $\{\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_3 \ \gamma_{23} \ \gamma_{31} \ \gamma_{12}\}^T$ . O sobre-&#232;ndice 1 indica que os termos est&#225;o definidos nas dire&#227;ões principais das propriedades ortotr&#243;picas.

Conv&#232;m salientar que esta forma dos vetores  $\sigma^1$  e  $\epsilon^1$  &#232; v&#225;lida apenas para o elemento s&#243;lido. A forma para o elemento de casca ser&#225; apresentada na se&#227;ão 4.4. No entanto, as

simplificações e as considerações feitas aqui podem ser feitas de forma similar no caso do elemento de casca.

A matriz de propriedades do material apresenta simetria e, portanto, tem no máximo 21 elementos independentes. No caso de um material ortotrópico, devido à simetria com relação a dois planos ortogonais, a matriz de rigidez tem apenas 9 elementos independentes:

$$Q^1 = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Estes elementos podem ser calculados através das chamadas constantes de engenharia: módulos de elasticidade ( $E_i$ ), coeficientes de Poisson ( $\nu_{ij}$ ) e módulos de cisalhamento ( $G_{ij}$ ), onde os índices indicam a direção, quando simples, ou o plano, quando duplos.

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_1 \left( 1 - \nu_{23}^2 \frac{E_3}{E_2} \right) \frac{1}{\Delta} \\ Q_{22} &= E_2 \left( 1 - \nu_{13}^2 \frac{E_3}{E_1} \right) \frac{1}{\Delta} \\ Q_{33} &= E_3 \left( 1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1} \right) \frac{1}{\Delta} \\ Q_{12} &= (\nu_{12} E_2 + \nu_{13} \nu_{23} E_3) \frac{1}{\Delta} \\ Q_{13} &= E_3 (\nu_{13} + \nu_{12} \nu_{23}) \frac{1}{\Delta} \\ Q_{23} &= E_3 \left( \nu_{23} + \nu_{12} \nu_{13} \frac{E_2}{E_1} \right) \frac{1}{\Delta} \\ Q_{44} &= G_{12} \\ Q_{55} &= G_{13} \\ Q_{66} &= G_{23} \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde

$$\Delta = 1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1} - \nu_{13}^2 \frac{E_3}{E_1} - \nu_{23}^2 \frac{E_3}{E_2} - 2 \nu_{12} \nu_{13} \nu_{23} \frac{E_3}{E_1}$$

Deve-se lembrar que há apenas nove constantes independentes, uma vez que:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (2.4)$$

### 2.2.1 Relações tensão-deformação no sistema de coordenadas cilíndrico

As relações dadas pela equação (2.1) referem-se ao sistema local da lâmina. No entanto, para o cálculo do laminado atuando como um todo, faz-se necessário conhecer estas relações no sistema global, cilíndrico no caso dos rotores:

$$\sigma^x = \mathbf{Q}^x \epsilon^x \quad (2.5)$$

onde  $\sigma^x$  é o vetor tensão  $\{\sigma_x \sigma_\theta \sigma_r \tau_{\theta r} \tau_{rx} \tau_{x\theta}\}^T$ ,  $\mathbf{Q}^x$  é a matriz de propriedades e  $\epsilon^x$  é o vetor deformação  $\{\epsilon_x \epsilon_\theta \epsilon_r \gamma_{\theta r} \gamma_{rx} \gamma_{x\theta}\}^T$ , todos no sistema de coordenadas cilíndrico.

Sendo  $\alpha$  o ângulo entre a direção de orientação das fibras e a direção do eixo do rotor, Agarwal e Broutman [1] demonstram que:

$$\mathbf{Q}^x = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q}^1 \mathbf{T}^{-T} \quad (2.6)$$

onde  $\mathbf{T}$  é a matriz transformação do sistema de coordenadas dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

### 2.2.2 As relações tensão-deformação no estado plano de tensões

No estado plano de tensões, tem-se:

$$\sigma_3 = 0 \quad \tau_{23} = 0 \quad \tau_{31} = 0$$

$$\gamma_{23} = 0 \quad \gamma_{31} = 0$$

e  $\epsilon_3$  é uma combinação linear de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . Assim, a equação (2.1) pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

onde:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}} \\ Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (2.9)$$

As relações tensão-deformação para o estado plano de tensões no sistema de coordenadas cilíndrico podem ser calculadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-T} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

onde:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Pode-se, ainda, usar a notação:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{T}^{-T} \quad (2.12)$$

Nesta forma, a matriz de propriedades no estado plano de tensões não tem uma aplicação direta, mas servirá para o cálculo da matriz de propriedades do elemento de casca (seção 4.4).

Uma vez obtidas as matrizes de propriedades de cada lâmina no sistema de coordenadas do rotor, o cálculo da rigidez do laminado é feito através do Método dos Elementos Finitos, como mostrado no capítulo 4.

### 2.3 Módulos de elasticidade equivalentes para vigas

Uma forma simples de estimar o comportamento de uma viga anisotrópica é determinar propriedades elásticas para uma viga isotrópica que responda de forma idêntica a primeira quando submetida a esforços de extensão e de flexão. A dificuldade é que, em geral, essas propriedades elásticas equivalentes para esforços de extensão, denotadas pelo índice  $N$ , são diferentes das propriedades elásticas equivalentes para esforços de flexão, denotadas pelo índice  $F$ .

Segundo Mendonça [19], a capacidade de uma viga laminada ser bem representada por uma viga isotrópica equivalente é tão maior quanto mais a esparsidade de ambas as matrizes de rigidez se assemelhe.

A obtenção das propriedades elásticas equivalentes é feita através da comparação das matrizes de rigidez para materiais isotrópicos e anisotrópicos. A rigidez de um material isotrópico pode ser colocada na forma:

$$\mathbf{Q}_{iso} = \begin{bmatrix} a & \nu a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a(1-\nu)}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & \nu d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu d & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

onde

$$a = \frac{E h}{1 - \nu^2}$$

$$d = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

A rigidez de um laminado anisotrópico pode ser colocada na forma:

$$\mathbf{Q}_{aniso} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

onde a matriz  $\mathbf{A}$  representa o efeito de rigidez extensional, a matriz  $\mathbf{D}$  representa o efeito da rigidez a flexão do laminado e a matriz  $\mathbf{B}$  representa o efeito do acoplamento entre flexão e extensão.

Comparando-se as duas matrizes anteriores, pode-se concluir que, para vigas laminadas simétricas, onde a matriz  $\mathbf{B}$  é nula, as propriedades equivalentes darão melhor resultado do que nos casos onde não há simetria.

Invertendo a matriz  $\mathbf{Q}_{iso}$ , obtém-se a matriz de flexibilidade para materiais isotrópicos:

$$\mathbf{S}_{iso} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Eh} & -\frac{\nu}{Eh} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{Eh} & \frac{1}{Eh} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{Gh} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12}{Eh^3} & -\frac{12\nu}{Eh^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12\nu}{Eh^3} & \frac{12}{Eh^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{24(1+\nu)}{Eh^3} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Igualando-se os termos 11 e 12 das matrizes de flexibilidade  $\mathbf{S}_{iso}$  e  $\mathbf{Q}'_{aniso}$ , obtém-se as constantes elásticas equivalentes para tração:

$$E_{xN} = \frac{1}{h A'_{11}} \quad (2.16)$$

$$\nu_N = -\frac{A'_{12}}{A'_{11}}$$

De forma semelhante, igualando-se os termos 44 e 45 das matrizes de flexibilidade  $\mathbf{S}_{iso}$  e

$Q'_{aniso}$ , obtém-se as constantes elásticas equivalentes para flexão:

$$\begin{aligned} E_{xF} &= \frac{12}{h^3 D'_{11}} \\ \nu_F &= -\frac{D'_{12}}{D'_{11}} \end{aligned} \quad (2.17)$$

No caso particular onde o laminado é formado pelo mesmo número de camadas orientadas em  $+\alpha$  e  $-\alpha$ , com mesmas espessuras e propriedades, os termos  $Q_{aniso13}$  e  $Q_{aniso23}$  são nulos e as constantes elásticas equivalentes para tração podem ser calculadas por:

$$\begin{aligned} E_{xN} &= \frac{A_{11} A_{22} - A_{12}^2}{h A_{12}} \\ \nu_N &= \frac{A_{12}}{A_{12}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

## Capítulo 3

# O PROBLEMA DINÂMICO

O cálculo das frequências naturais de um rotor envolve a criação de um modelo analítico capaz de representar o sistema mecânico. Este modelo analítico é formado por um conjunto de equações diferenciais que descrevem o movimento do sistema mecânico através das suas variáveis independentes, conhecidas como graus de liberdade. Sendo constituído por um material contínuo e elástico, um rotor apresenta infinitos graus de liberdade. Para que seja possível a solução numérica, faz-se necessária uma discretização capaz de, a partir de um determinado número  $n$  de graus de liberdade, representar satisfatoriamente o sistema. Neste trabalho essa discretização é feita através do Método dos Elementos Finitos.

Tem-se então um modelo numérico, que pode ser resolvido por meio da implementação computacional de um método numérico adequado à complexidade do problema. Pode-se dizer que a complexidade da solução está em se fazer simplificações que permitam a solução numérica de uma forma eficiente, mas sem que haja uma descaracterização do problema.

### 3.1 Equações do movimento

O movimento de um sistema rotativo qualquer pode ser representado através das equações de Lagrange. A abordagem Lagrangeana é aqui mais indicada do que a Newtoniana devido à relativa facilidade em se representar o sistema através de equações escalares. Assim, sendo um sistema rotativo com  $n$  graus de liberdade, as equações de Lagrange são apresentadas por Greenwood [9] na seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = f_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

onde  $L$  é o Lagrangeano,  $F$  é a função dissipação de Rayleigh,  $q_i$  é a  $i$ -ésima coordenada generalizada e  $f_i$  é a  $i$ -ésima força generalizada atuando sobre o sistema.

Desprezando os efeitos não lineares, a diferença entre as energias cinética e potencial elástica, que define o Lagrangeano, tem a seguinte forma:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \Omega \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij} \dot{q}_i q_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i q_j \quad (3.2)$$

onde  $\Omega$  é a velocidade de rotação do sistema mecânico e as constantes  $m_{ij}$ ,  $h_{ij}$  e  $k_{ij}$  estão associadas à massa, efeito giroscópico e rigidez do sistema, respectivamente.

A função dissipação de Rayleigh, referente às perdas por amortecimento interno e pelo efeito de circulação nos mancais, é dada por:

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \dot{q}_i q_j \quad (3.3)$$

onde as constantes  $c_{ij}$  e  $d_{ij}$  estão associadas ao amortecimento e ao efeito de circulação, respectivamente.

A obtenção das constantes  $m_{ij}$ ,  $h_{ij}$ ,  $k_{ij}$ ,  $c_{ij}$  e  $d_{ij}$  será discutida mais adiante. Substituindo as equações (3.2) e (3.3) na equação (3.1) tem-se:

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n [c_{ij} + \Omega (h_{ij} - h_{ji})] \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n (k_{ij} + d_{ij}) q_j = f_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

Colocando na forma matricial:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} - \Omega \mathbf{G}) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{D}) \mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (3.5)$$

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz massa,  $\mathbf{C}$  a matriz de amortecimento,  $\mathbf{G}$  a matriz giroscópica,  $\mathbf{K}$  a matriz de rigidez,  $\mathbf{D}$  a matriz de circulação, todas de dimensão  $n \times n$ ,  $\mathbf{q}$  é o vetor de coordenadas generalizadas e  $\mathbf{f}$  o vetor de forças generalizadas, ambos de dimensão  $n$ . As matrizes  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  são simétricas, enquanto as matrizes  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{D}$  são anti-simétricas.

Devido às altas rotações, as ultracentrífugas geralmente utilizam mancais magnéticos ao invés dos hidrodinâmicos. Aqueles não apresentam os efeitos hidrodinâmicos, representados pela matriz de circulação, que dessa forma pode ser desconsiderada.

São feitas ainda algumas importantes simplificações que, de certa forma, interferem nos resultados, mas que tornam a solução do problema mais simples. Assim são desconsiderados os amortecimentos internos e externos e a dependência da rigidez em relação a frequência de rotação. Também são consideradas vibrações livres. Desta forma, a equação do movimento (3.5) pode ser simplificada para:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} - \Omega \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

Para obtenção dos coeficientes de cada matriz será feita uma discretização do sistema através do Método de Elementos Finitos, como será apresentado no próximo capítulo.

## 3.2 Cálculo dos autovalores e autovetores

Tendo sido discretizado o sistema em  $n$  graus de liberdade, é possível encontrar  $n$  autovalores e  $n$  autovetores correspondentes. Entretanto isto implica num grande número de operações e elevado custo computacional, além de que não são necessários mais do que alguns dos primeiros modos de vibração para compreender o comportamento do sistema. Assim são apresentadas aqui técnicas que permitem o cálculo dos  $m$  primeiros autovalores, relacionados às frequências naturais, e seus autovetores correspondentes.

### 3.2.1 Cálculo das frequências naturais para $\Omega = 0$

No cálculo das frequências naturais do rotor parado, não há a presença dos efeitos giroscópicos e a equação (3.6) se torna:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

Propondo-se uma solução na forma  $\mathbf{q} = \phi e^{i\bar{\omega}t}$  obtém-se:

$$(\mathbf{K} - \bar{\omega}^2 \mathbf{M}) \phi = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

ou na forma tradicional:

$$\mathbf{K} \phi = \lambda \mathbf{M} \phi \quad (3.9)$$

onde  $\lambda = \bar{\omega}^2$  é o autovalor associado ao autovetor  $\phi$ .

São então calculados os  $m$  primeiros autovalores e os seus autovetores correspondentes, ortonormalizados através do conhecido Método da Iteração Subspacial, utilizando internamente o Método de Jacobi Generalizado e o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt (ver, por exemplo, Bathe [4]).

### 3.2.2 Técnica de Shifting

Quando se deseja calcular os modos para o sistema livre de vinculações é aplicada a técnica de shifting, que consiste basicamente em manipular as matrizes adicionando um valor  $s$  (*shift*) que é subtraído depois de calculados os autovalores. Assim, a partir da equação (3.8), tem-se:

$$(\mathbf{K} - \bar{\omega}^2 \mathbf{M} + s \mathbf{M} - s \mathbf{M}) \phi = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

ou, reagrupando:

$$[(\mathbf{K} + s \mathbf{M}) - (\bar{\omega}^2 + s) \mathbf{M}] \phi = (\bar{\mathbf{K}} - \lambda \mathbf{M}) \phi = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

Como  $\mathbf{M}$  é uma matriz positiva definida, para  $s \neq 0$ ,  $\bar{\mathbf{K}}$  é não singular.

Após a solução, cada frequência natural  $\bar{\omega}_j$  pode ser obtida através da operação:

$$\bar{\omega}_j = \sqrt{\lambda_j - s} \quad j = 1, \dots, m \quad (3.12)$$

### 3.2.3 Cálculo das frequências naturais a uma determinada rotação do rotor

Desejando-se calcular as  $m$  primeiras frequências naturais do rotor, pode-se fazer a transformação modal proposta por Kim e Lee [12] para reduzir a ordem do sistema de equações. Estes autores desenvolveram este procedimento baseando-se na premissa de que a combinação de uma base de vetores obtida na análise do rotor estacionário e não amortecido, como na equação (3.8), constitui uma boa aproximação para os autovetores complexos de um rotor sujeito ao efeito giroscópico e/ou amortecido, como na equação (3.6).

Definindo-se  $\mathbf{r} = \dot{\mathbf{q}}$  pode-se reduzir a ordem das derivadas do sistema (3.6), mas dobrando a sua ordem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Omega \mathbf{G} & \mathbf{K} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

A segunda matriz pode ser tornada anti-simétrica multiplicando-se as  $n$  últimas equações por  $\mathbf{K}$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Omega \mathbf{G} & \mathbf{K} \\ -\mathbf{K} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

que se constitui num sistema de ordem  $2n \times 2n$ . Propondo-se uma solução na forma:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{Bmatrix} e^{i\beta t} \quad (3.15)$$

e substituindo na equação (3.14):

$$\beta \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Omega \mathbf{G} & \mathbf{K} \\ -\mathbf{K} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Definindo  $\Phi$  como a matriz modal, constituída pelas colunas dos autovetores correspondentes aos  $m$  menores autovalores do problema (3.8), pode-se fazer uma nova transformação de forma a tornar a segunda matriz anti-simétrica:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi \Lambda^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

onde  $\Lambda$  é a matriz diagonal composta pelo quadrado das frequências naturais obtidas em (3.12). Pré-multiplicando o resultado desta transformação pela matriz:

$$\begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi \Lambda^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}^T$$

obtem-se:

$$\beta \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Omega \bar{\mathbf{G}} & \Lambda^{-\frac{1}{2}} \\ -\Lambda^{-\frac{1}{2}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

onde  $\mathbf{I}_m$  é a matriz identidade e  $\bar{\mathbf{G}} = \Phi^T \mathbf{G} \Phi$  é a matriz giroscópica modificada, ambas de ordem  $m \times m$ , ou ainda:

$$\begin{bmatrix} -\Omega \bar{\mathbf{G}} & \Lambda^{-\frac{1}{2}} \\ -\Lambda^{-\frac{1}{2}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \beta \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

Este sistema define a mesma solução que o sistema (3.6), com a vantagem de ser um problema de autovalores padrão, com matriz anti-simétrica e de dimensão reduzida  $2m \times 2m$ . Mas a

principal vantagem deste método é a redução no tempo de processamento e na quantidade de memória necessária, apresentando um alto nível de precisão nos valores das frequências [12].

A solução consiste de  $m$  pares de autovalores  $\beta_i$ , onde cada  $\beta_i$  é imaginário puro, na forma  $\beta_i = \pm i \omega_i$ , e os  $\omega_i$  são as  $m$  menores frequências naturais do sistema a rotação  $\Omega$ . O sistema (3.19) também fornece os  $m$  autovetores a direita e a sua forma transposta os  $m$  autovetores a esquerda, sendo que os últimos são complexos conjugados dos primeiros. Então procede-se a volta ao sistema de coordenadas original através das equações (3.17) e (3.15). Finalmente, os autovetores são normalizados tal que:

$$\mathbf{q}_i^* \mathbf{M} \mathbf{q}_i = 1 \quad (3.20)$$

onde  $\mathbf{q}_i$  é o  $i$ -ésimo auto-vetor a direita e  $\mathbf{q}_i^*$  é o seu complexo conjugado transposto.

## Capítulo 4

# FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DOS ELEMENTOS

### 4.1 Método dos Elementos Finitos

As soluções analíticas de sistemas contínuos se limitam a alguns casos onde a geometria é bastante simples. Quando o sistema possui uma geometria relativamente complexa, ou propriedades não uniformes, como no caso de materiais compostos, torna-se necessário fazer uma discretização deste sistema, de tal forma que a solução do problema discretizado se aproxime da solução do problema contínuo.

O Método dos Elementos Finitos é um procedimento numérico para resolver equações diferenciais, que apresenta um bom grau de precisão na solução das equações diferenciais que representam os problemas da mecânica do contínuo. Por isso tem sido largamente empregado nos mais diversos problemas de engenharia.

Este método foi aqui utilizado para a discretização dos rotores através de dois tipos de elementos diferentes, cujas formulações matemáticas são apresentadas neste capítulo: o elemento sólido de revolução e o elemento de casca de revolução, ambos laminados.

### 4.2 Sistema de coordenadas

O sistema de coordenadas fixo  $OXYZ$  tem origem no centro da seção na configuração indeformada e o eixo  $X$  coincide com a linha que liga os centros dos mancais.

Em coordenadas cilíndricas, o ângulo  $\theta$  é medido a partir do eixo  $Z$ , como indicado na

Figura 4.1.

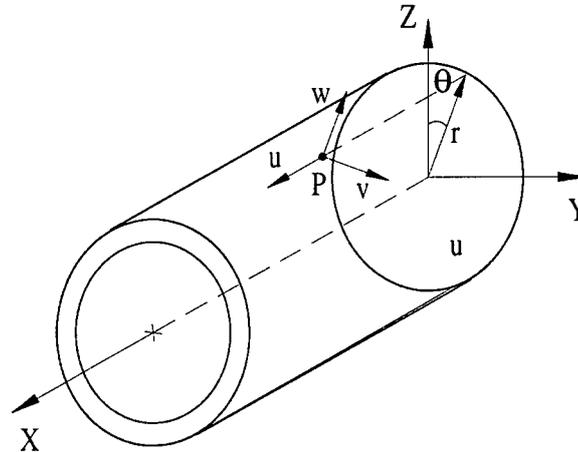


Figura 4.1: Sistema de coordenadas e deslocamentos de um ponto genérico.

### 4.3 Elemento sólido de revolução

Esta formulação de elementos sólidos de revolução determina as matrizes inerciais e de rigidez através de um processo semi-analítico. As funções de interpolação são escritas em termos de uma série de Fourier na direção circunferencial e de polinômios em planos meridionais. Assim a integração na direção circunferencial é feita analiticamente.

Desta forma a modelagem é bidimensional, através de elementos de 8 nós, com funções de interpolação do tipo Serendipity. É considerado um elemento laminado, mas foram feitas algumas restrições com relação à posição das lâminas. A malha deverá ser tal que o elemento finito padrão tenha a interface das lâminas paralelas ao eixo  $\zeta$ , como mostrado na Figura 4.2. Para isso, a malha deverá ser construída de forma que dois lados opostos do elemento acompanhem interfaces das lâminas e, além disso, que não haja uma descontinuidade de interface no interior do elemento. Estas restrições não trazem consequências mais graves, exigindo apenas um certo cuidado na modelagem. Apesar destas restrições, o elemento sólido permite a modelagem de variações na espessura, como pode ocorrer nas extremidades do rotor, Figura 4.3.

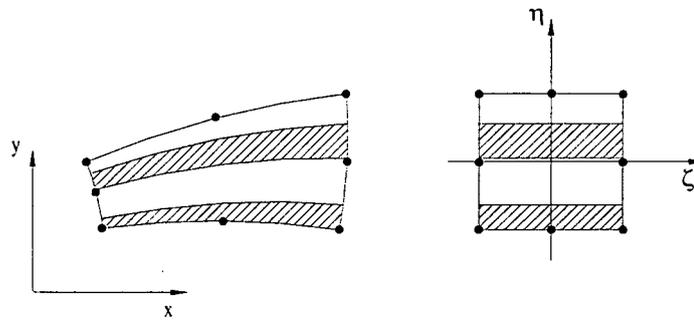


Figura 4.2: Elemento sólido no domínio real e padrão.

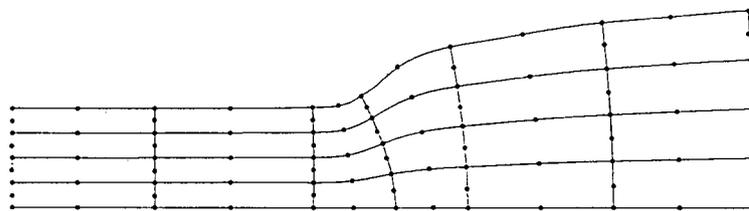


Figura 4.3: Modelagem de espessura variável com elementos sólidos.

### 4.3.1 Dedução da matriz de rigidez

Os deslocamentos  $w$ ,  $u$  e  $v$  nas direções radial ( $r$ ), axial ( $x$ ) e tangencial ( $\theta$ ), respectivamente, de um ponto  $P$  qualquer, Figura 4.1, podem ser escritos na forma:

$$\begin{aligned}
 w &= \sum_{i=1}^8 \left[ w_{0i} + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{w}_{ni} \cos(n\theta) + \tilde{w}_{ni} \sin(n\theta)) \right] N_i(r, x) \\
 u &= \sum_{i=1}^8 \left[ u_{0i} + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{u}_{ni} \cos(n\theta) + \tilde{u}_{ni} \sin(n\theta)) \right] N_i(r, x) \\
 v &= \sum_{i=1}^8 \left[ v_{0i} + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{v}_{ni} \sin(n\theta) + \tilde{v}_{ni} \cos(n\theta)) \right] N_i(r, x)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde  $w_{0i}$ ,  $\bar{w}_{ni}$ ,  $\tilde{w}_{ni}$ ,  $u_{0i}$ , ... são os coeficientes da série de Fourier para o  $i$ -ésimo nó e  $N_i(r, x)$  são as funções biquadráticas do tipo Serendipity, Zienkiewicz [29]. A Figura 4.3 mostra o significado dos coeficientes do harmônico 1.

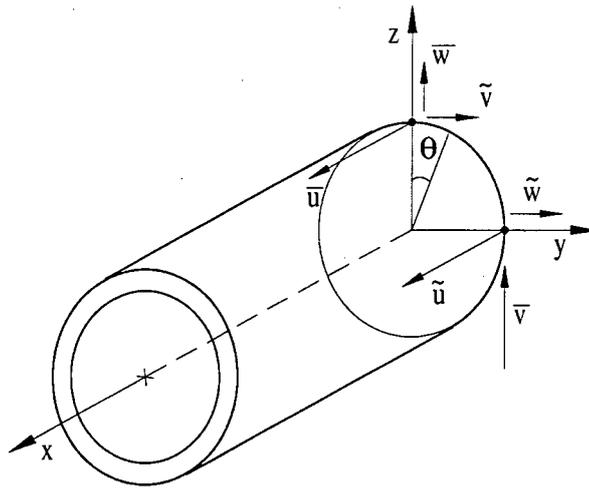


Figura 4.4: Representação dos coeficientes da série de Fourier para o primeiro harmônico.

Devido à ortogonalidade das funções  $1$ ,  $\cos(n\theta)$  e  $\sin(n\theta)$ , os harmônicos da série estão desacoplados. Isto permite a montagem de  $n$  problemas independentes, onde para  $n = 0$  tem-se o efeito dos carregamentos axissimétricos (força centrífuga, por exemplo), axial e torcional; para  $n = 1$  tem-se a primeira aproximação para o efeito de flexão e para  $n > 1$  têm-se efeitos mais complexos de deformação da circunferência da seção transversal.

Considerando pequenos deslocamentos, as relações deformação-deslocamento usadas para a determinação da matriz de rigidez, em coordenadas cilíndricas, são as relações da elasticidade linear clássicas dadas, por exemplo, por Timoshenko e Goodier [28] como:

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_x \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rx} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{,r} \\ u_{,x} \\ \frac{w}{r} + \frac{v_{,\theta}}{r} \\ w_{,x} + u_{,r} \\ \frac{w_{,\theta}}{r} + v_{,r} - \frac{v}{r} \\ v_{,x} + \frac{u_{,\theta}}{r} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

Devido ao desacoplamento dos harmônicos, as deformações podem ser escritas como:

$$\epsilon = \epsilon_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \quad (4.3)$$

onde cada parcela pode ser calculada separadamente. Para o harmônico 0, tem-se:

$$\epsilon_0 = \begin{Bmatrix} w_0 N_{i,r} \\ u_0 N_{i,x} \\ w_0 \frac{N_i}{r} \\ w_0 N_{i,x} + u_0 N_{i,r} \\ v_0 \left( N_{i,r} - \frac{N_i}{r} \right) \\ v_0 N_{i,x} \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

onde:

$$\begin{aligned} N_i &= N_i(r, x) \\ N_{i,r} &= \frac{\partial N_i(r, x)}{\partial r} \\ N_{i,x} &= \frac{\partial N_i(r, x)}{\partial x} \end{aligned}$$

Para o n-ésimo harmônico, tem-se:

$$\epsilon_n = \begin{Bmatrix} (\bar{w}_n \cos(n\theta) + \tilde{w}_n \sin(n\theta)) N_{i,r} \\ (\bar{u}_n \cos(n\theta) + \tilde{u}_n \sin(n\theta)) N_{i,x} \\ ((\bar{w}_n + n \bar{v}_n) \cos(n\theta) + (\tilde{w}_n - n \tilde{v}_n) \sin(n\theta)) \frac{N_i}{r} \\ (\bar{w}_n \cos(n\theta) + \tilde{w}_n \sin(n\theta)) N_{i,x} + (\bar{u}_n \cos(n\theta) + \tilde{u}_n \sin(n\theta)) N_{i,r} \\ ((n \tilde{w}_n - \tilde{v}_n) \cos(n\theta) - (n \bar{w}_n + \bar{v}_n) \sin(n\theta)) \frac{N_i}{r} + (\bar{v}_n \sin(n\theta) + \tilde{v}_n \cos(n\theta)) N_{i,r} \\ n (-\bar{u}_n \sin(n\theta) + \tilde{u}_n \cos(n\theta)) \frac{N_i}{r} + (\bar{v}_n \sin(n\theta) + \tilde{v}_n \cos(n\theta)) N_{i,x} \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

Os estudos aqui realizados limitam-se ao harmônico 1 devido ao interesse nos modos de flexão. Desta forma:

$$\epsilon = \epsilon_1 = \left\{ \begin{array}{l} (\bar{w} \cos \theta + \tilde{w} \operatorname{sen} \theta) N_{i,r} \\ (\bar{u} \cos \theta + \tilde{u} \operatorname{sen} \theta) N_{i,x} \\ ((\bar{w} + \bar{v}) \cos \theta + (\tilde{w} - \tilde{v}) \operatorname{sen} \theta) \frac{N_i}{r} \\ (\bar{w} \cos \theta + \tilde{w} \operatorname{sen} \theta) N_{i,x} + (\bar{u} \cos \theta + \tilde{u} \operatorname{sen} \theta) N_{i,r} \\ ((\tilde{w} - \tilde{v}) \cos \theta - (\bar{w} + \bar{v}) \operatorname{sen} \theta) \frac{N_i}{r} + (\bar{v} \operatorname{sen} \theta + \tilde{v} \cos \theta) N_{i,r} \\ (\tilde{u} \cos \theta - \bar{u} \operatorname{sen} \theta) \frac{N_i}{r} + (\bar{v} \operatorname{sen} \theta + \tilde{v} \cos \theta) N_{i,x} \end{array} \right\} \quad (4.6)$$

Colocando na forma matricial, tendo em vista a implementação computacional, tem-se:

$$\epsilon = \mathbf{E} \mathbf{U} \quad (4.7)$$

onde  $\mathbf{E}$  é a matriz deformação dada por:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} N_{i,r} c & N_{i,r} s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,x} c & N_{i,x} s & 0 & 0 \\ \frac{N_i}{r} c & \frac{N_i}{r} s & 0 & 0 & \frac{nN_i}{r} c & -\frac{nN_i}{r} s \\ N_{i,x} c & N_{i,x} s & N_{i,r} c & N_{i,r} s & 0 & 0 \\ -\frac{nN_i}{r} s & \frac{nN_i}{r} c & 0 & 0 & (N_{i,r} - \frac{N_i}{r}) s & (N_{i,r} - \frac{N_i}{r}) c \\ 0 & 0 & -\frac{nN_i}{r} s & \frac{nN_i}{r} c & N_{i,x} s & N_{i,x} c \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$c = \cos \theta$$

$$s = \operatorname{sen} \theta$$

e

$$\mathbf{U} = \{ \bar{w}_i \quad \tilde{w}_i \quad \bar{u}_i \quad \tilde{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \tilde{v}_i \}^T \quad (4.9)$$

é o vetor de deslocamentos nodais.

Retomando a equação (2.5), pode-se calcular a tensão num ponto no interior de uma lâmina  $k$ :

$$\sigma_k = \mathbf{Q}_k \epsilon_k \quad (4.10)$$

onde  $\mathbf{Q}_k$  é a matriz de propriedades do material da lâmina  $k$  nas direções  $rx\theta$ , calculada pela equação (2.6).

A energia de deformação elástica, em função da tensão e deformação, é calculada por:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_c} \int_{\mathcal{V}_k} \sigma_k^T \epsilon_k d\mathcal{V} \quad (4.11)$$

onde  $N_c$  é o número de lâminas e  $\mathcal{V}_k$  é o domínio tri-dimensional da  $k$ -ésima lâmina. Substituindo a equação (4.10), tem-se:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_c} \int_{\mathcal{V}_k} \epsilon_k^T \mathbf{Q}_k \epsilon_k d\mathcal{V} \quad (4.12)$$

Substituindo as equações (4.7) em (4.12), tem-se a energia de deformação elástica do laminado em função dos deslocamentos nodais:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_c} \int_{\mathcal{V}_k} (\mathbf{E} \mathbf{U})^T \mathbf{Q}_k (\mathbf{E} \mathbf{U}) d\mathcal{V} \quad (4.13)$$

Pode-se então determinar a matriz de rigidez a partir da primeira variação da energia potencial:

$$\mathbf{K}^e = \sum_{k=1}^{N_c} \int_{\mathcal{V}_k} \mathbf{E} \mathbf{Q}_k \mathbf{E} d\mathcal{V} \quad (4.14)$$

Como  $\mathbf{E}$  é função de  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$ , o produto  $\mathbf{E}^T \mathbf{Q}_k \mathbf{E}$  produz termos proporcionais a  $\sin^2 \theta$ ,  $\cos^2 \theta$  e  $\sin \theta \cos \theta$ . Pode-se então definir uma matriz de controle  $\hat{\mathbf{E}}$  e uma matriz  $\bar{\mathbf{E}}$  de acordo com os valores dos termos de  $\mathbf{E}$ :

- se  $E_{ij} = e_{ij} \cos \theta$        $\bar{E}_{ij} = e_{ij}$  e  $\hat{E}_{ij} = -1$ ;
- se  $E_{ij} = e_{ij} \sin \theta$        $\bar{E}_{ij} = e_{ij}$  e  $\hat{E}_{ij} = 1$ ;
- se  $E_{ij} = 0$        $\bar{E}_{ij} = \hat{E}_{ij} = 0$ .

A integração na direção circunferencial ( $\theta$ ) da equação (4.14) é feita de forma analítica por:

$$K_{ij}^e = \mu \sum_{k=1}^{N_c} \int_r \int_x \bar{E}_{ik} Q_{kl} \bar{E}_{lj} dx dr \quad (4.15)$$

onde  $\mu = \pi$ , se  $\hat{E}_{ik} \hat{E}_{lj} = 1$  ou  $\mu = 0$ , se  $\hat{E}_{ik} \hat{E}_{lj} = -1$ . Assim, graças às restrições na modelagem citadas na seção 4.3, a integração no plano meridional, definido pelos eixos  $x$  e  $r$ , ficou simplificada e pode ser feita lâmina a lâmina por quadratura de Gauss unidirecional:

$$K_{ij}^e = \mu \sum_{k=1}^{N_c} \int_x \int_{r=r_{ik}}^{r_{ek}} \bar{E}_{ik} Q_{kl} \bar{E}_{lj} dx dr \quad (4.16)$$

onde  $r_{ik}$  é o raio interno da  $k$ -ésima lâmina e  $r_{ek}$  é o seu raio externo.

### 4.3.2 Cálculo das matrizes inerciais do elemento

As matrizes inerciais são obtidas através da primeira variação da energia cinética devida a rotação do eixo ( $\Omega = \dot{\phi}$ ) e dos campos de deslocamento, equações (4.1), para o harmônico 1.

#### Sistema de coordenadas local

A obtenção da energia cinética é feita a partir de um sistema de coordenadas móvel  $oxyz$ . Cada circunferência de raio  $r$  se translada, gira e se ovaliza permanecendo sempre uma curva plana, permitindo a definição deste sistema móvel amarrado a este plano e que gira de acordo com os movimentos desta circunferência. Este sistema tem a origem localizada no eixo  $OX$  e sofre as rotações  $\beta$  e  $\Gamma$  que são as rotações de precessão em relação a  $Y$  e  $Z$ , respectivamente, como mostra a Figura 4.5. Porém, não gira com a velocidade de spin do eixo  $\Omega$ . Portanto o plano  $yz$  contem a seção rotacionada e o eixo  $x$  é normal a esta seção.

#### Cálculo da energia cinética

A partir do sistema de coordenadas móvel, as componentes do deslocamento na direção axial podem ser escritas em função das componentes da rotação da seção:

$$\tilde{u}_i = -\Gamma_i r_i \quad (4.17)$$

$$\bar{u}_i = \beta_i r_i$$

onde  $\Gamma_i$  e  $\beta_i$  são as componentes da rotação nas direções  $Z$  e  $Y$ , respectivamente, Figura 4.5.

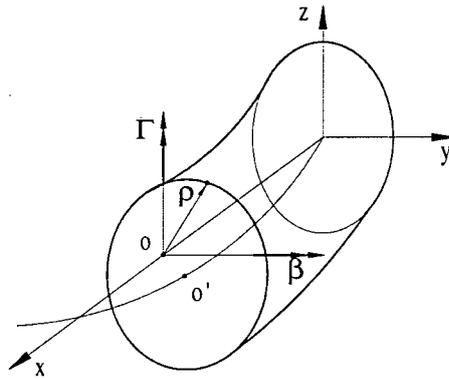


Figura 4.5: Deslocamentos e rotações da seção.

A posição de um ponto  $P$  na configuração deformada em relação ao sistema local é:

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ (r+w) \sin \theta + v \cos \theta \\ (r+w) \cos \theta - v \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

A velocidade deste ponto em relação ao sistema global é dada por [9]:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_r + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} \quad (4.19)$$

onde  $\dot{\mathbf{R}}$  é a velocidade do sistema móvel em relação ao sistema fixo, neste caso nula e  $\dot{\boldsymbol{\rho}}_r$  é a velocidade do ponto  $P$  relativa à origem do sistema móvel:

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}_r = \begin{Bmatrix} \dot{\rho}_x \\ \dot{\rho}_y \\ \dot{\rho}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{w} \sin \theta + \dot{v} \cos \theta \\ \dot{w} \cos \theta - \dot{v} \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

A taxa de movimento angular do elemento em relação ao sistema fixo é:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen } \beta & 1 & 0 \\ \cos \beta \text{ sen } \phi & 0 & \cos \phi \\ \cos \beta \cos \phi & 0 & -\text{sen } \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\Gamma} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\beta} \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

Considerando que as rotações  $\beta$  e  $\Gamma$  sejam muito pequenas, então  $\cos \beta \approx 1$  e  $\text{sen } \beta \approx \beta$ , tem-se para um ângulo  $\phi = 0$  que:

$$\boldsymbol{\omega} \simeq \begin{bmatrix} -\beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\Gamma} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi} - \beta \dot{\Gamma} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\Gamma} \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

A energia cinética de um elemento de volume infinitesimal pode ser expressa por:

$$dT = \frac{\rho r}{2} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) dx dr d\theta \quad (4.23)$$

onde:

$$(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\rho}_r \cdot \dot{\rho}_r + 2 \dot{\rho}_r \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \quad (4.24)$$

Substituindo as equações (4.18), (4.22) e (4.20) na equação (4.24), calcula-se o produto interno da equação (4.23). A partir da consideração de pequenos deslocamentos, pode-se desprezar os termos quadráticos nos deslocamentos. Substituindo este resultado na equação (4.23) e integrando-a em relação a  $\theta$ , obtém-se:

$$T = \frac{\pi \rho}{2} \int_r \int_x \left\{ r \left[ (\dot{\bar{v}}^2 + \dot{\bar{v}}^2 + \dot{\bar{w}}^2 + \dot{\bar{w}}^2) + 2\dot{\phi} (\bar{v} \dot{\bar{w}} + \bar{v} \dot{\bar{w}} - \dot{\bar{v}} \bar{w} + \dot{\bar{v}} \bar{w}) \right] \right\} dr dx + \frac{\pi \rho}{2} \int_r \int_x (\dot{\beta}^2 + \dot{\Gamma}^2 + 2\dot{\phi}^2 - 4\dot{\phi}^2 \beta \dot{\Gamma}) r^3 dr dx \quad (4.25)$$

Denotando o campo de deslocamentos pelo vetor:

$$\mathbf{q} = (\bar{w} \quad \bar{w} \quad \beta r \quad \Gamma r \quad \bar{v} \quad \bar{v})^T \quad (4.26)$$

pode-se reescrever (4.18) matricialmente como:

$$T = \frac{1}{2} \int_r \int_x \left[ \pi \rho r \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{I} \dot{\mathbf{q}} + \pi \rho r^3 \dot{\phi}^2 - \pi \rho r \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H} \mathbf{q} \right] dr dx \quad (4.27)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de ordem 6 e:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Expandindo o campo de deslocamentos pelas funções de interpolação:

$$\mathbf{q} = \mathbf{N}(r, x) \mathbf{q}^e \quad (4.29)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^e &= \left( \mathbf{q}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{q}_j^T \quad \dots \quad \mathbf{q}_M^T \right)^T \text{ e} \\ \mathbf{q}_j^T &= \left( \bar{w}_j \quad \tilde{w}_j \quad \beta_j r_j \quad \Gamma_j r_j \quad \bar{v}_j \quad \tilde{v}_j \right)^T \quad j = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde  $p$  é o número de nós. Assim, a matriz massa (inércia de translação e de rotação) é:

$$\mathbf{M}^e = \pi \int_r \int_x \rho \mathbf{N}^T(x, r) \mathbf{I} \mathbf{N}(x, r) r dx dr \quad (4.31)$$

E a matriz giroscópica é definida por:

$$\mathbf{G}^e = \pi \int_x \int_r \rho \mathbf{N}^T(x, r) (\mathbf{H}^T - \mathbf{H}) \mathbf{N}(x, r) r dr dx \quad (4.32)$$

Como geralmente as lâminas apresentam valores de densidade média muito próximas, sendo comumente iguais, pode-se calcular a densidade média do laminado  $\rho$  através da média das densidades das lâminas, ponderada pelas espessuras:

$$\rho = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{N_c} h_k \rho_k \quad (4.33)$$

onde  $\rho_k$  é a densidade média da  $k$ -ésima lâmina,  $h_k$  é a sua espessura e  $h$  é a espessura do laminado. Assim a integração numérica para o cálculo das matrizes inerciais pode ser feita como se o material fosse isotrópico, passando  $\rho$  para fora da integral  $r$  em (4.32) com o valor médio dado por (4.33).

## 4.4 Elemento de casca laminada

Esta formulação para o elemento de casca laminada considera o cisalhamento transversal da parede do rotor e é baseada na teoria de cascas de Donnell [13]. Como no elemento sólido, aqui também as matrizes de inércia e de rigidez são calculadas através de um processo semi-analítico. As funções de interpolação são escritas em termos de uma série de Fourier na direção circunferencial. Desta forma a modelagem é unidimensional, através de elementos cúbicos lagrangeanos de 4 nós.

### 4.4.1 Dedução da matriz de rigidez

O deslocamento de um ponto  $P$  nas direções  $r$ ,  $x$  e  $\theta$  é dado por:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^8 \left[ w_{0i} + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{w}_{ni} \cos(n\theta) + \tilde{w}_{ni} \sin(n\theta)) \right] N_i(x) \\ u &= \sum_{i=1}^8 \left[ u_{0i} + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{u}_{ni} \cos(n\theta) + \tilde{u}_{ni} \sin(n\theta)) \right] N_i(x) \\ v &= \sum_{i=1}^8 \left[ v_{0i} + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{v}_{ni} \sin(n\theta) + \tilde{v}_{ni} \cos(n\theta)) \right] N_i(x) \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde  $N_i(x)$  são tomadas como funções de interpolação polinomiais.

Considerando pequenos deslocamentos, as relações deformação-deslocamento usadas para a determinação da matriz de rigidez, em coordenadas cilíndricas, são as relações de Donnell

apresentadas por Kraus [13] como:

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{rx} \\ \gamma_{r\theta} \\ \chi_x \\ \chi_\theta \\ \chi_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ \frac{w}{a} + \frac{v_{,\theta}}{a} \\ v_{,x} + \frac{u_{,\theta}}{a} \\ \beta_x + w_{,x} \\ \frac{w_{,\theta}}{a} + \beta_\theta - \frac{v}{a} \\ -\beta_{x,x} \\ \frac{1}{a}\beta_{\theta,\theta} \\ \beta_{\theta,x} \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

onde  $a$  é o raio médio da casca cilíndrica e  $\beta_x$  e  $\beta_\theta$  são as rotações do segmento normal à parede em torno das direções tangencial e axial, respectivamente, expandidas para o primeiro harmônico por:

$$\beta_x = \tilde{\beta}_x \sin \theta + \bar{\beta}_x \cos \theta \quad (4.36)$$

$$\beta_\theta = \tilde{\beta}_\theta \cos \theta + \bar{\beta}_\theta \sin \theta$$

Deve-se notar que estas são as componentes de deformação de um ponto na superfície de referência da casca. A deformação num ponto genérico, usando-se a mesma notação para a deformação na superfície de referência, para simplificá-la, é dada por:

$$\epsilon_x^x = \epsilon_x + z \chi_x$$

$$\epsilon_\theta^x = \epsilon_\theta + z \chi_{x\theta} \quad (4.37)$$

$$\gamma_{x\theta}^x = \gamma_{x\theta} + z \chi_{x\theta}$$

ou, em forma matricial:

$$\epsilon^x = \epsilon^0 + z \chi \quad (4.38)$$

onde  $\epsilon^0$  representa o efeito de membrana e  $\chi$  o efeito de flexão e

$$\chi^x = \{ \gamma_{rx} \quad \gamma_{r\theta} \}^T \quad (4.39)$$

onde  $z$  é a coordenada radial do ponto medida a partir da superfície de referência;  $\gamma_{rx}$  e  $\gamma_{r\theta}$  são as deformações cisalhantes transversais à parede da casca.

Da mesma forma que para o elemento sólido, para o elemento de casca foi desenvolvido apenas o harmônico 1. Assim:

$$\epsilon = \epsilon_1 = \left\{ \begin{array}{l} (\bar{u} \cos \theta + \bar{u} \operatorname{sen} \theta) N_{i,x} \\ ((\bar{w} + \bar{v}) \cos \theta + (\bar{w} - \bar{v}) \operatorname{sen} \theta) \frac{N_i}{a} \\ (\bar{u} \cos \theta - \bar{u} \operatorname{sen} \theta) \frac{N_i}{a} + (\bar{v} \operatorname{sen} \theta + \bar{v} \cos \theta) N_{i,x} \\ (\bar{\beta}_x \operatorname{sen} \theta + \bar{\beta}_x \cos \theta) N_i + (\bar{w} \cos \theta + \bar{w} \operatorname{sen} \theta) N_{i,x} \\ ((\bar{w} - \bar{v}) \cos \theta - (\bar{w} + \bar{v}) \operatorname{sen} \theta) \frac{N_i}{a} + (\bar{\beta}_\theta \cos \theta + \bar{\beta}_\theta \operatorname{sen} \theta) N_i \\ - (\bar{\beta}_x \operatorname{sen} \theta + \bar{\beta}_x \cos \theta) N_{i,x} \\ \frac{1}{a} (\bar{\beta}_\theta \cos \theta - \bar{\beta}_\theta \operatorname{sen} \theta) N_i \\ (\bar{\beta}_\theta \cos \theta + \bar{\beta}_\theta \operatorname{sen} \theta) N_{i,x} \end{array} \right\} \quad (4.40)$$

Colocando na forma matricial esta relação fica:

$$\epsilon = \mathbf{E} \mathbf{U} \quad (4.41)$$

onde a matriz de deformação é dada por:

$$\mathbf{E} = \left[ \begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & N_{i,x} c & N_{i,x} s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{N_i}{a} s & \frac{N_i}{a} c & 0 & 0 & -\frac{N_i}{a} s & \frac{N_i}{a} c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{i,x} s & N_{i,x} c & -\frac{N_i}{a} s & \frac{N_i}{a} c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{i,x} s & N_{i,x} c & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i s & N_i c & 0 & 0 \\ \frac{N_i}{a} c & -\frac{N_i}{a} s & 0 & 0 & -\frac{N_i}{a} c & -\frac{N_i}{a} s & 0 & 0 & N_i c & N_i s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{i,x} c & -N_{i,x} s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{N_i}{a} s & \frac{N_i}{a} c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,x} c & N_{i,x} s \end{array} \right] \quad (4.42)$$

$$c = \cos \theta$$

$$s = \operatorname{sen} \theta$$

e  $\mathbf{U}$  é o vetor de deslocamentos nodais do elemento, formado pelos deslocamentos  $U_i$  de cada nó  $i$  definidos por:

$$\mathbf{U}_i = \{ \bar{w}_i \quad \tilde{w}_i \quad \bar{u}_i \quad \tilde{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \tilde{v}_i \quad \bar{\beta}_{xi} \quad \tilde{\beta}_{xi} \quad \bar{\beta}_{\theta i} \quad \tilde{\beta}_{\theta i} \}^T \quad (4.43)$$

As relações constitutivas para a casca considerada podem ser separadas em duas partes, uma delas envolvendo as componentes coplanares no plano tangente  $x - \theta$ , que compreende um estado plano de tensões ( $\sigma_r = 0$ ) com componentes  $\{ \sigma_x \quad \sigma_\theta \quad \tau_{x\theta} \}$  e  $\{ \epsilon_x \quad \epsilon_\theta \quad \gamma_{x\theta} \}$ , e uma outra relação para o cisalhamento transversal envolvendo  $\{ \tau_{rx} \quad \tau_{r\theta} \}$  e  $\{ \gamma_{rx} \quad \gamma_{r\theta} \}$ .

Para ambos os conjuntos as relações são as seguintes, Agarwal e Broutman [1]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (4.44)$$

ou

$$\sigma^{xk} = \bar{Q}^k \epsilon^k \quad (4.45)$$

e

$$\begin{Bmatrix} \tau_{rx} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{rx} \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad (4.46)$$

ou

$$\tau^k = \bar{Q}_s^k \gamma_s^k \quad (4.47)$$

onde

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11} &= Q_{11} c^4 + (Q_{12} + 2Q_{66}) s^2 c^2 + Q_{22} s^4 \\
 \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) s^2 c^2 + Q_{12} (s^4 + c^4) \\
 \bar{Q}_{22} &= Q_{11} s^4 + (Q_{12} + 2Q_{66}) s^2 c^2 + Q_{22} c^4 \\
 \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) s c^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) s^3 c \\
 \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) s^3 c + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) s c^3 \\
 \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) s^2 c^2 + Q_{66} (s^4 + c^4) \\
 \bar{Q}_{44} &= G_{13} c^2 + G_{23} s^2 \\
 \bar{Q}_{45} &= (G_{13} - G_{23}) s c \\
 \bar{Q}_{55} &= G_{13} s^2 + G_{23} c^2
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

e  $Q_{11}$ ,  $Q_{12}$ , etc. são os coeficientes de rigidez nas direções principais de propriedades definidos pela equação (2.9).

Tomando as definições dos esforços na casca:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N} &= \{ N_x \quad N_\theta \quad N_{x\theta} \}^T = \sum_{k=1}^{N_c} \int_{z=-h_k/2}^{h_k/2} \boldsymbol{\sigma}^{xk} dz \\
 \mathbf{M} &= \{ M_x \quad M_\theta \quad M_{x\theta} \}^T = \sum_{k=1}^{N_c} \int_{z=-h_k/2}^{h_k/2} z \boldsymbol{\sigma}^{xk} dz \\
 \mathbf{Q} &= \{ Q_{rx} \quad Q_{r\theta} \}^T = \sum_{k=1}^{N_c} \int_{z=-h_k/2}^{h_k/2} \boldsymbol{\tau}^k dz
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

As deformações num ponto genérico  $\boldsymbol{\epsilon}^k$  e  $\boldsymbol{\gamma}_s^k$  são relacionadas às deformações na superfície de referência pela equação (4.37). Substituindo estas relações nas equações (4.44) e (4.46), levando as tensões nas lâminas a equação (4.49) e integrando na espessura chega-se as relações esforços-deformação:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}^0 \\ \boldsymbol{\chi} \end{Bmatrix} \tag{4.50}$$

e

$$\mathbf{Q} = k_s h \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}^x = \bar{\mathbf{A}} \boldsymbol{\gamma}^x \quad (4.51)$$

onde

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^{Nc} \bar{Q}_{ij} h_k \\ B_{ij} &= \sum_{k=1}^{Nc} \bar{Q}_{ij} h_k \bar{z}_k \\ D_{ij} &= \sum_{k=1}^{Nc} \bar{Q}_{ij} \left( h_k \bar{z}_k^2 + \frac{h_k^2}{12} \right) \\ \bar{A}_{ij} &= k_s \sum_{k=1}^{Nc} \bar{C}_{ij} h_k \end{aligned}$$

e  $k_s$  é a constante de cisalhamento, tomada como sendo igual a 5/6, e  $\bar{z}_k$  é a distância da superfície média da lâmina à superfície média do laminado.

As relações acima podem ser agrupadas, resultando num sistema de equações único:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}^0 \\ \boldsymbol{\gamma}^x \\ \boldsymbol{\chi} \end{Bmatrix} \quad (4.52)$$

onde, para simplificar a notação, foi definida uma matriz  $\mathbf{C}_f$  de ordem 8x8 tal que:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \mathbf{C}_f \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}^0 \\ \boldsymbol{\gamma}^x \\ \boldsymbol{\chi} \end{Bmatrix} \quad (4.53)$$

A energia potencial elástica em termos dos esforços é dada por:

$$V = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}^0 \\ \boldsymbol{\gamma}^x \\ \boldsymbol{\chi} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} d\mathcal{V} \quad (4.54)$$

Substituindo a relação constitutiva (4.53) e tomando a discretização das deformações da superfície de referência (4.41) obtém-se:

$$V = \frac{1}{2} \int_x \int_{\theta} (\mathbf{E} \mathbf{U})^T \mathbf{C}_f (\mathbf{E} \mathbf{U}) d\theta dx \quad (4.55)$$

Pode-se então determinar a matriz de rigidez a partir da primeira variação da energia potencial:

$$\mathbf{K}^e = \int_x \int_\theta \mathbf{E}^T \mathbf{C}_f \mathbf{E} d\theta dx \quad (4.56)$$

Como  $\mathbf{E}$  é função de  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$ , o produto  $\mathbf{E}^T \mathbf{C}_f \mathbf{E}$  resulta em termos proporcionais a  $\sin^2 \theta$ ,  $\cos^2 \theta$  e  $\sin \theta \cos \theta$ . Definindo-se a matriz  $\bar{\mathbf{E}}$ , obtida, como no caso do elemento sólido, removendo-se os termos trigonométricos de  $\mathbf{E}$  e uma matriz de controle  $\hat{\mathbf{E}}$ , onde  $\hat{E}_{ij} = 1$  ou  $-1$ , conforme  $E_{ij}$  dependa de  $\sin \theta$  ou  $\cos \theta$ , respectivamente, a integração na direção circunferencial ( $\theta$ ) da equação (4.56) é feita de forma analítica por:

$$K_{ij}^e = \mu \int_x \bar{E}_{ik} C_{fkl} \bar{E}_{lj} dx \quad (4.57)$$

onde  $\mu = \pi$ , se  $\hat{E}_{ik} \hat{E}_{lj} = 1$  ou  $\mu = 0$ , se  $\hat{E}_{ik} \hat{E}_{lj} = -1$ . A integração numérica na direção  $x$  é feita por quadratura de Gauss unidirecional:

$$K_{ij}^e = \mu \sum_{j=1}^{n_p} \bar{E}_{ik} C_{fkl} \bar{E}_{lj} W_j \quad (4.58)$$

onde  $n_p$  é o número de pontos de integração e  $W_j$  é o peso do  $j$ -ésimo ponto de integração.

#### 4.4.2 Cálculo das matrizes inerciais do elemento de casca

As matrizes inerciais são obtidas através da primeira variação da energia cinética devida a rotação do eixo ( $\Omega = \dot{\phi}$ ) e dos campos de deslocamento, equações (4.34), para o primeiro harmônico.

Na obtenção da energia cinética é utilizado o mesmo sistema de coordenadas móvel  $oxyz$  definido para o elemento sólido. Este sistema sofre as rotações de precessão  $\beta$  e  $\Gamma$ , que são relacionadas aos deslocamentos axiais por:

$$\tilde{u}_i = -\Gamma_i a \quad (4.59)$$

$$\bar{u}_i = \beta_i a$$

onde  $\Gamma_i$  e  $\beta_i$  são as componentes da rotação do nó  $i$  nas direções  $Z$  e  $Y$ , respectivamente, Figura 4.5.

A posição de um ponto  $P$ , distante  $\xi$  do raio médio  $a$ , em relação ao sistema local é:

$$\rho = \begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x \xi \\ (a + \xi + w) \sin \theta + v \cos \theta - \beta_\theta \xi \cos \theta \\ (a + \xi + w) \cos \theta - v \sin \theta - \beta_\theta \xi \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (4.60)$$

Considerando casca delgada, pode-se eliminar  $\beta_\theta$ :

$$\beta_\theta = \frac{1}{a} (v - w_{,\theta}) \quad (4.61)$$

Substituindo a equação (4.61) na equação (4.60), obtém-se:

$$\rho = \begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x \xi \\ (a + \xi + w) \sin \theta + \left[ v - \frac{1}{a} (v - w_{,\theta}) \xi \right] \cos \theta \\ (a + \xi + w) \cos \theta + \left[ \frac{1}{a} (v - w_{,\theta}) \xi - v \right] \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (4.62)$$

A velocidade deste ponto em relação ao sistema global é dada por:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\rho}_r + \omega \times \rho \quad (4.63)$$

A taxa de movimento angular do elemento em relação ao sistema fixo é dada pela equação:

$$\omega \simeq \begin{bmatrix} -\beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\Gamma} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi} - \beta \dot{\Gamma} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\Gamma} \end{Bmatrix} \quad (4.64)$$

A velocidade do ponto  $P$  em relação ao sistema local é:

$$\dot{\rho}_r = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\rho}_x \\ \dot{\rho}_y \\ \dot{\rho}_z \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\beta}_x \xi \\ \dot{w} \sin \theta + \left[ \dot{v} - \frac{1}{a} (\dot{v} - \dot{w}, \theta) \xi \right] \cos \theta \\ \dot{w} \cos \theta + \left[ \frac{1}{a} (\dot{v} - \dot{w}, \theta) \xi - \dot{v} \right] \sin \theta \end{array} \right\} \quad (4.65)$$

A energia cinética de um elemento de volume infinitesimal pode ser expressa por:

$$dT = \frac{\rho (a + \xi)}{2} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) dx d\xi d\theta \quad (4.66)$$

Também no elemento de casca foi utilizada a densidade média da lâmina dada pela equação (4.33) no cálculo das matrizes inerciais.

Tratando-se de cascas finas, pode-se considerar  $h^2/a^2 \ll 1$ . Substituindo as equações (4.60), (4.64) e (4.65) na equação (4.63), calculando o produto interno, desconsiderando os termos quadráticos nos deslocamentos e integrando a equação (4.66) em relação a  $\theta$ , obtém-se:

$$T = \frac{\pi\rho}{2} a h \int_x \left[ \dot{\bar{v}}^2 + \dot{\bar{w}}^2 + \dot{\bar{w}}^2 + \dot{\bar{w}}^2 + 2\dot{\phi} \left( \bar{v} \dot{\bar{w}} + \bar{v} \dot{\bar{w}} - \dot{\bar{v}} \bar{w} - \dot{\bar{v}} \bar{w} \right) \right] dx + \quad (4.67)$$

$$+ \frac{\pi\rho}{2} a^3 h \int_x \left( \dot{\beta}^2 + \dot{\Gamma}^2 + 2\dot{\phi}^2 - 4\dot{\phi}^2 \beta \dot{\Gamma} \right) dx$$

Denotando o campo de deslocamentos por:

$$\mathbf{q} = \{ \bar{w} \quad \bar{w} \quad \beta \quad \Gamma \quad \bar{v} \quad \bar{v} \quad \bar{\beta}_x \quad \bar{\beta}_x \quad \bar{\beta}_\theta \quad \bar{\beta}_\theta \}^T \quad (4.68)$$

pode-se reescrever matricialmente:

$$T = \frac{\pi\rho}{2} a h \int_x \left[ \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}} + a^2 \dot{\phi}^2 - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H} \mathbf{q} \right] dx \quad (4.69)$$

onde:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

e:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

Expandindo o campo de deslocamentos pelas funções de interpolação  $\mathbf{N}(x)$ , tem-se:

$$\mathbf{q} = \mathbf{N}(x) \mathbf{q}^e \quad (4.72)$$

onde  $\mathbf{q}^e$  é constituída pelos deslocamentos nodais, dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^e &= (\mathbf{q}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{q}_j^T \quad \dots \quad \mathbf{q}_M^T)^T \quad e \\ \mathbf{q}_j^T &= (\bar{w}_j \quad \tilde{w}_j \quad \beta_j \quad \Gamma_j \quad \bar{v}_j \quad \tilde{v}_j \quad \bar{\beta}_{xj} \quad \tilde{\beta}_{xj} \quad \bar{\beta}_{\theta j} \quad \tilde{\beta}_{\theta j})^T \end{aligned} \quad (4.73)$$

Assim, a matriz massa (inércia de translação e de rotação) é:

$$\mathbf{M}^e = \pi \int_{\xi} \int_x \rho \mathbf{N}^T(x) \mathbf{A} \mathbf{N}(x) \xi \, dx \, d\xi \quad (4.74)$$

E a matriz giroscópica é definida por:

$$\mathbf{G}^e = \pi \int_{\xi} \int_x \rho \mathbf{N}^T(x) (\mathbf{H}^T - \mathbf{H}) \mathbf{N}(x) \xi dx d\xi \quad (4.75)$$

Pelas definições observa-se que as matrizes de rigidez  $\mathbf{K}$  e de inércia  $\mathbf{M}$  são simétricas, enquanto que a matriz de efeitos giroscópicos é anti-simétrica.

# Capítulo 5

## RESULTADOS

São aqui apresentados alguns resultados obtidos com a implementação computacional das formulações dos elementos sólido e de casca no programa ROFLEX II [3]. Na seção 5.1, os resultados obtidos foram comparados com os do *software* comercial MSC/Nastran. Nas seções 5.2 a 5.5 foram analisadas cascas cilíndricas rotativas de raio  $r$ , comprimento  $L$  e espessura constante  $h$ , como indicado na Figura (5.1). Não foram aplicadas condições de contorno, tendo sido empregada a técnica de shifting (ver seção 3.2.2).

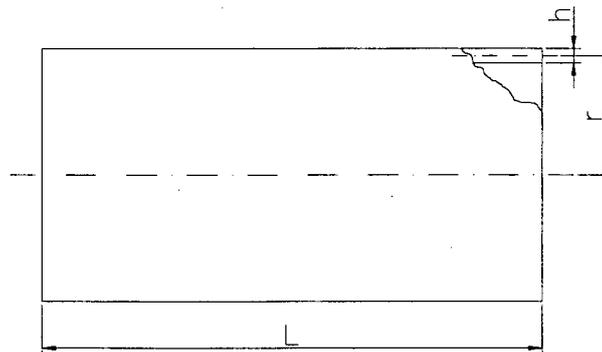


Figura 5.1: Dimensões da casca cilíndrica.

Nos casos em que os elementos sólido e de casca foram comparados com o elemento de viga, seções 5.2 e 5.3, os resultados deste último foram obtidos de uma formulação baseada na Teoria de Vigas de Timoshenko já existente no programa ROFLEX II e, quando se trata de material composto laminado, as propriedades equivalentes foram calculadas através do programa CedricT [19].

Em alguns dos gráficos apresentados, os modos progressivos estão indicados pela letra *P*, enquanto os modos regressivos estão representados pela letra *R*. Os modos estão numerados na seqüência crescente na situação de rotação nula.

## 5.1 Comparação com *software* comercial

Com a finalidade de tentar verificar a validade dos resultados obtidos, foram feitas algumas comparações com os resultados do *software* comercial MSC/Nastran. Entretanto, só foi possível a comparação de resultados para rotores parados, dado que este não faz a análise considerando uma velocidade de rotação.

A comparação é feita pela variação percentual entre as freqüências obtidas pelo ROFLEX em relação às obtidas pelo MSC/Nastran, tendo como base as do último. Foram comparados os modos sob flexão, ilustrados pela figura 5.2. O modelo utilizado no ROFLEX é formado de 10 elementos sólidos, como indicado na figura 5.3, enquanto que o modelo tri-dimensional utilizado no MSC/Nastran é formado por 800 elementos, 20 anéis com 40 elementos cada, do tipo "Plate". Para relações geométricas  $\frac{L}{r} = 10$  e  $\frac{h}{r} = 0,1$ , considerando material isotrópico, as variações para os três primeiros modos encontradas foram:

$$R_{f1} = 0,77\%$$

$$R_{f2} = 1,07\%$$

$$R_{f3} = 1,77\%$$

onde

$$R_f = \frac{f_{ROFLEX} - f_{Nastran}}{f_{Nastran}} 100$$

e o algarismo no índice indica o modo.

Quando comparados para as mesmas relações geométricas, mas considerando material composto formado por duas lâminas ortotrópicas não simétricas, as variações para os três primeiros modos encontradas foram:

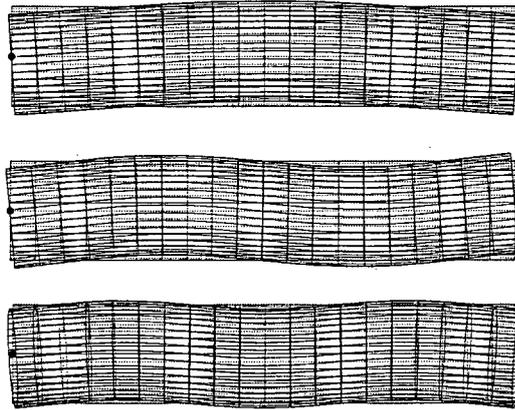


Figura 5.2: Os três primeiros modos sob flexão.

$$R_{f1} = -4,41\%$$

$$R_{f2} = -3,54\%$$

$$R_{f3} = -2,83\%$$

Os resultados do ROFLEX apresentaram-se bastante compatíveis com os do MSC/Nastran para material isotrópico, mas um pouco inferiores no caso de laminados não simétricos.

## 5.2 Comparação dos elementos para material isotrópico

Foi realizada uma extensa comparação entre os elementos sólido, de casca e de viga na análise de um material isotrópico com as seguintes propriedades:

$$E = 2.10^{11} \text{ N/m}^2;$$

$$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3;$$

$$\nu = 0,3.$$

As comparações envolveram diversas geometrias, variando as relações  $\frac{L}{r}$  e  $\frac{h}{r}$  entre valores extremos para verificar o comportamento de cada um dos elementos. Foram utilizados

modelos com 10 elementos sólidos, 10 elementos de casca e 78 de viga, resultando em 318, 310 e 316 graus de liberdade, respectivamente. A Figura 5.3 mostra os três modelos utilizados.

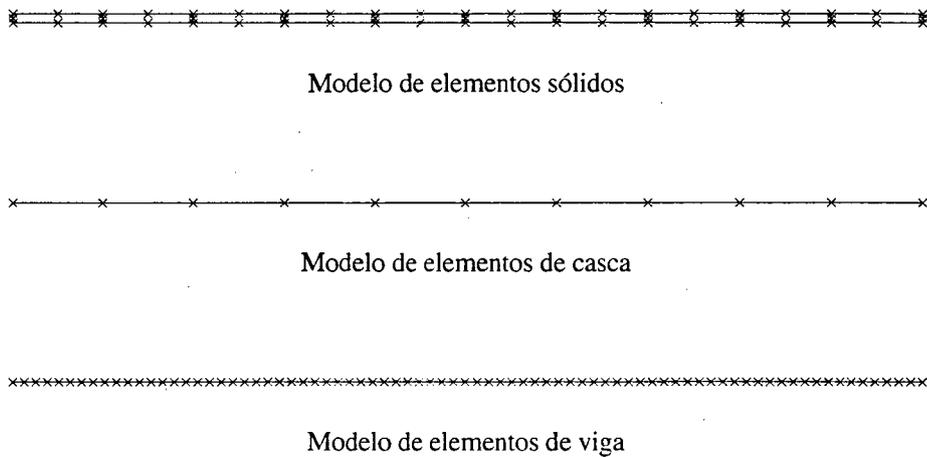


Figura 5.3: Modelos de elementos sólidos, de casca e de viga.

As Figuras 5.4 e 5.5 mostram as frequências dos três primeiros modos para duas relações  $\frac{L}{r}$  diferentes, 1 e 10, respectivamente. Em ambas, as curvas para o elemento de casca não são mostradas pois os resultados praticamente coincidem com os do elemento sólido.

Para rotores curtos, já eram esperadas significativas diferenças entre o elemento de viga e os demais, devido à formulação do primeiro não ser apropriada para relações  $\frac{L}{r}$  menores do que 10.

A análise dos resultados obtidos nestas comparações mostra que, especialmente para o elemento de viga, os autovalores sofrem pequenas variações para valores de  $\frac{L}{r}$  menores que 0,1 e que eles praticamente não variam para valores menores que 0,01. Isto pode ser explicado pelo fato de que a rigidez é proporcional à inércia da seção, enquanto a massa é proporcional à área da seção. Portanto, os autovalores são proporcionais a:

$$\lambda = \alpha \sqrt{\frac{(r_e^4 - r_i^4)}{(r_e^2 - r_i^2)}} \quad (5.1)$$

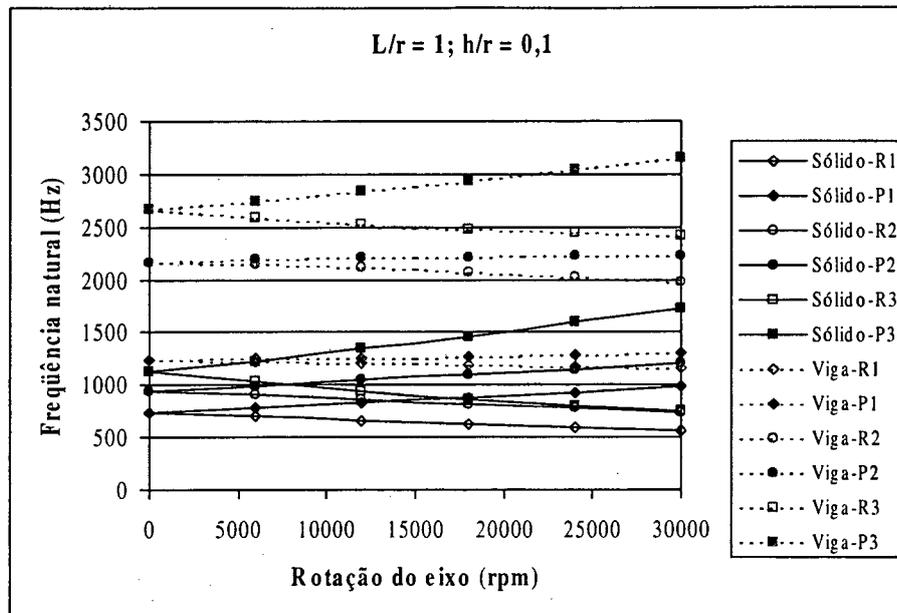


Figura 5.4: Diagrama de Campbell para um rotor isotrópico com relações geométricas  $L/r=1$  e  $h/r=0,1$ .

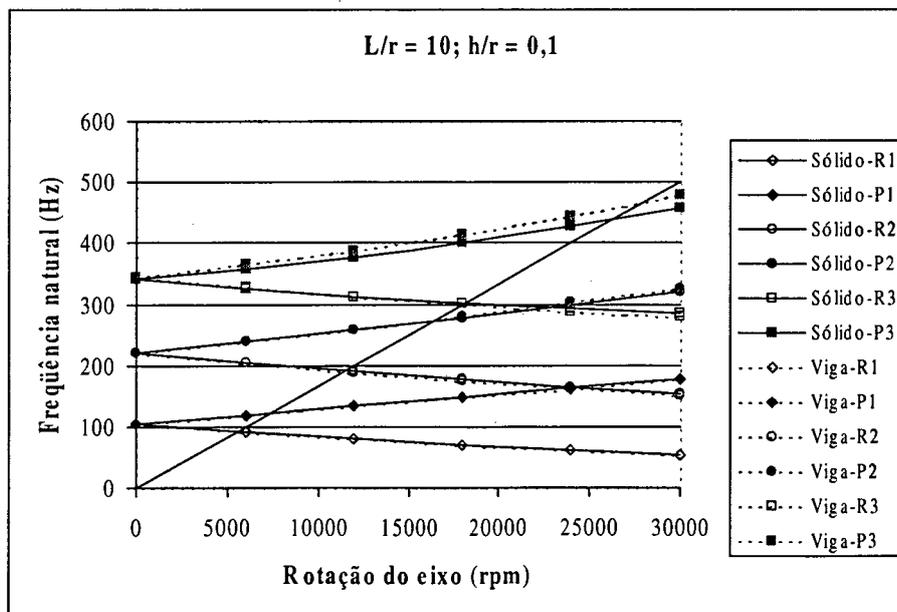


Figura 5.5: Diagrama de Campbell para um rotor isotrópico com relações geométricas  $L/r=10$  e  $h/r=0,1$ .

onde  $r_e$  é o raio externo e  $r_i$  é o raio interno da casca cilíndrica. Quando se trata de  $h \ll r$ , a área da seção pode ser aproximada por  $2\pi r h$  e a inércia da seção pode ser aproximada por  $\pi r^3 h$ . Neste caso, os autovalores são proporcionais ao raio e independem da espessura.

Esta análise também mostra uma grande semelhança entre os resultados obtidos com os elementos sólido e de casca. Entretanto, em alguns casos não apresentados, entre os três primeiros modos para o elemento sólido surgiram modos diferentes para o elemento de casca, possivelmente associados aos graus de liberdade exclusivos deste elemento ou modos espúrios.

### 5.3 Comparação dos elementos para material composto

Foi realizada uma comparação entre os elementos sólido, de casca e de viga na análise de um material composto formado por duas lâminas orientadas a  $0/90^\circ$  com as seguintes propriedades:

$$E_1 = 2.10^{11} \text{ N/m}^2;$$

$$E_2 = E_3 = 8.10^9 \text{ N/m}^2;$$

$$G_{12} = G_{13} = 4,8.10^9 \text{ N/m}^2;$$

$$G_{23} = 4.10^9 \text{ N/m}^2;$$

$$\rho = 2000 \text{ kg/m}^3;$$

$$\nu = 0,25.$$

As comparações envolveram diversas geometrias, variando as relações  $\frac{L}{r}$  e  $\frac{h}{r}$  entre valores extremos para verificar o comportamento de cada um dos elementos. Foram utilizados modelos com 10 elementos sólidos, 10 elementos de casca e 78 de viga, resultando em 318, 310 e 316 graus de liberdade, respectivamente. A Figura 5.3 mostra os três modelos utilizados.

As Figuras 5.6 e 5.7 mostram as frequências para os três primeiros modos para duas relações  $\frac{L}{r}$  diferentes, 1 e 10, respectivamente. Os resultados para o elemento de casca não

são apresentados pois praticamente coincidem com os do elemento sólido.

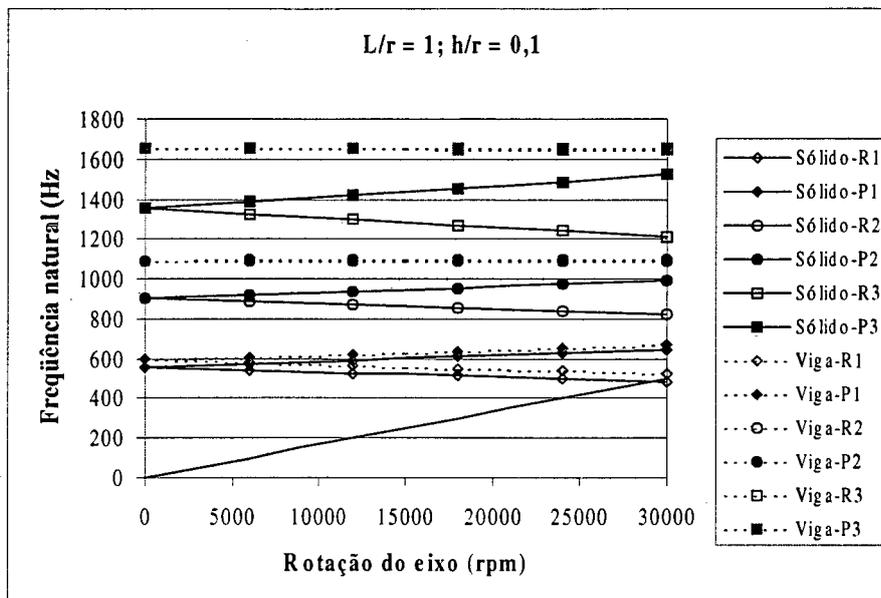


Figura 5.6: Diagrama de Campbell para um rotor de material composto com relações geométricas  $L/r=1$  e  $h/r=0,1$ .

Comparando, por exemplo, as Figuras 5.5 e 5.7, pode-se verificar que a diferença entre os resultados obtidos com os elementos sólido e de viga aumenta quando o rotor é feito de material composto. Neste exemplo, a diferença entre os resultados para as frequências naturais do primeiro modo do rotor em material isotrópico é de -0,3% para  $\phi = 0$  e -1% para  $\phi = 30000$  rpm, tomando os resultados do elemento sólido como base. Para o rotor em material composto, a diferença passa a ser de -17% para  $\phi = 0$  e -39% para  $\phi = 30000$  rpm.

## 5.4 Estudo da variação das frequências naturais com as relações geométricas

Foi feito um estudo da variação das frequências de um rotor em material composto com as relações  $\frac{L}{r}$  e  $\frac{h}{r}$ . Foi empregado o mesmo modelo com 10 elementos sólidos, representado no topo da Figura 5.3. As lâminas apresentam as seguintes propriedades:

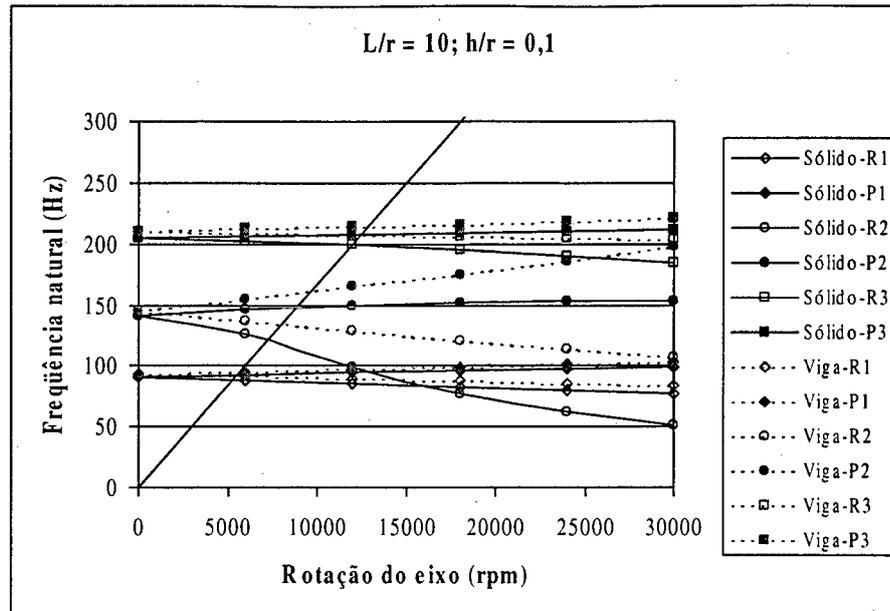


Figura 5.7: Diagrama de Campbell para um rotor de material composto com relações geométricas  $L/r=10$  e  $h/r=0,1$ .

$$E_1 = 2.10^{11} \text{ N/m}^2;$$

$$E_2 = E_3 = 8.10^9 \text{ N/m}^2;$$

$$G_{12} = G_{13} = 4,8.10^9 \text{ N/m}^2;$$

$$G_{23} = 4.10^9 \text{ N/m}^2;$$

$$\rho = 2000 \text{ kg/m}^3;$$

$$\nu = 0,25.$$

As Figuras 5.8 e 5.9 mostram a variação da primeira frequência natural regressiva com a relação  $\frac{L}{r}$ , para a relação  $\frac{h}{r}$  constante e igual a 0,1. Na primeira figura esta relação aparece no eixo das abscissas e as curvas indicam a rotação do rotor em rotações por minuto. Na segunda a rotação do rotor aparece no eixo das abscissas enquanto as curvas representam as diferentes relações  $\frac{L}{r}$ .

Pela observação da Figura 5.8, verifica-se que os rotores curtos são mais sensíveis à rotação do rotor e que pequenos aumentos no comprimento provocam grandes reduções na

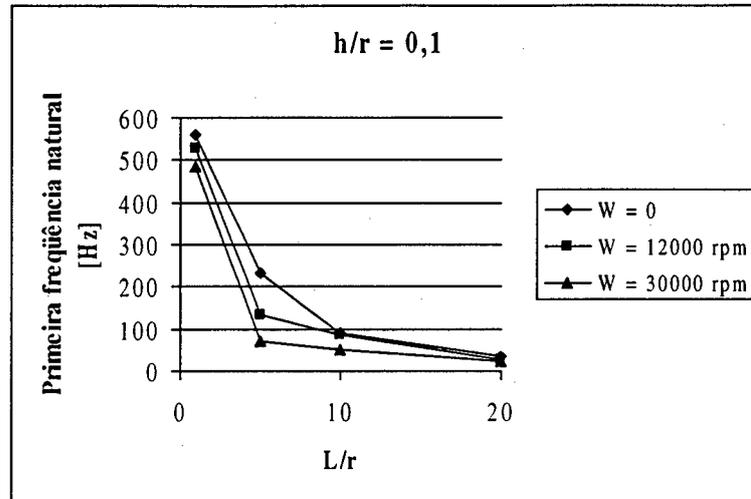


Figura 5.8: Variação da primeira frequência natural com a relação  $L/r$ .

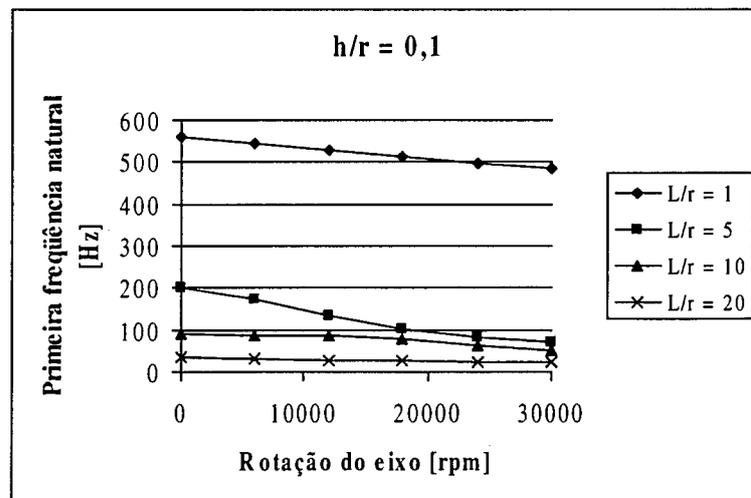


Figura 5.9: Variação da primeira frequência natural com a rotação do rotor para uma relação  $L/r$ .

freqüência natural e vice-versa. Já a Figura 5.9 indica que, na medida em que a rotação do rotor é mais elevada, a relação  $\frac{L}{r}$  tem menos importância sobre a freqüência natural.

As Figuras 5.10 e 5.11 mostram a variação da primeira freqüência natural com a relação  $\frac{h}{r}$ , para a relação  $\frac{L}{r}$  constante e igual a 10. Na primeira figura esta relação aparece no eixo das abscissas e as curvas indicam a rotação do rotor em rotações por minuto. Na segunda a rotação do rotor aparece no eixo das abscissas enquanto as curvas representam as diferentes relações  $\frac{h}{r}$ .

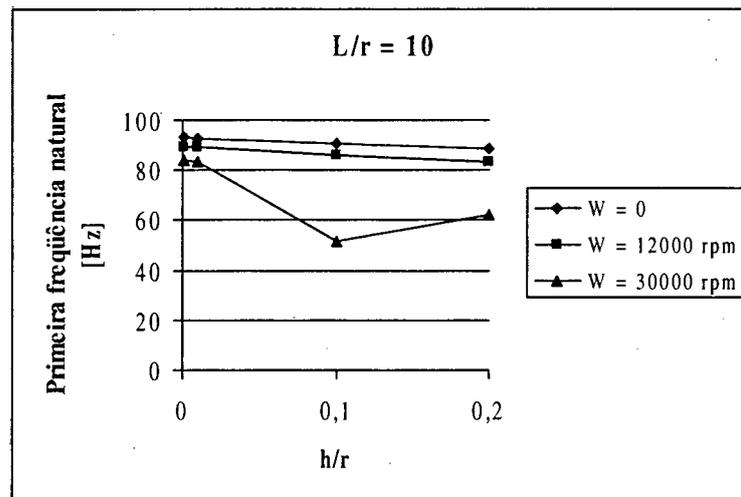


Figura 5.10: Variação na primeira freqüência natural com a relação  $h/r$ .

Cabe aqui a observação de que a primeira freqüência natural pode corresponder a diferentes modos para diferentes rotações do rotor. Isto explica as discontinuidades nas quatro figuras acima.

Observa-se ainda nas Figuras 5.10 e 5.11 que a freqüência natural é pouco influenciada pela espessura quando a espessura é pequena, mas que esta influência cresce à medida que a rotação do rotor cresce.

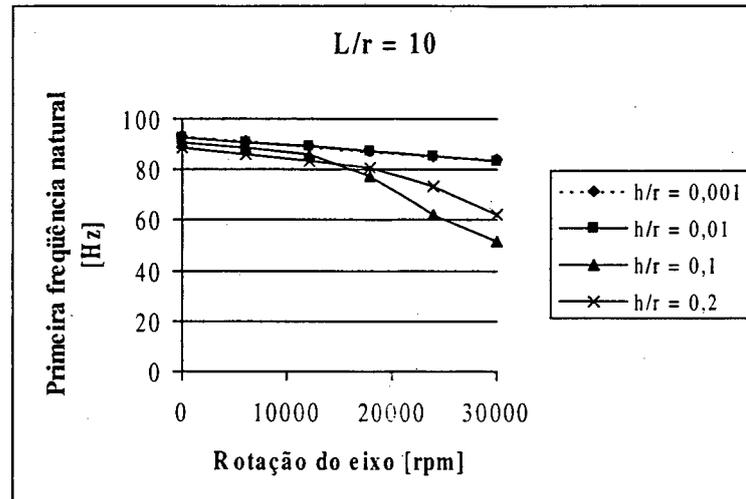


Figura 5.11: Variação na primeira frequência natural com a rotação do rotor para uma relação  $h/r$ .

## 5.5 Estudo da variação das frequências naturais com a sequência de empilhamento

Foi feito um estudo da variação das frequências de um rotor em material composto mantendo a geometria e variando a sequência de empilhamento. As relações geométricas utilizadas foram  $\frac{L}{r} = 5$  e  $\frac{h}{r} = 0,05$ . Foram empregados modelos com 10 elementos sólidos. As lâminas apresentam as seguintes propriedades:

$$E_1 = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2;$$

$$E_2 = E_3 = 8 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2;$$

$$G_{12} = G_{13} = 4,8 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2;$$

$$G_{23} = 4 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2;$$

$$\rho = 2000 \text{ kg/m}^3;$$

$$\nu = 0,25.$$

As Figuras 5.12, 5.13 e 5.14 mostram os resultados obtidos para um laminado  $+\alpha/-\alpha$  para as rotações  $\phi = 0$ ,  $\phi = 12000 \text{ rpm}$  e  $\phi = 30000 \text{ rpm}$ .

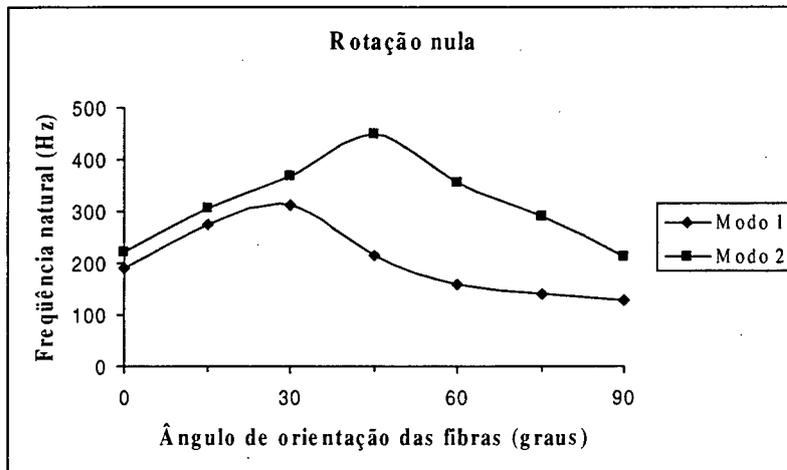


Figura 5.12: Influência do ângulo de orientação das fibras nas frequências naturais de um rotor de material composto a rotação nula.

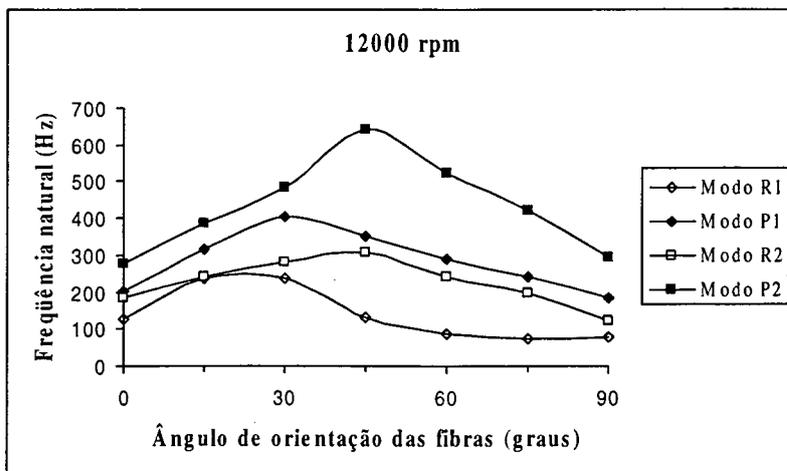


Figura 5.13: Influência do ângulo de orientação das fibras nas frequências naturais de um rotor de material composto a rotação de 12000 rpm.

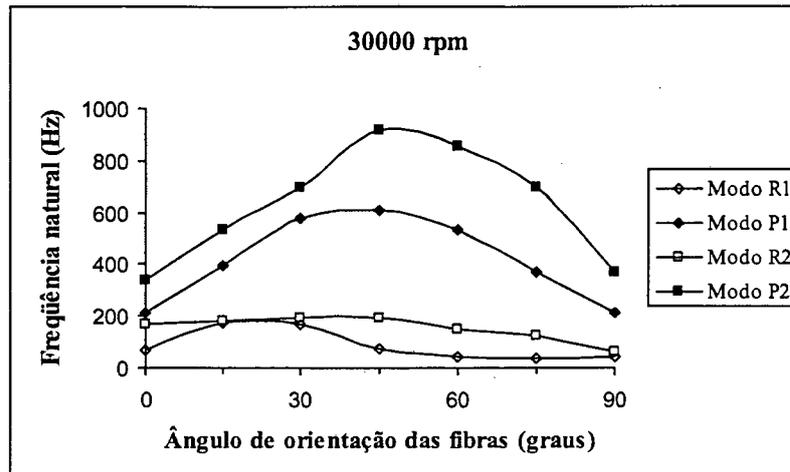


Figura 5.14: Influência do ângulo de orientação das fibras nas frequências naturais de um rotor de material composto a rotação de 30000 rpm.

Os resultados mostram que os menores valores para as frequências naturais são obtidos para ângulos de orientação das fibras próximos a  $0^\circ$  e a  $90^\circ$ . Os valores máximos foram obtidos para ângulos próximos a  $30^\circ$  para o primeiro modo e a  $45^\circ$  para o segundo modo.

Estes resultados mostram também que são possíveis mudanças significativas nas frequências naturais através de mudanças no ângulo de orientação das fibras. Neste exemplo, o maior valor de frequência é igual a, pelo menos, duas vezes o menor valor para um mesmo modo e à mesma rotação. Outros resultados não plotados mostram que a mudança no número de camadas, sempre alternadas  $+\alpha/-\alpha$ , para uma mesma espessura fixa ou na sua ordem apresentou mudanças muito pequenas.

## 5.6 Análise de um rotor de geometria complexa

Com a finalidade de demonstrar a versatilidade do elemento sólido na análise de rotores com geometria complexa, é apresentada a análise de um rotor constituído por tampas em aço de alta resistência e corpo cilíndrico formado por uma camada de aço revestida por quatro lâminas de material composto. A Figura 5.15 mostra o corte longitudinal do rotor e os detalhes da modelagem das tampas.

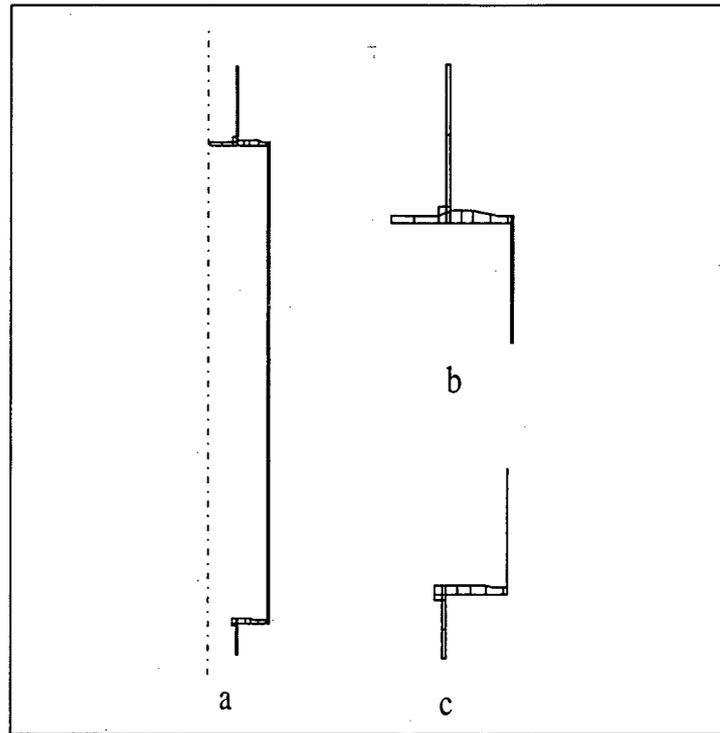


Figura 5.15: a) Corte longitudinal do rotor; b) Detalhe do modelo da tampa superior; c) Detalhe do modelo da tampa inferior.

As propriedades do aço são:

$$E = 1,85 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2;$$

$$G = 7,11 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2;$$

$$\rho = 8000 \text{ kg/m}^3;$$

$$\nu = 0,3.$$

As propriedades das lâminas de material composto são:

$$E_1 = 2.10^{11} \text{ N/m}^2;$$

$$E_2 = E_3 = 8.10^9 \text{ N/m}^2;$$

$$G_{12} = G_{13} = 4,8.10^9 \text{ N/m}^2;$$

$$G_{23} = 4.10^9 \text{ N/m}^2;$$

$$\rho = 2000 \text{ kg/m}^3;$$

$$\nu = 0,25.$$

As dimensões básicas do corpo cilíndrico são:

$$L = 710 \text{ mm};$$

$$r = 86 \text{ mm};$$

$$h = 1 \text{ mm}.$$

A espessura está dividida em 0,4 mm de aço e 4 lâminas de 0,15 mm orientadas a  $+45^\circ / -45^\circ$ .

A Figura 5.16 mostra o diagrama de Campbell do rotor.

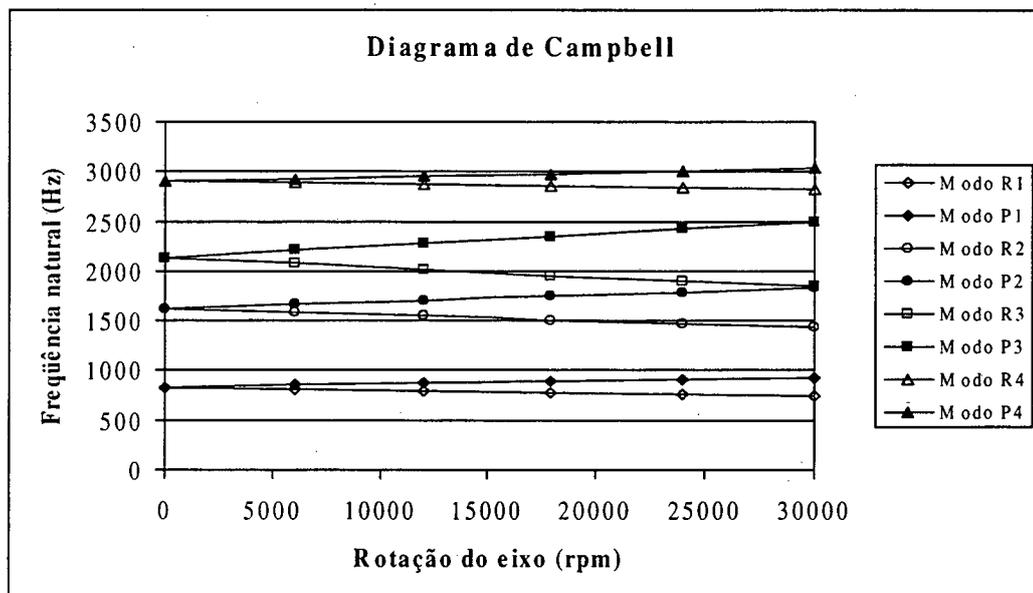


Figura 5.16: Diagrama de Campbell do rotor.

## Capítulo 6

# CONCLUSÕES E SUGESTÕES

As formulações apresentadas para os elementos sólido e de casca, ambos de revolução, obtiveram resultados muito próximos para as frequências naturais de rotores de materiais compostos laminados. Entretanto, elas apresentaram significativas diferenças com relação aos resultados obtidos pela formulação clássica do elemento de viga, sobretudo para rotações mais elevadas. Isto parece indicar que este elemento não é indicado para análises de rotores de materiais compostos em altas rotações. O uso de módulos equivalentes é uma ferramenta importante na estimativa do comportamento estático de vigas laminadas. O principal defeito desta técnica é não representar os acoplamentos extensão-torção e flexão-torção.

Tendo apresentado resultados igualmente bons, o elemento sólido traz vantagens em relação ao elemento de casca pela sua versatilidade, permitindo a modelagem de detalhes geométricos que o elemento de casca não poderia representar, tais como anéis de reforço, tampas e suportes dos mancais.

O estudo paramétrico das relações geométricas comprimento/raio e espessura/raio mostrou que ambas têm mais influência na medida em que a rotação do rotor aumenta.

Foi verificado que o ângulo de orientação das fibras tem forte influência nos valores das frequências naturais, o que permite que se possa variar as frequências naturais afim de evitar a rotação de operação do rotor, por exemplo, sem a necessidade de alterações na geometria do mesmo. Entretanto não foi feita qualquer avaliação sobre o impacto nas tensões atuantes, o que pode limitar as variações por questões de integridade estrutural. O

aumento no número de camadas, repetindo os ângulos de orientação das fibras e mantendo-se a espessura constante, não produz alterações significativas nos valores das frequências.

Uma dificuldade encontrada foi a falta da implementação de formulações que admitam harmônicos de ordem maior do que um para a comparação de resultados com trabalhos correlatos, que geralmente se voltam mais para os modos associados com harmônicos de ordem superior a um. Além de permitir estas comparações, esta implementação permitiria verificar qual a influência do ângulo de orientação das fibras nos valores das frequências naturais para modos não associados diretamente com a flexão, mas que, por vezes, podem ser críticos e apresentarem frequências naturais inferiores.

Outra sugestão para trabalhos futuros é a inclusão do efeito da tensão na direção circunferencial provocada pela força centrífuga. Este efeito não foi aqui considerado, mas pode produzir diferenças significativas nos resultados para elevadas rotações do rotor.

# Bibliografia

- [1] Agarwal, B. D. and L. J. Broutman. *Analysis and performance of fiber composites* (2 Edition). John Wiley & Sons, Inc., 1990.
- [2] Aleyaasin, M., et al. “Flexural Vibration of Rotating Shafts by Frequency Domain Hybrid Modelling,” *Computers & Structures*, 79:319–331 (2001).
- [3] Barcellos, C. S. and P. T. R. Mendonça. “ROFLEX II: Sistema Para Análise Dinâmica de Rotores Flexíveis Através do Método de Elementos Finitos.” Manual Técnico, 1989.
- [4] Bathe, K. J. *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice-Hall, Inc., 1982.
- [5] Chang, S. H., et al. “Composite Rotor for High-Speed Induction Motors,” *Composite Structures*, 50:37–47 (2000).
- [6] Chen, Y., et al. “Vibrations of High Speed Rotating Shells with Calculations for Cylindrical Shells,” *Journal of Sound and Vibration*, 160(1):137–160 (1993).
- [7] Childs, D. W. and K. Graviss. “A Note on Critical-Speed Solutions for Finite-Element-Based Rotor Models,” *Journal of Mechanical Design*, 104:412–416 (1982).
- [8] Goldstein, H. *Classical mechanics*. Addison-Wesley, Co., 1973.
- [9] Greenwood, D. T. *Principles of Dynamics*. Prentice-Hall, Inc., 1965.
- [10] Jain, R., et al. “Singularity in Rotating Orthotropic Discs and Shells,” *International Journal of Solids and Structures*, 37:2035–2058 (2000).

- [11] Jones, R. M. *Mechanics of composite materials*. Mc Graw-Hill Co., 1975.
- [12] Kim, Y. D. and C. W. Lee. "Finite element analysis of rotor bearing systems using a modal transformaion matrix," *Journal of Sound and Vibration*, 441–456 (1986).
- [13] Kraus, H. *Thin elastic shells*. John Wiley & Sons, 1967.
- [14] Lalanne, M. and G. Ferraris. *Rotor dynamics prediction in engineering*. John Wiley & Sons., 1990.
- [15] Lam, K. Y. and C. T. Loy. "Free Vibrations of a Rotating Multi-layered Cylindrical Shell," *International Journal of Solids and Structures*, 32(5):647–663 (1995).
- [16] Lee, Y. S. and Y. W. Kim. "Vibration Analysis of Rotating Composite Cylindrical Shells with Orthogonal Stiffeners," *Computers and Structures*, 69:271–281 (1998).
- [17] Meirovitch, L. "A New Method of Solution of the Engenvalue Problem for Gyroscopic Systems," *AIAA Journal*, 12(10):1337–1342 (1974).
- [18] Meirovitch, L. *Elements of Vibration Analysis*. Mc Graw-Hill, 1975.
- [19] Mendonça, P. T. R. "Materiais Compostos e Estruturas Sanduiche - Projeto e Análise." 1999.
- [20] Mendonça, P. T. R., et al. "Análise de Rotores de Geometria Complexa," *Anais do XI CILAMCE*, 193–203 (1990).
- [21] Nelson, H. D. "A finite rotating shaft element using Timoshenko beam theory," *Journal of Mechanical Design*, 102:793–803 (1980).
- [22] Nelson, H. D. and J. M. McVaugh. "The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements," *Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry*, 593–600 (1976).
- [23] Nelson, R. B., et al. "Vibrations and Waves in Laminated Orthotropic Circular Cylinders," *Journal of Sound and Vibration*, 18(3):429–444 (1971).

- [24] Penzes, L. E. and H. Kraus. "Free Vibration of Prestressed Cylindrical Shells Having Arbitrary Homogeneous Boundary Conditions," *AIAA Journal*, 10(10) (1972).
- [25] Rand, O. and Y. Stavsky. "Response and Eigenfrequencies of Rotating Composite Cylindrical Shells," *Journal of Sound and Vibration*, 192(1):66-77 (1996).
- [26] Rao, J. S. *Rotor dynamics*. Wiley Eastern, Ltd., 1983.
- [27] Singh, S. P. and K. Gupta. "Composite Shaft Rotordynamic Analysis Using a Layerwise Theory," *Journal of Sound and Vibration*, 191(5):739-756 (1996).
- [28] Timoshenko, S. P. and J. N. Goodier. *Theory of Elasticity* (3rd Edition). c Kogokusha Ltd., 1970.
- [29] Zienkiewicz, D. C. *The finite element method, 1*. Mc Graw-Hill, 1989.