

Universidade Federal de Santa Catarina
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

**Análise do Comportamento Dinâmico de
Rotores em Eixos Bobinados**

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa
Catarina para obtenção do grau de Mestre em Engenharia
Mecânica.

Márcio Eduardo Silveira

Florianópolis, fevereiro de 2001

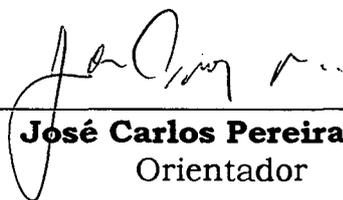
Análise do Comportamento Dinâmico de Rotores em Eixos Bobinados

Márcio Eduardo Silveira

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

Mestre em Engenharia

Especialidade em Engenharia Mecânica, área de concentração Projeto e Análise de Componentes Mecânicos, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

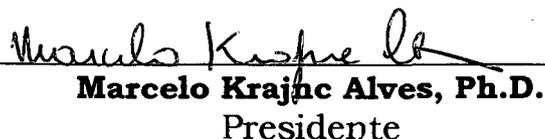


José Carlos Pereira, Dr.
Orientador



Júlio César Passos, Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora



Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.
Presidente



Paulo de Tarso R. Mendonça, Ph.D.



Roberto Jordan, Dr.Eng.

Dedicatória

*Aos meus pais,
Eduardo Henrique da Silveira e
Maria de Lourdes Nascimento Silveira
e aos meus irmãos,
Carlos Henrique da Silveira e
Elaine Heloisa Silveira Silva*

Agradecimentos

Ao orientador e professor José Carlos Pereira pela excelente orientação e dedicação dados no decorrer do mestrado. À Capes e ao POSMEC pela confiança e colaboração fornecidos para a realização deste trabalho.

Aos professores do Grante Fancello, Marcelo, Paulo de Tarso, Lauro e Edison da Rosa pelo apoio.

Aos colegas de convívio diário Jucélio, Alvino, Raimundo, João Carlos, Fabrício, Oscar, Hilbeth, Yuji, Linhares e demais colegas do Grante.

Aos amigos de todas as horas Fernando e Sérgio pelo apoio, amizade e diversão nestes dois anos de convívio. Aos amigos Adrian, Picanço, André, Afrânio, Emílio, Guilherme, pelas longas conversas e momentos de descontração.

À Carolina Borges Souza pelo seu apoio, carinho e paciência em todos os momentos.

À Dona Leny pela moradia, apoio e estímulo nos meus primeiros dias em Florianópolis.

Aos amigos Marco, Marlon, Gondim, Claudio, Ricardo Teixeira, Rodolfo, Eduardo Morato, Schineider, Henrique, Guilherme, Rogério, Ailton, Júnior e demais amigos de Minas pelo apoio e amizade mantidos à distância.

Ao meu irmão Carlos Henrique pelo seu constante apoio e incentivo em todos os momentos de minha vida.

Enfim, a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

Sumário

Lista de Figuras	iii
Lista de Tabelas	viii
Lista de Símbolos	ix
Resumo	xii
Abstract	xiii
1 INTRODUÇÃO	1
2 FUNDAMENTOS DA DINÂMICA DE ROTORES	5
2.1 Introdução	5
2.2 Energias Cinética e de Deformação dos Componentes de um Rotor	10
2.3 Aplicação do Método dos Elementos Finitos	16
2.3.1 Elemento de Disco	17
2.3.2 Elemento de Eixo	17
2.3.3 Mancais	20
2.4 Equações de Movimento do Rotor	23
2.5 Método Pseudo Modal	24
2.6 Frequências Naturais e Zonas de Instabilidade	25
2.7 Resposta a uma Excitação	26
2.7.1 Massa Desbalanceada	26
2.7.2 Excitação Assíncrona	26
3 MATERIAIS COMPOSTOS	28
3.1 Considerações Gerais	28
3.2 Processos de Fabricação	30
3.3 Propriedades Mecânicas	32
3.3.1 Propriedades de um Lâmina	32
3.3.2 Propriedades de um Laminado	35

3.4	Módulo Equivalente	38
3.5	Módulo Equivalente Amortecido	46
3.6	Fator de Amortecimento Viscoso Aproximado	51
3.7	Modelo Proposto para o Trabalho	52
4	RESULTADOS PRELIMINARES	54
4.1	Dados do Rotor	55
4.1.1	Dados Materiais	55
4.1.2	Dados Geométricos	55
4.2	Análise dos Modos em Flexão	57
4.2.1	Rotores com Mancais Isotrópicos	57
4.2.2	Rotores com Mancais Isotrópicos e Amortecimento Externo	59
4.2.3	Rotores com Mancais Isotrópicos e Termos de Acoplamento	61
4.2.4	Rotores com Mancais Anisotrópicos	63
4.3	Análise dos Modos em Torção	67
5	OTIMIZAÇÃO	70
5.1	Algoritmo de Otimização	73
5.2	Aplicações	75
5.2.1	Otimização da Amplitude em Rotores com Excitação Assíncrona	76
5.2.2	Otimização da Amplitude em Rotores com Excitação Síncrona	78
5.2.3	Otimização das Zonas de Instabilidade	80
5.2.4	Localização Ótima das Frequências Naturais	83
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES	85
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	88
	ANEXO	94

Lista de Figuras

Figura 2.1	Distribuição da deformação na seção transversal de um eixo de rotor com: (a) giro síncrono e mancais isotrópicos; (b) giro síncrono e mancais anisotrópicos; (c) giro sub-síncrono ($\omega = 0.5 \Omega$) e mancais isotrópicos	8
Figura 2.2	Rotor bobinado simplesmente apoiado	11
Figura 2.3	Velocidades instantâneas do disco no sistema de referência	11
Figura 2.4	Coordenadas de um ponto arbitrário P na seção transversal do eixo...	13
Figura 2.5	Elemento finito para o eixo em flexão.....	18
Figura 2.6	Elemento finito para o eixo em torção	20
Figura 2.7	Modelo de um mancal	22
Figura 3.1	Bobinamento circunferencial	31
Figura 3.2	Bobinamento helicoidal	31
Figura 3.3	Bobinamento helicoidal contínuo	32
Figura 3.4	Sistema de eixos de ortotropia e de referência	33
Figura 3.5	Esquema de um laminado com quatro lâminas	35
Figura 3.6	Esforços normais e momentos resultantes por unidade de área em um elemento infinitesimal de um laminado	36
Figura 3.7-a	Módulo longitudinal equivalente para $[+\theta/-\theta/+\theta/-\theta]_s$ em carbono/epóxi	43
Figura 3.7-b	Módulo de cisalhamento equivalente para $[+\theta/-\theta/+\theta/-\theta]_s$ em carbono/epóxi	43
Figura 3.7-c	Módulo longitudinal equivalente para $[+\theta/-\theta/+\theta/-\theta]_s$ em vidro/epóxi	44
Figura 3.7-d	Módulo de cisalhamento equivalente para $[+\theta/-\theta/+\theta/-\theta]_s$ em vidro/epóxi	44
Figura 3.8-a	Módulo longitudinal equivalente para $[+\theta/+\theta/+\theta/+\theta]_s$ em carbono/epóxi	45
Figura 3.8-b	Módulo de cisalhamento equivalente para $[+\theta/+\theta/+\theta/+\theta]_s$ em carbono/epóxi	45
Figura 3.8-c	Módulo longitudinal equivalente para $[+\theta/+\theta/+\theta/+\theta]_s$ em vidro/epóxi.	45
Figura 3.8-d	Módulo de cisalhamento equivalente para $[+\theta/+\theta/+\theta/+\theta]_s$ em vidro/epóxi	45

Figura 3.9	Módulo longitudinal equivalente para $[+\theta/-\theta/(90-\theta)/-(90-\theta)]_s$ em carbono/ epóxi	46
Figura 3.10	Módulo longitudinal equivalente para $[+\theta/-\theta/(90-\theta)/-(90-\theta)]_s$ em vidro/ epóxi	46
Figura 3.11	Módulo longitudinal equivalente para $[0/+\theta/-\theta/90]_s$ em carbono/ epóxi	46
Figura 3.12.	Módulo longitudinal equivalente para $[0/+\theta/-\theta/90]_s$ em vidro/epóxi...	46
Figura 3.13-a	Módulo longitudinal equivalente amortecido para $[+\theta/-\theta/+\theta/-\theta]_s$ em carbono/epóxi	50
Figura 3.13-b	Módulo de cisalhamento equivalente amortecido para $[+\theta/-\theta/+\theta/-\theta]_s$ em carbono/epóxi	50
Figura 3.14-a	Módulo longitudinal equivalente amortecido para $[+\theta/-\theta/+\theta/-\theta]_s$ em vidro /epóxi	50
Figura 3.14-b	Módulo de cisalhamento equivalente amortecido para $[+\theta/-\theta/+\theta/-\theta]_s$ em vidro/epóxi	50
Figura 3.15	η_e para $[+\theta/-\theta/+\theta/-\theta]_s$ em carbono/epóxi	52
Figura 3.16	η_r para $[+\theta/-\theta/+\theta/-\theta]_s$ em carbono/epóxi	52
Figura 3.17	η_e para $[+\theta/-\theta/+\theta/-\theta]_s$ em vidro/epóxi	52
Figura 3.18	η_r para $[+\theta/-\theta/+\theta/-\theta]_s$ em vidro/epóxi	52
Figura 4.1	Resposta a uma massa desbalanceada em um ponto situado a um terço do comprimento do eixo, por elementos finitos e Rayleigh-Ritz...	55
Figura 4.2	Diagrama de Campbell para $\theta = 15^\circ$ com 3, 6 e 9 elementos	56
Figura 4.3	Diagrama de Campbell, resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos e $\theta = 15^\circ$	57
Figura 4.4	Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos e $\theta = 45^\circ$	58
Figura 4.5	Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos e $\theta = 75^\circ$	58
Figura 4.6	Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos, amortecimento externo e $\theta = 15^\circ$	59
Figura 4.7	Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos, amortecimento externo e $\theta = 45^\circ$	59

Figura 4.8	Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos, amortecimento externo e $\theta = 75^\circ$	60
Figura 4.9	Primeiro modo de vibração para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos	61
Figura 4.10	Segundo modo de vibração para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos	61
Figura 4.11	Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos, termos de acoplamentos e $\theta = 15^\circ$ sem amortecimento interno	62
Figura 4.12	Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos, termos de acoplamentos e $\theta = 15^\circ$ com amortecimento interno	62
Figura 4.13	Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos, termos de acoplamentos e $\theta = 45^\circ$ sem amortecimento interno	62
Figura 4.14	Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos, termos de acoplamentos e $\theta = 45^\circ$ com amortecimento interno	62
Figura 4.15	Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos, termos de acoplamentos e $\theta = 75^\circ$ sem amortecimento interno	63
Figura 4.16	Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos, termos de acoplamentos e $\theta = 75^\circ$ com amortecimento interno	63
Figura 4.17	Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais anisotrópicos, $\theta = 15^\circ$ e sem amortecimento interno	64
Figura 4.18	Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais anisotrópicos, $\theta = 15^\circ$ e com amortecimento interno	64
Figura 4.19	Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais anisotrópicos, $\theta = 45^\circ$ e sem amortecimento interno	64
Figura 4.20	Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais anisotrópicos, $\theta = 45^\circ$ e com amortecimento interno	64
Figura 4.21	Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais anisotrópicos, $\theta = 75^\circ$ e sem amortecimento interno	65

Figura 4.22	Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais anisotrópicos, $\theta = 75^\circ$ e com amortecimento interno	65
Figura 4.23	Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em vidro/epóxi com mancais anisotrópicos, $\theta = 15^\circ$ e sem amortecimento interno	66
Figura 4.24	Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em vidro/epóxi com mancais anisotrópicos, $\theta = 15^\circ$ e com amortecimento interno	66
Figura 4.25	Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em vidro/epóxi com mancais anisotrópicos, $\theta = 45^\circ$ e sem amortecimento interno	66
Figura 4.26	Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em vidro/epóxi com mancais anisotrópicos, $\theta = 45^\circ$ e com amortecimento interno	66
Figura 4.27	Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em vidro/epóxi com mancais anisotrópicos, $\theta = 75^\circ$ e sem amortecimento interno	67
Figura 4.28	Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em vidro/epóxi com mancais anisotrópicos, $\theta = 75^\circ$ e com amortecimento interno	67
Figura 4.29	Representação no diagrama de Campbell das frequências naturais para o primeiro modo em torção de um rotor em carbono/epóxi	68
Figura 4.30	Frequências naturais para o primeiro modo em torção de um rotor em carbono/epóxi	68
Figura 4.31	Fator de amortecimento viscoso cisalhante para o primeiro modo em torção de um rotor em carbono/epóxi	68
Figura 4.32	Resposta em frequência para um rotor em carbono/epóxi submetido a um torque $T_r = T_{\text{constante}} + T \cos(\Omega t)$, sem considerar o amortecimento interno	69
Figura 4.33	Resposta em frequência para um rotor em carbono/epóxi submetido a um torque $T_r = T_{\text{constante}} + T \cos(\Omega t)$, considerando o amortecimento interno	69
Figura 5.1	Resposta a uma excitação subsíncrona ($s = 0,5$), para eixo em carbono/epóxi	77
Figura 5.2	Resposta a uma excitação subsíncrona ($s = 0,5$), para eixo em vidro/epóxi	77
Figura 5.3	Amortecimento na primeira velocidade crítica, com excitação subsíncrona ($s = 0,5$), para eixo em carbono/epóxi	78
Figura 5.4	Amortecimento na primeira velocidade crítica, com excitação subsíncrona ($s = 0,5$), para eixo em vidro/epóxi	78

Figura 5.5	Variáveis de projeto do rotor	79
Figura 5.6	Resposta a uma excitação síncrona, para eixo em carbono/epóxi	80
Figura 5.7	Resposta a uma excitação síncrona, para eixo em vidro/epóxi	80
Figura 5.8	Amortecimento na primeira velocidade crítica, com excitação síncrona, para eixo em carbono/epóxi	80
Figura 5.9	Amortecimento na primeira velocidade crítica, com excitação síncrona, para eixo em vidro/epóxi	80
Figura 5.10	Diagrama de Campbell e resposta a uma excitação síncrona para uma configuração inicial de um eixo em carbono/epóxi	82
Figura 5.11	Diagrama de Campbell e resposta a uma excitação síncrona para uma configuração inicial de um eixo em vidro/epóxi	82
Figura 5.12	Diagrama de Campbell e resposta a uma excitação síncrona para a configuração ótima do eixo em carbono/epóxi	82
Figura 5.13	Diagrama de Campbell e resposta a uma excitação síncrona para a configuração ótima do eixo em vidro/epóxi	82
Figura 5.14	Frequências naturais para um rotor em carbono/epóxi na configuração inicial e ótima	84
Figura 5.15	Frequências naturais para um rotor em vidro/epóxi na configuração inicial e ótima	84

Lista de Tabelas

Tabela 4.1	Dados materiais do eixo e do disco	56
Tabela 4.2	Dados dos mancais do rotor	57
Tabela 5.1	Solução ótima para rotores com excitação assíncrona com $s = 0,5$ e $s = 1,5$	77
Tabela 5.2	Solução ótima para rotores com mancais anisotrópicos	79
Tabela 5.3	Solução ótima das zonas de instabilidade.....	81
Tabela 5.4	Localização ótima das velocidades críticas	83

Lista de Símbolos

A_{ij}	matriz de rigidez extensional do laminado;
B_{ij}	matriz de acoplamento do laminado;
C	matriz de amortecimento global;
c	matriz giroscópica elementar do eixo;
d	direção de descida;
D_{ij}	matriz de rigidez a flexão do laminado;
E_1, E_2	módulos de elasticidade longitudinal e trasversal;
E_{eq}^v	módulo longitudinal equivalente amortecido;
E_{eq}	módulo longitudinal equivalente;
F	vetor das forças excitadoras;
G	matriz giroscópica global;
$g(x_i)$	gradiente da função objetivo em x_i ;
G_{12}	módulo de cisalhamento no plano;
G_{eq}^v	módulo de cisalhamento equivalente amortecido;
G_{eq}	módulo de cisalhamento equivalente;
g_D	matriz elementar giroscópica do disco;
h	espessura do laminado;
H	aproximação da Hessiana definida positiva;
h_b	matriz de dissipação elementar do eixo;
h_{bT}	matriz de dissipação em torção elementar do eixo;
h_c	matriz de circulação elementar do eixo;
h_k	espessura da lâmina k ;
I	momento de inércia da seção transversal do eixo;
I_D	momento de inércia do disco;
I_{id}	matriz identidade;
J	momento polar de inércia da seção transversal do eixo;
K	matriz de rigidez global;
K_b	matriz de dissipação global;
K_c	matriz de circulação global;
k_e	matriz de rigidez elementar do eixo;

k_T	matriz de rigidez em torção elementar do eixo;
L	comprimento do elemento do eixo;
L_s	comprimento do eixo;
M	matriz de massa global;
m_θ, c_θ e k_θ	matrizes modais de massa, amortecimento e rigidez;
m, n	$\cos\theta, \sin\theta$;
m_a	matriz de massa elementar do eixo;
M_D	massa do disco;
m_D	matriz de massa elementar do disco;
m_s	matriz de inércia rotacional elementar do eixo;
m_T	matriz de massa em torção elementar do eixo;
M_x, M_y, M_{xy}	momentos resultantes no plano;
N	número de lâminas do laminado;
N_1, N_2	funções de interpolação do elemento;
N_x, N_y, N_{xy}	esforços normais resultantes no plano;
Q_{ij}	matriz constitutiva do material composto no sistema de ortotropia;
\bar{Q}_{ij}	matriz constitutiva do material composto no sistema de referência;
\bar{Q}_v	matriz constitutiva amortecida;
r	posição de um ponto arbitrário P na seção transversal;
S	área da seção transversal do eixo;
s	razão entre a frequência natural e a rotação do eixo;
T_θ	matriz de transformação;
T_D	energia cinética do disco;
T_{Dt}	energia cinética do disco em torção;
T_E	energia cinética do eixo em flexão;
T_{Et}	energia cinética do eixo em torção;
u e w	deslocamentos no sistema de eixos inerciais;
\dot{u}, \dot{w}	velocidades nas direções u e w ;
U	energia de deformação do eixo em flexão;
u^* e w^*	deslocamentos no sistema de rotação do eixo;
U_{1-5}	invariantes do laminado;
U_t	energia de deformação em torção do eixo;
y_c	posição do disco no eixo;

z_k	distância da linha de referência até a k -ésima lâmina;
χ, ϕ, φ	rotações instantâneas nas direções x , y e z ;
$\dot{\chi}, \dot{\phi}$	velocidades angulares instantâneas nas direções x e z ;
$\delta, \dot{\delta}, \ddot{\delta}$	vetores de deslocamento, velocidade e aceleração nodais;
δ_{Li}	decremento logarítimo;
ΔU	energia de dissipação total do laminado;
ΔU_k	energia de dissipação da lâmina k ;
ε	vetor de deformações no plano;
$\dot{\varepsilon}$	vetor de taxa de deformação;
ε^o	vetor de deformação devido ao efeito de membrana;
Φ	ângulo de torção;
γ	deformação cisalhante;
$\dot{\gamma}$	taxa de deformação cisalhante;
γ_g, β_g	parâmetros geométricos do laminado;
η_γ	fator de amortecimento viscoso cisalhante;
η_ε	fator de amortecimento viscoso longitudinal;
κ	vetor de curvatura;
ν_{12}	coeficiente de poisson no plano;
θ	ângulo de bobinagem;
ρ	massa volumétrica do elemento eixo;
σ	tensão longitudinal;
τ	tensão de cisalhamento;
ω_i	frequência natural do modo i ;
Ω	rotação do rotor;
ξ	tolerância de convergência;
ψ_{11}	capacidade de amortecimento específico na direção longitudinal;
ψ_{12}	capacidade de amortecimento específico na direção de cisalhamento;
ψ_{22}	capacidade de amortecimento específico na direção transversal;

Resumo

Este trabalho tem por objetivo analisar, utilizando o método dos elementos finitos, o comportamento dinâmico de rotores em eixos bobinados. Os rotores são formados por um ou dois discos acoplados à um eixo apoiado em mancais flexíveis. Os eixos são, neste caso, fabricados a partir do bobinamento de fibras impregnadas em resina sobre um mandril. Os discos são considerados rígidos e um elemento do tipo viga com módulo equivalente é utilizado para modelar o eixo do rotor. Um modelo de amortecimento interno é introduzido através de um módulo equivalente amortecido.

Inicialmente, são determinadas a resposta a uma massa desbalanceada e as zonas de instabilidade para os modos em flexão de rotores apoiados em mancais com diferentes configurações. Nos modos em torção, são determinadas as freqüências naturais e os respectivos fatores de amortecimento, bem como a resposta em freqüência. Os resultados obtidos com o eixo em carbono/epóxi e em vidro/epóxi, mostraram que o ângulo de bobinagem do eixo pode ter forte influência na localização das freqüências naturais, tanto nos modos em flexão quanto em torção. O amortecimento interno, proveniente do material composto, pode reduzir consideravelmente os picos de amplitudes de vibrações, porém pode gerar instabilidade no sistema.

E por fim, com o objetivo de ressaltar as vantagens e a flexibilidade oferecidas pelo uso de materiais compostos em rotores, um método de otimização foi utilizado para minimizar picos de amplitude, evitar zonas de instabilidade e determinar a posição ótima das velocidades críticas, tendo como variáveis de projeto o ângulo de bobinagem, as rigidezes dos mancais e a posição do disco no eixo.

Abstract

On this work, the goal is to analyse the dynamic behavior of rotors on wounding shaft using the finite element method. The rotors are composed by a shaft, one or two disks and supported by flexible bearings. The shaft is made of fibre/resin in a wounding process. The disks are assumed to be rigid and a beam element with equivalent module is used to model the shaft of rotor. An internal damping model is introduced by a damping equivalent module.

At first, it is determined the response to an unbalance mass and the instability zones for bending modes of the rotors supported by bearings with different configurations. For torsional modes, it is determined the natural frequencies and the loss factor associated, as well as the response on frequency. The results obtained with the shaft on carbon/epoxy and on glass/epoxy shown that the wounding angle has a high influence on the position of the natural frequencies in bending modes and in torsional modes. The internal damping, from the composite material, can decrease considerably the peak of the amplitude, but it can generate instability in the system.

At last, with the objective to emphasize the advantage and the flexibility offered by the use of the composite materials in rotors, an optimization method is used in order to minimize the peak of the amplitude, to avoid instability and to find the optimal position of the critical velocities. The variables design used here were the wounding angle, the stiffness of the bearings and the position of the disk on the shaft.

1 INTRODUÇÃO

Atualmente existe uma grande variedade de máquinas rotativas para as mais diversas aplicações, envolvendo tanto equipamentos de grande porte, tais como as unidades de geração de energia elétrica a partir de fontes hidráulicas ou térmicas, e que operam em velocidades relativamente baixas, como também equipamentos de pequeno porte, como por exemplo bombas criogênicas, ultra-centrífugas e turbo-compressores, que operam em altas velocidades.

Segundo Vance (1988), o sucesso de um projeto de uma máquina rotativa consiste principalmente em:

- evitar velocidades críticas, se possível,
- minimizar a resposta dinâmica nos picos de ressonância, caso seja necessário passar por uma velocidade crítica,
- evitar instabilidade,
- minimizar as vibrações e as cargas transmitidas à estrutura da máquina durante todo o intervalo de operação.

As velocidades críticas pelas quais uma máquina pode passar para atingir sua rotação de trabalho é um dos grandes inconvenientes na dinâmica de rotores. Nestas velocidades, o eixo da máquina pode atingir grandes amplitudes de vibração que podem causar danos irreversíveis nos mancais e demais componentes do rotor. A instabilidade, embora relativamente incomum, tem história de causar prejuízos consideráveis em turbomáquinas, pois pode

aparecer de maneira repentina, sob condições particulares de velocidade e carga, levando o rotor a amplitudes catastróficas.

No caso de um rotor com o eixo em material convencional, os caminhos possíveis para reduzir a amplitude nas velocidades críticas são:

- 1) Balancear o rotor, que significa ir direto à fonte do problema, mas experimentalmente, dificilmente se consegue balancear um rotor com perfeição.
- 2) Alterar a velocidade de rotação da máquina, distanciando-a das velocidades críticas, ou alterar a velocidade crítica através da variação da rigidez dos mancais.
- 3) Se a máquina opera próximo da velocidade crítica e esta velocidade é imprescindível, a solução é adicionar amortecimento externo ao rotor.

Porém, se o eixo é em material composto, há a possibilidade de se alterar as velocidades críticas e aumentar o amortecimento do sistema apenas pela manipulação das propriedades de ortotropia do material composto, dada pela orientação das fibras, assim como pela espessura e pelo posicionamento das lâminas.

Dentre as várias vantagens trazidas pelo uso dos materiais compostos na engenharia tais como peso, resistência mecânica, resistência a ambientes corrosivos, facilidade na fabricação de peças de geometria complexa, etc., os materiais compostos possuem uma grande capacidade de amortecimento. Esta propriedade pode ser utilizada na dinâmica de rotores, onde necessita-se reduzir as amplitudes de vibração quando este é excitado em uma de suas velocidades críticas.

Mas, se por um lado, o amortecimento interno, inerente ao material composto, pode reduzir picos de amplitude nas velocidades críticas, por outro, ele pode gerar instabilidade no sistema.

Este trabalho tem portanto por objetivo, analisar, utilizando o método dos elementos finitos, o comportamento dinâmico de rotores em eixos bobinados. Os eixos são, neste caso, fabricados a partir do bobinamento de fibras impregnadas em resina sobre um mandril. O disco é considerado rígido e um elemento do tipo viga com módulo equivalente é utilizado para modelar o eixo do rotor. Um modelo de amortecimento interno foi introduzido através de um módulo equivalente amortecido. A resposta em frequência devida a uma massa desbalanceada foi determinada para diferentes configurações do rotor, assim como a análise de instabilidade. E, por fim, um método de otimização foi utilizado para minimizar picos de amplitude, evitar zonas de instabilidade e determinar a localização ótima das velocidades críticas, tendo como variáveis de projeto o ângulo de bobinamento, rigidezes dos mancais e posição do disco no eixo.

No capítulo 2, é apresentada uma breve revisão bibliográfica dos principais problemas relacionados a máquinas rotativas, bem como o equacionamento de rotores com o eixo em material composto pelo método dos elementos finitos, onde os elementos de eixo, disco e mancais são modelados a partir das expressões das energias potencial e cinética e do trabalho virtual de cada um dos elementos.

No capítulo 3 é feita uma revisão dos processos de fabricação de eixos bobinados, das propriedades macro-mecânicas dos materiais compostos laminados, bem como a definição do módulo equivalente a ser usado. Também é feita uma aproximação de um módulo equivalente amortecido para representar as propriedades de amortecimento do material composto.

No capítulo 4 são apresentados os resultados preliminares de resposta a uma massa desbalanceada, diagrama de Campbell e análise de instabilidade para rotores com o eixo em carbono/epóxi e vidro/epóxi, apoiados sobre mancais com diferentes configurações.

No capítulo 5, um método de otimização é utilizado para minimizar picos de amplitude, evitar zonas de instabilidades e determinar a localização ótima das velocidades críticas.

No capítulo 6 são apresentadas as conclusões dos resultados obtidos bem como sugestões para trabalhos posteriores.

2 FUNDAMENTOS DA DINÂMICA DE ROTORES

2.1 INTRODUÇÃO

A grande maioria dos problemas encontrados em dinâmica de rotores envolve o giro síncrono que é caracterizado quando a frequência de giro é igual à velocidade de rotação do eixo. Sempre quando há massa desbalanceada em alguma parte rotativa do rotor, ocorre o giro síncrono, Vance (1988). Quando uma das frequências naturais do rotor é excitada por uma massa desbalanceada, ele pode atingir amplitudes de vibrações elevadas que podem danificar componentes do rotor bem como comprometer o bom funcionamento da máquina.

O restante minoritário dos problemas envolve o giro não-síncrono ou vibração não-síncrona que pode ser subdividido em três tipos, Vance (1988):

- 1) vibrações super-síncronas devidas ao desalinhamento do eixo (a frequência é geralmente duas vezes a velocidade do eixo);
- 2) vibrações sub-síncrona e super-síncrona devido as variações cíclicas de parâmetros, principalmente causados por folgas no conjunto de mancais ou atrito do eixo;

3) giro do rotor não-síncrono (geralmente sub-síncrono) que o torna instável, tipicamente quando a velocidade limite de instabilidade é alcançada.

Os dois primeiros tipos de problema apresentam soluções óbvias tais como: alinhar o eixo, apertar o conjunto de mancais e eliminar o atrito. O terceiro tipo, embora relativamente incomum, tem história de causar prejuízos consideráveis em turbomáquinas e são muito mais difíceis de solucionar que os problemas de desbalanceamento. Neste caso, a instabilidade pode aparecer de maneira repentina, sob condições particulares de velocidade e carga, levando o rotor a amplitudes catastróficas.

No entanto, a instabilidade em máquinas rotativas não está ligada apenas ao giro sub-síncrono. A instabilidade em dinâmica de rotores é normalmente produzida por forças que são tangenciais à órbita de giro do rotor, agindo na mesma direção do movimento instantâneo. Estas forças são conhecidas também por forças desestabilizadoras. A maioria das forças desestabilizadoras em turbomáquinas são representadas pelos coeficientes de acoplamento de rigidez, K_{xz} e K_{zx} .

Existem, também, forças desestabilizadoras produzidas pelo amortecimento interno do eixo de rotor. Medidas experimentais têm mostrado que o amortecimento interno é não viscoso, mas modelá-lo como amortecimento viscoso é uma aproximação útil para análise de estabilidade acima de um intervalo limite de frequências, Vance (1988).

Para rotores com o eixo em material convencional, a influência do amortecimento interno pode ser na maioria das vezes omitida. Porém, para rotores com o eixo em material composto, o amortecimento interno pode ser até duas vezes maior, Wettergren (1996). Wettergren (1996) classifica o amortecimento interno em rotores de duas formas: histerético e estrutural. O amortecimento histerético é causado por forças de histerese no material que surgem como resultado da deformação do eixo. Já o amortecimento estrutural, tem como principal fonte o atrito entre os componentes do rotor, da mesma forma que para rotores convencionais. Na maioria dos seus trabalhos,

Wettergren (1994), Wettergren *et al.* (1996) e Wettergren (1996), o amortecimento histerético é tratado como sendo um amortecimento viscoso equivalente. Isto é feito através da equivalência entre as energias dissipadas por ciclo pelo amortecimento histerético e o amortecimento viscoso.

Em diversos trabalhos, tais como Zorzi *et al.* (1977), Taylor *et al.* (1995), Melanson *et al.* (1998) e Ku (1998), os efeitos do amortecimento interno (viscoso e/ou histerético) do eixo em material isotrópico têm sido estudados na análise dinâmica de rotores. Verificou-se que ambos os amortecimentos internos podem ter forte influência na estabilidade de um rotor, sendo que o histerético provoca instabilidade em todos os modos "forward", enquanto que, o amortecimento viscoso interno provoca instabilidade nos modos "forward" apenas após a primeira velocidade crítica. Verificou-se também que na presença de mancais com rigidez anisotrópica e amortecimento viscoso externo, a velocidade limite de estabilidade tende a aumentar.

A instabilidade em rotores foi bastante estudada para casos em que o eixo é submetido a uma carga axial, Chen *et al.* (1990), Chen *et al.* (1995), Krader (1997), Chen *et al.* (1997), Chen *et al.* (1998). Nestes casos, o método de Bolotin foi usado na construção do diagrama de instabilidade para vários valores de rotação e diferentes condições de carga do eixo.

Em Özgüven *et al.* (1984), o amortecimento interno foi incluído na análise de um rotor com eixo em aço a fim de determinar as frequências "forward" e "backward", os modos correspondentes, a resposta a uma massa desbalanceada e a instabilidade do sistema. Observou-se que o amortecimento interno em um sistema rotativo não afeta a resposta em desbalanceamento para mancais isotrópicos, ao contrário do que acontece para mancais anisotrópicos. Se os mancais são isotrópicos, forças centrífugas devido ao desbalanceamento fazem o eixo defletir e girar em torno do eixo neutro na velocidade de rotação do eixo, seguindo uma órbita circular. Ou seja, a forma de deflexão do eixo permanece inalterada durante o movimento. Portanto, em um eixo com giro síncrono e órbita circular, as deformações não variam durante o giro, Figura 2.1a. Conseqüentemente, o amortecimento interno,

inerente ao material, não afeta a amplitude da resposta. Porém, se o rotor está apoiado sobre mancais anisotrópicos, a órbita de giro é elíptica, fazendo com que as deformações variem proporcionalmente à diferença entre os eixos da elipse, Figura 2.1b. Neste caso, o amortecimento interno do eixo pode afetar consideravelmente a amplitude da resposta em desbalanceamento.

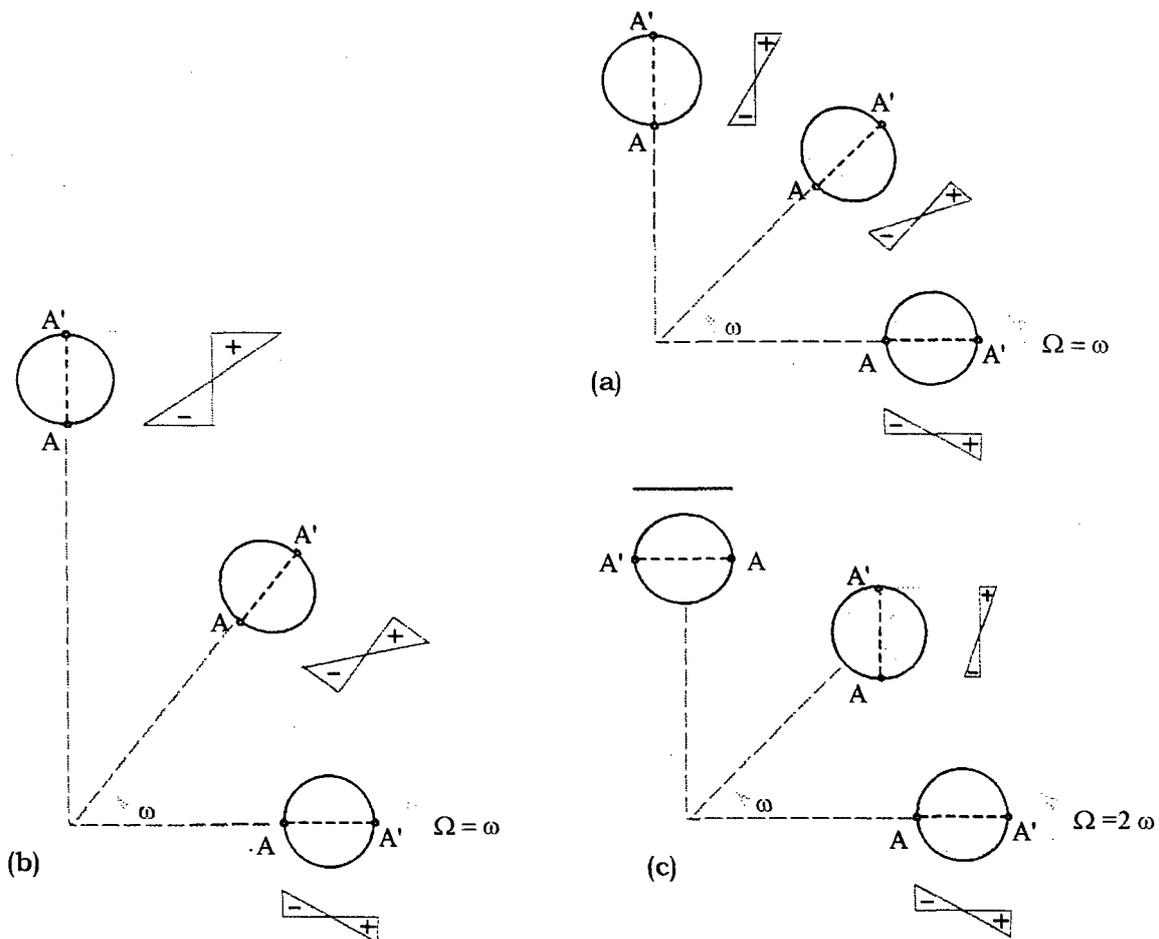


Figura 2.1 - Distribuição da deformação na seção transversal de um eixo de rotor com: (a) giro síncrono e mancais isotrópicos; (b) giro síncrono e mancais anisotrópicos; (c) giro sub-síncrono ($\omega = 0.5 \Omega$) e mancais isotrópicos.

Uma forma do amortecimento interno afetar a resposta de um rotor com mancais isotrópicos é através de uma excitação assíncrona. Neste caso, apesar do rotor girar numa órbita circular, as deformações na seção transversal do eixo irão variar na medida que este gira, pois a frequência de giro é diferente da velocidade de rotação do rotor, Figura 2.1c.

Em Gupta *et al.* (1998), medidas experimentais e numéricas do fator de amortecimento foram feitas para um rotor com o eixo em carbono/epóxi tanto

em repouso quanto em movimento. Os resultados experimentais mostraram que, à medida que a órbita de giro do rotor tornava-se menos elíptica, o fator de amortecimento diminuía, comprovando o esperado pela teoria. Na simulação numérica, Gupta utilizou um modelo de viga com módulo equivalente e representou o amortecimento interno histerético como sendo proporcional à taxa de deformação do eixo. Assim, devido ao efeito de rotação do eixo, o amortecimento interno apresenta uma componente radial que se comporta de maneira semelhante a um amortecimento viscoso, além de ser destabilizante após a primeira crítica. E em Singh *et al.* (1996), a resposta a uma massa desbalanceada e a órbita de giro de um rotor com o eixo em carbono/epóxi foram obtidas experimentalmente. Os valores das primeiras velocidades críticas obtidas experimentalmente foram comparados com valores teóricos obtendo boa concordância entre os resultados.

Na simulação numérica da dinâmica de rotores, a formulação de um modelo matemático que represente um sistema rotativo requer o conhecimento prévio de parâmetros de projeto, como dimensões e dados dos materiais. É ainda necessário dispor de hipóteses simplificadoras que viabilizam o modelo numérico, sem contudo descaracterizar o seu comportamento. A literatura apresenta um farto material sobre a obtenção das equações de movimento de rotores, destacando-se o método das Matrizes de Transferência, Rayleigh-Ritz e elementos finitos, Nelson *et al.* (1976), Nelson (1980), Vance (1988), Lalanne *et al.* (1998), Oliveira (1999), Pereira (1999), Jacquet-Richardet *et al.* (2000), entre outros. Para rotores mais complexos, a análise do comportamento dinâmico geralmente é feita utilizando o método dos elementos finitos. Na sua essência, o método dos elementos finitos expressa o deslocamento de qualquer ponto do sistema contínuo em termos dos deslocamentos de um conjunto finito de pontos, ditos pontos nodais, multiplicados por uma função de interpolação. Este método produz resultados satisfatórios no estudo de problemas estruturais, sendo utilizado em um grande número de programas comerciais voltados para a análise estática e dinâmica de sistemas mecânicos.

Neste trabalho, o método dos elementos finitos é usado para analisar o comportamento dinâmico de rotores em eixo bobinado. Com o objetivo de obter modos em flexão e torção, um elemento de viga do tipo Euler - Bernoulli, com função de interpolação cúbica e quatro graus de liberdade, é usado para a análise dos modos em flexão, e um elemento de barra com dois graus de liberdade é usado para a análise dos modos em torção.

Primeiramente, serão determinadas a energia cinética T e a energia de deformação U do sistema rotativo. Em seguida, o método dos elementos finitos é empregado, e por fim, as equações de movimento serão determinadas através das Equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Fq_i \quad (2.1)$$

onde q_i é a i -ésima coordenada generalizada e Fq_i é o i -ésimo esforço generalizado. O trabalho virtual δW das forças externas dos mancais do sistema rotativo também será determinado e suas propriedades introduzidas na equação homogênea do rotor.

Determinadas as equações de movimento do rotor, um método de redução modal será utilizado para diminuir o número de graus de liberdade e conseqüentemente, o custo computacional. Em seguida, as freqüências naturais, zonas de instabilidades e resposta em freqüência serão determinadas a partir de soluções clássicas da dinâmica de rotores, Lalanne *et al.* (1998).

2.2 ENERGIAS CINÉTICA E DE DEFORMAÇÃO DOS COMPONENTES DE UM ROTOR

Na configuração mais simples de um rotor em eixo bobinado, pode-se considerar o disco rígido, o eixo flexível em material composto com ângulo de bobinagem θ e simplesmente apoiado sobre mancais flexíveis, como mostra a figura abaixo:

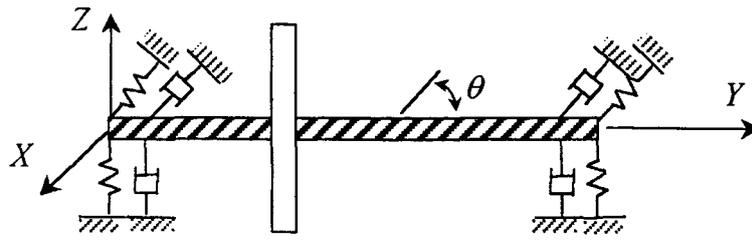


Figura 2.2 - Rotor bobinado simplesmente apoiado

A energia cinética de um elemento de um rotor em flexão pode ser determinada a partir da definição do campo de deslocamentos e das velocidades angulares instantâneas, Lalanne *et al.*(1998). O disco, sendo considerado rígido, é caracterizado somente pela energia cinética, que é da seguinte forma:

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (u^2 + w^2) + \frac{1}{2} I_{Dx} (\dot{\chi}^2 + \dot{\phi}^2) + I_{Dy} \Omega \dot{\chi} \phi + \frac{1}{2} I_{Dy} \Omega^2 \quad (2.2)$$

onde M_D é a massa do disco, u e w são os deslocamentos do centro de inércia do disco, I_{Dx} e I_{Dy} são os momentos de inércia do disco no sistema de coordenadas de referência. A velocidade de rotação do rotor é Ω e, $\dot{\phi}$ e $\dot{\chi}$ são as velocidades instantâneas, Figura 2.3.

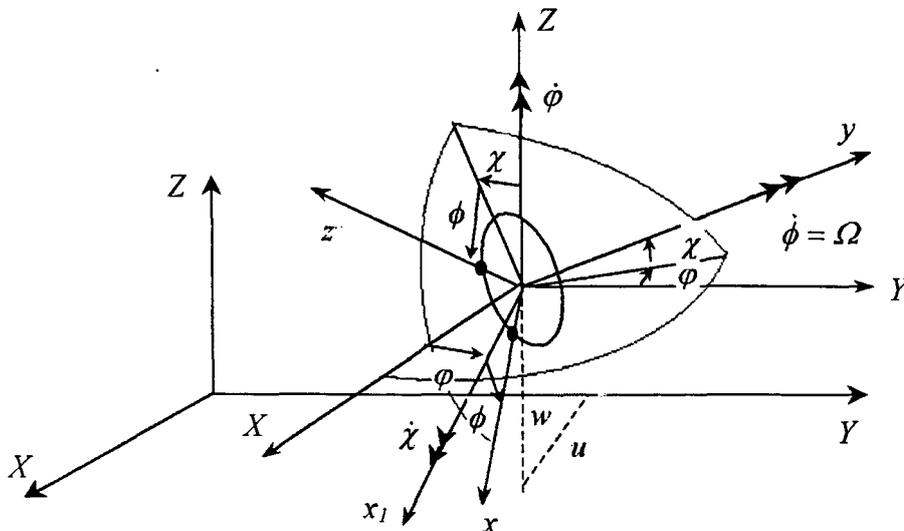


Figura 2.3 - Velocidades instantâneas do disco no sistema de referência.

Um elemento de eixo do rotor é representado como sendo uma viga de seção transversal circular e é caracterizado pela energia cinética e pela energia

de deformação. A formulação geral da energia cinética para o eixo é uma extensão da formulação da energia cinética do disco, eq. (2.2). Para um elemento de comprimento L , a expressão para a energia cinética é:

$$T_E = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\chi}^2 + \dot{\phi}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2 \rho I \Omega \int_0^L \dot{\chi} \phi dy \quad (2.3)$$

onde ρ é a massa volumétrica do elemento, S é a área da seção transversal e I é o momento de inércia da seção transversal.

A expressão geral para energia de deformação em flexão do eixo é da seguinte maneira:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon' \sigma dV \quad (2.4)$$

Convencionalmente, as forças do amortecimento interno são tomadas como sendo proporcionais à taxa de deformação do eixo, pois devido a rotação do eixo, o amortecimento hysterético se comporta de maneira similar ao amortecimento viscoso, Gupta *et al.* (1998). Em Zorzi *et al.* (1977), Özgüven *et al.* (1984) e em Ku (1998), a relação tensão-deformação para rotores com o eixo em material isotrópico, que inclui o efeito do amortecimento interno viscoso, é dada como:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta_v E \dot{\varepsilon} \quad (2.5)$$

onde E é o módulo de elasticidade e η_v o fator de amortecimento viscoso do material. Neste trabalho, as propriedades de ortotropia do material composto são representadas pelo módulo longitudinal equivalente E_{eq} e o amortecimento hysterético interno pelo módulo longitudinal equivalente amortecido E_{eq}^v . A relação tensão-deformação é então tomada como sendo:

$$\sigma = E_{eq} \varepsilon + E_{eq}^v \dot{\varepsilon} \quad (2.6)$$

Mais adiante, o amortecimento histerético introduzido pelo material composto será aproximado por um amortecimento viscoso a partir de uma equivalência entre as energias de dissipação de ambos os mecanismos. Medidas experimentais têm mostrado que essa aproximação é bastante útil para análise de instabilidade em rotores, Vance (1988), Wettergren (1996).

Considerando pequenas deformações e somente o termo linear, a deformação longitudinal e a taxa de deformação longitudinal para uma viga submetida a esforços de flexão são:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \\ \dot{\varepsilon} &= -x \frac{\partial^2 \dot{u}^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 \dot{w}^*}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde u^* e w^* são os deslocamentos do centro geométrico no sistema de rotação do eixo, Figura 2.4.

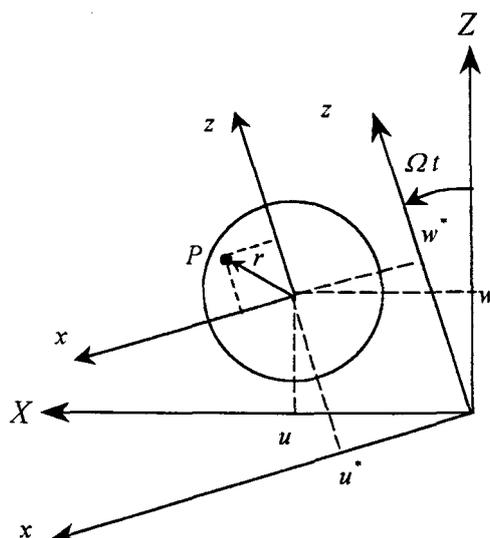


Figura 2.4 - Coordenadas de um ponto arbitrário P na seção transversal do eixo.

Substituído as eqs. (2.6) e (2.7) na eq. (2.4), tem-se a energia de deformação em flexão como sendo:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{E_{eq}}{2} \int_0^L \int_S \left(-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dS dy + \\
 &\frac{E_{eq}^\psi}{2} \int_0^L \int_S \left(-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) \left(-x \frac{\partial^2 \dot{u}^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 \dot{w}^*}{\partial y^2} \right) dS dy
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Definindo os momentos de inércia da seção transversal em relação a x e a z , tem-se:

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_S z^2 dS \\
 I_z &= \int_S x^2 dS
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

onde, da condição de simetria do eixo, tem-se que $I_x = I_z = I$.

A relação entre os deslocamentos u^* e w^* e os deslocamentos u e w medidos no sistema de eixos inerciais, dada pela Figura 2.4, é:

$$\begin{aligned}
 u^* &= u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \\
 w^* &= u \sin \Omega t + w \cos \Omega t
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

e derivando a eq. (2.10) em relação ao tempo, tem-se as velocidades:

$$\begin{aligned}
 \dot{u}^* &= \dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t - \Omega u \sin \Omega t - \Omega w \cos \Omega t \\
 \dot{w}^* &= \dot{u} \sin \Omega t + \dot{w} \cos \Omega t + \Omega u \cos \Omega t - \Omega w \sin \Omega t
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Substituindo as eqs. (2.9), (2.10) e (2.11) na eq. (2.8), e considerando as condições de simetria da seção transversal do eixo, tem-se a equação da energia de deformação em flexão de um elemento de eixo em função das componentes u e w do sistema inercial:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} E_{eq} I \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \\
 &\frac{1}{2} E_{eq}^\psi I \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} \right) \right] dy + \\
 &\frac{1}{2} E_{eq}^\psi I \int_0^L \left[-\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \Omega \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] dy
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

A expressão geral para a energia cinética de um elemento de eixo em torção é da forma, Lalanne *et al.*(1998):

$$T_{Et} = \frac{1}{2} \rho J \int_0^L \dot{\Phi}^2 dy \quad (2.13)$$

onde Φ é o ângulo de torção e J é o momento polar de inércia da seção transversal.

E a expressão geral para a energia de deformação do eixo em torção é:

$$U_t = \frac{1}{2} \int_V \tau \gamma dV \quad (2.14)$$

De modo semelhante à eq. (2.6), a tensão de cisalhamento pode ser definida como:

$$\tau = G_{eq} \gamma + G_{eq}^{\psi} \dot{\gamma} \quad (2.15)$$

onde G_{eq} é o módulo de cisalhamento equivalente, G_{eq}^{ψ} é o módulo de cisalhamento equivalente amortecido, γ é a deformação cisalhante e $\dot{\gamma}$ é a taxa de deformação cisalhante. Substituindo a eq. (2.15) na eq. (2.14), obtém-se:

$$U_t = \frac{1}{2} \int_V G_{eq} \gamma^2 dV + \frac{1}{2} \int_V G_{eq}^{\psi} \dot{\gamma} \gamma dV \quad (2.16)$$

Da resistência dos materiais, tem-se que:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{T_r r}{J} \\ d\Phi &= \frac{T_r dy}{G J} \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde T_r é o torque aplicado e r é a posição de um ponto arbitrário P na seção transversal. Das eqs. (2.17) e (2.16), pode-se chegar à expressão de energia de deformação em torção como sendo:

$$U_t = \frac{1}{2} G_{eq} \int_V \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 r^2 dV + \frac{1}{2} G_{eq}^{\psi} \int_V \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} r^2 dV \quad (2.18)$$

Sabendo-se que $J = \int_S r^2 dS$, a eq. (2.18) torna-se:

$$U_t = \frac{1}{2} G_{eq} J \int_0^L \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 dy + \frac{1}{2} G_{eq}^{\psi} J \int_0^L \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dy \quad (2.19)$$

Para o disco, a expressão geral para a energia cinética em torção é da forma:

$$T_{Dt} = \frac{1}{2} I_{Dy} \dot{\Phi}_i^2 \quad (2.20)$$

2.3 APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Para o estudo do comportamento dinâmico de rotores pelo método dos elementos finitos, um elemento de viga do tipo Euler - Bernoulli é usado para análise dos modos em flexão, e um elemento de barra é usado para análise dos modos em torção, desacoplados da análise dos modos em flexão. Sabe-se que em materiais compostos pode haver diversos tipos acoplamentos, inclusive entre flexão e torção. Porém, devido a configuração das lâminas do eixo dos rotores analisados neste trabalho, este tipo de acoplamento pode ser omitido (maiores detalhes sobre acoplamentos em laminados são dados no capítulo 3). O disco é considerado rígido e as propriedades de rigidez e de amortecimento dos mancais são introduzidas nas matrizes elementares correspondentes. Este modelo de viga foi usado em diversos trabalhos na determinação das frequências naturais, fatores de amortecimento, resposta em frequência e resposta no tempo de máquinas rotativas e comparados com modelos mais robustos, tais como modelos de cascas, tridimensionais e o chamado

"layerwise", assim como com alguns resultados experimentais, obtendo uma boa correlação, Singh *et al.* (1994), Singh *et al.* (1996)², Lalanne *et al.* (1998), Gupta *et al.* (1998), Oliveira (1999) e Jacquet-Richardet *et al.* (2000). Maiores detalhes do uso e da limitação deste método em rotores compostos serão dados no capítulo 3.

2.3.1 Elemento de Disco

O movimento do elemento de disco é descrito por duas translações u e w , e duas inclinações χ e φ . O vetor de deslocamento nodal do centro do disco δ é dado por:

$$\delta = \{u \quad w \quad \chi \quad \varphi\}^t \quad (2.21)$$

e aplicando a equação de Lagrange, eq. (2.1), na equação de energia cinética do disco, eq. (2.2), tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = m_D \ddot{\delta} + \Omega g_D \dot{\delta} \quad (2.22)$$

onde m_D é a matriz de massa elementar e g_D a matriz giroscópica elementar do disco, dadas no anexo.

2.3.2 Elemento de Eixo

O eixo é modelado como viga com uma seção transversal circular constante. O elemento finito usado para a análise em flexão do rotor é um elemento de viga clássico, do tipo Euler-Bernoulli, com dois nós, quatro deslocamentos e quatro inclinações, Figura 2.5.

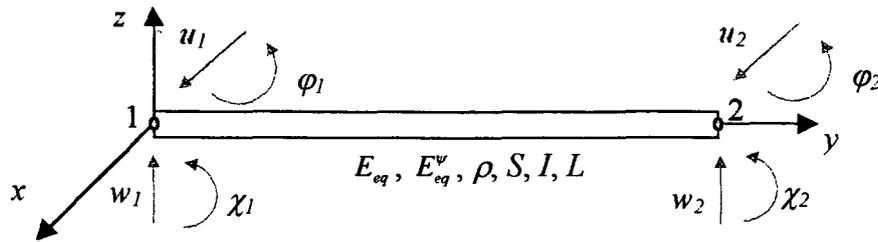


Figura 2.5 - Elemento finito para o eixo em flexão.

As relações entre deslocamento e inclinação são dadas como:

$$\chi = \frac{\partial w}{\partial y} \quad e \quad \varphi = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.23)$$

e o vetor de deslocamento nodal de um elemento de eixo é:

$$\delta = \{u_1 \quad w_1 \quad \chi_1 \quad \varphi_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \chi_2 \quad \varphi_2\}^t \quad (2.24)$$

que inclui os deslocamentos δu e δw correspondentes ao movimento nas direções x e z :

$$\begin{aligned} \delta_u &= \{u_1 \quad \varphi_1 \quad u_2 \quad \varphi_2\}^t \\ \delta_w &= \{w_1 \quad \chi_1 \quad w_2 \quad \chi_2\}^t \end{aligned} \quad (2.25)$$

As funções de deslocamento são definidas como:

$$\begin{aligned} u &= N_1(y)\delta u \\ w &= N_2(y)\delta w \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde $N_1(y)$ e $N_2(y)$ são as funções de interpolação do elemento:

$$\begin{aligned} N_1(y) &= \left\{ 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; \quad -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \quad \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \quad \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right\} \\ N_2(y) &= \left\{ 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; \quad y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \quad \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \quad -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Substituindo a eq. (2.26) e suas derivadas na eq. (2.3), a energia cinética do eixo em flexão torna-se:

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L \left[\delta \dot{u}^T N_1^T N_1 \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T N_2^T N_2 \delta \dot{w} \right] dy + \\
 & \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left[\delta \dot{u}^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta \dot{w} \right] dy - \\
 & 2\rho I \Omega \int_0^L \left[\delta \dot{u}^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta \dot{w} \right] dy + \rho I L \Omega^2
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

e aplicando a equação de Lagrange eq. (2.1) na eq. (2.28), tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = (m_a + m_s) \ddot{\delta} + \Omega c \dot{\delta} \tag{2.29}$$

onde m_a , m_s e c são as matrizes elementares de massa, de inércia rotacional e giroscópica, dadas no anexo.

A energia de deformação em flexão da eq. (2.12) após a introdução da eq. (2.26) e suas derivadas, torna-se:

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{E_{eq} I}{2} \int_0^L \left[\delta u^T \frac{d^2 N_1^T}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} \delta u + \delta w^T \frac{d^2 N_2^T}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \delta w \right] dy + \\
 & \frac{E_{eq}^{\psi} I}{2} \int_0^L \left[\delta u^T \frac{d^2 N_1^T}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} \delta u + \delta w^T \frac{d^2 N_2^T}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \delta w \right] dy + \\
 & \frac{E_{eq}^{\psi} I}{2} \int_0^L \left[-\Omega \delta u^T \frac{d^2 N_1^T}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \delta w + \Omega \delta w^T \frac{d^2 N_2^T}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} \delta u \right] dy
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

e, aplicando a equação de Lagrange eq. (2.1) na eq. (2.30), tem-se:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = h_b \dot{\delta} + (k_e + \Omega h_c) \delta \tag{2.31}$$

onde k_e , h_b e h_c são as matrizes elementares de rigidez, de dissipação e de circulação, dadas em anexo. As matrizes h_b e h_c estão relacionadas com o módulo equivalente amortecido E_{eq}^{ψ} , ou seja, com o amortecimento hysterético do material composto.

Para a análise em torção do eixo, foi utilizado um elemento linear com um grau de liberdade por nó, Figura 2.6, tal como:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 - \frac{y}{L}, & \frac{y}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

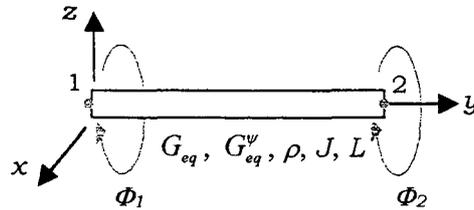


Figura 2.6 - Elemento finito para o eixo em torção.

e a partir das eqs (2.13) e (2.19), as matrizes elementares de massa, de rigidez e de dissipação do eixo em torção são facilmente obtidas e são dadas por:

$$\begin{aligned} m_T &= \frac{J\rho L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ k_T &= \frac{G_{eq}J}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ h_{bT} &= \frac{G_{eq}^\psi J}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.33)$$

O momento de inércia do disco proveniente da energia cinética em torção dada na eq. (2.20), foi acrescentado à matriz de massa do disco m_D , conforme mostrado no anexo.

2.3.3 Mancais

As características de um sistema rotativo são fortemente influenciadas pelos mancais. Isto porque a rigidez do sistema é determinada pela rigidez dos mancais agindo em série com a rigidez do eixo, e o amortecimento do sistema é em grande parte fornecido pelos mancais, Vance (1988).

Mancais são dispositivos responsáveis pela ligação entre a parte móvel e a estrutura fixa de uma máquina rotativa. Além de absorvedor de energia,

outra importante função dos mancais é o de guiar ou restringir graus de liberdade durante a movimentação do eixo, Oliveira (1999).

Os dois tipos de mancais mais usados são: mancais de rolamento e mancais de fluido. Os mancais de rolamento são usados freqüentemente em turbinas de aviões, pois avisam previamente antes de ocorrer uma falha, como por exemplo, vibrações em alta freqüência e ruídos. O uso da teoria de contato de Hertz, assim como análises experimentais, podem fornecer as propriedades de rigidez e de amortecimento. Porém, se os mancais de rolamento são montados sobre elastômeros, as propriedades de rigidez e amortecimento são fornecidas quase que inteiramente pelo elastômero. Para aplicações industriais, os mancais de fluido são mais usados devido a sua longa vida. A maioria dos mancais de fluido são hidrostáticos, onde a carga é suportada pela pressão hidrostática, ou hidrodinâmicos, onde a carga é suportada pela pressão hidrodinâmica gerada pelo movimento do rotor. Nestes casos, as propriedades de rigidez e amortecimento são obtidas a partir da solução da equação de Reynolds, Vance (1988).

Neste trabalho, os termos de rigidez e amortecimento viscoso dos mancais são assumidos conhecidos. A Figura 2.7 mostra graficamente o modelo de um mancal, onde:

k_{xx} , k_{zz} , c_{xx} e c_{zz} são rigidezes e amortecimentos nas direções X e Z do eixo.

k_{xz} , c_{xz} são a rigidez e o amortecimento aplicados na direção X porém com efeitos na direção Z .

k_{zx} , c_{zx} são a rigidez e o amortecimento aplicados na direção Z porém com efeitos na direção X .

Os quatro últimos termos são denominados como termos de acoplamentos.

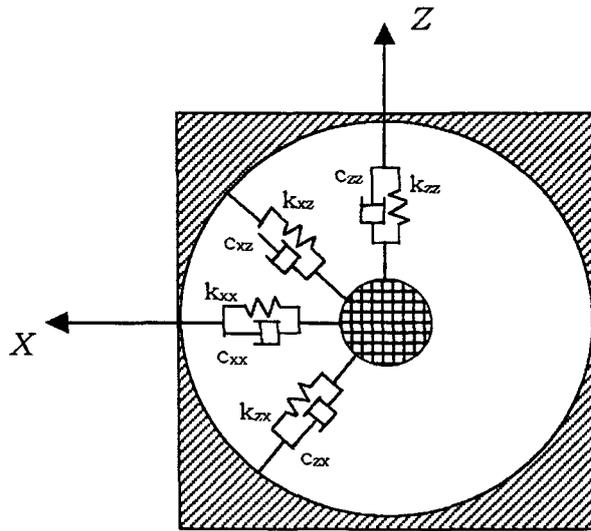


Figura 2.7 - Modelo de um mancal.

O trabalho virtual δW das forças agindo sobre os mancais é dado como, Lalanne *et al.* (1998):

$$\begin{aligned} \delta W = & -k_{xx} u \delta u - k_{xz} w \delta u - k_{zz} w \delta w - k_{zx} u \delta w \\ & - c_{xx} \dot{u} \delta u - c_{xz} \dot{w} \delta u - c_{zz} \dot{w} \delta w - c_{zx} \dot{u} \delta w \end{aligned} \quad (2.34)$$

ou

$$\delta W = F_u \delta u + F_w \delta w \quad (2.35)$$

como $F_\chi = F_\phi = 0$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_\chi \\ F_w \\ F_\phi \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{zx} & 0 & k_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \chi \\ w \\ \phi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & c_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zx} & 0 & c_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\chi} \\ \dot{w} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

A primeira matriz é a matriz de rigidez do mancal e a segunda, a matriz de amortecimento viscoso do mancal.

2.4 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DO ROTOR

O sistema de equações diferenciais que descreve o movimento do rotor é obtido através da montagem das matrizes elementares do(s) disco(s), do eixo e dos mancais, e pode ser colocado na forma:

$$M \ddot{\delta} + (K_b + C + \Omega G) \dot{\delta} + (K + \Omega K_c) \delta = F \quad (2.37)$$

onde

- F é o vetor das forças excitadoras;
- M é a matriz de massa global do sistema, obtida a partir das matrizes de massa elementares m_D , m_a e m_s ;
- C é a matriz de amortecimento global obtida a partir da matriz de amortecimento dos mancais,
- G é a matriz giroscópica global do rotor obtida a partir das matrizes giroscópicas elementares do disco e do eixo, g_D e c ;
- K é a matriz de rigidez global obtida a partir da matriz de rigidez elementar do eixo k_e e da matriz de rigidez elementar dos mancais;
- K_b e K_c são as matrizes de dissipação e de circulação globais obtidas a partir da equivalência entre o amortecimento histerético e o viscoso, dado como Wettergren (1996):

$$\begin{aligned} K_b &= \frac{H_b}{\pi\omega} \\ K_c &= \frac{H_c}{\pi\omega} \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde H_b e H_c são as matrizes globais correspondentes às matrizes elementares h_b e h_c , e ω é a matriz diagonal das frequências naturais. Uma demonstração

analítica desta equivalência para sistema com um grau de liberdade pode ser encontrada em Lalanne *et al.* (1986).

- $\ddot{\delta}$, $\dot{\delta}$ e δ são os vetores de aceleração nodal, velocidade nodal e deslocamento nodal, respectivamente.

2.5 MÉTODO PSEUDO MODAL

O método pseudo modal é usado para reduzir o número de graus de liberdade do sistema da eq.(2.37) e conseqüentemente o custo computacional, utilizando apenas os primeiros modos do sistema homogêneo, não giroscópico e não amortecido. Da eq. (2.37), a base modal é definida pela solução da equação de ordem N_t :

$$M\ddot{\delta} + K^*\delta = 0 \quad (2.39)$$

onde K^* é obtida da matriz de rigidez K sem os termos de acoplamento K_{xz} e K_{zx} . Os n primeiros modos $[\Theta] = [\Theta_1, \dots, \Theta_n]$, onde $n \ll N_t$, obtidos a partir da eq. (2.39), são usados para obter um novo vetor:

$$\delta = \Theta p \quad (2.40)$$

onde, substituindo na eq. (2.37) e em seguida pré-multiplicando por Θ^T :

$$\Theta^T M \Theta \ddot{p} + \Theta^T (K_b + C + \Omega G) \Theta \dot{p} + \Theta^T (K + \Omega K_c) \Theta p = \Theta^T F \quad (2.41)$$

ou

$$m_\Theta \ddot{p} + c_\Theta \dot{p} + k_\Theta p = f_\Theta \quad (2.42)$$

com

$$\begin{aligned}
m_{\Theta} &= \Theta^T M \Theta, \\
c_{\Theta} &= \Theta^T (K_b + C + \Omega G) \Theta, \\
k_{\Theta} &= \Theta^T (K + \Omega K_c) \Theta, \\
f_{\Theta} &= \Theta^T F.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

onde m_{Θ} , c_{Θ} e k_{Θ} são as matrizes modais de massa, de amortecimento e de rigidez.

2.6 FREQUÊNCIAS NATURAIS E ZONAS DE INSTABILIDADE

A solução da eq. (2.42) pode ser dada por:

$$p = \Lambda e^{\beta t} \tag{2.44}$$

Substituindo a eq. (2.44) na forma homogênea da eq. (2.42) obtêm-se:

$$[\beta^2 m_{\Theta} + \beta c_{\Theta} + k_{\Theta}] \Lambda = 0 \tag{2.45}$$

que também pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} 0 & I_{id} \\ -m_{\Theta}^{-1} k_{\Theta} & -m_{\Theta}^{-1} c_{\Theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda \\ \beta \Lambda \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} \Lambda \\ \beta \Lambda \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

onde I_{id} é a matriz identidade. Os autovalores da eq. (2.46) são obtidos na forma complexa da seguinte maneira:

$$\beta_i = \lambda_i \pm j\omega_i \tag{2.47}$$

onde ω_i é a frequência natural e λ_i determina a instabilidade do sistema no modo i ; se $\lambda_i > 0$, o sistema é instável.

2.7 RESPOSTA A UMA EXCITAÇÃO

2.7.1 Massa desbalanceada

Uma massa desbalanceada é definida como sendo uma massa m_u situada a uma distância d_u do centro geométrico do eixo. Aplicando a equação de Lagrange na energia cinética de uma massa desbalanceada e introduzindo esta excitação na equação de movimento, a eq.(2.42) torna-se:

$$m_{\ominus}\ddot{p} + c_{\ominus}\dot{p} + k_{\ominus}p = f_2\text{sen}(\Omega t) + f_3 \cos(\Omega t) \quad (2.48)$$

onde f_2 e f_3 estão relacionadas a m_u , d_u e Ω^2 , Lalanne *et al.* (1998). A solução para este problema é tomada como:

$$p = p_2\text{sen}(\Omega t) + p_3 \cos(\Omega t) \quad (2.49)$$

Substituindo a eq. (2.49) na eq. (2.48) tem-se:

$$\begin{bmatrix} k_{\ominus} - m_{\ominus}\Omega^2 & -\Omega c_{\ominus} \\ \Omega c_{\ominus} & k_{\ominus} - m_{\ominus}\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (2.50)$$

O sistema da eq. (2.50) é resolvido em função de Ω e a resposta desbalanceada é determinada através da eq. (2.40) como sendo:

$$\delta = \Theta [p_2\text{sen}(\Omega t) + p_3 \cos(\Omega t)] \quad (2.51)$$

2.7.2 Excitação Assíncrona

Neste caso, a equação de movimento a ser resolvida torna-se, Lalanne *et al.* (1998):

$$m_{\ominus}\ddot{p} + c_{\ominus}\dot{p} + k_{\ominus}p = f_4\text{sen}(s\Omega t) + f_5 \cos(s\Omega t) \quad (2.52)$$

onde f_3 e f_4 estão relacionados com a força de excitação assíncrona e s é a razão entre a velocidade de rotação Ω e a frequência de giro ω . A solução procurada é do tipo:

$$p = p_4 \text{sen}(s\Omega t) + p_5 \text{cos}(s\Omega t) \quad (2.53)$$

e substituindo na eq. (2.52) tem-se:

$$\begin{bmatrix} k_{\ominus} - m_{\ominus}(s\Omega)^2 & -s\Omega c_{\ominus} \\ s\Omega c_{\ominus} & k_{\ominus} - m_{\ominus}(s\Omega)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_4 \\ p_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

O sistema é resolvido para qualquer valor de Ω e o vetor de deslocamento é determinado como:

$$\delta = \Theta [p_4 \text{sen}(s\Omega t) + p_5 \text{cos}(s\Omega t)] \quad (2.55)$$

3 MATERIAIS COMPOSTOS

3.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

A engenharia vem intensificando seus esforços na busca de novos materiais, capazes de se adequar às condições de projeto, assim como melhorar a eficiência de produtos e equipamentos. O emprego dos materiais compostos, resultado da combinação de diferentes materiais com diferentes propriedades, tem por finalidade a obtenção de um material mais adequado à sua aplicação, sendo mais leve que os materiais convencionais e com propriedades mecânicas bastante interessantes do ponto de vista estrutural. Esta idéia surgiu nos anos 40, e era essencialmente aplicada na área aeronáutica, com objetivos óbvios de redução de peso e maior resistência mecânica, Gay (1991). A concepção dos materiais compostos na época, era a de uma configuração do tipo sanduíche: duas placas de alta resistência, separadas por um material de baixa densidade. A partir dos anos 50, surgiu a concepção de materiais compostos que é a mais atualmente utilizada, que é a da união de fibras de alta resistência impregnadas em resina de baixa resistência, que irão transmitir os esforços de uma fibra à outra, Berthelot, (1992). A combinação destes dois componentes segundo uma certa proporção, confere ao material composto resultante, propriedades mecânicas ideais para a finalidade desejada. Estruturas que utilizam esta concepção, fibra/resina, são mais freqüentemente utilizadas na forma laminada: camadas com diferentes orientações de fibras.

Obviamente, os materiais compostos não surgiram para substituir os materiais mais convencionalmente aplicados à engenharia. No entanto são materiais que, além das vantagens do peso, da resistência mecânica e da grande capacidade de amortecimento, servem para a fabricação de peças cuja geometria complexa impediria a sua fabricação com materiais metálicos.

O campo de aplicação dos materiais compostos na engenharia está sendo cada vez mais diversificado. Atualmente podem-se produzir diferentes componentes de aviões, helicópteros e automóveis, garrafas de aplicação industrial como extintores e tubos de oxigênio, vasos de pressão aplicados à área aeroespacial, tubos para diferentes aplicações, etc., Gay (1991). Os materiais compostos estão sendo utilizados inclusive na restauração de estruturas deterioradas, como é o caso de pilares de pontes e tubulações, Seible *et al.* (1996) and Karbhari *et al.* (1998).

Um dos mais novos setores dentro do qual os materiais compostos estão sendo introduzidos é na dinâmica de máquinas rotativas ou rotores (turbinas, compressores, centrifugadores, etc.) Wettergren (1996), Gupta *et al.* (1998), Pereira *et al.* (2000) e Pereira *et al.* (2001). Uma das áreas que estão se beneficiando dos rotores em materiais compostos é a área de biologia molecular onde exige-se altíssimas rotações dos centrifugadores, chegando até a 100.000 rpm, Ahern (1996). Uma outra vantagem dos rotores em material composto nesta área é que, além de não corroerem, o seu peso permite acelerar e desacelerar mais rapidamente que os rotores em material metálico, Brush (1999).

Tendo em vista as vantagens proporcionadas pelos materiais compostos ditas anteriormente, e considerando a anisotropia de suas propriedades mecânicas, estes materiais podem ser utilizados na fabricação de rotores de maneira a atenuar os problemas inerentes a eles. Considerando que o eixo da máquina pode ser bobinado, sua rigidez, assim como sua capacidade de amortecimento, podem alterar em função do ângulo de bobinagem das fibras, Pereira *et al.* (1997). Este simples fato faz com que as posições das velocidades críticas possam ser alteradas de maneira mais conveniente de acordo com sua

rotação de trabalho, e que as amplitudes de vibração, quando da passagem por estas velocidades, sejam reduzidas a níveis menos prejudiciais.

3.2 PROCESSOS DE FABRICAÇÃO

Os processos de fabricação de peças em material composto são bastante diferenciados e a geometria é, dentre outros, um fator importante na escolha de um processo. Um dos processos cada vez mais empregados na fabricação de componentes de superfícies de revolução como tubos e cilindros, é o bobinamento ("filament winding"). Este processo utiliza a tecnologia de bobinagem de fibras impregnadas sobre um mandril, como é o caso da fuselagem de helicópteros, hélices de helicópteros, garrafas de aplicação industrial, vasos de pressão aplicados à área aeroespacial, eixos de transmissão, tubos para diferentes aplicações, tacos de golf, etc. Comparado com outros processos, o bobinamento de fibras pode ter uma elevada produção de peças a um custo relativamente baixo, com alto nível de automação, Jacob (1998). Um resumo detalhado sobre a tecnologia de bobinamento, incluindo aplicações, considerações básicas de projeto e fabricação é dada em Shen (1995).

Dentre os processos de bobinamentos existentes, podemos citar o bobinamento circunferencial e o helicoidal. No bobinamento circunferencial, as fibras são depositadas em um mandril rotativo, com um ângulo de deposição de 90° em relação ao eixo de rotação, Figura 3.1. Este tipo de bobinamento resiste aos esforços circunferenciais.

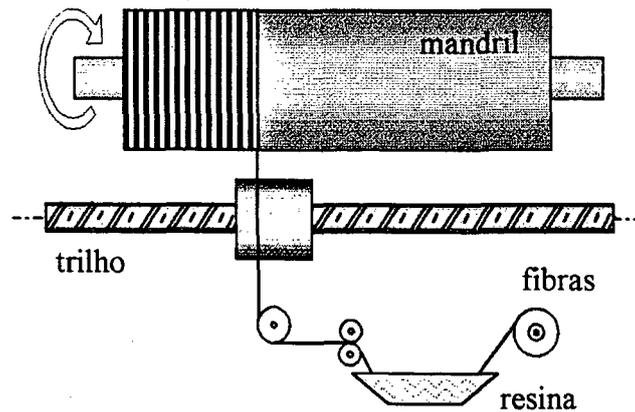


Figura 3.1 - Bobinamento circunferencial.

No bobinamento helicoidal, as fibras são depositadas em um mandril rotativo com um ângulo de deposição θ , que pode variar de 5° a 80° em relação ao eixo de rotação, Shen (1995), Figura 3.2 e Figura 3.3. No caso da Figura 3.2, as fibras são depositadas com uma orientação alternada, θ e $-\theta$, resultando em uma dupla camada de material bobinado. Este tipo de bobinamento resiste aos esforços circunferenciais e longitudinais.

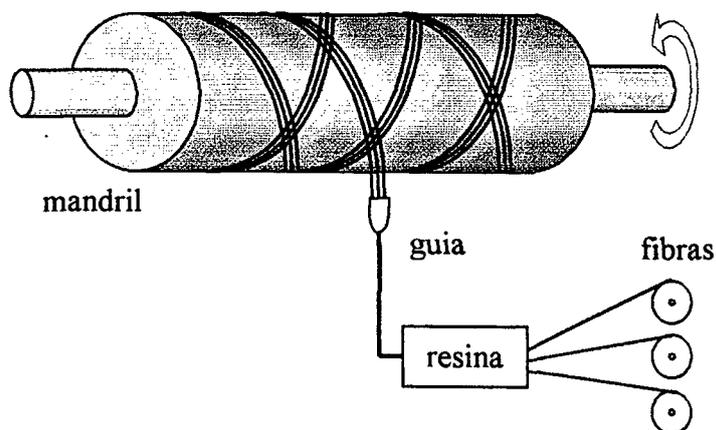


Figura 3.2 - Bobinamento helicoidal.

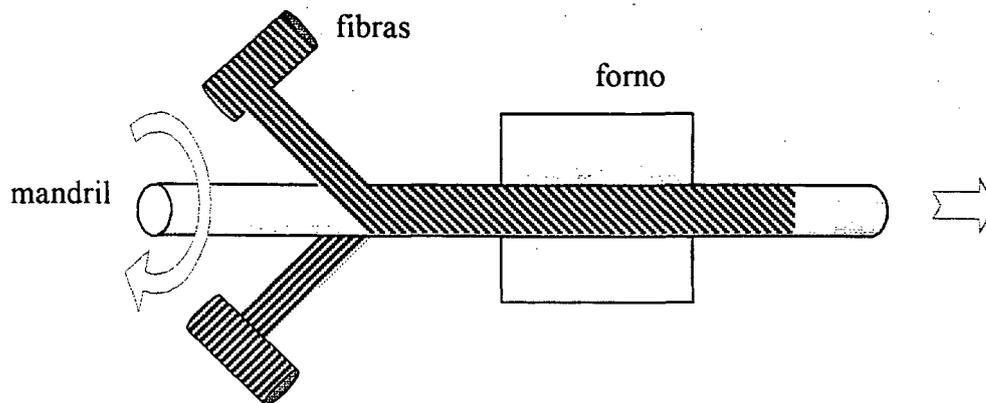


Figura 3.3 - Bobinamento helicoidal contínuo.

3.3 PROPRIEDADES MECÂNICAS

O eixo bobinado de um rotor pode ser composto por várias camadas (ou lâminas), ao qual dá-se o nome de laminado, Jones (1975). Para prever o comportamento mecânico de um laminado é então necessário conhecer previamente o comportamento individual de uma lâmina.

3.3.1 Propriedades de uma Lâmina

Considere um elemento infinitesimal retirado de uma lâmina qualquer do eixo bobinado, Figura 3.4. Neste elemento, pode-se definir o sistema de coordenadas de ortotropia $(\bar{1}, \bar{2}, \bar{3})$ e um sistema de coordenadas de referência $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, paralelo ao sistema de coordenadas global $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$. No sistema de eixos de ortotropia, o eixo 1 está na direção das fibras, o eixo 2 ortogonal à direção das fibras e o eixo 3 é ortogonal ao plano 1-2.

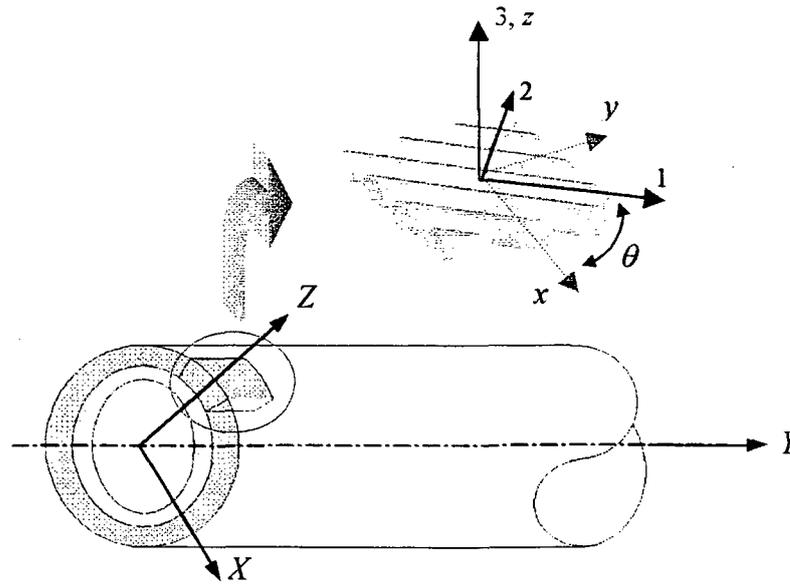


Figura 3.4 - Sistema de eixos de ortotropia e de referência.

Considerando somente o estado plano de tensões, a relação entre as tensões medidas no sistema de coordenadas de referência com as tensões medidas no sistema de coordenadas de ortotropia é obtida através do equilíbrio estático, Gürdal *et al.* (1999):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T_\theta] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\sigma_1\} = [T_\theta] \{\sigma_x\} \quad (3.1)$$

onde T_θ é a matriz de transformação dada por:

$$[T_\theta] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}, \quad m = \cos \theta \text{ e } n = \sin \theta \quad (3.2)$$

Da mesma forma, uma relação semelhante pode ser obtida para as deformações:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = [T_\theta] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\varepsilon_1\} = [T_\theta] \{\varepsilon_x\} \quad (3.3)$$

Considerando que o material trabalha dentro do regime elástico-linear, a relação tensão-deformação no sistema de ortotropia pode ser dada como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

onde Q_{ij} 's são os termos da matriz constitutiva simétrica dados em função das constantes do material composto E_1 , E_2 , G_{12} e ν_{12} , Jones (1975) e Tsai *et al.* (1980) :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1^2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}, & Q_{22} &= \frac{E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12}^2 E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}, & Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Com o objetivo de converter a notação do tensor de deformações para notação de engenharia, a matriz de transformação é pré e pós multiplicada por $[R]$ e $[R]^{-1}$ respectivamente, onde:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad [R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Substituindo as eqs. (3.6), (3.4) e (3.3) em (3.1), obtem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T_\theta]^{-1} [Q] [R] [T_\theta] [R]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

Logo, a relação tensão-deformação no sistema de referência se torna:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

com:

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= m^4 Q_{11} + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2 n^2 + n^4 Q_{22}, \\
\bar{Q}_{22} &= n^4 Q_{11} + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2 n^2 + m^4 Q_{22}, \\
\bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2 n^2 + (n^4 + m^4)Q_{12}, \\
\bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})m^3 n + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})mn^3, \\
\bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})mn^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})m^3 n, \\
\bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})m^2 n^2 + (n^4 + m^4)Q_{66},
\end{aligned} \tag{3.9}$$

3.3.2 Propriedades de um Laminado

O comportamento mecânico de um laminado varia de acordo com as combinações das orientações, espessuras e materiais de cada lâmina que o compõe, figura 3.5.

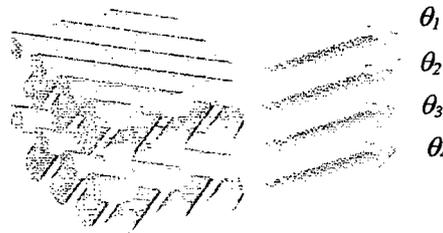


Figura 3.5 - Esquema de um laminado com quatro lâminas.

Para a análise de uma laminado, é necessário fazer algumas suposições, algumas delas fornecidas pela teoria clássica de laminados (TCL), e outras pela teoria de Kirchhoff para placas delgadas, Jones (1975). Pela teoria clássica de laminados, supõe-se que o laminado é composto por lâminas ortotrópicas perfeitamente coladas e que a resina é infinitesimalmente fina e não deformável por cisalhamento. Pela teoria de Kirchhoff, se o laminado é considerado fino, a linha originalmente reta e perpendicular à superfície de referência, permanece reta e perpendicular a esta superfície quando o laminado for estendido e flexionado. Em adição, os segmentos normais à superfície de referência são considerados inextensíveis, isto é, $\varepsilon_z = 0$ em qualquer ponto.

Desta forma, considerando os efeitos de flexão e membrana, pode-se chegar a uma distribuição de deformações da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

onde o primeiro termo do lado direito representa as deformações na superfície de referência pelo efeito de membrana e o segundo termo o efeito de flexão, onde κ é a curvatura do laminado que é constante ao longo da espessura. As tensões na k -ésima lâmina podem ser expressas pela substituição da Eq.(3.10) na Eq.(3.8):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

Os esforços normais e momentos resultantes por unidade de comprimento da seção transversal agindo em um ponto do laminado, Figura 3.6, são obtidos através da integração das tensões em cada lâmina:

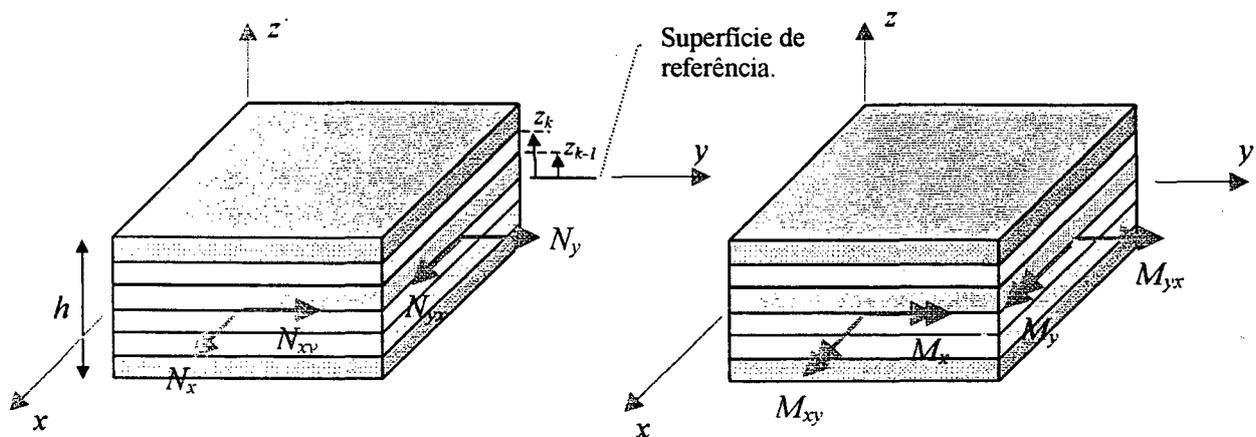


Figura 3.6 - Esforços normais e momentos resultantes por unidade de área em um elemento infinitesimal de um laminado.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz, \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde N é o número de lâminas, h é a espessura do laminado, z_k é a distância da posição superior da k -ésima lâmina até a superfície de referência e z_{k-1} é a distância da posição inferior da k -ésima lâmina até a superfície de referência do laminado. Substituindo a eq. (3.11) na eq. (3.12) obtêm-se a seguinte relação:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

onde:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_{(k)} (z_k - z_{k-1}), \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2), \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde $[A]$ é a matriz de rigidez extensional, $[B]$ é a matriz de rigidez de acoplamento entre flexão e extensão e $[D]$ é a matriz de rigidez a flexão do laminado, Jones (1975). Se a seqüência do laminado é simétrica com relação à superfície de referência, não haverá acoplamento entre flexão e extensão, isto é, $[B] = 0$. O acoplamento entre flexão e torção é dado pelos termos D_{16} e D_{26} , e estes termos são nulos somente para os chamados laminados cruzados

(laminados compostos por lâminas orientadas a 0° ou a 90°). O acoplamento entre extensão e cisalhamento é dado pelos termos A_{16} e A_{26} e estes termos são nulos se o laminado for cruzado ou se a seqüência das lâminas for balanceada, ou seja, onde para cada lâmina $+\theta$, existe uma lâmina $-\theta$, Gürdal *et al.* (1999).

3.4 MÓDULO EQUIVALENTE

Na análise do comportamento mecânico de eixos bobinados, a representação das propriedades de ortotropia do material composto na teoria de viga, pode ser aproximada pela utilização do módulo de elasticidade equivalente. Nesta aproximação, o módulo longitudinal equivalente e o módulo de cisalhamento equivalente são determinados através da teoria clássica de laminados. Estes módulos são usados para determinar a rigidez equivalente em flexão e cisalhante do eixo. De posse destas rigidezes, a análise pode ser feita da mesma forma como é feita para o caso de materiais isotrópicos. Porém, esta simplificação oferecida pelo uso do módulo equivalente tem várias limitações, Singh *et al.* (1994), Singh *et al.* (1996)¹, Singh *et al.* (1996)², Chen *et al.* (1998), Gürdal *et al.* (1999) e Jacquet-Richardet *et al.* (2000).

A principal e mais geral limitação é que a disposição das lâminas no laminado deve ser simétrica, caso contrário, surgirão acoplamentos de flexão e extensão que não podem ser incorporados diretamente pela teoria de viga, Singh *et al.* (1994).

Em Tsai *et al.* (1980), o módulo longitudinal no plano para laminados simétricos é dado por:

$$E = \frac{1}{hA'_{11}} \quad (3.15)$$

e o módulo de cisalhamento no plano por:

$$G = \frac{1}{hA'_{66}} \quad (3.16)$$

onde A' é a inversa da matriz A dada pela eq. (3.13).

Como já visto anteriormente, para laminados simétricos e balanceados, os termos de acoplamento entre cisalhamento e extensão (A_{16} e A_{26}) são nulos, e a eq. (3.15) e a eq. (3.16) tornam-se, Gürdal *et al.* (1999):

$$E = \frac{1}{h} \left(\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} \right); \quad e \quad G = \frac{1}{h} A_{66} \quad (3.17)$$

Em Gürdal *et al.* (1999), não se encoraja o uso destes módulos no plano para representar as propriedades de ortotropia do material composto, visto que a posição de uma lâmina pode influenciar consideravelmente o resultado da rigidez em flexão.

Para eixos produzidos pelo processo de bobinamento com orientação de $[\pm\theta]_s$, o módulo no plano pode ser usado para calcular a rigidez em flexão. Porém, para o caso em que diferentes lâminas têm diferentes orientações, o módulo no plano não poderia ser usado para calcular a rigidez em flexão, mesmo se o laminado for simétrico. Isto porque a contribuição particular de cada lâmina depende da distância até a superfície neutra, onde as lâminas externas têm uma maior contribuição. Mas para tubos de parede fina, esta aproximação pode ser feita, Singh *et al.* (1994).

A teoria de viga com módulo equivalente desconsidera o posicionamento de cada lâmina e considera o laminado fino o suficiente de tal forma que o efeito de todas as lâminas agem sobre o raio médio do eixo. Em Singh *et al.* (1994), comparou-se as frequências naturais e o fator de amortecimento de um eixo bobinado obtidas pela teoria de viga usando o módulo equivalente, com os resultados obtidos usando a teoria de casca. Os resultados mostraram que para pequenos valores de h/R (razão da espessura sobre o raio médio) e grandes valores de L/R (razão do comprimento sobre o raio médio) a teoria de viga usando o módulo equivalente pode ser usada com precisão satisfatória. Em Singh *et al.* (1996)¹, verificou-se o efeito da mudança na seqüência das lâminas do eixo. Uma seqüência de quatro lâminas foi considerada, sendo que

duas tinham orientação de 0° e duas com 90°. O posicionamento destas lâminas foi alternado de modo a ter diferentes configurações, simétricas e assimétricas. Foram comparadas as primeiras velocidades críticas obtidas pela teoria de viga usando módulo equivalente com as obtidas pela teoria de viga deduzida a partir da teoria de casca "layerwise" (teoria de viga refinada obtida a partir da redução direta da teoria de cascas), mostrando que para configurações simétricas, a diferença entre as duas teorias é praticamente desprezível. Em Singh *et al.* (1996)², as velocidades críticas obtidas experimentalmente de rotores em eixos bobinados com configurações de [±45] e [±60] foram comparadas com resultados teóricos obtidos pela teoria de viga com módulo equivalente apresentando uma boa correlação.

Partindo das eqs. (3.17) e colocando os termos da matriz [A] em função dos invariantes do laminado U_1, U_2, U_3, U_4 e U_5 dados em Tsai *et al.* (1980), pode-se colocar o módulo longitudinal equivalente igual ao utilizado em Singh *et al.* (1996)²:

$$E = \frac{[4(U_1 - U_5)(U_5 + U_3\gamma_g) - \beta_g^2 U_2^2]}{U_1 - \beta_g U_2 + \gamma_g U_3} \quad (3.18)$$

sendo que os parâmetros geométricos γ_g e β_g são dados como:

$$\gamma_g = \sum_{k=1}^N \frac{h_k}{h} \cos(4\theta_k), \quad \beta_g = \sum_{k=1}^N \frac{h_k}{h} \cos(2\theta_k) \quad (3.19)$$

onde h_k é a espessura da lâmina k . Da mesma forma, o módulo de cisalhamento equivalente pode ser dado como:

$$G = U_5 - U_3\gamma_g \quad (3.20)$$

Em análise de instabilidade de rotores compostos, Chen *et al.* (1998) utiliza a teoria de viga de Timoshenko com o módulo equivalente, ressaltando as seguintes restrições: não leva em conta o efeito do acoplamento entre flexão/extensão e nem entre extensão/cisalhamento e exclui deformações da

seção transversal. O módulo longitudinal equivalente utilizado por Chen é da forma:

$$E = \frac{1}{I} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{22}^k I^k \quad (3.21)$$

e o módulo de cisalhamento equivalente:

$$G = \frac{1}{J} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{66}^k J^k \quad (3.22)$$

onde I é o momento de inércia da seção transversal, J o momento polar de inércia da seção transversal, \bar{Q} é referente à matriz de rigidez no sistema de referência dada pela eq. (3.8). Segundo Chen *et al.* (1998), este modelo assume que a configuração do laminado é da forma $[\pm\theta]_n$ e tal suposição resulta em valores consideravelmente pequenos para \bar{Q}_{16} , podendo os efeitos do acoplamento entre flexão/torção serem omitidos. Resultados das frequências naturais obtidas com eixos em boro/epóxi com configuração quase-isotrópica foram comparados com resultados teóricos e experimentais de outros trabalhos publicados, obtendo resultados satisfatórios. Nota-se que em Chen *et al.* (1998) não foi feita nenhuma ressalva quanto à simetria do laminado, sendo que, alguns dos resultados obtidos ao longo do trabalho foram para laminados assimétricos.

Uma maneira de obter uma aproximação do módulo equivalente para compostos unidirecionais, $[\theta]_s$, é através das constantes de engenharia E_y e G_{xy} , Jones (1975), Tsai *et al.* (1980) e Grdal *et al.* (1999), obtidas a partir da matriz de flexibilidade no sistema de referência:

$$E_y^k = \left[\frac{n^4}{E_1} + \frac{m^4}{E_2} + n^2 m^2 \left(\frac{1}{G_{12}} - 2 \frac{\nu_{12}}{E_1} \right) \right]^{-1} \quad (3.23)$$

$$G_{xy}^k = \left[4n^2 m^2 \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) + \left(\frac{m^2 - n^2}{G_{12}} \right)^2 \right]^{-1} \quad (3.24)$$

sendo que os módulos longitudinais e de cisalhamento equivalentes podem ser aproximados como:

$$E = \frac{1}{I} \sum_{k=1}^N E_y^k I^k \quad (3.25)$$

$$G = \frac{1}{J} \sum_{k=1}^N G_{xy}^k J^k \quad (3.26)$$

Em Tsai *et al.* (1980), os resultados obtidos por estes módulos foram comparados com os obtidos pelas eq. (3.15) e eq. (3.16) para uma configuração do tipo $[\pm\theta]$, com θ variando de 0° a 90° , notando um significativo aumento no módulo dado pelas eq. (3.15) e (3.16). Esta diferença foi devido a restrição causada por cada lâmina dentro do laminado, visto que elas não estão livres para se deformarem independentemente. As eqs. (3.25) e (3.26) não levam em consideração o sinal de cada lâmina, considerando o módulo equivalente do laminado como o somatório do efeito independente de cada lâmina, Tsai *et al.* (1980) e Gürdal *et al.* (1999).

Com o objetivo de visualizar as diferenças e restrições impostas por cada um destes módulos equivalentes, vários gráficos foram traçados para diferentes configurações. Os módulos longitudinal e de cisalhamento equivalentes analisados foram: E_g e G_g , módulos equivalentes propostos em Singh *et al.* (1994) dados pelas eqs (3.18) e (3.20); E_c e G_c , proposto em Chen *et al.* (1998), dados pelas eqs. (3.21) e (3.22); E_t e G_t , módulos efetivos dado em Tsai *et al.* (1980), dados pelas eqs. (3.15) e (3.16); E_y e G_{xy} , módulos equivalentes unidirecionais dados pelas eqs. (3.25) e (3.26). Os materiais usados no eixo foram carbono/epóxi com $E_1=172,7 \text{ GPa}$, $E_2=7,20 \text{ GPa}$, $G_{12}=3,76 \text{ GPa}$, $\nu_{12}=0,3$ e vidro/epóxi com $E_1=37,78 \text{ GPa}$, $E_2=10,90 \text{ GPa}$, $G_{12}=4,91 \text{ GPa}$ e $\nu_{12}=0,3$, Adams *et al.* (1973). O eixo laminado possui 8 lâminas, cada uma com espessura $h_k = 0,001m$, com o raio interno $R_i = 0,031m$ e o raio externo $R_e = 0,039m$.

As Figuras 3.7 mostram o resultado do módulo longitudinal equivalente e do módulo de cisalhamento equivalente para eixos em carbono/epóxi e vidro/epóxi para uma configuração simétrica e balanceada. Pode -se notar, que como o laminado é balanceado, os resultados de E_t e E_g coincidem. Há uma acentuada diferença entre estes módulos e E_c e E_y , visto que este último considera o laminado como sendo unidirecional. O uso do módulo E_y para θ variando de 10° a 20° pode sub-estimar o valor em até 70%. Esta diferença é menos marcante para o vidro/epóxi, pois a diferença entre E_1 e E_2 é menor para este composto. Os módulos de cisalhamento apresentaram comportamento semelhante, com exceção de G_c que coincidiu com os demais módulos.

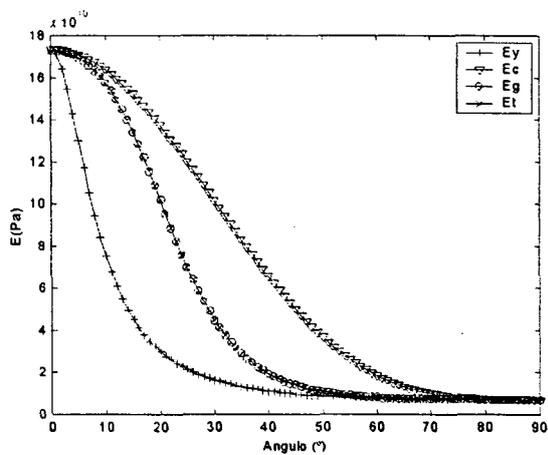


Figura 3.7-a. Módulo longitudinal equivalente para $[+\theta/ -\theta/ +\theta/ -\theta]_s$ em carbono/epóxi.

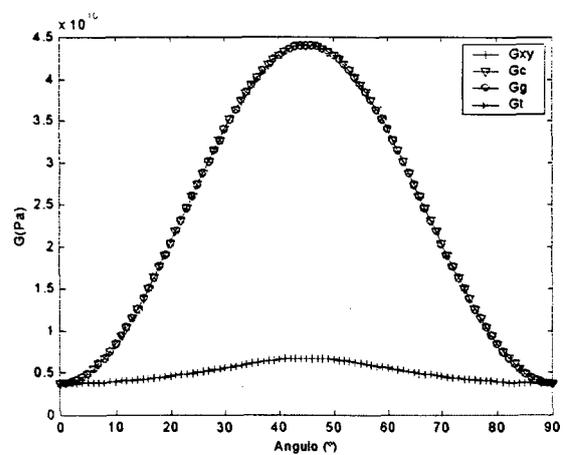


Figura 3.7-b. Módulo de cisalhamento equivalente para $[+\theta/ -\theta/ +\theta/ -\theta]_s$ em carbono/epóxi.

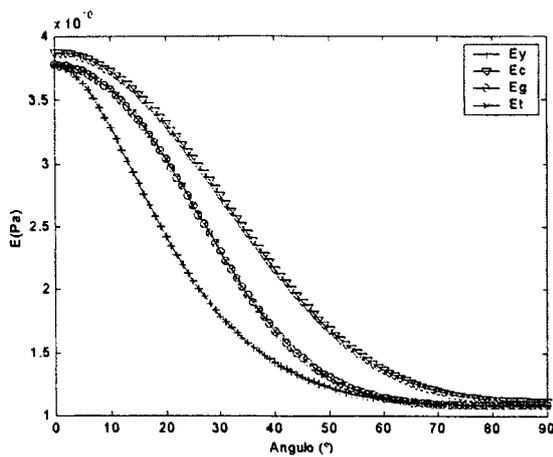


Figura 3.7-c. Módulo longitudinal equivalente para $[+\theta/ -\theta/ +\theta/ -\theta]_s$ em vidro/epóxi.

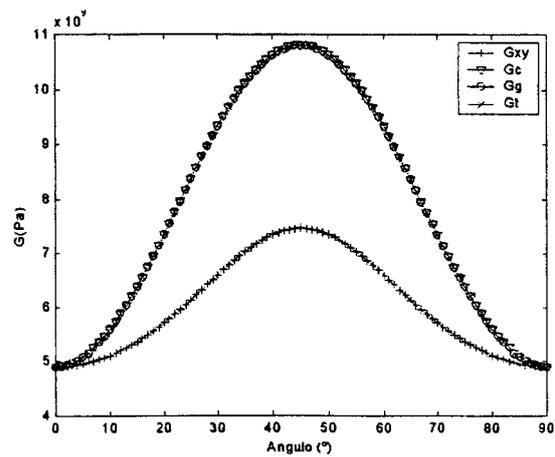


Figura 3.7-d. Módulo de cisalhamento equivalente para $[+\theta/ -\theta/ +\theta/ -\theta]_s$ em vidro/epóxi.

As Figuras 3.8 apresentam os módulos longitudinal e de cisalhamento equivalentes para eixos em carbono/epóxi e vidro/epóxi com uma configuração não balanceada, na qual todas as lâminas têm a mesma orientação. Nota-se que E_g permanece inalterado, pois considera o laminado sendo balanceado, desprezando os termos de acoplamento extensão/cisalhamento, A_{16} e A_{26} , que passam a estar presentes nesta configuração. O módulo E_t , que considera estes efeitos de acoplamento, coincide com o E_y . Comportamento semelhante acontece com módulo de cisalhamento equivalente. Pode-se notar que nesta configuração, para o carbono/epóxi, o uso do módulo E_g poderia super-estimar o valor do módulo em mais de 200% na faixa de 10° a 20° comparado com o E_t .

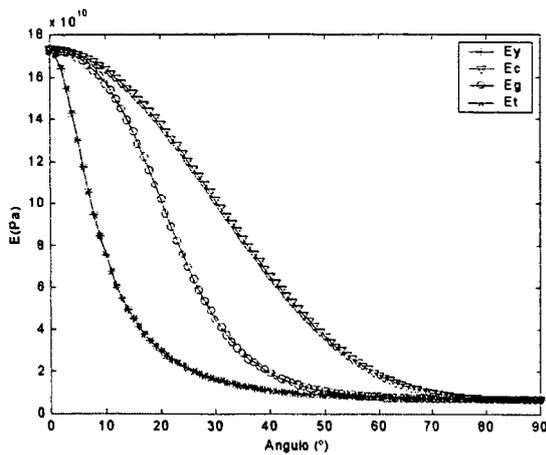


Figura 3.8-a. Módulo longitudinal equivalente para $[+\theta/ +\theta/ +\theta/ +\theta]_s$ em carbono/epóxi.

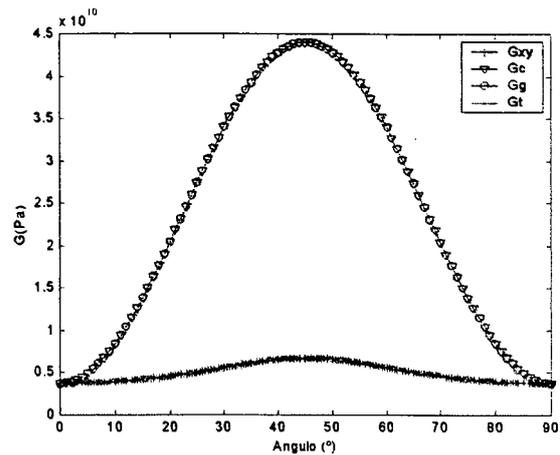


Figura 3.8-b. Módulo de cisalhamento equivalente para $[+\theta/ +\theta/ +\theta/ +\theta]_s$ em carbono/epóxi.

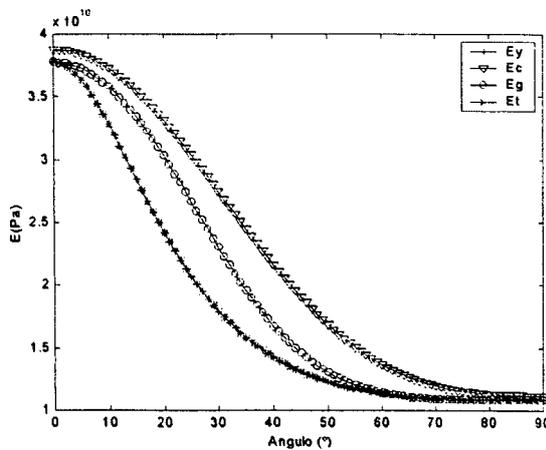


Figura 3.8-c. Módulo longitudinal equivalente para $[+\theta/ +\theta/ +\theta/ +\theta]_s$ em vidro/epóxi.

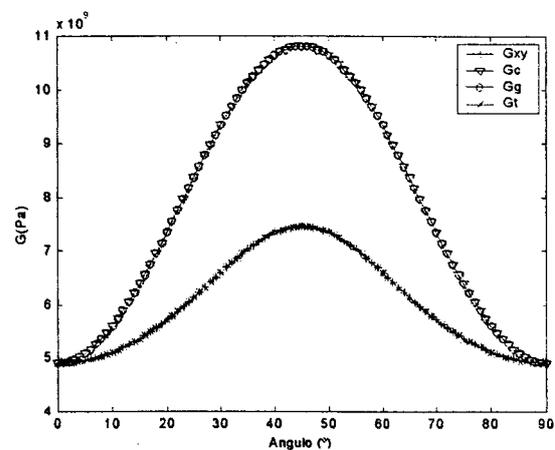


Figura 3.8-d. Módulo de cisalhamento equivalente para $[+\theta/ +\theta/ +\theta/ +\theta]_s$ em vidro/epóxi.

Nas Figuras de 3.9 a 3.12, têm-se o módulo longitudinal equivalente para eixos em carbono/epóxi e em vidro/epóxi para outras possíveis configurações simétricas e balanceadas. As Figuras 3.11 e 3.12 têm na configuração dois ângulos fixos (0° e 90°). Nota-se que nesta configuração E_c se aproxima bastante dos outros módulos em ambos os materiais usados. Quando θ é igual à 45° , tem-se um laminado quase-isotrópico, configuração em que Chen *et al.* (1998) obteve sucesso ao comparar as frequências naturais de um eixo em carbono/epóxi obtidas com E_c com as de outros trabalhos. Os gráficos do módulo de cisalhamento equivalente para estas configurações são semelhantes aos da Figura 3.7-b e Figura 3.7-d.

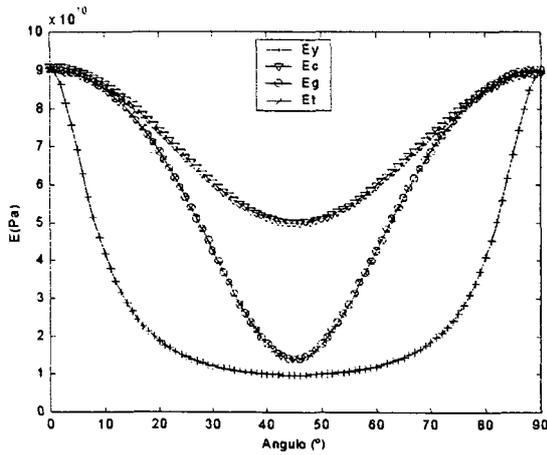


Figura 3.9. Módulo longitudinal equivalente para $[+\theta/-\theta/(90-\theta)/-(90-\theta)]_s$ em carbono/epóxi.

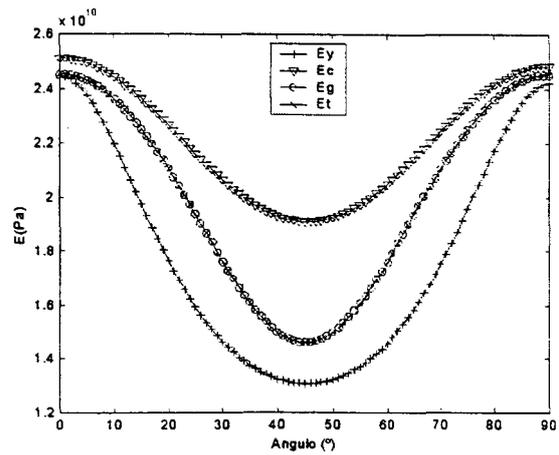


Figura 3.10. Módulo longitudinal equivalente para $[+\theta/-\theta/(90-\theta)/-(90-\theta)]_s$ em vidro/epóxi.

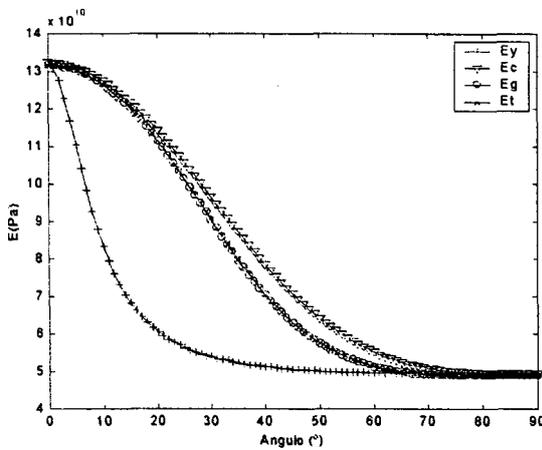


Figura 3.11. Módulo longitudinal equivalente para $[0/+\theta/-\theta/90]_s$ em carbono/epóxi.

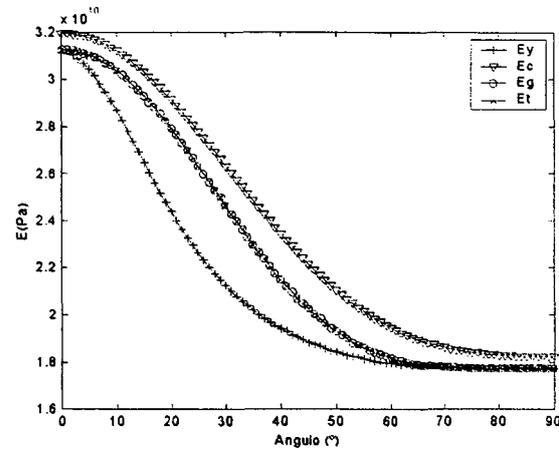


Figura 3.12. Módulo longitudinal equivalente para $[0/+\theta/-\theta/90]_s$ em vidro/epóxi.

3.5 MÓDULO EQUIVALENTE AMORTECIDO

Os mecanismos de amortecimento interno em materiais compostos diferem bastante dos materiais convencionais, tais como no aço e no alumínio. As principais fontes de dissipação em materiais compostos laminados são, Chandra *et al.* (1999):

- 1) Natureza viscoelástica da matriz. A maior contribuição para o amortecimento interno em materiais compostos é devido à matriz. Porém, o amortecimento devido às fibras também deve ser incluído na análise.
- 2) Amortecimento devido as interfaces, onde interface é a região adjacente às superfície das fibras ao longo do seu comprimento.
- 3) Amortecimento devido as falhas, tais como trincas, delaminação, rupturas de fibras, etc.
- 4) Amortecimento viscoplástico. À elevadas amplitudes de vibrações, os materiais compostos exibem um evidente grau de amortecimento não linear devido as altas tensões produzidas.
- 5) Amortecimento termo-elástico, devido ao fluxo de calor cíclico das regiões de compressão para as de tração no material composto.

O amortecimento interno é um importante parâmetro relacionado ao comportamento dinâmico de materiais compostos. A precisão da resposta dinâmica de estruturas compostas obtidas por simulação numérica depende do uso de modelos apropriados.

Como já foi visto na seção anterior, o módulo equivalente para vigas laminadas pode ser colocado em função dos módulos longitudinal, transversal, de cisalhamento, do coeficiente de poisson e da orientação das lâminas que as compõem. Evidências experimentais têm mostrado que uma aproximação análoga pode ser usada para representar as propriedades de amortecimento em vigas, Adams *et al.* (1973), Lin *et al.* (1983), Adams *et al.* (1994), Saravanos *et al.* (1995), Gupta *et al.* (1998) e Chandra *et al.* (1999).

Para prever o amortecimento em estruturas do tipo casca multicamadas, o modelo proposto em Adams *et al.* (1973) foi adotado. Neste modelo, supõem-se que os materiais sejam viscoelásticos lineares e o carregamento da estrutura seja harmônico. Em Adams *et al.* (1973), postulou-se que a energia de dissipação em uma lâmina fina unidirecional é a soma das energias de

dissipação devido à σ_1 , σ_2 e τ_{12} . Conseqüentemente, a capacidade de amortecimento específico de um laminado no estado plano de tensão pode ser definida como:

$$\psi = \frac{\Delta U}{U} \quad (3.27)$$

onde ΔU é a energia dissipada por ciclo e U é a máxima energia de deformação armazenada por ciclo. Utilizando as eqs. (2.4) e (3.27), as energias de dissipação devido a σ_1 , σ_2 e τ_{12} em cada lâmina são:

$$\begin{aligned} \Delta U_1 &= \frac{1}{2} \int_V \psi_{11} \varepsilon_1 \sigma_1 dV, \\ \Delta U_2 &= \frac{1}{2} \int_V \psi_{22} \varepsilon_2 \sigma_2 dV, \\ \Delta U_{12} &= \frac{1}{2} \int_V \psi_{12} \gamma_{12} \tau_{12} dV \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde ψ_{11} , ψ_{22} , ψ_{12} são as capacidades de amortecimento específico da lâmina nas direções longitudinal, transversal e de cisalhamento. Estes valores dependem da amplitude das tensões cíclicas mas, para pequenas amplitudes de vibrações, até 20% do limite de resistência, eles podem ser considerados constantes, Adams *et al.* (1973).

A energia de dissipação total para cada lâmina k pode ser colocada na forma matricial como sendo:

$$\Delta U_k = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon_1\}' [\psi] \{\sigma_1\} dV \quad (3.29)$$

onde a matriz de capacidade de amortecimento específico $[\psi]$ é da forma:

$$[\psi] = \begin{bmatrix} \psi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{12} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Substituindo a relação tensão-deformação dada pela eq. (3.4) na eq. (3.29), tem-se:

$$\Delta U_k = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon_1\}' [\psi] [Q] \{\varepsilon_1\} dV \quad (3.31)$$

Fazendo a mudança do sistema de ortotropia para o sistema de referência, obtém-se:

$$\Delta U_k = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon_x\}' [T_\theta]' [\psi] [Q] [T_\theta] \{\varepsilon_x\} dV = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon_x\}' [\bar{Q}_\psi] \{\varepsilon_x\} dV \quad (3.32)$$

onde $[T_\theta]$ é a matriz de transformação dada na eq. (3.2). Nota-se agora que a matriz $[\bar{Q}_\psi]$ é não-simétrica, embora a matriz $[\bar{Q}]$ seja simétrica.

A energia de dissipação total do laminado no estado plano de tensões pode ser dada pela expressão abaixo:

$$\Delta U = \sum_{k=1}^N \Delta U_k = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon_x\}' [\bar{Q}_\psi] \{\varepsilon_x\} dV \right) \quad (3.33)$$

Sabe-se que as propriedades de ortotropia do material composto em vigas são representadas pelo uso do módulo equivalente. Uma aproximação análoga foi feita para representar as propriedades de amortecimento do material composto através de um módulo longitudinal equivalente amortecido E_{eq}^ψ e de um módulo de cisalhamento equivalente amortecido G_{eq}^ψ . Estes módulos são determinados a partir da matriz $[\bar{Q}_\psi]$ da eq. (3.33), da mesma forma que os módulos equivalentes E_{eq} e G_{eq} são determinados a partir da matriz constitutiva $[\bar{Q}]$.

Os amortecimentos específicos para o carbono/epóxi são dados como: $\psi_{11} = 0,0045$, $\psi_{22} = 0,0422$, $\psi_{12} = 0,0705$ e para o vidro/epóxi como: $\psi_{11} = 0,0087$, $\psi_{22} = 0,0505$, $\psi_{12} = 0,0691$, Adams *et al.* (1973).

Nas Figuras 3.13 e 3.14, têm-se o módulo longitudinal equivalente amortecido e o módulo de cisalhamento equivalente amortecido para eixos em carbono/epóxi e em vidro/epóxi em uma configuração simétrica e balanceada. Nota-se que não há grandes variações do módulo equivalente amortecido entre os modelos avaliados, com exceção de G_{xy} para o carbono/epóxi. Observa-se que dependendo do material usado, carbono/epóxi ou vidro/epóxi, o comportamento do módulo amortecido equivalente em função do ângulo pode variar consideravelmente.

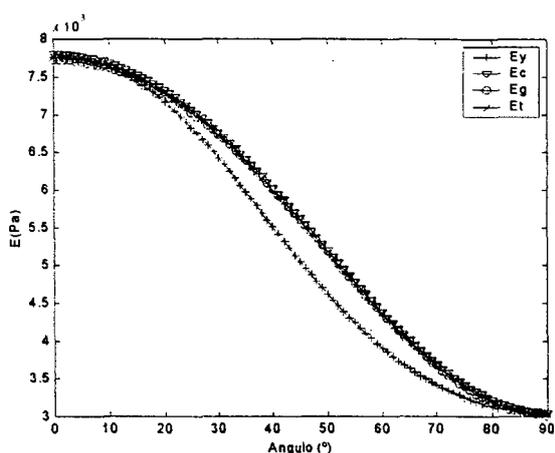


Figura 3.13-a. Módulo longitudinal equivalente amortecido para $[+\theta/-\theta/+ \theta/-\theta]_s$ em carbono /epóxi.

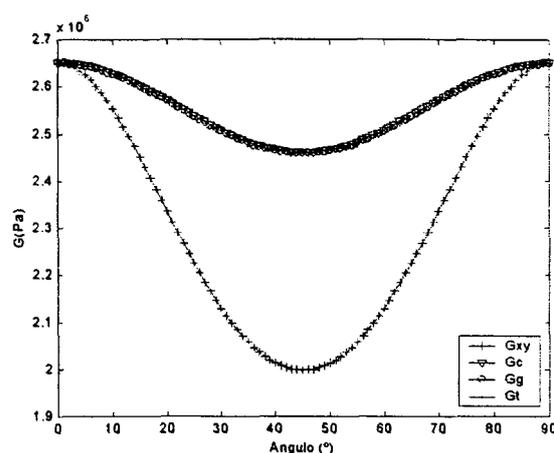


Figura 3.13-b. Módulo de cisalhamento equivalente amortecido para $[+\theta/-\theta/+ \theta/-\theta]_s$ em carbono /epóxi.

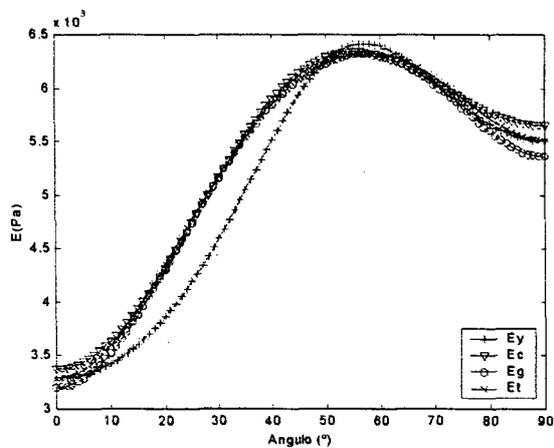


Figura 3.14-a. Módulo longitudinal equivalente amortecido para $[+\theta/-\theta/+ \theta/-\theta]_s$ em vidro /epóxi.

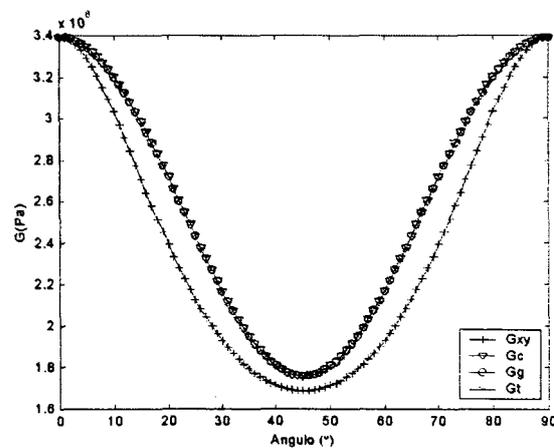


Figura 3.14-b. Módulo de cisalhamento equivalente amortecido para $[+\theta/-\theta/+ \theta/-\theta]_s$ em vidro /epóxi.

3.6 FATOR DE AMORTECIMENTO VISCOZO APROXIMADO

Como foi visto no Capítulo 2, as relações constitutivas para materiais isotrópicos incluindo o amortecimento viscoso dadas em Zorzi *et al.* (1977) são da forma:

$$\begin{aligned}\sigma &= E\varepsilon + \eta_\varepsilon E\dot{\varepsilon} \\ \tau &= G\gamma + \eta_\gamma G\dot{\gamma}\end{aligned}\quad (3.34)$$

onde η_ε é o coeficiente de amortecimento viscoso longitudinal e η_γ é o coeficiente de amortecimento viscoso cisalhante. Da mesma forma, para materiais compostos, foi visto que as relações constitutivas pela teoria de viga com módulo equivalente incluindo o amortecimento viscoso pode ser dada como:

$$\begin{aligned}\sigma &= E_{eq}\varepsilon + E_{eq}^\psi\dot{\varepsilon} \\ \tau &= G_{eq}\gamma + G_{eq}^\psi\dot{\gamma}\end{aligned}\quad (3.35)$$

Comparando a eq. (3.34) com a eq. (3.35), pode-se estimar os coeficientes de amortecimento viscoso longitudinal e cisalhante em função dos módulos equivalentes como sendo:

$$\begin{aligned}\eta_\varepsilon &= \frac{E_{eq}^\psi}{E_{eq}} \\ \eta_\gamma &= \frac{G_{eq}^\psi}{G_{eq}}\end{aligned}\quad (3.36)$$

Nas Figuras 3.15 a 3.18, têm-se os coeficientes de amortecimento viscoso longitudinal e cisalhante baseados nos diferentes módulos equivalentes para eixos em carbono/epóxi e em vidro/epóxi em uma configuração simétrica e balanceada. Em Adams *et al.* (1973) e Adams *et al.* (1994), obtiveram-se as capacidades de amortecimento específico em flexão e em torção para vigas, apresentando um comportamento semelhante.

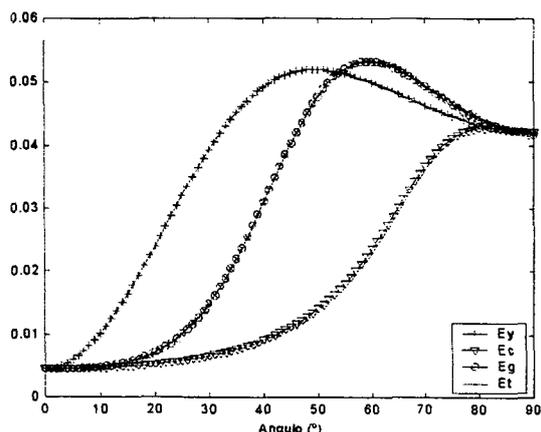


Figura 3.15 - η_ϵ para $[+\theta/-\theta/+ \theta/-\theta]_s$ em carbono/epóxi.

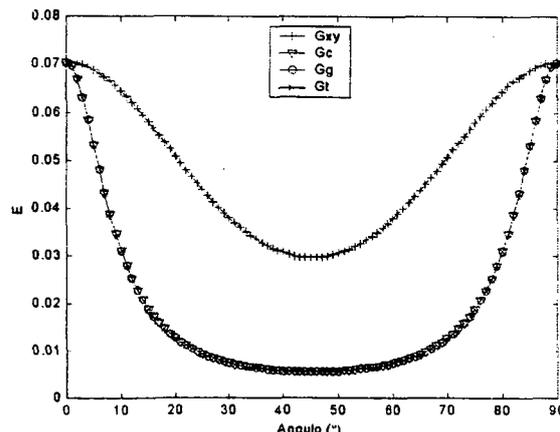


Figura 3.16 - η_γ para $[+\theta/-\theta/+ \theta/-\theta]_s$ em carbono/epóxi.

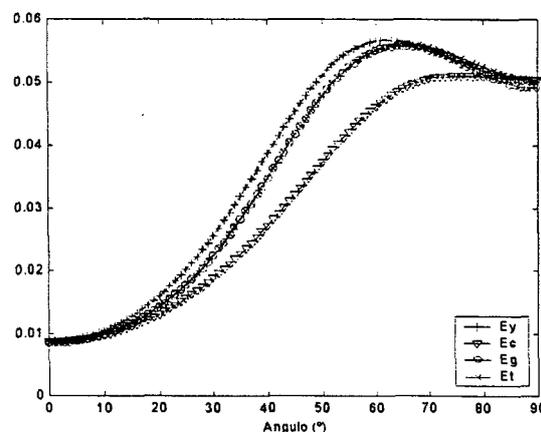


Figura 3.17 - η_ϵ para $[+\theta/-\theta/+ \theta/-\theta]_s$ em vidro/epóxi

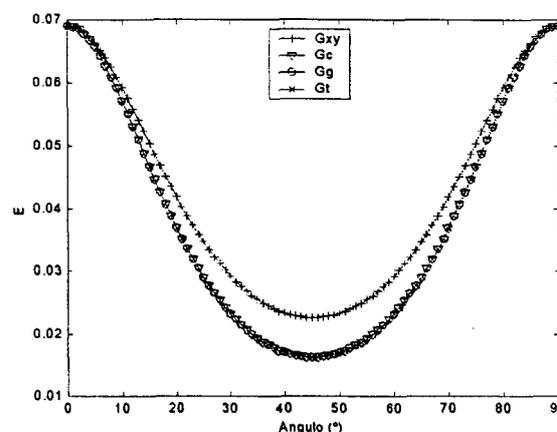


Figura 3.18 - η_γ para $[+\theta/-\theta/+ \theta/-\theta]_s$ em vidro/epóxi

3.7 MODELO PROPOSTO PARA O TRABALHO

O modelo de módulo equivalente escolhido para este trabalho, foi o utilizado por Singh *et al.* (1994), E_g e G_g dados pelas eq. (3.18) e eq. (3.20), visto que é um módulo que apresentou resultados satisfatórios em outros trabalhos publicados, Bauchau (1983), Singh *et al.* (1994), Singh *et al.* (1996)¹, Singh *et al.* (1996)² e Gupta *et al.* (1998). Este modelo é de fácil implementação e baixo custo computacional e ainda oferece a possibilidade de usar os parâmetros geométricos γ_g e β_g , dados pela eq. (3.19), como variáveis de projeto em

problemas de otimização, Gårdal *et al.* (1999). Para sua implementação, é necessário que o laminado do rotor seja simétrico e balanceado e que o eixo seja de parede fina e suficientemente esbelto.

4 RESULTADOS PRELIMINARES

O programa desenvolvido neste trabalho para a análise dinâmica de um rotor com o eixo bobinado foi feito na linguagem Fortran 77, sendo que algumas de suas rotinas estão em Fortran 90.

Com o objetivo de validar o programa, foram feitos alguns testes preliminares de maneira a comparar os resultados com os obtidos com um rotor com o eixo em material convencional, no caso, o aço. Desta forma, consideraram-se as seguintes hipóteses: $\theta = 0^\circ$ e 90° , $E_1 = E_2 = E_{aço}$, $G_{12} = G_{aço}$, $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu_{aço}$. Neste caso, o eixo foi modelado com 3 elementos do tipo viga e o disco rígido situado a um terço da extremidade do eixo. Os resultados de frequência natural, amortecimento e resposta em frequência foram comparados com os obtidos por um programa para rotores com o eixo em material isotrópico, já validado, desenvolvido no INSA de Lyon, Lalanne *et al.* (1998). Os resultados obtidos foram praticamente idênticos. Complementando, os resultados obtidos por esta configuração para a resposta a uma massa desbalanceada, foram comparados com os resultados obtidos através de uma formulação por Rayleigh-Ritz com função de interpolação do tipo $\sin(\pi y/L)$, Figura 4.1.

Muito embora não se tenha encontrado na literatura disponível resultados para todos os casos analisados aqui, principalmente no que se refere à influência do amortecimento interno do eixo em material composto, foi feita uma análise qualitativa dos resultados obtidos, obtendo boa concordância

com o esperado pela teoria. A seguir, serão apresentados resultados das freqüências naturais em flexão e em torção, zonas de instabilidades e resposta no domínio da freqüência para diferentes configurações dos mancais, orientação das fibras e material do eixo.

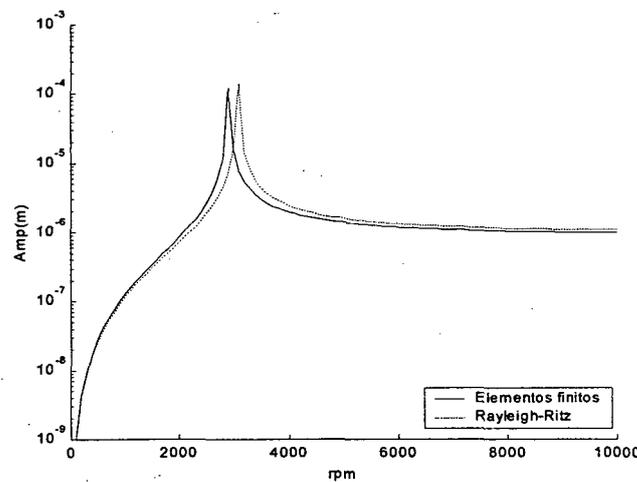


Figura 4.1 - Resposta a uma massa desbalanceada sobre o disco, situado a um terço do comprimento do eixo, por elementos finitos e Rayleigh-Ritz.

4.1 DADOS DO ROTOR

4.1.1 Dados Materiais

Tabela 4.1 - Dados materiais do eixo e do disco

	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ρ (kg/m ³)	ψ_{11} (%)	ψ_{22} (%)	ψ_{12} (%)	ν_{12}
Eixo (carbono/epóxi)	172,7	7,20	3,76	1446,2	0,45	4,22	7,05	0,3
Eixo (vidro/epóxi)	37,78	10,90	4,91	1813,9	0,87	5,05	6,91	0,3
Disco (aço)	-	-	-	7800	-	-	-	-

4.1.2 Dados Geométricos

O eixo do rotor tem raio interno de 0,04m e externo de 0,048m, com oito lâminas de 0,001m de espessura numa configuração simétrica e balanceada do tipo $[+\theta/-\theta/+\theta/-\theta]_s$, com um comprimento total de 1,2m. No eixo, foram colocados dois discos situados a um terço e dois terços de sua extremidade, ambos com raio interno igual a 0,048m, raio externo igual a 0,15m e 0,05m de

espessura. Seis elementos do tipo viga foram utilizados para modelar o eixo, apesar de que 3 elementos já seriam suficientes para modelar o eixo nestas configurações, conforme mostra a Figura 4.2. Neste trabalho, para os modos em flexão, somente as quatro primeiras freqüências naturais foram analisadas.

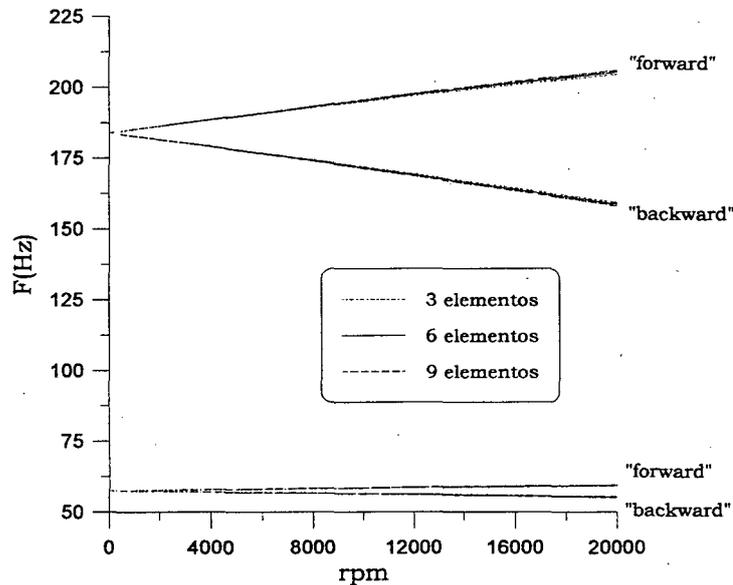


Figura 4.2 - Diagrama de Campbell para $\theta = 15^\circ$ com 3, 6 e 9 elementos

Os dados dos mancais das quatro classes de problemas a serem analisadas neste trabalho, são dados na tabela 4.2. Para análise da resposta a uma massa desbalanceada, uma massa de 10^{-4}Kg foi colocada a $0,15\text{m}$ do centro do primeiro disco. A resposta em freqüência será sempre determinada no nó correspondente ao primeiro disco.

Tabela 4.2 - Dados dos mancais do rotor

	K_{xx} (N/m)	K_{zz} (N/m)	K_{xz} (N/m)	K_{zx} (N/m)	A_{xx} (N/m/s)	A_{zz} (N/m/s)	A_{xz} (N/m/s)	A_{zx} (N/m/s)
Isotrópico	1.10^7	1.10^7	0	0	0	0	0	0
Anisotrópico	1.10^7	1.10^8	0	0	0	0	0	0
Isotrópico com amortecimento externo	1.10^7	1.10^7	0	0	1.10^3	1.10^3	0	0
Isotrópico com termos de acoplamento	1.10^7	1.10^7	-1.10^6	1.10^6	0	0	0	0

4.2 ANÁLISE DOS MODOS EM FLEXÃO

4.2.1 Rotores com Mancais Isotrópicos

Para a análise do comportamento em flexão de rotores com mancais isotrópicos, foram feitas análises da resposta a uma massa desbalanceada e freqüências naturais para rotores com o eixo em carbono/epóxi com $\theta = 15^\circ$, $\theta = 45^\circ$ e $\theta = 75^\circ$, conforme mostram as Figuras 4.3, 4.4 e 4.5. Neste trabalho, para todos os gráficos de freqüências naturais e resposta em freqüência, a legenda é da seguinte forma: — freqüência natural estável; —●— freqüência natural instável; —×— resposta em freqüência; ---- excitação síncrona. No método de redução modal, o número de autovetores utilizados foi $n = 12$ e os resultados foram comparados com os obtidos através do método direto, mostrando boa concordância para os quatro primeiros modos analisados.

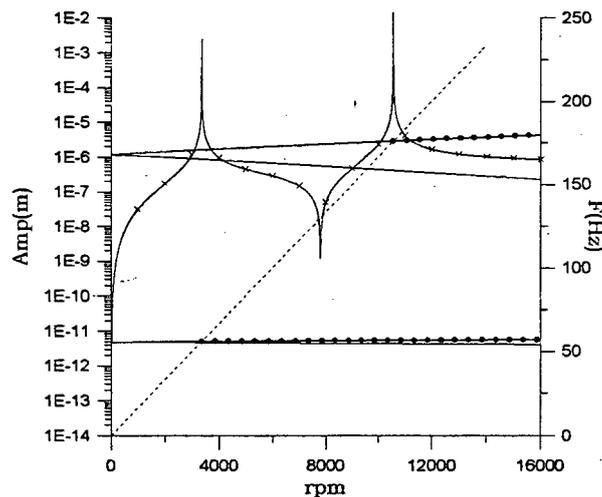


Figura 4.3 - Diagrama de Campbell, resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos e $\theta = 15^\circ$.

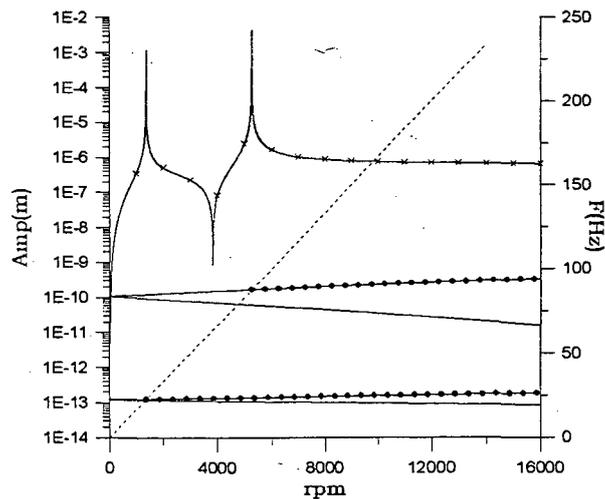


Figura 4.4 - Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos e $\theta = 45^\circ$.

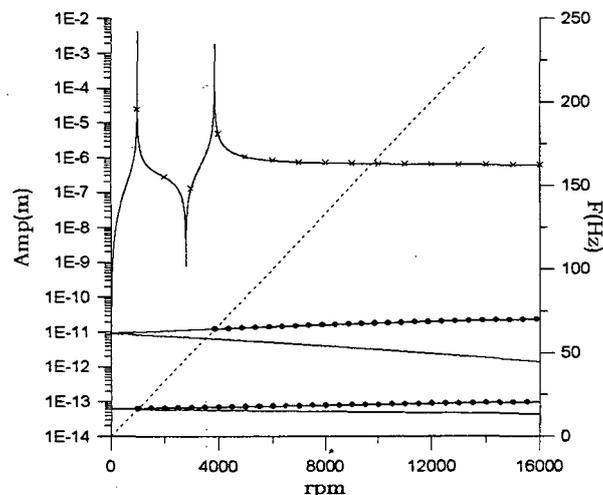


Figura 4.5 - Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos e $\theta = 75^\circ$.

De acordo com o que foi visto no capítulo 2, o amortecimento interno não tem influência na resposta a uma massa desbalanceada em rotores com mancais isotrópicos, sendo que as curvas de resposta em frequência com e sem a inclusão do amortecimento interno coincidiram. Porém, como pode ser visto nas Figuras 4.3, 4.4 e 4.5, o amortecimento interno gera instabilidade a partir da primeira velocidade crítica. Observa-se também que a medida em que o ângulo de bobinagem aumenta, a rigidez equivalente do eixo diminui e conseqüentemente, as frequências naturais também diminuem. Resultados obtidos com o eixo em vidro/epóxi apresentaram também o mesmo comportamento.

4.2.2 Rotores com Mancais Isotrópicos e Amortecimento Externo

Foi visto no capítulo 2 que a adição de amortecimento externo proveniente dos mancais pode afastar as zonas de instabilidades geradas pelo amortecimento interno do rotor. As Figuras 4.6, 4.7 e 4.8 mostram que a influência do amortecimento externo na instabilidade é mais marcante para pequenos ângulos de bobinagem ($\theta = 15^\circ$), pois neste caso o amortecimento interno é menor. A medida em que o ângulo de bobinagem aumenta, o amortecimento interno aumenta, fazendo com que a presença do amortecimento externo nas zonas de instabilidades se torne menos marcante.

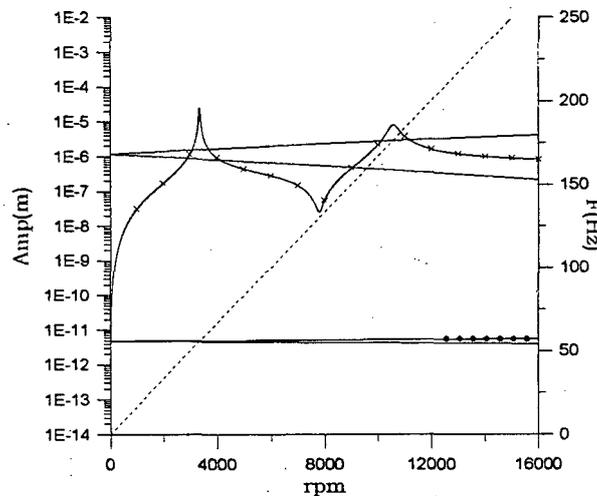


Figura 4.6 - Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos, amortecimento externo e $\theta = 15^\circ$.

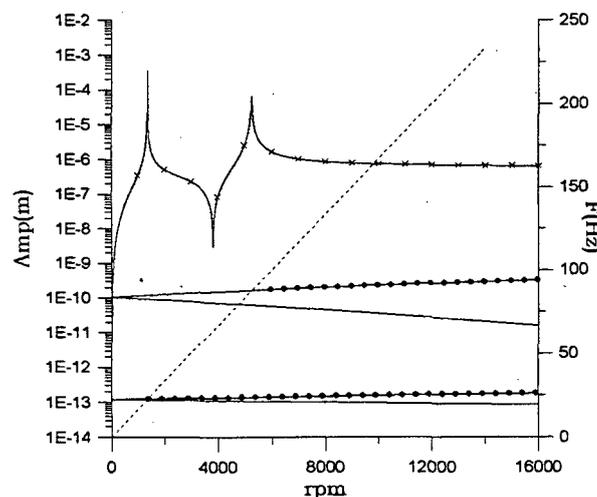


Figura 4.7 - Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos, amortecimento externo e $\theta = 45^\circ$.

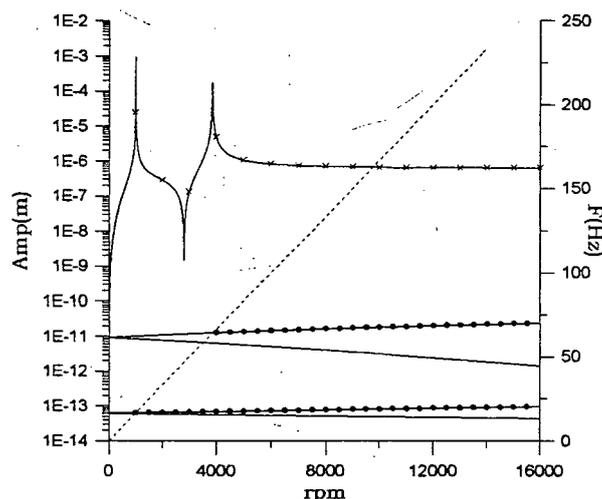


Figura 4.8 - Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos, amortecimento externo e $\theta = 75^\circ$.

Com relação à resposta a uma massa desbalanceada, nota-se que a influência do amortecimento externo é maior para o ângulo de 15° que para os ângulos de 45° e 75° . Isto ocorre provavelmente devido à influência da rigidez dos mancais nos modos de vibração, Vance (1988), como pode-se notar nas Figuras 4.9 e 4.10. Para baixos ângulos de bobinagem, a rigidez equivalente do eixo é maior, fazendo com que a rigidez dos mancais tenha uma maior influência nos modos de vibração. Desta forma, o deslocamento nos pontos nodais sobre os mancais será maior, fazendo com que o amortecimento externo opere de modo mais efetivo, atenuando assim a amplitude de vibração nas velocidades críticas.

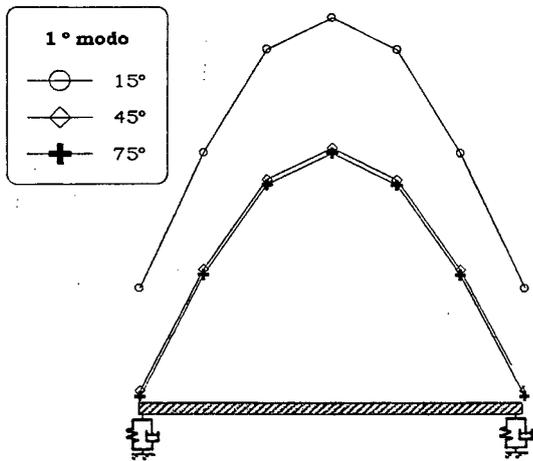


Figura 4.9 - Primeiro modo de vibração para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos.

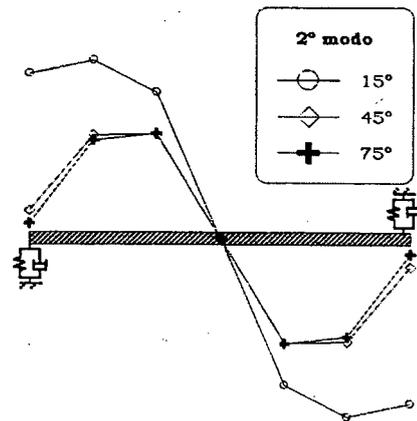


Figura 4.10 - Segundo modo de vibração para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos.

4.2.3 Rotores Com Mancais Isotrópicos e Termos de Acoplamento

A inclusão de termos de acoplamento nos mancais pode gerar instabilidade em todas as velocidades "forward", conforme foi relatado por diversos autores no capítulo 2. Nas Figuras 4.11 a 4.16 pode-se observar a influência os termos de acoplamento em rotores com e sem a inclusão do amortecimento interno.

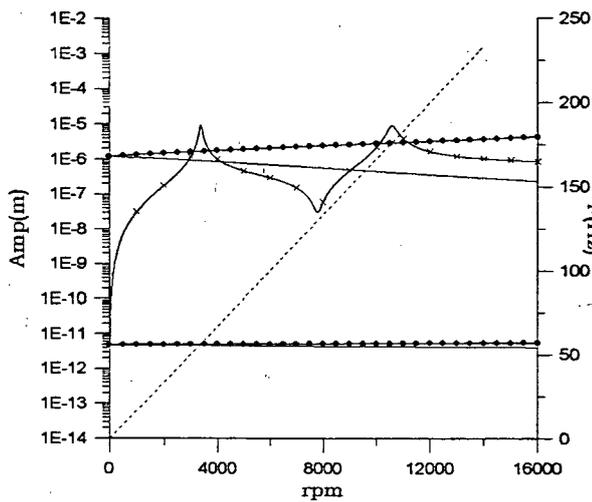


Figura 4.11 - Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos, termos de acoplamentos e $\theta = 15^\circ$ sem amortecimento interno.

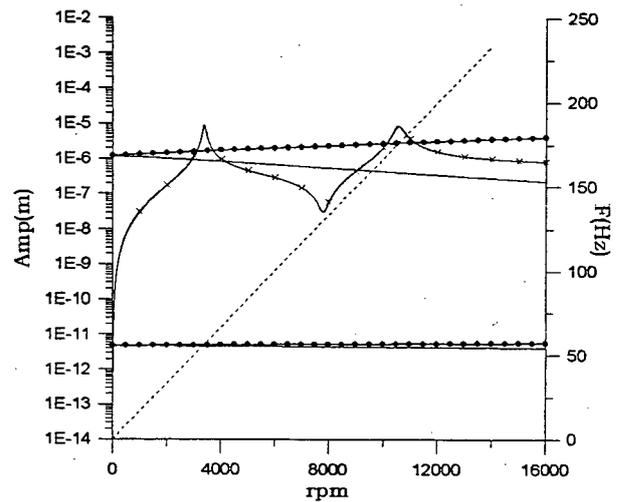


Figura 4.12 - Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos, termos de acoplamentos e $\theta = 15^\circ$ com amortecimento interno.

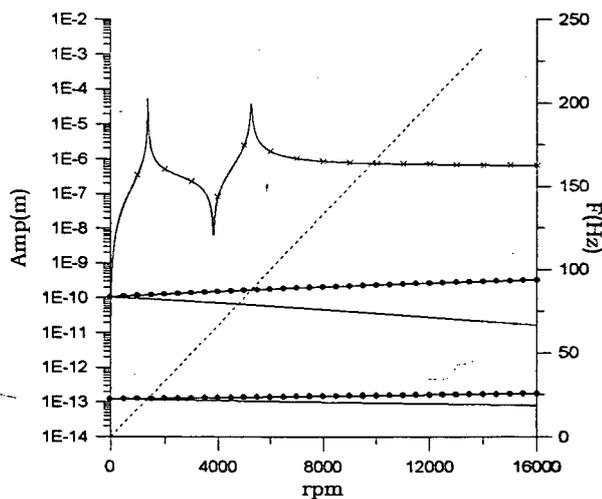


Figura 4.13 - Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos, termos de acoplamentos e $\theta = 45^\circ$ sem amortecimento interno.

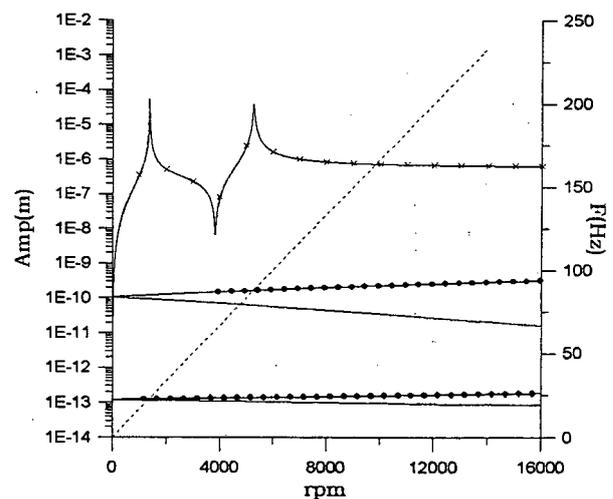


Figura 4.14 - Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos, termos de acoplamentos e $\theta = 45^\circ$ com amortecimento interno.

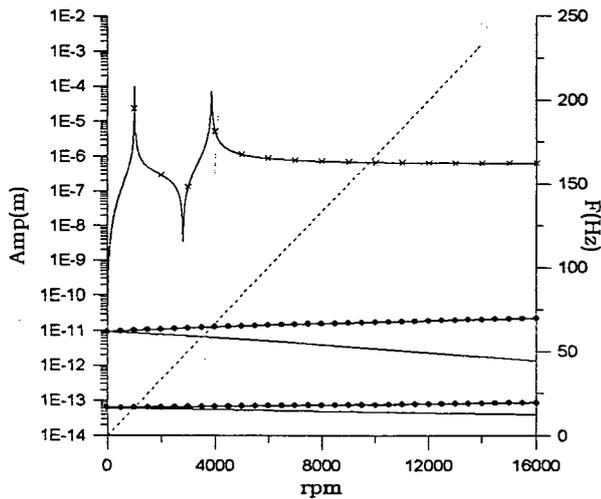


Figura 4.15 - Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos, termos de acoplamentos e $\theta = 75^\circ$ sem amortecimento interno.

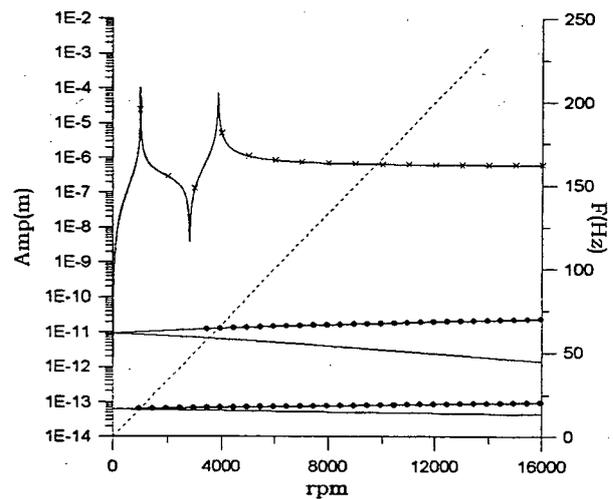


Figura 4.16 - Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais isotrópicos, termos de acoplamentos e $\theta = 75^\circ$ com amortecimento interno.

Como pode-se notar, o amortecimento interno de rotores em carbono/epóxi e mancais com termos de acoplamento tende a estabilizar até a primeira velocidade crítica. Para o ângulo de 15° , praticamente não se nota este comportamento devido ao baixo amortecimento interno produzido por este ângulo. Comportamento semelhante também foi notado para rotores em vidro/epóxi.

4.2.4 Rotores com Mancais Anisotrópicos

O amortecimento interno de rotores com mancais anisotrópicos pode afetar tanto a resposta em frequência como também as zonas de instabilidade do rotor. Para melhor avaliar este comportamento, foram analisados rotores com o eixo em carbono/epóxi e vidro/epóxi. Nas Figuras 4.17 a 4.22 pode-se observar a influência da anisotropia dos mancais para rotores em carbono/epóxi com e sem a inclusão do amortecimento interno.

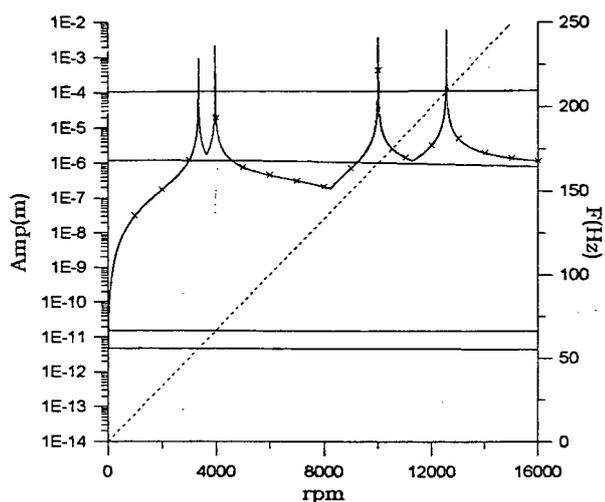


Figura 4.17 - Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais anisotrópicos, $\theta = 15^\circ$ e sem amortecimento interno.

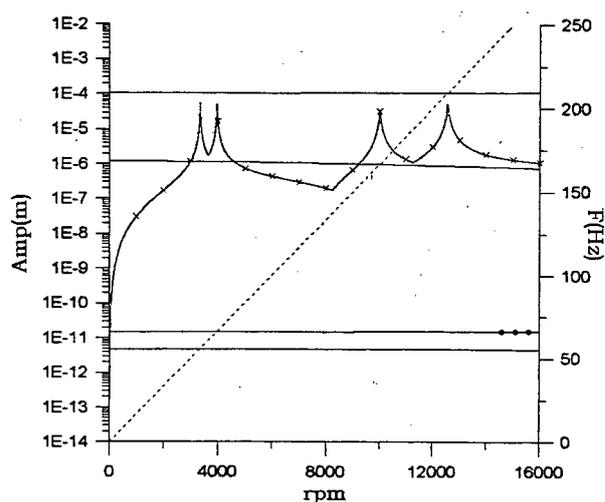


Figura 4.18 - Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais anisotrópicos, $\theta = 15^\circ$ e com amortecimento interno.

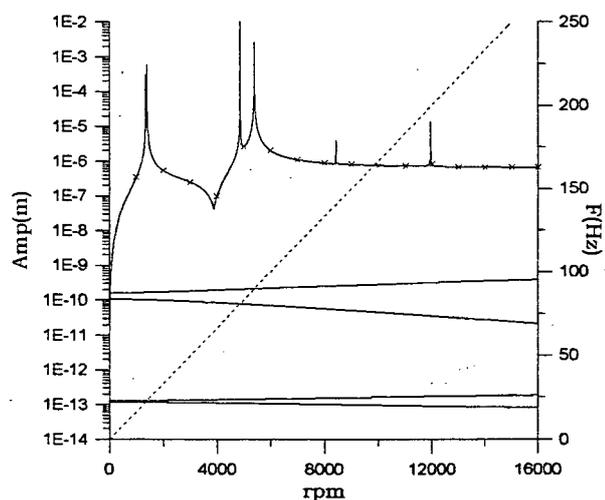


Figura 4.19 - Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais anisotrópicos, $\theta = 45^\circ$ e sem amortecimento interno.

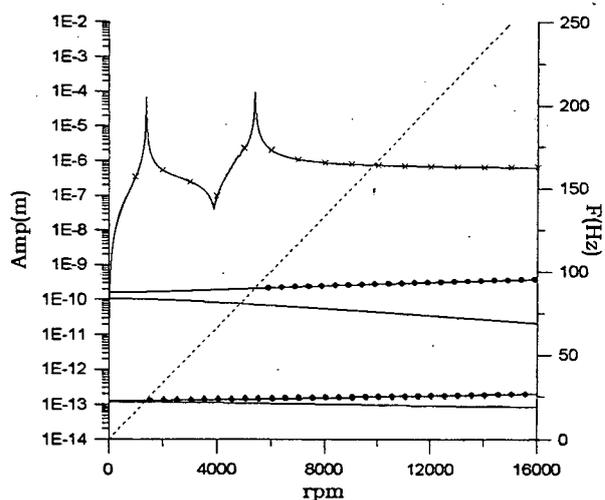


Figura 4.20 - Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais anisotrópicos, $\theta = 45^\circ$ e com amortecimento interno.

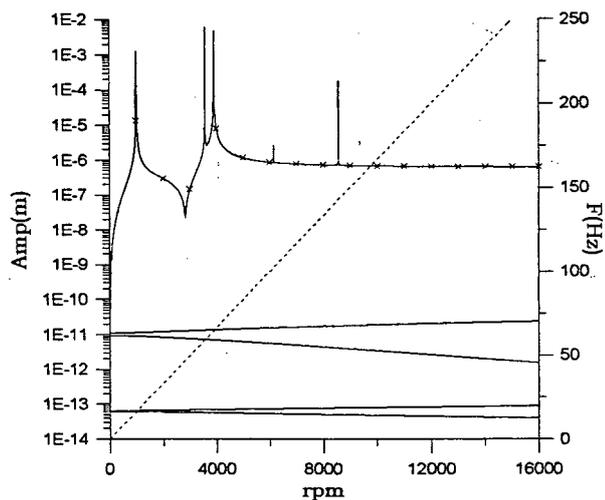


Figura 4.21 - Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais anisotrópicos, $\theta = 75^\circ$ e sem amortecimento interno.

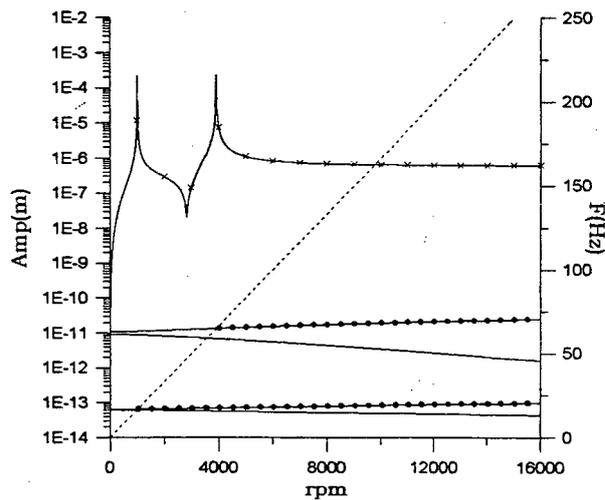


Figura 4.22 - Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em carbono/epóxi com mancais anisotrópicos, $\theta = 75^\circ$ e com amortecimento interno.

Como foi relatado no capítulo 2, alguns autores mostraram que a anisotropia dos mancais dos rotores tende a diminuir as zonas de instabilidade produzida pelo amortecimento interno. Isto fica evidente para o ângulo de 15° , o mesmo não acontecendo para os ângulos de 45° e 75° onde a influência do amortecimento interno é grande. Soma-se a isto, o fato de que a anisotropia introduzida pelos mancais tem menor influência para os ângulos de 45° e 75° , como mostrado nos diagrama de Campbell. Como era de se esperar, na resposta a uma massa desbalanceada nota-se um maior amortecimento dos picos de amplitudes para os ângulos onde há maior influência do amortecimento interno, 45° e 75° . Tal redução nos picos de amplitude se deu de forma mais pronunciada nas frequências "backward"^a. Vance (1988) mencionou que quantidade suficiente de amortecimento introduzido no sistema fazem os picos em "backward" desaparecer.

Tal comportamento é também mostrado para rotores com o eixo em vidro/epóxi, nas Figuras 4.23 a 4.28.

^a Os picos de amplitude que aparecem depois da segunda velocidade crítica são picos produzidos por outras frequências naturais que não estão entre as quatro primeiras analisadas.

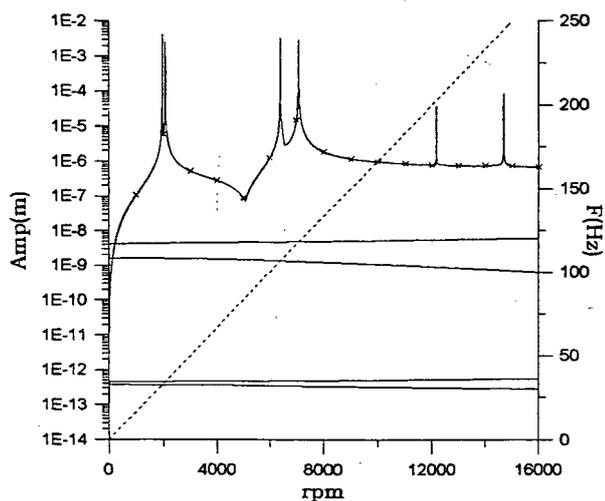


Figura 4.23 - Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em vidro/epóxi com mancais anisotrópicos, $\theta = 15^\circ$ e sem amortecimento interno.

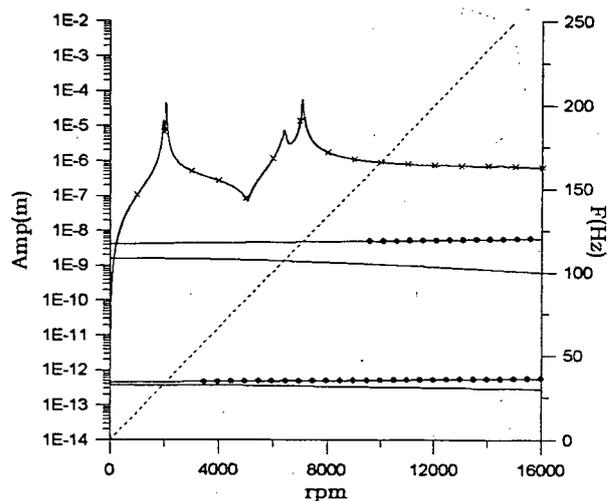


Figura 4.24 - Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em vidro/epóxi com mancais anisotrópicos, $\theta = 15^\circ$ e com amortecimento interno.

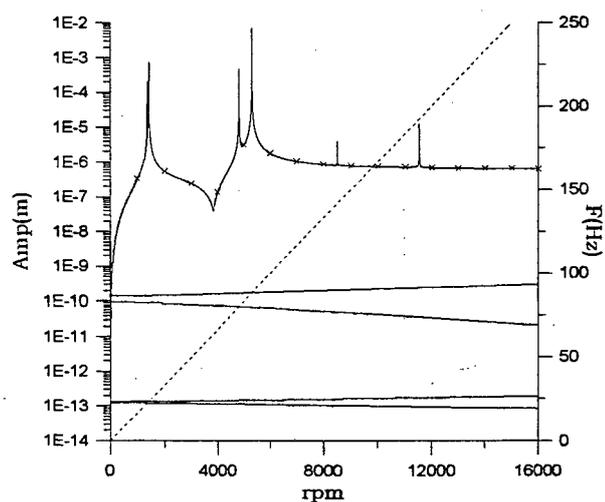


Figura 4.25 - Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em vidro/epóxi com mancais anisotrópicos, $\theta = 45^\circ$ e sem amortecimento interno.

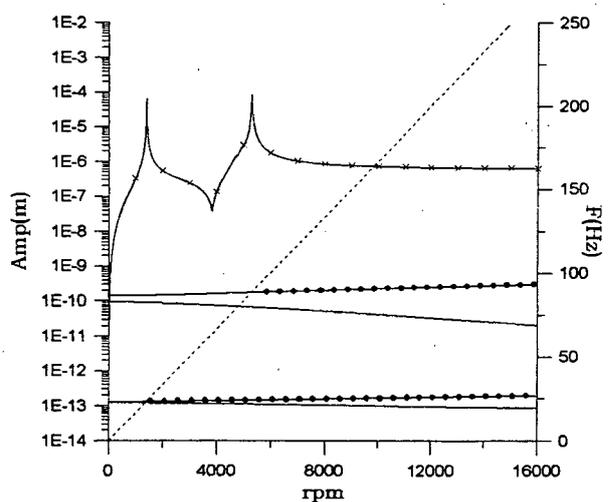


Figura 4.26 - Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em vidro/epóxi com mancais anisotrópicos, $\theta = 45^\circ$ e com amortecimento interno.

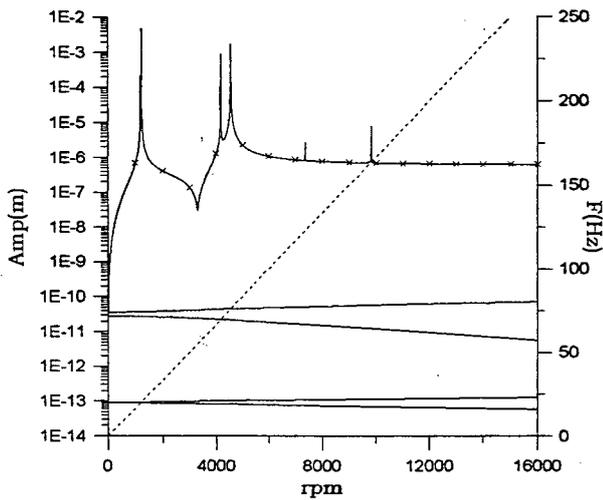


Figura 4.27 - Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em vidro/epóxi com mancais anisotrópicos, $\theta = 75^\circ$ e sem amortecimento interno.

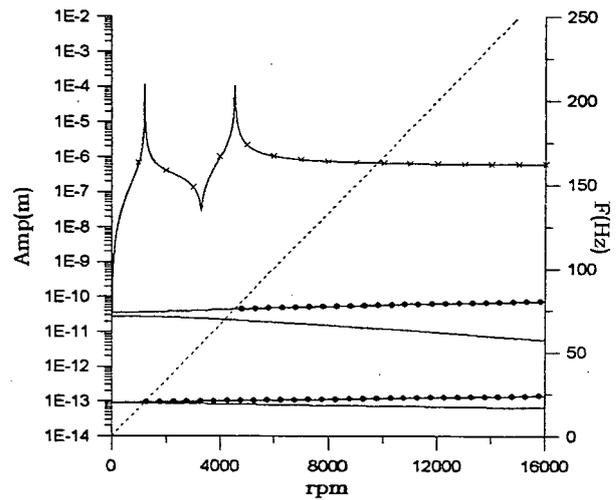


Figura 4.28 - Diagrama de Campbell e resposta a uma massa desbalanceada para rotores em vidro/epóxi com mancais anisotrópicos, $\theta = 75^\circ$ e com amortecimento interno.

Nota-se que para os ângulos de 45° e 75° , o comportamento do rotor em carbono/epóxi se assemelha muito ao do rotor em vidro/epóxi. Isto porque, como foi mostrado no capítulo 3, o módulo equivalente equivalente do carbono/epóxi para estas configurações tem um valor bastante aproximado ao do módulo equivalente para o vidro/epóxi, o mesmo não acontecendo para o ângulo de 15° .

4.3 ANÁLISE DOS MODOS EM TORÇÃO

Para a análise em torção, a configuração do rotor é a mesma adotada para os resultados do item 4.2. Para análise da resposta em frequência, um torque do tipo $T_r = T_{\text{constante}} + T \cos(\Omega t)$ foi aplicado no primeiro disco. A Figura 4.29 mostra as frequências naturais para o primeiro modo em torção de um rotor com o eixo em carbono/epóxi com θ igual a 15° , 30° , 45° , 60° e 75° . Como estas frequências naturais não variam com a rotação do eixo, elas podem ser melhor visualizadas em função apenas de θ , Figura 4.30. Pode-se notar que o comportamento dos modos em torção em função do ângulo de bobinagem é

proporcional ao comportamento do módulo de cisalhamento equivalente, Figura 3.7-b.

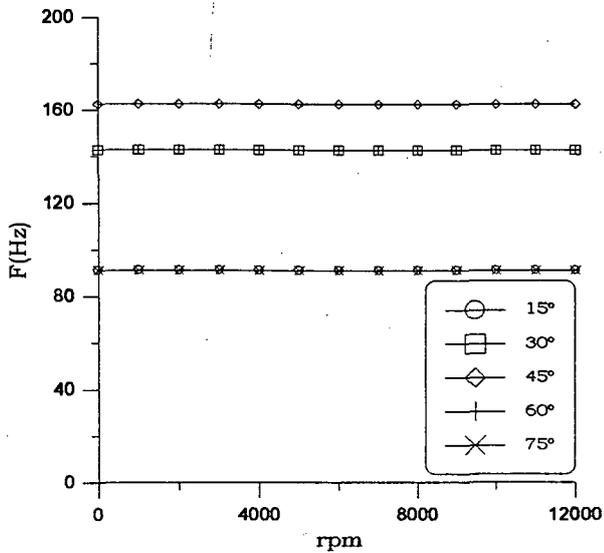


Figura 4.29 - Representação no diagrama de Campbell das frequências naturais para o primeiro modo em torção de um rotor em carbono/epóxi.

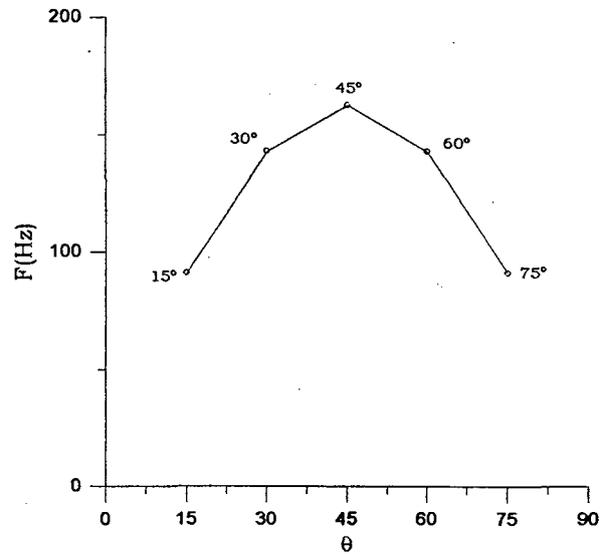


Figura 4.30 - Frequências naturais para o primeiro modo em torção de um rotor em carbono/epóxi.

A Figura 4.31 mostra os respectivos fatores de amortecimento para os diferentes ângulos. Pode-se notar que o comportamento é semelhante aos fatores de amortecimento determinados a partir da eq. (3.36), mostrados na Figura 3.16.

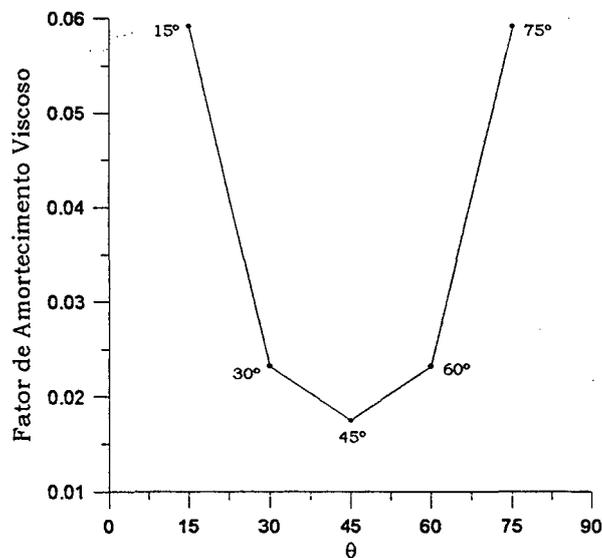


Figura 4.31 - Fator de amortecimento viscoso cisalhante para o primeiro modo em torção de um rotor em carbono/epóxi

Nas Figuras 4.32 e 4.33, pode-se visualizar as respostas em frequência para um rotor em carbono/epóxi com e sem a inclusão do amortecimento interno. Nota-se que o amortecimento interno pode diminuir consideravelmente os picos dos modos em torção. Comportamento semelhante também foi verificado para rotores com o eixo em vidro/epóxi.

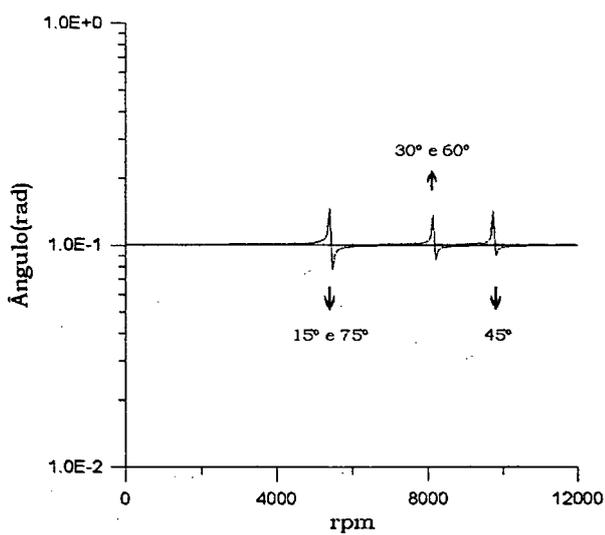


Figura 4.32 - Resposta em frequência para um rotor em carbono/epóxi submetido a um torque $T_r = T_{\text{constante}} + T \cos(\Omega t)$, sem considerar o amortecimento interno,.

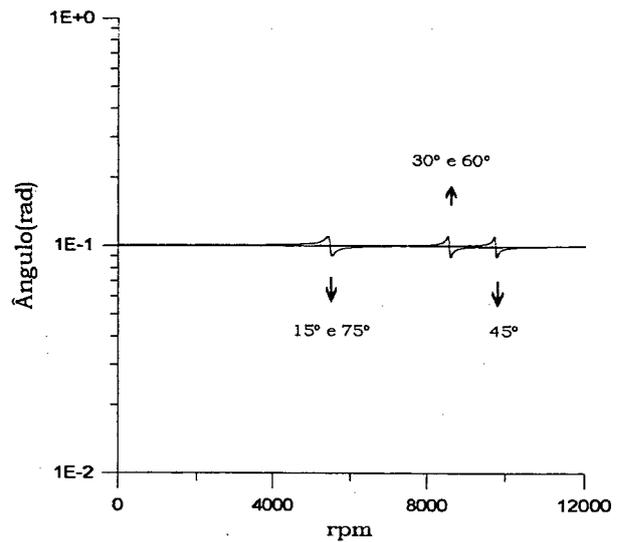


Figura 4.33 - Resposta em frequência para um rotor em carbono/epóxi submetido a um torque $T_r = T_{\text{constante}} + T \cos(\Omega t)$, considerando o amortecimento interno,.

5 OTIMIZAÇÃO

O uso de técnicas de otimização em análise estrutural pode trazer grandes benefícios tais como: agilização no desenvolvimento de produtos, de forma a definir mais rapidamente questões críticas do projeto como geometria adequada; previsão de parâmetros otimizados pré-determinados; redução do tempo e do custo final do produto, tornando o projeto mais flexível, leve e eficaz. Assim como em todos os ramos da engenharia, técnicas de otimização podem ser utilizadas no projeto de rotores em eixos bobinados, a fim de conseguir um desempenho ótimo. Há vários trabalhos publicados sobre otimização, tanto em material composto como também em dinâmica de rotores. Aqui foram selecionados alguns de maior interesse a este trabalho.

Em Liao *et al.* (1986), utilizaram-se técnicas de otimização para otimizar o amortecimento de uma viga laminada simétrica. O objetivo do seu trabalho foi maximizar o amortecimento interno e o módulo equivalente da viga, tendo como variáveis de projeto a orientação e a espessura de cada lâmina. O modelo para o amortecimento interno foi o mesmo adotado por Adams *et al.* (1973). Neste trabalho, estudaram-se os seguintes casos: (i) maximizar o amortecimento específico; (ii) maximizar o amortecimento específico tendo como restrição o módulo equivalente; (iii) maximizar o amortecimento específico tendo como restrição a rigidez equivalente (EA) constante; (iv) maximizar o módulo longitudinal equivalente tendo como restrição o amortecimento específico. Estes tipos de problemas são não-convexos, conseqüentemente, este método de otimização converge para um mínimo local. Vários pontos iniciais foram tomados com o objetivo de determinar uma solução global aproximada. O algoritmo incorpora o método BIGGS, que utiliza

programação quadrática para determinar a direção de procura, inclui função de penalidade para produzir uma restrição de segunda ordem e a matriz hessiana é aproximada por um procedimento Quasi-Newton. Os resultados mostraram que a orientação das fibras tem maior influência que a espessura de cada lâmina em um laminado multidirecional.

Dando continuidade ao trabalho de Liao, em Sung *et al.* (1987) acrescentou-se como variável de projeto a fração do volume de fibra, além do ângulo e da espessura de cada lâmina. O objetivo foi maximizar o amortecimento específico tendo como restrições a rigidez equivalente (EI) e o número de lâminas constante.

Em Saravanos *et al.* (1989), duas classes de problemas foram avaliadas na otimização de laminados compostos: (i) minimizar picos de ressonância em um determinado intervalo de frequência, (ii) colocar as frequências naturais dentro de um intervalo ótimo. Neste caso, utilizou-se como variáveis de projeto o ângulo e o volume de fibras de cada lâmina. O procedimento de otimização baseou-se no método das direções viáveis com "line-search" como método para determinação do passo. A análise foi feita em uma viga composta engastada e em uma casca cilíndrica engastada. Elementos de placa triangulares foram utilizados para modelar tanto a viga como a placa e um modelo de amortecimento interno foi introduzido pelo autor.

Em dinâmica de rotores, técnicas de otimização têm sido utilizadas para melhorar o desempenho e o custo, satisfazendo diversos critérios relacionados à resistência, peso, fadiga, estabilidade, ruído, níveis de vibrações entre outros. Em Davis *et al.* (1988), avaliaram-se várias técnicas de otimização aplicadas à dinâmica de rotores de helicópteros. Três classes básicas foram avaliadas: métodos de penalidade (Penalidade Exterior, Penalidade Interior e Lagrangiano Aumentado), métodos aproximados (Programação Linear Sequencial - SLP e Programação Quadrática Sequencial - SQP) e métodos diretos (Método das Direções Viáveis - MFD e Método das Direções Viáveis Modificado - MMFD). Neste trabalho, todos estes métodos foram utilizados para maximizar a taxa de amortecimento interno e a localização ótima das frequências naturais. O

problema foi formulado com dez variáveis de projeto, sujeitas a várias restrições. Uma análise comparativa da precisão dos resultados, bem como do tempo de convergência e do número de chamadas da função, foi feita para cada método.

Em Steffen *et al.* (1987), otimizaram-se as frequências naturais de um rotor utilizando otimização irrestrita por Quasi-Newton (DFP). No cálculo do passo, foi usado uma combinação de "Golden Section" e procura unidimensional polinomial. Para o cálculo da sensibilidade, foi utilizado uma aproximação por diferenças finitas "forward". Neste trabalho, o rotor foi modelado com elemento de viga com interpolação cúbica para o eixo, sendo que o disco foi considerado rígido. A técnica de otimização foi utilizada para aumentar a diferença entre a segunda e a terceira frequências naturais do rotor a uma rotação constante de 1200rpm. Aqui as variáveis de projeto foram a posição do disco no eixo, as propriedades da seção transversal do eixo e as rigidezes dos mancais.

Em Panda *et al.* (1999), utilizou-se o método do gradiente para minimizar a amplitude da resposta a uma massa desbalanceada e aumentar a velocidade limite de instabilidade de um rotor, considerando como variáveis de projeto as propriedades de rigidez e de amortecimento dos mancais. O efeito do amortecimento interno do eixo em aço também foi incluído na análise.

Em rotores com eixo em material composto, os parâmetros de otimização são mais numerosos. Além das variáveis de projeto clássicas de rotores, a ortotropia dos materiais compostos oferece outros parâmetros como orientação das fibras, número de lâminas, sequência das lâminas e volume de fibras. Em Bauchau *et al.* (1983), otimizaram-se as frequências naturais tendo como variáveis de projeto o número de lâminas e suas orientações. O eixo foi considerado como sendo um tubo de parede fina e um modelo de viga com módulo equivalente semelhante ao utilizado por Singh *et al.* (1994) foi adotado. A fim de limitar a resistência torcional do eixo, um determinado número de lâminas a 45° foi mantido fixo. O objetivo foi maximizar a primeira frequência natural em flexão sob a restrição de massa constante.

Em Darlow *et al.* (1995), o projeto ótimo de um eixo de transmissão supercrítico em material composto foi desenvolvido com o objetivo de minimizar o peso. Neste problema, as restrições empregadas foram: vibração torcional, resistência última à torção, flambagem torcional e vibrações laterais, incluindo deformações cisalhantes e inércia rotacional. As variáveis de projeto foram tomadas como sendo o ângulo e a espessura de cada lâmina para cada elemento de eixo, o número de lâminas, o raio interno do eixo e o número de mancais. A função objetivo foi a soma do peso dos elementos de eixo mais a soma do peso dos mancais. O método das Matrizes de Transferência foi utilizado para determinar as velocidades críticas laterais do eixo em rotação e o método de Holzer foi utilizado para determinar as frequências naturais em torção. Efeitos de acoplamentos (flexão/extensão e flexão/torção) foram incluídos no modelo. O pacote de otimização utilizado foi o OPT, versão 3.2, dentro do qual é implementado o algoritmo do gradiente reduzido generalizado (GRG) com procura linear uni-dimensional e o cálculo da sensibilidade feito através do método das diferenças finitas central.

No presente trabalho, uma técnica de otimização não-linear irrestrita foi utilizada para otimizar rotores bobinados, tendo como objetivos, minimizar picos de amplitude na primeira velocidade crítica, evitar zonas de instabilidade e encontrar a posição ótima das frequências naturais. Como variáveis de projeto, foram utilizadas a orientação das fibras, as rigidezes dos mancais e a posição do disco. Foram feitas análises em rotores com excitação síncrona (massa desbalanceada) e excitação assíncrona. Vale a pena frisar que o objetivo da utilização de otimização neste trabalho não foi escolher o melhor método a ser aplicado nestas análises, mas sim ressaltar as vantagens e a flexibilidade oferecida pelo uso de materiais compostos laminados em rotores.

5.1 ALGORÍTMO DE OTIMIZAÇÃO

O algoritmo utilizado na otimização foi o NCONF, uma rotina da biblioteca IMSL do Visual Fortran 6.0, Digital Visual Fortran (1998). Esta

rotina usa o método Quasi-Newton e um conjunto de variáveis ativas para resolver problemas de minimização sujeitos a apenas restrições de variáveis. Uma variável é chamada de variável livre se ela não está neste conjunto ativo. O problema é colocado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ l_{\text{inf}} \leq x \leq l_{\text{sup}} \end{aligned} \quad (5.1)$$

De um dado ponto inicial x_o , um conjunto ativo é construído. No primeiro passo, a aproximação da inversa da matrix Hessiana, H^{-1} , é igual a uma matrix identidade de mesma ordem:

$$H^{-1} = I_{id} \quad (5.2)$$

A rotina calcula então a direção de descida para as variáveis livres de acordo com a fórmula:

$$d_o = -H^{-1} \nabla f(x_o) \quad (5.3)$$

A direção de procura para as variáveis livres é tida como zero. Uma procura linear é usada para achar o próximo ponto x_f :

$$x_f = x_o + \alpha d_o \quad (5.4)$$

tal que α minimize $f(x + \alpha d)$. Finalmente, as condições de optimalidade são verificadas:

$$\begin{aligned} \|g(x_i)\| \leq \xi, \quad l_{\text{inf}} \leq x_i \leq l_{\text{sup}} \\ g(x_i) < 0, \quad x_i = l_{\text{sup}} \\ g(x_i) > 0, \quad x_i = l_{\text{inf}} \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde $g(x_i)$ é o gradiente de x_i e ξ é a tolerância do gradiente. Enquanto a optimalidade não é alcançada, H^{-1} é atualizada de acordo com o método BFGS (Broyden - Fletcher - Goldfarb - Shanno), Arora (1989):

$$H_f^{-1} = H_o^{-1} + \frac{y_f y_f^T}{(y_f \cdot s_f)} + \frac{g(x_o) g(x_o)^T}{(g(x_o) \cdot d_o)} \quad (5.6)$$

onde $s_f = x_f - x_o$ e $y_f = g(x_f) - g(x_o)$. Uma outra direção de procura é então calculada para iniciar a próxima interação. O conjunto ativo é alterado somente quando uma variável livre atinge seu limite durante uma interação ou quando a condição de optimalidade é encontrada para a variável livre. Em último caso, a variável que viola a condição de optimalidade é excluída. O método de diferenças finitas "forward" é usado para estimar o gradiente.

5.2 APLICAÇÕES

Neste trabalho, quatro classes de problemas foram avaliadas: (i) reduzir a amplitude de vibração na primeira velocidade crítica em rotores com mancais isotrópicos e excitação assíncrona; (ii) reduzir a amplitude de vibração na primeira velocidade crítica em rotores com excitação síncrona e mancais anisotrópicos; (iii) evitar zonas de instabilidades em rotores com mancais anisotrópicos com termos de acoplamento; (iv) localização ótima das freqüências naturais. Amortecimento externo não foi incluído nesta fase do trabalho com o intuito de melhor avaliar o efeito do amortecimento interno introduzido pelo material composto. Na otimização da instabilidade, foram incluídos termos de acoplamento nos mancais para produzir instabilidades nas velocidades críticas. As análises foram feitas com eixos em carbono/epóxi e vidro/epóxi numa configuração $[\pm\theta_1/\pm\theta_2]_s$. Da mesma forma como foi feito em Liao *et al.* (1986), vários valores de θ_1 e θ_2 foram tomados como variáveis iniciais do problema para determinar uma solução global aproximada, visto que o problema é não-convexo. Além disso, a sensibilidade sendo calculada por diferenças finitas, pode levar a solução a um ponto não-crítico, dependendo do incremento escolhido. A fim de evitar um mal condicionamento nos problemas, foram utilizadas como variáveis de projeto o inverso das variáveis referentes às rigidezes dos mancais e à posição do disco, além de que, todas as variáveis envolvidas nos problemas foram normalizadas.

A minimização da amplitude foi formulada através da maximização do amortecimento na primeira velocidade crítica. Neste caso, a função objetivo é maximizar o fator de amortecimento viscoso η_i , dado como, Lalanne *et al.* (1998):

$$\eta_i = \frac{\lambda_i}{(\lambda_i^2 + \omega_i^2)^{1/2}} \quad (5.7)$$

onde λ_i e ω_i são a parte real e parte imaginária da solução do autovalor dada na eq. (2.47).

No problema de otimização da instabilidade, de modo semelhante ao que foi feito em alguns trabalhos já referenciados, a função objetivo foi formulada através da maximização do decremento logarítimo δ_i , que é dado da forma:

$$\delta_i = -\frac{2\pi\lambda_i}{\omega_i} \quad (5.8)$$

5.2.1 - Otimização da Amplitude em Rotores com Excitação Assíncrona

O problema foi formulado da seguinte maneira:

$$\text{Max } \|\eta_i\|$$

$$15^\circ \leq \theta_1 \leq 75^\circ$$

$$15^\circ \leq \theta_2 \leq 75^\circ$$

sendo que $K_{xx} = K_{zz} = 8.10^7$, $K_{xz} = K_{zx} = A_{xx} = A_{zz} = A_{xz} = A_{zx} = 0$. Um único disco com raio interno de 0,039m, raio externo de 0,15m e espessura de 0,03m foi colocado a um terço do comprimento do eixo de 1m, o qual possui raio interno de 0,031m, raio externo 0,039m. O eixo é formado por oito lâminas de 0,001m de espessura numa configuração simétrica e balanceada. As propriedades materiais do rotor são as mesmas do capítulo 4. A função objetivo $\|\eta_i\|$ está sendo avaliada somente na primeira crítica, ou seja, em $i = 2$.

Dois tipos de excitação assíncrona foram avaliadas, uma subsíncrona com $s = 0,5$ e uma super-síncrona com $s = 1,5$, onde s é a razão entre a rotação do eixo e a frequência natural. Nos dois casos, a solução ótima encontrada foi a mesma, Tabela 5.1.

Tabela 5.1 - Solução ótima para rotores com excitação assíncrona com $s = 0,5$ e $s = 1,5$

Solução ótima		
	θ_1	θ_2
Carbono/epóxi	60,19°	60,19°
Vidro/epóxi	64,82°	64,82°

Para uma melhor comparação, as Figuras 5.1 e 5.2 mostram as amplitudes do disco com $\theta_1 = \theta_2$ variando de 15° a 75°, assim como a solução ótima encontrada. As Figuras 5.3 e 5.4 mostram os respectivos fatores de amortecimento viscoso. Ambas as figuras são para $s = 0,5$, visto que para $s = 1,5$, a solução ótima encontrada foi a mesma.

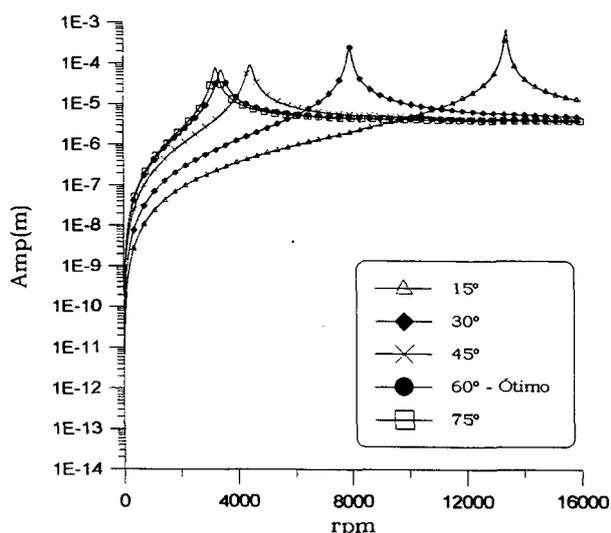


Figura 5.1 - Resposta a uma excitação subsíncrona ($s = 0.5$), para eixo em carbono/epóxi.

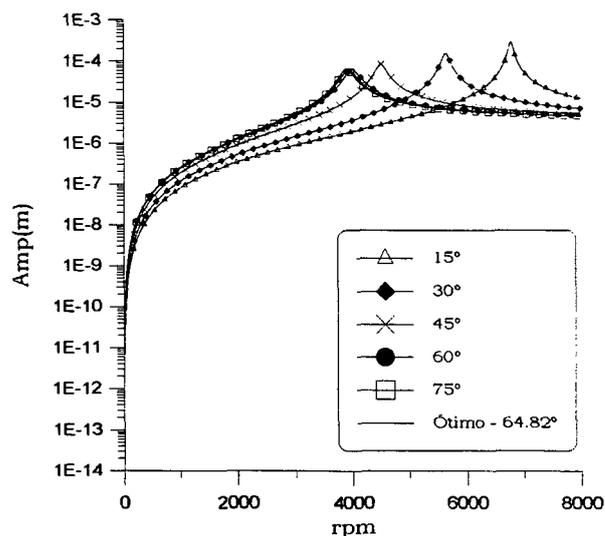


Figura 5.2 - Resposta a uma excitação subsíncrona ($s = 0.5$), para eixo em vidro/epóxi.

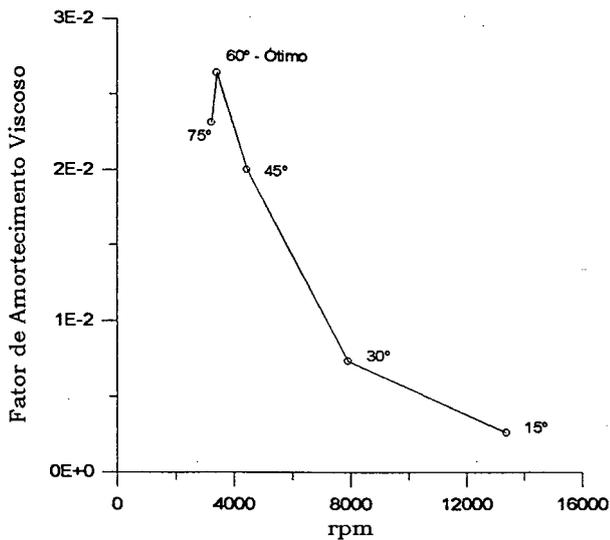


Figura 5.3 - Amortecimento na primeira velocidade crítica, com excitação subsíncrona ($s = 0,5$), para eixo em carbono/epóxi.

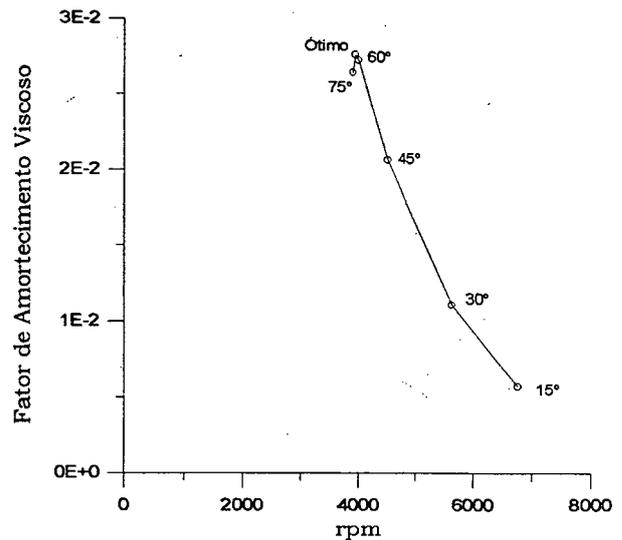


Figura 5.4 - Amortecimento na primeira velocidade crítica, com excitação subsíncrona ($s = 0,5$), para eixo em vidro/epóxi.

5.2.2 - Otimização da Amplitude em Rotores com Excitação Síncrona

O problema para a excitação síncrona foi formulado de duas formas. Primeiramente, tendo como variáveis de projeto θ_1 , θ_2 , K_{xx} e K_{zz} , Figura 5.5. Em seguida, foi acrescentada a posição do disco no eixo y_c :

$$\text{Max } \|\eta_i\|$$

$$15^\circ \leq \theta_1 \leq 75^\circ$$

$$15^\circ \leq \theta_2 \leq 75^\circ$$

$$1.10^7 \leq K_{xx} \leq 1.10^8$$

$$5.10^7 \leq K_{zz} \leq 8.10^8$$

$$0.2 \leq y_c \leq 0.4$$

sendo que o índice i refere-se à primeira velocidade crítica e $K_{xz} = K_{zx} = A_{xx} = A_{zz} = A_{xz} = A_{zx} = 0$.

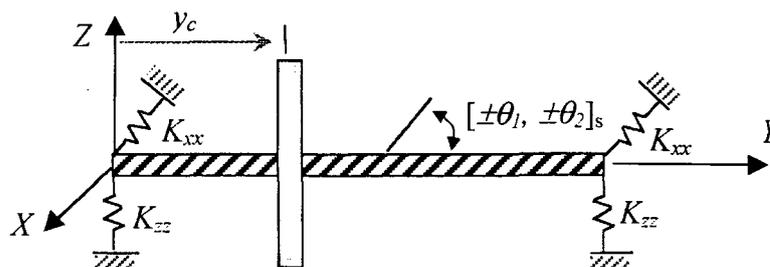


Figura 5.5 - Variáveis de projeto do rotor

A Tabela 5.2 mostra os resultados da solução ótima determinada por duas maneiras: primeiro considerando y_c constante, a um terço do comprimento do eixo, e em seguida como uma variável de projeto.

Tabela 5.2 - Solução ótima para rotores com mancais anisotrópicos

Solução ótima					
	θ_1	θ_2	K_{xx} (MPa)	K_{zz} (MPa)	y_c (m)
carbono/epóxi (y_c constante)	35,72°	34,31°	1.10^7	8.10^8	(0,333)
carbono/epóxi (y_c variável)	36,27°	36,27°	1.10^7	8.10^8	0,4
vidro/epóxi (y_c constante)	30,76°	30,76°	1.10^7	8.10^8	(0,333)
vidro/epóxi (y_c variável)	31,53°	31,53°	1.10^7	8.10^8	0,4

As Figuras de 5.6 e 5.7 mostram as amplitudes do disco no rotor, onde a curva denominada Ótimo (a) é a solução ótima considerando y_c constante, e a curva denominada Ótimo (b) é a solução ótima considerando y_c como variável de projeto. As Figuras 5.8 e 5.9 mostram os respectivos fatores de amortecimento viscoso, $\|\eta_i\|$. Também são mostrados nas Figuras 5.5 - 5.8 as curvas e pontos para $\theta_1 = \theta_2$ variando de 15° a 75°, y_c a um terço do comprimento, no caso em que y_c é constante, e com as rigidezes ótimas encontradas: $K_{xx} = 1.10^7$ e $K_{zz} = 8.10^8$. Pode-se notar na solução ótima que as rigidezes dos mancais está de acordo com o previsto pela teoria, pois quanto

maior a anisotropia dos mancais, mais elíptica será a órbita de giro do eixo, o que implica num maior efeito do amortecimento interno.

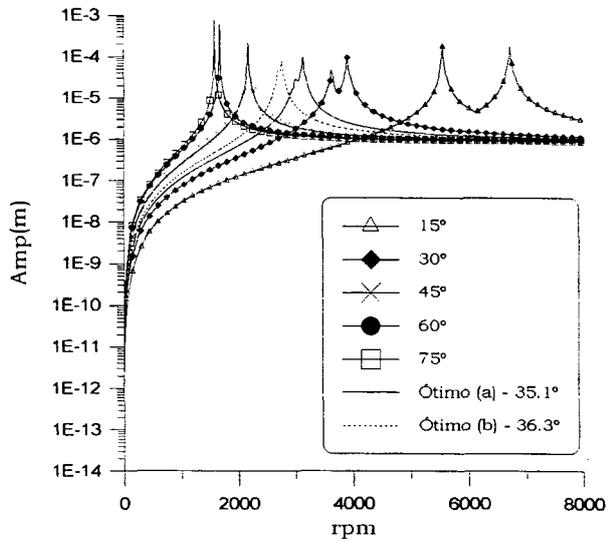


Figura 5.6 - Resposta a uma excitação síncrona, para eixo em carbono/epóxi.

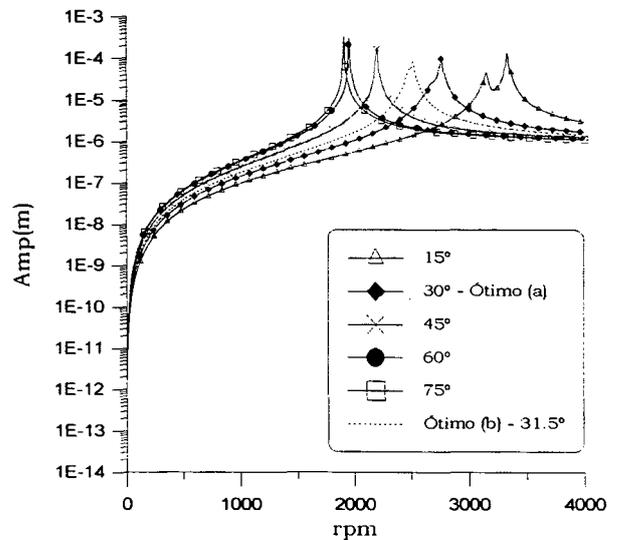


Figura 5.7 - Resposta a uma excitação síncrona, para eixo em vidro/epóxi.

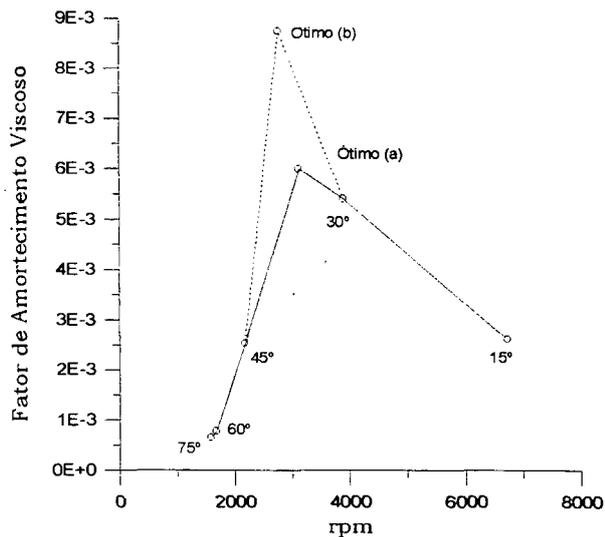


Figura 5.8 - Amortecimento na primeira velocidade crítica, com excitação síncrona, para eixo em carbono/epóxi.

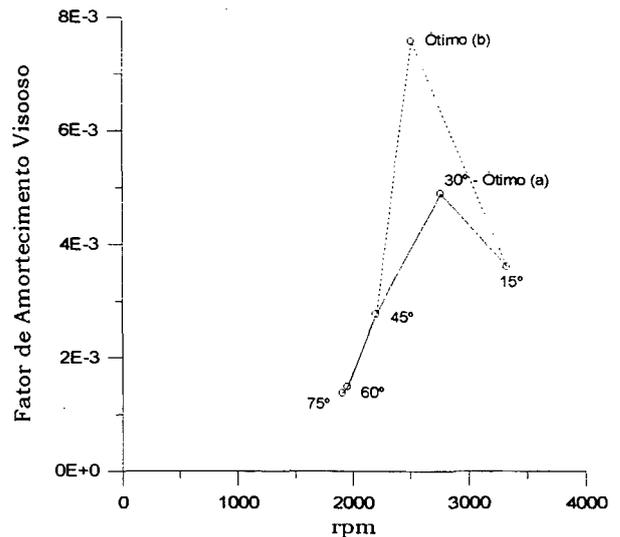


Figura 5.9 - Amortecimento na primeira velocidade crítica, com excitação síncrona, para eixo em vidro/epóxi.

5.2.3 - Otimização das Zonas de Instabilidade

Como foi visto no capítulo 2, os termos de acoplamento dos mancais podem gerar instabilidades em todas as frequências "forward". Pelos resultados

mostrados no capítulo 4, notou-se que a presença do amortecimento interno associado à anisotropia dos mancais, neste caso, podem diminuir as zonas de instabilidades. A fim de evitar as zonas de instabilidade, o problema foi formulado da seguinte maneira:

$$\text{Max } \delta_i$$

$$15^\circ \leq \theta_1 \leq 75^\circ$$

$$15^\circ \leq \theta_2 \leq 75^\circ$$

$$3 \cdot 10^6 \leq K_{xx} \leq 5 \cdot 10^7$$

$$8 \cdot 10^6 \leq K_{zz} \leq 8 \cdot 10^7$$

$$0.2 \leq y_c \leq 0.4$$

sendo que agora os termos de acoplamento das rigidezes dos mancais são nulos, $K_{xz} = -1 \cdot 10^7$, $K_{zx} = 1 \cdot 10^7$ e $A_{xx} = A_{zz} = A_{xz} = A_{zx} = 0$.

As Figuras 5.10 e 5.11 mostram o diagrama de Campbell das duas primeiras frequências para rotores com eixo em carbono/epóxi e vidro/epóxi respectivamente, com as configurações inicial e ótima dadas na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 - Solução ótima das zonas de instabilidade

	θ_1	θ_2	K_{xx} (MPa)	K_{zz} (MPa)	y_c (m)
Configuração inicial (carbono/epóxi e vidro/epóxi)	60,0°	60,0°	$1 \cdot 10^7$	$1 \cdot 10^7$	0,333
Configuração ótima (carbono/epóxi)	43,7°	43,7°	$3 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^7$	0,4
Configuração ótima (vidro/epóxi)	44,07°	44,07°	$3 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^7$	0,4

Nestas condições, com o rotor sob uma excitação síncrona e operando em uma velocidade super-crítica, ele será instável.

A Figura 5.12 mostra o diagrama de Campbell para a solução ótima do rotor com eixo em carbono/epóxi e a Figura 5.13, para o eixo em vidro/epóxi. Para ambos os eixos, carbono/epóxi e vidro/epóxi, nota-se que nesta configuração ótima, o rotor não atravessa nenhuma zona de instabilidade, sob excitação síncrona.

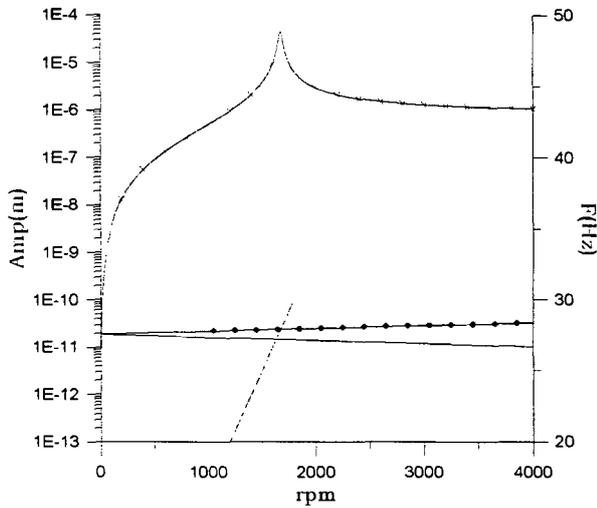


Figura 5.10 - Diagrama de Campbell e resposta a uma excitação síncrona para uma configuração inicial de um eixo em carbono/epóxi.

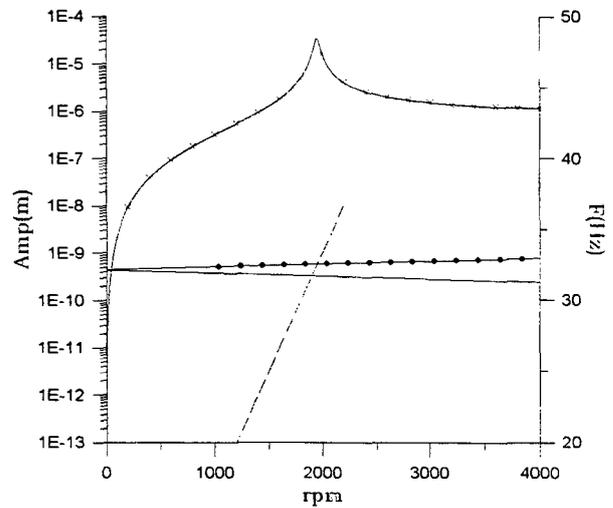


Figura 5.11 - Diagrama de Campbell e resposta a uma excitação síncrona para uma configuração inicial de um eixo em vidro/epóxi.

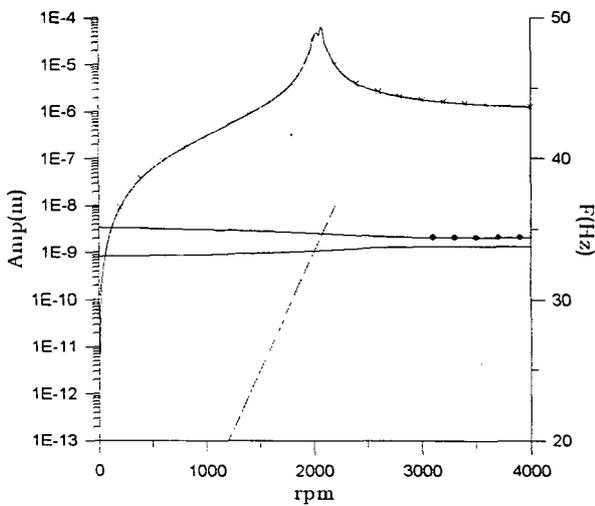


Figura 5.12 - Diagrama de Campbell e resposta a uma excitação síncrona para a configuração ótima do eixo em carbono/epóxi.

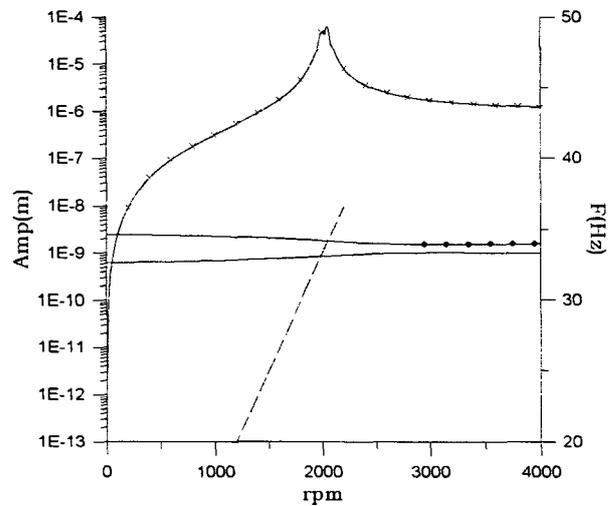


Figura 5.13 - Diagrama de Campbell e resposta a uma excitação síncrona para a configuração ótima do eixo em vidro/epóxi.

5.2.4 Localização Ótima das Frequências Naturais

De acordo com os resultados obtidos no capítulo 4, observou-se que o ângulo de bobinamento do rotor pode influenciar fortemente na localização das velocidades críticas.

De modo semelhante ao trabalho de Steffen *et al.* (1987), o objetivo aqui foi aumentar a diferença entre a primeira e a segunda velocidades críticas, a uma rotação constante de $\Omega = 8000$ rpm, tendo como variáveis de projeto θ_1 , θ_2 , K_{xx} , K_{zz} e y_c :

$$\text{Max } \omega(4) - \omega(2)$$

$$15^\circ \leq \theta_1 \leq 75^\circ$$

$$15^\circ \leq \theta_2 \leq 75^\circ$$

$$1.10^6 \leq K_{xx} \leq 1.10^7$$

$$1.10^6 \leq K_{zz} \leq 1.10^7$$

$$0.2 \leq y_c \leq 0.4$$

sendo que $K_{xz} = K_{zx} = A_{xx} = A_{zz} = A_{xz} = A_{zx} = 0$.

A configuração inicial, assim como a configuração ótima são mostrados nas Figuras 5.14 e 5.15 e os respectivos dados na tabela 5.4.

Tabela 5.4 - Localização ótima das velocidades críticas

	θ_1	θ_2	K_{xx} (MPa)	K_{zz} (MPa)	y_c (m)
Configuração inicial (carbono/epóxi e vidro/epóxi)	30,0°	30,0°	5.10 ⁶	5.10 ⁶	0,333
Configuração ótima (carbono/epóxi)	15,0°	15,0°	1.10 ⁷	1.10 ⁷	0,4
Configuração ótima (vidro/epóxi)	15,0°	15,0°	1.10 ⁷	1.10 ⁷	0,4

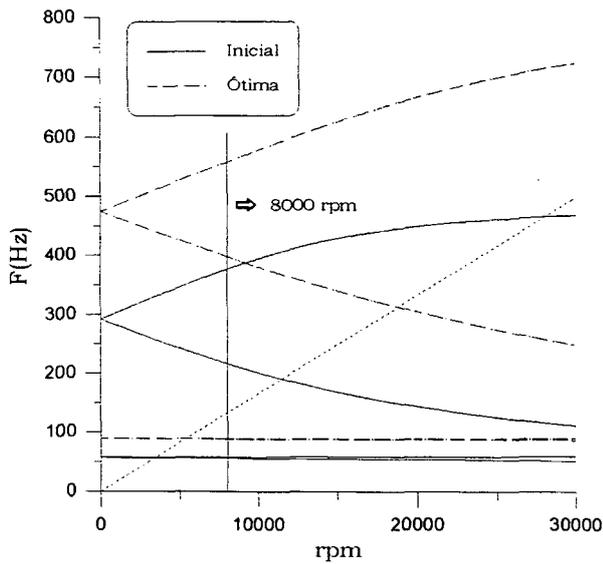


Figura 5.14 - Frequências naturais para um rotor em carbono/epóxi na configuração inicial e ótima.

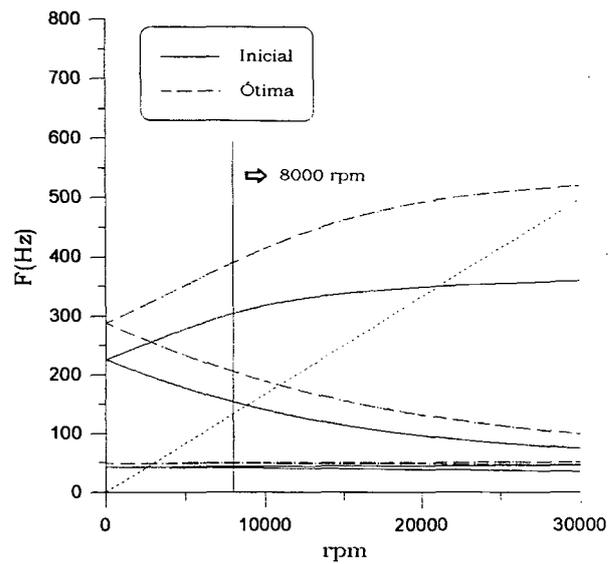


Figura 5.15 - Frequências naturais para um rotor em vidro/epóxi na configuração inicial e ótima.

Pode-se observar que a configuração que melhor distancia a primeira da segunda velocidade crítica é a que tende a tornar o sistema rotativo mais rígido, tanto na orientação das fibras, como também nas propriedades dos mancais.

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Neste trabalho, uma análise qualitativa do comportamento dinâmico de rotores em eixos bobinados foi feita utilizando o método dos elementos finitos. Os eixos são fabricados a partir do bobinamento de fibras impregnadas em resina sobre um mandril. O disco foi considerado rígido e um elemento de viga do tipo Euler-Bernoulli com módulo equivalente foi utilizado para modelar o eixo. O amortecimento interno, inerente ao material composto, é baseado no modelo proposto por Adams *et al.* (1973), e introduzido através de um módulo equivalente amortecido.

Inicialmente, foram determinadas a resposta a uma massa desbalanceada e as zonas de instabilidade para os modos em flexão de rotores apoiados sobre mancais com diferentes configurações, com o eixo em carbono/epóxi e vidro/epóxi, e com o ângulo de bobinagem θ igual a 15° , 45° e 75° . Nos modos em torção, foram determinadas as frequências naturais e os respectivos fatores de amortecimento, bem como a influência do amortecimento interno na resposta em frequência.

Os resultados preliminares mostraram que:

- o ângulo de bobinagem pode influenciar consideravelmente na localização das velocidades críticas;
- o amortecimento interno pode ter forte influência na resposta a uma massa desbalanceada, caso o rotor esteja apoiado sobre mancais anisotrópicos. A

redução dos picos de amplitude de vibrações é mais marcante para elevados ângulos de bobinagem, onde a influência da resina é maior;

- a quantidade de amortecimento externo necessário para evitar instabilidade nas velocidades críticas pode variar de acordo com o ângulo de bobinagem do eixo, isto é, de acordo com a quantidade de amortecimento interno introduzida pelo eixo bobinado;
- amortecimento interno pode também ter considerável influência na resposta em frequência relativa aos modos em torção, mas segundo o modelo usado neste trabalho, não tem influência na estabilidade do sistema;
- a introdução do amortecimento interno do material composto através de um módulo equivalente amortecido mostrou-se satisfatório para a análise qualitativa dos resultados, visto que os resultados obtidos, tanto em análise de instabilidade quanto em resposta em frequência, estão de acordo com o previsto pela teoria e com resultados obtidos por outros autores.

Em seguida, usando uma técnica de otimização para minimizar picos de amplitudes, evitar zonas de instabilidade e encontrar a posição ótima das frequências naturais, ficaram evidenciadas as vantagens e a flexibilidade oferecidas pelo uso de materiais compostos em dinâmica de rotores, graças à anisotropia de suas propriedades e a sua grande capacidade de amortecimento.

As principais limitações encontradas neste trabalho estão no modelo de viga com módulo equivalente adotado, onde o eixo bobinado deve ser de parede fina e suficientemente esbelto e a configuração das lâminas deve ser simétrica e balanceada.

Como sugestões para trabalhos futuros, podemos citar:

- implementar o modelo de viga de Timoshenko, de modo a ter uma avaliação mais precisa da influência do cisalhamento transversal no amortecimento interno e de acoplamentos entre flexão e torção;

- determinar a resposta no tempo de maneira ter uma melhor avaliação da influência do amortecimento interno dos materiais compostos no comportamento dinâmico de rotores;
- incluir como variável de projeto, nos problemas de otimização, o peso do rotor, assim como a transmissão de forças dos mancais para as fundações;
- desenvolver rotinas de otimização específicas para problemas de rotores com o eixo em material composto, de modo a tornar os problemas de otimização mais eficazes;
- adequar o modelo de módulo equivalente e o módulo equivalente amortecido, de modo a torná-los mais abrangentes;
- realizar ensaios experimentais de maneira a avaliar os modelos teóricos introduzidos e impor limitações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Adams R. D. & Bacon, D. G. C., *Effect of fibre orientation and laminate geometry on the dynamic properties of CFRP*. Journal of Composite Materials. Vol 7, October, pp 402-428, (1973).
- [2] Adams R. D. & Maheri, M. R., *Dynamic flexural properties of anisotropic fibrous composite beams*. Composite Science and Technology. Vol 50, pp 497-514, (1994).
- [3] Ahern, H., *Biotech and drug industry interest fueling the centrifuge revolution*. The Scientist, Vol 10(6), pp 18-19, March 18, (1996).
- [4] Arora, J. S., *Introduction to Optimum Design*. McGraw-Hill International Editions, 1989.
- [5] Bauchau, O. A., *Optimal design of high speed rotating graphite/epoxy shafts*. Journal of Composite Materials. Vol 17, March, pp 170-181, (1983).
- [6] Berthelot, J.-M., *Matériaux Composites - Comportement Mécanique et Analyse des Structures*. Masson, Paris, 1992.
- [7] Brush, M., *Still spinning after all these years - a profile of the ultracentrifuge*. The Scientist, Vol. 13(20), October 11, (1999).
- [8] Chandra, R., Singh, S. P. & Gupta, K., *Damping studies in fiber-reinforced composites - a review*. Composite Structures. Vol 46, pp 41-51, (1999).

- [9] Chen, L.-W. & Chen, H.-K., *Stability analysis of a cracked shaft subjected to the end load*. Journal of Sound and Vibration. Vol 188(4), pp 497-513, (1995).
- [10] Chen, L.-W. & Ku, D.-M., *Dynamic stability analysis of a rotating shaft by the finite element method*. Journal of Sound and Vibration. Vol 143(1), pp 143-151, (1990).
- [11] Chen, L.-W. & Peng, W.-K., *Dynamic stability of rotating composite shafts under periodic axial compressive loads*. Journal of Sound and Vibration. Vol 212(2), pp 215-230, (1998).
- [12] Chen, L.-W. & Peng, W.-K., *Stability analysis of a timoshenko shaft with dissimilar lateral moments of inertia*. Journal of Sound and Vibration. Vol 207(1), pp 33-46, (1997).
- [13] Darlow, M. S. & Creonte, J., *Optimal design of composite helicopter power transmission shafts with axially varying fiber layup*. Journal of the American Helicopter Society. April, pp 50-56, (1995).
- [14] Davis, M. W. & Weller, W. H., *Application of design optimization techniques to rotor dynamics problems*. Journal of the American Helicopter Society. July, pp 42-50, (1988).
- [15] *Digital Visual Fortran Version 6.0*, Digital Equipment Corporation, 1998.
- [16] Gay, D., *Matériaux Composites*. Hermès, 3^e édition, 1991.
- [17] Gupta, K. & Singh, S. P., *Damping measurements in fiber reinforced composite rotors*. Journal of Sound and Vibration. Vol 211(3), pp 513-520, (1998).
- [18] Gürdal, Z., Haftka, R. T. & Hajela, P., *Design and Optimization of Laminated Composite Materials*. John Wiley & Sons, 1999.
- [19] Jacob, A., *Automation sets filaments winding on the right path*. Reinforced Plastics. September, (1998).

- [20] Jacquet-Richardet, G., Chatelet, E. & Lornage, D., *A three dimensional modeling of the dynamic behaviour of composite rotors*. Dynamics of Rotating Machinery, Vol II, March, (2000).
- [21] Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*. McGraw-Hill Book Company, 1975.
- [22] Karbhari, V. M. & Seible, F., *Design considerations for FRP rehabilitation of concrete structures*. Proceedings of Damstruc'98 Rio, Brazil, May, (1998).
- [23] Khader, K., *Stability analysis for the dynamic design of rotors*. Journal of Sound and Vibration. Vol 207(3), pp 587-299, (1997).
- [24] Ku, D.-M., *Finite element analysis of whirl speeds for rotor-bearing systems with internal damping*. Mechanical Systems and Signal Processing. Vol 12(5), pp 599-610, (1998).
- [25] Lalanne, M. & Ferraris, G., *Rotordynamics Predictions in Engineering*. John Wiley and Sons, 2nd Edition, 1998.
- [26] Lalanne, M., Berthier, P. & Der Hagopian, J., *Mécanique des Vibrations Linéaires*. Mason, 2^a édition, 1986.
- [27] Liao, D. X., Sung, C. K. & Thompson B. S., *The optimal design of symmetric laminated beams considering damping*. Journal of Composite Materials. Vol 20, September, pp 485-501, (1986).
- [28] Lin, D. X., Ni, R. G. & Adams, R. D., *Prediction and measurement of the vibrational damping parameters of carbon and glass fibre-reinforced plastics plates*. Journal of Composite Materials. Vol 18, March, pp 132 - 152, (1984).
- [29] Melanson, J. & Zu, J. W., *Free vibration ans stability analysis of internally damped rotating shafts with general boundary conditions*. Journal of Vibrations and Acoustics. Vol 120, July, pp 776-783, (1998).

- [30] Nelson, H. D. & McVaugh, J. M., *The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements*. Journal of Engineering for Industry. May, pp 593-600 (1976).
- [31] Nelson, H. D., *A finite rotating shaft element using Timoshenko beam theory*. Journal of Mechanical Design. Vol 102, October, pp 793-803, (1980).
- [32] Oliveira, A. G., *Técnicas de Caracterização de Excitações em Máquinas Rotativas*. Tese de doutorado. Universidade Federal de Uberlândia, Junho, 1999.
- [33] Özgüven, H. N. & Özkan, Z. L., *Whirl speeds and unbalance response of multibearing rotors using finite elements*. Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design. Vol 106, January, pp 72-79, (1984).
- [34] Panda, K. C., & Dutt, J. K., *Design of optimum support parameters for minimum rotor response and maximum stability limit*. Journal of Sound and Vibration. Vol 223(1), pp 1-21, (1999).
- [35] Pereira, J. C. & Swider, P., *Um elemento finito multicamadas associado a um modelo de previsão de amortecimento*. Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais para Engenharia - XVIII CILAMCE. Brasília, Outubro 1997.
- [36] Pereira, J. C., *The effect of the fibre orientation on the dynamic behaviour of rotors in winding-shaft*. Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, COBEM99, Campinas, (1999).
- [37] Pereira, J. C. and Silveira, M. E., *Instability regions due to internal damping on rotors in winding shaft*. 21st Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE 2000, Rio de Janeiro. 2000.

- [38] Pereira, J. C. and Silveira, M. E., *The response to a mass unbalance on composite rotors*. IX International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics - IX DINAME, Florianópolis - 2001
- [39] Saravanos, D. A. & Chamis, C. C., *An integrated methodology for optimizing structural composite damping*. American Society of Mechanical Engineers, December, pp 10-15, (1989).
- [40] Saravanos, D. A. & Pereira, J. M., *Dynamic characteristics of specialty composite structures with embedded damping layers*. Journal of Vibration and Acoustics. Vol 117, January, pp 62-69, (1995).
- [41] Seible, F. & Karbhari, V. M., *Advanced composites for civil engineering applications in the U.S*. Proceedings on First International Conference on Composite Infrastructure, ICCI 96, Tucson, Arizona, Jan, pp. 21-37, (1996).
- [42] Shen, C. S., *A filament-wound structure technology overview*. Materials Chemistry and Physics. Vol 42, pp 96-100, (1995).
- [43] Singh, S. P. & Gupta, K., *Composite shaft rotordynamic analysis using a layerwise theory*. Journal of Sound and Vibration. Vol 191(5), pp 739-756, (1996).
- [44] Singh, S. P. & Gupta, K., *Free damped flexural vibration analysis of composite cylindrical tubes using beam and shell theories*. Journal of Sound and Vibration. Vol 172(2), pp 171-190, (1994).
- [45] Singh, S. P. & Gupta, K., *Rotordynamic experiments on composite shafts*. Journal of Composites Technology & Research. Vol 18 (4), pp 256-264, (1996).
- [46] Steffen, V. Jr. & Marcelin, J. L., *Dynamic optimization of rotors*. IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica – COBEM87 - Florianópolis, Dezembro, 1987.

- [47] Sung, C. K., Thompson, B. S., Gandhi, M. V. & Lee, C. Y., *A methodology for synthesizing symmetric laminated beams with optimal elastodynamic response characteristics*. Journal of Mechanical Sciences. Vol 29(12), pp 821-830, (1987).
- [48] Taylor, A. G. & Craggs, A., *The effect of damping on the stability of a finite element model of a flexible non-axisymmetric rotor on tilting pad bearings*. Journal of Sound and Vibration. Vol 185(5), pp 809-825, (1995).
- [49] Tsai, S. W. & Hahn, H. T., *Introduction to Composite Materials*. Technomic Publishing Company, 1980.
- [50] Vance, J. M., *Rotordynamics of Turbomachinery*. John Wiley and Sons, 1988.
- [51] Wettergren, H. L. & Olsson, K.-O., *Dynamic instability of a rotating asymmetric shaft with internal viscous damping, supported in anisotropic bearings*. Journal of Sound and Vibration, Vol 195(1), pp 75-84, (1996).
- [52] Wettergren, H. L., *Dynamic instability of composite rotors*. Fourth International Conference on Rotor Dynamics (Chicago, Illinois September 7-9), IFToMM, pp 287-292, 1994.
- [53] Wettergren, H. L., *Rotordynamic Analysis with Special Reference to Composite Rotor and Internal Damping*. Doctoral thesis. Linköping University, October, 1996.
- [54] Zorzi, E. S. & Nelson, H. D., *Finite element simulation of rotor-bearing systems with internal damping*. Journal of Engineering for Power. January, pp 71-76, (1977).

ANEXO

DISCO^a

Matriz de Massa Elementar:

$$m_D = \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{Dy} \end{bmatrix}$$

Matriz de Coriolis Elementar:

$$g_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

^a Incluindo o grau de liberdade em torção

EIXO

Matriz de Massa Elementar:

$$m_a = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ & & & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ & & & & 156 & 0 & 0 & -22L \\ & & & & & 156 & -22L & 0 \\ & & \text{sim.} & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Matriz de Inércia Rotacional Elementar:

$$m_s = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ & & & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ & & & & 36 & 0 & 0 & 3L \\ & & & & & 36 & -3L & 0 \\ & & \text{sim.} & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Matriz Giroscópica Elementar:

$$c = \frac{\rho I \Omega}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ & & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ & & & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ & & & & 0 & -36 & 3L & 0 \\ & & \text{anti -} & & & 0 & 0 & 3L \\ & & \text{sim.} & & & & 0 & -4L^2 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de Rigidez Elementar:

$$k_e = \frac{E_{eq}I}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ & & & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ & & & & 12 & 0 & 0 & 6L \\ & & & & & 12 & -6L & 0 \\ & sim. & & & & & (4+a)L^2 & 0 \\ & & & & & & & (4+a)L^2 \end{bmatrix}$$

onde o efeito do cisalhamento transversal é representado por a , dado como Lalanne *et al.* (1998):

$$a = \frac{12E_{eq}I}{G_{eq}S_rL^2}$$

onde S_r é a área da seção equivalente ao cisalhamento.

Matriz de Dissipação Elementar:

$$h_b = \frac{E_{eq}^{\psi}I}{(1+a^{\psi})L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & & (4+a^{\psi})L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a^{\psi})L^2 & 0 \\ & & & (4+a^{\psi})L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a^{\psi})L^2 \\ & & & & 12 & 0 & 0 & 6L \\ & & & & & 12 & -6L & 0 \\ & sim. & & & & & (4+a^{\psi})L^2 & 0 \\ & & & & & & & (4+a^{\psi})L^2 \end{bmatrix}$$

onde:

$$a^{\psi} = \frac{12E_{eq}^{\psi}I}{G_{eq}^{\psi}S_rL^2}$$

Matriz de Circulação Elementar:

$$h_c = \frac{E_{eq}^{\psi} I}{(1 + \alpha^{\psi}) L^3} \begin{bmatrix} 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ & & 0 & -(4 + \alpha^{\psi}) L^2 & -6L & 0 & 0 & -(2 - \alpha^{\psi}) L^2 \\ & & & 0 & 0 & -6L & (2 - \alpha^{\psi}) L^2 & 0 \\ & & & & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & anti - & & & & 0 & 0 & 6L \\ & sim. & & & & & 0 & -(4 + \alpha^{\psi}) L^2 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$