

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE COMPARATIVA DE MÉTODOS  
DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA EM ELASTICIDADE 2D E 3D

Dissertação submetida à

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

para obtenção do grau de

MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

**ANDRÉ LABANOWSKI JÚNIOR**

FLORIANÓPOLIS, SC - BRASIL

Dezembro de 2004

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE COMPARATIVA DE MÉTODOS DE  
OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA EM ELASTICIDADE 2D E 3D

**ANDRÉ LABANOWSKI JÚNIOR**

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE EM ENGENHARIA MECÂNICA

sendo aprovada em sua forma final.

---

Prof. Eduardo Alberto Fancello, *D.Sc.* - Orientador

---

Prof. Antônio André Novotny, *D.Sc.* - Co-orientador

---

Prof. José A. Bellini da Cunha Neto, *Dr.* - Coordenador do Curso

**BANCA EXAMINADORA:**

---

Prof. José Carlos Pereira, *Dr.* - Presidente

---

Prof. Edgardo Omar Taroco, *D.Sc.*

---

Prof<sup>ª</sup>. Henriette Lebre La Rovere, *Ph.D.*

"Nem tudo que se enfrenta  
pode ser modificado, mas  
nada pode ser modificado  
até que seja enfrentado".

(Albert Einstein)

À Lidiani e à minha família.

# Agradecimentos

Aos meus orientadores, amigos e grandes incentivadores Fancello e Novotny, que sempre se fizeram presentes e muito contribuíram para a finalização desta etapa. Especialmente ao educador Fancello por propor este tema de trabalho bastante interessante e desafiador.

Aos professores do GRANTE/UFSC: Lauro César Nicolazzi, José Carlos Pereira, Edison da Rosa, Marcelo Alves e Paulo de Tarso pelas contribuições dadas à minha formação.

Meus especiais agradecimentos aos estimados professores Edgardo Taroco e Raúl Feijóo, do Laboratório Nacional de Computação Científica/LNCC, pela oportunidade, hospitalidade e pelas muitas contribuições dadas para a realização e conclusão deste trabalho.

À banca examinadora, pelas contribuições na revisão deste trabalho.

Aos professores Gilson A. Giraldi e Antonio Carlos Salgado Guimarães, do Laboratório de Visualização Científica e Realidade Virtual/LNCC, por possibilitarem a utilização do software SciVis para visualização dos resultados numéricos.

Aos doutorandos Márcio E. Silveira e Daniela A. Bento, pelos momentos de descontração e em especial ao parceiro de C++ (agora pai) Rodrigo Roesler pela amizade e profissionalismo.

Aos grandes amigos Oscar Garcia e Claudio Avila pelos ensinamentos.

Aos colegas de mestrado Bruno Cesar Pockszevnicki, Thiago Guinzani Felipe, Yoshihiro Nemoto, Cleber Pagliosa, Cristian Mangoni, Fábio Krug Rocha e Juliana Monteiro.

Ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e à UFSC pelo apoio e disponibilização de sua estrutura para a realização deste trabalho.

À CAPES, que através de bolsa de pesquisa, possibilitou a realização deste trabalho.

Aos amigos de longa data Paulo, André (B1), Eduardo, Adler, Jonas, Alan e Renan.

A toda minha família, que sempre me apoiou e incentivou, em especial à Lidiani, aos meus queridos pais André e Érida e às minhas irmãs Karinne e Mabel.

A todos meu muito obrigado.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>Simbologia</b>	<b>xi</b>
<b>Resumo</b>	<b>xiii</b>
<b>Abstract</b>	<b>xiv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Otimização estrutural . . . . .	1
1.1.1 Otimização paramétrica . . . . .	2
1.1.2 Otimização de forma . . . . .	3
1.1.3 Otimização topológica . . . . .	3
1.2 Alguns métodos de otimização topológica . . . . .	4
1.2.1 SIMP . . . . .	4
1.2.2 ESO . . . . .	5
1.2.3 TSA . . . . .	6
1.3 Objetivos deste trabalho . . . . .	6
1.4 Apresentação deste trabalho . . . . .	7
<b>2 Formulação do problema de otimização topológica</b>	<b>9</b>
2.1 Problema de equilíbrio em Elasticidade Linear . . . . .	9
2.2 Problema de otimização para minimização da energia interna . . . . .	12
2.3 Comentários adicionais . . . . .	13
<b>3 Métodos de otimização topológica</b>	<b>14</b>
3.1 SIMP . . . . .	14

3.1.1	Formulação do problema . . . . .	15
3.1.2	Resolução do problema de otimização topológica . . . . .	17
3.2	ESO . . . . .	19
3.3	TSA . . . . .	21
3.3.1	Definição da Derivada Topológica . . . . .	21
3.3.2	Relação entre a Derivada Topológica e a Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma . . . . .	23
3.3.3	Cálculo da sensibilidade pelo Método Lagrangeano . . . . .	25
3.3.4	Cálculo da Derivada Topológica em Elasticidade Linear . . . . .	28
3.4	Comentários adicionais . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Aspectos computacionais</b>	<b>33</b>
4.1	Método dos Elementos Finitos . . . . .	33
4.2	Algoritmos de otimização topológica . . . . .	34
4.2.1	Algoritmo baseado no SIMP . . . . .	34
4.2.2	Algoritmo baseado no ESO . . . . .	39
4.2.3	Algoritmo baseado na TSA . . . . .	42
4.3	Implementação numérica . . . . .	44
4.4	Discussão sobre formulações e abordagens numéricas . . . . .	45
4.5	Comentários adicionais . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Resultados numéricos</b>	<b>47</b>
5.1	Estado Plano de Tensão . . . . .	47
5.1.1	Barra sob tração uniaxial . . . . .	47
5.1.2	Viga bi-apoiada com carga transversal central na face superior . . . . .	49
5.1.3	Mão-francesa . . . . .	51
5.1.4	Viga bi-apoiada com carga transversal central na face inferior . . . . .	53
5.1.5	Ponte com tabuleiro inferior . . . . .	56
5.1.6	Ponte com tabuleiro central . . . . .	57
5.1.7	Ponte com tabuleiro superior . . . . .	59
5.2	Elasticidade Tridimensional . . . . .	60
5.3	Comentários adicionais . . . . .	62

<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>63</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>71</b>
<b>A</b>	<b>Análise Assintótica</b>	<b>72</b>
A.1	Elasticidade Linear em 2D . . . . .	72
A.1.1	Base 1 . . . . .	73
A.1.2	Base 2 . . . . .	73
A.1.3	Mudança de base e sobreposição das tensões . . . . .	74
A.2	Elasticidade Linear em 3D . . . . .	75
A.2.1	Distribuição de tensões na base 1 . . . . .	75
A.2.2	Distribuição de tensões na base 2 . . . . .	78
A.2.3	Distribuição de tensões na base 3 . . . . .	79
A.2.4	Mudança de base e sobreposição das tensões . . . . .	81

# Lista de Figuras

1.1	Processo de otimização estrutural. . . . .	2
2.1	Corpo em equilíbrio. . . . .	10
3.1	Campo de densidades associado ao domínio $\Omega$ . . . . .	15
3.2	Relação entre a densidade e $E^*/E$ para diferentes valores do parâmetro de penalização $p$ . . . . .	16
3.3	Algoritmos Evolucionários: baseado na sensibilidade do sistema quando se retira um elemento finito do campo de aproximação. . . . .	20
3.4	Conceito original da Derivada Topológica: (a) domínio original e (b) perturbado pela introdução de um furo infinitesimal. . . . .	22
3.5	Domínios (a) original e (b) perturbado, através de uma expansão no raio do furo infinitesimal, já existente. . . . .	23
3.6	Sistema de coordenadas polares para determinação do comportamento do tensor de tensões $\sigma_\epsilon$ em $\partial F_\epsilon$ em Estado Plano de Tensão. . . . .	29
3.7	Sistema de coordenadas polares para determinação do comportamento do tensor de tensões $\sigma_\epsilon$ em $\partial F_\epsilon$ em Elasticidade 3D. . . . .	31
4.1	SIMP: Algoritmo baseado na introdução de material intermediário, associado a cada elemento finito da malha. . . . .	36
4.2	Determinação do multiplicador de Lagrange $\alpha$ via (a) método da bi-seção e (b) método secante. . . . .	37
4.3	Fluxograma da solução do problema de otimização topológica via SIMP, pela condição de otimalidade. . . . .	38

4.4	Procedimentos para criação de furos: (a) retirada dos elementos menos sensíveis e (b) retirada dos nós com menores valores de sensibilidade ponderada pelo número de contribuições. . . . .	40
4.5	Fluxograma do processo de otimização utilizando o algoritmo ESO. . . . .	41
4.6	Fluxograma do processo de otimização através do algoritmo Derivada Topológica. . . . .	43
5.1	Barra sob tração uniaxial: (a) modelo e (b) malha utilizados. . . . .	48
5.2	Resultados numéricos dos algoritmos SIMP, para (a) $p = 2$ e (b) $p = 3$ , e dos algoritmos (c) ESO e (d) TSA. . . . .	48
5.3	Viga bi-apoiada com carga transversal central na face superior: (a) modelo e (b) malha utilizados. . . . .	49
5.4	Resultados numéricos, para $\nu = 1/4$ , dos algoritmos (a) SIMP, (b) ESO e (c) TSA. . . . .	50
5.5	Resultados numéricos, para $\nu = 1/3$ , dos algoritmos (a) SIMP, (b) ESO e (c) TSA. . . . .	50
5.6	Resultados numéricos, para $\nu = 2/5$ , dos algoritmos (a) SIMP, (b) ESO e (c) TSA. . . . .	50
5.7	Mão-francesa: (a) modelo e (b) malha utilizados. . . . .	51
5.8	Resultados numéricos, para $\bar{V} = 0, 15V$ , dos algoritmos (a) SIMP, (b) ESO e (c) TSA. . . . .	52
5.9	Resultados numéricos, para $\bar{V} = 0, 25V$ , dos algoritmos (a) SIMP, (b) ESO e (c) TSA. . . . .	52
5.10	Resultados numéricos, para $\bar{V} = 0, 35V$ , dos algoritmos (a) SIMP, (b) ESO e (c) TSA. . . . .	52
5.11	Viga bi-apoiada com carga transversal central na face inferior: modelo utilizado.	53
5.12	(a) Malha, com 2.968 nós e 5.734 elementos finitos na parte simétrica, e resultados encontrados para $h = L/50$ nos algoritmos (b) SIMP, (c) ESO e (d) TSA. . . . .	54
5.13	(a) Malha, com 11.708 nós e 23.014 elementos finitos na parte simétrica, e resultados encontrados para $h = L/100$ nos algoritmos (b) SIMP, (c) ESO e (d) TSA. . . . .	55

5.14	(a) Malha, com 46.514 nós e 92.226 elementos finitos na parte simétrica, e resultados encontrados para $h = L/200$ nos algoritmos (b) SIMP, (c) ESO e (d) TSA. . . . .	55
5.15	Ponte com tabuleiro inferior: modelo utilizado. . . . .	56
5.16	Ponte com tabuleiro inferior: (a) modelo numérico utilizado e resultados numéricos dos algoritmos (b) SIMP, (c) ESO e (d) TSA. . . . .	57
5.17	Ponte com tabuleiro central: modelo utilizado. . . . .	57
5.18	Ponte com tabuleiro central: (a) modelo numérico utilizado e resultados numéricos dos algoritmos (b) SIMP, (c) ESO e (d) TSA. . . . .	58
5.19	Ponte com tabuleiro superior: modelo utilizado. . . . .	59
5.20	Ponte com tabuleiro superior: (a) modelo numérico utilizado e resultados numéricos dos algoritmos (b) SIMP, (c) ESO e (d) TSA. . . . .	60
5.21	Cubo sujeito à carga concentrada: modelo utilizado. . . . .	60
5.22	Cubo sob carga pontual: (a) modelo numérico utilizado e resultados numéricos dos algoritmos (b) SIMP (para valores de densidades dos elementos maiores que 0,5), (c) ESO e (d) TSA. . . . .	61
A.1	Sistema de coordenadas cilíndricas da base 1, para a determinação da distribuição de tensões em Estado Plano de Tensão. . . . .	73
A.2	Sistema de coordenadas cilíndricas da base 2, para a determinação da distribuição de tensões em Estado Plano de Tensão. . . . .	74
A.3	Sistema de coordenadas esféricas da base 1. . . . .	76
A.4	Sistema de coordenadas esféricas da base 2. . . . .	78
A.5	Sistema de coordenadas esféricas da base 3. . . . .	80

# Simbologia

$a(\cdot, \cdot)$	Operador bilinear tal que $a(\cdot, \cdot) : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$
$\mathbf{b}$	Forças de corpo
$B_e$	Direção de mudança associada ao $e$ -ésimo elemento finito
$\mathbf{C}$	Tensor de elasticidade
$\mathbf{C}^*$	Tensor de elasticidade para material fictício
$\mathbf{C}_e$	Matriz de elasticidade do $e$ -ésimo elemento finito
$\mathbf{C}_e^*$	Matriz de elasticidade fictícia do $e$ -ésimo elemento finito
$D_T$	Derivada Topológica
$E$	Módulo de elasticidade do material
$E^*$	Módulo de elasticidade do material fictício
$\mathbf{f}$	Vetor de carregamento nodal
$\bar{f}$	Força pontual
$F_\epsilon$	Domínio do furo de raio $\epsilon$
$\partial F_\epsilon$	Fronteira do furo de raio $\epsilon$
$g(\cdot, \cdot)$	Restrição de igualdade referente a equação de estado
$h$	Tamanho relativo dos elementos finitos da malha, tal que $h \in (0, 1] \subset \mathbb{R}$
$\mathbf{K}_h$	Matriz de rigidez da estrutura
$\mathbf{K}_e$	Matriz de rigidez do $e$ -ésimo elemento finito
$\mathbf{K}_h^*$	Matriz de rigidez da estrutura, após a remoção do $e$ -ésimo elemento finito.
$l(\cdot)$	Operador linear tal que $l(\cdot) : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$
$\mathbf{n}$	Vetor normal ao contorno $\partial\Omega$
$N_a$	Número de elementos finitos ativos
$N_c$	Número de casos de carregamentos
$N_{elem}$	Número de elementos finitos do sistema
$N_g$	Número de pontos de integração de Gauss
$p$	Parâmetro para penalização de densidades intermediárias
$\bar{\mathbf{q}}$	Forças de superfície
$\mathbf{Q}^s$	Matriz de rotação do $s$ -ésimo sistema de coordenadas
$R^i$	Resíduo, da $i$ -ésima iteração, referente a restrição de volume
$\mathbf{u}$	Campo de deslocamentos definido em $\mathcal{U}$
$\mathbf{u}_h$	Campo de deslocamentos definido em $\mathcal{U}_h$
$\bar{\mathbf{u}}_h$	Vetor de deslocamentos nodais
$\mathbf{u}_\epsilon$	Campo de deslocamentos definido em $\mathcal{U}_\epsilon$
$\mathbf{u}_\rho$	Campo de deslocamentos para material fictício
$\mathbf{u}_\tau$	Campo de deslocamentos definido em $\mathcal{U}_\tau$
$\mathcal{U}$	Conjunto das funções admissíveis definido em $\Omega$
$\mathcal{U}_h$	Subespaço de dimensão finita das funções admissíveis ( $\mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}$ )
$\mathcal{U}_\epsilon$	Conjunto das funções admissíveis definido em $\Omega_\epsilon$

$\mathcal{U}_\tau$	Conjunto das funções admissíveis definido em $\Omega_\tau$
$\mathbf{v}$	Campo de velocidade
$V$	Volume inicial da estrutura
$V_e$	Volume do $e$ -ésimo elemento finito
$\bar{V}$	Volume que se pretende obter ao final do processo de otimização topológica
$\mathcal{V}$	Conjunto das variações admissíveis definido em $\Omega$
$\mathcal{V}_h$	Subespaço de dimensão finita das variações admissíveis
$\mathcal{V}_\epsilon$	Conjunto das variações admissíveis definido em $\Omega_\epsilon$
$\mathcal{V}_\tau$	Conjunto das variações admissíveis definido em $\Omega_\tau$
$\mathbf{x}$	Ponto do domínio ( $\mathbf{x} \in \Omega$ )
$x, y, z$	Coordenadas retangulares
$w_j$	Peso atribuído ao $j$ -ésimo caso de carregamento

### Letra Latina:

$\mathcal{L}$  Funcional Lagrangeano

### Letras Gregas Minúsculas:

$\alpha$	Multiplicador de Lagrange associado à restrição de volume
$\epsilon$	Raio do furo introduzido no domínio
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor de deformações
$\boldsymbol{\varepsilon}^*$	Tensor de deformações do material fictício
$\boldsymbol{\varepsilon}_h$	Tensor de deformações aproximado pelo Método dos Elementos Finitos
$\boldsymbol{\lambda}$	Vetor Multiplicador de Lagrange associado à equação de equilíbrio
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\rho$	Campo de densidades distribuído no domínio
$\rho_{\min}, \rho_{\max}$	Valores mínimo e máximo para os valores de densidades
$\rho_e$	Densidade associada ao $e$ -ésimo elemento finito
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensões
$\boldsymbol{\sigma}^*$	Tensor de tensões do material fictício
$\boldsymbol{\sigma}_h$	Tensor de tensões aproximado pelo Método dos Elementos Finitos
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tensões principais
$\sigma_{rr}, \tau_{r\varphi}, \tau_{r\theta},$ $\tau_{\varphi r}, \sigma_{\varphi\varphi}, \tau_{\varphi\theta},$	Componentes do tensor de tensões em coordenadas polares (sistema global)
$\tau_{\theta r}, \tau_{\theta\varphi}, \sigma_{\theta\theta}$	
$\bar{\sigma}_{rr}, \bar{\tau}_{r\varphi}, \bar{\tau}_{r\theta},$ $\bar{\tau}_{\varphi r}, \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}, \bar{\tau}_{\varphi\theta},$	
$\bar{\tau}_{\theta r}, \bar{\tau}_{\theta\varphi}, \bar{\sigma}_{\theta\theta}$	Componentes do tensor de tensões em coordenadas polares (sistema local)
$\psi$	Função custo
$\Delta\psi_e$	Sensibilidade da função custo à remoção do $e$ -ésimo elemento finito.

### Letras Gregas Maiúsculas:

$\Gamma_D$	Parte de $\partial\Omega$ na qual estão impostas as condições de contorno de Dirichlet
$\Gamma_N$	Parte de $\partial\Omega$ na qual estão impostas as condições de contorno de Neumann
$\Omega$	Domínio de definição da equação de estado
$\Omega_e$	Domínio do elemento finito
$\Omega_\epsilon$	Domínio perturbado pela introdução de um furo infinitesimal de raio $\epsilon$
$\Omega_\tau$	Domínio perturbado, obtido através de parametrização por $\tau \in \mathbb{R}^+$
$\partial\Omega$	Contorno de $\Omega$ , tal que $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ e $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$

# Resumo

O processo de otimização estrutural consiste em obter o projeto de melhor desempenho, que é avaliado através de uma função custo definida a partir de um conjunto de variáveis que descrevem o sistema estrutural, denominadas variáveis de projeto. No caso da otimização topológica, isto é realizado através da variação do domínio (topologia) da estrutura. Em geral, os métodos de otimização topológica são baseados em análise de sensibilidade da função objetivo e das restrições impostas ao problema. Dentre outros, pode-se citar: SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), ESO (*Evolutionary Structural Optimization*) e TSA (*Topological Sensitivity Analysis*). O método SIMP é baseado na existência de material intermediário. Sendo assim o comportamento constitutivo do material intermediário (fictício) é definido por um parâmetro  $\rho$ , que está associado com a densidade do material. O material sólido é representado por  $\rho = 1$ , por outro lado,  $\rho = 0$  significa vazio. Com isso, as variáveis de projeto correspondem ao campo de densidades associado ao domínio e a sensibilidade da função custo é calculada em relação a estas variáveis. O algoritmo ESO é baseado no cálculo da função custo quando um elemento é removido da malha de elementos finitos. Esta sensibilidade é obtida por procedimento de diferenças finitas. A TSA fornece a sensibilidade da função custo quando o domínio é perturbado pela introdução de um furo infinitesimal. Esta sensibilidade é calculada no sistema contínuo conduzindo à expressão exata da sensibilidade. Neste trabalho, esses métodos serão aplicados no problema de otimização de componentes estruturais. A energia interna é adotada como função custo a ser minimizada, sujeita à restrição de volume. Neste caso particular, as expressões de sensibilidade dos métodos mencionados resultam similares. Finalmente, alguns experimentos de otimização topológica em Elasticidade Linear 2D e 3D são apresentados e os resultados obtidos através das três metodologias permite fazer uma análise comparativa entre as mesmas.

# Abstract

The topological optimization is related to the search of the best performance of a structure through variation of its domain topology. In general, the methods for topology optimization are based on sensitivity analysis: SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization), ESO (Evolutionary Structural Optimization), TSA (Topological Sensitivity Analysis), among others. The SIMP method is based on the existence of intermediate material. Thus, the constitutive behavior of intermediate material (artificial) is defined by a parameter  $\rho$ , which is associated with the density of the material. The solid material is represented by  $\rho = 1$ , on the other hand,  $\rho = 0$  means void. For the discrete structure, the density is computed for each finite element and the mechanical properties are obtained considering an artificial constitutive equation. Therefore, the design variable is the density field associated to the finite element mesh and the sensitivity of the cost function is performed in relation to these variables. The ESO algorithm is based on the sensitivity of the cost function when an element is removed from the finite element mesh. This sensitivity is obtained by means a finite difference procedure. The TSA supplies to the sensitivity of the cost function when the domain is disturbed by the introduction of an infinitesimal puncture. This derivative is computed in the continuum structure leading to the exact expression for the sensitivity. In this work, these approaches are applied on topological optimization of structural components. The strain energy is adopted as the cost function to be minimized, subjects to a volume constraints. In this particular case, the sensitivity expressions for the above methods result similarly. At last, some numerical experiments of 2D and 3D topological optimization in linear elasticity are shown and the obtained results through the three methodologies that enable us to make a comparative analysis between them.

# Capítulo 1

## Introdução

A concepção de projetos estruturais fundamenta-se em procedimentos normalizados, estabelecidos há décadas. O método convencional de projeto baseia-se na experiência e intuição do projetista e, com isso, os avanços em geral ocorrem vagarosamente.

A alta competitividade entre as empresas, porém, obrigou-as a oferecer seus produtos a custos cada vez mais reduzidos, levando os engenheiros a desenvolver metodologias para conceber melhores projetos, despontando, como alternativa, o uso de técnicas de otimização.

O campo de aplicações dos métodos de otimização ampliou-se à medida que a tecnologia computacional se desenvolveu, permitindo atualmente que o mesmo seja empregado em sistemas estruturais complexos tais como projetos de pontes, viadutos, componentes automotivos e aeroespaciais entre outros.

Neste capítulo é apresentado um breve resumo sobre otimização estrutural, particularizando, em seguida, o problema de otimização topológica para a minimização da energia interna. Após esta etapa são expostas algumas das formulações de otimização topológica disponíveis na literatura: SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), ESO (*Evolutionary Structural Optimization*) e TSA (*Topological Sensitivity Analysis*).

### 1.1 Otimização estrutural

O processo de otimização estrutural consiste em obter o projeto de melhor desempenho, sendo este avaliado através de uma função custo definida a partir de um conjunto de variáveis que descrevem o sistema estrutural, denominadas variáveis de projeto. As técnicas de otimização buscam determinar os extremos desta função (máximo ou mínimo, dependendo do problema)

dentro de uma região de projeto denominada região viável ou factível. Esta região reúne os pontos de projeto que atendem às restrições do problema, freqüentemente classificadas em restrições de igualdade ou desigualdade.

Dentre os problemas de otimização estrutural clássicos podem ser citados a minimização da massa, da energia de deformação, a maximização da frequência natural crítica, a minimização da flexibilidade, a maximização da carga crítica de flambagem, etc.

Os algoritmos empregados para a determinação da estrutura ótima freqüentemente utilizam informações referentes à sensibilidade do funcional, que fornece informações sobre as derivadas da função objetivo e restrições impostas ao problema, em relação a cada variável de projeto. No processo de otimização a análise de sensibilidade é um item de suma importância, pois, a partir da análise de sensibilidade, os algoritmos de otimização impõem modificações nas variáveis de projeto segundo suas próprias metodologias. Na Fig. (1.1) podem-se observar as etapas envolvidas no processo de otimização estrutural.

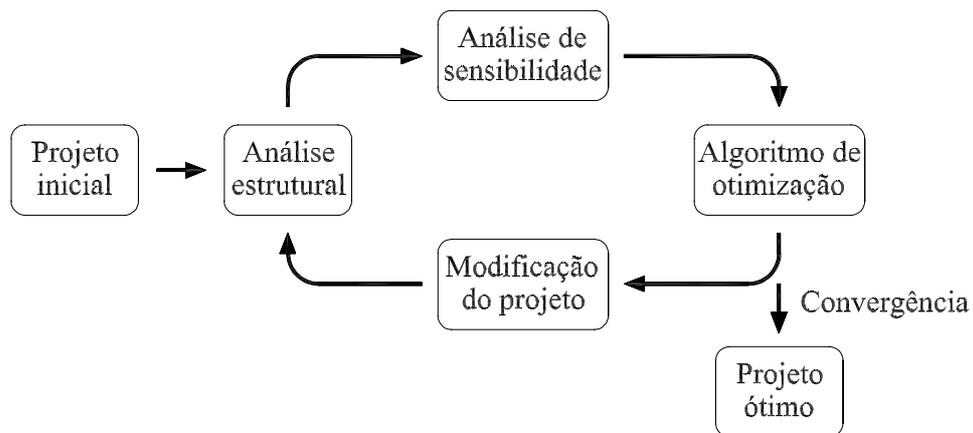


Figura 1.1: Processo de otimização estrutural.

A otimização estrutural, segundo as variáveis de projeto, classifica-se freqüentemente em paramétrica, de forma e topológica. Segue abaixo um breve resumo sobre cada uma delas.

### 1.1.1 Otimização paramétrica

Neste tipo de otimização, as variáveis de projeto são definidas por parâmetros do material (módulo de *Young*, coeficiente de Poisson do material, tensão de escoamento, densidade, etc.)

e/ou geométricos (altura, espessura, largura, momento de inércia, etc.), permanecendo a região ou domínio geométrico, na qual é definida a equação de estado do problema, inalterada.

Este foi o primeiro modelo de otimização estrutural que surgiu, em função da necessidade da indústria aeroespacial em reduzir o peso de seus componentes.

Como exemplo pode-se citar a otimização paramétrica de placas formadas por materiais compostos laminados, onde as variáveis de projeto são a espessura do laminado, orientação das fibras, dentre outros.

### 1.1.2 Otimização de forma

Na otimização de forma, o domínio de definição da equação de estado é modificado através de alterações em sua forma, ou seja, na fronteira do domínio. O tratamento deste tipo de variável de projeto (forma) possui algumas particularidades, principalmente no que diz respeito ao cálculo de derivadas das funções de desempenho, que podem ser obtidas utilizando-se alguns conceitos básicos da Mecânica do Contínuo (conforme Fancello [18]), tais como derivada material de campos espaciais e o Teorema do Transporte de Reynolds.

No caso de estruturas discretas (tipicamente estruturas treliçadas ou pórticos) busca-se a solução ótima através da modificação das coordenadas nodais. Já em estruturas contínuas (placas, cascas, sólidos, etc.), a forma é usualmente definida e modificada através de variáveis de controle geométrico tais como pontos de controle de *B.Splines*, raios, tangentes, etc.

### 1.1.3 Otimização topológica

Na otimização topológica busca-se a solução ótima através da variação do domínio (topologia) da estrutura, e não somente da fronteira do mesmo. Isto corresponde, em estruturas discretas, a determinar, por exemplo, o número total de barras, suas respectivas conectividades e suas propriedades geométricas. Em se tratando de estruturas contínuas, busca-se determinar a existência ou não de material no domínio, seus respectivos formatos e a conectividade entre os domínios.

Os métodos de otimização topológica, no que diz respeito a estruturas contínuas, são normalmente classificados em dois grupos (ver Eschenauer & Olhoff [15]):

- Aproximação por microestrutura (Material): O processo de otimização topológica é

baseado no estabelecimento de uma relação entre a rigidez e a densidade associada ao domínio, que pode assumir qualquer valor entre 0 (vazio) e 1 (material sólido), sendo os valores intermediários correspondentes a um material poroso. A partir daí os algoritmos baseados em microestruturas propõem encontrar a melhor disposição do material, de maneira a minimizar ou maximizar a função custo. Como exemplos pode-se citar: Material Intermediário Artificial (SIMP), Material Poroso Homogeneizado, entre outros;

- Aproximação por macroestrutura (Geométrica): Neste caso a topologia da estrutura é modificada através da inserção de furos no domínio. Entre os métodos existentes pode-se citar: métodos baseados na inserção de furos em sistemas contínuos tais como Análise de Sensibilidade Topológica (TSA) e *Bubble Method*, e baseados na inserção de furos em sistemas discretizados, tais como Algoritmos Evolucionários (ESO).

Um dos critérios mais utilizados em problemas de otimização topológica estrutural é a minimização da energia interna de deformação com restrição sobre o volume que, em problemas lineares, é equivalente ao problema de minimização do trabalho externo. Sendo os carregamentos a que a estrutura está submetida constantes, minimizar o trabalho das forças externas corresponde a minimizar os deslocamentos, ou seja, tornar a estrutura mais rígida.

O foco deste trabalho está relacionado ao processo de otimização topológica, sendo apresentado a seguir alguns dos métodos existentes para resolução do problema.

## 1.2 Alguns métodos de otimização topológica

A seguir são apresentadas três abordagens possíveis para a resolução do problema de otimização topológica: formulação baseada em Material Intermediário (SIMP), Algoritmos Evolucionários (ESO) e Análise de Sensibilidade Topológica (TSA).

### 1.2.1 SIMP

Nesta abordagem, a existência ou não de material é tratada através do uso de um modelo de material fictício, que pode adotar comportamento intermediário entre sólido e vazio.

Assim, ao se utilizar a técnica denominada SIMP o comportamento constitutivo do material intermediário (artificial) é definido por uma função paramétrica  $\rho$ , associada com a densidade do material. O material sólido é representado por  $\rho = 1$  e o vazio por  $\rho = 0$ . Desta forma, a densidade associada a cada ponto do domínio é utilizada para a determinação do tensor constitutivo  $\mathbf{C}^*$  do material, sendo esta a variável de projeto que equivale à relaxação do problema de otimização topológica.

Esta idéia foi inicialmente proposta por Bendsøe & Kikuchi [6] baseada no conceito de microestruturas, que foi denominada Método de Homogeneização. Isto contribuiu para a popularização do processo de otimização, até então pouco utilizado em virtude da complexidade matemática envolvida na existência/não existência de material.

### 1.2.2 ESO

Em função do grande número de operações envolvidas nos algoritmos baseados em programação matemática que podem tornar os cálculos muito dispendiosos, Xie & Steven [49] desenvolveram uma maneira simples de impor modificações na topologia da estrutura, feita mediante heurística de remoção gradual de elementos finitos da malha, correspondentes a regiões que não contribuem efetivamente para um bom desempenho para o propósito da estrutura. Este conceito, denominado ESO (*Evolutionary Structural Optimization*), foi primeiramente aplicado ao processo de otimização topológica para a minimização das tensões em componentes estruturais. Neste caso, os elementos finitos sujeitos aos menores valores de tensão são removidos da malha, a estrutura é novamente analisada e o processo repetido. Este procedimento prossegue até que se atinja uma saturação no campo de tensões da estrutura, ou seja, o valor de tensão atuante em todo domínio seja praticamente constante e muito próximo da tensão admissível do material ou que seja atingido o limite de remoção de material (ver Hinton & Sienz [26], Querin [39] e Querin *et alli* [40]).

Entretanto, ao se retirar um determinado grupo de elementos da malha, pode-se extrapolar os valores de tensão admissível em algumas regiões. Desta forma, para contornar o problema, foi proposta uma maneira mais eficiente de utilizar este conceito, na qual, além de remover os elementos finitos de regiões com baixos valores de tensões, são introduzidos novos elementos finitos em regiões com altos valores de tensão, sendo este denominado BESO (*Bi-*

*directional Evolutionary Structural Optimization*). Com isso a taxa de remoção dos elementos é dada pela diferença entre o número de elementos finitos removidos e os adicionados.

Embora o conceito do método ESO, do qual alguns aspectos teóricos podem ser encontrados em Tanskanen [46], seja extremamente simples, o mesmo requer que as modificações impostas ao domínio, em cada passo do processo de otimização, não sejam muito significativas, o que torna o custo computacional envolvido no método bastante dispendioso.

### 1.2.3 TSA

A partir da Análise de Sensibilidade Topológica encontra-se uma função escalar, denominada Derivada Topológica. A Derivada Topológica pode ser definida como a sensibilidade da função custo quando da introdução de um furo infinitesimal no domínio contínuo. Estes furos podem representar, por exemplo, canais de resfriamento, isolamentos térmico ou elétrico, incrustações, zonas plastificadas, trincas (nucleação e propagação), etc., o que irá depender das condições de contorno impostas sobre as fronteiras das cavidades criadas ou através de suas propriedades materiais. No caso específico da otimização topológica estrutural objetiva-se modificar o domínio através do cálculo da sensibilidade do funcional quando da introdução de um vazio, que corresponde a impor condições de contorno de Neumann homogênea sobre a fronteira do furo introduzido. Este conceito foi inicialmente proposto por Eschenauer *et alli* [14], Eschenauer & Schumacher [16] e [17] e formalizado mais tarde por Sokolowski & Zochowski [45], Cea *et alli* [9] e Novotny [33].

## 1.3 Objetivos deste trabalho

Neste trabalho objetiva-se realizar um estudo comparativo entre os métodos de otimização topológica SIMP, ESO e TSA considerando-se a energia interna como função custo. Neste caso particular, embora estes métodos tenham origens conceituais totalmente distintas, apresentam expressões de sensibilidade semelhantes. Sendo assim, provavelmente esses métodos conduzem a resultados muito parecidos.

Em particular, este estudo tem como objetivos principais:

- Obter as expressões de sensibilidade dos métodos SIMP, ESO e TSA para Estado Plano

de Tensão e Elasticidade Tridimensional, levando em consideração múltiplos estados de carga;

- Desenvolver e implementar computacionalmente os algoritmos de otimização utilizando os métodos SIMP, ESO e TSA;
- Realizar experimentos numéricos mostrando as características de cada um dos métodos de otimização topológica apresentados;
- Fazer uma análise comparativa dos resultados numéricos obtidos, levando em conta as similaridades das expressões de sensibilidade obtidas para cada método de otimização topológica apresentados.

## 1.4 Apresentação deste trabalho

Após a introdução dada neste capítulo, o capítulo 2 apresenta o problema de equilíbrio em Elasticidade Linear, assim como o problema de minimização da energia interna.

No capítulo 3, os métodos de otimização topológica a serem estudados são formalmente apresentados: SIMP, ESO e TSA. No caso do SIMP, a resolução do problema de minimização da energia interna é proposta através da solução das suas condições de otimalidade. Já no caso das técnicas de otimização topológica ESO e TSA, é utilizada uma heurística de retirada de elementos finitos baseada na informação de sensibilidade fornecida em cada abordagem.

Após apresentados os métodos de otimização topológica, o capítulo 4 dispõe dos aspectos de implementação para as formulações mencionadas, assim como a forma de calcular, aproximadamente, o campo de deslocamentos utilizando-se o Método dos Elementos Finitos.

O capítulo 5 apresenta uma série de resultados numéricos do problema de otimização topológica para as formulações mencionadas, em Estado Plano de Tensão e Elasticidade Tridimensional, considerando comportamento linear do material, sendo os mesmos avaliados e comparados entre si.

No capítulo 6, são feitas algumas considerações finais sobre o presente trabalho e temas são sugeridos para trabalhos futuros.

Finalmente, o Apêndice detalha o procedimento para a determinação da distribuição de tensões atuantes no domínio de acordo com o raio do furo introduzido no mesmo, em Estado Plano de Tensão e Elasticidade Tridimensional. Este campo de tensão é um instrumento necessário para realizar o cálculo da sensibilidade pelo método TSA.

# Capítulo 2

## Formulação do problema de otimização topológica

Neste capítulo é apresentado o problema variacional de equilíbrio em Elasticidade Linear, sendo obtido o problema de valor de contorno associado. Após esta etapa apresenta-se o problema de otimização para a minimização da energia interna, muito utilizado em otimização topológica estrutural.

### 2.1 Problema de equilíbrio em Elasticidade Linear

Seja um domínio aberto e limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , cujo contorno  $\partial\Omega$  é suficientemente regular, onde  $N$  representa a dimensão do espaço Euclidiano. Considerando que  $\Omega$  representa a configuração inicial de um corpo material deformável submetido a forças de corpo  $\mathbf{b}$  e que  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  e  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ , onde  $\Gamma_D$  corresponde à parte de  $\partial\Omega$  no qual estão impostas restrições sobre o campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$ , enquanto que  $\Gamma_N$  é a parcela de  $\partial\Omega$  submetida a forças de superfície  $\bar{\mathbf{q}}$ , conforme ilustração na Fig. (2.1). Desta forma a equação de equilíbrio deste fenômeno é dada pelo seguinte problema variacional (Princípio dos Trabalhos Virtuais): encontrar  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$  tal que

$$a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = l(\boldsymbol{\eta}) \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}, \quad (2.1)$$

onde

$$\mathcal{U} := \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega) : \mathbf{u}|_{\Gamma_D} = \mathbf{0}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{V} := \{\boldsymbol{\eta} \in H^1(\Omega) : \boldsymbol{\eta}|_{\Gamma_D} = \mathbf{0}\} \quad (2.2)$$

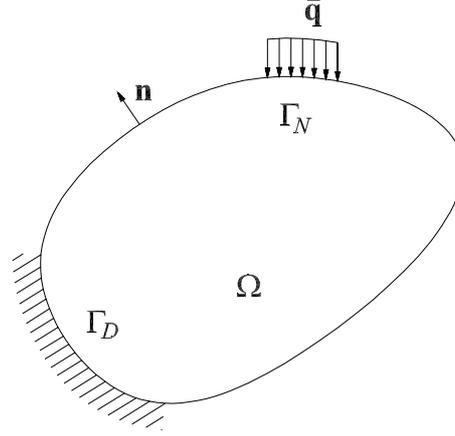


Figura 2.1: Corpo em equilíbrio.

correspondem, respectivamente, ao conjunto das funções admissíveis e das variações admissíveis. Fisicamente, o operador  $a(\cdot, \cdot) : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  representa o trabalho realizado pelas forças internas e  $l(\cdot) : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  o trabalho realizado pelas forças externas, sendo os mesmos definidos, respectivamente, como

$$a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} d\Omega, \quad (2.3)$$

$$l(\boldsymbol{\eta}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma_N, \quad (2.4)$$

no qual  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor de tensões, dado pela equação constitutiva

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.5)$$

onde  $\mathbf{C}$  corresponde ao tensor de elasticidade de quarta ordem e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ao tensor de deformações.

Considerando o emprego de material isotrópico, homogêneo e elástico linear, tem-se que o tensor de elasticidade é dado por

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1+\nu} (\mathbf{II} + \frac{\nu}{1-2\nu} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}), \quad (2.6)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade,  $\nu$  o coeficiente de Poisson e  $\mathbf{I}$  e  $\mathbf{II}$  correspondem ao tensor identidade de segunda e quarta ordem, respectivamente.

A partir da hipótese de que o corpo está submetido a pequenos deslocamentos e deformações, tem-se que o tensor de deformações é dado pelo tensor de Green linearizado, ou seja,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u}, \quad (2.7)$$

onde o operador  $\nabla^s(\cdot)$  é utilizado para denotar

$$\nabla^s(\cdot) = \frac{1}{2} \left( \nabla(\cdot) + \nabla(\cdot)^T \right). \quad (2.8)$$

Assim, considerando-se as Eqs. (2.3) e (2.4), a Eq. (2.1) é escrita como

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma_N \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}. \quad (2.9)$$

Pela regra do produto e considerando-se a simetria de  $\boldsymbol{\sigma}$ , sabe-se que

$$\text{div} [\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\eta}] = \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} + \text{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta}, \quad (2.10)$$

conforme Gurtin [24]. Substituindo este resultado na Eq. (2.9), tem-se

$$\int_{\Omega} \text{div} [\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\eta}] d\Omega - \int_{\Omega} \text{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma_N \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}. \quad (2.11)$$

Pelo Teorema da Divergência, observa-se que

$$\int_{\Omega} \text{div} [\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\eta}] d\Omega = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{n} d\partial\Omega, \quad (2.12)$$

onde  $\mathbf{n}$  é um vetor normal ao contorno  $\partial\Omega$ .

Sendo a fronteira definida por  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ , e lembrando-se que  $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}$  e que  $\boldsymbol{\sigma}$  é simétrico, a Eq. (2.12) pode ser expressa por

$$\int_{\Omega} \text{div} [\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\eta}] d\Omega = \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma_N. \quad (2.13)$$

Substituindo-se a Eq. (2.13) em (2.11) e organizando-se os termos, obtém-se

$$\int_{\Gamma_N} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \bar{\mathbf{q}}) \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma_N - \int_{\Omega} (\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\eta} d\Omega = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}. \quad (2.14)$$

Como esta equação deve ser válida para todo  $\boldsymbol{\eta}$ , tem-se, do teorema fundamental do cálculo das variações, que

$$\begin{cases} -\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{b} & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{em } \Gamma_D, \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{q}} & \text{em } \Gamma_N. \end{cases} \quad (2.15)$$

Este conjunto de equações é denominado Problema de Valor do Contorno.

## 2.2 Problema de otimização para minimização da energia interna

Um critério muito utilizado em otimização topológica é a minimização da energia interna com restrição sobre o volume, o que equivale, em problemas lineares, a maximizar a rigidez da estrutura. Desta forma, adotando-se a energia interna como função custo  $\psi$ , tem-se que o problema é formulado como

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } & \psi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \\ \text{Sujeito à: } & \int_{\Omega} d\Omega \leq \bar{V}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde  $\bar{V}$  representa o volume que se pretende obter ao final do processo de otimização e  $\mathbf{u}$  o campo de deslocamentos, que é obtido através da solução da Eq. (2.1). Pode-se incorporar a equação de estado ao problema de otimização topológica como uma restrição de igualdade  $g$ , sendo então o problema formulado por

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } & \psi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \\ \text{Sujeito à: } & \begin{cases} \int_{\Omega} d\Omega \leq \bar{V}, \\ g(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) - l(\boldsymbol{\eta}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Em alguns problemas há a necessidade de se impor restrições quanto aos procedimentos normativos, tal como falha do material, resposta do sistema (frequência natural, deslocamento máximo, entre outros), etc., aparecendo estas como novas restrições impostas ao problema, tanto de igualdade como desigualdade.

Considerando-se  $\mathcal{U} \equiv \mathcal{V}$  e a condição de equilíbrio do sistema, dada pela Eq. (2.1), que deve ser válida para todo  $\boldsymbol{\eta}$ , pode-se, por exemplo, adotar

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}. \quad (2.18)$$

Neste caso a Eq. (2.1) pode ser re-escrita como

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = l(\mathbf{u}). \quad (2.19)$$

Sendo a função custo dada por

$$\psi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad (2.20)$$

tem-se que substituindo a Eq. (2.19) em (2.20)

$$\psi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}l(\mathbf{u}). \quad (2.21)$$

Com isso pode-se concluir que, nos casos lineares, o problema de minimização da energia interna é equivalente ao problema de minimização do trabalho externo, ou seja, a solução obtida ao final do processo de otimização em ambos problemas é idêntica.

O problema de minimização do trabalho externo, para sistemas contínuos, é formulado como sendo:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } & \psi(\mathbf{u}) = l(\mathbf{u}), \\ \text{Sujeito à: } & \begin{cases} \int_{\Omega} d\Omega \leq \bar{V}, \\ g(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) - l(\boldsymbol{\eta}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.22)$$

A diferença encontrada entre estas formas de propor o problema de otimização (Eqs. (2.17) e (2.22)) é que, ao final do processo, o valor da função custo para o problema de minimização do trabalho externo será duas vezes o valor encontrado para o problema de minimização da energia interna, lembrando que esta condição somente é válida em problemas lineares.

## 2.3 Comentários adicionais

Neste capítulo apresentou-se inicialmente o problema variacional de equilíbrio para Elasticidade Linear e o Problema de Valor de Contorno associado. Em seguida o problema de minimização da energia interna com restrição sobre o volume foi apresentado. Por fim, constatou-se que, em Elasticidade Linear, a solução dos problemas de otimização estrutural para a minimização da energia interna e do trabalho externo são equivalentes, exceto pelos valores encontrados da função custo em ambos problemas.

# Capítulo 3

## Métodos de otimização topológica

Existem várias técnicas disponíveis na literatura para resolver o problema de otimização topológica. A seguir são apresentadas as formulações SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), ESO (*Evolutionary Structural Optimization*) e TSA (*Topological Sensitivity Analysis*). Neste capítulo as técnicas mencionadas são particularizadas para o problema de minimização da energia interna (ver Eq. (2.17)).

### 3.1 SIMP

A abordagem de otimização topológica SIMP surgiu como uma forma simples de introduzir um material com propriedades intermediárias similares às que se obtém com o uso de microestruturas e técnicas de homogeneização. No entanto, no caso do SIMP, este material intermediário é usado apenas como artifício matemático enquanto que na técnica de homogeneização o material intermediário pode corresponder a um material composto ou microestruturado (ver Bendsøe [4]), por exemplo. No SIMP, este artifício é utilizado com o intuito de determinar quais regiões devem possuir material e quais devem ser vazias, o que é feito mediante uma função densidade  $\rho$  definida no domínio  $\Omega$ , sendo esta a variável de projeto, conforme Fig. (3.1).

Nesta proposta o material sólido é representado por  $\rho = 1$  e o vazio por  $\rho = 0$ , variando  $\rho$  entre estes dois limites. Dado que as densidades intermediárias não têm, no presente contexto, nenhum interesse prático, é recomendável utilizar técnicas de penalização e filtros com a finalidade de se evitar a incidência de regiões com valores intermediários de densidades, como é apresentado a seguir.

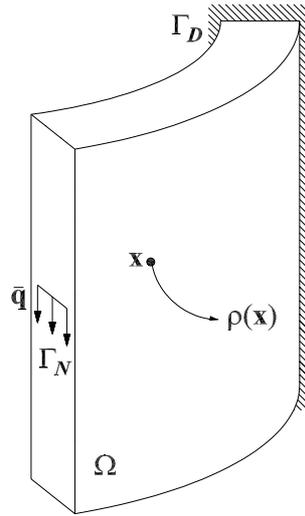


Figura 3.1: Campo de densidades associado ao domínio  $\Omega$ .

### 3.1.1 Formulação do problema

Na abordagem SIMP, o material intermediário está associado ao seguinte tensor de elasticidade fictício:

$$\mathbf{C}^* = \rho \mathbf{C}, \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{C}$  corresponde ao tensor de elasticidade do material.

Bendsøe em 1989 introduziu um parâmetro  $p$  para penalizar valores de densidades intermediários, surgindo então a técnica denominada SIMP. Com isso a Eq. (3.1) toma a forma

$$\mathbf{C}^* = \rho^p \mathbf{C}. \quad (3.2)$$

À medida que o parâmetro  $p$  aumenta, os valores expressivos de rigidez passam a incidir em uma faixa cada vez menor e mais próxima de  $\rho = 1$ , e como neste caso, o objetivo do processo de otimização é maximizar a rigidez da estrutura, diminui-se a incidência de valores intermediários de densidades. Por exemplo, adotando-se valores de  $p \geq 3$ , consegue-se resultados satisfatórios, minimizando as regiões com densidades intermediárias, conforme Bendsøe & Duysinx [5].

Na Fig. (3.2) pode-se observar a relação entre a densidade e  $E^*/E$ , para diferentes valores de  $p$ , onde  $E^*$  e  $E$  correspondem ao módulo de elasticidade para o material intermediário e sólido, respectivamente.

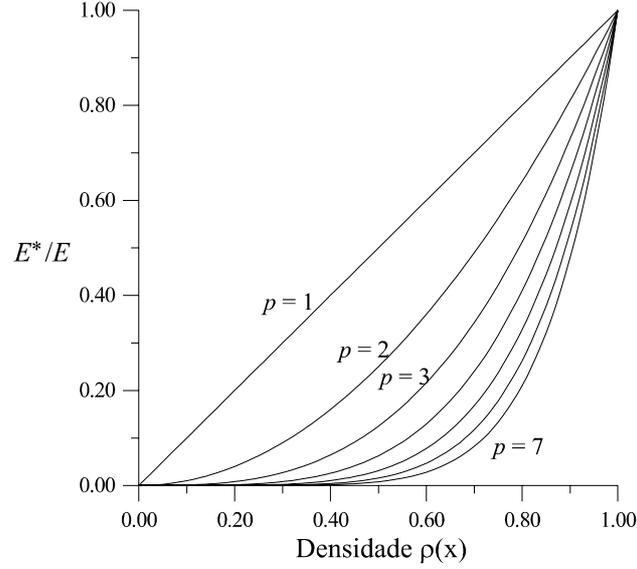


Figura 3.2: Relação entre a densidade e  $E^*/E$  para diferentes valores do parâmetro de penalização  $p$ .

Desta forma o problema de equilíbrio é estabelecido como: encontrar  $\mathbf{u}_\rho \in \mathcal{U}$  tal que

$$a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\eta}) = l(\boldsymbol{\eta}) \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}, \quad (3.3)$$

onde

$$a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} d\Omega, \quad (3.4)$$

$$l(\boldsymbol{\eta}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma_N, \quad (3.5)$$

no qual o tensor de tensões para material intermediário é dado por

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{C}^* \boldsymbol{\varepsilon} = \rho^p \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} = \rho^p \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.6)$$

Deve-se notar a inclusão do parâmetro  $\rho$  como sub-índice na Eq. (3.3) para denotar a dependência, tanto implícita quanto explícita, do problema em relação a  $\rho$ .

Com isso, o problema de minimização da energia interna via SIMP é estabelecido por:

$$\begin{aligned} & \underset{\rho(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega}{\text{Minimizar:}} && \psi_\rho(\mathbf{u}_\rho) = \frac{1}{2} a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\rho), \\ & \text{Sujeito à:} && \begin{cases} \int_{\Omega} \rho d\Omega \leq \bar{V}, \\ g(\mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\eta}) = a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\eta}) - l(\boldsymbol{\eta}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}, \\ 0 \leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1 \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.7)$$

As restrições impostas ao problema correspondem, respectivamente, ao limite de volume  $\bar{V}$ , satisfação de equilíbrio e limites laterais na variável de projeto. Outras restrições podem ser

incorporadas ao problema, tal como restrição sobre o valor da tensão, deformação, dentre outros.

### 3.1.2 Resolução do problema de otimização topológica

O problema de otimização topológica, dado pela Eq. (3.7), pode ser resolvido através de diversas técnicas, entre as quais citam-se: técnicas de programação matemática, condição de otimalidade, entre outros. Neste documento apresenta-se uma abordagem baseada nas condições de otimalidade do problema, pois a mesma permitirá estabelecer pontos de comparação com os outros métodos em estudo. Com este objetivo define-se um funcional Lagrangeano dado por <sup>1</sup>

$$\mathcal{L}_\rho(\mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\lambda}_\rho, \alpha) = \frac{1}{2}a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\rho) + \alpha \left( \int_\Omega \rho d\Omega - \bar{V} \right) + a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\lambda}_\rho) - l(\boldsymbol{\lambda}_\rho), \quad (3.8)$$

onde a função  $\boldsymbol{\lambda}_\rho$  e  $\alpha$  são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições impostas ao problema.

Pelo critério de otimalidade, a condição necessária de mínimo local é estabelecida por

$$\left\langle \frac{d\mathcal{L}_\rho}{d\mathbf{c}}, \mathbf{d} \right\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{d}, \quad (3.9)$$

onde  $\mathbf{c} = \{\mathbf{u}_\rho, \rho, \boldsymbol{\lambda}_\rho, \alpha\}$  e  $\mathbf{d} = \{\boldsymbol{\xi}, \gamma, \boldsymbol{\eta}, \beta\}$ , sendo  $\boldsymbol{\xi}$  e  $\beta$  definidos abaixo.

Derivando o Lagrangeano em relação ao multiplicador de Lagrange  $\alpha$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}_\rho}{\partial \alpha}, \beta \right\rangle &= \frac{d}{d\tau} (\alpha + \tau\beta) \left( \int_\Omega \rho d\Omega - \bar{V} \right) \Big|_{\tau=0} \\ &= \beta \left( \int_\Omega \rho d\Omega - \bar{V} \right) = 0 \quad \forall \beta, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde  $\tau\beta$  representa um passo de tamanho  $\tau \in \mathbb{R}^+$  na direção  $\beta$ . Como esta equação deve ser válida para toda direção  $\beta$ , então

$$\int_\Omega \rho d\Omega - \bar{V} = 0, \quad (3.11)$$

que corresponde à restrição de volume imposta ao problema.

Já a derivada de  $\mathcal{L}_\rho$  em relação ao multiplicador de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}_\rho$  resulta na restrição de equilíbrio, ou seja,

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}_\rho}{\partial \boldsymbol{\lambda}_\rho}, \boldsymbol{\eta} \right\rangle = a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\eta}) - l(\boldsymbol{\eta}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta}. \quad (3.12)$$

---

<sup>1</sup>As restrições laterais sobre  $\rho$ , devido a sua simplicidade, serão momentaneamente desconsideradas.

Derivando-se agora o Lagrangeano em relação ao campo de deslocamentos  $\mathbf{u}_\rho$ , tem-se

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}_\rho}{\partial \mathbf{u}_\rho}, \boldsymbol{\xi} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_\rho} \left( \frac{1}{2} a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\rho) + a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\lambda}_\rho) \right), \boldsymbol{\xi} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_\rho} a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\rho), \boldsymbol{\xi} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_\rho} a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\lambda}_\rho), \boldsymbol{\xi} \right\rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

que corresponde ao problema adjunto, onde  $\boldsymbol{\xi}$  representa a direção de mudança de  $\mathbf{u}_\rho$ . Se  $a_\rho(\cdot, \cdot) : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  é Fréchet diferenciável em  $\mathbf{u}_\rho \in \mathcal{U}$ , então  $a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\rho)$  é Gâteaux diferenciável (ver, por exemplo, Ekeland & Temam [13]). Desta forma, lembrando-se que  $a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\rho)$  é simétrico e bilinear, o primeiro termo da Eq. (3.13) é dado por

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_\rho} a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\rho), \boldsymbol{\xi} \right\rangle &= \frac{d}{d\tau} a_\rho(\mathbf{u}_\rho + \tau \boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}_\rho + \tau \boldsymbol{\xi})|_{\tau=0} \\ &= \frac{d}{d\tau} \{a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\rho) + 2a_\rho(\tau \boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}_\rho) + a_\rho(\tau \boldsymbol{\xi}, \tau \boldsymbol{\xi})\}|_{\tau=0} \\ &= \frac{d}{d\tau} \{a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\rho) + 2\tau a_\rho(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}_\rho) + \tau^2 a_\rho(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi})\}|_{\tau=0} \\ &= 2a_\rho(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}_\rho). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Da mesma maneira, o segundo termo da Eq. (3.13) é dado por

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_\rho} a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\lambda}_\rho), \boldsymbol{\xi} \right\rangle &= \frac{d}{d\tau} a_\rho(\mathbf{u}_\rho + \tau \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}_\rho)|_{\tau=0} \\ &= \frac{d}{d\tau} \{a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\lambda}_\rho) + a_\rho(\tau \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}_\rho)\}|_{\tau=0} \\ &= \frac{d}{d\tau} \{a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\lambda}_\rho) + \tau a_\rho(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}_\rho)\}|_{\tau=0} \\ &= a_\rho(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}_\rho). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Substituindo-se os resultados encontrados nas Eqs. (3.14) e (3.15) em (3.13), obtém-se

$$\begin{aligned} a_\rho(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}_\rho) + a_\rho(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}_\rho) &= 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \\ a_\rho(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}_\rho + \boldsymbol{\lambda}_\rho) &= 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Sendo  $a_\rho(\cdot, \cdot)$  positivo definido e considerando  $\mathcal{U} \equiv \mathcal{V}$ , então fazendo  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{u}_\rho + \boldsymbol{\lambda}_\rho$  tem-se

$$a_\rho(\mathbf{u}_\rho + \boldsymbol{\lambda}_\rho, \mathbf{u}_\rho + \boldsymbol{\lambda}_\rho) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}_\rho + \boldsymbol{\lambda}_\rho = \mathbf{0}, \quad (3.17)$$

logo

$$\boldsymbol{\lambda}_\rho = -\mathbf{u}_\rho \quad (3.18)$$

corresponde à solução do problema adjunto, dado pela Eq. (3.13).

Derivando-se agora o funcional Lagrangeano em relação à densidade  $\rho$ , obtém-se

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho}, \gamma \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial \rho} a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\rho), \gamma \right\rangle + \alpha \left\langle \frac{\partial}{\partial \rho} \int_\Omega \rho \, d\Omega, \gamma \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial \rho} a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \boldsymbol{\lambda}_\rho), \gamma \right\rangle = 0 \quad \forall \gamma. \quad (3.19)$$

O resultado obtido na Eq. (3.18) permite concluir que

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho}, \gamma \right\rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial \rho} a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\rho), \gamma \right\rangle + \alpha \left\langle \frac{\partial}{\partial \rho} \int_\Omega \rho \, d\Omega, \gamma \right\rangle = 0 \quad \forall \gamma. \quad (3.20)$$

A primeira parcela da Eq. (3.20), observando-se a relação constitutiva para material intermediário (fictício) apresentada na Eq. (3.6), é dada por

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial \rho} a_\rho(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\rho), \gamma \right\rangle &= \frac{d}{d\tau} \int_\Omega (\rho + \tau\gamma)^p \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega \Big|_{\tau=0} \\ &= \int_\Omega p (\rho + \tau\gamma)^{p-1} \gamma \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega \Big|_{\tau=0} \\ &= \int_\Omega p \rho^{p-1} \gamma \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Já a segunda parcela da Eq. (3.20) é dada por

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial \rho} \int_\Omega \rho \, d\Omega, \gamma \right\rangle &= \frac{d}{d\tau} \int_\Omega (\rho + \tau\gamma) \, d\Omega \Big|_{\tau=0} \\ &= \int_\Omega \gamma \, d\Omega. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Substituindo-se as Eqs. (3.21) e (3.22) em (3.20) obtém-se

$$-\frac{1}{2} \int_\Omega p \rho^{p-1} \gamma \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega + \alpha \int_\Omega \gamma \, d\Omega = 0 \quad \forall \gamma. \quad (3.23)$$

Para se obter a expressão final do critério de otimalidade em relação ao campo de densidades (Eq. (3.23)), é necessária a discretização do domínio, que é apresentada no capítulo 4. Também no capítulo 4 são apresentados aspectos de implementação do SIMP como, por exemplo, a forma de se impor as restrições laterais sobre  $\rho$ .

## 3.2 ESO

Em geral os métodos de otimização envolvem grande complexidade matemática. Sendo assim pesquisadores têm se empenhado em desenvolver métodos mais simples de otimização

topológica. Dentre outros, destaca-se o método denominado ESO (*Evolutionary Structural Optimization*), proposto por Xie & Steven [49].

Este método baseia-se no cálculo da sensibilidade do sistema estrutural, discretizado pelo Método dos Elementos Finitos, quando se retira um elemento finito do espaço de aproximação, conforme ilustração na Fig. (3.3). A idéia então é retirar os elementos finitos menos sensíveis da malha segundo essa sensibilidade e levando em conta uma taxa de retirada dos mesmos.

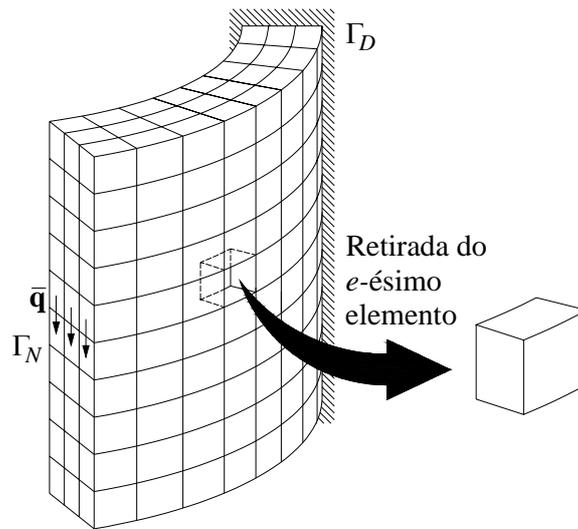


Figura 3.3: Algoritmos Evolucionários: baseado na sensibilidade do sistema quando se retira um elemento finito do campo de aproximação.

Isto é realizado através de um mapeamento  $\chi : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  do domínio tal que

$$\chi = \begin{cases} 1, & \text{para } \mathbf{x} \in \Omega_s \\ 0, & \text{para } \mathbf{x} \in \Omega_v \equiv \Omega \setminus \Omega_s \end{cases} \quad (3.24)$$

onde  $\Omega_s \subset \Omega$  e  $\Omega_v$  correspondem ao domínio sólido e vazio, respectivamente.

Esta proposta pode ser estendida a problemas de otimização topológica para a maximização da frequência natural da estrutura (ver por exemplo Xie & Steven [50] e [51]), minimização dos deslocamentos (Li *et alli* [29]), maximização da rigidez (Chu *et alli* [10]), entre outros. Além disso pode-se levar em consideração o efeito de flambagem (Rong *et alli* [41]) e condições de contorno de contato no processo de otimização (ver Li *et alli* [30]). No entanto este método possui algumas desvantagens, pois baseia-se na retirada ou não de um determinado elemento finito. Desta forma o grau de refinamento da malha torna-se um fator

importante. Além do mais, a heurística imposta no processo não necessariamente conduz à condição de mínimo, mesmo satisfazendo-se as restrições do problema.

Por se tratar de um método baseado em sistemas discretizados, a expressão da sensibilidade do funcional quando da retirada de um elemento finito é apresentada no capítulo 4, assim como a metodologia utilizada para a implementação da abordagem ESO.

### 3.3 TSA

A TSA pode ser vista como uma outra alternativa para a resolução do problema de otimização topológica. Este método resulta em uma função escalar denominada Derivada Topológica que fornece a sensibilidade da função custo quanto à inserção de um furo (vazio) infinitesimal em um determinado ponto do domínio. Neste caso, a sensibilidade é calculada impondo-se a condição de contorno de Neumann homogênea na fronteira do furo criado.

#### 3.3.1 Definição da Derivada Topológica

A introdução de um furo infinitesimal no domínio  $\Omega$  conduz a um novo domínio de definição do problema. Desta forma, considerando as funções custo  $\psi(\Omega)$  e  $\psi(\Omega_\epsilon)$  estabelecidas, respectivamente, nos domínios original e com furo, de forma que o domínio perturbado é tal que  $\Omega_\epsilon = \Omega - \bar{F}_\epsilon$ , no qual  $\bar{F}_\epsilon = F_\epsilon \cup \partial F_\epsilon$ , onde  $F_\epsilon$  representa um furo de raio  $\epsilon$  centrado em  $\mathbf{x}$  e  $\partial F_\epsilon$  o contorno de  $F_\epsilon$ , conforme Fig. (3.4). Com isso, tem-se que a Derivada Topológica é definida por (ver Garreau *et alli* [22])

$$D_T(\mathbf{x}) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(\Omega_\epsilon) - \psi(\Omega)}{f(\epsilon)}, \quad (3.25)$$

onde  $f(\epsilon)$  é uma função regularizadora negativa, monotônica e decrescente, tal que  $f(\epsilon) \rightarrow 0$  com  $\epsilon \rightarrow 0$  ( $0 \leq \epsilon < 1$ ), que dependerá do problema em análise.

No domínio com furo o problema de equilíbrio é dado por: encontrar  $\mathbf{u}_\epsilon \in \mathcal{U}_\epsilon$  tal que

$$a_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon, \boldsymbol{\eta}_\epsilon) = l_\epsilon(\boldsymbol{\eta}_\epsilon) \quad \forall \boldsymbol{\eta}_\epsilon \in \mathcal{V}_\epsilon, \quad (3.26)$$

onde

$$\mathcal{U}_\epsilon := \{\mathbf{u}_\epsilon \in H^1(\Omega_\epsilon) : \mathbf{u}_\epsilon|_{\Gamma_D} = \mathbf{0}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{V}_\epsilon := \{\boldsymbol{\eta}_\epsilon \in H^1(\Omega_\epsilon) : \boldsymbol{\eta}_\epsilon|_{\Gamma_D} = \mathbf{0}\}. \quad (3.27)$$

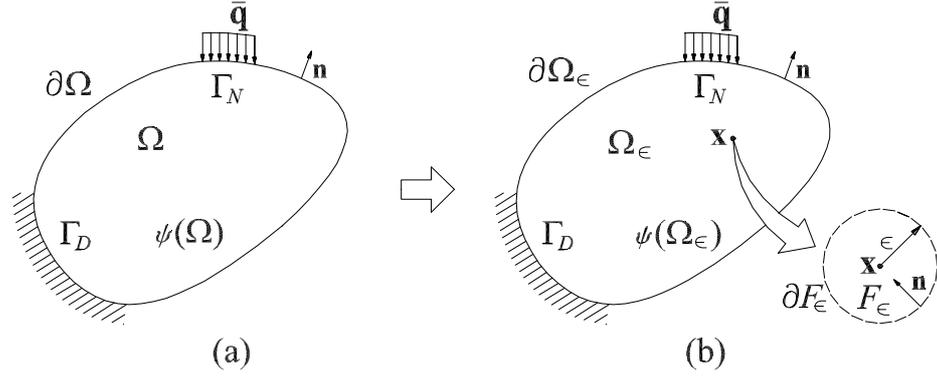


Figura 3.4: Conceito original da Derivada Topológica: (a) domínio original e (b) perturbado pela introdução de um furo infinitesimal.

Os operadores  $a_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon, \boldsymbol{\eta}_\epsilon)$  e  $l_\epsilon(\boldsymbol{\eta}_\epsilon)$ , são definidos respectivamente por

$$a_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon, \boldsymbol{\eta}_\epsilon) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta}_\epsilon d\Omega_\epsilon, \quad (3.28)$$

$$l_\epsilon(\boldsymbol{\eta}_\epsilon) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta}_\epsilon d\Omega_\epsilon + \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\eta}_\epsilon d\Gamma_N. \quad (3.29)$$

A Eq. (3.26), escrita em forma local, é dada por

$$\begin{cases} -\text{div}(\boldsymbol{\sigma}_\epsilon) = \mathbf{b} & \text{em } \Omega_\epsilon, \\ \mathbf{u}_\epsilon = \mathbf{0} & \text{em } \Gamma_D, \\ \boldsymbol{\sigma}_\epsilon \mathbf{n} = \bar{\mathbf{q}} & \text{em } \Gamma_N, \\ \boldsymbol{\sigma}_\epsilon \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{em } \partial F_\epsilon, \end{cases} \quad (3.30)$$

denominado Problema de Valor no Contorno.

Embora esta definição de Derivada Topológica seja extremamente geral, o limite dado pela Eq. (3.25) não pode ser trivialmente obtido, pois ao se incorporar um furo no domínio original não é mais possível estabelecer uma relação entre o domínio com e sem furo.

Para contornar esse problema, no trabalho de Novotny [33] foi proposto um método alternativo de cálculo da Derivada Topológica baseado no conceito de Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma. Este método permite utilizar conceitos da mecânica do contínuo para o cálculo da Derivada Topológica, tais como derivadas materiais de campos espaciais e Teorema do Transporte de Reynolds, já amplamente difundidos na literatura.

### 3.3.2 Relação entre a Derivada Topológica e a Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma

Como citado anteriormente, a introdução de furos no domínio original impossibilita estabelecer uma relação entre o domínio original e o domínio com furo. No entanto, ao invés de se calcular a sensibilidade do funcional quanto à inserção de um furo, calcula-se a sensibilidade a uma perturbação no raio do furo, já existente. Desta forma é possível construir um mapeamento um para um entre ambos domínios.

A perturbação aplicada ao raio do furo pode ser parametrizada através de  $\tau \in \mathbb{R}^+$  (ver por exemplo Zolézio [56]). Desta forma tem-se um novo domínio  $\Omega_\tau$  tal que

$$\Omega_\tau = \{ \mathbf{x}_\tau \in \mathbb{R}^N \mid \exists \mathbf{x}_\tau \in \Omega_\tau, \mathbf{x}_\tau = \mathbf{x} + \tau \mathbf{v}, \mathbf{x}_\tau|_{\tau=0} = \mathbf{x} \text{ e } \Omega_\tau|_{\tau=0} = \Omega_\epsilon \}, \quad (3.31)$$

onde  $\mathbf{v}$  pode ser interpretado como a velocidade à mudança de forma.

Zolézio [56], em 1981, demonstrou que apenas a componente da velocidade na direção normal à fronteira é significativa para a determinação da sensibilidade à mudança de forma, pois somente esta parcela contribui para uma mudança efetiva do domínio. Desta forma o campo de velocidades pode ser definido por

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ -\mathbf{n}, & \text{se } \mathbf{x} \in \partial F_\epsilon \end{cases} \quad (3.32)$$

que representa uma expansão uniforme do furo  $F_\epsilon$ , conforme Fig. (3.5).

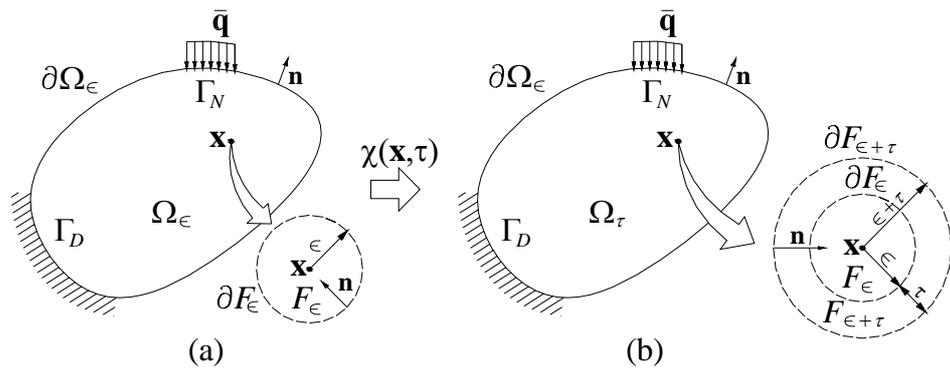


Figura 3.5: Domínios (a) original e (b) perturbado, através de uma expansão no raio do furo infinitesimal, já existente.

Através desta parametrização, a sensibilidade do funcional  $\psi$  definido em  $\Omega_\tau$  em relação

ao parâmetro  $\tau$ , em  $\tau = 0$ , é dada por

$$\left. \frac{d}{d\tau} \psi(\Omega_\tau) \right|_{\tau=0} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\psi(\Omega_\tau) - \psi(\Omega_\tau|_{\tau=0})}{\tau}. \quad (3.33)$$

A Derivada Topológica, definida pela Eq. (3.25), pode ser escrita analogamente a uma expansão em série de Taylor da seguinte maneira

$$\psi(\Omega_\epsilon) = \psi(\Omega) + f(\epsilon) D_T(\mathbf{x}) + R(f(\epsilon)), \quad (3.34)$$

onde

$$R(f(\epsilon)) : \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{R(f(\epsilon))}{f(\epsilon)} = 0. \quad (3.35)$$

Derivando-se a Eq. (3.34) em relação a  $\epsilon$ , obtém-se

$$\frac{d}{d\epsilon} \psi(\Omega_\epsilon) = f'(\epsilon) D_T(\mathbf{x}) + f'(\epsilon) R'(f(\epsilon)). \quad (3.36)$$

Rearranjando-se os termos

$$\frac{1}{f'(\epsilon)} \frac{d}{d\epsilon} \psi(\Omega_\epsilon) = D_T(\mathbf{x}) + R'(f(\epsilon)). \quad (3.37)$$

Tomando-se o limite  $\epsilon \rightarrow 0$  e lembrando-se da definição de  $R(f(\epsilon))$ , dada pela Eq. (3.35), que permite concluir que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} R'(f(\epsilon)) = 0, \quad (3.38)$$

tem-se que a Derivada Topológica é dada por

$$D_T(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\epsilon)} \left. \frac{d}{d\tau} \psi(\Omega_\tau) \right|_{\tau=0}. \quad (3.39)$$

Esta expressão é de suma importância visto que possibilita o cálculo da Derivada Topológica de maneira simples e construtiva utilizando um ferramental matemático bem posto e já estabelecido na literatura dado pela Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma.

O equilíbrio deve ser satisfeito para toda perturbação  $\tau \in \mathbb{R}^+$  suficientemente pequena. Desta forma, o problema de equilíbrio no domínio  $\Omega_\tau$  é dado por: encontrar  $\mathbf{u}_\tau \in \mathcal{U}_\tau$  tal que

$$a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \boldsymbol{\eta}_\tau) = l_\tau(\boldsymbol{\eta}_\tau) \quad \forall \boldsymbol{\eta}_\tau \in \mathcal{V}_\tau, \quad (3.40)$$

no qual

$$a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \boldsymbol{\eta}_\tau) = \int_{\Omega_\tau} \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot \nabla_\tau^s \boldsymbol{\eta}_\tau d\Omega_\tau, \quad (3.41)$$

$$l_\tau(\boldsymbol{\eta}_\tau) = \int_{\Omega_\tau} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta}_\tau d\Omega_\tau + \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\eta}_\tau d\Gamma_N, \quad (3.42)$$

onde  $\nabla_\tau(\cdot)$  é utilizado para denotar o gradiente na configuração  $\Omega_\tau$ , ou seja,

$$\nabla_\tau(\cdot) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_\tau}(\cdot) \quad \mathbf{x}_\tau \in \Omega_\tau \quad (3.43)$$

e os espaços das funções e das variações admissíveis, são definidos na configuração  $\Omega_\tau$  por

$$\mathcal{U}_\tau := \{\mathbf{u}_\tau \in H^1(\Omega_\tau) : \mathbf{u}_\tau|_{\Gamma_D} = 0\} \quad \text{e} \quad \mathcal{V}_\tau := \{\boldsymbol{\eta}_\tau \in H^1(\Omega_\tau) : \boldsymbol{\eta}_\tau|_{\Gamma_D} = 0\}, \quad (3.44)$$

respectivamente.

Note que as perturbações impostas no domínio produzem alterações tanto nos termos integrandos quanto no próprio domínio de integração, nos operadores  $a_\tau(\cdot, \cdot)$  e  $l_\tau(\cdot)$ .

O tensor de tensões  $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ , na configuração perturbada  $\Omega_\tau$ , é dado por

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}_\tau, \quad (3.45)$$

onde

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\tau = \nabla_\tau^s \mathbf{u}_\tau \quad (3.46)$$

corresponde ao tensor de deformações, para hipótese de pequenos deslocamentos e deformações.

### 3.3.3 Cálculo da sensibilidade pelo Método Lagrangeano

O cálculo da sensibilidade do funcional  $\psi(\Omega_\tau)$  em relação à perturbação  $\tau$  imposta ao domínio deve ser feito de maneira a atender à restrição da equação de estado. Esta sensibilidade pode ser obtida através de diversas técnicas, entre as quais citam-se os métodos Direto, Adjunto, Lagrangeano, entre outros, sendo adotado neste trabalho o Método Lagrangeano.

Desta forma, considerando-se a configuração perturbada  $\Omega_\tau \in H^1$ , tem-se que o funcional Lagrangeano é definido por

$$\mathcal{L}_\tau(\mathbf{u}_\tau, \boldsymbol{\lambda}_\tau) = \psi(\Omega_\tau) + a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \boldsymbol{\lambda}_\tau) - l_\tau(\boldsymbol{\lambda}_\tau) \quad \forall \boldsymbol{\lambda}_\tau \in \mathcal{V}_\tau, \quad (3.47)$$

onde a função  $\boldsymbol{\lambda}_\tau$  corresponde ao multiplicador de Lagrange. Adotando-se a energia interna como função custo  $\psi(\Omega_\tau)$ , tem-se

$$\mathcal{L}_\tau(\mathbf{u}_\tau, \boldsymbol{\lambda}_\tau) = \frac{1}{2}a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau) + a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \boldsymbol{\lambda}_\tau) - l_\tau(\boldsymbol{\lambda}_\tau) \quad \forall \boldsymbol{\lambda}_\tau \in \mathcal{V}_\tau. \quad (3.48)$$

Vale ressaltar que esta equação é análoga à Eq. (3.8), exceto pelo fato que, neste caso, a restrição de volume do problema não é incorporada ao funcional Lagrangeano. Neste caso o funcional Lagrangeano é particularizado a uma alteração na geometria, que é provocada por uma perturbação  $\tau$ .

Sendo a equação de estado satisfeita em todo domínio para quaisquer valores de  $\tau$ , então para se obter a sensibilidade do funcional é necessário apenas calcular a derivada total de  $\mathcal{L}_\tau$  em relação ao parâmetro  $\tau$ , ou seja,

$$\frac{d\mathcal{L}_\tau}{d\tau} = \frac{\partial\mathcal{L}_\tau}{\partial\tau} + \left\langle \frac{\partial\mathcal{L}_\tau}{\partial\mathbf{u}_\tau}, \boldsymbol{\xi}_\tau \right\rangle + \left\langle \frac{\partial\mathcal{L}_\tau}{\partial\boldsymbol{\lambda}_\tau}, \boldsymbol{\eta}_\tau \right\rangle \quad \forall \boldsymbol{\xi}_\tau, \boldsymbol{\eta}_\tau \in \mathcal{V}_\tau. \quad (3.49)$$

Impondo-se o segundo e terceiro termos da Eq. (3.49) como sendo nulos, obtêm-se respectivamente a equação adjunta e a restrição correspondente ao sistema de equações de equilíbrio. Neste caso particular, a solução da equação adjunta pode ser obtida explicitamente, o que resulta em  $\boldsymbol{\lambda}_\tau = -\mathbf{u}_\tau$ . Desta forma, desde que  $\mathbf{u}_\tau$  e  $\boldsymbol{\lambda}_\tau = -\mathbf{u}_\tau$  sejam respectivamente soluções da equação de estado e adjunta, a derivada do Lagrangeano em relação a  $\tau$  resulta em

$$\left. \frac{d\mathcal{L}_\tau}{d\tau} \right|_{\tau=0} = -\frac{1}{2} \left. \frac{\partial}{\partial\tau} a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau) \right|_{\tau=0} + \left. \frac{\partial}{\partial\tau} l_\tau(\mathbf{u}_\tau) \right|_{\tau=0}. \quad (3.50)$$

Para o cálculo da sensibilidade do funcional Lagrangeano basta calcular as derivadas de  $a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau)$  e  $l_\tau(\mathbf{u}_\tau)$  em relação ao parâmetro  $\tau$ .

A derivada da primeira parcela da Eq. (3.50) em relação a  $\tau$  é dada por

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial\tau} a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau) \right|_{\tau=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial\tau} \int_{\Omega_\tau} \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot \nabla_\tau^s \mathbf{u}_\tau d\Omega_\tau \right|_{\tau=0} \\ &= \int_{\Omega_\epsilon} (\boldsymbol{\sigma}_\epsilon \cdot \nabla^s \mathbf{u}_\epsilon \operatorname{div} \mathbf{v} - 2 \nabla \mathbf{u}_\epsilon^T \boldsymbol{\sigma}_\epsilon \cdot \nabla \mathbf{v}) d\Omega_\epsilon. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Já a derivada da segunda parcela da Eq. (3.50) em relação a  $\tau$  é dada por

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial\tau} l_\tau(\mathbf{u}_\tau) \right|_{\tau=0} &= \frac{\partial}{\partial\tau} \left( \int_{\Omega_\tau} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_\tau d\Omega_\tau + \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{u}_\tau d\Gamma_N \right) \\ &= \int_{\Omega_\epsilon} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_\epsilon \operatorname{div} \mathbf{v} d\Omega_\epsilon \\ &= \int_{\Omega_\epsilon} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_\epsilon) \mathbf{I} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega_\epsilon. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Substituindo as Eqs. (3.51) e (3.52) na Eq. (3.50) e rearranjando os termos, obtêm-se

$$\left. \frac{\partial\mathcal{L}_\tau}{\partial\tau} \right|_{\tau=0} = \int_{\Omega_\epsilon} \left[ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}_\epsilon \cdot \nabla^s \mathbf{u}_\epsilon) \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_\epsilon^T \boldsymbol{\sigma}_\epsilon + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_\epsilon) \mathbf{I} \right] \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega_\epsilon, \quad (3.53)$$

que pode ser re-escrito como

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}_\tau}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = \int_{\Omega_\epsilon} \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega_\epsilon, \quad (3.54)$$

onde

$$\boldsymbol{\Sigma}_\epsilon = -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}_\epsilon \cdot \nabla^s \mathbf{u}_\epsilon) \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_\epsilon^T \boldsymbol{\sigma}_\epsilon + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_\epsilon) \mathbf{I} \quad (3.55)$$

é denominado tensor momento energia de Eshelby. Este tensor representa as forças configuracionais associadas às mudanças na configuração provocadas por  $\nabla \mathbf{v}$ .

Sabendo-se que

$$\text{div} (\boldsymbol{\Sigma}_\epsilon^T \mathbf{v}) = \text{div} \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (3.56)$$

e aplicando-se o Teorema da Divergência a Eq. (3.54) assume a forma

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}_\tau}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = \int_{\Gamma_\epsilon} \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\Gamma_\epsilon - \int_{\Omega_\epsilon} \text{div} \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon \cdot \mathbf{v} d\Omega_\epsilon, \quad (3.57)$$

onde

$$\Gamma_\epsilon = \partial F_\epsilon \cup \partial \Omega. \quad (3.58)$$

Sendo  $\text{div} \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon = 0$ , conforme Novotny [33], a Eq. (3.57) se reduz a

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}_\tau}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = \int_{\Gamma_\epsilon} \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\Gamma_\epsilon. \quad (3.59)$$

Sendo o campo de velocidades dado pela Eq. (3.32) tem-se

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}_\tau}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = - \int_{\partial F_\epsilon} \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} d\partial F_\epsilon, \quad (3.60)$$

onde

$$\boldsymbol{\Sigma}_\epsilon \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_\epsilon \cdot \nabla^s \mathbf{u}_\epsilon + \boldsymbol{\sigma}_\epsilon \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}_\epsilon \mathbf{n} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_\epsilon. \quad (3.61)$$

Desconsiderando-se as forças de corpo e sendo  $\boldsymbol{\sigma}_\epsilon \mathbf{n} = \mathbf{0}$  sobre  $\partial F_\epsilon$ , a sensibilidade da função custo, em relação à perturbação  $\tau$ , é dada por

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}_\tau}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = \int_{\partial F_\epsilon} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_\epsilon \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon d\partial F_\epsilon. \quad (3.62)$$

Esta dedução também pode ser encontrada nos trabalhos de Novotny [33], Kleiber *et alli* [27] e Haug *et alli* [25].

### 3.3.4 Cálculo da Derivada Topológica em Elasticidade Linear

Considerando-se então o resultado obtido através da Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma, dado pela Eq. (3.62) e substituindo-o na Eq. (3.39), tem-se que a Derivada Topológica é dada por

$$D_T(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\epsilon)} \int_{\partial F_\epsilon} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_\epsilon \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon d\partial F_\epsilon. \quad (3.63)$$

A partir desta equação pode-se concluir que, para o cálculo da Derivada Topológica em elasticidade, basta se conhecer o comportamento de  $\mathbf{u}_\epsilon$  em relação a  $\epsilon$  na fronteira  $\partial F_\epsilon$  do furo introduzido, o que irá depender do problema em análise. Este comportamento pode ser obtido através de uma Análise Assintótica da solução  $\mathbf{u}_\epsilon$  em relação ao parâmetro  $\epsilon$ .

A relação constitutiva inversa da Lei de Hooke generalizada é definida por

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \boldsymbol{\sigma}_\epsilon - \nu \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_\epsilon) \mathbf{I}], \quad (3.64)$$

onde  $\text{tr}$  é o operador de traço. Substituindo-se a Eq. (3.64) em (3.63), tem-se que a Derivada Topológica pode ser escrita em função do tensor de tensões, ou seja,

$$D_T(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\epsilon)} \int_{\partial F_\epsilon} \frac{1}{2E} [(1 + \nu) \boldsymbol{\sigma}_\epsilon \cdot \boldsymbol{\sigma}_\epsilon - \nu (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}_\epsilon)^2] d\partial F_\epsilon. \quad (3.65)$$

#### Estado Plano de Tensão

Para se efetuar o cálculo do integrando da Eq. (3.65), é necessário se conhecer a distribuição de tensão  $\boldsymbol{\sigma}_\epsilon$  sobre a fronteira do furo introduzido. Escrevendo-se o tensor de tensões em um sistema de coordenadas polares  $r$  e  $\theta$ , tem-se

$$\boldsymbol{\sigma}_\epsilon = \sigma_\epsilon^{rr} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) + \tau_\epsilon^{r\theta} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta) + \tau_\epsilon^{\theta r} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r) + \sigma_\epsilon^{\theta\theta} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta), \quad (3.66)$$

conforme ilustrado na Fig. (3.6).

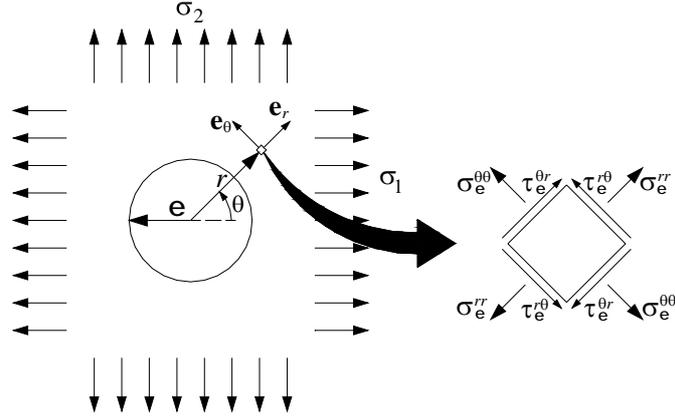


Figura 3.6: Sistema de coordenadas polares para determinação do comportamento do tensor de tensões  $\sigma_\epsilon$  em  $\partial F_\epsilon$  em Estado Plano de Tensão.

Deve-se, agora, impor a condição de contorno sobre a fronteira  $\partial F_\epsilon$  do furo  $F_\epsilon$ , o que irá depender do fenômeno físico que pretende-se modelar. Como no problema de otimização topológica aqui abordado objetiva-se calcular a sensibilidade da função custo ao introduzir-se um vazio no domínio, então necessita-se impor condições de contorno de Neumann homogênea sobre  $\partial F_\epsilon$ , ou seja,

$$\sigma_\epsilon \cdot \mathbf{e}_r|_{r=\epsilon} = \sigma_\epsilon^{rr} \mathbf{e}_r + \tau_\epsilon^{\theta r} \mathbf{e}_\theta = 0. \quad (3.67)$$

Sendo os eixos  $\mathbf{e}_r$  e  $\mathbf{e}_\theta$  vetores ortonormais e o tensor de tensões simétrico, pode-se concluir que

$$\sigma_\epsilon^{rr} = \tau_\epsilon^{\theta r} = \tau_\epsilon^{r\theta} = 0 \quad (3.68)$$

sobre  $\partial F_\epsilon$ . Com isso, tem-se que a Derivada Topológica é dada por

$$D_T(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\epsilon)} \int_{\partial F_\epsilon} \frac{1}{2E} (\sigma_\epsilon^{\theta\theta})^2 d\partial F_\epsilon. \quad (3.69)$$

Para o caso de Estado Plano de Tensão tem-se que a componente do tensor de tensões  $\sigma_\epsilon^{\theta\theta}$  em coordenadas polares, conforme Obert & Duvall [36] e considerando-se  $r = \epsilon$ , que corresponde à fronteira do furo introduzido, é dada por (ver apêndice A, seção A.1)

$$\sigma_\epsilon^{\theta\theta} = (\sigma_1 + \sigma_2) - 2 \cos 2\theta (\sigma_1 - \sigma_2), \quad (3.70)$$

onde  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  correspondem às tensões principais atuantes no centro do furo  $\mathbf{x}$ .

Adotando-se

$$f'(\epsilon) = -2\pi\epsilon \Rightarrow f(\epsilon) = -\pi\epsilon^2, \quad (3.71)$$

e substituindo-se as Eqs. (A.10) e (3.71) em (3.69), tem-se a expressão final da Derivada Topológica

$$\begin{aligned} D_T(\mathbf{x}) &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2E} [(\sigma_1 + \sigma_2) + 2 \cos 2\theta (\sigma_1 - \sigma_2)]^2 \epsilon d\theta \\ &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon}{2E} [(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + 4 \cos 2\theta (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + 4 \cos^2 2\theta (\sigma_1 - \sigma_2)^2] d\theta \\ &= -\frac{1}{2E} [(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + 2(\sigma_1 - \sigma_2)^2]. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Considerando a relação constitutiva, pode-se escrever a Derivada Topológica como

$$D_T(\mathbf{x}) = -\frac{1}{1+\nu} \left[ 2\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{3\nu-1}{2(1-\nu)} \text{tr}\boldsymbol{\sigma} \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon} \right], \quad (3.73)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  estão definidos no domínio original  $\Omega$ .

Nos casos onde  $\nu = 1/3$  tem-se que a Derivada Topológica é dada por

$$D_T(\mathbf{x}) = -\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.74)$$

### Elasticidade Tridimensional

O procedimento a ser adotado para o cálculo da Derivada Topológica em Elasticidade Tridimensional é muito semelhante ao apresentado em Estado Plano de Tensão. Desta forma, para o cálculo do integrando é necessário se conhecer apenas a distribuição de tensão  $\boldsymbol{\sigma}_\epsilon$ , atuante sobre a fronteira da esfera introduzida, que está diretamente relacionada ao estado de tensão atuante antes da inserção do furo no domínio.

Construindo-se um sistema de coordenadas esféricas, constituído pelos eixos  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  e  $\mathbf{e}_\varphi$ , tem-se que o tensor de tensões  $\boldsymbol{\sigma}_\epsilon$  pode ser decomposto como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_\epsilon = & \sigma_\epsilon^{rr} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) + \tau_\epsilon^{r\varphi} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\varphi) + \tau_\epsilon^{r\theta} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta) \\ & + \tau_\epsilon^{\varphi r} (\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_r) + \sigma_\epsilon^{\varphi\varphi} (\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi) + \tau_\epsilon^{\varphi\theta} (\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\theta) \\ & + \tau_\epsilon^{\theta r} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r) + \tau_\epsilon^{\theta\varphi} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\varphi) + \sigma_\epsilon^{\theta\theta} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta), \end{aligned} \quad (3.75)$$

conforme Fig. (3.7).

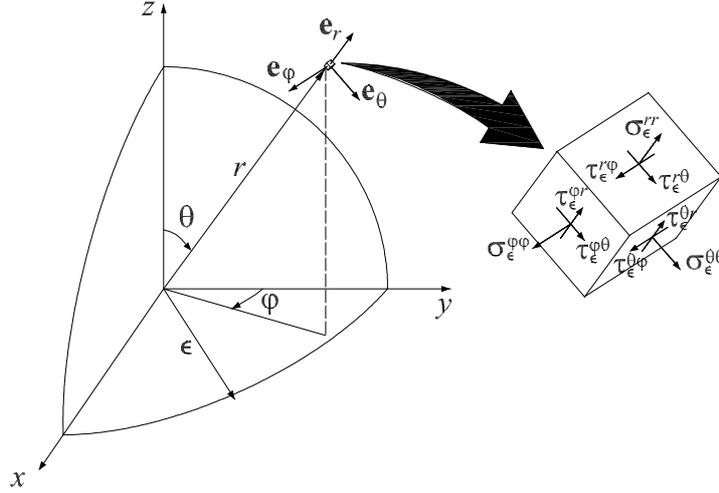


Figura 3.7: Sistema de coordenadas polares para determinação do comportamento do tensor de tensões  $\sigma_\epsilon$  em  $\partial F_\epsilon$  em Elasticidade 3D.

Pela condição de contorno de Neumann homogênea (Eq. (3.30)), imposta sobre a fronteira da esfera introduzida, tem-se que

$$\begin{aligned}\sigma_\epsilon \cdot \mathbf{e}_r|_{r=\epsilon} &= 0 \\ \sigma_\epsilon \cdot \mathbf{e}_r|_{r=\epsilon} &= \sigma_\epsilon^{rr} \mathbf{e}_r + \tau_\epsilon^{\theta r} \mathbf{e}_\theta + \tau_\epsilon^{\varphi r} \mathbf{e}_\varphi = 0.\end{aligned}\quad (3.76)$$

Como os eixos  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  e  $\mathbf{e}_\varphi$  são vetores ortogonais e o tensor de tensões é simétrico, pode-se concluir que

$$\sigma_\epsilon^{rr} = \tau_\epsilon^{r\theta} = \tau_\epsilon^{\theta r} = \tau_\epsilon^{r\varphi} = \tau_\epsilon^{\varphi r} = 0 \quad (3.77)$$

sobre  $\partial F_\epsilon$ .

Considerando-se o resultado obtido na Eq. (3.77) e substituindo-se a decomposição polar do tensor de tensões (Eq. (3.75)) na Eq. (3.65), tem-se

$$\begin{aligned}D_T(\mathbf{x}) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\epsilon)} \int_{\partial F_\epsilon} \frac{1}{2E} \left\{ (1 + \nu) \left[ (\sigma_\epsilon^{\theta\theta})^2 + (\sigma_\epsilon^{\varphi\varphi})^2 + 2(\tau_\epsilon^{\theta\varphi})^2 \right] - \nu (\sigma_\epsilon^{\theta\theta} + \sigma_\epsilon^{\varphi\varphi})^2 \right\} d\partial F_\epsilon \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\epsilon)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2E} \left[ (\sigma_\epsilon^{\theta\theta})^2 + (\sigma_\epsilon^{\varphi\varphi})^2 + 2(1 + \nu) (\tau_\epsilon^{\theta\varphi})^2 \right. \\ &\quad \left. - 2\nu \sigma_\epsilon^{\theta\theta} \sigma_\epsilon^{\varphi\varphi} \right] \epsilon^2 \sin \theta d\theta d\varphi.\end{aligned}\quad (3.78)$$

Assumindo-se

$$f'(\epsilon) = -4\pi\epsilon^2 \Rightarrow f(\epsilon) = -\frac{4}{3}\pi\epsilon^3 \quad (3.79)$$

e substituindo-se as componentes do tensor de tensões (ver apêndice A, seção A.2) na Eq. (3.78), tem-se que a Derivada Topológica para Elasticidade Tridimensional é dada por

$$D_T(\mathbf{x}) = -\frac{1-\nu}{7-5\nu} \left( 10\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{5\nu-1}{1-2\nu} \text{tr}\boldsymbol{\sigma} \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon} \right), \quad (3.80)$$

resultado este que está de acordo com o apresentado por Garreau *et alli* [22]. Para coeficiente de Poisson  $\nu = 1/5$  a Eq. (3.80) se reduz a

$$D_T(\mathbf{x}) = -\frac{4}{3} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.81)$$

No capítulo 4 são apresentados os aspectos de implementação relacionados à abordagem Derivada Topológica.

### 3.4 Comentários adicionais

Conforme apresentado neste capítulo, há várias alternativas para se tratar o problema de otimização topológica. Por exemplo o método SIMP baseia-se na introdução de um material intermediário (artificial), cujo comportamento constitutivo está associado a um campo  $\rho$ , correspondente à densidade do material. O material sólido está associado a  $\rho = 1$  e  $\rho = 0$  representa vazio. No caso do método ESO a topologia é modificada através da retirada de elementos finitos da malha e no algoritmo TSA, a topologia em sistemas contínuos, é alterada pela introdução de um furo infinitesimal no domínio.

Estes algoritmos propõem mudanças no domínio baseados na análise de sensibilidade, que, para o problema de otimização para minimização da energia interna, resultam semelhantes.

# Capítulo 4

## Aspectos computacionais

Um item comum aos métodos de otimização topológica apresentados no capítulo 3 é a necessidade de se resolver a equação de estado para a obtenção do campo de deslocamentos da estrutura. Atualmente há a disposição na literatura diversos métodos para a obtenção da solução, de forma aproximada, da equação de equilíbrio. Entre os mais difundidos pode-se mencionar o Método dos Elementos Finitos (MEF).

Desta forma, este capítulo apresenta inicialmente alguns tópicos referentes ao MEF e, posteriormente, são mostrados aspectos computacionais relativos à implementação dos métodos de otimização topológica SIMP, ESO e TSA.

### 4.1 Método dos Elementos Finitos

A obtenção da solução analítica da equação de estado, em geral, torna-se inviável devido às variações nos carregamentos, condições de contorno e da própria complexidade do domínio, sendo necessária a aplicação de métodos numéricos. Neste trabalho, portanto, é adotado o MEF para discretização do problema.

O Método dos Elementos Finitos consiste em construir famílias de subespaços de dimensão finita das funções admissíveis  $\mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}$  e das variações admissíveis  $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ , onde  $h \in (0, 1] \subset \mathbb{R}$  denota a dependência da aproximação em relação ao tamanho dos elementos da malha. Desta forma a equação de estado é redefinida por: encontrar  $\mathbf{u}_h \in \mathcal{U}_h$ , tal que,

$$a(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\eta}_h) = l(\boldsymbol{\eta}_h), \quad \forall \boldsymbol{\eta}_h \in \mathcal{V}_h. \quad (4.1)$$

Esta forma de apresentar o problema conduz a um sistema de equações linearmente

independente de dimensão finita, dado por

$$\mathbf{K}_h \bar{\mathbf{u}}_h = \mathbf{f}_h, \quad (4.2)$$

onde  $\bar{\mathbf{u}}_h$  e  $\mathbf{f}_h$  correspondem ao vetor de deslocamentos e carregamentos nodais, respectivamente, e  $\mathbf{K}_h$  a matriz de rigidez global da estrutura. Admitindo-se que os espaços aproximados  $\mathcal{U}_h$  e  $\mathcal{V}_h$  são tais que

$$\mathcal{U}_h = \mathcal{V}_h, \quad (4.3)$$

então, pode-se utilizar a mesma base para gerar os dois espaços, o que resulta em uma classe de aproximação conhecida como Método de Bubnov-Galerkin. Isto torna a matriz de rigidez da estrutura simétrica, o que conduz a uma maior facilidade na resolução deste sistema de equações.

## 4.2 Algoritmos de otimização topológica

### 4.2.1 Algoritmo baseado no SIMP

Conforme apresentado no capítulo 3 (seção 3.1), o SIMP baseia-se na utilização de material intermediário para a resolução do problema de otimização topológica. A partir deste material são obtidas as propriedades constitutivas de uma determinada região do domínio.

Discretizando-se o problema pelo Método dos Elementos Finitos e admitindo-se que a função  $\gamma$  é descontínua por elemento, a Eq. (3.23) assume a forma

$$-\frac{1}{2} \int_{\Omega_e} p \rho_e^{p-1} \gamma_e \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_h \, d\Omega_e + \alpha \int_{\Omega_e} \gamma_e \, d\Omega_e = 0, \quad \forall \gamma_e, \quad e = 1, \dots, N_{elem}, \quad (4.4)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}_h$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}_h$  representam os campos de tensão e deformação obtidos a partir da solução, por elementos finitos, da equação de estado,  $N_{elem}$  corresponde ao número de elementos do sistema e  $\rho_e$  é a densidade atribuída ao  $e$ -ésimo elemento.

Considerando-se a função arbitrária  $\gamma_e$  constante no domínio do elemento, obtém-se

$$\left\{ -\frac{1}{2} \int_{\Omega_e} p \rho_e^{p-1} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_h \, d\Omega_e + \alpha \int_{\Omega_e} d\Omega_e \right\} \gamma_e = 0, \quad \forall \gamma_e, \quad e = 1, \dots, N_{elem}. \quad (4.5)$$

Como esta equação deve ser válida para todo  $\gamma_e$ , tem-se que

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_e} p \rho_e^{p-1} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_h \, d\Omega_e = \alpha \int_{\Omega_e} d\Omega_e. \quad (4.6)$$

A sensibilidade da função custo em relação à variação no valor de densidade do  $e$ -ésimo elemento é dada por

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_e}{d\rho_e} &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho_e} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma}_h^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_h d\Omega_e \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} p\rho_e^{p-1} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_h d\Omega_e.\end{aligned}\quad (4.7)$$

Com isso tem-se que a Eq. (4.6) assume a forma

$$B_e = \frac{d\psi_e}{d\rho_e} \frac{1}{\alpha V_e} = 1, \quad (4.8)$$

onde

$$V_e = \int_{\Omega_e} d\Omega_e \quad (4.9)$$

representa o volume do  $e$ -ésimo elemento. Quando os valores de  $B_e$  de todos os elementos assumirem valores unitários, o que corresponde à estabilização do multiplicador de Lagrange, tem-se a solução do problema.

No caso da existência de vários casos de carregamento o valor  $B_e$  é dado por

$$B_e = \sum_{j=1}^{N_c} w_j \frac{d(\psi_e)_j}{d\rho_e} \frac{1}{\alpha V_e} = 1, \quad e = 1, \dots, N_{elem}, \quad (4.10)$$

onde  $N_c$  é o número de casos de carregamento e  $w_j$  corresponde ao peso atribuído ao  $j$ -ésimo caso de carregamento.

Para a resolução do problema de otimização propõe-se a utilização de técnica iterativa. Desta forma o novo valor de densidade é dado por

$$\rho_e^{k+1} = B_e^q \rho_e^k, \quad (4.11)$$

onde  $k$  corresponde ao número da iteração do processo de otimização e  $q$  ( $q < 1$ ) um parâmetro escolhido, por meio de tentativas, de forma a se obter iterações estáveis, conforme Bagge [2]. Neste trabalho adota-se  $q = 0,4$ . Neste caso interpreta-se  $B_e$  como a direção de mudança de densidade do  $e$ -ésimo elemento finito.

Para incorporar a restrição nos limites do valor de  $\rho_e$  se utilizam os seguintes critérios

$$\rho_e^{k+1} = \begin{cases} \rho_{\min}, & \text{se } B_e^q \rho_e^k \leq \rho_{\min}, \\ B_e^q \rho_e^k, & \text{se } \rho_{\inf} < B_e^q \rho_e^k < \rho_{\sup}, \\ \rho_{\max}, & \text{se } B_e^q \rho_e^k \geq \rho_{\max}. \end{cases} \quad (4.12)$$

A densidade associada a cada elemento é calculada pela média das densidades associadas a seus respectivos nós, ou seja, atribui-se um valor de densidade constante no domínio do elemento, conforme Fig. (4.1). Com isso as propriedades constitutivas deste elemento dependerão do valor de densidade atribuído ao mesmo, ou seja,

$$\mathbf{C}_e^* = \rho_e^p \mathbf{C}_e. \quad (4.13)$$

onde  $\mathbf{C}_e$  é a matriz de elasticidade do  $e$ -ésimo elemento finito.

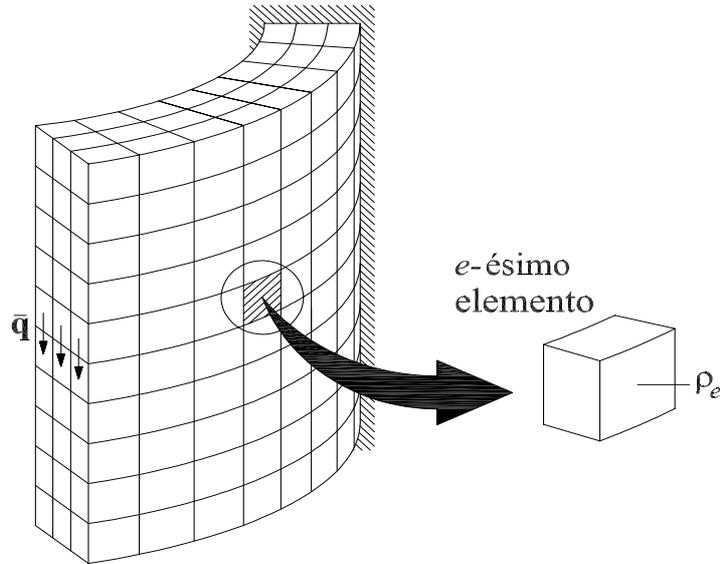


Figura 4.1: SIMP: Algoritmo baseado na introdução de material intermediário, associado a cada elemento finito da malha.

A determinação do multiplicador de Lagrange  $\alpha$  é realizada através de processo iterativo, baseado na restrição de volume imposta ao problema, ou seja, o mesmo é calculado de forma a satisfazer a condição

$$R^i = \sum_{e=1}^{N_{elem}} \rho_e^k \alpha^i V_e - \bar{V} = 0, \quad (4.14)$$

onde  $R^i$  representa o resíduo da restrição de volume da  $i$ -ésima iteração do processo. É importante lembrar que esta condição refere-se a  $k$ -ésima iteração do processo de otimização e que os valores de densidades somente são atualizados após a Eq. (4.14) ser atendida, iniciando-se então uma nova iteração do processo de otimização. O valor de  $\alpha$  que satisfaz a restrição de volume pode ser obtido, dentre outras técnicas, pelo método da bi-seção e/ou secante, conforme Fig. (4.2).

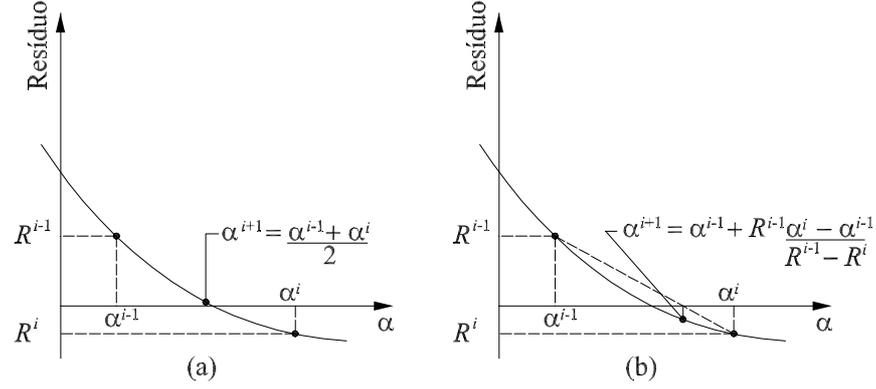


Figura 4.2: Determinação do multiplicador de Lagrange  $\alpha$  via (a) método da bi-seção e (b) método secante.

No algoritmo SIMP, ao se adotar o Método dos Elementos Finitos para resolução do sistema de equações de equilíbrio, é necessário impor um valor mínimo, diferente de zero, para os valores de densidades, com a finalidade de se prevenir que a matriz de rigidez global da estrutura torne-se singular. Por exemplo, pode-se adotar  $\rho_{\min} = 10^{-3}$ .

Alguns problemas numéricos podem ocorrer na resolução do problema de otimização topológica. O efeito do tabuleiro (*checkerboard*), que é caracterizado pela alternância entre 0 e 1 nos valores de densidade de elementos vizinhos fazendo com que a solução do problema de otimização se assemelhe a um tabuleiro de xadrez (ver Diaz & Sigmund [12]), foi aceito, em princípio, por alguns pesquisadores como a solução do problema, que anos depois foi comprovada ser falsa.

Para resolver o problema aconselha-se adotar elementos de ordem superior (por exemplo de segunda ordem), porém estes agregam adicional custo computacional. Uma alternativa seria a utilização de filtros (ver, por exemplo, Cardoso [7], Eschenauer & Olhoff [15], Sigmund & Peterson [43] e Bendsøe [4]), cujo processo está baseado na consideração dos valores de sensibilidade atribuídos aos elementos finitos vizinhos e do conceito de penalização.

Para prevenir ocorrência do efeito de tabuleiro é utilizado o filtro proposto por Sigmund [42]. Desta forma a sensibilidade associada ao  $j$ -ésimo caso de carregamento é calculada por

$$\frac{d\psi_j}{d\rho_e} = \frac{1}{\rho_e} \frac{1}{\sum_{f=1}^{N_r} H_e^f} \sum_{f=1}^{N_r} H_e^f \rho_f \frac{d\psi_j}{d\rho_f}, \quad (4.15)$$

onde  $N_r$  representa o número de elementos vizinhos ao  $e$ -ésimo elemento finito, que é de-

terminado tal que  $dist(e, f)$ , que corresponde à distância entre os centros geométricos dos  $e$ -ésimo e  $f$ -ésimo elementos finitos, seja menor ou igual a  $r_{\min}$ . O fator de ponderação da sensibilidade pela distância entre elementos  $H_e^f$  é calculado por

$$H_e^f = r_{\min} - dist(e, f). \quad (4.16)$$

O procedimento de solução do problema, via SIMP, que pode ser observado na Fig. (4.3), continua até que o critério de convergência seja atendido, adotando-se neste trabalho a norma Euclidiana da diferença do campo de densidades entre duas iterações do processo de otimização. Neste caso dois valores de tolerância foram verificados:  $10^{-2}$  e  $10^{-3}$ . A solução obtida para estes valores de tolerância é muito semelhante, inclusive no que diz respeito aos valores da função custo, obtidos ao final do processo de otimização, sendo adotada, então, uma tolerância de  $10^{-2}$  para o critério de convergência.

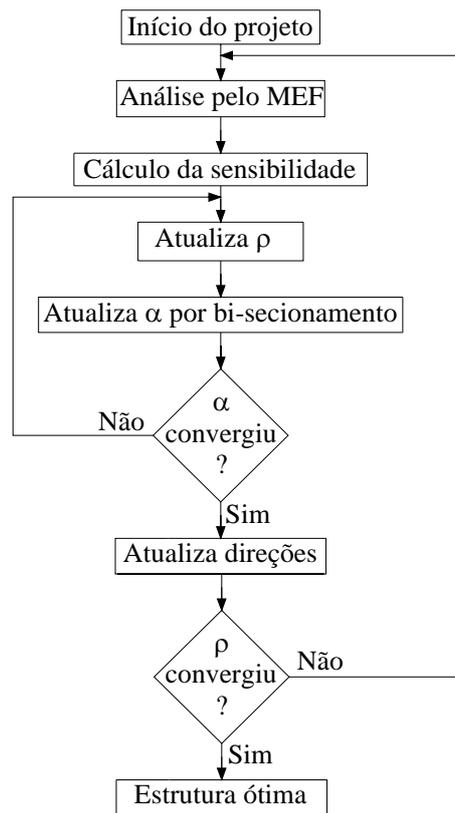


Figura 4.3: Fluxograma da solução do problema de otimização topológica via SIMP, pela condição de otimalidade.

## 4.2.2 Algoritmo baseado no ESO

Conforme visto anteriormente no capítulo 3 (seção 3.2), o algoritmo ESO baseia-se no cálculo da sensibilidade do sistema quando da retirada de um elemento finito da malha.

Desta forma, considerando-se a remoção do  $e$ -ésimo elemento da malha, tem-se um novo problema definido como

$$\mathbf{K}_h^* \bar{\mathbf{u}}_h^* = \mathbf{f}_h \quad (4.17)$$

onde  $\mathbf{K}_h^*$  é a matriz de rigidez da estrutura após a retirada do  $e$ -ésimo elemento e  $\bar{\mathbf{u}}_h^*$  é a solução deste novo problema.

Assim, a variação resultante na rigidez é dada por

$$\Delta \mathbf{K}_h = \mathbf{K}_h^* - \mathbf{K}_h = -\mathbf{K}_e, \quad (4.18)$$

onde  $\mathbf{K}_e$  corresponde à matriz de rigidez do  $e$ -ésimo elemento finito.

Tratando-se de um problema linear, a variação da função custo, neste caso a energia interna, é dada por

$$\Delta \psi = \frac{1}{2} \mathbf{f}_h \cdot \Delta \bar{\mathbf{u}}_h, \quad (4.19)$$

onde

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}_h = \bar{\mathbf{u}}_h^* - \bar{\mathbf{u}}_h. \quad (4.20)$$

Da Eq. (4.17), tem-se

$$(\mathbf{K}_h + \Delta \mathbf{K}_h) (\bar{\mathbf{u}}_h + \Delta \bar{\mathbf{u}}_h) = \mathbf{f}_h. \quad (4.21)$$

Considerando-se a Eq. (4.2) e desprezando-se os termos de ordem superior observa-se que

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}_h \approx -\mathbf{K}_h^{-1} \Delta \mathbf{K}_h \bar{\mathbf{u}}_h. \quad (4.22)$$

Logo, desde que  $\mathbf{K}_h = \mathbf{K}_h^T$ , tem-se que a sensibilidade da função custo, em sua forma

discreta, quando da retirada do  $e$ -ésimo elemento, é dada por

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= -\frac{1}{2} \mathbf{K}_h \bar{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{K}_h^{-1} \Delta \mathbf{K}_h \bar{\mathbf{u}}_h \\ &= -\frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}_h \cdot \Delta \mathbf{K}_h \bar{\mathbf{u}}_h \\ &= \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{K}_e \bar{\mathbf{u}}_h, \end{aligned} \quad (4.23)$$

que corresponde à energia interna do elemento, que equivale a

$$\Delta\psi_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_h \, d\Omega_e. \quad (4.24)$$

Para realizar este cálculo é preciso primeiramente determinar o campo de deslocamentos da estrutura para o caso de carregamento atuante. Nos casos em que a estrutura é submetida a vários casos de carregamento a função custo é dada por

$$\Delta\psi_e = \sum_{j=1}^{N_e} w_j (\Delta\psi_e)_j. \quad (4.25)$$

Após o cálculo da sensibilidade para todos os elementos finitos ativos, a remoção dos elementos finitos menos sensíveis é realizada de acordo com a taxa de retirada de elementos imposta ao problema. Este processo continua até que se atenda a restrição de volume imposta ao problema.

Existem diversas maneiras para criar furos numa malha de elementos finitos. Uma alternativa seria eliminar os elementos com menores valores de sensibilidade de acordo com a taxa de retirada de elementos. Entretanto isto conduz a um resultado indesejável, conforme ilustração na Fig. (4.4a).

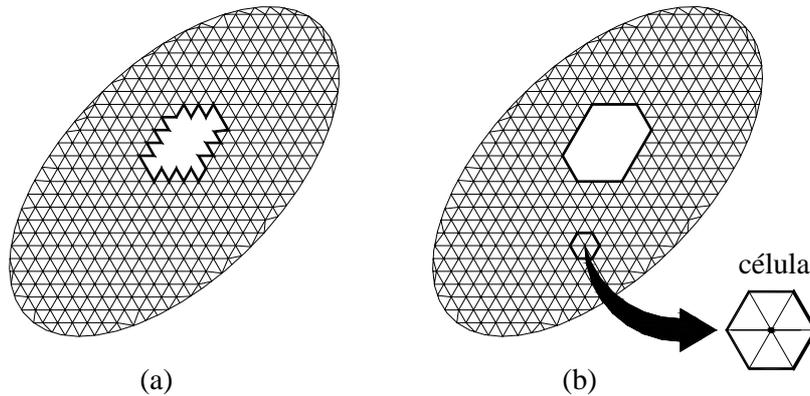


Figura 4.4: Procedimentos para criação de furos: (a) retirada dos elementos menos sensíveis e (b) retirada dos nós com menores valores de sensibilidade ponderada pelo número de contribuições.

Uma maneira de contornar este problema, sugerida por Novotny [32], é, após o cálculo da sensibilidade dos elementos, ponderar a sensibilidade para os nós pelo número de contribuições e posteriormente excluir os nós com os menores valores de sensibilidade. Retirados os nós menos sensíveis, os elementos que os possuem em sua conectividade são eliminados e o número de elementos ativos  $N_a$  atualizado, conforme Fig. (4.4b), conduzindo a resultados satisfatórios.

O processo de otimização prossegue até que a restrição de volume seja atendida, isto é, que a soma dos volumes dos elementos ativos seja igual ou menor que a restrição de volume imposta ao problema.

Na Fig. (4.5) pode-se observar o fluxograma da resolução do problema de minimização da energia interna com restrição sobre o volume, através de Algoritmos Evolucionários.

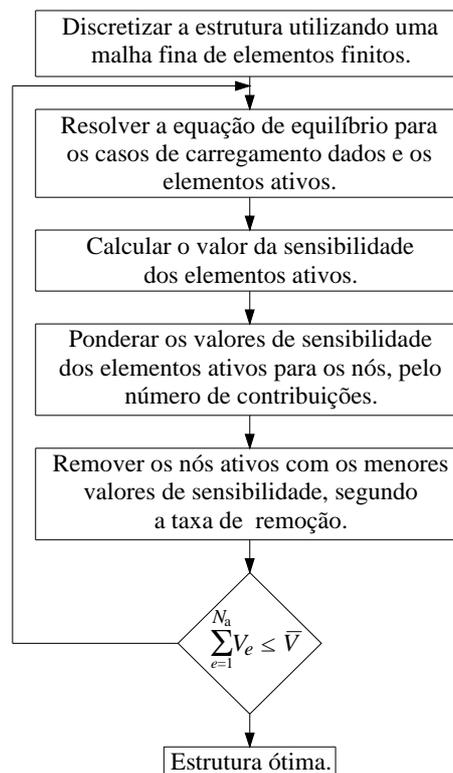


Figura 4.5: Fluxograma do processo de otimização utilizando o algoritmo ESO.

A cada iteração do processo de otimização, reduz-se a taxa de remoção de volume, que é calculada como sendo 1% do volume restante, dado pelo somatório dos volumes dos elementos finitos ativos. O mesmo tem a finalidade de, ao final do processo de otimização, obter-se o

volume mais próximo possível da restrição de volume, imposta ao problema.

Para evitar que a matriz de rigidez da estrutura torne-se singular, leva-se em consideração as matrizes de rigidez dos elementos inativos na montagem da matriz de rigidez global da estrutura, multiplicadas por  $10^{-12}$ .

Observa-se que, apesar dos procedimentos numéricos referentes à resolução do problema de otimização serem muito simples, o método possui um inconveniente. O critério de parada adotado (pela restrição de volume) não garante que se atinja o mínimo da função custo, pois não há embasamento matemático envolvido neste critério.

### 4.2.3 Algoritmo baseado na TSA

Conforme apresentado no capítulo 3 (seção 3.3), este método baseia-se no cálculo da sensibilidade do funcional quanto à inserção de um furo infinitesimal no domínio contínuo, que resulta em uma expressão exata. Entretanto este cálculo, por simplicidade, é feito de forma aproximada, através do Método dos Elementos Finitos.

Desta forma, a Derivada Topológica, para o caso de Estado Plano de Tensão, assume a forma aproximada

$$D_T \approx -\frac{1}{1+\nu} \left[ 2\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_h + \frac{3\nu-1}{2(1-\nu)} \text{tr}\boldsymbol{\sigma}_h \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}_h \right], \quad (4.26)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}_h$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}_h$  correspondem ao campo de tensão e deformação, respectivamente, avaliados nos pontos nodais da malha de elementos finitos.

Já para a Elasticidade Tridimensional, a Derivada Topológica aproximada é dada por

$$D_T \approx -\frac{1-\nu}{7-5\nu} \left[ 10\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_h + \frac{5\nu-1}{1-2\nu} \text{tr}\boldsymbol{\sigma}_h \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}_h \right]. \quad (4.27)$$

Considerando-se vários casos de carregamento, tem-se

$$D_T = \sum_{j=1}^{N_c} w_j (D_T)_j. \quad (4.28)$$

Assim o cálculo da Derivada Topológica é realizado através de um pós-processamento da solução de elementos finitos  $\mathbf{u}_h$ , calculado no domínio original  $\Omega$  (sem furo).

Por se tratar de um método recente (os primeiros trabalhos na área foram publicados em 1998) ainda não se encontrou uma maneira simples de se incorporar as informações fornecidas

pela Derivada Topológica às técnicas de programação matemática, sendo empregado neste trabalho um procedimento rudimentar para a geração dos furos no domínio, idêntico ao que é utilizado nos Algoritmos Evolucionários (ESO).

Assim sendo, o processo inicia-se com a determinação do campo de deslocamentos da estrutura, obtido pelo Método dos Elementos Finitos. Em seguida é determinada para cada elemento a sensibilidade do sistema quanto à introdução de um furo, que é ponderada para os nós pelos volumes dos elementos.

Após esta etapa, 1% dos nós ativos da iteração corrente com os menores valores de sensibilidade são retirados, e conseqüentemente os elementos que os contém. Na Fig. (4.6) pode-se observar o Fluxograma do processo de otimização através da Derivada Topológica.

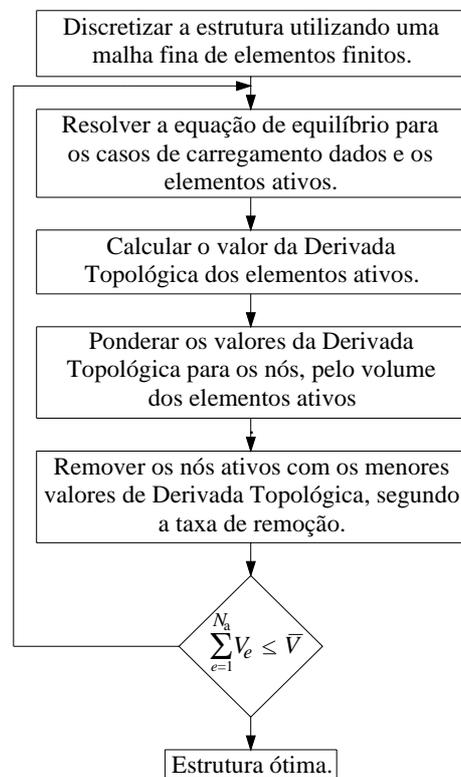


Figura 4.6: Fluxograma do processo de otimização através do algoritmo Derivada Topológica.

A exemplo do que é realizado no algoritmo baseado no método ESO, leva-se em consideração as matrizes de rigidez dos elementos inativos na montagem da matriz de rigidez global da estrutura, multiplicadas por  $10^{-12}$ .

### 4.3 Implementação numérica

A linguagem de programação adotada para implementação dos algoritmos é a Visual C++, cujo enfoque é a Programação Orientada a Objetos (OOP). A OOP baseia-se no desenvolvimento de estruturas em módulos, o que possibilita fácil introdução de novas estruturas e/ou modificação das já existentes.

Com isso, para a implementação dos algoritmos de otimização topológica mencionados, são utilizadas ao todo três estruturas como base: ACDPOOP (Guimarães & Feijóo [23]), ACDPFEM (Feijóo *et alli* [21]) e ARANHA (Fancello [18]). Estas estruturas foram desenvolvidas na Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC/SC) e no Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC), situado no Rio de Janeiro/Brasil.

A implementação numérica dos algoritmos de otimização topológica foi feita na estrutura ANALYSIS e a visualização dos resultados realizada no software SciVis, desenvolvido no LNCC pelo Laboratório de Visualização Científica e Realidade Virtual (maiores informações podem ser obtidas no site <http://virtual01.lncc.br>).

A seguir as estruturas citadas são brevemente descritas:

- **ACDPOOP & ACDPFEM:** O *Ambiente Computacional para Desenvolvimento de Programas Orientados a Objetos* (ACDPOOP) contém as funções relacionadas ao gerenciamento de memória. Já o *Ambiente Computacional para Desenvolvimento de Programa de Elementos Finitos* (ACDPFEM) dispõe das rotinas relacionadas aos elementos finitos e seus respectivos procedimentos;
- **ARANHA:** Este software está relacionado à geração automática de malhas. O ARANHA faz a geração de malhas em domínios bidimensionais planos, baseada em técnicas não estruturadas frontais;
- **ANALYSIS:** Nesta estrutura estão implementadas as funções relacionadas aos algoritmos de otimização topológica e a saída de dados, para posterior visualização no SciVis;
- **SciVis:** Esta estrutura tem por finalidade possibilitar a visualização de campos escalares, vetoriais e tensoriais. Com este software, desenvolvido utilizando Vtk 3.2 e

Visual C++, é possível a visualização de resultados por mapa de cores, iso-linhas e iso-superfícies, inclusive a variação destes campos ao longo do tempo. Este software está disponível na internet, no endereço <http://virtual01.lncc.br/software/scivis.html>.

## 4.4 Discussão sobre formulações e abordagens numéricas

Os métodos apresentados utilizam a análise de sensibilidade para impor modificações no domínio de forma a melhorar o desempenho da estrutura, que é avaliado através de uma função custo. No caso da técnica SIMP, o método é baseado no cálculo da sensibilidade quando se modifica localmente a densidade, ou seja,

$$\frac{\partial \psi_e}{\partial \rho_e} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \frac{d\sigma_h^*}{d\rho_e} \cdot \varepsilon_h d\Omega_e, \quad (4.29)$$

onde

$$\frac{d\sigma_h^*}{d\rho_e} = p\rho_e^{p-1} \sigma_h. \quad (4.30)$$

Observa-se que esta sensibilidade é calculada no domínio do elemento finito.

Já no algoritmo ESO, o cálculo da sensibilidade do sistema ao retirar-se um elemento finito do espaço de aproximação é utilizado para impor modificações no domínio, que neste caso resulta em

$$\Delta \psi_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \sigma_h \cdot \varepsilon_h d\Omega_e. \quad (4.31)$$

Pode-se constatar que, assim como o método SIMP, a sensibilidade é calculada no domínio do elemento finito.

Finalmente o algoritmo TSA impõe modificações no domínio através do cálculo da sensibilidade do sistema quando se introduz um furo infinitesimal no domínio, ou seja,

$$D_T \approx -\frac{1}{1+\nu} \left[ 2\sigma_h \cdot \varepsilon_h + \frac{3\nu-1}{2(1-\nu)} \text{tr}\sigma_h \text{tr}\varepsilon_h \right], \quad (4.32)$$

para Estado Plano de Tensão, e

$$D_T \approx -\frac{1-\nu}{7-5\nu} \left[ 10\sigma_h \cdot \varepsilon_h + \frac{5\nu-1}{1-2\nu} \text{tr}\sigma_h \text{tr}\varepsilon_h \right] \quad (4.33)$$

para Elasticidade 3D. Neste caso a sensibilidade é calculada para cada nó da malha de elementos finitos, e não no domínio do elemento finito, como é realizado nos métodos SIMP e ESO.

Observa-se que os métodos apresentados, para o caso do problema de minimização da energia interna resultam em expressões de sensibilidade bastante semelhantes, apesar de suas origens conceituais diferentes. No caso do SIMP, a sensibilidade é calculada integrando-se  $\frac{d\sigma_h^*}{d\rho_e} \cdot \varepsilon_h$  no domínio do elemento. Já no caso de Algoritmos Evolucionários, a sensibilidade é obtida através da integração de  $\sigma_h \cdot \varepsilon_h$  no domínio do elemento. Já para a Derivada Topológica, a sensibilidade do sistema quando se introduz um furo na malha de elementos finitos é obtida diretamente de  $\sigma_h \cdot \varepsilon_h$  mais uma parcela referente a  $\text{tr}(\sigma_h) \text{tr}(\varepsilon_h)$ , calculada em cada nó da malha de elementos finitos.

Quanto ao procedimento numérico adotado nos três algoritmos, em todos eles são adotados procedimentos com a finalidade de se prevenir que a matriz de rigidez global da estrutura torne-se singular. Por exemplo, no SIMP adota-se  $\rho_{\min} = 10^{-3}$ . Já nos métodos ESO e TSA multiplica-se a matriz de rigidez dos elementos inativos por  $10^{-12}$ .

A resolução do problema de otimização via ESO e TSA não garante que se atinja o mínimo da função custo, uma vez que o critério de parada adotado não possui embasamento matemático.

## 4.5 Comentários adicionais

Neste capítulo foi apresentada uma forma de se evitar o aparecimento de contornos "dentes de serra", feita através da ponderação nos nós, dos valores de sensibilidade obtida nos algoritmos baseados no ESO e na TSA.

No próximo capítulo, resultados de exemplos em Estado Plano de Tensão e Elasticidade Tridimensional são apresentados para os algoritmos citados.

# Capítulo 5

## Resultados numéricos

Neste capítulo os resultados numéricos para o Estado Plano de Tensão e a Elasticidade Tridimensional são apresentados. Para os exemplos de Estado Plano de Tensão adotou-se o elemento linear triangular de 3 nós, enquanto que para Elasticidade Tridimensional empregou-se o elemento tetraédrico linear de 4 nós.

Inicialmente, com a finalidade de se identificar a influência de alguns parâmetros importantes associados aos algoritmos implementados, são realizadas algumas análises em problemas de Estado Plano de Tensão. Isto é realizado através da modificação destes parâmetros em cada análise.

Nos exemplos seguintes, em Estado Plano de Tensão e Elasticidade Tridimensional, estes parâmetros são fixos e são verificados os valores da função custo (energia interna) em cada algoritmo, ao final do processo de otimização.

### 5.1 Estado Plano de Tensão

#### 5.1.1 Barra sob tração uniaxial

Este exemplo tem por objetivo testar resultados num problema com solução conhecida.

Neste exemplo é considerada a simetria do problema, sendo analisada somente a parte direita da estrutura, conforme Fig. (5.1a), ficando a malha de elementos finitos caracterizada por 17.320 nós e 34.140 elementos finitos, conforme mostra a Fig. (5.1b). Os parâmetros materiais e geométricos, assim como os carregamentos aplicados, utilizados neste exemplo são: módulo de elasticidade  $E = 2,1 \times 10^{11} \text{N/m}^2$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,25$ , comprimento  $L = 20 \text{mm}$ , espessura  $t = 1 \text{mm}$  e carga  $\bar{q} = 250 \text{N/mm}$ . A restrição de volume

adotada foi  $\bar{V} = V/3$ , onde  $V$  representa o volume inicial da estrutura.

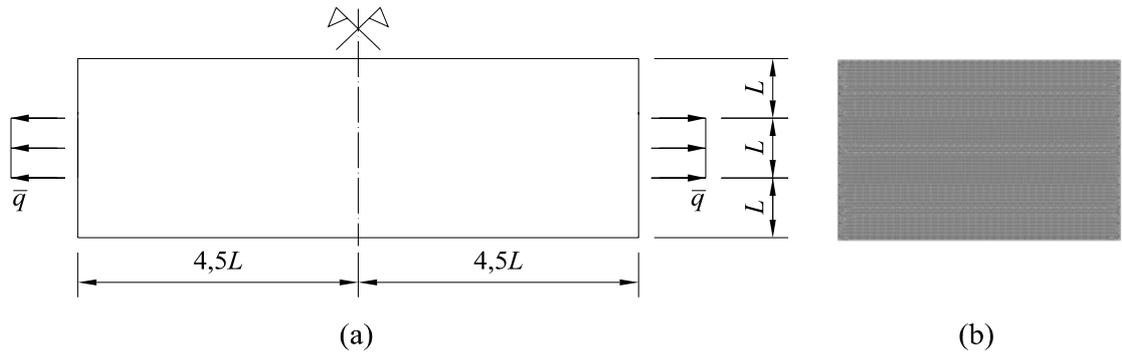


Figura 5.1: Barra sob tração uniaxial: (a) modelo e (b) malha utilizados.

O algoritmo SIMP convergiu em 104 iterações para  $p = 2$  e em 172 iterações para  $p = 3$ . Os algoritmos ESO e TSA convergiram em 109 iterações. Os resultados numéricos podem ser observados na Fig. (5.2).

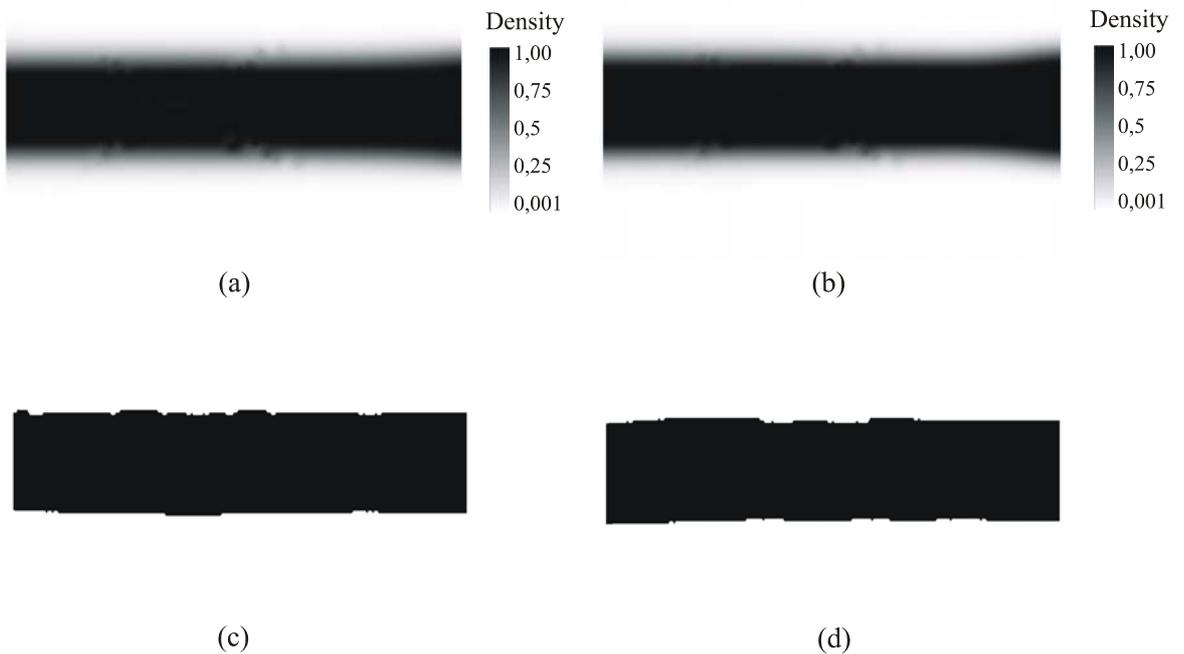


Figura 5.2: Resultados numéricos dos algoritmos SIMP, para (a)  $p = 2$  e (b)  $p = 3$ , e dos algoritmos (c) ESO e (d) TSA.

### 5.1.2 Viga bi-apoiada com carga transversal central na face superior

Este exemplo visa analisar a influência do coeficiente de Poisson  $\nu$ .

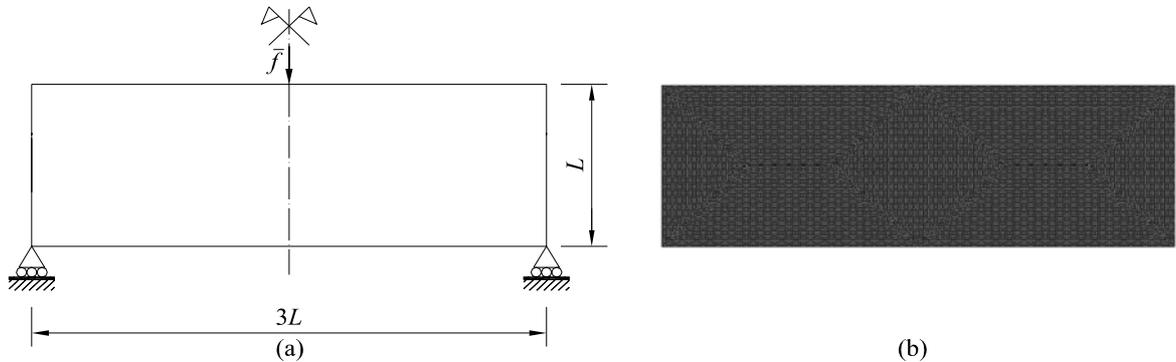


Figura 5.3: Viga bi-apoiada com carga transversal central na face superior: (a) modelo e (b) malha utilizados.

A estrutura foi modelada conforme mostra a Fig. (5.3a). Ao todo o modelo numérico possui 17.557 nós e 34.612 elementos finitos, conforme Fig. (5.3b).

Os parâmetros materiais e geométricos, assim como os carregamentos aplicados, utilizados neste exemplo são: módulo de elasticidade  $E = 2,1 \times 10^{11} \text{N/m}^2$ , comprimento  $L = 50 \text{mm}$ , carga  $\bar{f} = 5000 \text{N}$ , espessura  $t = 1 \text{mm}$  e restrição de volume  $\bar{V} = 0,2V$ . Os valores de coeficiente de Poisson utilizados foram:  $\nu = 1/4$ ,  $\nu = 1/3$  e  $\nu = 2/5$ . Vale ressaltar que, para o coeficiente de Poisson  $\nu = 1/3$ , a solução obtida com os algoritmos baseados no ESO e TSA devem ser as mesmas, pois a sensibilidade associada aos métodos mencionados são idênticas.

Para  $\nu = 1/4$ , os algoritmos baseados no métodos SIMP, ESO e TSA convergiram em 982, 202 e 203 iterações, respectivamente. Já no caso de  $\nu = 1/3$  o SIMP convergiu após 1093 iterações e ESO e TSA após 203 iterações. Finalmente, para  $\nu = 2/5$ , os algoritmos baseados no métodos SIMP, ESO e TSA convergiram em 1054, 202 e 208 iterações, respectivamente. O tempo de processamento em cada iteração é praticamente o mesmo para os algoritmos implementados. Os resultados podem ser observados nas Figs. (5.4), (5.5) e (5.6).

Observa-se que os algoritmos baseados nos métodos TSA e ESO são mais sensíveis ao coeficiente de Poisson  $\nu$ , em relação ao SIMP. Nota-se também diferenças significativas de

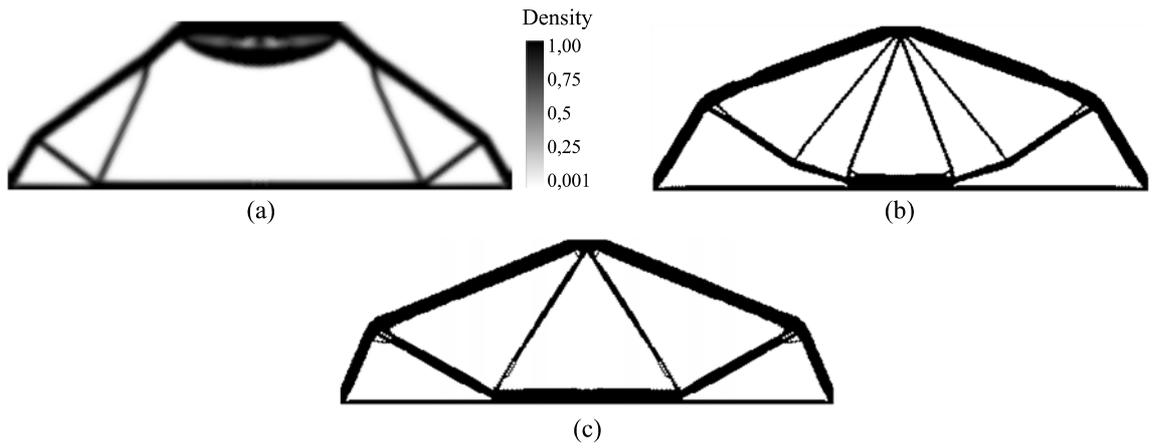


Figura 5.4: Resultados numéricos, para  $\nu = 1/4$ , dos algoritmos (a) SIMP, (b) ESO e (c) TSA.

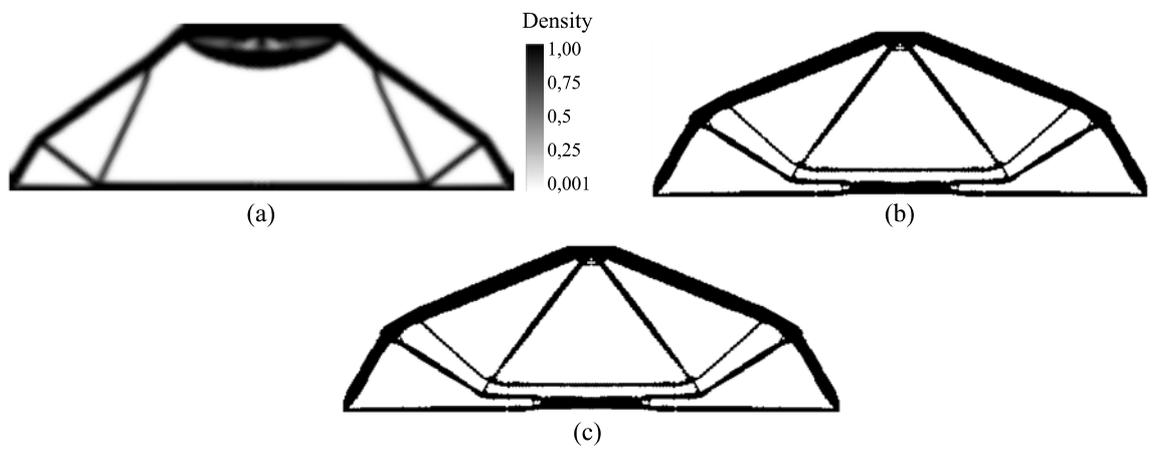


Figura 5.5: Resultados numéricos, para  $\nu = 1/3$ , dos algoritmos (a) SIMP, (b) ESO e (c) TSA.

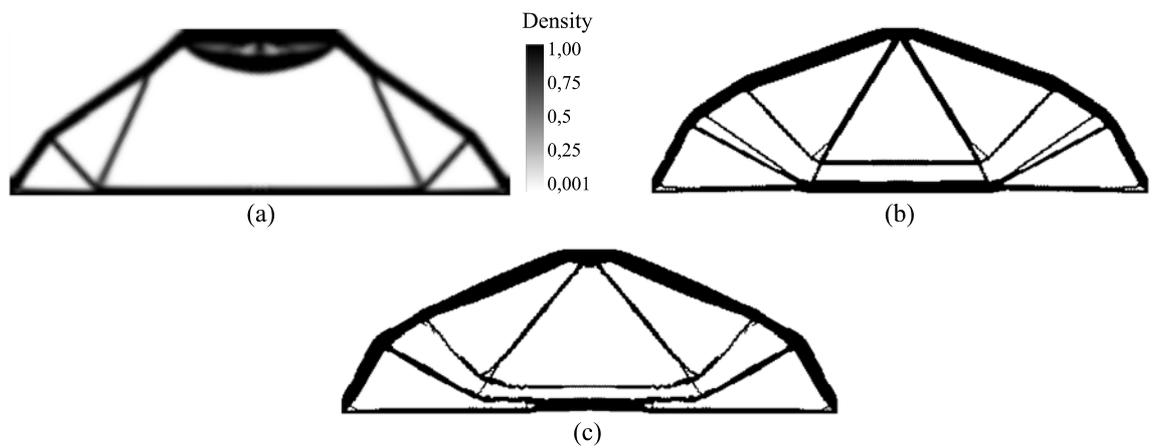


Figura 5.6: Resultados numéricos, para  $\nu = 2/5$ , dos algoritmos (a) SIMP, (b) ESO e (c) TSA.

topologia entre a solução obtida pelo algoritmo baseado no método SIMP e as obtidas pelos algoritmos baseados nos métodos ESO e TSA.

### 5.1.3 Mão-francesa

Neste exemplo pretende-se realizar um estudo da influência da restrição de volume imposta aos algoritmos de otimização topológica em estudo. Para tal, propõe-se analisar os resultados encontrados para os seguintes valores de restrição de volume:  $\bar{V} = 0,15V$ ,  $\bar{V} = 0,25V$  e  $\bar{V} = 0,35V$ . Na Fig. (5.7a) pode-se visualizar o modelo utilizado.

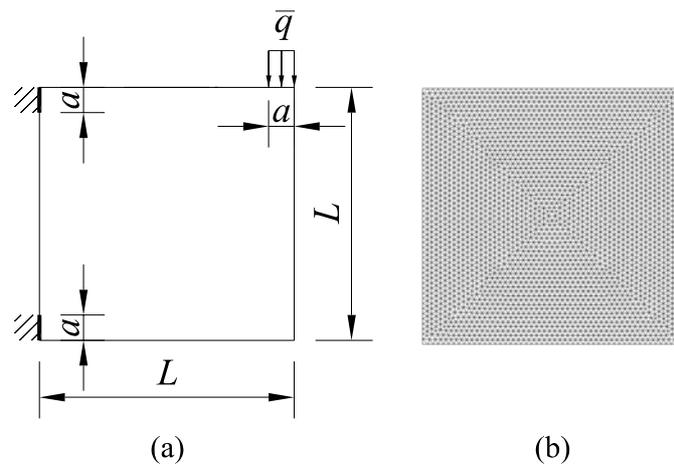


Figura 5.7: Mão-francesa: (a) modelo e (b) malha utilizados.

A malha de elementos finitos possui um total de 11.708 nós e 23.014 elementos finitos, conforme mostra a Fig. (5.7b). Os parâmetros materiais utilizados neste exemplo foram:  $E = 2,1 \times 10^{11} \text{N/m}^2$  e  $\nu = 0,25$ . A espessura adotada foi  $t = 0,01 \text{m}$  e o valor da carga  $\bar{q} = 10^4 \text{N/m}$ . Além do mais  $L = 10a = 0,50 \text{m}$ .

No primeiro caso ( $\bar{V} = 0,15V$ ) o algoritmo SIMP convergiu após 454 iterações enquanto que ESO e TSA em 175 iterações. Já no segundo caso ( $\bar{V} = 0,25V$ ) o algoritmo SIMP convergiu em 521 iterações enquanto que os algoritmos ESO e TSA convergiram ambos em 128 iterações. Finalmente no último caso ( $\bar{V} = 0,35V$ ) os algoritmos SIMP, ESO e TSA convergiram em 373 iterações, 98 iterações e 97 iterações, respectivamente. Os resultados numéricos podem ser observados nas Figs. (5.8), (5.9) e (5.10).

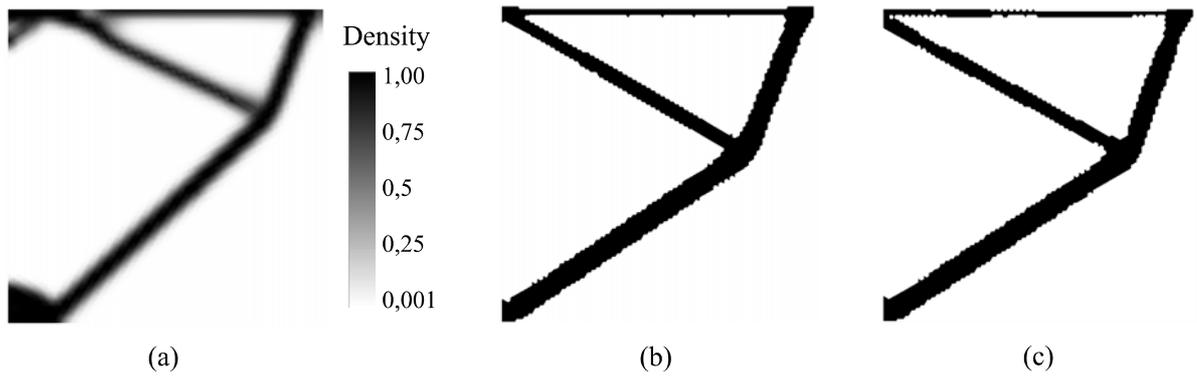


Figura 5.8: Resultados numéricos, para  $\bar{V} = 0,15V$ , dos algoritmos (a) SIMP, (b) ESO e (c) TSA.

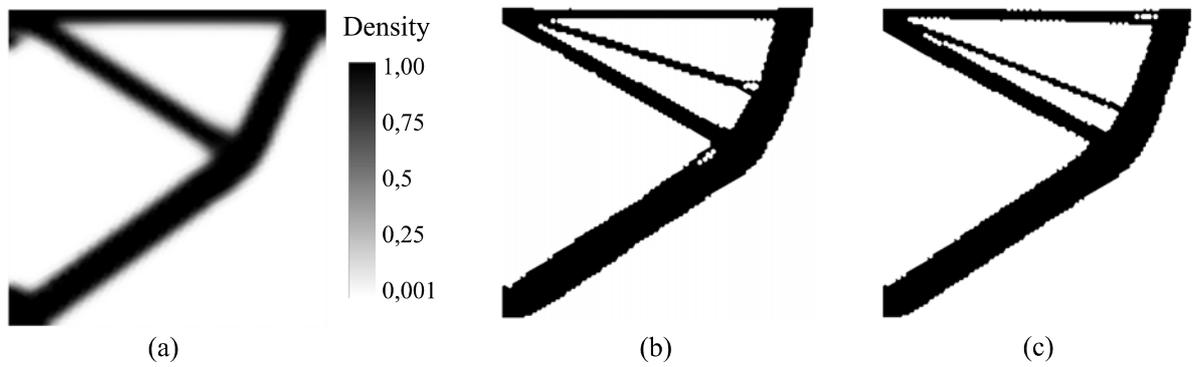


Figura 5.9: Resultados numéricos, para  $\bar{V} = 0,25V$ , dos algoritmos (a) SIMP, (b) ESO e (c) TSA.

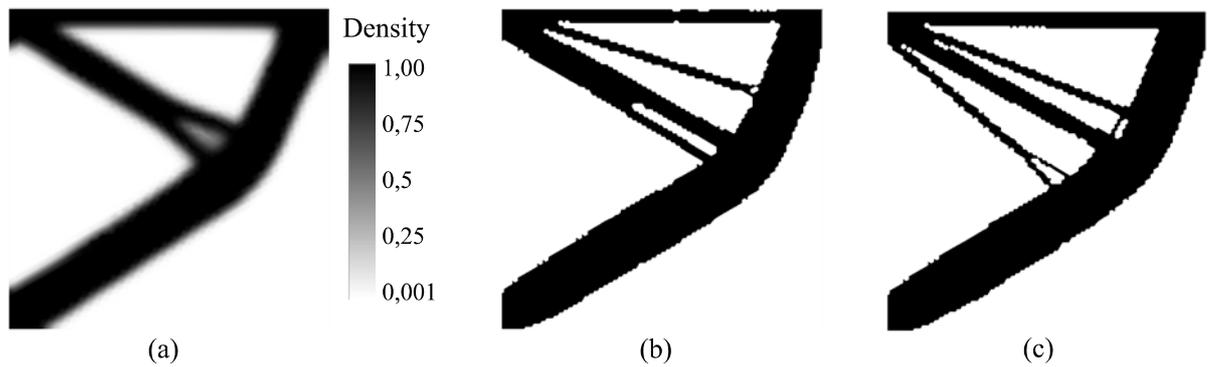


Figura 5.10: Resultados numéricos, para  $\bar{V} = 0,35V$ , dos algoritmos (a) SIMP, (b) ESO e (c) TSA.

Como eram esperadas, diferenças entre as soluções obtidas, para diferentes valores de restrição de volume, são evidentes. Porém, não mudam, para este exemplo, a topologia,

apenas a largura das barras. No caso dos algoritmos baseados nos métodos TSA e ESO, há um aumento na complexidade da topologia que não ocorre no SIMP, provavelmente em função do sistema de filtro adotado para evitar *checkerboard*, que torna o algoritmo mais estável. Observa-se que todos os modelos mantêm aproximadamente a mesma inclinação das barras, isto é, convergem para mínimos locais similares.

#### 5.1.4 Viga bi-apoiada com carga transversal central na face inferior

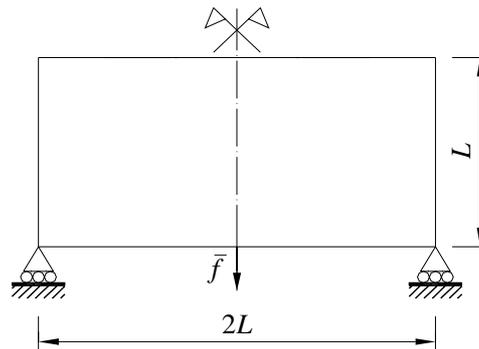


Figura 5.11: Viga bi-apoiada com carga transversal central na face inferior: modelo utilizado.

Neste exemplo a influência do refinamento da malha nos algoritmos implementados é verificada, sendo avaliados os resultados numéricos do problema de otimização topológica para os seguintes tamanhos de malha:  $h = L/50$ ,  $h = L/100$  e  $h = L/200$ , sob uma restrição de volume de  $\bar{V} = 0,3V$ .

Foram adotados neste exemplo como parâmetros do material  $E = 2,1 \times 10^{11} \text{N/m}^2$  e  $\nu = 0,25$ . O valor da carga adotado foi  $\bar{f} = 1000 \text{N}$  e a espessura considerada foi  $t = 0,01 \text{m}$ . O comprimento escolhido foi  $L = 0,50 \text{m}$ , conforme Fig. (5.11). Neste exemplo tirou-se proveito da simetria do problema sendo modelada desta forma apenas a parte esquerda da estrutura. Já para visualização dos resultados a estrutura foi rebatida.

Para o primeiro caso em estudo ( $h = L/50$ ) o algoritmo SIMP totalizou 237 iterações, ESO 194 iterações e TSA 203 iterações. Já para o segundo caso ( $h = L/100$ ) os algoritmos SIMP, ESO e TSA convergiram em 474, 199 e 198 iterações, respectivamente. No último caso ( $h = L/200$ ) o algoritmo SIMP totalizou 1209 iterações, o algoritmo ESO 211 iterações

enquanto que o algoritmo TSA convergiu em 209 iterações. Podem-se observar os resultados numéricos dos algoritmos mencionados nas Figs. (5.12), (5.13) e (5.14).

Pode-se constatar que o algoritmo SIMP, à medida que a malha torna-se mais refinada, converge em um número cada vez maior de iterações. Provavelmente isto se deve ao aumento do número de variáveis de projeto no algoritmo e ao critério de convergência adotado. Devido ao sistema de filtro, para evitar *checkerboard*, e a própria abordagem de resolução por critério de otimalidade, parece ser menos sensível ao refino da malha, por apresentar topologias similares. Já no caso dos algoritmos baseados nos métodos ESO e TSA, à medida que a malha torna-se mais refinada, retira-se menores quantidades de material da estrutura, o que permite a obtenção de estruturas mais complexas.

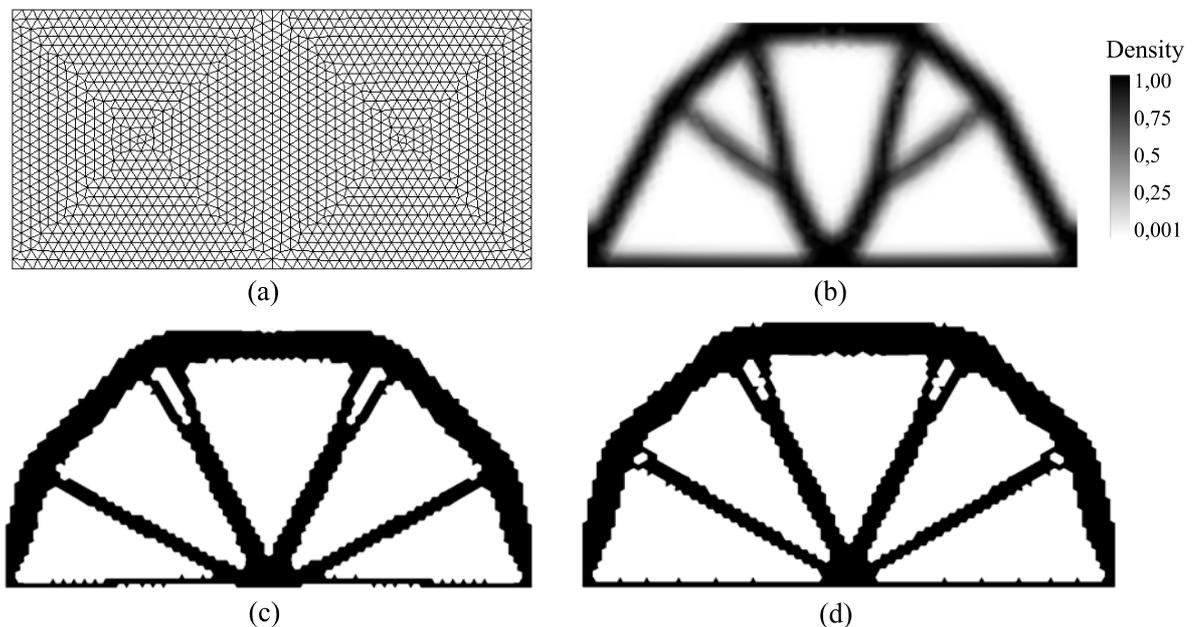


Figura 5.12: (a) Malha, com 2.968 nós e 5.734 elementos finitos na parte simétrica, e resultados encontrados para  $h = L/50$  nos algoritmos (b) SIMP, (c) ESO e (d) TSA.

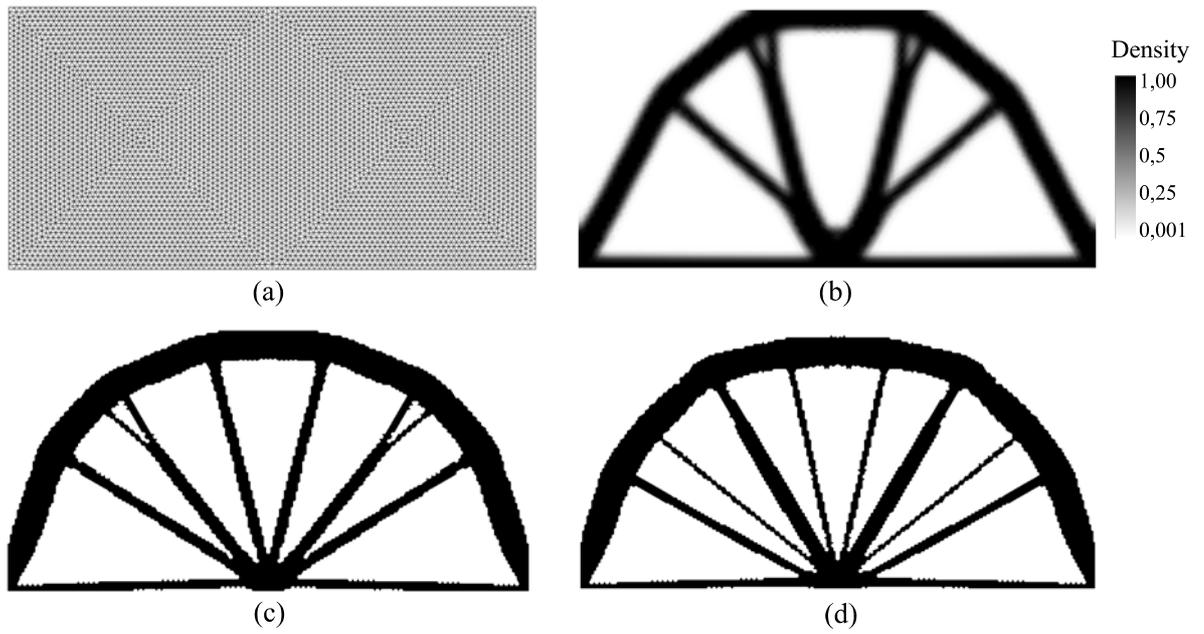


Figura 5.13: (a) Malha, com 11.708 nós e 23.014 elementos finitos na parte simétrica, e resultados encontrados para  $h = L/100$  nos algoritmos (b) SIMP, (c) ESO e (d) TSA.

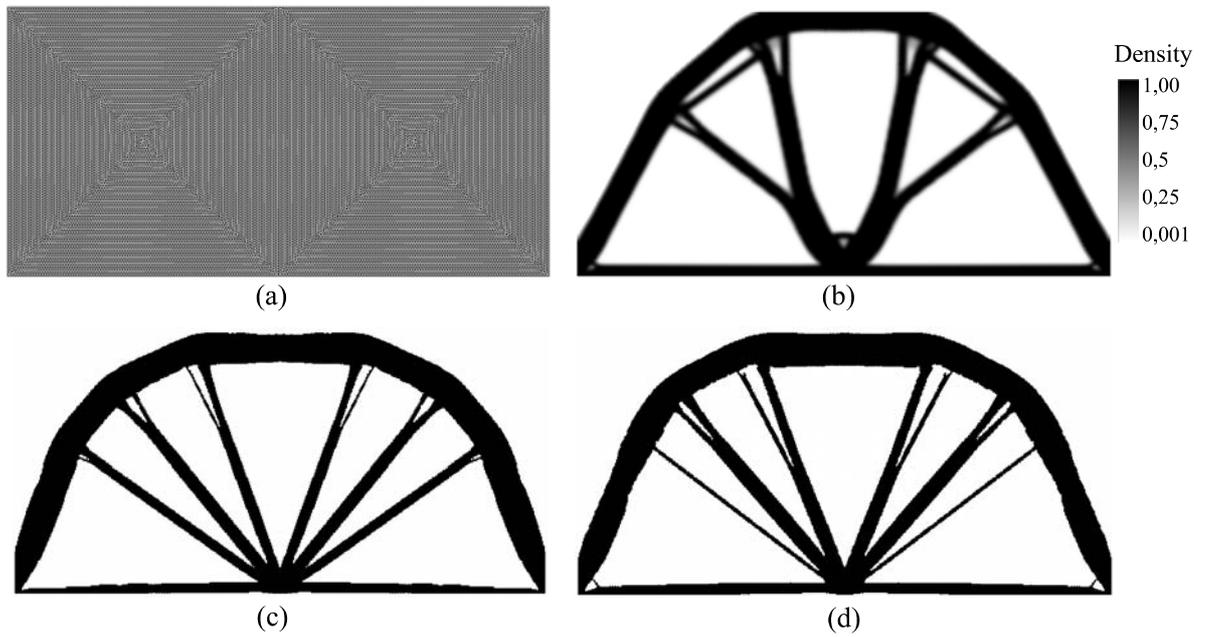


Figura 5.14: (a) Malha, com 46.514 nós e 92.226 elementos finitos na parte simétrica, e resultados encontrados para  $h = L/200$  nos algoritmos (b) SIMP, (c) ESO e (d) TSA.

### 5.1.5 Ponte com tabuleiro inferior

Neste exemplo é analisado o valor da função custo, neste caso a energia de deformação, ao final do processo de otimização.

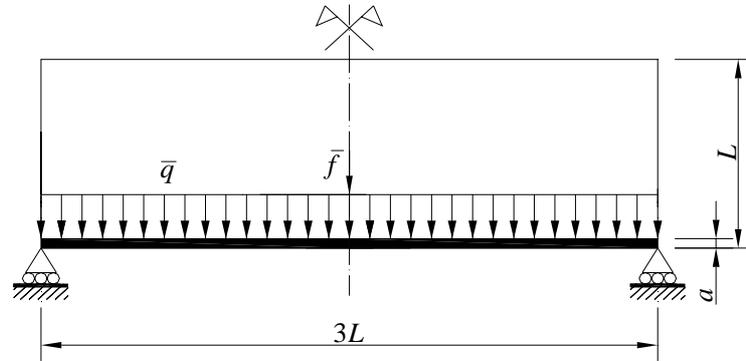


Figura 5.15: Ponte com tabuleiro inferior: modelo utilizado.

Os parâmetros materiais adotados foram:  $E = 2,1 \times 10^{11} \text{N/m}^2$  e  $\nu = 0,25$ . Os outros parâmetros considerados neste exemplo são:  $L = 20a = 60\text{m}$ ,  $\bar{V} = 0,3V$  e  $t = 0,3\text{m}$ . São considerados neste exemplo 2 casos de carregamento ao todo, o primeiro diz respeito a carga distribuída ao longo do tabuleiro  $\bar{q} = 2,5 \times 10^5 \text{N/m}$  e o segundo está relacionado à carga pontual aplicada no centro da ponte  $\bar{f} = 10^6 \text{N}$ , conforme Fig. (5.15). Neste exemplo atribuiu-se peso  $w = 1/2$  para cada caso de carregamento (ver Eqs. (4.10), (4.25) e (4.28)).

Como o problema é simétrico, foi construído um modelo numérico da parte esquerda da estrutura. A malha utilizada contém 17.579 nós e 34.656 elementos finitos na parte simétrica conforme Fig. (5.16a), e os algoritmos SIMP, ESO e TSA convergiram em 1668, 207 e 207 iterações, respectivamente, cujos resultados podem ser vistos na Fig. (5.16).

Quanto aos valores da energia interna encontrados no final do processo de otimização, estes foram:  $1,84 \times 10^{10} \text{Nm}$  para o SIMP,  $6,83 \times 10^{10} \text{Nm}$  para o ESO e  $14,50 \times 10^{10} \text{Nm}$  para TSA. Pode-se observar que o valor da função custo obtido pelo algoritmo baseado no método SIMP é menor que os valores apresentados por ESO e TSA. Isso se deve ao critério de parada adotado nos algoritmos ESO e TSA, que não possui embasamento matemático.

Percebe-se, novamente, a tendência do aparecimento de linhas de transmissão de esforços bem finas nos algoritmos baseados nos métodos ESO e TSA, quando da existência de malhas

finas, se comparadas ao caso do SIMP. No caso específico deste problema, estes elementos estruturais poderiam ser interpretados como cabos, em função de seu estado de tração axial.

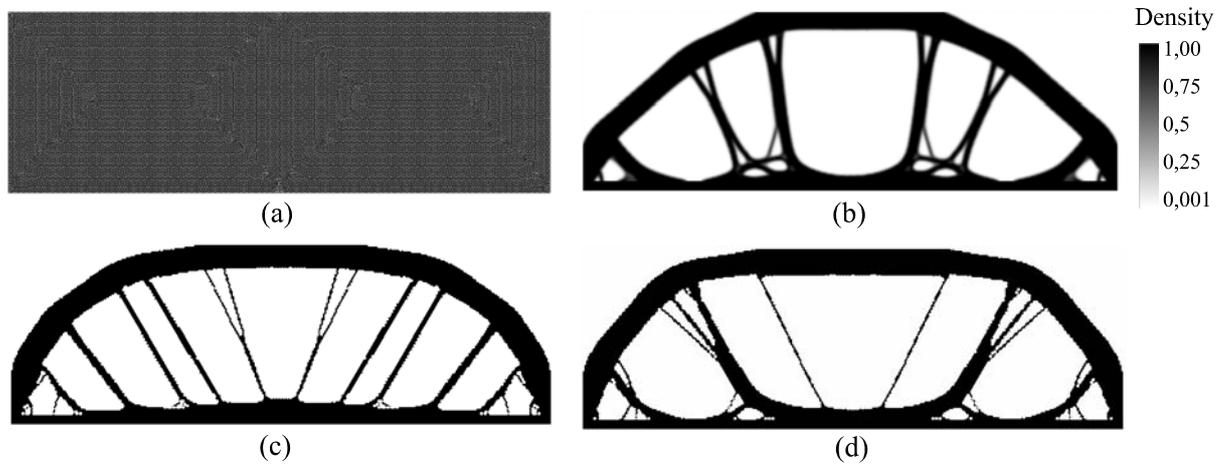


Figura 5.16: Ponte com tabuleiro inferior: (a) modelo numérico utilizado e resultados numéricos dos algoritmos (b) SIMP, (c) ESO e (d) TSA.

### 5.1.6 Ponte com tabuleiro central

A exemplo do que foi feito anteriormente, o valor da função custo é analisado através de solução do problema de otimização obtida nos algoritmos baseados nos métodos SIMP, ESO e TSA.

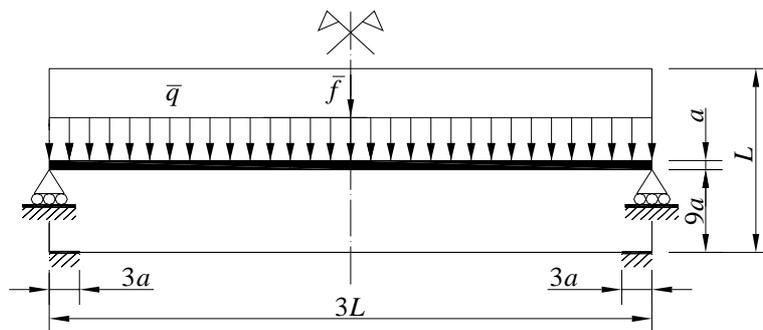


Figura 5.17: Ponte com tabuleiro central: modelo utilizado.

Os parâmetros materiais e geométricos considerados neste exemplo foram os seguintes:  $E = 2,1 \times 10^{11} \text{N/m}^2$ ,  $\nu = 0,25$  e  $t = 0,3 \text{m}$ . Os outros parâmetros adotados neste exemplo são:  $L = 20a = 60 \text{m}$  e  $\bar{V} = 0,25V$ . Assim como no exemplo anterior (ponte com tabuleiro inferior) são considerados ao todo 2 casos de carregamento:  $\bar{q} = 2,5 \times 10^5 \text{N/m}$  e  $\bar{f} = 10^6 \text{N}$ ,

conforme Fig. (5.17). Para cada caso de carregamento adotou-se peso  $w = 1/2$  (ver Eqs. (4.10), (4.25) e (4.28)).

Por se tratar de um problema simétrico foi feita apenas a análise da parte esquerda do modelo, sendo utilizados um total de 17.591 nós e 34.680 elementos finitos, conforme mostra a Fig. (5.18a). Para a visualização dos resultados, que podem ser observados na Fig. (5.18), a estrutura foi rebatida. Os algoritmos SIMP, ESO e TSA convergiram em 1315, 211 e 216 iterações, respectivamente.

Os valores da energia interna encontrados foram:  $9,18 \times 10^9 \text{Nm}$  para o SIMP,  $21,40 \times 10^9 \text{Nm}$  para o ESO e  $25,00 \times 10^9 \text{Nm}$  para TSA. Constatou-se, novamente, que o valor da função custo obtido ao final do processo de otimização no algoritmo baseado no método SIMP é menor do que os apresentados pelos algoritmos baseados nos métodos ESO e TSA.

Neste exemplo, repete-se novamente a relativa complexidade topológica da solução obtida por ESO e TSA, bastante similares entre si. Neste caso torna-se evidente a necessidade de se adicionar outros critérios para tornar estes projetos realistas. Para torná-lo viável na prática, deve-se incorporar restrições sobre os valores de tensões admissíveis e, no caso de hastes em compressão, considerar falhas por flambagem (alta esbeltez). No entanto, ressaltamos que estes resultados buscam observar comparações entre os métodos, e não em se resolver um problema específico.

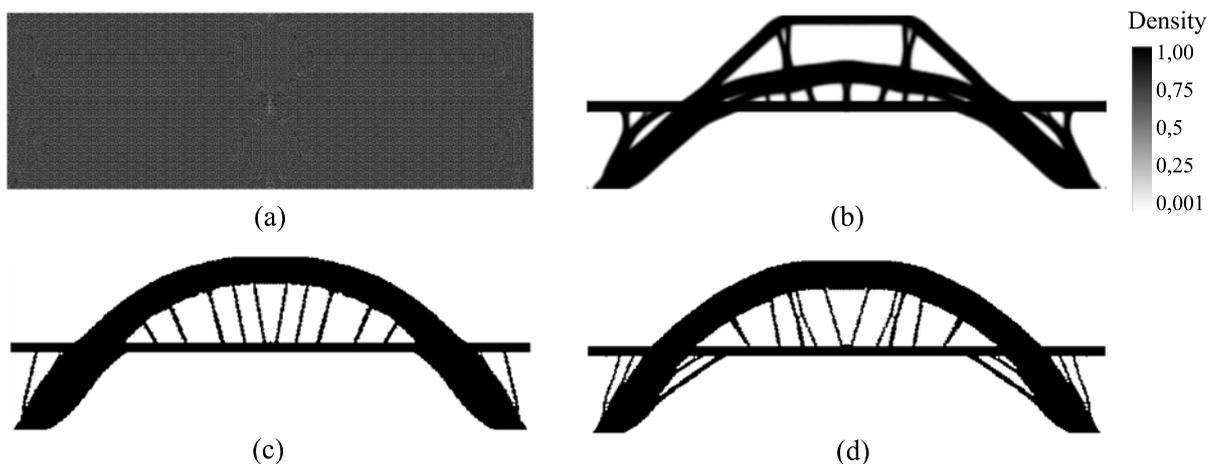


Figura 5.18: Ponte com tabuleiro central: (a) modelo numérico utilizado e resultados numéricos dos algoritmos (b) SIMP, (c) ESO e (d) TSA.

### 5.1.7 Ponte com tabuleiro superior

Pretende-se neste exemplo avaliar os valores da energia interna encontrados nos algoritmos implementados.

Por se tratar de um problema simétrico levou-se apenas em consideração a parte esquerda do modelo na análise numérica.

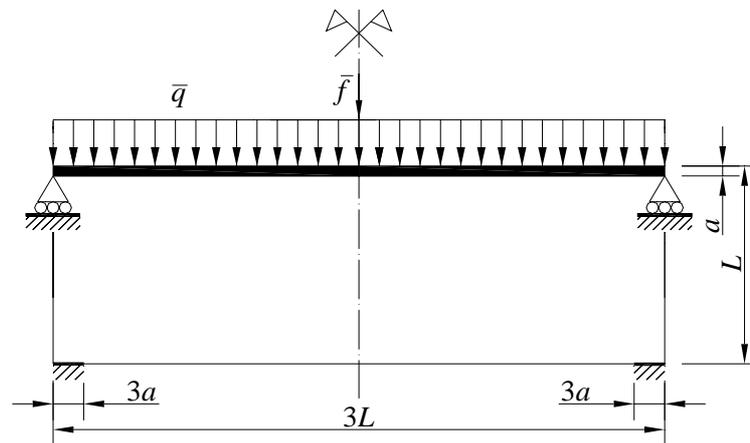


Figura 5.19: Ponte com tabuleiro superior: modelo utilizado.

Foram consideradas as seguintes propriedades do material:  $E = 2,1 \times 10^{11} \text{N/m}^2$  e  $\nu = 0,25$ . Os outros parâmetros adotados neste exemplo são:  $L = 20a = 60\text{m}$  e  $t = 0,3\text{m}$ . São considerados ao todo 2 casos de carregamento:  $\bar{q} = 2,5 \times 10^5 \text{N/m}$  e  $\bar{f} = 10^6 \text{N}$ , de peso  $w = 1/2$  cada (ver Eqs. (4.10), (4.25) e (4.28)), conforme Fig. (5.19) e uma restrição de volume  $\bar{V} = 0,2V$ .

A malha de elementos finitos possui 17.579 nós e 34.656 elementos finitos, conforme Fig. (5.20a), e os algoritmos SIMP, ESO e TSA convergiram após 1640, 214 e 203 iterações, respectivamente.

Ao final do processo de otimização encontrou-se como valores da energia interna:  $1,00 \times 10^{10}$  no SIMP,  $2,75 \times 10^{10}$  no ESO e  $2,71 \times 10^{10}$  na TSA, apresentando SIMP menor valor de função custo ao final do processo de otimização topológica.

Assim como no exemplo anterior, para tornar estes projetos viáveis, deve-se incorporar ao processo de otimização restrição quanto às tensões admissíveis e levar em consideração a flambagem dos elementos sob compressão.

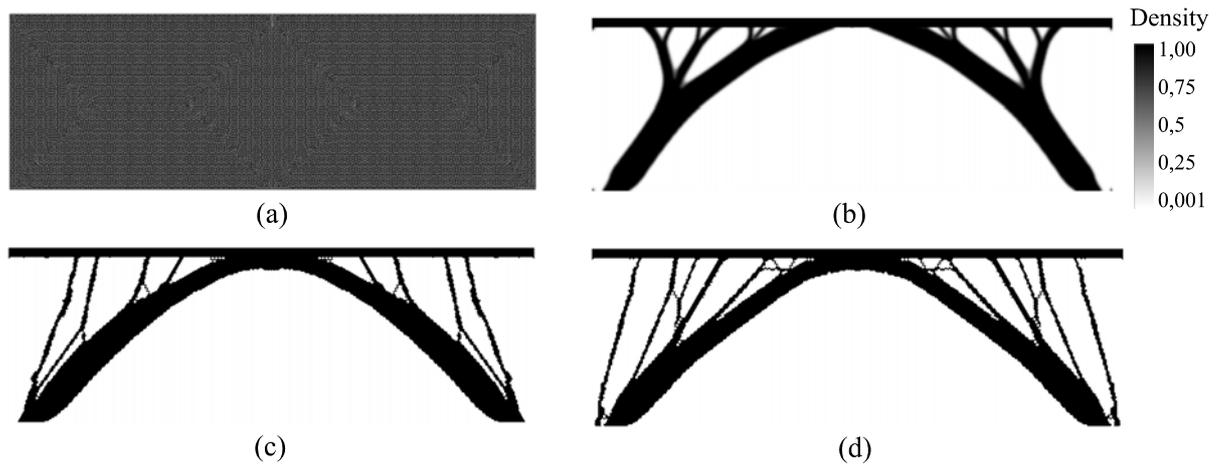


Figura 5.20: Ponte com tabuleiro superior: (a) modelo numérico utilizado e resultados numéricos dos algoritmos (b) SIMP, (c) ESO e (d) TSA.

## 5.2 Elasticidade Tridimensional

A seguir apresentam-se os resultados numéricos em Elasticidade Tridimensional dos algoritmos implementados para um cubo sollicitado por uma carga pontual, conforme mostra a Fig. (5.21).

Neste exemplo pretende-se analisar os resultados encontrados nos algoritmos baseados nos métodos SIMP, ESO e TSA. Em virtude da simetria do problema, será feita modelagem numérica de apenas um quarto da estrutura.

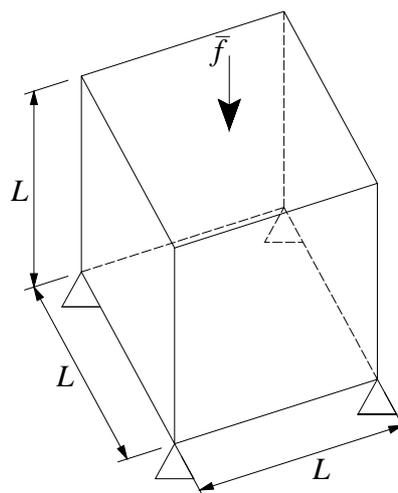


Figura 5.21: Cubo sujeito à carga concentrada: modelo utilizado.

Os parâmetros do material utilizados foram: módulo de elasticidade  $E = 2,1 \times 10^{11} \text{N/m}^2$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,25$ . Os outros parâmetros empregados foram  $L = 5\text{m}$ ,  $\bar{f} = 10^5 \text{N}$  e restrição de volume  $\bar{V} = 0,07V$ , conforme ilustração na Fig. (5.21). Os resultados obtidos podem ser observados na Fig. (5.22). Com a finalidade de se facilitar a interpretação dos resultados, os mesmos foram rebatidos em dois planos.

Observa-se certa semelhança nos resultados obtidos pelos algoritmos, convergindo para mínimos locais semelhantes.

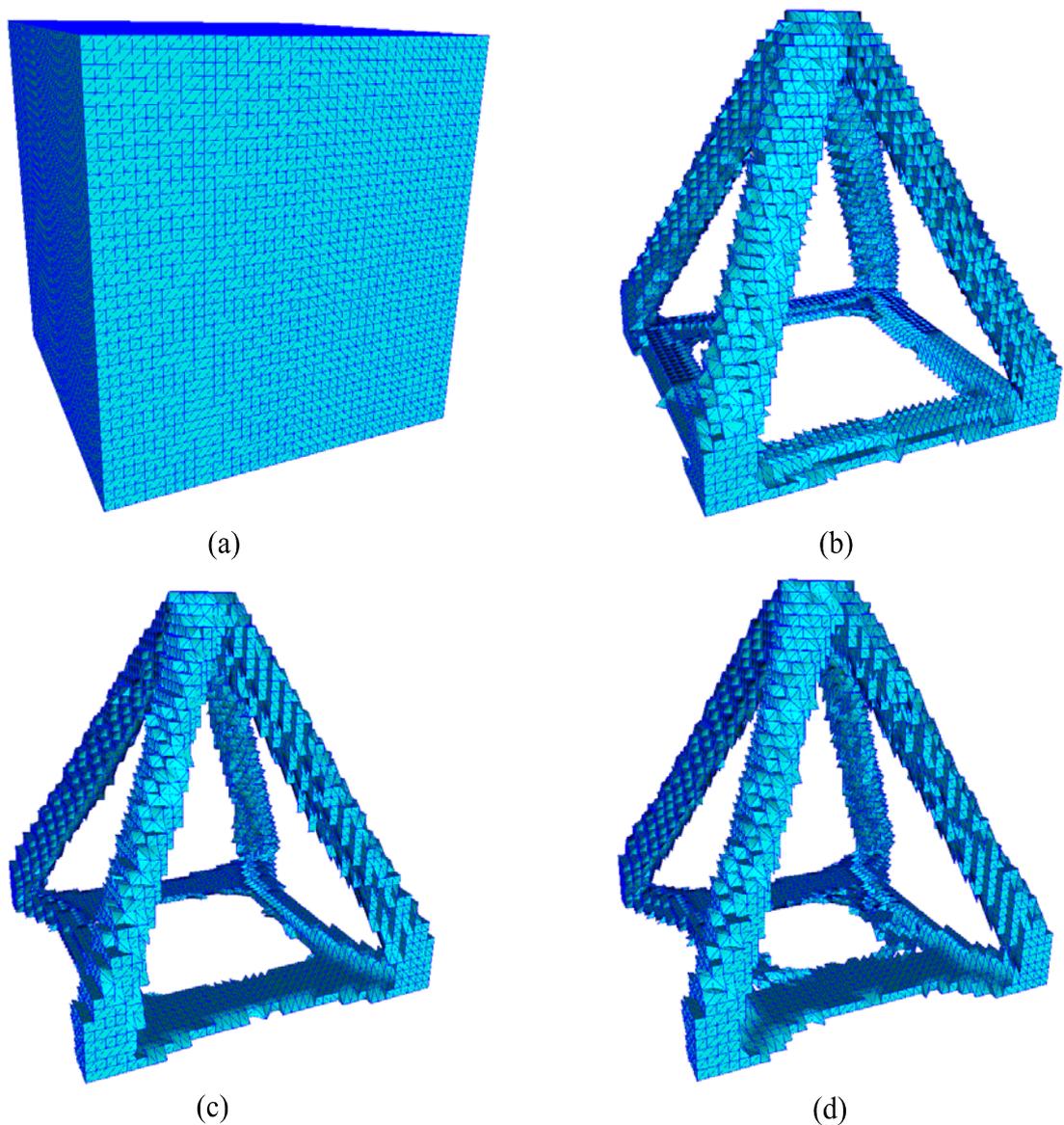


Figura 5.22: Cubo sob carga pontual: (a) modelo numérico utilizado e resultados numéricos dos algoritmos (b) SIMP (para valores de densidades dos elementos maiores que 0,5), (c) ESO e (d) TSA.

### 5.3 Comentários adicionais

Para resolução da equação de estado utilizou-se o método *Sky-Line* para os problemas de Estado Plano de Tensão enquanto que, para os exemplos em Elasticidade Tridimensional, utilizou-se o método iterativo baseado no Gradiente Conjugado. A geração da malha dos exemplos 3D foi feita de maneira a minimizar o espaço de memória a ser alocado.

# Capítulo 6

## Considerações Finais

Este trabalho teve como principal objetivo comparar os métodos SIMP, ESO e TSA no problema de minimização da energia interna. Assim sendo, dentre as principais conclusões obtidas com este trabalho destacam-se:

- Observa-se que os métodos apresentados, para o caso do problema de minimização da energia interna, apresentam expressões de sensibilidades bastante semelhantes, apesar de origens conceituais diferentes. Na técnica SIMP, a sensibilidade do sistema é calculada quando modifica-se localmente o campo de densidades, enquanto que nos métodos ESO e TSA, esta é calculada quando retira-se um elemento finito do espaço de aproximação e ao se introduz um furo infinitesimal no domínio, respectivamente;
- O problema formulado é não convexo e possui muitos mínimos locais. A diferença de resultados não deve ser atribuída exclusivamente à diferença na formulação (SIMP, ESO, TSA) mas também a parâmetros e escolhas de evolução de cada método. Pretende-se através dos resultados numéricos evidenciar tendências que ajudem a compreender o comportamento de cada técnica em análise;
- Os resultados evidenciam maiores semelhanças de resultados entre ESO e TSA do que o SIMP. Isto já era previsto pois na presente abordagem eles têm os seguintes pontos em comum:
  - Uma mesma heurística evolutiva;
  - Um mesmo “princípio” conceitual, baseado na avaliação da sensibilidade quando

da remoção de material, sendo que esta remoção é finita (ESO) ou infinitesimal (TSA).

- Pelo mesmo motivo anteriormente citado, ambos são mais sensíveis que o SIMP no que diz respeito ao refino da malha;
- Não é utilizado nenhum critério de otimalidade no presente uso de ESO ou TSA. Assim, não é possível (nem se pretende) afirmar que se esteja num mínimo do problema. De fato o SIMP apresentou, nos exemplos analisados, valores de função custo, ao final do processo de otimização, menores aos obtidos pelos algoritmos ESO e TSA.
- A técnica ESO pode ser vista como uma versão discreta da TSA. No entanto ambas coincidem em casos muito particulares em que não aparecem singularidades no problema ao se introduzir um furo no domínio. Em geral, isso ocorre quando a fronteira do furo está livre (condição de Neumann homogênea). Por outro lado, quando se tem, por exemplo, condição de contorno de Dirichlet, Robin ou Neumann não homogênea nos furos, aparecem singularidades no problema que devem ser adequadamente tratadas através da TSA, uma vez que o ESO leva a resultados totalmente equivocados nestas situações. Além do mais, os casos ora mencionados são difíceis, senão impossíveis, de serem tratados utilizando o SIMP;
- A TSA se apresenta como uma ferramenta de avaliação de sensibilidade com propriedades matemáticas poderosas e aplicações diversas, tais como, otimização topológica, problemas inversos em geral e modelagem mecânica de fenômenos que sofrem mudanças na configuração do domínio (mecânica da fratura, cavitação, dano, mudança de fase, etc.). A junção desta informação com os conceitos e ferramentas clássicas de programação matemática é um aspecto em aberto para futuras pesquisas. No entanto já existem trabalhos que associam a TSA e o conceito de *Level-Sets*, o que tem resultado em algoritmos de programação matemática potencialmente aplicáveis no contexto de otimização topológica e problemas inversos (ver, por exemplo, Yulin & Xiaoming [55]).

Sugestões para trabalhos futuros:

- Incorporar no processo de otimização topológica dos métodos apresentados condições de contorno de contato, uma vez que este é um fenômeno importante, que é comumente considerado em problemas relacionados à Engenharia;
- Associar a informação da TSA a métodos de programação matemática.

# Referências Bibliográficas

- [1] **J.S. Arora.** *Introduction to optimum design.* MacGraw-Hill Book Co., Londres, U. K., 1989.
- [2] **M. Bagge.** *Remodeling of bone structures.* PhD dissertation. Technical University of Denmark, Denmark, 1999.
- [3] **M. Bagge.** *A model of bone adaptation as an optimization process.* Journal of Biomechanics, Vol. 33, 1349 - 1357, 2000.
- [4] **M.P. Bendsøe.** *Aspects of topology optimization and bone-remodeling schemes.* International Society for Structural and Multidisciplinary Optimization: <http://biopt.ippt.gov.pl>, 2003.
- [5] **M.P. Bendsøe & P. Duysinx.** *Topology optimization of continuum structures with local stress constraints.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 43, 1453-1478, 1998.
- [6] **M.P. Bendsøe & N. Kikuchi.** Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **71(2)**:197-224, 1988.
- [7] **E.L. Cardoso.** *Controle de complexidade na otimização topológica de estruturas contínuas.* Dissertação de Mestrado, UFRGS, Porto Alegre, Brasil, 2000.
- [8] **E.L. Cardoso & J.S.O. Fonseca.** *Complexity controls in the topology optimization of continuum structure.* Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, Vol. 25(3), 293-301, 2003.

- [9] **J. Céa, S. Garreau, P. Guillaume & M. Masmoudi.** *The shape and topological optimization connection.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 188, 713-725, 2000.
- [10] **D.N. Chu, Y.M. Xie, A. Hira & G.P. Steven.** *Evolutionary Structural Optimization for problems with stiffness constraints.* Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 21, 238-251, 1996.
- [11] **J.C.A. Costa Júnior.** *Otimização topológica com refinamentos h-adaptativos.* Tese de Doutorado, GRANTE-UFSC, Florianópolis, Brasil, 2003.
- [12] **A. Diaz & O. Sigmund.** *Checkerboard patterns in Layout Optimization.* Structural Optimization, Vol. 10, pg. 40-45, 1995.
- [13] **I. Ekeland & R. Temam.** *Convex analysis and variational problems.* North-Holland, Amsterdam and American Elsevier, N.Y., 1976.
- [14] **H.A. Eschenauer, V.V. Kobelev & A. Schumacher.** *Bubble Method for topology and shape optimization of structures.* J. Structural Optimization, Vol. 8, 42-51, 1994.
- [15] **H.A. Eschenauer & N. Olhoff.** *Topology of continuum structures: a review.* Applied Mechanics Review, Vol. 54, 331-390, 2001.
- [16] **H.A. Eschenauer & A. Schumacher.** *Bubble Method: a special strategy for finding best possible initial designs.* Proc. of the 1993 ASME Design Technical Conference - 19th Design Automation Conference, Vol. 63 (2), 437-443, 1993.
- [17] **H.A. Eschenauer & A. Schumacher.** *Topology and shape optimization procedures using hole positioning criteria: theory and applications.* Topology Optimization in Structural Mechanics, CISM Courses and Lectures No. 374, 1997.
- [18] **E.A. Fancello.** *Análise de sensibilidade, geração adaptativa de malhas e o Método dos Elementos Finitos na otimização de forma em problemas de contato e mecânica da fratura.* Tese de Doutorado, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1993.
- [19] **E.A. Fancello.** *Métodos de Elementos Finitos,* UFSC, Florianópolis, Brasil, 2000.

- [20] **R.A. Feijóo, A.A. Novotny, E. Taroco & C. Padra.** *The Topological Derivative for the Poisson's problem.* Mathematical Models & Methods in Applied Sciences, Vol. 13(12), 1825-1844, 2003.
- [21] **R.A. Feijóo, A.C.S. Guimarães & E.A. Fancello.** *Algunas experiencias en la programación orientada por objetos y su aplicación en el Método de los Elementos Finitos.* Relatório de Pesquisa 15/1991, LNCC-CNPq, Rio de Janeiro, Brasil, 1991.
- [22] **S. Garreau, P. Guillaume & M. Masmoudi.** *The topological asymptotic for PDE Systems: the elasticity case.* SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 39, 1756-1778, 2001.
- [23] **A.C.S. Guimarães & R.A. Feijóo.** *O sistema ACDP.* Relatório de Pesquisa 27/1989, LNCC-CNPq, Rio de Janeiro, Brasil, 1989.
- [24] **M.E. Gurtin.** *An introduction to continuum mechanics.* Mathematics in Science and Engineering, Vol. 158, 1981.
- [25] **E.J. Haug, K.K. Choi & V. Komkov.** *Design sensitivity analysis of structural systems.* Academic Press, Orlando, FL, U.S.A., 1986.
- [26] **E. Hinton & J. Sienz.** *Fully stressed topological design of structures using an evolutionary procedure.* Engineering Computations, Vol. 12, 229-244, 1995.
- [27] **M. Kleiber, H. Antúnez, T.D. Hien, & P. Kowalczyk.** *Parameter sensitivity in nonlinear mechanics: theory and finite element computation.* John Wiley & Sons, Chichester, U.K., 1997.
- [28] **T. Lewinski & J. Sokolowski.** Energy Change due to the Appearance of Cavities in Elastic Solids. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, 1765-1803, 2003.
- [29] **Q. Li, G.P. Steven & Y.M. Xie.** *Displacement minimization of thermoelastic structures by evolutionary thickness design.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 179, Issues 3-4, 361-378, 1999.

- [30] **W. Li, Q. Li, G.P. Steven & Y.M. Xie.** *An evolutionary approach to elastic contact optimization of frame structures.* Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 40, 61-81, 2003.
- [31] **R.Wn. Little.** *Elasticity.* Prentice-Hall, 1973.
- [32] **A.A. Novotny,** *Adaptatividade h na otimização topológica e projeto ótimo de malhas hp adaptativas.* Dissertação de Mestrado, GRANTE-UFSC, Florianópolis, Brasil, 1998.
- [33] **A.A. Novotny.** *Análise de sensibilidade topológica.* Tese de Doutorado, LNCC/MCT, Petrópolis, Brasil, 2003.
- [34] **A.A. Novotny, E.A. Fancello & J.E. Souza de Cursi.** *An h adaptive topological optimization design in 2D elastic ty* Anais WCCM IV - Proceedings of the Fourth World Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires, Argentina, Junho 1998.
- [35] **A.A. Novotny, R.A. Feijóo & E. Taroco.** *Análise de sensibilidade contínua.* LNCC/MCT, Petrópolis, Brasil, 2003.
- [36] **L. Obert & W.I. Duvall.** *Rock mechanics and the design of structures in rock.* John Wiley & Sons, New York, 1967.
- [37] **C.B.W. Pedersen & T. Buhl.** *Topology optimization.* <http://topopt.dtu.dk>.
- [38] **J.T. Pereira.** *Otimização topológica de componentes mecânicos com restrições sobre o critério de falha material.* Tese de Doutorado, GRANTE-UFSC, Florianópolis, Brasil, 2001.
- [39] **O.M. Querin.** *Evolutionary Structural Optimization stress based formulation and implementation.* PhD dissertation, University of Sydney, 1997.
- [40] **O.M. Querin, Qing Li, G.P. Steven & Y.M. Xie.** *Evolutionary shape optimization for stress minimization.* Mechanics Research Communications, Vol. 26, Issue 6, 657-664, 1999.
- [41] **J.H. Rong, Y.M. Xie & X.Y. Yang.** *An improved method for evolutionary structural optimisation against buckling.* Computers & Structures, Vol. 79, Issue 3, 253-263, 2001.

- [42] **O. Sigmund.** *Design of material Structures using Topology Optimization.* DCAMM Report S.69, Department of Solid Mechanics, Ph.D. Thesis DTU, 1994.
- [43] **O. Sigmund & J. Peterson.** *Numerical Instabilities in Topology Optimization: A Survey on procedures dealing with checkerboard, mesh-dependencies and local minima.* Structural Optimization, Vol. 16 (No. 1), pg. 68-78,1998.
- [44] **J.A. Silva.** *Investigação de um método evolucionário de otimização estrutural.* Campinas, Brasil, 2001.
- [45] **J. Sokolowski & A. Zochowski.** *On the Topological Derivative in shape optimization.* Relatório de Pesquisa 3170, INRIA-Lorraine, França, 1997. Também publicado na revista *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 37, 1251-1272, 1999.
- [46] **P. Tanskanen.** *The Evolutionary Structural Optimization method: theoretical aspects.* Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 191, 5485-5498, 2002.
- [47] **S.P. Timoshenko & J.N. Goodier.** *Teoria da Elasticidade.* Guanabara Dois S.A., 3a. Edição, Rio de Janeiro, 1980.
- [48] **P. Wriggers.** *Computational contact mechanics* J. Wiley & Sons, New York, 2002.
- [49] **Y.M. Xie & G.P. Steven.** *A simple evolutionary procedure for structural optimization.* Computers & Structures, Vol. 49(5), 885-896, 1993.
- [50] **Y.M. Xie & G.P. Steven.** *A simple approach to structural frequency optimization.* Computers & Structures., Vol. 53, 1487-1491, 1994.
- [51] **Y.M. Xie & G.P. Steven.** *Evolutionary Structural Optimization for dynamic problems.* Computers & Structures, Vol. 58 (6), 1067-1073, 1996.
- [52] **Y.M. Xie & G.P. Steven.** *Evolutionary Structural Optimization,* Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [53] **Y.M. Xie, G.P. Steven, D.N. Chu & A. Hira.** *On various aspects of Evolutionary Structural Optimization for problems with stiffness constraints.* Finite Element in Analysis and Design, Vol. 24, 197-212, 1997.

- 
- [54] **Y.M. Xie, G.P. Steven, V. Young & O.M. Querin.** *3D and multiple load case Bi-directional Evolutionary Structural Optimization (BESO)*. Structural Optimization, Vol. 18, 183-192, 1999.
- [55] **M. Yulin & W. Xiaoming.** *A level set method for structural topology optimization and its applications*. Advances in Engineering Software 35:415–441, 2004.
- [56] **J. P. Zolézio.** *The material derivative (or speed) method for shape optimization*. Haug & Cea. Anais: Optimization of Distributed Parameters Structures, Iowa, EUA, 1981.

# Apêndice A

## Análise Assintótica

Neste apêndice são apresentados os instrumentos necessários para realizar o cálculo da Derivada Topológica em Estado Plano de Tensão e Elasticidade Tridimensional. Conforme apresentado no capítulo 3 (seção 3.3), para a determinação da Derivada Topológica é necessário conhecer-se a distribuição de tensões atuantes na fronteira do furo introduzido, de acordo com seu raio  $\epsilon$ . Este campo de tensões é calculado de maneira a satisfazer as seguintes condições:

- Relação constitutiva do material;
- Equações cinemáticas;
- Equação de equilíbrio;
- Condições de compatibilidade;
- Condições de contorno impostas ao problema.

A seguir são apresentadas as expressões dos campos de tensões para Estado Plano de Tensão e Elasticidade 3D, considerando comportamento elástico linear do material.

### A.1 Elasticidade Linear em 2D

Para o cálculo da distribuição de tensões atuantes a uma distância  $r$  do centro do furo introduzido, considera-se um corpo submetido a um estado de tensão no qual somente atuam tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . Considerando-se comportamento elástico linear do material, pode-se determinar a distribuição de tensões em função da tensão principal  $\sigma_1$  e posteriormente em

relação a  $\sigma_2$ , rotacioná-las para uma base de referência para então sobrepô-las, procedimento este apresentado a seguir.

### A.1.1 Base 1

Considere-se um estado de tensão no qual o corpo está submetido à tensão principal  $\sigma_1$ , conforme Fig. (A.1).

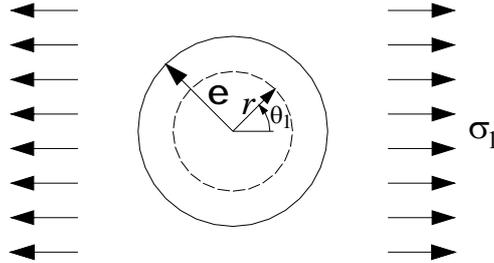


Figura A.1: Sistema de coordenadas cilíndricas da base 1, para a determinação da distribuição de tensões em Estado Plano de Tensão.

Neste caso tem-se que as componentes do tensor de tensões  $\sigma_{rr}^1$ ,  $\sigma_{\theta\theta}^1$  e  $\tau_{r\theta}^1$  em coordenadas polares, conforme Obert & Duvall [36], são dadas por

$$\sigma_{rr}^1 = \frac{\sigma_1}{2} \left( 1 - \frac{\epsilon^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma_1}{2} \left( 1 - 4\frac{\epsilon^2}{r^2} + 3\frac{\epsilon^4}{r^4} \right) \cos 2\theta_1, \quad (A.1)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^1 = \frac{\sigma_1}{2} \left( 1 + \frac{\epsilon^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma_1}{2} \left( 1 + 3\frac{\epsilon^4}{r^4} \right) \cos 2\theta_1, \quad (A.2)$$

$$\tau_{r\theta}^1 = -\frac{\sigma_1}{2} \left( 1 + 2\frac{\epsilon^2}{r^2} - 3\frac{\epsilon^4}{r^4} \right) \sin 2\theta_1. \quad (A.3)$$

### A.1.2 Base 2

Considere-se um estado de tensão no qual o corpo está submetido à tensão  $\sigma_2$ , conforme Fig. (A.2).

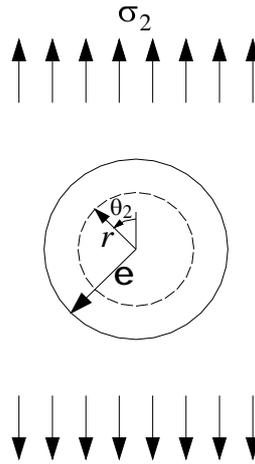


Figura A.2: Sistema de coordenadas cilíndricas da base 2, para a determinação da distribuição de tensões em Estado Plano de Tensão.

Da mesma forma que o apresentado na base 1, as componentes do tensor de tensões em coordenadas polares na base 2, são dadas por

$$\sigma_{rr}^2 = \frac{\sigma_2}{2} \left( 1 - \frac{\epsilon^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma_2}{2} \left( 1 - 4 \frac{\epsilon^2}{r^2} + 3 \frac{\epsilon^4}{r^4} \right) \cos 2\theta_2, \quad (\text{A.4})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^2 = \frac{\sigma_2}{2} \left( 1 + \frac{\epsilon^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma_2}{2} \left( 1 + 3 \frac{\epsilon^4}{r^4} \right) \cos 2\theta_2, \quad (\text{A.5})$$

$$\tau_{r\theta}^2 = -\frac{\sigma_2}{2} \left( 1 + 2 \frac{\epsilon^2}{r^2} - 3 \frac{\epsilon^4}{r^4} \right) \sin 2\theta_2. \quad (\text{A.6})$$

### A.1.3 Mudança de base e sobreposição das tensões

Adotando-se a base 1 como base de referência e observando-se as Figs. (A.1) e (A.2) pode-se concluir diretamente que

$$\theta_1 = \theta, \quad (\text{A.7})$$

$$\theta_2 = \theta - \frac{\pi}{2}. \quad (\text{A.8})$$

Desta forma, substituindo-se estas equações nas componentes de tensão de cada base apresentada, obtém-se a distribuição de tensões no sistema de coordenadas de referência, provenientes de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . Sobrepondo-as e utilizando-se algumas relações trigonométricas, tem-se

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \left(1 - \frac{\epsilon^2}{r^2}\right) + \cos 2\theta \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \left(1 - 4\frac{\epsilon^2}{r^2} + 3\frac{\epsilon^4}{r^4}\right), \quad (\text{A.9})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \left(1 + \frac{\epsilon^2}{r^2}\right) - \cos 2\theta \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \left(1 + 3\frac{\epsilon^4}{r^4}\right), \quad (\text{A.10})$$

$$\tau_{r\theta} = -\sin 2\theta \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \left(1 + 2\frac{\epsilon^2}{r^2} - 3\frac{\epsilon^4}{r^4}\right). \quad (\text{A.11})$$

É importante ressaltar que os resultados apresentados nesta seção também podem ser utilizados na obtenção das expressões da Derivada Topológica no modelo de Estado Plano de Deformação.

## A.2 Elasticidade Linear em 3D

Considere-se estado tri-axial de solitação, no qual o corpo está sujeito as tensões principais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ . Supondo-se agora a inserção de um furo esférico de raio  $\epsilon$  no domínio, que irá modificar a distribuição de tensão no mesmo.

Tratando-se de um problema elástico linear, pode-se determinar a distribuição de tensões devido a  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  separadamente. Desta forma são construídos três sistemas de coordenadas esféricas, um para cada estado de tensões principais, e para cada um deles determina-se a distribuição de tensões atuantes, que posteriormente são rotacionadas para um sistema de referência, permitindo então que sejam sobrepostas.

### A.2.1 Distribuição de tensões na base 1

Considere um corpo submetido a uma tração  $\sigma_3$ , cuja resultante está orientada no eixo  $z$ , distribuída uniformemente sobre uma das faces do corpo, conforme ilustração na Fig. (A.3).

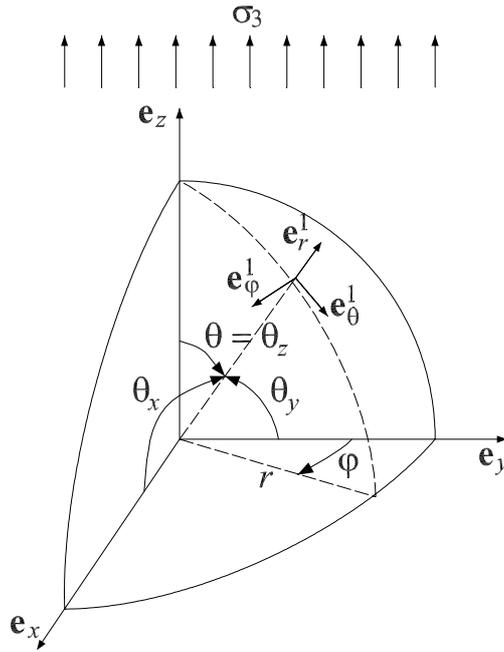


Figura A.3: Sistema de coordenadas esféricas da base 1.

Observando-se o sistema de coordenadas esféricas desta base, pode-se obter os eixos  $\mathbf{e}_r^1$ ,  $\mathbf{e}_\varphi^1$  e  $\mathbf{e}_\theta^1$ . Estes eixos serão utilizados posteriormente para rotação do campo de tensão para a base de referência  $\mathbf{e}$ , por simplicidade, são calculados em função de  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  e  $\theta_z$ .

Desta forma, o eixo  $\mathbf{e}_r^1$  neste sistema de coordenadas é dado por

$$\mathbf{e}_r^1 = \cos \theta_x \mathbf{e}_x + \cos \theta_y \mathbf{e}_y + \cos \theta_z \mathbf{e}_z \quad (\text{A.12})$$

Como os eixos  $\mathbf{e}_r^1$  e  $\mathbf{e}_z$  não são ortogonais, o eixo  $\mathbf{e}_\varphi^1$  é dado por

$$\mathbf{e}_\varphi^1 = \frac{\mathbf{e}_r^1 \times \mathbf{e}_z}{|\mathbf{e}_r^1 \times \mathbf{e}_z|}, \quad (\text{A.13})$$

onde o numerador é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r^1 \times \mathbf{e}_z &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \cos \theta_x & \cos \theta_y & \cos \theta_z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \\ &= \cos \theta_y \mathbf{e}_x - \cos \theta_x \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Já o denominador, considerando-se as relações trigonométricas é dado por

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{e}_r^1 \times \mathbf{e}_z| &= |\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y|, \\
 &= |1 - \cos^2 \theta_z|, \\
 &= |\sin^2 \theta_z|, \\
 &= \sin \theta_z.
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

Substituindo-se as Eqs. (A.14) e (A.15) em (A.13), obtém-se

$$\mathbf{e}_\varphi^1 = \frac{\cos \theta_y}{\sin \theta_z} \mathbf{e}_x - \frac{\cos \theta_x}{\sin \theta_z} \mathbf{e}_y. \tag{A.16}$$

O eixo  $\mathbf{e}_\theta^1$  é obtido diretamente pelo produto vetorial de  $\mathbf{e}_r^1$  e  $\mathbf{e}_\varphi^1$  em função dos mesmos serem ortogonais, ou seja,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_\theta^1 &= \mathbf{e}_r^1 \times \mathbf{e}_\varphi^1, \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \cos \theta_x & \cos \theta_y & \cos \theta_z \\ \frac{\cos \theta_y}{\sin \theta_z} & -\frac{\cos \theta_x}{\sin \theta_z} & 0 \end{vmatrix}, \\
 &= \left( \cos \theta_x \frac{\cos \theta_z}{\sin \theta_z} \right) \mathbf{e}_x + \left( \cos \theta_y \frac{\cos \theta_z}{\sin \theta_z} \right) \mathbf{e}_y - (\sin \theta_z) \mathbf{e}_z.
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

Neste sistema de coordenadas polares, tem-se que a distribuição de tensões atuantes a uma distância  $r$  do centro do furo esférico introduzido é, conforme Obert & Duvall [36], dada por

$$\bar{\sigma}_{rr}^1 = \frac{\sigma_3}{(7-5\nu)} \left\{ 7 - 5\nu - (19 - 5\nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} + 12 \frac{\epsilon^5}{r^5} + \sin^2 \theta_z \left[ 5\nu - 7 + 5(5 - \nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} - 18 \frac{\epsilon^5}{r^5} \right] \right\} \tag{A.18}$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^1 = \frac{3\sigma_3}{2(7-5\nu)} \left\{ (3 - 5\nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} - 4 \frac{\epsilon^5}{r^5} + 5 \sin^2 \theta_z \left[ (2\nu - 1) \frac{\epsilon^3}{r^3} + \frac{\epsilon^5}{r^5} \right] \right\} \tag{A.19}$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^1 = \frac{\sigma_3}{2(7-5\nu)} \left\{ 3 \left[ (3 - 5\nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} - 4 \frac{\epsilon^5}{r^5} \right] + \sin^2 \theta_z \left[ 2(7 - 5\nu) - 5(1 - 2\nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} + 21 \frac{\epsilon^5}{r^5} \right] \right\} \tag{A.20}$$

$$\bar{\tau}_{r\theta}^1 = \frac{\sigma_3 \cos \theta_z \sin \theta_z}{(7-5\nu)} \left[ 5\nu - 7 - 5(1 + \nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} + 12 \frac{\epsilon^5}{r^5} \right] \tag{A.21}$$

$$\bar{\tau}_{r\varphi}^1 = \bar{\tau}_{\varphi\theta}^1 = 0 \tag{A.22}$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson do material no qual o furo foi introduzido.

### A.2.2 Distribuição de tensões na base 2

Considere um corpo submetido a uma tração  $\sigma_2$ , cuja resultante está orientada no eixo  $y$ , distribuída uniformemente sobre uma das faces do corpo, conforme ilustração na Fig. (A.4).

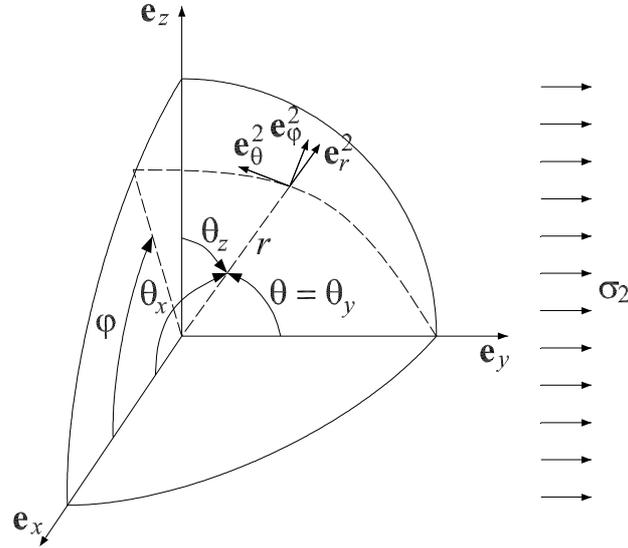


Figura A.4: Sistema de coordenadas esféricas da base 2.

Neste sistema de coordenadas, o eixo  $\mathbf{e}_r^2$  é dado por

$$\mathbf{e}_r^2 = \cos \theta_x \mathbf{e}_x + \cos \theta_y \mathbf{e}_y + \cos \theta_z \mathbf{e}_z \quad (\text{A.23})$$

Como os eixos  $\mathbf{e}_r^2$  e  $\mathbf{e}_z$  não são ortogonais, o eixo  $\mathbf{e}_\varphi^2$  é dado por

$$\mathbf{e}_\varphi^2 = \frac{\mathbf{e}_r^2 \times \mathbf{e}_y}{|\mathbf{e}_r^2 \times \mathbf{e}_y|}, \quad (\text{A.24})$$

onde o numerador é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r^2 \times \mathbf{e}_y &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \cos \theta_x & \cos \theta_y & \cos \theta_z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \\ &= -\cos \theta_z \mathbf{e}_x + \cos \theta_x \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Já o denominador, considerando-se as relações trigonométricas é dado por

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{e}_r^2 \times \mathbf{e}_y| &= |\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_z|, \\
 &= |1 - \cos^2 \theta_y|, \\
 &= |\sin^2 \theta_y|, \\
 &= \sin \theta_y.
 \end{aligned} \tag{A.26}$$

Desta forma, substituindo-se as Eqs. (A.25) e (A.26) em (A.24), obtém-se

$$\mathbf{e}_\varphi^2 = -\frac{\cos \theta_z}{\sin \theta_y} \mathbf{e}_x + \frac{\cos \theta_x}{\sin \theta_y} \mathbf{e}_z. \tag{A.27}$$

O eixo  $\mathbf{e}_\theta^2$  é obtido diretamente pelo produto vetorial dos eixos  $\mathbf{e}_r^2$  e  $\mathbf{e}_\varphi^2$ , em função dos mesmos serem ortogonais, ou seja,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_\theta^2 &= \mathbf{e}_r^2 \times \mathbf{e}_\varphi^2, \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \cos \theta_x & \cos \theta_y & \cos \theta_z \\ -\frac{\cos \theta_z}{\sin \theta_y} & 0 & +\frac{\cos \theta_x}{\sin \theta_y} \end{vmatrix}, \\
 &= \left( \cos \theta_x \frac{\cos \theta_y}{\sin \theta_y} \right) \mathbf{e}_x - (\sin \theta_y) \mathbf{e}_y + \left( \cos \theta_z \frac{\cos \theta_y}{\sin \theta_y} \right) \mathbf{e}_z.
 \end{aligned} \tag{A.28}$$

As componentes de tensão, neste sistema de coordenadas, são dadas por

$$\bar{\sigma}_{rr}^2 = \frac{\sigma_2}{(7-5\nu)} \left\{ 7 - 5\nu - (19 - 5\nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} + 12 \frac{\epsilon^5}{r^5} + \sin^2 \theta_y \left[ 5\nu - 7 + 5(5 - \nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} - 18 \frac{\epsilon^5}{r^5} \right] \right\} \tag{A.29}$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^2 = \frac{3\sigma_2}{2(7-5\nu)} \left\{ (3 - 5\nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} - 4 \frac{\epsilon^5}{r^5} + 5 \sin^2 \theta_y \left[ (2\nu - 1) \frac{\epsilon^3}{r^3} + \frac{\epsilon^5}{r^5} \right] \right\} \tag{A.30}$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^2 = \frac{\sigma_2}{2(7-5\nu)} \left\{ 3 \left[ (3 - 5\nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} - 4 \frac{\epsilon^5}{r^5} \right] + \sin^2 \theta_y \left[ 2(7 - 5\nu) - 5(1 - 2\nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} + 21 \frac{\epsilon^5}{r^5} \right] \right\} \tag{A.31}$$

$$\bar{\tau}_{r\theta}^2 = \frac{\sigma_2 \cos \theta_y \sin \theta_y}{(7-5\nu)} \left[ 5\nu - 7 - 5(1 + \nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} + 12 \frac{\epsilon^5}{r^5} \right] \tag{A.32}$$

$$\bar{\tau}_{r\varphi}^2 = \bar{\tau}_{\varphi\theta}^2 = 0 \tag{A.33}$$

### A.2.3 Distribuição de tensões na base 3

Considere um corpo submetido a uma tração  $\sigma_1$ , cuja resultante está orientada no eixo  $x$ , distribuída uniformemente sobre uma das faces do corpo, conforme ilustração na Fig. (A.5).

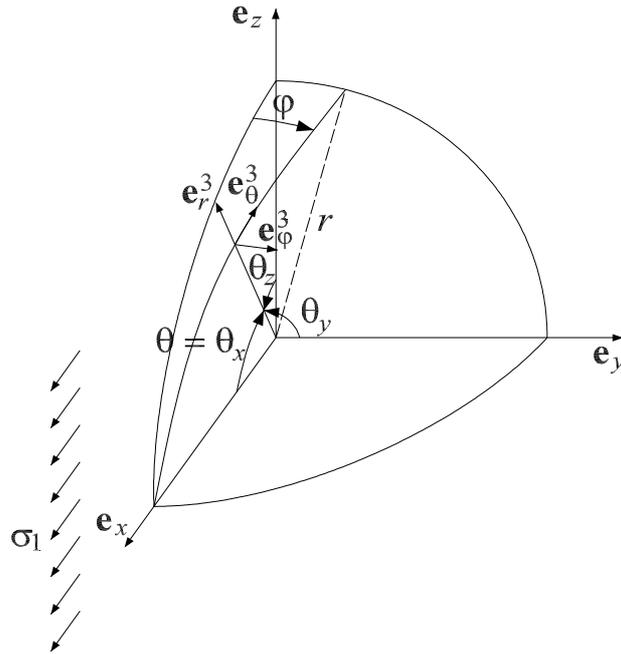


Figura A.5: Sistema de coordenadas esféricas da base 3.

O eixo  $\mathbf{e}_r^3$  neste sistema de coordenadas é dado por

$$\mathbf{e}_r^3 = \cos \theta_x \mathbf{e}_x + \cos \theta_y \mathbf{e}_y + \cos \theta_z \mathbf{e}_z \quad (\text{A.34})$$

Como os eixos  $\mathbf{e}_r^3$  e  $\mathbf{e}_z$  não são ortogonais, o eixo  $\mathbf{e}_\varphi^3$  é dada por

$$\mathbf{e}_\varphi^3 = \frac{\mathbf{e}_r^3 \times \mathbf{e}_x}{|\mathbf{e}_r^3 \times \mathbf{e}_x|}, \quad (\text{A.35})$$

onde o numerador é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r^3 \times \mathbf{e}_x &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \cos \theta_x & \cos \theta_y & \cos \theta_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \\ &= \cos \theta_z \mathbf{e}_y - \cos \theta_y \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Considerando-se as relações trigonométricas, o denominador é dado por

$$\begin{aligned} |\mathbf{e}_r^3 \times \mathbf{e}_x| &= |\cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z|, \\ &= |1 - \cos^2 \theta_x|, \\ &= |\sin^2 \theta_x|, \\ &= \sin \theta_x. \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Desta forma, obtém-se

$$\mathbf{e}_\varphi^3 = \frac{\cos \theta_z}{\sin \theta_x} \mathbf{e}_y - \frac{\cos \theta_y}{\sin \theta_x} \mathbf{e}_z. \quad (\text{A.38})$$

Em função dos eixos  $\mathbf{e}_r^3$  e  $\mathbf{e}_\varphi^3$  serem ortogonais, o eixo  $\mathbf{e}_\theta^3$  é obtido diretamente pelo produto vetorial dos mesmos, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\theta^3 &= \mathbf{e}_r^3 \times \mathbf{e}_\varphi^3, \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \cos \theta_x & \cos \theta_y & \cos \theta_z \\ 0 & \frac{\cos \theta_z}{\sin \theta_x} & -\frac{\cos \theta_y}{\sin \theta_x} \end{vmatrix}, \\ &= -(\sin \theta_x) \mathbf{e}_x + \left( \cos \theta_y \frac{\cos \theta_x}{\sin \theta_x} \right) \mathbf{e}_y + \left( \cos \theta_z \frac{\cos \theta_x}{\sin \theta_x} \right) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

As componentes de tensão, neste sistema de coordenadas, são dadas por

$$\bar{\sigma}_{rr}^3 = \frac{\sigma_1}{(7-5\nu)} \left\{ 7 - 5\nu - (19 - 5\nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} + 12 \frac{\epsilon^5}{r^5} + \sin^2 \theta_x \left[ 5\nu - 7 + 5(5 - \nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} - 18 \frac{\epsilon^5}{r^5} \right] \right\} \quad (\text{A.40})$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^3 = \frac{3\sigma_1}{2(7-5\nu)} \left\{ (3 - 5\nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} - 4 \frac{\epsilon^5}{r^5} + 5 \sin^2 \theta_x \left[ (2\nu - 1) \frac{\epsilon^3}{r^3} + \frac{\epsilon^5}{r^5} \right] \right\} \quad (\text{A.41})$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^3 = \frac{\sigma_1}{2(7-5\nu)} \left\{ 3 \left[ (3 - 5\nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} - 4 \frac{\epsilon^5}{r^5} \right] + \sin^2 \theta_x \left[ 2(7 - 5\nu) - 5(1 - 2\nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} + 21 \frac{\epsilon^5}{r^5} \right] \right\} \quad (\text{A.42})$$

$$\bar{\tau}_{r\theta}^3 = \frac{\sigma_1 \cos \theta_x \sin \theta_x}{(7-5\nu)} \left[ 5\nu - 7 - 5(1 + \nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} + 12 \frac{\epsilon^5}{r^5} \right] \quad (\text{A.43})$$

$$\bar{\tau}_{r\varphi}^3 = \bar{\tau}_{\varphi\theta}^3 = 0 \quad (\text{A.44})$$

#### A.2.4 Mudança de base e sobreposição das tensões

Para sobrepor as distribuições de tensões provenientes das tensões principais é necessário escrever, primeiramente, as tensões em um sistema esférico de referência.

Considere um  $s$ -ésimo sistema de coordenadas esféricas. Adotando-se a base 1 como base de referência, tem-se que o campo de tensão  $\boldsymbol{\sigma}^s$  da  $s$ -ésima base no sistema de referência, é dado por

$$\boldsymbol{\sigma}^s = (\mathbf{Q}^s)^T \bar{\boldsymbol{\sigma}}^s \mathbf{Q}^s \quad (\text{A.45})$$

onde a matriz de rotação é dada por

$$\mathbf{Q}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r^s \cdot \mathbf{e}_r^1 & \mathbf{e}_r^s \cdot \mathbf{e}_\varphi^1 & \mathbf{e}_r^s \cdot \mathbf{e}_\theta^1 \\ \mathbf{e}_\varphi^s \cdot \mathbf{e}_r^1 & \mathbf{e}_\varphi^s \cdot \mathbf{e}_\varphi^1 & \mathbf{e}_\varphi^s \cdot \mathbf{e}_\theta^1 \\ \mathbf{e}_\theta^s \cdot \mathbf{e}_r^1 & \mathbf{e}_\theta^s \cdot \mathbf{e}_\varphi^1 & \mathbf{e}_\theta^s \cdot \mathbf{e}_\theta^1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.46})$$

e

$$\bar{\sigma}^s = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{rr}^s & \bar{\tau}_{r\varphi}^s & \bar{\tau}_{r\theta}^s \\ \bar{\tau}_{r\varphi}^s & \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^s & \bar{\tau}_{\varphi\theta}^s \\ \bar{\tau}_{r\theta}^s & \bar{\tau}_{\varphi\theta}^s & \bar{\sigma}_{\theta\theta}^s \end{bmatrix} \quad (\text{A.47})$$

representa a distribuição de tensão no sistema local.

Além de rotacionar as distribuições de tensões das três bases é necessário ainda escrevê-las em função de  $r$ ,  $\varphi$  e  $\theta$ , pois os eixos, por simplicidade, apresentam-se em função de  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  e  $\theta_z$ . Desta forma, conforme Fig. (A.3), observa-se diretamente que

$$\cos \theta_x = \sin \theta \sin \varphi, \quad (\text{A.48})$$

$$\cos \theta_y = \sin \theta \cos \varphi, \quad (\text{A.49})$$

$$\theta_z = \theta. \quad (\text{A.50})$$

Utilizando-se programa de matemática simbólica (Mathematica 3.0) obteve-se a distribuição de tensões das bases no sistema de referência. Para a base 1, a distribuição de tensões é diretamente obtida substituindo-se a Eq. (A.50) nas Eqs. (A.18) à (A.22). Na base 2 as componentes de tensões, no sistema de referência são dadas por

$$\sigma_{rr}^2 = \frac{\sigma_2}{(7-5\nu)} \left\{ 6 \left( \frac{\epsilon^3}{r^3} - \frac{\epsilon^5}{r^5} \right) + \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \left[ 7 - 5\nu - 5(5-\nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} + 18 \frac{\epsilon^5}{r^5} \right] \right\} \quad (\text{A.51})$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^2 = \frac{\sigma_2}{2(7-5\nu)(1-\cos^2 \varphi \sin^2 \theta)} \left\{ 3 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta \left[ (5\nu-2) \frac{\epsilon^3}{r^3} + \frac{\epsilon^5}{r^5} + 5 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \left( (1-2\nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} - \frac{\epsilon^5}{r^5} \right) \right] + \sin^2 \varphi \left[ 14 - 10\nu + (4-5\nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} + 9 \frac{\epsilon^5}{r^5} - \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \left( 2(7-5\nu) - 5(1-2\nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} + 21 \frac{\epsilon^5}{r^5} \right) \right] \right\} \quad (\text{A.52})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^2 = \frac{\sigma_2}{2(7-5\nu)} \left\{ 3 \left( (5\nu-2) \frac{\epsilon^3}{r^3} + \frac{\epsilon^5}{r^5} \right) + \cos^2 \varphi \left[ 15 \left( (1-2\nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} - \frac{\epsilon^5}{r^5} \right) + \cos^2 \theta \left( 2(7-5\nu) + 5(2\nu-1) \frac{\epsilon^3}{r^3} + 21 \frac{\epsilon^5}{r^5} \right) \right] \right\} \quad (\text{A.53})$$

$$\tau_{r\varphi}^2 = \frac{\sigma_2 \cos \varphi \sin \varphi \sin \theta}{(7-5\nu)} \left[ 5\nu - 7 - 5(1+\nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} + 12 \frac{\epsilon^5}{r^5} \right] \quad (\text{A.54})$$

$$\tau_{r\theta}^2 = \frac{\sigma_2 \cos^2 \varphi \cos \theta \sin \theta}{(7-5\nu)} \left[ 7 - 5\nu + 5(1+\nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} - 12 \frac{\epsilon^5}{r^5} \right] \quad (\text{A.55})$$

$$\tau_{\varphi\theta}^2 = \frac{\sigma_2 \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta}{(7-5\nu)} \left[ 5\nu - 7 - 5(1-2\nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} - 3 \frac{\epsilon^5}{r^5} \right] \quad (\text{A.56})$$

Já a distribuição de tensões da base 3, no sistema de referência, é dada por

$$\sigma_{rr}^3 = \frac{\sigma_1}{(7-5\nu)} \left\{ 6 \left( \frac{\epsilon^3}{r^3} - \frac{\epsilon^5}{r^5} \right) + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \left[ 7 - 5\nu - 5(5-\nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} + 18 \frac{\epsilon^5}{r^5} \right] \right\} \quad (\text{A.57})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi}^3 = & \frac{\sigma_1}{2(7-5\nu)(1-\sin^2 \varphi \sin^2 \theta)} \left\{ 3 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \left[ (5\nu - 2) \frac{\epsilon^3}{r^3} + \frac{\epsilon^5}{r^5} - \right. \right. \\ & \left. \left. 5 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta \left( (2\nu - 1) \frac{\epsilon^3}{r^3} + \frac{\epsilon^5}{r^5} \right) \right] + \cos^2 \varphi \left[ 2(7 - 5\nu) + (4 - 5\nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} + \right. \right. \\ & \left. \left. 9 \frac{\epsilon^5}{r^5} - \sin^2 \varphi \sin^2 \theta \left( 2(7 - 5\nu) - 5(1 - 2\nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} + 21 \frac{\epsilon^5}{r^5} \right) \right] \right\} \quad (\text{A.58}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^3 = & \frac{\sigma_1}{2(7-5\nu)} \left\{ 3 \left( (5\nu - 2) \frac{\epsilon^3}{r^3} + \frac{\epsilon^5}{r^5} \right) - \sin^2 \varphi \left[ 2 \left( (5\nu - 7) - 5(1 - 2\nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. 3 \frac{\epsilon^5}{r^5} \right) + \sin^2 \theta \left( 2(7 - 5\nu) - 5(1 - 2\nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} + 21 \frac{\epsilon^5}{r^5} \right) \right] \right\} \quad (\text{A.59}) \end{aligned}$$

$$\tau_{r\varphi}^3 = \frac{\sigma_1 \cos \varphi \sin \varphi \sin \theta}{(7-5\nu)} \left[ 7 - 5\nu + 5(1 + \nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} - 12 \frac{\epsilon^5}{r^5} \right] \quad (\text{A.60})$$

$$\tau_{r\theta}^3 = \frac{\sigma_1 \sin^2 \varphi \cos \theta \sin \theta}{(7-5\nu)} \left[ 7 - 5\nu + 5(1 + \nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} - 12 \frac{\epsilon^5}{r^5} \right] \quad (\text{A.61})$$

$$\tau_{\varphi\theta}^3 = \frac{\sigma_1 \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta}{(7-5\nu)} \left[ 7 - 5\nu + 5(1 - 2\nu) \frac{\epsilon^3}{r^3} + 3 \frac{\epsilon^5}{r^5} \right] \quad (\text{A.62})$$

Finalmente, o campo de tensão, relativo às três tensões principais, na base de referência, é dado por

$$\sigma_\epsilon = \sum_{s=1}^3 (\mathbf{Q}^s)^T \bar{\sigma}^s \mathbf{Q}^s \quad (\text{A.63})$$