

DIEGO AMADEU FURTADO TORRES

**CONTRIBUIÇÕES SOBRE A
UTILIZAÇÃO DE FUNÇÕES DE
APROXIMAÇÃO CONTÍNUAS NO
MÉTODO GENERALIZADO DE
ELEMENTOS FINITOS:
AVALIAÇÃO EM MECÂNICA DA
FRATURA**

FLORIANÓPOLIS

2012

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Torres, Diego Amadeu Furtado

Contribuições sobre a utilização de funções de aproximação contínuas no método generalizado de elementos finitos [tese] : aplicação em mecânica da fratura / Diego Amadeu Furtado Torres ; orientador, Paulo de Tarso Rocha de Mendonça ; co-orientador, Clovis Sperb de Barcellos. - Florianópolis, SC, 2012.

180 p. ; 21cm

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Inclui referências

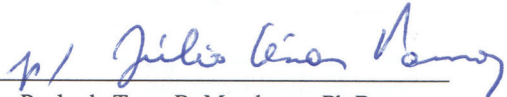
1. Engenharia Mecânica. 2. funções de aproximação contínuas. 3. método generalizado de elementos finitos. 4. mecânica da fratura. 5. estimação de erro pós-solução. I. de Mendonça, Paulo de Tarso Rocha. II. de Barcellos, Clovis Sperb. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.

Diego Amadeu Furtado Torres

**CONTRIBUIÇÕES SOBRE A UTILIZAÇÃO DE
FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO CONTÍNUAS NO
MÉTODO GENERALIZADO DE ELEMENTOS
FINITOS: AVALIAÇÃO EM MECÂNICA DA FRATURA**

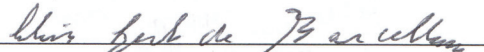
Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Mecânica, Área de concentração Análise e Projeto Mecânico, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 6 de dezembro de 2012.



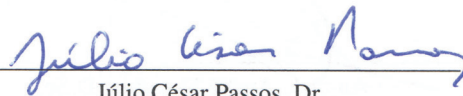
Paulo de Tarso R. Mendonça, Ph.D.

Orientador



Clóvis Sperb de Barcellos, Ph.D.

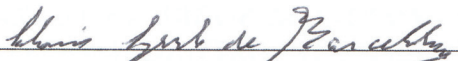
Coorientador



Júlio César Passos, Dr.

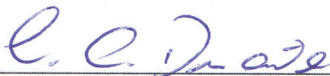
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Banca Examinadora:



Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D.

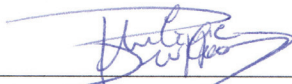
Presidente



Carlos Armando Duarte, Ph.D.

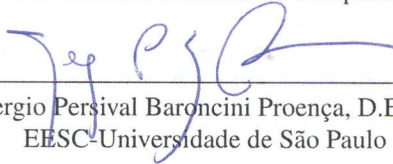
Relator

University of Illinois at Urbana-Champaign




Philippe Remy Bernard Devloo, Ph.D.

Universidade Estadual de Campinas



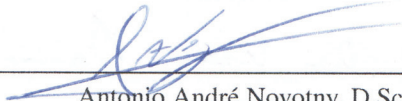
Sergio Persival Baroncini Proença, D.Eng.

EESC-Universidade de São Paulo



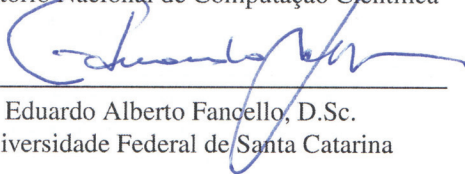
Felício Bruzzi Barros, D.Eng.

Universidade Federal de Minas Gerais



Antonio André Novotny, D.Sc.

Laboratório Nacional de Computação Científica



Eduardo Alberto Fancello, D.Sc.

Universidade Federal de Santa Catarina

*A todos que acreditam
que é possível fazer mais.*

Em nossa sociedade, infelizmente, as pessoas se sentem mais a vontade para dizer que alguém é “cara de pau” ao invés de competente. Todavia...

“Muito melhor é lançar-se em busca de conquistas grandiosas, mesmo expondo-se ao fracasso, do que alinhar-se com pobres de espírito, que nem se alegram muito nem sofrem muito, porque vivem numa penumbra cinzenta, onde não conhecem nem vitória, nem derrota.”

Theodore Roosevelt

AGRADECIMENTOS

À minha família, pelo carinho e apoio constantes, cuja torcida me impulsionou a seguir adiante.

Aos meus orientadores, Paulo de Tarso e Clovis de Barcellos, pelo compromisso e dedicação dispensados, especialmente ao Barcellos, grande amigo e mentor, que sempre foi fonte de inspiração e cuja motivação foi indispensável para a conclusão deste trabalho.

Aos membros da comissão julgadora, cujas críticas e sugestões permitiram elucidar importantes aspectos na avaliação dos resultados, especialmente ao Prof. Felício Barros, pelo auxílio durante a implementação dos estimadores de erro e pela constante troca de experiências.

Aos companheiros do GRANTE, pela amizade e por compartilharem bons momentos, em especial ao “pessoal da repartição”.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro concedido por meio da bolsa de estudos.

Resumo da Tese apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica.

**CONTRIBUIÇÕES SOBRE A UTILIZAÇÃO DE
FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO CONTÍNUAS NO
MÉTODO GENERALIZADO DE ELEMENTOS
FINITOS: AVALIAÇÃO EM MECÂNICA DA FRATURA**

Diego Amadeu Furtado Torres

dezembro / 2012

Orientador: Paulo de Tarso R. Mendonça, Ph.D.

Coorientador: Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D.

Área de Concentração: Análise e Projeto Mecânico.

Palavras-chave: funções de aproximação contínuas, método generalizado de elementos finitos, enriquecimento, estimação de erro pós-solução, campo resíduo em forma forte, mecânica configuracional, mecânica da fratura elástica linear.

Procedimentos de discretização que promovem o enriquecimento de subespaços de aproximação, para a solução de problemas de valor no contorno variacionais, permitem representar características como o contorno do domínio, descontinuidades dos campos incógnitos, singularidades, entre outras, independentemente das entidades da discretização, quer sejam elementos ou nós, em métodos baseados em malhas ou livres de malha. No entanto, funções seccionalmente contínuas, presentes em implementações convencionais, ainda representam um fator limitante na busca por melhores taxas de convergência, mesmo empregando enriquecimento. Questões sobre o padrão de enriquecimento e a transição entre porções do domínio enriquecidas e não enriquecidas foram apontadas como merecedoras de atenção em diversas investigações ao longo dos últimos anos. Neste sentido, o presente trabalho avalia a utilização de funções de aproximação arbitrariamente contínuas, construídas através do método generalizado de elementos finitos, em problemas de elasticidade plana envolvendo singularidade do campo de tensões, característicos da mecânica da fratura elástica linear. Primeiramente, o desempenho de tais funções suaves, tanto utilizando medidas de convergência globais quanto calculando parâmetros de severidade de trincas, é investigado mediante comparação com as respostas fornecidas por discretizações com funções minimamente conformes, ou seja, bases

construídas com partições da unidade convencionais de elementos finitos. O método das forças configuracionais, elaborado segundo o formalismo da mecânica Eshelbiana, foi usado para o propósito de cálculo da severidade da trinca. Num estágio de pós-processamento da solução, as forças configuracionais que surgem na frente da trinca podem ser diretamente relacionadas a uma estimativa da integral \mathcal{J} . Os resultados evidenciam a importância da continuidade da partição da unidade, na vizinhança de singularidades, à medida que a suavidade evita os saltos dos campos de tensões e permite melhor capturar as características das funções de enriquecimento. A continuidade permite a melhoria da solução tanto em medidas globais quanto em medidas locais mesmo aplicando o enriquecimento à menor quantidade possível de nós. Então, uma adaptação do método residual implícito em subdomínios é proposta. Considerando as próprias nuvens da abordagem em MGEF obtém-se medidas nodais de erro. A metodologia gera problemas, equacionados nas nuvens, com condições de contorno de Neumann triviais em virtude da localização do funcional residual com a partição da unidade. A continuidade dos campos de tensões favorece a determinação da excitação para tais problemas locais diretamente a partir da projeção do campo resíduo, em forma forte, sobre o subespaço gerado por funções de grau superior. O procedimento se mostra bastante adequado para soluções contínuas e, nos casos testados, apresenta efetividade local apropriada mesmo quando se utiliza apenas enriquecimento polinomial, indicando que o estimador é capaz de detectar os pontos onde se necessita de refinamento. Diversos melhoramentos são apontados como propostas de continuidade do trabalho devido à constatação de que as diversas ferramentas matemáticas consideradas, em separado ou conjuntamente, podem ser aplicáveis em outras situações.

Abstract of Thesis presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Mechanical Engineering.

**CONTRIBUTIONS ON THE USE OF CONTINUOUS
APPROXIMATION FUNCTIONS IN THE
GENERALIZED FINITE ELEMENT METHOD:
EVALUATION IN FRACTURE MECHANICS**

Diego Amadeu Furtado Torres

Dec / 2012

Advisor: Paulo de Tarso R. Mendonça, Ph.D.

Co-Advisor: Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D.

Area of Concentration: Mechanical Analysis and Design.

Keywords: continuous approximation functions, generalized finite element method, enrichment, a-posteriori error estimation, strong-form residuum field, configurational mechanics, linear elastic fracture mechanics.

Number of pages: 180

Discretization procedures which promote the enrichment of approximation subspaces, for the solution of variational boundary value problems, allow to represent some features as the domain boundary, discontinuities of the unknowns fields, singularities, among other, regardless of discretization entities, either the elements or nodes, in mesh-based or mesh-free methods. However, piecewise continuous functions, commonly used in conventional implementations, still are a hindrance factor in the searching for better convergence rates, even applying enrichments. Issues on enrichment pattern and transition between enriched and non-enriched portions of the domain were pointed as deserving attention by several investigations in the last years. In this sense, the present study assesses the use of arbitrarily continuous functions, built through the generalized finite element method, in plane elasticity problems with singularities in the stress field, typical of linear elastic fracture mechanics. Firstly, the performance of such smooth functions, in terms of both convergence of global values as well as crack severity parameters, is investigated through comparison with responses provided by discretizations using minimally conforming functions, i.e., bases built with conventional partitions of unity defined by finite element shape functions. The configurational forces method, derived following the formalism of Eshelbian mechanics, was used for computation of severity crack parameters. In a post-processing step, the

configurational forces that arise at the crack tip are directly related to a \mathcal{J} -integral estimate. The results point out the importance of continuity around the singularity since it avoids stress jumps and allows better capturing of the features of enrichment functions. The continuity enables improvements of solution in both global measures and local quantities, even applying singular enrichment to the possible minimum amount of nodes. Thus, an adaptation of the subdomain-based implicit residual method for error estimation is proposed. Considering the clouds as subdomains, it is possible to obtain nodal values of estimated error. The methodology produces local problems, formulated over the clouds, with homogeneous Neumann boundary conditions due to the localization of the residual functional using the partition of unity. The inherent continuity of the stress field motivates determining the excitation for such local problems directly from a projection of the residuum field, in strong form, on the subspace spanned by higher order functions. The procedure turns out to be quite appropriate for smooth solutions and, in the studied cases, it showed appropriate local effectivity even when only polynomial enrichment is used, indicating that the estimator is capable of detecting where refinement is necessary. Several improvements are pointed as proposals of future work due to finding that the mathematical tools used, considered separately or grouped, can be applied in other situations.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO E MOTIVAÇÃO	27
1.1	Contribuições	29
1.2	Organização da tese	29
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	31
2.1	Metodologias para representação de trincas via enriquecimento	32
3	FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO CONTÍNUAS VIA MGEF	43
3.1	Motivação matemática do enriquecimento	43
3.2	Partição da unidade (PU)	44
3.3	Método generalizado de elementos finitos - conceituação . .	45
3.4	PU com continuidade arbitrária baseada em malha	48
3.4.1	Partição da unidade de Shepard	48
3.4.2	Funções nodais de ponderação	49
3.4.3	Funções de aresta	50
3.4.4	Modificação da função de aresta para um par de arestas côncavas	55
3.5	Enriquecimento e funções de aproximação	55
4	PROBLEMA MODELO	61
4.1	Definições	61
4.2	Problema modelo em elasticidade linear	62
4.2.1	Formulação forte	63
4.2.2	Formulação fraca	65
4.3	Formulação discretizada	68
4.4	Avaliações numéricas	69
4.4.1	Discretização e padrão de enriquecimento	70
4.4.2	Integração	74
4.4.3	Discussão dos resultados	74
5	MECÂNICA CONFIGURACIONAL	99
5.1	Definição do tensor de Eshelby	100
5.2	Formulação fraca na mecânica configuracional e método das forças configuracionais	104
5.3	Comparação com outros meios de cálculo da integral \mathcal{J} . . .	106
5.4	Avaliações numéricas	110

6	ESTIMAÇÃO DE ERRO	117
6.1	Definição do erro de discretização	117
6.2	Estimativa do erro global da aproximação: medida via norma em energia	118
6.3	Decomposição da equação variacional do erro	123
6.4	Projeção do resíduo na forma forte	127
6.4.1	Estimadores globais e indicadores nodais de erro ..	128
6.5	Avaliações numéricas	130
6.5.1	Domínio na forma de L	130
6.5.2	Painel fraturado	147
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	155
7.1	Investigações em andamento	159
7.2	Sugestões para trabalhos futuros	160
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	162

LISTA DE SÍMBOLOS

C^∞	continuidade infinita
f	função definida sobre um conjunto de um <i>manifold</i>
\mathcal{M}	<i>manifold</i>
ω	conjunto definido sobre um <i>manifold</i>
supp	suporte de uma função
\mathbf{x}	ponto em um <i>manifold</i>
δ	vizinhança de um ponto em um <i>manifold</i>
$\rho(\mathbf{x})$	função <i>bump</i>
$\tilde{f}(\mathbf{x})$	função extensão
$\Omega \subset \mathbb{R}^2$	domínio poliédrico limitado e aberto
$\{\mathcal{K}_e\}_{e=1}^{NE}$	triangulação composta por NE elementos finitos \mathcal{K}_e
$\{\mathbf{x}_\alpha\}_{\alpha=1}^N$	conjunto das coordenadas N dos nós \mathbf{x}_α
ω_α	nuvem associada ao nó \mathbf{x}_α
\mathfrak{S}_N	cobertura do domínio Ω
$\overline{\Omega}$	fechamento do domínio Ω
$\overline{\omega}_\alpha$	fechamento da nuvem ω_α
\mathfrak{S}_N	coleção de funções partições da unidade
φ_α	função partição da unidade associada ao nó \mathbf{x}_α
$C_0^k(\omega_\alpha)$	continuidade de ordem k e com suporte compacto
\mathcal{V}^{MPU}	espaço de aproximação do MPU
η	função de enriquecimento do MPU
Λ	conjunto dos nós enriquecidos do MPU
k	continuidade das funções de aproximação
\mathcal{W}_α	função peso associada ao nó \mathbf{x}_α
$\varepsilon_{\alpha,j}$	função da aresta j da nuvem associada ao nó \mathbf{x}_α
M_α	número de arestas da nuvem ω_α
ξ_j	coordenada normal à aresta j
c_α	parâmetro de escalamento da função de aresta
$\xi_j(\mathbf{x})$	distância do ponto \mathbf{x} até a aresta j da nuvem ω_α
$\mathbf{n}_{\alpha,j}$	vetor unitário normal à aresta j associado à nuvem ω_α
$\mathbf{b}_{\alpha,j}$	ponto de referência da aresta j da nuvem ω_α
$\widehat{\varepsilon}_{\alpha,j}(\xi_j(\mathbf{x}))$	função da aresta j da nuvem associada ao nó \mathbf{x}_α
γ	constante positiva da função de aresta
$h_{\alpha,j}$	distância da aresta j até o nó \mathbf{x}_α
β	taxa de decaimento da função de aresta
A	parâmetro de normalização da função de aresta
B	parâmetro de escalamento da função de aresta

∇_0^k	função <i>máximo</i> entre os argumentos k vezes diferenciável
\mathcal{X}_α	subespaço de aproximação local associado à nuvem ω_α
$\mathcal{L}_{\alpha i}$	conjunto das i funções de enriquecimento associadas à nuvem ω_α
$\mathcal{L}_{\alpha l}^s$	funções de enriquecimento com derivadas singulares
$\mathcal{L}_{\alpha i}^p$	funções de enriquecimento polinomiais
\bar{x}	função de enriquecimento linear transladada e escalada
\mathcal{F}_N	família de funções
\mathcal{J}^p	conjunto de índices relativos às funções de enriquecimento polinomiais
\mathcal{J}^s	conjunto de índices relativos às funções de enriquecimento com derivadas singulares
u_α	coeficiente associado à partição da unidade da nuvem ω_α
$b_{\alpha i}$	coeficiente associado à função de enriquecimento polinomial i da nuvem ω_α
$b_{\alpha l}$	coeficiente associado à função de enriquecimento de frente de trinca l da nuvem ω_α
q_α^p	número de funções de enriquecimento polinomiais da nuvem ω_α
q_α^s	número de funções de enriquecimento de frente de trinca da nuvem ω_α
\mathcal{V}^{MGEF}	subespaço de aproximação do MGEF
\mathcal{P}_α^b	subespaço dos polinômios de grau $\leq b$ da nuvem ω_α
b	grau polinomial da base de aproximação
Ξ_α	subespaço das funções de enriquecimento
\mathcal{L}^p	espaço de Banach de ordem p
\mathcal{S}_p^m	espaço de Sobolev das funções com derivadas fracas até ordem m pertencentes ao espaço \mathcal{L}^p
\mathcal{H}^m	espaço de Hilbert das funções com derivadas fracas até ordem m pertencentes ao espaço \mathcal{L}^2
Γ	contorno seccionalmente regular, poliédrico e lipschitz contínuo
\mathbf{u}	vetor deslocamento
\mathbf{b}	força de corpo
\mathbf{L}	operador diferencial
$\boldsymbol{\sigma}$	vetor das componentes de tensão
$\boldsymbol{\varepsilon}$	vetor de componentes de deformação
\mathbb{C}	matriz constitutiva elástica
C_{ij}	componentes da matriz constitutiva elástica
E	módulo de elasticidade
ν	coeficiente de Poisson

$\bar{\mathbf{u}}$	deslocamento prescrito no contorno
Γ_D	contorno de Dirichlet
$\bar{\mathbf{t}}$	força por unidade de área prescrita no contorno
Γ_N	contorno de Neumann
\mathcal{U}	conjunto das funções cinematicamente admissíveis
\mathcal{V}	espaço das variações admissíveis
$\mathcal{B}(\bullet, \bullet)$	operador variacional bilinear
$\ \bullet\ _E$	norma em energia
U	energia de deformação
pr	operador prolongamento
tr	operador traço
$\mathcal{L}(\bullet)$	funcional linear
\mathcal{V}^*	espaço dual
\mathbf{v}	função variação
l_z	espessura
\mathbf{u}_p	aproximação de Galerkin de \mathbf{u}
u_{x_α}	coeficiente associado à componente de deslocamento na direção x associado à partição da unidade do nó \mathbf{x}_α
u_{y_α}	coeficiente associado à componente de deslocamento na direção y associado à partição da unidade do nó \mathbf{x}_α
$b_{\alpha i}$	coeficientes generalizados da componente de deslocamento na direção x
$d_{\alpha i}$	coeficientes generalizados da componente de deslocamento na direção y
q_α	número total de funções de enriquecimento do nó \mathbf{x}_α
$\hat{\Phi}_\alpha$	arranjo de funções partição da unidade do nó \mathbf{x}_α
$\hat{\mathcal{L}}_{\alpha i}$	arranjo da função de enriquecimento i do nó \mathbf{x}_α
\mathcal{U}_h	subespaço dos deslocamentos admissíveis
\mathcal{V}_h	subespaço das variações admissíveis
\mathfrak{W}	densidade de energia de deformação por unidade de volume
\mathfrak{V}	potencial de forças externas aplicadas
\mathfrak{H}	função lagrangeana
\mathcal{L}	função lagrangeana
\mathfrak{U}	energia potencial total
\mathcal{A}	integral de ação associada à função lagrangeana
δ	variação
\mathfrak{E}_k	equações de Euler-Lagrange
\mathcal{A}^*	integral de ação transformada
\mathbf{x}^*	transformação das variáveis independentes
ζ	parâmetro de translação de variáveis

$\zeta(\mathbf{x}, \mathbf{u})$	simetrias variacionais
\mathbf{P}	corrente
Σ_{ij}	componentes do tensor tensão de Eshelby
ρ_i	força sobre heterogeneidade
$\boldsymbol{\rho}$	vetor de componentes de força sobre heterogeneidade
$\boldsymbol{\Sigma}$	tensor tensão de Eshelby
\mathbb{L}	operador diferencial
\mathbb{N}	arranjo de componentes do vetor normal ao contorno
\mathbf{G}_α^e	vetor de componentes da força configuracional do nó \mathbf{x}_α devido ao elemento e
N_{ad}	número de elementos adjacentes ao nó \mathbf{x}_α
\mathbf{G}_α	vetor de componentes da força configuracional do nó \mathbf{x}_α
K	fator de intensidade de tensão
\mathcal{R}	taxa de variação da energia de deformação
\mathcal{J}	integral J
Q	componente do campo de velocidade do avanço virtual da trinca
\mathbf{e}_p	erro de uma aproximação de Galerkin
$\mathcal{R}(\bullet)$	funcional residual variacional
$\mathbf{e}_p^{\omega_\alpha}$	função erro definida na nuvem ω_α
$\oplus_{\alpha=1}^N$	soma hilbertiana
\mathcal{V}_{brok}	espaço quebrado
ζ_α	função ponderação da forma bilinear associada ao erro na nuvem ω_α
$\mathcal{B}_{\omega_\alpha}^{\zeta_\alpha}(\bullet, \bullet)$	operador variacional bilinear restrito à nuvem ω_α
$\mathcal{X}_{p+q}^0(\omega_\alpha)$	subespaço das funções de grau superior para estimação do erro
Π_p	operador projeção de grau p
$\tilde{\mathbf{e}}_p^{\omega_\alpha}$	aproximação do erro associado a uma aproximação de grau p na nuvem ω_α
$\mathcal{R}_\Omega^{\omega_\alpha}$	projeção do resíduo na forma forte sobre o subespaço de aproximação do erro na nuvem ω_α
$\mathbf{R}(\mathbf{u}_p)$	campo de resíduo na forma forte
$\mathcal{R}_{\Gamma_N}^{\omega_\alpha}$	projeção do resíduo no contorno de Neumann na forma forte sobre o traço das funções do subespaço de aproximação do erro
$\mathbf{r}(\mathbf{u}_p)$	resíduo no contorno de Neumann na forma forte
\mathcal{E}	estimador global da norma em energia do erro
M	índice de sobreposição
$\mathcal{J}_{\omega_\alpha}$	indicador da norma em energia do erro na nuvem
$\mathcal{E}^{\zeta_\alpha}$	estimador global da norma em energia do erro considerando a ponderação da forma bilinear

$\mathcal{J}_{\omega_\alpha}^r$

indicador da norma em energia do erro na nuvem considerando a ponderação da forma bilinear

θ_α

índice de efetividade local

θ

efetividade global

LISTA DE FIGURAS

3.1	Conjunto das funções de aresta para uma nuvem convexa. A nuvem do nó vermelho é formada por seis elementos, sendo assim o contorno da nuvem composto por seis arestas. Funções exponenciais (3.12).	54
3.2	Funções associadas ao nó da nuvem da Figura 3.1: (a) função ponderação e (b) função PU.	56
4.1	Discretizações usadas para verificação de desempenho, considerando o padrão geométrico para o enriquecimento com funções de frente de trinca. O círculo azul será referido como R1 enquanto o vermelho será referido como R2. As funções de frente também foram aplicadas aos nós marcados em verde para se fazer a trinca atingir o contorno do domínio.	73
4.2	Erro relativo no cálculo da energia de deformação considerando PU convencional (função tenda). Efeito do enriquecimento polinomial uniforme. Base de aproximação de grau 1 até 6.	79
4.3	Erro relativo no cálculo da energia de deformação considerando PU contínua. Efeito do enriquecimento polinomial uniforme. Base de aproximação de grau 1 até 6.	80
4.4	Erro relativo no cálculo da norma $\ \mathbf{u}\ _{\mathcal{H}^1(\Omega)}$ (4.26) considerando PU convencional (função tenda). Efeito do enriquecimento polinomial uniforme. Base de aproximação de grau 1 até 6.	81
4.5	Erro relativo no cálculo da norma $\ \mathbf{u}\ _{\mathcal{H}^1(\Omega)}$ (4.26) considerando PU contínua. Efeito do enriquecimento polinomial uniforme e influência do raio da região enriquecida com funções singulares.	82
4.6	Erro relativo no cálculo da energia de deformação devido à quadratura de integração.	83
4.7	Evolução do número de condicionamento da matriz de rigidez global, considerando PU convencional $C^0(\Omega)$, antes do procedimento de Babuska (DUARTE; BABUŠKA; ODEN, 2000).	84
4.8	Evolução do número de condicionamento da matriz de rigidez global, considerando PU $C^\infty(\Omega)$, antes do procedimento de Babuska (DUARTE; BABUŠKA; ODEN, 2000).	85

4.9	Distribuição dos autovalores da matriz de rigidez global, calculados antes do procedimento de Babuska (DUARTE; BABUŠKA; ODEN, 2000) para diferentes graus b . Malha M2. Aproximações $C^0(\Omega)$ e $C^\infty(\Omega)$. Padrão geométrico de enriquecimento com funções de ponta de trinca, com R1 (Figura 4.1).	86
4.10	Distribuição dos autovalores da matriz de rigidez global, calculados antes do procedimento de Babuska (DUARTE; BABUŠKA; ODEN, 2000) para diferentes graus b . Malha M2. Aproximações $C^0(\Omega)$ e $C^\infty(\Omega)$. Padrão geométrico de enriquecimento com funções de ponta de trinca, com R2 (Figura 4.1).	87
4.11	Padrão topológico de enriquecimento, segundo Béchet et al. (2005).	88
4.12	Erro relativo no cálculo da energia de deformação. Enriquecimento com funções de frente de trinca segundo padrão topológico. Enriquecimento polinomial localizado nos mesmos nós que receberam enriquecimento singular.	93
4.13	Erro relativo no cálculo da norma $\ \mathbf{u}\ _{\mathcal{H}^1(\Omega)}$. Enriquecimento com funções de frente de trinca segundo padrão topológico. Enriquecimento polinomial localizado nos mesmos nós que receberam enriquecimento singular.	94
4.14	Evolução do número de condicionamento da matriz de rigidez global, antes do procedimento de Babuska (DUARTE; BABUŠKA; ODEN, 2000). Enriquecimento com funções de frente de trinca segundo padrão topológico. Enriquecimento polinomial localizado nos mesmos nós que receberam enriquecimento singular.	95
4.15	Distribuição dos autovalores da matriz de rigidez global, calculados antes do procedimento de Babuska (DUARTE; BABUŠKA; ODEN, 2000) para diferentes graus b . Malha M2. Aproximações $C^0(\Omega)$ e $C^\infty(\Omega)$. Padrão topológico de enriquecimento com funções de ponta de trinca (Figura 4.11).	96
4.16	Componente e_y do campo de erro exato. Funções de aproximação com regularidade $C^0(\Omega)$. Malha M3 e enriquecimento singular segundo o padrão geométrico com R2 (Figura 4.1) e usando $p \leq 4$. a) grau $b = 1$, b) grau $b = 2$, c) grau $b = 3$ e d) grau $b = p = 4$	97

4.17	Componente e_y do campo de erro exato. Funções de aproximação com regularidade $C^\infty(\Omega)$. Malha M3 e enriquecimento singular segundo o padrão geométrico com R2 (Figura 4.1) e usando $p \leq 4$. a) grau $b = 1$, b) grau $b = 2$, c) grau $b = 3$ e d) grau $b = p = 4$	98
5.1	Erro relativo no cálculo da integral \mathcal{J} mediante força configuracional. Aproximação considerando PU $C^0(\Omega)$ convencional. Efeito do enriquecimento polinomial uniforme. Enriquecimento com funções de frente de trinca segundo padrões geométricos R1 e R2.	113
5.2	Erro relativo no cálculo da integral \mathcal{J} mediante força configuracional. Aproximação considerando PU contínua. Efeito do enriquecimento polinomial uniforme. Enriquecimento com funções de frente de trinca segundo padrões geométricos R1 e R2.	114
5.3	Erro relativo no cálculo da integral \mathcal{J} mediante força configuracional. Enriquecimento com funções de frente de trinca segundo padrão topológico. Enriquecimento polinomial nos mesmos nós que receberam enriquecimento singular.	115
6.1	Domínio na forma de L.	132
6.2	Malhas usadas para verificação de desempenho dos estimadores. Aproximações envolvendo somente enriquecimento polinomial. Da esquerda para a direita: M1, M2, M3 e M4.	133
6.3	Efetividade global do estimador \mathcal{E} (6.28) perante enriquecimento polinomial uniforme. Cada curva representa o comportamento perante o refino de malha. Funcional residual calculado como em (6.21).	136
6.4	Efetividade global do estimador $\mathcal{E}^{\zeta_\alpha}$ (6.31) perante enriquecimento polinomial uniforme. Cada curva representa o comportamento perante o refino de malha. Funcional residual calculado como em (6.21).	137
6.5	Indicadores nodais de erro e efetividades locais correspondentes. Aproximação grau $b = 1$ e usando $q = 2$, para a malha M3. a) indicadores $\mathcal{J}_{\omega_\alpha}$ (6.30), b) efetividades para \mathcal{J} , c) indicadores $\mathcal{J}_{\omega_\alpha}^{\zeta_\alpha}$ (6.32) e d) efetividades para $\mathcal{J}^{\zeta_\alpha}$	138
6.6	Efetividade global do estimador \mathcal{E} (6.28) perante enriquecimento polinomial uniforme, para quatro diferentes malhas. Parcela do resíduo no contorno de Neumann Γ_N calculado como em (6.16).	139

6.7	Efetividade global do estimador $\mathcal{E}^{\zeta\alpha}$ (6.31) perante enriquecimento polinomial uniforme, para quatro diferentes malhas. Parcela do resíduo no contorno de Neumann Γ_N calculado como em (6.16).	140
6.8	Indicadores nodais de erro e efetividades locais correspondentes. Aproximação grau $b = 1$ e usando $q = 2$, para a malha M3. a) indicadores $\mathcal{J}_{\omega\alpha}$ (6.30), b) efetividades para \mathcal{J} , c) indicadores $\mathcal{J}_{\omega\alpha}^{\zeta\alpha}$ (6.32) e d) efetividades para $\mathcal{J}^{\zeta\alpha}$	141
6.9	Comparação entre a efetividade dos estimadores \mathcal{E} (6.28) e $\mathcal{E}^{\zeta\alpha}$ (6.31), designados na legenda por E1 e E2, respectivamente, para $q = 1$. Funcional residual calculado como em (6.21).	142
6.10	Comparação entre a efetividade dos estimadores \mathcal{E} (6.28) e $\mathcal{E}^{\zeta\alpha}$ (6.31), designados na legenda por E1 e E2, respectivamente, para $q = 2$. Funcional residual calculado como em (6.21).	143
6.11	Comparação entre a efetividade dos estimadores \mathcal{E} (6.28) e $\mathcal{E}^{\zeta\alpha}$ (6.31), designados na legenda por E1 e E2, respectivamente, para $q = 1$. Parcela do resíduo no contorno de Neumann Γ_N calculado como em (6.16).	144
6.12	Comparação entre a efetividade dos estimadores \mathcal{E} (6.28) e $\mathcal{E}^{\zeta\alpha}$ (6.31), designados na legenda por E1 e E2, respectivamente, para $q = 2$. Parcela do resíduo no contorno de Neumann Γ_N calculado como em (6.16).	145
6.13	Componentes do campo resíduo na forma forte, para uma aproximação grau $b = 1$ considerando a malha M3. a) componente R_x e b) componente R_y	146
6.14	Comparação entre a efetividade dos estimadores \mathcal{E} (6.28) e $\mathcal{E}^{\zeta\alpha}$ (6.31), designados na legenda por E1 e E2, respectivamente, para $q = 1$. Funcional residual calculado como em (6.21).	149
6.15	Comparação entre a norma em energia do erro estimado pelo estimador \mathcal{E} (6.28) e a norma em energia do erro exato, para $q = 1$. Funcional residual calculado como em (6.21).	150
6.16	Comparação entre a norma em energia do erro estimado pelo estimador $\mathcal{E}^{\zeta\alpha}$ (6.31) e a norma em energia do erro exato, para $q = 1$. Funcional residual calculado como em (6.21).	151

6.17	Componente e_x do campo de erro exato. Malha M2 e enriquecimento com funções de ponta de trinca segundo o padrão topológico com $p \leq 4$. a) grau $b = 1$, b) grau $b = 2$, c) grau $b = 3$ e d) grau $b = p = 4$	152
6.18	Componente e_x do campo de erro exato. Malha M3 e enriquecimento com funções de ponta de trinca segundo o padrão topológico com $p \leq 4$. a) grau $b = 1$, b) grau $b = 2$, c) grau $b = 3$ e d) grau $b = p = 4$	153
6.19	Distribuição dos indicadores nodais de erro para quatro diferentes malhas, considerando aproximação grau $b = 1$ e estimativa de erro com $q = 1$. a) malha M1, b) malha M2, c) malha M3 e d) malha M4.	154
7.1	Derivadas da função PU do nó da figura 3.1: (a) derivada com relação a x e (b) derivada com relação a y	158

1 INTRODUÇÃO E MOTIVAÇÃO

Em mecânica dos sólidos computacional, é notório que o método de elementos finitos (MEF) em sua versão generalizada ou estendida ampliou significativamente o espectro de possibilidades de investigação. Revisões de estado-da-arte como Karihaloo e Xiao (2003), Abdelaziz e Hamouine (2008), Belytschko, Gracie e Ventura (2009) e Fries e Belytschko (2010) confirmam a constatação.

Compartilhando da mesma fundamentação matemática, o Método Generalizado de Elementos Finitos (do inglês *Generalized Finite Element Method*, GFEM), o Método Estendido de Elementos Finitos (do inglês *eXtended Finite Element Method*, XFEM) e o Método de Elementos Finitos de Partição da Unidade (do inglês *Partition of Unity Finite Element Method*, PUFEM) propõem que melhores aproximações podem ser obtidas inserindo-se funções especiais na base convencional do MEF.

Estes métodos foram pensados e concebidos com o anseio de superar dificuldade relacionadas à adaptação de malhas. Adaptação no sentido de alteração de parâmetros h e p , por exemplo, coordenadas por medidas localizadas de erro e buscando atingir tolerâncias especificadas. E ainda, adaptatividade no sentido ótimo, de se conseguir o menor erro possível para um dado montante de variáveis incógnitas. Quando da modelagem de aproximações envolvendo características localizadas como singularidades, camadas limites, interfaces materiais, detalhes geométricos do contorno, por exemplo, tais dificuldades se tornam mais evidentes.

O presente trabalho se insere no contexto da investigação da influência exercida por um parâmetro relacionado às discretizações, mais especificamente, quando se utiliza enriquecimentos à maneira do GFEM, XFEM ou PUFEM. Diferentemente do parâmetro h (dimensão característica) e p (grau polinomial), o parâmetro k surge como possibilidade refinamento da aproximação.

O termo *versão k* , pelo conhecimento do presente autor, aparece na literatura com o trabalho de Surana, Ahmadi e Reddy (2002). Reddy e colaboradores argumentam que, assim como h e p , a regularidade k também governa a capacidade de aproximação de tal modo que, fixando os dois primeiros, pode-se observar alterações de desempenho. Todavia, deve-se reconhecer que a construção de funções regulares baseadas em malhas foi, primeiramente, proposta por Edwards (1996), procedimento que foi generalizado, para malhas arbitrárias, por Duarte, Kim e Quaresma (2006). Mais recentemente, Cottrell, Hughes e Reali (2007) também apontaram a necessi-

dade de se investigar o efeito da regularidade, porém no âmbito da Análise Isogeométrica.

Deste modo, a partir da constatação de que a forma de aplicação do enriquecimento interfere sobremaneira na taxa de convergência, com relatado por Béchet et al. (2005) e Laborde et al. (2005) em problemas de mecânica da fratura, optou-se por analisar o efeito da regularidade no desempenho de aproximações envolvendo enriquecimentos para campos de tensão na vizinhança de uma trinca.

As partições da unidade construídas segundo Duarte, Kim e Quaresma (2006) permitem recuperar a elevada regularidade comum de aproximações por métodos livres de malha, como por exemplo Monaghan (1982), Liszka, Duarte e Tworzydło (1996) e Liu, Jun e Zhang (1995), mas mantendo a malha de elementos para definição dos suportes das funções. Tem-se com isso, um importante fato: a possibilidade de se elevar a regularidade sem alargamento de suporte e, conseqüentemente, superposição (*overlapping*).

Neste trabalho, faz-se oportuno a ressalva de que a mecânica da fratura elástica linear figura somente como problema modelo, no qual a singularidade e a descontinuidade representam dificuldades quando da aproximação da solução. Ressalta-se também que, como investigação inicial, o desempenho computacional não é contemplado. O esforço foi direcionado à verificação de possíveis vantagens, sob a ótica da acuracidade e da convergência, em se aplicar enriquecimento sobre partição da unidade suave. Procedeu-se uma comparação com aproximações geradas por partições convencionais, seccionadamente contínuas, considerando iguais discretizações, padrões de enriquecimento e quadraturas de integração.

Dedicou-se também esforço à estimação de erro para aproximações suaves considerando os enriquecimentos utilizados na comparação de desempenho. Uma vez observada influência da regularidade, justifica-se a adaptação de métodos de estimativa de erro pós-solução às aproximações suaves.

Todavia, mais do que somente os resultados aqui apresentados e discutidos, estabelece-se um horizonte de possibilidades para aplicação das ferramentas matemáticas aqui tratadas. Diversos melhoramentos são propostos. Investigações, não relatadas aqui, estão em andamento. E ainda, sugestões para trabalhos futuros são, finalmente, elencadas.

1.1 Contribuições

Pode-se apontar como principais contribuições deste trabalho:

- estudo do efeito da regularidade na qualidade global de aproximações enriquecidas a partir de partições da unidade suaves;
- análise da qualidade de aproximação de campos de tensões singulares mediante mecânica configuracional; e
- adaptação de uma metodologia de estimativa de erro pós-solução às aproximações suaves, com avaliação perante aproximações enriquecidas com funções polinomiais e com funções com derivadas singulares.

1.2 Organização da tese

O Método Generalizado de Elementos Finitos é apresentado no Capítulo 3. Inicialmente, é definida a operação de extensão de uma função, cuja ferramenta, a partição da unidade, é utilizada como princípio da generalização do MEF. Em seguida, mostra-se como obter funções partições da unidade com regularidade elevada (EDWARDS, 1996) (DUARTE; KIM; QUARESMA, 2006) usando elementos finitos como suporte. Uma vez tratado o procedimento para construção das partições da unidade, discute-se a construção de subespaços de aproximação, para problemas de valor no contorno, empregando-se funções de enriquecimento, funções estas que podem refletir algum conhecimento prévio acerca das características da solução. Assim, aproveita-se para definir e justificar as funções de enriquecimento utilizadas nesta investigação.

No Capítulo 4 é enunciado o problema modelo de elasticidade plana, nas formas forte e fraca. A formulação discretizada correspondente é apresentada. A análise de um problema clássico da mecânica da fratura elástica linear é proposta com o objetivo de se investigar a influência da suavidade na aproximação de soluções com singularidades. Compara-se o desempenho de aproximações obtidas utilizando partições convencionais de elementos finitos e partições suaves. As aproximações $C^0(\Omega)$ são obtidas enriquecendo subespaços construídos com as funções de forma de elementos triangulares lineares, conhecidas também como funções tenda (*tent functions*), ou funções do elemento CST (*constant strain triangle*). Os mesmos enriquecimentos são aplicados sobre partições $C^\infty(\Omega)$. Primeiramente, são utilizadas medidas globais para verificação da qualidade das aproximações. Procura-se identificar a dependência com relação ao padrão de aplicação do enriquecimento.

Por outro lado, como descrito no Capítulo 5, utiliza-se a mecânica configuracional com o propósito de se obter medidas de severidade da trinca. A mecânica configuracional (ESHELBY, 1951) consiste de um formalismo de análise de deformação de sólidos alternativo à mecânica Newtoniana. A forma fraca do equilíbrio em termos do tensor tensão de Eshelby, calculado a partir da solução aproximada, viabiliza a identificação de forças nodais que podem ser associadas à qualidade da aproximação (RUTER; STEIN, 2007). Especificamente, nesta investigação, utiliza-se a equivalência entre a integral J e a força configuracional (STEINMANN; ACHERMANN; BARTH, 2001) (MUELLER; MAUGIN, 2002) que se manifesta na frente da trinca para verificação da qualidade da aproximação.

Todavia, como em situações práticas não se dispõe de soluções analíticas, faz-se necessário estimar o erro das aproximações. Faz-se então necessário estabelecer ou adaptar estimadores de erro às aproximações construídas com as funções de elevada regularidade. O método residual implícito em subdomínios (BARROS; BARCELLOS; DUARTE, 2009) (STROUBOULIS et al., 2006) (PARÉS; DÍEZ; HUERTA, 2006), permite a obtenção de indicadores nodais de erro se forem consideradas as próprias nuvens para a composição de problemas locais para a estimativa de erro. Propõe-se uma modificação relativa à forma de cálculo do funcional residual. Uma vez que tem-se aproximações suaves, define-se a excitação dos problemas de aproximação do erro através da projeção do campo resíduo, em forma forte, sobre funções de ordem superior às usadas na aproximação da solução global. O campo resíduo na forma forte é obtido diretamente com pós-processamento da solução. São considerados dois problemas clássicos da elasticidade plana para se verificar a efetividade de dois estimadores de erro definidos similarmente a (STROUBOULIS et al., 2006) e (PRUDHOMME et al., 2004). Primeiramente, os estimadores e indicadores de erro são analisados para aproximações envolvendo somente enriquecimento polinomial. Em seguida, considera-se o problema utilizado nos Capítulos 4 e 5 que envolvem, simultaneamente, enriquecimento polinomial e com funções de frente de trinca.

Finalmente, são feitas as considerações finais no Capítulo 7 e são listados diversos melhoramentos, alguns já em andamento, e propostas de trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

As primeiras tentativas de modelagem numérica de propagação de trincas, do conhecimento do presente autor, foram propostas por Ngo e Scordelis (1967) e Rashid (1968), que analisaram fratura em estruturas de concreto.

Quando um critério de iniciação da trinca é verificado, a trinca pode ser modelada pela introdução de uma separação entre contornos de elementos, de acordo com a abordagem de Ngo e Scordelis (1967). Assim, a metodologia resultante é incluída na categoria dos métodos de *Fratura Discreta Inter-Elementar* e pode ser apropriada quando a trajetória da trinca é conhecida, em princípio, pois remalhamento é requerido para uma trajetória de trinca arbitrária. Desta forma, as duas maiores deficiências deste método são que as trincas são restritas aos contornos dos elementos e que elas causam mudanças contínuas na topologia da malha.

Por outro lado, Rashid (1968) apresentou uma *Metodologia Melhorada* com a qual trincas arbitrárias podem ser modeladas, visto que não existem restrições topológicas. Em tal trabalho a condição de fraturamento é determinada pela máxima tensão no elemento e uma vez excedido o valor crítico o elemento é considerado trincado. As equações constitutivas são então modificadas de tal forma que a tensão normal à descontinuidade desaparece. Todavia, como citado por Borst e Gutiérrez (1999), tal conceito melhorado inevitavelmente introduz amolecimento por deformação no modelo constitutivo. Assim, em um dito *Modelo Implícito*, as deformações nos elementos por onde a trinca passa são modificadas para representar a descontinuidade, podendo ainda as equações constitutivas serem modificadas.

Ao longo do desenvolvimento de metodologias baseadas no Método de Elementos Finitos (MEF) convencional, verificou-se que metodologias discretas, a exemplo do trabalho de Ngo e Scordelis (1967), são mais efetivas mesmo quando requerendo algoritmos de remalhamento automático. Além disso, é bem sabido que o MEF, tipicamente, com espaços de aproximação formados por funções seccionalmente diferenciáveis, requer um refinamento significativo (SZABÓ; BABUŠKA, 1991) e portanto não consiste numa ferramenta efetiva para problemas com descontinuidades ou singularidades, deficiência agravada nos casos em que tais características dos campos não possuem posição fixa no domínio.

Incluir o campo de deslocamento analítico próximo à trinca no espaço de funções de elementos isoparamétricos foi uma estratégia proposta por Benzley (1974) para capturar campos de tensões singulares. O elementos de

Barsoum (1974) é, também, um elemento quadrático contemporâneo, no qual pontos de controle específicos são movidos para um quarto da dimensão dos lados (*quarter point*), medido a partir da singularidade, além do colapso de uma aresta sobre este ponto. Posteriormente, Banks-Sills e Bortman (1984) também obtiveram singularidade no Jacobiano de um elemento Serendipity de 8 nós pelo posicionamento do nó do meio das arestas a um quarto da dimensão do elemento, para representação de campos singulares. Entretanto, os resultados destes elementos são bastante sensíveis ao seu tamanho e não exibem convergência uniforme com o refinamento da malha e são, geralmente, não compatíveis com elementos convencionais, requerendo elementos de transição.

A idéia de enriquecer o campo de deslocamentos para introduzir o efeito cinemático do fenômeno de localização, por exemplo, foi apresentado por Ortiz, Leroy e Needleman (1987). Adicionalmente, a *Metodologia com Descontinuidade Embutida* proposta por Simo, Oliver e Armero (1993) permite uma trinca se localizar no interior de um elemento finito e crescer arbitrariamente sem depender da topologia da malha. A descontinuidade é considerada como uma componente enriquecida do campo de deslocamentos, exibindo uma componente regular contínua e outra descontínua através da trinca, cujos graus de liberdade são eliminados por condensação no interior do elemento.

Outro método de trinca embutida no elemento foi proposto por Oliver (1995), no qual a trinca é representada como uma descontinuidade no deslocamento no interior do elemento. Entretanto, frentes de trinca não podem ser representadas dentro do elemento e a singularidade do campo é desprezada.

Fica então claro que nos chamados *modelos explícitos*, o campo de deslocamentos é construído como sendo descontínuo através da superfície da trinca. Isto pode ser conseguido quer seja fazendo a malha se conformar à trinca, de modo que as arestas dos elementos coincidam com a descontinuidade, ou através de técnicas de enriquecimento. Visto que a modificação da malha ao longo da análise envolve uma série de dificuldades, a opção via enriquecimento representou uma direção na qual inúmeros outros métodos foram inspirados ao longo da última década, como será discutido na próxima seção.

2.1 Metodologias para representação de trincas via enriquecimento

A observação de que o campo de deslocamentos poderia ser satisfatoriamente representado por uma parcela contínua e outra descontínua, ou

mesmo singular, foi finalmente aplicada ao conceito de partição da unidade, que será discutido no Capítulo 3. A propriedade da partição da unidade foi explorada por Duarte e Oden (1995) e Melenk e Babuška (1996). Esta é uma propriedade dos espaços de aproximação conhecida de longa data (ODEN; REDDY, 1976), visto que corresponde à habilidade do espaço de funções de aproximação de reproduzir um campo de deslocamentos constante (*condição de consistência*), que fisicamente correspondem a uma translação de corpo rígido, o que implica em capacidade de convergência de aproximações de elementos finitos.

A estratégia de introduzir funções de enriquecimento, como será discutido no Capítulo 3, via partição da unidade, através do produto das funções base de elementos finitos, separa as questões de continuidade interelemento e aproximabilidade local. Melenk e Babuška (1996) propuseram uma representação complexa para a solução analítica de Muskhelishvili (1963), expressando a solução de problemas em estado plano de tensões e deformações em termos de duas funções complexas. As propriedades de aproximação dos polinômios harmônicos generalizados são muito similares às propriedades de aproximação da solução da equação de Laplace e portanto produz estimativas de erro a priori similares.

Melenk e Babuška (1996) mostraram que as funções de enriquecimento não precisam resolver as equações governantes para conduzir à aproximação local. No entanto, funções baseadas em soluções analíticas podem conduzir a boas propriedades de aproximação local e potencialmente podem permitir o uso de malhas grosseiras. Adicionalmente, a escolha de funções de enriquecimento não polinomiais que são adaptadas a um problema específico podem conduzir à taxas de convergência ótimas (BABUŠKA; MELENK, 1997).

Para representar o campo de tensões singulares, Duarte (1996) e Oden e Duarte (1997) introduziram dois conjuntos das chamadas funções *branch*, que são baseadas nas funções de tensões de Westergaard (1939). Cada um destes conjuntos é usado como enriquecimento da aproximação em torno da frente da trinca, para as componentes de deslocamento nas direções x e y , respectivamente.

Fleming et al. (1997) propuseram incorporar os campos singulares em um método sem malha. Primeiramente, os autores enriqueceram as funções teste do Método de Galerkin Livre de Elementos para incluir o campo assintótico próximo à frente da trinca associado ao problema de fratura elástica. Os coeficientes associados a estas funções adicionais, que correspondem aos fatores de intensidade de tensões, são variáveis desconhecidas além dos co-

eficientes de deslocamentos nodais. Entretanto, os campos à frente da trinca são globais ao invés de serem limitados à uma região em torno desta visto que as funções assintóticas não pertencem à base do método de mínimos quadrados. Outra estratégia na qual a base é expandida para incluir funções que geram tais soluções assintóticas são testadas. Porém o uso de uma base enriquecida pode conduzir a uma matriz momento que exhibe algum mau-condicionamento. Para construir uma linha de descontinuidade o domínio de influência nodal é simplesmente truncado usando o critério da visibilidade de Krysl e Belytschko (1997).

Belytschko e Black (1999) exploraram as propriedades da partição da unidade para aplicar o mesmo sub-espço de funções desenvolvido em Fleming et al. (1997). A metodologia resultante foi denominada Método dos Elementos Finitos Extendido (XFEM) e emprega a solução assintótica à frente da trinca como enriquecimento para a trinca como um todo, necessitando de um mapeamento para lidar com pequenas mudanças de direção a partir de uma projeção retilínea da trinca. Tal mapeamento pode ser entendido como uma rotação virtual para alinhar o acréscimo da trinca ao segmento principal mantendo o campo na perpendicular ao segmento principal fixo através do ponto de rotação. Em outras palavras, a descontinuidade nas funções de enriquecimento são alinhadas por uma sequência de mapeamentos para rotacionar cada segmento da descontinuidade. Assim, é necessário algum remalhamento próximo à frente da trinca para mudanças severas de direção.

Moës, Dolbow e Belytschko (1999) and Dolbow, Moës e Belytschko (2000) introduziram uma técnica mais versátil na qual o campo de deslocamentos assintótico da fratura elástica linear foi usado conjuntamente com a função degrau unitário (Heaviside), para representar a singularidade e a descontinuidade, respectivamente. Este conceito possibilita trincas arbitrárias serem manipuladas independente da geometria da malha, mas deve-se notar que visto que a topologia da trinca necessita ser representada por uma partição da unidade, a regularidade da representação da trinca é limitada. Este conceito foi estendido ao modelamento de fratura tridimensional estática por Sukumar et al. (2000).

Daux et al. (2000) aplicaram o XFEM para modelagem de vazios e fraturas com geometrias mais complexas. Trincas com múltiplas ramificações foram modeladas através da superposição de enriquecimentos com a função degrau unitário nos pontos de ramificação, permitindo representar interações entre trincas e orifícios, ou sistemas com trincas emanando dos orifícios.

Belytschko, Moës e Usui (2001) unificaram a modelagem de funções com descontinuidades arbitrárias e derivadas descontínuas em elementos fi-

nitos.

O XFEM e o método *Level Set* (SETHIAN, 1999) foi primeiro aplicado por Stolarska et al. (2001). Os autores usaram duas funções *level set* ortogonais para tratar crescimento de trincas em duas dimensões, uma delas para representar a topologia da trinca propriamente dita e outra para localizar a frente desta. A atualização das funções *level set* foi efetuada usando o *Fast Marching Method* (SETHIAN, 1996) mas surgiram dificuldades do fato de que a primeira das funções deve permanecer fixa uma vez que a trinca se abre. Alguns detalhes no que diz respeito ao método *level set* serão apresentados na sequência. A metodologia foi também aplicada a problemas tridimensionais para crescimento de trincas não-planares em regime quase-estático por Moës, Gravouil e Belytschko (2002) e Gravouil, Moës e Belytschko (2002).

Sukumar et al. (2001) adaptaram a metodologia do *level set* para modelar orifícios e interfaces materiais arbitrários em problemas de elastostática bidimensional. A descrição geométrica de uma interface, o contorno de um orifício ou inclusão, é representado por graus de liberdade geométricos nos nós visto que a função cujo nível zero define a interface é convertida a uma representação funcional discreta usando funções de forma convencionais de elementos finitos.

Duarte et al. (2001) desenvolveram um método para propagação dinâmica de trincas em domínio tridimensional, no contexto do MGEF, com o enriquecimento descontínuo baseado no critério da visibilidade. Os autores usaram enriquecimentos singulares próximo à frente da trinca baseado nos termos de primeira ordem da solução assintótica para trincas retilíneas e usaram mínimos quadrados para regularizar os campos de tensões para extrair os fatores de intensidade de tensões.

Jirasek e Belytschko (2002) argumentaram que o XFEM oferece vantagens se comparado aos métodos com descontinuidade embutida. Os elementos com descontinuidades embutidas baseados no método das deformações enriquecidas são não-conformes, e a compatibilidade do campo de deformações é imposta somente no sentido fraco. Em contraste, as funções de enriquecimento usadas no XFEM são descontínuas somente ao longo da descontinuidade e são contínuas em qualquer outra posição. Os graus de liberdade adicionais introduzidos pelas formulações com descontinuidades embutidas possuem uma característica interna e podem ser eliminados em nível de elemento. Isto é uma vantagem pois o número e o significado físico dos graus de liberdade globais permanece igual mesmo quando novas linhas de descontinuidades são inseridas. Entretanto, o XFEM parece ser preferível devido às suas propriedades cinemáticas superiores e robustez numérica em

relação aos elementos com descontinuidades embutidas.

A dificuldade essencial relacionada a um modelo de trinca dependente da imposição da nulidade da tensão normal à trinca é que ele exibe sensibilidade patológica ao tamanho da malha. Se o corpo modelado tem um entalhe ou trinca pré-existente, o campo de tensões exato é ilimitado (devido à singularidade na frente da trinca). Os máximos valores de tensões obtidos pela análise com elementos finitos podem ser arbitrariamente grandes se a malha for suficientemente refinada. Se não existe singularidade no campo de tensão, entretanto, o campo de tensão elástico é limitado e a iniciação da trinca é reproduzida corretamente, mas a trinca se propaga de uma forma instável após o seu surgimento, pois após a falha do primeiro elemento cria-se imediatamente uma situação equivalente ao entalhe pré-existente. Uma forma de se remediar tal inconveniente poderia ser introduzir uma tensão coesiva atuando nas faces da trinca que gradualmente decresce a zero à medida que a trinca se abre (JIRASEK; BELYTSCHKO, 2002). Tal modelo de descontinuidade coesiva pode remover a singularidade à frente da trinca e assim resolver o problema relacionado à objetividade e pode ser fisicamente justificável pela existência de processos fisicamente não-lineares numa região de dimensão finita à frente da trinca.

Bellec e Dolbow (2003) expuseram uma nota sobre funções de enriquecimento para modelagem da nucleação de trincas, analisando o caso particular onde a extensão da trinca se aproxima do tamanho do suporte das funções de forma nodais.

O problema de nucleação, crescimento e coalescência foi investigado por Remmers, Borst e Needleman (2003) que estudaram a possibilidade de se definir segmentos coesivos em posições e direções arbitrárias e assim permitir a resolução de padrões complexos de fraturamento.

Muito embora malhas não estruturadas sejam mais convenientes para análises de engenharia visto que melhor se conformam aos contornos externos, malhas estruturadas podem ser convenientes para muitos estudos em ciência dos materiais, por exemplo, se o objetivo é determinar as propriedades de uma célula unitária do material. Adicionalmente, quando resolvendo problemas de interfaces materiais numericamente usando o método de elementos finitos convencional, as linhas da malha devem ser colocadas sobre a descontinuidade para levar em consideração as propriedades correspondentes a cada material. Buscando oferecer uma alternativa para isso, Belytschko et al. (2003) propuseram um método no qual superfícies implicitamente definidas são usadas para a definição de superfícies internas e externas em modelagem de objetos sólidos, usando malhas estruturadas de elementos finitos. A

descrição via funções implícitas com funções base radiais como aproximação, de acordo com Carr et al. (2001), é usada para representar superfícies internas, tais como interfaces materiais, superfícies de deslizamento e trincas.

Nagashima, Omoto e Tani (2003) aplicaram o XFEM a um problema de trinca interfacial elastostática em domínio bi-dimensional. Apesar de a atenção ser focada sobre trincas interfaciais, a base de enriquecimento é determinada a partir da solução assintótica de placa homogênea, usando o subespaço geralmente empregado por Belytschko e colaboradores.

Um novo elemento para frente de trinca baseado na função sinal (Heaviside generalizada) foi proposto por Zi e Belytschko (2003). Os autores notaram que quando funções de enriquecimento singulares são usadas conjuntamente com funções degrau, como em Moës, Dolbow e Belytschko (1999), a propriedade de partição da unidade não se verifica nos elementos em torno da frente da trinca. O enriquecimento destes elementos é uma partição da unidade local e deve ser compatibilizada ao restante do domínio para um desempenho adequado, como discutido por Chessa, Wang e Belytschko (2003). Assim, todos os elementos com trinca, incluindo o que contém a frente da trinca, são enriquecidos pela função sinal de forma que a partição da unidade é válida no domínio todo. O domínio mapeado dos elementos parcialmente cortados é dividido em duas partes e somente a parte trincada é enriquecida por uma função sinal. A frente da trinca pode ser localizada em qualquer lugar no interior de um elemento. Entretanto, a abertura da trinca é linear, de modo que o procedimento requer boa resolução da malha para fratura elástica e substancial refinamento para trincas coesivas. À medida que a frente da trinca avança a força aplicada é controlada para resultar uma tração, normal à direção da trinca, igual à resistência do material (uma forma alternativa de fazer com que o fator de intensidade de tensão se anule).

Belytschko et al. (2003) apresentaram uma nova técnica de enriquecimento para evitar dificuldades encontradas com o XFEM original em problemas dependentes da história de carregamento. Mais detalhes são reportados na sequência.

Uma particularidade se verifica em todos os trabalhos citados até então. Somente aproximações lineares de elementos finitos foram adotadas quando o XFEM e o método *Level Set* são empregados para a descrição das discontinuidades.

Stazi et al. (2003) aplicaram enriquecimento sobre elementos finitos quadráticos, verificando-se taxas de convergência mais elevadas, susceptibilidade decrescente ao travamento e habilidade de modelar contornos curvos. Além disso, uma função level set interpolada por funções de forma

quadráticas é capaz de descrever trincas curvas visto que descrições level set através de elementos finitos lineares permitem somente trincas seccionalmente lineares. A abordagem é similar àquela de Ventura, Xu e Belytschko (2002) de tal forma que a geometria da trinca pode ser atualizada somente por equações que envolvem informações geométricas. Os deslocamentos são aproximados por elementos triangulares de seis nós. A função distância com sinal é aproximada pelas mesmas funções de forma como os deslocamentos. A aproximação de elementos finitos padrão foi enriquecida com as funções geradoras da solução de Westergaard nos nós em torno da frente da trinca e os nós ao longo da trinca foram enriquecidos com a função Heaviside modificada para ser simétrica ao longo da trinca. As funções de forma são quadráticas enquanto funções de forma lineares foram usadas para construir uma partição da unidade para o enriquecimento e para o blending. Os fatores de intensidade de tensões foram obtidos pela integral J e integral I . Os resultados para K_{II} são frequentemente menos acurados que para K_I . Para melhorar a precisão alguns termos integrados ao longo das faces da trinca devem ser adicionados à expressão da integral de interação.

Budyn et al. (2004) descreveram um método para modelar a evolução de múltiplas trincas usando a metodologia do XFEM no contexto da mecânica da fratura elástica linear. Há a possibilidade de que as trincas cresçam até a coalescência e eventualmente propaguem pelo modelo. As trincas com o fator de intensidade de tensão máximo, calculado por meio de uma integral de interação, crescem de tal forma que o fator de intensidade de tensão permaneça crítico, ajustando o parâmetro de carregamento pelo controle do comprimento da trinca. No caso de frentes de trincas concorrentes, uma análise de estabilidade é executada para determinar a configuração do percurso da trinca que conduz ao máximo decrescimento no potencial de energia.

Sukumar et al. (2004) propuseram uma técnica de enriquecimento da partição da unidade para trincas em interfaces bimateriais. As funções de enriquecimento de frente de trinca são escolhidas como aquelas que geram o campo de deslocamentos assintótico para uma interface obtido por Rice (1988). Os fatores de intensidade de tensão para trincas em interface bimaterial foram calculados numericamente usando a forma de domínio da integral de interação. A singularidade de tensões nas vizinhanças da frente de trinca de uma interface bimaterial é oscilatória por natureza, com a presença de uma singularidade $r^{-1/2}$. A partir do erro relativo na norma energia, a taxa de convergência do método foi estimada como um meio, o que vai de encontro à taxa de convergência teórica ótima do MEF clássico na presença de

singularidade dominante \sqrt{r} .

Uma estratégia adequada para a representação de descontinuidades fracas e fortes foi apresentada por Hansbo e Hansbo (2004). O método é classificado como *Unfitted Finite Element Method* (HANSBO; HANSBO, 2002) e pode manipular interfaces perfeitamente e imperfeitamente coladas, com rigidez pequena ou grande. Isto é conseguido usando uma forma bi-linear não convencional para definir o método, juntamente com um parâmetro de penalização adequado que depende das condições de interface assim como da malha. O método basicamente substitui cada função de elemento finito por novas funções base, com descontinuidade sobre a interface, de tal forma cada uma é não nula somente sobre uma das duas partes em que é bissecionado um elemento cortado pela trinca. Os autores fornecem uma análise de estimativa de erro a priori, e exemplos envolvendo inclusões, contato e fratura. Para o problema de fratura, a trinca foi suposta acomodar uma pequena constante de rigidez após a falha. De acordo com Belytschko, Gracie e Ventura (2009) a base de aproximação é uma combinação linear da base do XFEM para descontinuidades. A performance é idêntica à do XFEM. A integração ainda requer algoritmos especiais. As aproximações para gradientes descontínuos podem também ser construídas por restrição de aproximações descontínuas por meio de multiplicadores de Lagrange ou por meio do método de Nitsche. A escolha depende primeiramente de aspectos de implementação visto que corresponde a adicionar um elemento extra e nós extras para todo elemento seccionado pela descontinuidade.

Béchet et al. (2005) introduziram um esquema de enriquecimento independente da malha, desenvolvendo novas quadraturas de integração para funções assintóticas e implementando um esquema de pré-condicionamento adaptado às funções enriquecidas. Mais detalhes serão apresentados no Capítulo 4.

A incorporação das funções de enriquecimento no espaço de aproximação mediante produto com a partição da unidade gera um enriquecimento externo com consequente aumento no número de graus de liberdade do modelo. Todavia, a utilização destas mesmas funções como bases para o Método de Mínimos Quadrados Móveis pode gerar funções de aproximação que incorporam as características do enriquecimento sem adição de graus de liberdade. Tal procedimento foi elaborado por Fries e Belytschko (2006) com o apelo de permitir representar descontinuidade sem variáveis nodais adicionais, mediante um enriquecimento denotado intrínseco. O procedimento requer um cuidado especial na definição das funções de ponderação nodais de forma que seja garantida a inversão das

matrizes momento ponderadas no Método de Mínimos Quadrados Móveis, requerendo uma sobreposição de nuvens mínima em cada ponto do domínio. Uma observação importante é que as funções de aproximação resultantes não possuem a propriedade do delta de Kronecker e assim requerem tratamento especial para imposição de condições de contorno.

Comi e Mariani (2007) expuseram uma simulação pelo XFEM de fratura quase-frágil em materiais funcionalmente graduados, levando em consideração a gradação material, que foi desenvolvida para reproduzir a propagação de trincas coesivas.

Asadpoure e Mohammadi (2007) desenvolveram três conjuntos independentes de funções de enriquecimento ortotrópicos para análises com XFEM de trincas em meio ortotrópico. A base geradora do campo singular foi modificada adicionando termos dos campos de deslocamentos bidimensionais deduzidos por Sih, Paris e Irwin (1965) por meio de funções analíticas e variáveis complexas.

Yan e Park (2008) apresentaram um estudo sobre a aplicação do XFEM baseado na formulação de Zi e Belytschko (2003), que empregam somente a função degrau unitário, para a modelagem de crescimento de trincas em estruturas compostas laminadas, com particular ênfase sobre a capacidade do XFEM em prever o percurso da trinca em fratura próxima a interfaces. Dispensar as funções singulares de frente de trinca elimina os elementos parcialmente enriquecidos sobre os quais não se verifica a partição da unidade, segundo Chessa, Wang e Belytschko (2003), evitando a degradação da precisão nestes elementos. Mas isto, claramente, diminui a capacidade da aproximação representar o campo de deslocamento real.

Borja (2008) elucidou os conceitos envolvidos no método *Assumed Enhanced Strain* (AES) e o XFEM com referência a simulação de trincas com atrito.

Rabczuk et al. (2008) expuseram um novo elemento de frente de trinca para o método *Phanton-Node* com trincas coesivas arbitrárias.

Song e Belytschko (2009) expuseram o método *cracking node* para fratura dinâmica com o XFEM. A trinca é representada por segmentos discretos contíguos que repousam sobre os nós de elementos finitos e envolvendo somente dois elementos adjacentes. Cada um dos segmentos de trincas é independentemente determinado pelo critério da máxima deformação principal no corpo de prova simulado. O modelo de comportamento em fratura deve ser consistente com a resolução da malha de elementos finitos e um conjunto de regras é necessário para se evitar padrões espúrios de trinca, todavia ainda resultando capaz de representar o fenômeno de fratura dinâmica. O *cracking*

node dissipa mais energia de fratura que o XFEM convencional, que provavelmente explica a menor velocidade de propagação de trinca.

Visto que a maioria dos estudos utilizam funções de enriquecimento simplificadas para representar descontinuidades fortes, Cox (2009) expôs funções de enriquecimento baseadas em uma investigação analítica do problema de fratura coesiva procurando melhor representar o gradiente de deslocamentos nas vizinhanças de uma trinca com zona coesiva. A formulação numérica é deduzida considerando comportamento elástico linear mas isto não impede considerar resposta inelástica. A tensão principal máxima foi usada como critério para definir a iniciação da zona coesiva, que surge quando tal tensão atinge ou excede a tensão de resistência do material.

Cox (2009) notou que funções de enriquecimento em coordenadas elípticas baseadas no trabalho de Zhang e Deng (2007), que examinam a natureza da solução próxima à zona coesiva, são mais simples para implementar que as funções de enriquecimento baseadas nos polinômios de Chebyshev, constante e linear em z , como bases para a solução em série de Hong e Kim (2003) e conduz a menores problemas de convergência. Uma base similar à de Belytschko e Black (1999) para problema com zona coesiva iria requerer uma quantidade grande de funções de enriquecimento por nó. Portanto, as expressões analíticas para as componentes de deslocamentos são usadas diretamente como enriquecimento. Um parâmetro de estudo para um modelo de fratura com modo I é apresentado para calcular se propagação de trinca quase-estática pode ser acuradamente modelada com a formulação proposta.

Belytschko e colaboradores (BELYTSCHKO; BLACK, 1999), (MOËS; DOLBOW; BELYTSCHKO, 1999) e (DAUX et al., 2000) usam somente termos principais do campo de deslocamentos assintótico, e os coeficientes adicionais em cada nó enriquecido são considerados independentes, apesar de eles serem dependentes dos coeficientes da expansão real. Portanto, o campo assintótico correto é perturbado. Na melhoria proposta por Cox (2009), os campos enriquecidos são os campos assintóticos de frente de trinca reais, e os coeficientes adicionais de enriquecimento nodal são os coeficientes relevantes destes campos assintóticos. Além disso, são avaliados esquemas de enriquecimento que ora aplicam funções singulares de frente de trinca aos nós cujo suporte foi interceptado pela superfície da trinca fazendo-se a transição para a função degrau unitário à medida que se afasta da zona coesiva. Outra estratégia enriquece os nós dos elementos no interior de uma região com raio prescrito para afastar a região de perda de acuracidade (*blending region*) da zona coesiva, seguindo recomendações de Chessa, Wang e Belytschko (2003).

Um procedimento de análise com decomposição hierárquica, ou

também chamado análise global-local, utilizando o formalismo do Método Variacional Multi-Escala (HUGHES et al., 1998) combinado ao XFEM foi proposto por (HETTICH; HUND; RAMM, 2008). Uma estratégia semelhante, porém considerando deformações finitas e representando a descontinuidade, modelada somente na meso-escala, à maneira de Hansbo e Hansbo (2004), foi apresentada por Mergheim (2009). Este último autor também melhorou o esquema de acoplamento entre o problema global e local para garantir a continuidade na topologia da trinca, nas interfaces entre sub-domínios locais, mediante multiplicadores de Lagrange.

Réthoré, Roux e Hild (2010) propuseram uma forma diferente para introduzir enriquecimento nas vizinhanças de uma frente de trinca. Uma formulação bi-dimensional é implementada considerando expressões puramente analíticas para o campo de deslocamentos na vizinhança da frente da trinca em forma complexa, na qual os fatores de intensidade de tensão são variáveis desconhecidas, de acordo com o formalismo em séries de Williams (WILLIAMS, 1957), e elementos finitos convencionais no restante do domínio. O procedimento de acoplamento energético de Arlequin (DHIA; RATEAU, 2005) é usado para compatibilizar as duas descrições além de um acoplamento cinemático para garantir a compatibilidade dos dois campos de deslocamentos.

Fica então evidente, a partir do exposto, que diferentes estratégias, mais ou menos sofisticadas, estão disponíveis. Sem citar que este levantamento não é, de longe, completo e faz referência somente aos trabalhos que mais se destacaram. Todavia, o problema da representação de uma descontinuidade associada à inserção de campos singulares localizados não está, ainda, solucionado em seus diversos aspectos.

3 FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO CONTÍNUAS VIA MGEF

Este capítulo é dedicado à apresentação do Método Generalizado de Elementos Finitos (MGEF). Inicialmente, será introduzido o raciocínio que conduziu à proposta de se aplicar as chamadas funções de enriquecimento com a intenção de se melhorar a capacidade de aproximação de um subespaço de funções de elementos finitos.

Uma vez apresentado o conceito de partição da unidade (PU) e evidenciada a sua importância, será conduzida uma exposição sobre o procedimento utilizado para construção de PU suaves. Estas funções PU serão enriquecidas à maneira do MGEF para a definição de subespaços de aproximação para o problema modelo discutido no Capítulo 4.

3.1 Motivação matemática do enriquecimento

A origem do MGEF remonta à observação de que as funções de aproximação convencionais do MEF, também chamadas funções de forma, poderiam ser interpretadas como uma partição da unidade (mesmo que segundo uma definição simplificada) e desta forma poderiam ser usadas para se efetuar uma operação de *extensão* de uma função.

Segundo Tu (2008), a operação de extensão de uma função basicamente diz respeito à representação localizada de uma função mediante a utilização de uma função *bump*. Para definir uma função *bump*, primeiramente, faz-se necessário definir suporte de uma função.

O suporte de uma função C^∞ -contínua f , definida em um *manifold*¹ \mathcal{M} , consiste do fechamento do conjunto ϖ sobre o qual a função é diferente de zero, ou seja

$$\text{supp } f = \text{fechamento de } \{\varpi \in \mathcal{M} \mid f(\varpi) \neq 0\} \quad (3.1)$$

Então, seja um ponto \mathbf{x} em \mathcal{M} e seja \mathcal{S} uma vizinhança² de \mathbf{x} . Uma função contínua $\rho(\mathbf{x})$ com suporte em \mathcal{S} que é unitária sobre uma vizinhança \mathcal{S} de \mathbf{x} , menor que \mathcal{S} , é chamada função *bump*. Diz-se então que função *bump* é qualquer função ρ , com $\text{supp } \rho \subset \mathcal{S}$, que é unitária na vizinhança \mathcal{S} de \mathbf{x} .

Seja então a função C^∞ -contínua $f(\mathbf{x})$ definida na vizinhança \mathcal{S} do ponto \mathbf{x} em um manifold \mathcal{M} . Logo, por uma *função extensão* $\tilde{f}(\mathbf{x})$ entende-se

¹*Manifold* é um espaço topológico localmente Euclidiano no sentido de que ao redor de todo ponto existe uma vizinhança que é topologicamente igual a uma bola unitária em \mathbb{R}^n .

²A vizinhança de um ponto \mathbf{x} é um conjunto aberto contendo \mathbf{x}

uma função C^∞ -contínua que coincide com a função $f(\mathbf{x})$ em uma vizinhança S (menor que \mathcal{S}) do ponto \mathbf{x} (TU, 2008), tal que

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \rho(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) & , \text{ para } \mathbf{x} \in \mathcal{S} \\ 0 & , \text{ para } \mathbf{x} \notin \mathcal{S} \end{cases} \quad \text{e } \tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \text{ para } \mathbf{x} \in S \quad (3.2)$$

Sendo assim, uma operação de extensão basicamente consiste da localização da informação representada pela função f em uma porção do referido manifold \mathcal{M} .

Este conceito de extensão de uma função motivou o desenvolvimento das abordagens generalizada ou estendida do Método de Elementos Finitos (MEF), como explicado na sequência.

3.2 Partição da unidade (PU)

Designa-se por *partições da unidade* uma coleção de funções *bump* definidas sobre uma cobertura de \mathcal{M} formada por uma coleção de suportes, cada qual associado a uma função *bump*.

A partição da unidade, então, como uma coleção de funções *bump*, pode ser usada para compatibilizar objetos f 's definidos localmente, sem comprometimento da continuidade. Assim, pode-se considerar os elementos de uma malha para definição dos suportes das funções.

Seja um domínio poliédrico limitado e aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, discretizado através de uma triangulação convencional de elementos finitos $\{\mathcal{K}_e\}_{e=1}^{NE}$, com NE sendo o número de elementos em $\{\mathcal{K}_e\}$, definida por N nós com coordenadas $\{\mathbf{x}_\alpha\}_{\alpha=1}^N$. Para cada um dos nós, denota-se o interior da união dos elementos finitos adjacentes ao nó (*patch*) como sendo a *nuvem* ω_α .

Então, seja uma cobertura aberta \mathfrak{S}_N do domínio definida pelo conjunto de N nuvens ω_α associadas aos nós \mathbf{x}_α , de forma que o fechamento do domínio $\overline{\Omega}$ é contido na união dos fechamentos das nuvens $\overline{\omega}_\alpha$

$$\overline{\Omega} \subset \cup_{\alpha=1}^N \overline{\omega}_\alpha. \quad (3.3)$$

Adicionalmente, considera-se um conjunto de funções $\mathfrak{S}_N = \{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^N$, cada uma tendo sua nuvem correspondente ω_α como seu suporte compacto. Em essência, cada elemento do conjunto \mathfrak{S}_N é uma função *bump*, como definida na seção 3.1. Este conjunto tem a propriedade de que cada uma das funções é tal que $\varphi_\alpha \in C_0^\infty(\omega_\alpha)$, o que indica que a função é não-nula somente sobre a nuvem ω_α , ou seja, tem suporte compacto e é

infinitamente diferenciável. Geralmente, esta primeira condição é relaxada para $C_0^k(\omega_\alpha)$ para algum $k \geq 0$, viabilizando a utilização de funções de forma convencionais de elementos finitos como base inicial para enriquecimento (DUARTE; BABUŠKA; ODEN, 2000).

Por consequência, $\sum_{\alpha=1}^N \varphi_\alpha(\mathbf{x}) = 1, \forall \mathbf{x} \in \Omega$, ou seja, a soma dos valores das funções φ_α é igual à unidade em qualquer ponto contido em Ω . Além disso, visto que a coleção de suportes $\{\text{supp } \varphi_\alpha\}$ é localmente finita, ou seja, todo ponto $\mathbf{x} \in \Omega$ pertence a um número finito de elementos de $\{\text{supp } \varphi_\alpha\}$. Em outras palavras, todo subconjunto compacto de Ω intercepta somente um número finito de nuvens. Assim, como $\varphi_\alpha|_{\mathbf{x}} \neq 0$ para somente alguns α , segue que o somatório $\sum \varphi_\alpha$ é finito em todo ponto \mathbf{x} . Portanto, o conjunto $\{\varphi_\alpha\}, \alpha = 1, \dots, N$, é dito ser uma *partição da unidade* subordinada à cobertura \mathfrak{I}_N (ODEN; REDDY, 1976), no sentido de que $\text{supp } \varphi_\alpha \subset \omega_\alpha$ para todo α .

Deve-se notar que as funções lagrangeanas convencionais de elementos finitos constituem uma classe de partição da unidade $C_0^0(\omega_\alpha)$ e podem ser usadas para implementações em GFEM como apresentado por Barros, Proença e Barcellos (2004) e Torres e Mendonça (2010a).

3.3 Método generalizado de elementos finitos - conceituação

Sabe-se que polinômios seccionalmente contínuos são bastante apropriados para aproximar funções suaves mas não são adequados para aproximar funções não suaves, tornando necessário um refinamento local de malha (SZABÓ; BABUŠKA, 2011). Isto pode conduzir à convergência ótima mas pode envolver um grande número de estágios de refinamento e muitos graus de liberdade para atingir uma precisão específica.

Uma opção mais eficiente consiste em generalizar o MEF abandonando as funções seccionalmente polinomiais. Isto é feito aplicando-se um refinamento algébrico ao espaço de aproximação. Todavia, a incorporação de funções, polinomiais ou não, deve respeitar restrições de regularidade global.

A primeira generalização de MEF convencional se deu por meio do Método de Partição da Unidade (MPU) (MELENK; BABUŠKA, 1996), no qual um subespaço \mathcal{V}^{MPU} é construído como

$$\mathcal{V}^{MPU} := \mathcal{V}_h + \eta \sum_{\alpha \in \Lambda} \varphi_\alpha \quad (3.4)$$

em que \mathcal{V}_h é o subespaço formado pelas funções de forma convencionais de elementos finitos, η denota uma função de enriquecimento específica (de-

pendente do problema) e $\Lambda \subset \{1, \dots, N_{\text{enr}}\}$ define o subconjunto de funções partições da unidade refinadas algebricamente pela função η .

O Método Generalizado de Elementos Finitos - MGEF (do inglês, *Generalized Finite Element Method* - GFEM), apresentado em Oden, Duarte e Zienkiewicz (1998) é um método híbrido que combina o Método de Nuvens *hp* (do inglês, *hp-Clouds Method*) (DUARTE, 1996) (DUARTE; ODEN, 1996) e a forma convencional do Método de Elementos Finitos. Nesta instância, considera-se a função de forma de cada nó como uma PU, sobre a qual se pode aplicar enriquecimento, à maneira do Método de Nuvens *hp*. Cada nuvem pode receber enriquecimento independentemente, de forma que diferentes funções podem ser usadas como enriquecimento em diferentes porções do domínio.

O MGEF foi estabelecido em Duarte, Babuška e Oden (2000), Strouboulis, Babuška e Copps (2000), e Strouboulis, Babuška e Copps (2001), e em sua abordagem utiliza-se o conceito do Método de Elementos Finitos de Partição da Unidade (do inglês, *Partition of Unity Finite Element Method* - PUFEM) (BABUŠKA; CALOZ; OSBORN, 1994), (MELENK, 1995), (MELENK; BABUŠKA, 1996), (BABUŠKA; MELENK, 1997). Esta estratégia leva em consideração a idéia de se adicionar refinamentos hierárquicos a um conjunto de funções associadas a elementos finitos que satisfaçam os requisitos de uma Partição da Unidade (PU). Este procedimento permite, portanto, construir subespaços mais ricos para aproximação de soluções de equações diferenciais parciais.

O MGEF favorece um esquema simples e efetivo para se adaptar funções de aproximação para cada tipo de problema em análise. Em sua forma convencional, uma malha de elementos finitos é criada para se executar as seguintes operações: (a) definir partições da unidade localmente nos elementos usando-se coordenadas intrínsecas como, por exemplo, as funções lagrangeanas; e (b) facilitar a integração numérica. Finalmente, as funções PU são enriquecidas externamente (com a adição de novas variáveis incógnitas), como no método de nuvens *hp* (DUARTE, 1996), por funções definidas em coordenadas globais, aspecto este que é responsável, em grande parte, pela eficiência do método.

O MGEF convencional emprega as funções de forma do MEF para definir as nuvens e suas PU e, assim, reduzir o custo computacional em relação ao *hp-Cloud* e demais métodos sem malha. Todavia, tem-se reduzida a continuidade a $C^0(\Omega)$.

O enriquecimento permite a aplicação de certos tipos de informações que reflitam o conhecimento prévio sobre a solução do problema de valor no

contorno, tal como funções singulares resultantes de expansões assintóticas locais da solução exata nas proximidades de um ponto. A capacidade de aproximação inerente às funções de enriquecimento é incluída no espaço de funções de aproximação do método mantendo a mesma estrutura dos códigos de elementos finitos.

Usualmente, as funções de enriquecimento são polinomiais, mas funções especiais podem ser usadas para fornecer resultados mais acurados e implementações mais robustas, uma vez que é possível usar bases não-polinomiais compactamente suportadas para ampliar o subespaço de solução. Estas funções podem ser construídas a partir do conhecimento prévio de expressões analíticas que reflitam a natureza da solução exata do problema.

Uma diversidade de fenômenos tem sido analisados com êxito empregando-se o MGEF tais como a análise de propagação de fraturas (BELYTSCHKO; BLACK, 1999) (DUARTE et al., 2001) e materiais com microtrincas (STROUBOULIS; BABUŠKA; COPPS, 2001) e vazios (STROUBOULIS; ZHANG; BABUŠKA, 2003). O MGEF foi também utilizado para se construir funções de aproximação arbitrariamente suaves adequadas para a manipulação de condições de contorno de elevada regularidade (DUARTE; KIM; QUARESMA, 2006).

Strouboulis et al. (2006) abordaram o problema de estimação de erro *a posteriori* usando funções *handbook* baseadas em malhas, geradas a partir de subdomínios canônicos contendo características microestruturais, como enriquecimentos para materiais com muitos vazios. Barros, Barcellos e Duarte (2007) apresentaram um procedimento para estimação de erro *a posteriori* e análise *p*-adaptativa usando funções PU contínuas.

O'Hara, Duarte e Eason (2009) desenvolveram uma estratégia na qual o enriquecimento é gerado pela superposição de um problema de valor no contorno localizado numa região de elevado gradiente, cuja solução é iterativamente compatibilizada via penalização com a solução do problema global. Formulações contínuas para placas laminadas anisotrópicas foram implementadas para as hipóteses de Kirchhoff-Love (BARCELLOS; MENDONÇA; DUARTE, 2009) e Reissner-Mindlin (MENDONÇA; BARCELLOS; TORRES, 2011). Procedimentos para se definir subespaços de aproximação enriquecidos para cascas laminadas e tratamento do fenômeno de camada limite foram apresentados em Garcia, Fancello e Mendonça (2009). Um formulação para placas laminadas anisotrópicas com sensores e atuadores piezelétricos foi desenvolvida e implementada por Torres e Mendonça (2010a), e verificada com a solução analítica para o problema (TORRES; MENDONÇA, 2010b) com a avaliação de taxas de convergência em medidas globais e computação de grandezas locais

incógnitas, conforme Torres, Mendonça e Barcellos (2011).

3.4 PU com continuidade arbitrária baseada em malha

Nesta versão do MGEF, o objetivo é usar as funções de aproximação com continuidade arbitrária k , buscando construir campos de tensões continuamente diferenciáveis e, como consequência, obter campos de resíduo na forma forte também regulares. Em busca deste objetivo e usando a estratégia de enriquecimento do método de nuvens hp (DUARTE, 1996), ou seja, enriquecimento *extrínseco*, funções de aproximação que se anulam, junto com suas k primeiras derivadas normais, à medida que se aproxima das arestas da nuvem, são construídas. Este procedimento foi apresentado em (DUARTE; KIM; QUARESMA, 2006) e foi aplicado em (BARCELLOS; MENDONÇA; DUARTE, 2009), (MENDONÇA; BARCELLOS; TORRES, 2011) e (MENDONÇA; BARCELLOS; TORRES, 2013)

Sobre cada nuvem, funções de aproximação C^k -contínuas são calculadas usando o método dos mínimos quadrados móveis (LANCASTER; SALKAUSKAS, 1981) com somente uma função constante na base polinomial, $p = \{1\}$. Estas funções de mínimos quadrados móveis de grau 0 possuem representação matemática explícita através da chamada equação de Shepard (GARCIA, 1999) (SCHWEITZER, 2008). As funções PU de Shepard são também o núcleo discreto de aproximações por métodos de partículas (smooth particle methods) como o "Element Free Galerkin" (BELYTSCHKO; LU; GU, 1994) ou o "Reproducing Kernel Particle" (LIU; JUN; ZHANG, 1995).

3.4.1 Partição da unidade de Shepard

Existem vários tipos de partições da unidade usadas em mecânica computacional. Exemplos adicionais podem ser encontrados em vários métodos sem malha, tais como o método de nuvens- hp . Outro exemplo, a partição da unidade de Shepard, faz uso de *funções nodais de ponderação*, $\mathcal{W}_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tendo a nuvem ω_α como seu suporte compacto, tal que \mathcal{W}_α pertence ao espaço $C_0^k(\omega_\alpha)$. As funções partição da unidade de Shepard subordinada à cobertura \mathfrak{S}_N são definidas como

$$\varphi_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{W}_\alpha(\mathbf{x})}{\sum_{\beta(\mathbf{x})} \mathcal{W}_\beta(\mathbf{x})}, \quad \beta(\mathbf{x}) \in \{\gamma \mid \mathcal{W}_\gamma(\mathbf{x}) \neq 0\}. \quad (3.5)$$

Duarte, Kim e Quaresma (2006) propuseram uma modificação ao MGEF convencional para recuperar a elevada continuidade disponível no

Método de Nuvens *hp* resultando em funções de aproximação com continuidade arbitrária. Assim, utiliza-se a PU de Shepard através de funções peso $\mathcal{W}_\alpha(\mathbf{x})$ associada ao nó \mathbf{x}_α que tem a nuvem ω_α como suporte compacto

Portanto, a regularidade da PU depende somente da regularidade das funções ponderação \mathcal{W}_α , como se pode observar em (3.5).

As funções da partição da unidade resultantes possuem a mesma regularidade das funções ponderação. Adicionalmente, a integração numérica destas funções e do produto de suas derivadas pode ser efetivamente executada usando a própria malha de elementos finitos visto que o suporte das funções coincide com as nuvens formadas pelos elementos.

O MGEF convencional emprega as funções de forma do MEF para definir as nuvens e, assim, reduzir o custo computacional em relação ao hp-Cloud e demais métodos sem malha, mas ao custo de reduzir a continuidade a $C^0(\Omega)$.

O presente procedimento é simples e robusto como pode ser verificado em Barcellos, Mendonça e Duarte (2009) onde se avalia diferentes funções de arestas na composição da funções nodais de ponderação. Pode-se citar também Mendonça, Barcellos e Torres (2011), que verificam a pouca dependência de malha mesmo em situações de severa distorção inicial de malha. Mendonça, Barcellos e Torres (2013) utilizam funções $C^k(\Omega)$, juntamente com partições da unidade convencionais $C^0(\Omega)$, para variáveis generalizadas com requisitos superiores de conformidade em problemas de placas modeladas por teoria de ordem superior.

Adicionalmente, a equação de Shepard (3.5) viabiliza a combinação de diferentes tipos de funções ponderação, conforme apresentado em Duarte, Migliano e Baker (2005), de modo que se pode compatibilizar funções de forma convencionais de elementos finitos e funções ponderação contínuas com o propósito de se aplicar continuidade apenas em porções localizadas do domínio.

3.4.2 Funções nodais de ponderação

Geralmente, a construção de funções livres de malha requer que em cada posição \mathbf{x} do domínio seja feita uma busca pelos nós próximos a fim de identificar as funções que cobrem o ponto. A operacionalização de tal busca pode não ser tão simples. Outros aspectos que merecem atenção são a imposição de condições de contorno essenciais, pelo fato de geralmente as funções não apresentarem a propriedade do delta de Kronecker (LIU, 2003), e a integração numérica, que demanda uma sub-malha para definição da qua-

dratura de integração.

Um procedimento que reduz significativamente as dificuldades de implementação de funções com elevada regularidade à medida que considera malhas de elementos finitos para a definição dos suportes das funções foi proposto por Edwards (1996). O procedimento é robusto e pode ser usado para qualquer dimensão geométrica e usando malhas de elementos de qualquer formato e fornece funções com continuidade $C^\infty(\Omega)$. Consequentemente, a integração numérica pode ser executada com o auxílio da própria malha de elementos para a definição da quadratura.

Edwards (1996) propôs a construção de funções nodais de ponderação para nuvens ω_α convexas através do produtório de funções $\varepsilon_{\alpha,j}(\xi_j)$ associadas a cada uma das j , $j = 1, \dots, M_\alpha$, arestas da nuvem. As então chamadas funções de aresta são definidas em termos de uma coordenada paramétrica ξ_j normal à sua correspondente aresta j como

$$\mathcal{W}_\alpha(\mathbf{x}) := e^{c_\alpha} \prod_{j=1}^{M_\alpha} \varepsilon_{\alpha,j}(\xi_j) \quad (3.6)$$

onde c_α é um parâmetro de escalamento determinado para cada nó \mathbf{x}_α de modo que a correspondente função ponderação seja unitária, ou seja, $\mathcal{W}_\alpha(\mathbf{x}_\alpha) = 1$.

Todavia, o simples produtório das funções de aresta como em (3.6) não é adequado para nuvens não convexas. A generalização para nuvens poligonais arbitrárias foi proposta por Duarte, Kim e Quaresma (2006) através da utilização de produtos *booleanos* (RVACHEV, 1982) para a modificação das funções de arestas associadas a um par de arestas com um vértice reentrante.

3.4.3 Funções de aresta

Uma função de aresta é definida como uma função positiva dentro da nuvem ω_α e que, juntamente com algumas k primeiras derivadas normais à aresta, se anula suavemente à medida que se aproxima da aresta. Logo, a função de aresta e todas as k primeiras derivadas são nulas sobre a correspondente aresta e fora da nuvem.

Funções polinomiais podem ser usadas como funções de aresta, ao invés de funções exponenciais, todavia com continuidade limitada (BARCELLOS; MENDONÇA; DUARTE, 2009)

Describe-se resumidamente a seguir como obter funções peso com continuidade k arbitrária. Maiores detalhes podem ser encontrados em Duarte, Kim e Quaresma (2006) e Barcellos, Mendonça e Duarte (2009). Consi-

dere um nó \mathbf{x}_α cuja nuvem é construída pelos elementos triangulares conectados a ele. A seguir, considere um ponto genérico \mathbf{x} da nuvem cuja distância $\xi_j(\mathbf{x})$ a uma aresta j é dada por

$$\xi_j(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_{\alpha,j} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b}_{\alpha,j}) \quad (3.7)$$

onde $\mathbf{n}_{\alpha,j}$ é o vetor normal unitário à aresta apontado para o interior da nuvem e $\mathbf{b}_{\alpha,j}$ é um ponto da aresta j . Define-se então uma função de aresta, $\widehat{\varepsilon}_{\alpha,j}(\xi_j(\mathbf{x}))$, associada à aresta j da nuvem ω_α

$$\widehat{\varepsilon}_{\alpha,j}(\xi_j(\mathbf{x})) = \varepsilon_{\alpha,j}(\mathbf{x}) := \begin{cases} \frac{1}{\left(\frac{1}{(\xi_j(\mathbf{x}))^\gamma}\right)} = e^{-\xi_j^{-\gamma}} & , \text{ se } \xi_j > 0, \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (3.8)$$

onde γ é uma constante positiva. A função de aresta assim definida é estritamente positiva no interior da nuvem, se anula sobre a aresta j , assim como todas as suas derivadas normais.

Muitas funções cumprem esses requisitos como polinômios e funções exponenciais, conforme adotado por Edwards (1996). Polinômios de baixa ordem podem ser efetivos como mostrado em Barcellos, Mendonça e Duarte (2009) no sentido de exigirem menor custo de integração. Deve-se salientar que para um propósito específico continuidade limitada, $k = 0, 1$ ou 2 , pode ser suficiente.

Por exemplo, na análise de placas laminadas, pode ser conveniente e interessante obter campos contínuos de derivadas das tensões para se poder estimar as tensões cisalhantes transversais com mais acurácia. Sendo assim, para modelos de placa de *Kirchhoff* e *Reddy* necessita-se continuidade $C^2(\Omega)$, no mínimo. Em (BARCELLOS; MENDONÇA; DUARTE, 2009) e (MENDONÇA; BARCELLOS; TORRES, 2013) discute-se os benefícios de tal continuidade na obtenção de tensões cisalhantes transversais e esforços cortantes em placas laminadas.

Para se reduzir a dependência da malha, um escalamento é realizado para evitar que as funções ponderação variem significativamente de nuvem para nuvem. Experimentos numéricos mostram que é importante ter funções de aresta similares para todas as arestas de uma nuvem de modo que uma dada função ponderação seja independente do número de arestas da nuvem M_α ou da distância de cada aresta até o nó da nuvem, $h_{\alpha,j}$.

O escalamento das funções de aresta pode ser equacionado controlando o comprimento dos vetores normais às arestas, de modo que todas as funções de aresta de uma dada nuvem sejam iguais sobre o nó da nuvem como apresentado em (DUARTE; KIM; QUARESMA, 2006) onde o parâmetro c_α é estabelecido, na sequência, de modo que a função peso seja unitária sobre o nó. Outra opção é apresentada em (BARCELLOS; MENDONÇA; DUARTE, 2009), onde as funções de aresta são forçadas não somente a serem iguais mas também unitárias sobre o nó. Por consequência, a função ponderação também será unitária sobre o nó, fazendo com que $c_\alpha = 0$ e portanto simplificando a expressão para a função ponderação

$$\mathcal{W}_\alpha(\mathbf{x}) := \prod_{j=1}^{M_\alpha} \varepsilon_{\alpha,j}(\xi_j) \quad (3.9)$$

O escalamento é necessário porque evita que as funções ponderação variem significativamente de um nó para outro no mesmo elemento (DUARTE; KIM; QUARESMA, 2006) (MENDONÇA; BARCELLOS; TORRES, 2011).

Para realizar um escalonamento entre as várias arestas de uma nuvem, é requerido que as funções de aresta valham um sobre o nó correspondente à nuvem. Para auxiliar, define-se a distância $h_{\alpha,j}$ da aresta j ao nó \mathbf{x}_α

$$h_{\alpha,j} := \xi_j(\mathbf{x}_\alpha) = \mathbf{n}_{\alpha,j} \cdot (\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{b}_{\alpha,j}) \quad (3.10)$$

Assim, duas restrições são impostas às funções de arestas:

- a) ser unitária no nó da nuvem: $\varepsilon_{\alpha,j}(\mathbf{x}_\alpha) = \varepsilon_{\alpha,j}(h_{\alpha,j}) = 1$,
- b) e ter a mesma taxa de decaimento β definida por

$$\beta = \frac{\varepsilon_{\alpha,j}\left(\frac{h_{\alpha,j}}{2}\right)}{\varepsilon_{\alpha,j}(h_{\alpha,j})} \quad (3.11)$$

Para satisfazer estes dois requisitos, a função de aresta é redefinida com o auxílio de dois parâmetros, A e B , como

$$\hat{\varepsilon}_{\alpha,j}(\xi_j(\mathbf{x})) = \begin{cases} Ae^{-\left(\frac{\xi_j}{B}\right)^{-\gamma}} & , \text{ se } \xi_j > 0, \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (3.12)$$

Da equação (3.11) e utilizando (3.12) obtém-se

$$\varepsilon_{\alpha,j}(h_{\alpha,j}) = \frac{1}{\beta} \varepsilon_{\alpha,j} \left(\frac{h_{\alpha,j}}{2} \right) \quad (3.13)$$

$$\left(\frac{h_{\alpha,j}}{B} \right)^{-\gamma} = \left(\frac{h_{\alpha,j}}{2B} \right)^{-\gamma} + \log_e \beta \quad (3.14)$$

Portanto, o parâmetro de escalamento B que garante que a condição expressa em (b) seja satisfeita é dado por

$$B = h_{\alpha,j} \left(\frac{\log_e \beta}{1 - 2^\gamma} \right)^{1/\gamma} \quad (3.15)$$

Com isso, exatamente sobre o nó da nuvem, \mathbf{x}_α , a função de aresta vale

$$\varepsilon_{\alpha,j}(h_{\alpha,j}) = A e^{-\left(\frac{1 - 2^\gamma}{\log_e \beta} \right)^{-1}} \quad (3.16)$$

e é constante para todas as arestas j da nuvem ω_α . Logo, impondo a primeira condição tem-se que a expressão para a função de aresta é

$$A = e^{\left(\frac{1 - 2^\gamma}{\log_e \beta} \right)^{-1}} \quad (3.17)$$

satisfazendo então as duas condições pré-estabelecidas. Finalmente, restam somente os parâmetros γ e β , que são arbitrários. No entanto, experimentos numéricos demonstram que os valores mais apropriados são $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3$, como sugerido por Duarte, Kim e Quaresma (2006) e verificados por este autor. Valores diferentes destes geram derivadas da partição da unidade com maiores oscilações próximo às arestas da nuvem.

Para ilustrar, a Figura 3.1 mostra o conjunto das funções de aresta associadas ao contorno da nuvem de um nó.

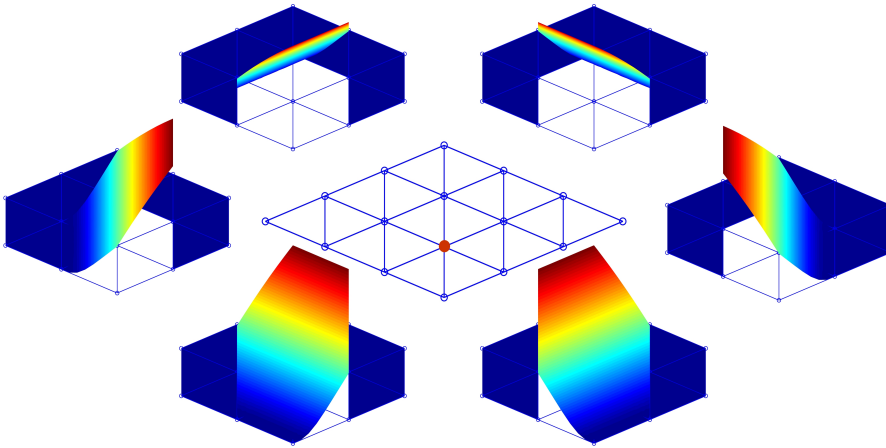


Figura 3.1: Conjunto das funções de aresta para uma nuvem convexa. A nuvem do nó vermelho é formada por seis elementos, sendo assim o contorno da nuvem composto por seis arestas. Funções exponenciais (3.12).

3.4.4 Modificação da função de aresta para um par de arestas côncavas

A função ponderação nodal \mathcal{W}_α para uma nuvem convexa é definida pelo produto das funções de aresta

$$\mathcal{W}_\alpha(\mathbf{x}) := \prod_{j=1}^{M_\alpha} \varepsilon_{\alpha,j}(\xi_j) \quad (3.18)$$

onde M_α é o número de arestas da nuvem ω_α .

No entanto, para o caso de nuvem que possua vértice côncavo, as duas funções de aresta associadas às arestas conectadas a este vértice são substituídas por uma função R de Rvachev (RVACHEV, 1982) que consiste no produto *booleano* "or" ou também chamada função *max* entre os seus argumentos. Esse produto entre duas funções, $f_1 = \varepsilon_{\alpha,j}$ e $f_2 = \varepsilon_{\alpha,j+1}$, denotado por $(f_1 \vee_0^k f_2)$, é dado pela expressão

$$(f_1 \vee_0^k f_2) := \left(f_1 + f_2 + \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \right) (f_1^2 + f_2^2)^{\frac{k}{2}} \quad (3.19)$$

Esta função é analítica em todo lugar exceto onde $f_1 = f_2$, onde é k vezes continuamente diferenciável, isto é, ela pertence a $C^k(\Omega)$ (SHAPIRO, 1991) (RVACHEV et al., 2001).

Os argumentos f_i podem também descrever lados curvos, desde que a função de aresta seja calculada não em termos de uma coordenada paramétrica ε_j mas em termos de uma função distância generalizada como descrito, por exemplo, em (BISWAS; SHAPIRO, 2004).

3.5 Enriquecimento e funções de aproximação

A base de aproximação primordial associada à discretização em discussão é então formada pela coleção de funções PU dos nós, cada qual calculada através da equação de Shepard (3.5) a partir das funções de ponderação (3.9). A Figura 3.2 mostra, respectivamente, a função ponderação e a função PU do nó considerado na Figura 3.1.

Basicamente, o MGEF propõe que um subespaço de aproximação local $\mathcal{X}_\alpha(\omega_\alpha)$ pode ser escolhido para cada nuvem ω_α de tal forma que uma ou mais funções de enriquecimento $\mathcal{L}_{\alpha i} \in \mathcal{X}_\alpha(\omega_\alpha)$ podem aproximar bem \mathbf{u} sobre parte da nuvem ω_α , $\mathbf{u}|_{\omega_\alpha}$. Nota-se, que este enriquecimento é efetuado

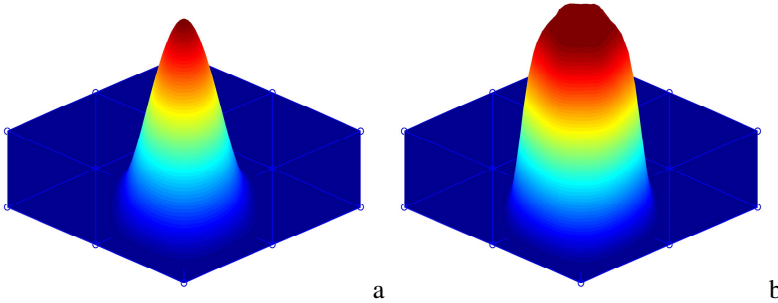


Figura 3.2: Funções associadas ao nó da nuvem da Figura 3.1: (a) função ponderação e (b) função PU.

sem o comprometimento da continuidade visto que $\mathcal{L}_{\alpha i}$ é multiplicado pela PU do nó α , que tem suporte compacto em ω_α .

Aqui, faz-se referência a uma função vetorial $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ que fisicamente consiste do campo de deslocamentos do corpo, de modo que $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \{u_x(\mathbf{x}), u_y(\mathbf{x})\}^T$, como será definido no Capítulo 4. Todavia, o raciocínio vale para qualquer função, não necessariamente um campo de deslocamentos.

Assim, as funções PU podem ser enriquecidas multiplicando qualquer uma delas por um conjunto de funções de enriquecimento, $\{\mathcal{L}_{\alpha i}\}_{i \in \mathcal{J}(\alpha)}$, onde $\mathcal{J}(\alpha)$, $\alpha = 1, \dots, N$, é um conjunto de índices associados à funções de enriquecimento, por exemplo, polinômios, funções harmônicas generalizadas, funções trigonométricas, funções camada limite, soluções particulares de problemas similares, solução singular para o problema específico em análise, e funções anisotrópicas, funções degrau (*Heaviside*), dentre outras possibilidades. As funções de enriquecimento nada mais são que funções a serem extendidas através da operação de extensão conforme descrito na seção 3.1.

Portanto, os subespaços de aproximação local, denotados como $\chi_\alpha(\omega_\alpha) = span\{\mathcal{L}_{\alpha i}\}_{i \in \mathcal{J}(\alpha)}$, podem também ser enriquecidos através de um procedimento adaptativo.

Neste estudo, com o propósito de representar a descontinuidade do campo de deslocamentos e a singularidade do campo de deformações (e tensões) no problema de abertura de uma trinca, o seguinte conjunto de funções, designado por $\mathcal{L}_{\alpha l}^s$, é aplicado

$$\mathcal{L}_{\alpha_j}^s(r, \theta) = \left\{ \begin{aligned} &\sqrt{r} \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right), \sqrt{r} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right), \\ &\sqrt{r} \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \operatorname{sen}(\theta), \sqrt{r} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \operatorname{sen}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

como sugerido por Belytschko e Black (1999) e comumente usado na literatura. As coordenadas polares r e θ são relacionadas a um sistema local de coordenadas posicionado na ponta da trinca. Deve-se notar que o termo \sqrt{r} estará presente no campo de deslocamentos aproximado e, conseqüentemente, a singularidade $1/\sqrt{r}$ irá aparecer na solução do campo de deformações.

Além disso, no presente estudo, exemplos numéricos considerando somente trincas retas são apresentados de tal modo que a função degrau não é necessária. Desta forma, a descontinuidade será representada pela função de enriquecimento $\mathcal{L}_{\alpha_1}^s = \sqrt{r} \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right)$, como será discutido na Seção 4.4.

Adicionalmente, o refinamento p será aplicado para melhorar a aproximação, tanto uniformemente em todo o domínio quanto localmente. Outra razão para isso é obter melhores representações das condições de contorno impostas.

Sabidamente, um requisito compulsório que as funções de aproximação devem satisfazer é a condição de reproducibilidade de grau 0, ou seja, a capacidade de representar uma função constante, que em se tratando da elasticidade consiste em um deslocamento de corpo rígido. Claramente, as funções PU, definidas por (3.5) satisfazem este requisito pois

$$\sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) = 1 \quad (3.21)$$

no entanto, a condição de reproducibilidade de grau 1, um requisito que deve ser preferencialmente satisfeito (mas não compulsório (LIU, 2003)), expressa por

$$\sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) x_{\alpha} = x \quad (3.22)$$

que diz respeito à capacidade das funções representarem uma função linear globalmente, não é satisfeita pela PU de Shepard. Esta é uma forte razão para se adicionar refinamento p , como definido na seqüência. Salienta-se que o MGEF baseado em PU convencionais de elementos finitos, como por exem-

plo, as funções lagrangeanas bilineares, não compartilham desta limitação, estas são capazes de representar funções lineares e, ainda, cuja derivada é perfeitamente constante.

Assim, seja $\mathcal{L}_{\alpha i}^p$ o conjunto de funções de enriquecimento do nó α que pode gerar o subespaço das funções polinomiais de grau até p . Por exemplo, para $p = 2$, o conjunto de funções de enriquecimento é

$$\mathcal{L}_{\alpha i}^2(x, y) = \left\{ \bar{x}, \bar{y}, \bar{x}^2, \bar{x}\bar{y}, \bar{y}^2 \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, 5 \quad (3.23)$$

em que uma translação e um escalamento são executados tentando-se minimizar a dependência da malha. A primeira função de enriquecimento de (3.23), por exemplo, é dada pela coordenada intrínseca \bar{x} (DUARTE; BABUŠKA; ODEN, 2000) tal que $\bar{x} := (x - x_\alpha) / h_\alpha$, com x_α usado para transladar a função e o comprimento característico da nuvem h_α , considerado como a maior distância medida do nó \mathbf{x}_α a cada uma das arestas de sua nuvem, usado para o escalamento.

A operação de escalamento do enriquecimento serve para se efetuar uma equiparação dimensional entre elementos grandes e pequenos. A translação contribui para não haver influência com relação à distância entre os elementos e à origem dos eixos coordenadas globais. Percebe-se então que para a base de funções ser capaz de representar uma deformação normal constante, em elasticidade, é necessário acrescentar funções de enriquecimento de grau polinomial $p = 1$, ou seja, usar no mínimo $\mathcal{L}_\alpha^1(x, y)$. Outro exemplo, na modelagem de placas finas (hipótese cinemática de Kirchhoff), com o propósito de conseguir representar um campo de curvatura constante, é necessário usar no mínimo $\mathcal{L}_\alpha^2(x, y)$, como em (3.23) (BARCELLOS; MENDONÇA; DUARTE, 2009).

Conseqüentemente, a família \mathcal{F}_N de funções das nuvem é composta pela união entre as funções partição da unidade e as funções enriquecidas como

$$\mathcal{F}_N = \left\{ \left\{ \varphi_\alpha \right\}_{\alpha=1}^N \cup \left\{ \varphi_\alpha \mathcal{L}_{\alpha i}^p \right\}_{\alpha=1}^N \cup \left\{ \varphi_\alpha \mathcal{L}_{\alpha j}^s \right\}_{\alpha=1}^N \mid i \in \mathcal{J}^p(\alpha), l \in \mathcal{J}^s(\alpha) \right\} \quad (3.24)$$

onde φ_α são funções PU, e $\mathcal{L}_{\alpha i}^p$ e $\mathcal{L}_{\alpha l}^s$ são as funções de enriquecimento, todas relacionadas ao nó α , e \mathcal{J}^p e \mathcal{J}^s são conjuntos de índices que fazem referência à quantidade de funções polinomiais de enriquecimento e funções de frente de trinca associadas a cada nó.

Esta família de funções é usada para construir a aproximação, por exemplo, para a componente x de deslocamento, $\tilde{u}_x(\mathbf{x})$, como a seguir

$$\tilde{u}_x(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) \left\{ u_{\alpha} + \sum_{i=1}^{q_{\alpha}^p} \mathcal{L}_{\alpha i}^p(\mathbf{x}) b_{\alpha i} + \sum_{l=1}^{q_{\alpha}^s} \mathcal{L}_{\alpha l}^s b_{\alpha l}^s(\mathbf{x}) \right\} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \mathbf{U} \quad (3.25)$$

na qual u_{α} , $b_{\alpha i}$ e $b_{\alpha l}$ são parâmetros nodais associados às funções PU $\varphi_{\alpha}(\mathbf{x})$, e às funções enriquecidas, $\varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) \mathcal{L}_{\alpha i}^p(\mathbf{x})$ e $\varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) \mathcal{L}_{\alpha l}^s(\mathbf{x})$ respectivamente, com q_{α}^p e q_{α}^s , $q_{\alpha}^s = 0$ ou 4, sendo o número de funções de enriquecimento polinomial e funções de enriquecimento de frente de trinca de cada nó, respectivamente. O indicador da quantidade de funções de enriquecimento q_{α}^s vale 4 quando o nó recebe funções de frente de trinca (3.20) e vale 0 caso contrário.

Para a notação matricial expressa em (3.25), \mathbf{U} é um arranjo de coeficientes nodais e $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ é um arranjo formado por funções de aproximação.

Então, a partir de (3.25), nota-se que o subespaço de aproximação gerado pelo MGEF pode ser expresso como

$$\mathcal{V}^{MGEF} := \sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha} \chi_{\alpha}, \quad \text{with } \chi_{\alpha} := \mathcal{P}_{\alpha}^b + \Xi_{\alpha} \quad (3.26)$$

onde $\mathcal{P}_{\alpha}^b = \text{span}\{\mathcal{L}_{\alpha i}^p\}$ diz respeito ao subespaço de polinômios de grau $b \leq p$ e $\Xi_{\alpha} = \text{span}\{\mathcal{L}_{\alpha l}^s\}$ é um subespaço (local) de enriquecimento dependente do problema.

Portanto, tem-se estabelecido um procedimento de construção de subespaços de aproximação que pode ser melhorado pela adição de enriquecimentos. Este processo de enriquecimento é denominado enriquecimento extrínseco uma vez que atribui mais incógnitas aos nós e sem alterar a PU. Subespaços como os expressos em (3.26) serão utilizados para a aproximação do problema descrito no próximo capítulo.

4 PROBLEMA MODELO

Neste trabalho, são analisados problemas planos de elasticidade com presença de singularidade nos campos de deformações e tensões. Assim, as equações governantes em forma forte e a correspondente formulação variacional serão apresentadas neste capítulo. O problema que será utilizado para o propósito de comparação de desempenho é descrito e comenta-se a estratégia de análise adotada. As aproximações $C^0(\Omega)$ e $C^\infty(\Omega)$ são comparadas mediante medidas globais e procura-se identificar a dependência com relação ao padrão de enriquecimento.

4.1 Definições

Inicialmente, fazem-se oportunas as seguintes definições, de acordo com Oden e Reddy (1976) e Kreyszig (1989). Seja p um inteiro positivo e S uma região aberta em \mathbb{R}^d , d sendo a dimensão espacial, que pode ser o domínio todo ou um sub-domínio ou porção do contorno.

O espaço $\mathcal{L}^p(S)$ consiste de uma classe de funções \mathbf{u} definidas sobre S cujos valores absolutos possuem a p -ésima potência integrável segundo Lebesgue sobre S , ou seja, $\mathbf{u} \in \mathcal{L}^p(S)$ se \mathbf{u} é mensurável e se

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}^p(S)} = \left(\int_S |\mathbf{u}|^p d\Omega \right)^{\frac{1}{p}} \leq \infty \quad (4.1)$$

medida esta que é denominada norma $\mathcal{L}^p(S)$.

O espaço $\mathcal{L}^p(S)$ é um espaço normado linear completo, ou seja, um espaço de Banach¹ dotado da norma definida em (4.1).

Uma classe de funções de interesse está contida no espaço $\mathcal{L}^2(S)$, que é munido do produto interno

$$(f, g)_{\mathcal{L}^2(S)} = \int_S f(x)g(x) d\Omega \quad (4.2)$$

sendo

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2(S)} = \sqrt{(f, f)_{\mathcal{L}^2(S)}} \quad (4.3)$$

¹Espaço de Banach é um espaço vetorial X normado e completo com relação a sua norma. Num espaço de Banach, toda sequência de Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ converge a um termo do próprio espaço (LUENBERGER, 1969).

a norma correspondente.

Se esta definição é expandida, considerando também que as funções assim classificadas também possuam todas as derivadas parciais fracas² (ou distributivas) até uma ordem m também em $\mathcal{L}^p(S)$, então tem-se um espaço de Sobolev

$$\mathcal{S}_p^m(S) = \left\{ \mathbf{u} : D^k \mathbf{u} \in \mathcal{L}^p(S); \forall k \text{ tal que } |k| \leq m \right\} \quad (4.4)$$

e para cada $\mathbf{u} \in \mathcal{S}_p^m(S)$ introduz-se a norma

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{S}_p^m(S)} = \left(\int_S \sum_{|k| \leq m} |D^k \mathbf{u}|^p dS \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|k| \leq m} \|D^k \mathbf{u}\|_{\mathcal{L}^p(S)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.5)$$

Os espaços de Sobolev são, por consequência imediata da sua definição, os espaços naturais de soluções de equações diferenciais parciais.

Uma outra classe especial congrega as funções utilizadas em formulações variacionais de operadores de elasticidade, por exemplo, que envolvem o produto de derivadas. Assim, denota-se por $\mathcal{H}^m(S)$, um espaço de Hilbert de ordem m , o espaço de Sobolev de funções em $\mathcal{L}^2(S)$ e cujas derivadas distributivas de ordem $k \leq m$ também pertençam à $\mathcal{L}^2(S)$.

Com estas definições em mãos, pode-se estabelecer o equacionamento, como apresentado a seguir.

4.2 Problema modelo em elasticidade linear

Na mecânica dos corpos deformáveis, tem-se como propósito determinar a configuração final de um sólido sujeito a um carregamento externo tendo conhecida a forma inicial do referido corpo e suas restrições de deslocamento. O processo de deformação é dito elástico se toda a energia envolvida no sistema for armazenada a ponto de o corpo recuperar sua forma original, a partir da configuração deformada, se forem retiradas as forças que lhe são aplicadas. A linearidade, por sua vez, diz respeito à relação linear (pontual)

²Uma função $w_i(\mathbf{x})$, para $i \in \{1, \dots, d\}$, com d igual à dimensão espacial do problema, é a i -ésima derivada parcial fraca de uma função $v(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ se existir a igualdade $\int_{\Omega} v(\mathbf{x}) \partial \varphi(\mathbf{x}) / \partial x_i d\Omega = - \int_{\Omega} w_i(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\Omega$ para qualquer função teste $\varphi(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$ (ODEN; REDDY, 1976). Geralmente, derivadas fracas são distribuições, ou seja, funcionais lineares no espaço de funções teste suaves com suporte compacto. Assim, duas funções iguais em quase todo lugar definem a mesma distribuição e portanto geram a mesma derivada fraca.

entre as variáveis de estado tensão e deformação. A discussão que segue se restringe a problemas bidimensionais e pode representar os estados *plano de deformações* ou *plano de tensões*. Primeiramente, será apresentada brevemente a formulação forte do problema, expressa pela equação diferencial parcial e pelas condições de contorno.

4.2.1 Formulação forte

Supõe-se que o fenômeno em observação seja contido em Ω , um domínio aberto e limitado em \mathbb{R}^2 , com contorno seccionalmente regular, poliédrico e Lipschitz³ contínuo $\Gamma = \partial\Omega$. Então, a região $\bar{\Omega}$ definida pelo domínio e seu fechamento é ocupada por um corpo de material elástico linear que, na situação de equilíbrio estático, satisfaz as equações de equilíbrio de momento linearmente no interior do corpo (*equações de equilíbrio de Cauchy*),

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad \text{em } \Omega \quad (4.6)$$

para um campo de deslocamentos \mathbf{u} , estando o corpo sujeito a ação de forças de corpo \mathbf{b} suficientemente suaves, isto é, $\mathbf{b} \in \mathcal{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$. Salienta-se que em todo o texto será empregada a notação matricial, exceto quando indicado. Esta opção se deve ao fato de que a notação matricial é bastante similar à definição dos arranjos da implementação computacional.

Assim sendo, o operador diferencial em (4.6) pode ser expresso como

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

e os campos envolvidos expressos como

$$\bullet \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T \text{ é o vetor das componentes de tensões;}$$

³Diz-se que um contorno é Lipschitz contínuo quando o mesmo pode ser localmente representado por uma função que satisfaça a condição de Lipschitz que estabelece, para dois espaços métricos X e Y , cada qual com sua métrica, M_X e M_Y , que uma função $f: X \rightarrow Y$, é Lipschitz contínua se existe uma constante real $C \geq 0$ tal que, para quaisquer x_1 e $x_2 \in X$, $M_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq CM_X(x_1, x_2)$. A interpretação gráfica sugere que em todo ponto do contorno um duplo cone possa ser definido sem que parte do contorno o intersepte.

- $\mathbf{u} = \{u_x, u_y\}^T$ é o vetor das componentes da função deslocamento; e
- $\mathbf{b} = \{b_x, b_y\}^T$ é o vetor das componentes de força de corpo.

considerando estado plano de tensões/deformações.

As tensões de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ relacionam-se ao deslocamento \mathbf{u} pela relação constitutiva elástica linear $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$, sendo as deformações de Green-Lagrange $\boldsymbol{\varepsilon}$ relacionadas ao deslocamento pela relação cinemática linearizada, $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$. Aqui, \mathbb{C} é a matriz de coeficientes elásticos, $\mathbb{C} \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})$, cujas componentes, C_{ij} , $i, j = 1, \dots, 3$, $\in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ podem ser escritas em termos das constantes de engenharia E e ν , que é suposta satisfazer as condições de simetria e elipticidade uniforme⁴.

Além disso, os campos de deslocamentos e tensões são sujeitos às condições de contorno $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ sobre Γ_D e $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}$ sobre Γ_N , sendo $\bar{\mathbf{t}}$ forças de superfície, também suficientemente suaves, isto é, $\bar{\mathbf{t}} \in \mathcal{L}^2(\Gamma_N; \mathbb{R}^2)$, e \mathbf{n} é o vetor unitário normal ao contorno $\partial\Omega$, direcionado para o exterior do domínio, tal que $\mathbf{n} \in \mathcal{L}^\infty(\partial\Omega; \mathbb{R}^2)$. Os segmentos do contorno Γ_D e Γ_N são disjuntos, tais que $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ e $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, onde Γ_D e Γ_N são, respectivamente, as partes do contorno em que as condições de contorno de Dirichlet e Neumann são especificadas. Ressalta-se que os valores no contorno são entendidos no sentido do traço⁵ de funções em $\mathcal{H}^1(\Omega)$.

Então, para completar a definição do conjunto das variáveis envolvidas, tem-se

- $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$ é o vetor das componentes de deformações lineares e é obtido pela parte simétrica do operador gradiente sobre \mathbf{u} ;
- $\bar{\mathbf{t}} = \{\bar{t}_x, \bar{t}_y\}^T$ é o vetor de componentes de tensões no contorno de Neumann; e
- $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}$ são as componentes do vetor normal ao contorno.

⁴A condição de elipticidade uniforme de \mathbb{C} estabelece que deve existir uma constante $C > 0$ tal que $\sum_{i,j=1}^3 C_{ij}(\mathbf{x}) \varepsilon_i \varepsilon_j \geq C |\boldsymbol{\varepsilon}|^2$ para todo $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^3$ e para qualquer $\mathbf{x} \in \Omega$. A elipticidade requer que os coeficientes das derivadas de mais alta ordem do operador diferencial sejam positivos e por consequência a matriz simétrica \mathbb{C} é positiva definida (EVANS, 2010) (ODEN; REDDY, 1976).

⁵O conceito de traço se faz necessário pelo fato de que para funções somente mensuráveis, de que tratam as definições dos espaços de Lebesgue, Sobolev e Hilbert, não se pode tratar seus valores pontualmente mas sim os valores em quase todo lugar em Ω . Como o contorno $\partial\Omega$ tem medida nula, uma aplicação traço tr é então definida como $v \rightarrow tr(v) = v|_{\partial\Omega}$, aplicação esta que se prolonga por continuidade a uma aplicação linear contínua de $\mathcal{H}^1(\Omega)$ em $\mathcal{L}^2(\partial\Omega)$, visto que $\mathcal{H}^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{L}^2(\partial\Omega) \cap C(\bar{\partial\Omega})$ (ODEN; REDDY, 1976).

O problema de valor no contorno expresso por (4.6) juntamente com as condições de contorno consiste na *formulação forte* do problema de elasticidade.

4.2.2 Formulação fraca

Por outro lado, procurando estabelecer um equilíbrio global, no sentido de que as forças internas se equilibram com as forças externas aplicadas não mais pontualmente, como em (4.6), define-se uma *forma fraca*, variacional, onde a solução pode ser procurada num espaço de funções menos restritas, no sentido de sua regularidade, como $\mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, o espaço de Hilbert de ordem 1, que envolve as funções que, juntamente com suas primeiras derivadas, são quadraticamente integráveis no sentido de Lebesgue.

A motivação para tal modificação da formulação se deve ao fato de que soluções exatas, no sentido de satisfação pontual da forma forte (4.6), podem ser obtidas somente em condições muito restritivas, quer seja pela simplicidade da geometria do domínio quanto pelo carregamento. Tal tarefa é geralmente inviável.

A forma variacional contínua associada ao problema de elasticidade consiste em: *encontrar o campo de deslocamentos $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, sendo $\mathcal{U} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^2); \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ sobre $\Gamma_D\}$ o conjunto de funções cinematicamente admissíveis⁶, tal que*

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathcal{L}(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (4.8)$$

sendo $\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^2); \mathbf{v} = \mathbf{0}$ sobre $\Gamma_D\}$ o espaço das variações admissíveis (diferença entre quaisquer duas funções cinematicamente admissíveis). O espaço \mathcal{V} é um espaço intermediário entre $\mathcal{H}^1(\Omega)$ e $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ visto que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ somente em parte de $\partial\Omega$. Salienta-se que as condições de Dirichlet sobre cada componente de \mathbf{u} podem não ser coincidentes.

Vale salientar que \mathcal{U} nem sempre é um espaço, visto que se existir condição de contorno de Dirichlet não homogênea a função zero não é cinematicamente admissível e portanto tem-se violada a definição de espaço pelo fato de a função zero não pertencer ao conjunto.

Na equação variacional de equilíbrio (4.8) o operador $\mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ definido como

⁶As funções cinematicamente admissíveis satisfazem condições de contorno de Dirichlet e são suficientemente suaves para que (4.6) tenha significado físico.

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) l_z dx dy \quad (4.9)$$

é uma forma bilinear sobre $\mathcal{U}(\Omega) \times \mathcal{V}(\Omega)$ pois $u \rightarrow \mathcal{B}(u, v)$ é uma forma linear de \mathcal{U} em \mathbb{R} para todo $v \in \mathcal{V}$ e $v \rightarrow \mathcal{B}(u, v)$ é uma forma linear de \mathcal{V} em \mathbb{R} para todo $u \in \mathcal{U}$.

A forma bilinear é contínua pois existe uma constante $C_1 > 0$ e independente de \mathbf{u} e \mathbf{v} tal que,

$$|\mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq C_1 \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{V}} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}(\Omega) \times \mathcal{V}(\Omega) \quad (4.10)$$

pela desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Além disso, $\mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ é coerciva (ou elíptica), em virtude da elipticidade de \mathbb{C} e usando a desigualdade de Poincaré, de modo que existe outra constante $C_2 > 0$, tal que

$$\mathcal{B}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq C_2 \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}}^2, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (4.11)$$

independentemente de \mathbf{v} .

A forma bilinear $\mathcal{B}(\bullet, \bullet)$ é simétrica, como consequência da bilinearidade, positiva definida sobre $\mathcal{V}(\Omega) \times \mathcal{V}(\Omega)$ devido à coercividade, e admite uma única solução, que depende continuamente da forma linear, como assegurado pelo Teorema de Lax-Milgram (ODEN; REDDY, 1976). Adicionalmente, a forma bilinear induz a norma

$$\|\bullet\|_E = \sqrt{\mathcal{B}(\bullet, \bullet)} \quad (4.12)$$

também chamada norma energia, que é de grande aplicação em elasticidade pelo fato de estar diretamente relacionada à energia envolvida no processo de deformação (SZABÓ; BABUŠKA, 2011). Por sua vez, a energia de deformação do sistema U é definida como

$$U(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|_E^2 \quad (4.13)$$

grandeza esta que será utilizada nas avaliações numéricas.

Por outro lado, o operador $\mathcal{L}(\mathbf{v})$ é definido como

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}) = \int \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{b} l_z dx dy + \int_{\Gamma_N} \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{t}} l_z ds \quad (4.14)$$

onde se percebe, pela parcela integrada no contorno Γ_N , que a condição de contorno de Neumann é imposta variacionalmente, enquanto a condição de contorno de Dirichlet é imposta na definição do espaço \mathcal{U} . O operador (4.14) pode ainda ser expresso como

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{b} l_z dx dy + \langle \bar{\mathbf{t}}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma_N), \mathcal{H}^{1/2}(\Gamma_N)} \quad (4.15)$$

utilizando-se o produto de dualidade, no qual $\mathbf{v}|_{\Gamma_N} \in \mathcal{H}^{1/2}(\Gamma_N)$ é entendido como o traço de $\mathbf{v} \in \mathcal{V} \subset \mathcal{H}^1(\Omega)$. Torna-se necessário introduzir a definição do espaço de *Hilbert de ordem fracionária* pois a aplicação traço $\mathcal{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^2(\partial\Omega)$ não é injetiva nem sobrejetiva⁷. Assim, o espaço definido como

$$\mathcal{H}^{1/2}(\partial\Omega) = \{g \in \mathcal{L}^2(\partial\Omega) : \exists v \in \mathcal{H}^1(\Omega) \text{ tal que } g = v|_{\partial\Omega}\} \quad (4.16)$$

e munido da norma

$$\|g\|_{\mathcal{H}^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf_{\substack{v \in \mathcal{H}^1(\Omega) \\ v|_{\partial\Omega} = g}} \|v\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \quad (4.17)$$

faz com que a aplicação $tr : \mathcal{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ seja linear e contínua visto que

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf_{\substack{u \in \mathcal{H}^1(\Omega) \\ v|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega}}} \|v\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \quad (4.18)$$

Além disso, existe um operador prolongamento $pr : \mathcal{H}^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{H}^1(\Omega)$ linear, contínuo e injetivo, de modo que $tr(pr(g)) = g$, $\forall g \in \mathcal{H}^{1/2}(\partial\Omega)$. Finalmente, $\mathcal{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ é denso em $\mathcal{L}^2(\partial\Omega)$ (ODEN; REDDY, 1976).

Por sua vez, $\mathcal{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$ é o dual topológico de $\mathcal{H}^{1/2}(\partial\Omega)$, por definição. Logo, o operador $\mathcal{L}(\bullet)$, elemento do espaço dual $\mathcal{V}^*(\Omega)$, sendo a soma de um operador linear contínuo de $\mathcal{L}^2(\Omega)$ (pela desigualdade

⁷A aplicação traço $tr : \mathcal{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^2(\partial\Omega)$ não é injetiva pelo fato de que diferentes funções $f_1(\mathbf{x})$ e $f_2(\mathbf{x}) \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ podem ser tais que $f_1|_{\partial\Omega} = f_2|_{\partial\Omega}$. Ainda, diz-se que a aplicação traço não é sobrejetiva pelo fato de que nem todas as funções $g \in \mathcal{L}^2(\partial\Omega)$ (contradomínio) estão no conjunto imagem da aplicação. A definição do espaço fracionário munido da norma (4.17) supera estes obstáculos.

de Cauchy-Schwarz) com um produto de dualidade entre $\mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma_N)$ e $\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma_N)$, que é contínuo pela continuidade do operador traço, é linear visto que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|\mathcal{L}(\mathbf{v})| \leq C \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (4.19)$$

As variáveis envolvidas em (4.9) e (4.14) que não foram definidas na forma de arranjos na Subseção 4.2.1 são:

- $\mathbf{v} = \{v_x, v_y\}^T$ é o vetor das componentes da função variação admissível;
- l_z é a dimensão do corpo elástico na direção de z (espessura) suposto como constante por simplificação.

O requisito de que as funções \mathbf{u} e $\mathbf{v} \in \mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ é a condição mínima para que os termos de (4.8) possam ser calculados.

Muito embora simplificações já tenham sido consideradas, a solução do problema (4.8) está contida num espaço de dimensão infinita. Assim, com o objetivo de se obter aproximações da solução exata da forma variacional, propõe-se discretizações no sentido de buscar por uma solução num espaço menor, formado por uma base, construída por métodos como o de elementos finitos, por exemplo. A partir deste ponto, a metodologia para se construir uma base para o subespaço de aproximação pode ser baseada em malha ou livre de malha.

4.3 Formulação discretizada

Para ilustrar, no Método Generalizado de Elementos Finitos (MGEF), que é objeto de estudo do presente trabalho, propõe-se uma aproximação de Galerkin \mathbf{u}_p de grau polinomial p , associada a uma base formada por funções PU e funções de enriquecimento, a família de funções \mathcal{F}_N (3.24), conforme apresentado no Capítulo 3, expressa por

$$\mathbf{u}_p(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N \widehat{\varphi}_\alpha \left\{ \left\{ \begin{array}{c} u_{x\alpha} \\ u_{y\alpha} \end{array} \right\} + \sum_{i=1}^{q_\alpha} \widehat{\mathcal{L}}_{\alpha i} \left\{ \begin{array}{c} b_{\alpha i} \\ d_{\alpha i} \end{array} \right\} \right\} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{U} \quad (4.20)$$

com $u_{x\alpha}$ e $u_{y\alpha}$ sendo os coeficientes nodais generalizados associados à partição da unidade, $\widehat{\varphi}_\alpha$, enquanto $b_{\alpha i}$ e $d_{\alpha i}$ são os coeficientes nodais generalizados associados às funções de enriquecimento, $\widehat{\mathcal{L}}_{\alpha i}$, e $q_\alpha = q_\alpha^p + q_\alpha^s$ é o número de funções de enriquecimento de cada nó, como definido em (3.25).

Os arranjos de funções são definidos como

$$\widehat{\varphi}_\alpha = \begin{bmatrix} \varphi_\alpha(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \varphi_\alpha(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\alpha i} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\alpha i}(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{\alpha i}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Desta feita, o problema de valor no contorno discretizado consiste em: *encontrar o campo de deslocamentos $\mathbf{u}_p \in \mathcal{U}_h$ tal que*

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}_p, \mathbf{v}_p) = \mathcal{L}(\mathbf{v}_p) \quad \forall \mathbf{v}_p \in \mathcal{V}_h \quad (4.23)$$

onde $\mathbf{u}_p \in \mathcal{U}_h \subset \mathcal{H}^1$ e $\mathbf{v}_p \in \mathcal{V}_h \subset \mathcal{H}^1$, sendo que $\mathcal{U}_h = \text{span } \mathcal{F}_N^{k,p}$, conduzindo à forma discreta $\mathcal{B}(\Phi^T \mathbf{U}, \Phi^T \mathbf{V}) = \mathcal{L}(\Phi^T \mathbf{V})$, com $\Phi^T \mathbf{U} \in \mathcal{U}_h$ e $\Phi^T \mathbf{V} \in \mathcal{V}_h$.

4.4 Avaliações numéricas

O problema clássico de um painel fraturado, para o qual se dispõe de solução analítica (WESTERGAARD, 1939) e (ANDERSON, 2005), foi analisado para se investigar a influência da continuidade na aproximação do campo de tensões singular com o emprego de enriquecimento.

Os dados geométricos e propriedades materiais são listados abaixo:

- coeficiente de Poisson: $\nu = 0,3$
- módulo de elasticidade: $E = 1,0$
- dimensão do domínio: $a = 60,0$
- espessura constante e unitária: $l_z = 1,0$

Logo, o domínio é $\overline{\Omega} = [0, 2a] \times [0, 2a]$ e a trinca é definida como $\Gamma_T = [0, a] \times \{a\}$.

As condições de contorno aplicadas são as restrições de deslocamento necessárias para se evitar movimentos de corpo rígido e forças de superfície calculadas através das componentes de tensões dadas pela solução analítica. Logo:

- condições de contorno de Dirichlet: $u_x(a, a) = 0$, $u_y(a, a) = 0$, $u_y(2a, a) = 0$; e

- condições de contorno de Neumann: forças de superfície em todo o contorno, exceto nas faces da trinca, segundo as componentes de tensão dadas pela solução analítica (4.24).

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\
 &\quad - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\
 \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\
 &\quad + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\
 \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\
 &\quad + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

sendo a origem do sistema de coordenadas polares posicionada na ponta da trinca, com $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Para o Modo I (puro) de abertura da trinca, foi considerado $K_I = 1,0$ e $K_{II} = 0,0$. A energia de deformação exata para este problema é dada por $U(\mathbf{u}_{EX}) = 2,9790427(A_1)^2 a l_z/E$, com $A_1 = K_I/\sqrt{2\pi}$, (SZABÓ, 1986) e (DUARTE, 1991).

4.4.1 Discretização e padrão de enriquecimento

As funções de enriquecimento utilizadas para se representar a descontinuidade e a singularidade características de um problemas de abertura de trinca, a função degrau (*Heaviside*) e as bases da solução assintótica (3.20) (BELYTSCHKO; BLACK, 1999), respectivamente, eram comumente aplicadas aos nós localizados numa faixa estreita ao longo da trinca. Esta estratégia, referida como enriquecimento **topológico** por Béchet et al. (2005) e Laborde et al. (2005), foi adotada na maioria das primeiras investigações, como por exemplo, Moës, Dolbow e Belytschko (1999) e Belytschko, Moës e Usui

(2001).

Num primeiro instante, poder-se-ia esperar que, devido ao fato de se usar funções de enriquecimento para representar a singularidade, restaria somente a parcela regular da solução para ser aproximada. Assim, sob certas condições, julgar-se-ia possível alcançar taxas de convergências ótimas verificadas na aproximação de soluções suaves para o MEF convencional.

Em processos de refinamento de malha com redução de elementos (refinamento h), no entanto, observou-se que a taxa de convergência obtida para a norma em energia, com as discretizações enriquecidas com o padrão topológico, é similar à alcançada em modelagens por MEF convencional, com malhas adaptadas à geometria da trinca. Isto se deve à redução da dimensão do suporte das funções enriquecidas à medida que se procede o refinamento h . A manutenção da taxa de convergência mesmo utilizando o enriquecimento foi relatada por Stazi et al. (2003), Béchet et al. (2005) e Laborde et al. (2005).

Uma primeira proposta de modificação é relativa à partição da unidade usada para se localizar a função degrau, utilizada para a representação da descontinuidade, aplicada aos nós ao longo da trinca. A correspondente partição da unidade utilizada para a localização da função degrau deve ter o mesmo grau da partição usada para a aproximação do campo de deslocamento, quando usando funções de forma convencionais do MEF como partição da unidade, de modo que o deslocamento seja apropriadamente aproximado ao longo da trinca Stazi et al. (2003).

Uma série de aspectos relacionados às discretizações enriquecidas foram evidenciados por Laborde et al. (2005). A forma como se distribui o enriquecimento, o efeito deste enriquecimento sobre o número de condicionamento da matriz de rigidez e a influência da transição, entre a porção do domínio enriquecida e não enriquecida, são fatores condicionantes do desempenho da discretização.

Deste modo, uma segunda melhoria é relacionada às funções de enriquecimento utilizadas para reproduzir a solução assintótica na frente da trinca. Uma alternativa encontrada para se melhorar a taxa de convergência é empregar uma região de enriquecimento, ao redor da frente da trinca, com dimensão constante, independentemente do tamanho dos elementos. Este padrão de enriquecimento independente do parâmetro h é designado como **geométrico** (LABORDE et al., 2005).

Porém, uma consequência imediata é o aumento da quantidade de graus de liberdade do modelo. Adicionalmente, pode-se obter sistemas de equações lineares mal-condicionados dependendo das funções utilizadas e, dentre outras razões, da forma de compatibilização do enriquecimento com a

PU. Está última, pode demandar algum tratamento na transição entre porção enriquecida e não enriquecida (LABORDE et al., 2005), fenômeno que foi também investigado por Chessa e Belytschko (2003).

Assim, a partir destas constatações, optou-se pela seguinte estratégia de análise. Para a discretização do domínio foram utilizadas quatro diferentes malhas regulares, conforme mostrado na Figura 4.1, de modo que ocorrem somente nuvens convexas e portanto partições da unidade com continuidade $C^\infty(\Omega)$ em todo o domínio.

Optou-se também por fazer a trinca abrir sobre uma linha de arestas interelementares. Uma vez que se pretende fazer uma comparação entre o desempenho do enriquecimento aplicado sobre PU $C^0(\Omega)$ convencional e PU $C^\infty(\Omega)$, julga-se ser mais conveniente para PU convencional (função tenda) fazer a descontinuidade ocorrer sobre arestas. Além disso, evita-se complicações com o particionamento, em sub-células de integração, de elementos seccionados pela trinca, como executado em Laborde et al. (2005), por exemplo.

Adicionalmente, não foi aplicado o refino geométrico da malha de elementos como discutido em Szabó, Duster e Rank (2004) e Szabó e Babuška (2011), por exemplo. Busca-se assim isolar o efeito da continuidade e do refino polinomial.

Num primeiro momento, aplicou-se o enriquecimento com funções de frente de trinca (3.20) seguindo um padrão geométrico, não vinculado à malha. Para isso, foram considerados dois círculos com raios diferentes, $R1 = 45,0$ (azul) e $R2 = 30,0$ (vermelho), como se pode ver na Figura 4.1. Assim, todos os nós no interior dos círculos, em cada caso, são enriquecidos. Pretende-se verificar a dependência com relação à redução da região enriquecida.

Os nós ao longo da abertura da trinca (nós marcados na cor verde, Figura 4.1) também foram enriquecidos com as mesmas funções usadas na frente da trinca, diferentemente do procedimento convencional, no qual a função degrau generalizada é usada como enriquecimento dos nós ao longo da trinca (distantes da singularidade). Muito embora gerando mais graus de liberdade, optou-se por fazer representar toda a trinca com um único conjunto de funções (3.20), tentando minimizar efeitos de transição. Logo, a função $\mathcal{L}_{\alpha 1}^s$ de (3.20) é a única responsável por representar a abertura da trinca.

O refinamento p , através da adição de funções de enriquecimento polinomiais $\mathcal{L}_{\alpha i}^p$, como demonstrado em (3.23), foi usado para se capturar melhor as forças aplicadas no contorno e flexibilizar a transição entre a porção enriquecidas com as funções de frente de trinca e o restante do domínio. Aplicou-

se enriquecimento polinomial uniforme até o sexto grau, $p = 1, 2, \dots, 6$.

Vale salientar que, devido ao fato da PU $C^0(\Omega)$ convencional ser capaz de representar uma função linear (em todo o domínio), com derivada perfeitamente constante, diferentemente da PU $C^\infty(\Omega)$, faz-se necessária a seguinte consideração. Como utilizado em Mendonça, Barcellos e Torres (2011) e Mendonça, Barcellos e Torres (2013), será empregada neste trabalho a definição do grau b da aproximação (desconsiderando o enriquecimento com derivadas singulares). Assim, $b = p + 1$ para PU $C^0(\Omega)$ e $b = p$ para PU $C^k(\Omega)$.

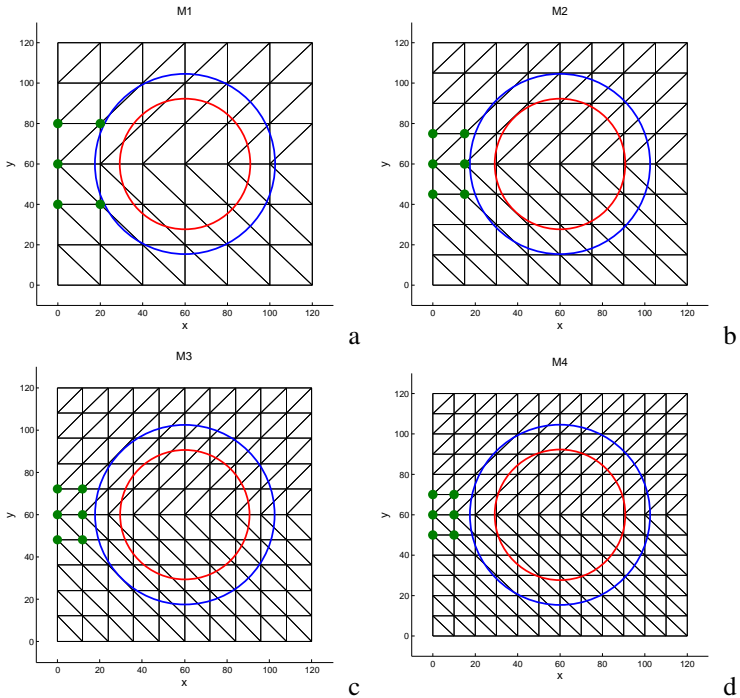


Figura 4.1: Discretizações usadas para verificação de desempenho, considerando o padrão geométrico para o enriquecimento com funções de frente de trinca. O círculo azul será referido como R1 enquanto o vermelho será referido como R2. As funções de frente também foram aplicadas aos nós marcados em verde para se fazer a trinca atingir o contorno do domínio.

4.4.2 Integração

O procedimento convencional para se executar as integrações em área é dividir os elementos seccionados pela trinca em sub-células de integração. A situação é ainda mais desfavorável na vizinhança da singularidade, onde é requerido que as sub-células sejam menores, além de se exigir algum tipo especial de quadratura. Por exemplo, Laborde et al. (2005) utilizam um mapeamento *quase-polar* para a quadratura de Gauss-Legendere de 25 pontos nas sub-células de integração que possuem um vértice na frente da trinca.

Vários estudos acerca da integração de funções singulares no âmbito do MGEF são reportados na literatura. Pode-se citar, entre eles, os trabalhos de Béchet et al. (2005) e Park et al. (2009).

Neste trabalho, procurou-se minimizar os erros de integração numérica. Além disso, devido ao propósito de comparação entre as funções com diferentes regularidade, utilizou-se a mesma quadratura de integração em todos os estágios das análises, para todas as discretizações.

Para os elementos em torno da singularidade, foi utilizada uma quadratura gaussiana com 225 pontos (15×15), submetida simultaneamente a um mapeamento *quase-polar e quarter-point* (BARSOUM, 1974). Para os demais elementos, foi aplicada a quadratura simétrica em triângulos de Wandzura (WANDZURA; XIAO, 2003) com 175 pontos.

A energia de deformação analítica, obtida a partir da integração do produto dos campos de tensões e deformações analíticos, foi usada para monitoramento do erro cometido pela quadratura. Tal esforço se justifica como sendo uma tentativa de se evitar erros de integração e poder interpretar os diferentes comportamentos como sendo consequência somente das funções de aproximação utilizadas.

Para integrações no contorno de Neumann utilizou-se a quadratura de Gauss-Legendre com 25 pontos, para cada aresta elementar.

4.4.3 Discussão dos resultados

Nesta seção, a qualidade da aproximação é aferida mediante medidas globais como erro relativo na energia de deformação e na norma $\mathcal{H}^1(\Omega)$.

A energia de deformação é calculada usando (4.13), por meio da pré e pós-multiplicação da matriz de rigidez global pelo vetor de coeficientes da solução, e através da integração dos campos aproximados como

$$U(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} l_z dx dy \quad (4.25)$$

enquanto a norma $\mathcal{H}^1(\Omega)$ é calculada como

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = \left(\int \int_{\Omega} (\mathbf{u}^T \mathbf{u}) + (\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}) \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.26)$$

com $\mathbf{u} = \{u_x, u_y\}^T$, $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$ e $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$.

A medida de erro relativo, por exemplo, para a energia de deformação, é calculada por

$$er(U) = \frac{U(\mathbf{u}_{EX}) - U(\mathbf{u}_p)}{U(\mathbf{u}_{EX})} \quad (4.27)$$

e de forma similar para as outras grandezas.

O comportamento na presença do refinamento p uniforme, considerando PU $C^0(\Omega)$ convencional é mostrado na Figura 4.2, que exibe o erro relativo na energia de deformação contra o número de graus de liberdade das discretizações. São utilizadas curvas em linha contínua para R1 e linha tracejada para R2. Os pontos superiores são resultantes de $b = p = 1$, como citado na Seção 4.4.1. Observa-se uma tendência de convergência algébrica, com distribuições mais próximas da retilínea à medida que os elementos diminuem. Também, maiores taxas de convergência ocorrem para menores h .

A Figura 4.3 mostra, por sua vez, a evolução do erro relativo na energia de deformação para discretizações com PU contínua $C^\infty(\Omega)$. Assim como utilizado para as aproximações $C^0(\Omega)$, foi aplicado enriquecimento polinomial gradativo até $p = 6$, de modo que $1 \leq b \leq 6$. As inclinações das linhas tracejadas é bastante similar às das linhas contínuas e praticamente se sobrepõe nos seguimentos iniciais. Maior distanciamento entre linhas tracejadas e cheia ocorre para as malhas M3 e M4 o que pode ser devido ao número de condicionamento.

Existe uma tendência de saturação, com erros na ordem de 1.0×10^{-7} em ambas as situações. Já no caso das funções contínuas, o crescimento do erro após um ponto de mínimo pode ser devido a uma deficiência da integração ou devido ao mau condicionamento do sistema de equações.

As funções $C^0(\Omega)$ geram erros menores que as funções suaves, para os últimos graus de enriquecimento polinomial. No entanto, é necessário ter em mente que o número de condicionamento das matrizes de rigidez para os casos extremos de enriquecimento polinomial já é bastante inadequado.

A diferença na taxa de convergência entre as aproximações regulares e seccionalmente contínuas se torna mais evidente para o erro relativo na norma $\mathcal{H}^1(\Omega)$ (4.26), como se pode observar nas Figuras 4.4 e 4.5.

Apesar das oscilações que ocorrem para graus $b \geq 4$, no caso da PU $C^\infty(\Omega)$ (Figura 4.5), observa-se que as linhas contínuas e tracejadas evoluem bastante próximas até os graus mais elevados. Tal fato pode indicar menor dependência da aproximação com relação aos raios que definem as dimensões das regiões enriquecidas.

A verificação da acuracidade da quadratura de integração considerada tanto no cálculo da energia de deformação quanto da norma $\mathcal{H}^1(\Omega)$ é registrada na Figura 4.6. Ressalta-se que foram integradas numericamente as soluções analíticas dos campos de tensão (4.24) e correspondentes deformações. Como citado anteriormente, para cada uma das malhas, foi utilizada a mesma quadratura, independentemente da regularidade das funções de aproximação. Eis a razão para a sobreposição dos resultados obtidos para $C^\infty(\Omega)$ e $C^0(\Omega)$. Diferenças ocorrem somente quando da alteração da malha. Observa-se que os valores variam somente nos dois últimos algarismos significativos. Nesta situação, argumenta-se que o erro cresce ligeiramente à medida que os elementos diminuem como consequência do maior número de pontos de avaliação envolvidos e, logo, o maior número de operações.

Faz-se necessário, nesta comparação de desempenho, registrar o efeito das diferentes funções sobre o condicionamento da matriz de rigidez. O número de condicionamento é um fator que interfere na acuracidade da solução do sistema de equações e pode ser relacionado à quantidade de algarismos significativos confiáveis dos coeficientes do vetor solução (CHAPRA; CANALE, 2008).

Neste trabalho, considera-se número de condicionamento como sendo a razão entre o maior autovalor e o menor autovalor diferente de zero. Isto se deve ao fato de que, teoricamente, o enriquecimento polinomial sobre uma PU também polinomial, como nas aproximações $C^0(\Omega)$, gera uma base linearmente dependente (DUARTE; BABUŠKA; ODEN, 2000) (SCHWEITZER, 2008), conduzindo à matrizes de rigidez singulares.

Salienta-se que a solução do sistema de equações, tanto para as aproximações $C^0(\Omega)$ quanto $C^\infty(\Omega)$, é obtida com o auxílio do procedimento iterativo de Babuška (DUARTE; BABUŠKA; ODEN, 2000). O procedimento de Babuška é geralmente utilizado em implementações $C^0(\Omega)$ do MGEF (DUARTE et al., 2001) (TORRES; MENDONÇA; BARCELLOS, 2011) e se faz necessário para que sejam eliminados os autovalores nulos presentes nas matrizes de rigidez, oriundos da dependência linear. Todavia, seguindo Mendonça, Barcellos e Torres (2011) e Mendonça, Barcellos e Torres (2013), tal procedimento foi empregado também para aproximações suaves, com PU $C^\infty(\Omega)$. Nesta investigação, considerou-se na grande maioria dos casos

o parâmetro de perturbação como 1×10^{-6} e a tolerância de convergência como 1×10^{-12} .

Ainda, resalta-se que os resultados mostrados nas Figuras 4.7 e 4.8, respectivamente, para aproximações $C^0(\Omega)$ e $C^\infty(\Omega)$, se referem ao número de condicionamento calculado após a aplicação das condições de restrição de deslocamento, porém antes do pré-condicionamento proposto por Duarte (DUARTE; BABUŠKA; ODEN, 2000) e a aplicação do fator de perturbação do método de Babuška.

Percebe-se que os valores iniciais de número de condicionamento, para o mais baixo grau b , referentes à PU $C^\infty(\Omega)$ (Figura 4.8) são notadamente superiores aos correspondentes valores para funções $C^0(\Omega)$ (Figura 4.7). Avaliando-se a inclinação dos segmentos, para as mesmas variações no número de graus de liberdade, constata-se que as taxas exibidas pelas funções de alta regularidade são ligeiramente superiores comparado às PU convencionais.

Então, buscando compreender melhor o impacto da regularidade e do enriquecimento no condicionamento, investigou-se a dispersão dos autovalores das matrizes de rigidez. Registra-se nas figuras 4.9 e 4.10 a distribuição da quantidade de autovalores para as diversas ordens de grandeza. Para tal análise, considerou-se a malha M2 (Figura 4.1), no caso de enriquecimento singular segundo o padrão geométrico e enriquecimento polinomial uniforme.

Por exemplo, na Figura 4.9, tem-se que a linha azul contínua e a linha cinza tracejada, correspondentes às aproximações $C^0(\Omega)$ $b = 2$ e $C^\infty(\Omega)$ $b = 1$, respectivamente, indicam que a distribuição dos autovalores por ordem de grandeza é bastante similar para matrizes de mesma dimensão, independentemente da regularidade da base. Esta similaridade também é observada para os graus superiores, inclusive no caso em que se reduz o raio da região com enriquecimento de ponta de trinca (Figura 4.10).

Nota-se que os autovalores de maior grandeza ocorrem em mesmo número em todas as situações e que a diferença entre as curvas para diferentes graus b se manifesta no sentido decrescente do eixo horizontal. Sendo assim, pode-se argumentar que os maiores autovalores são associados às funções de enriquecimento de ponta de trinca (3.20) e os menores autovalores são associados ao enriquecimento polinomial (3.23). Esta constatação corrobora o fato de que as maiores contribuições em energia de deformação se devem às funções de enriquecimento com derivada singular, estando associadas aos modos de energia mais elevados.

Por outro lado, as figuras 4.9 e 4.10 evidenciam que o crescimento do número de condicionamento está predominantemente associado ao enrique-

cimento polinomial. É possível visualizar que, mesmo no caso de $PU C^\infty(\Omega)$, surgem autovalores muito pequenos, no limite da precisão da máquina, para $b \geq 4$ muito embora, teoricamente, não seja prevista a singularidade da matriz de rigidez visto que a PU suave não é polinomial. Este fato pode sugerir a necessidade de se procurar por funções de enriquecimento polinomiais diferentes daquelas em (3.23) e justifica a opção por utilizar o método de Babuška (DUARTE; BABUŠKA; ODEN, 2000) também para aproximações $C^\infty(\Omega)$.

De posse destes resultados, pode-se argumentar que ainda não é muito clara a vantagem da $PU C^\infty(\Omega)$ frente a $PU C^0(\Omega)$ convencional do MEF. Os valores de erro alcançados no final de processo de refinamento p são de ordem de grandeza semelhante nas duas situações. Até aqui, a diferença mais marcante é o impacto sobre o número de condicionamento. Também, salienta-se que para a aproximação contínua, um dado grau b exige uma quantidade maior de funções por nó, e conseqüentemente maior número de graus de liberdade, como discutido na Seção 3.5. Mas, de qualquer forma, o custo envolvido no padrão de enriquecimento geométrico, para as funções de frente de trinca, é computacionalmente caro em qualquer dos dois casos.

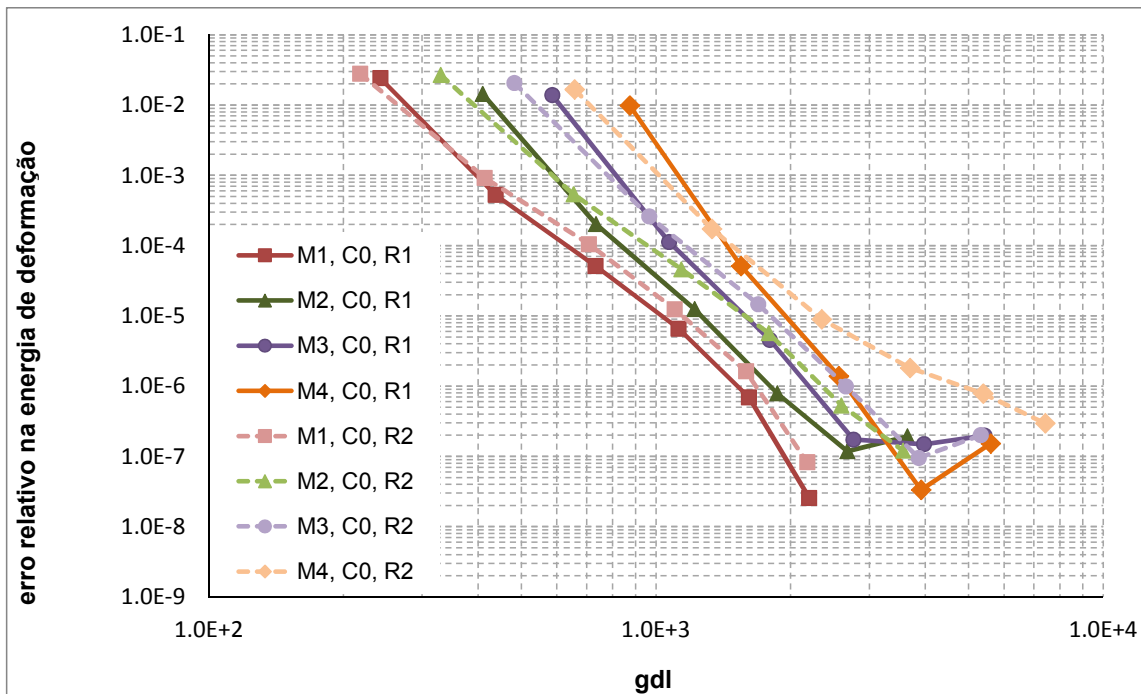


Figura 4.2: Erro relativo no cálculo da energia de deformação considerando PU convencional (função tenda). Efeito do enriquecimento polinomial uniforme. Base de aproximação de grau 1 até 6.

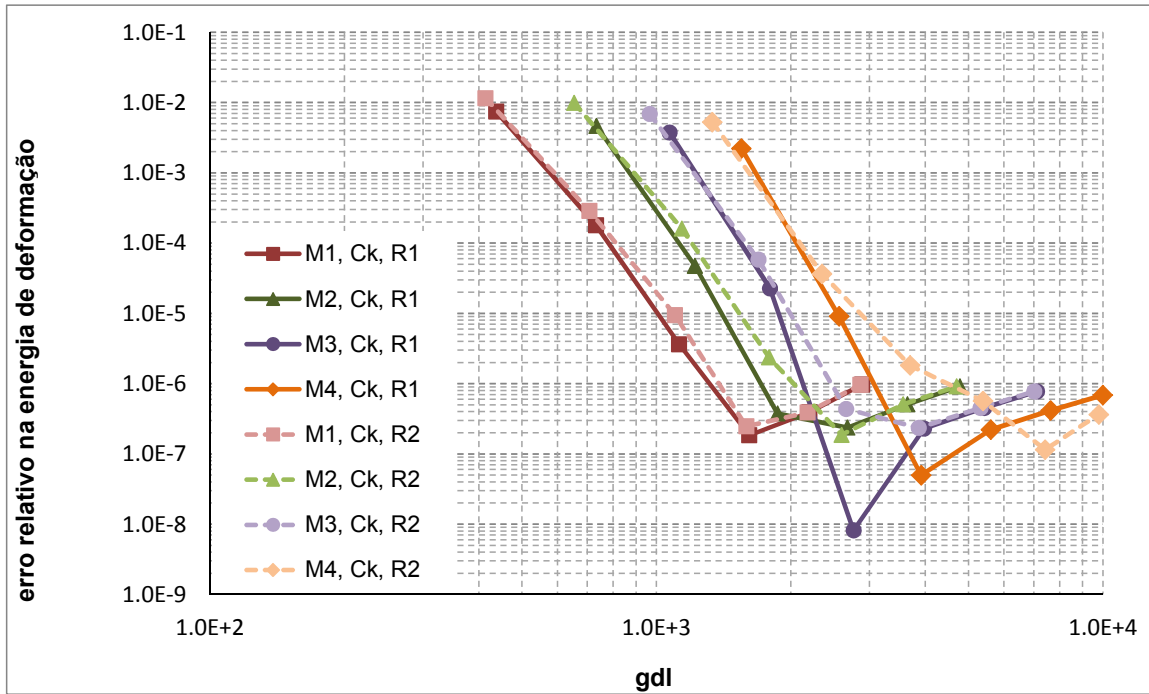


Figura 4.3: Erro relativo no cálculo da energia de deformação considerando PU contínua. Efeito do enriquecimento polinomial uniforme. Base de aproximação de grau 1 até 6.

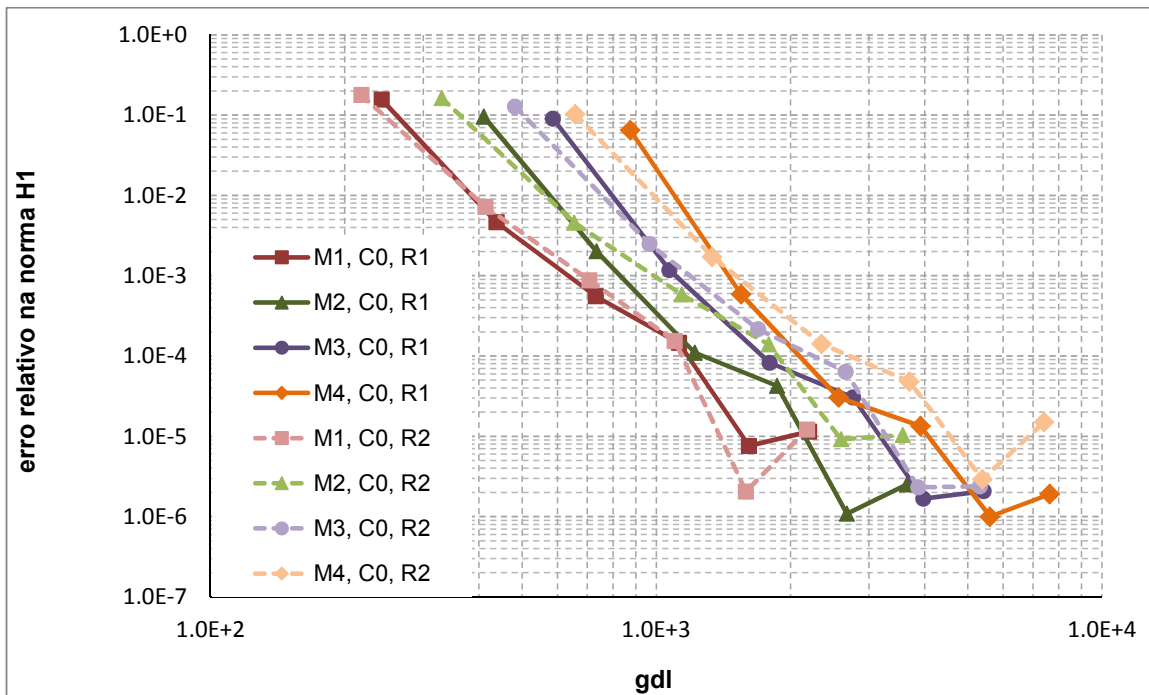


Figura 4.4: Erro relativo no cálculo da norma $\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}$ (4.26) considerando PU convencional (função tenda). Efeito do enriquecimento polinomial uniforme. Base de aproximação de grau 1 até 6.

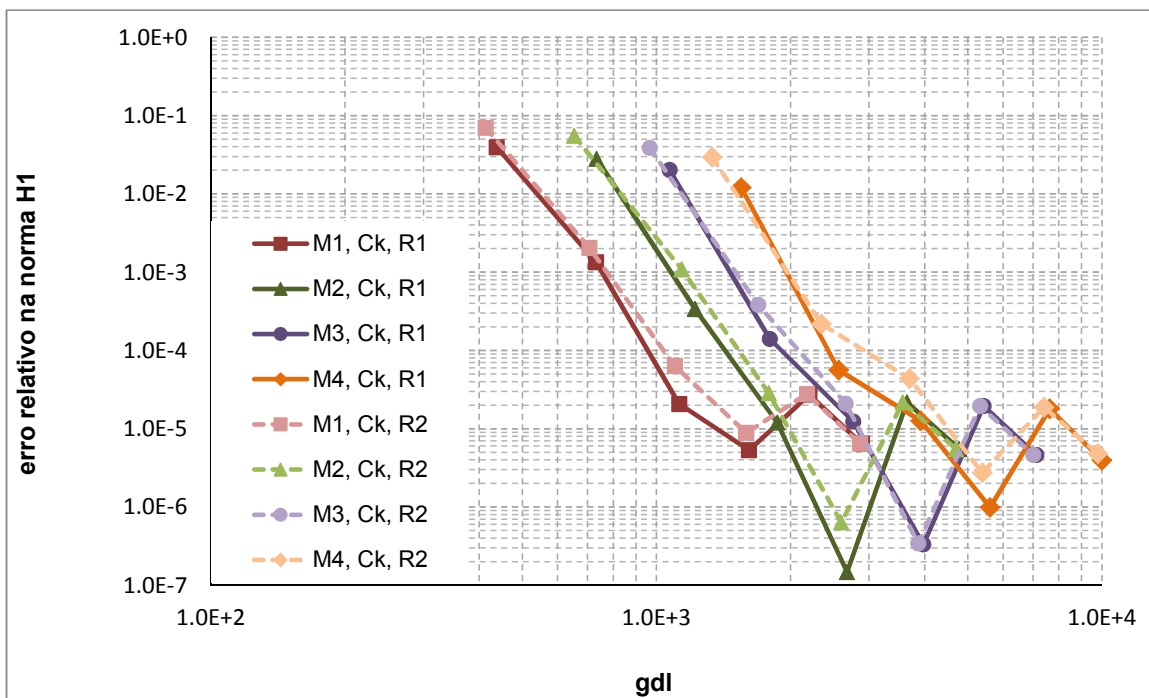


Figura 4.5: Erro relativo no cálculo da norma $\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}$ (4.26) considerando PU contínua. Efeito do enriquecimento polinomial uniforme e influência do raio da região enriquecida com funções singulares.

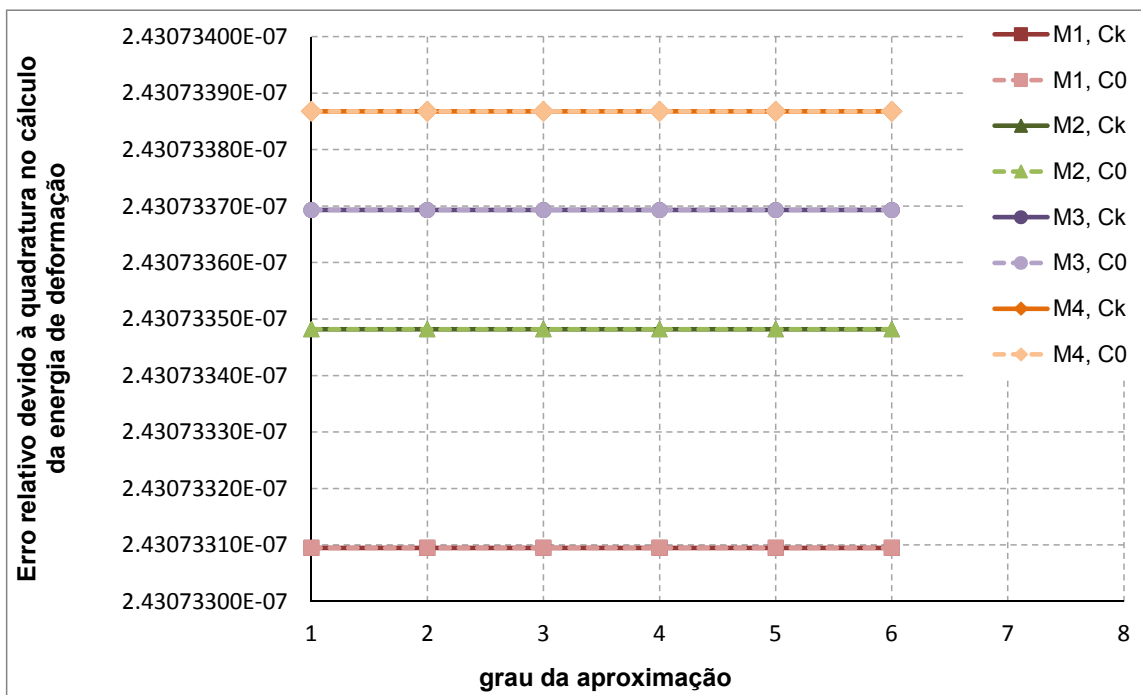


Figura 4.6: Erro relativo no cálculo da energia de deformação devido à quadratura de integração.

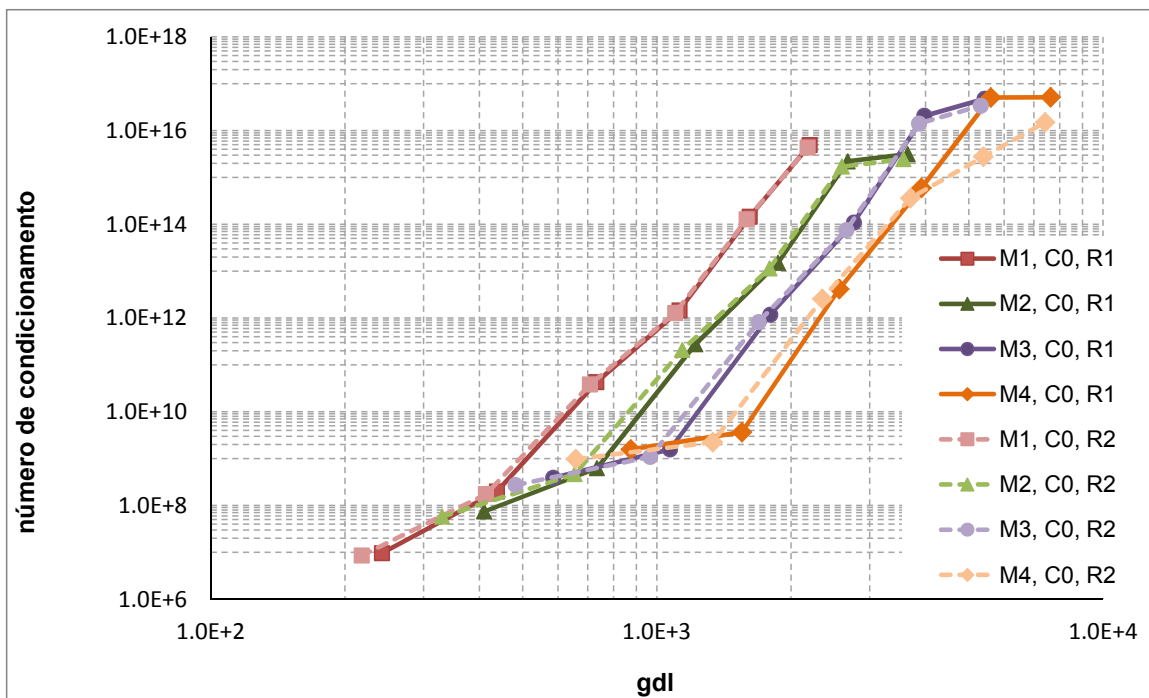


Figura 4.7: Evolução do número de condicionamento da matriz de rigidez global, considerando PU convencional $C^0(\Omega)$, antes do procedimento de Babuska (DUARTE; BABUŠKA; ODEN, 2000).

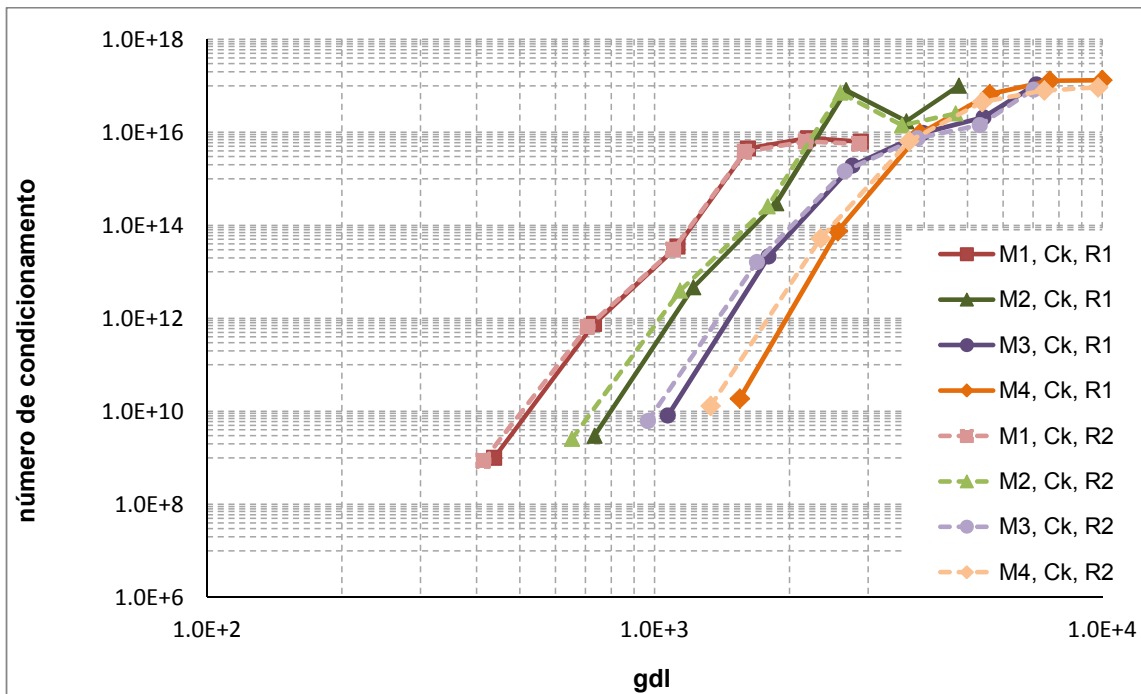


Figura 4.8: Evolução do número de condicionamento da matriz de rigidez global, considerando PU $C^\infty(\Omega)$, antes do procedimento de Babuska (DUARTE; BABUŠKA; ODEN, 2000).

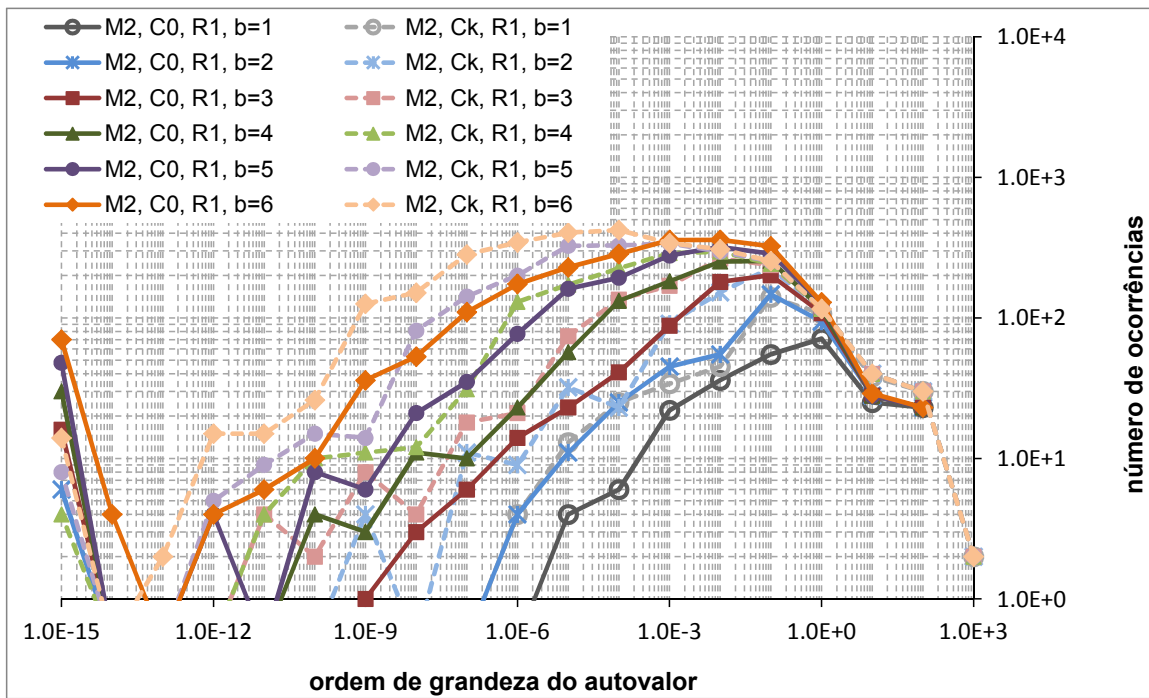


Figura 4.9: Distribuição dos autovalores da matriz de rigidez global, calculados antes do procedimento de Babuska (DUARTE; BABUŠKA; ODEN, 2000) para diferentes graus b . Malha M2. Aproximações $C^0(\Omega)$ e $C^\infty(\Omega)$. Padrão geométrico de enriquecimento com funções de ponta de trinca, com R1 (Figura 4.1).

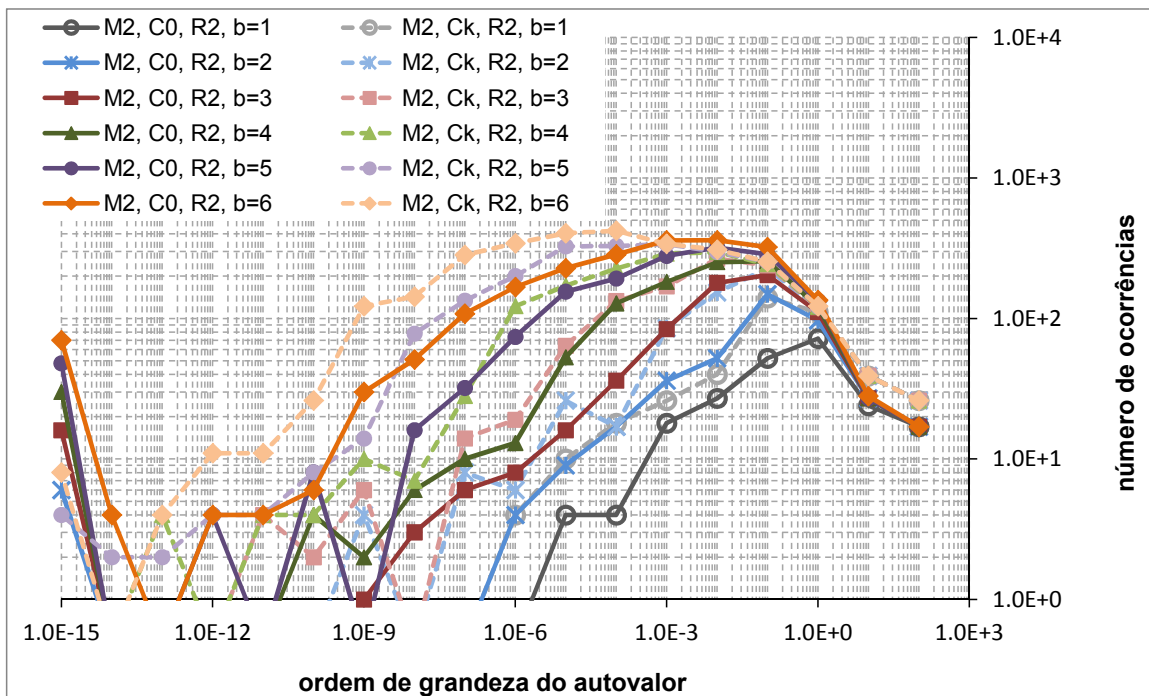


Figura 4.10: Distribuição dos autovalores da matriz de rigidez global, calculados antes do procedimento de Babuska (DUARTE; BABUŠKA; ODEN, 2000) para diferentes graus b . Malha M2. Aproximações $C^0(\Omega)$ e $C^\infty(\Omega)$. Padrão geométrico de enriquecimento com funções de ponta de trinca, com R2 (Figura 4.1).

Sendo assim, pode ser interessante verificar o comportamento das aproximações considerando o padrão de enriquecimento topológico, na tentativa de identificar melhor possíveis vantagens da PU suave. O enriquecimento topológico seria a configuração de enriquecimento mais versátil devido ao menor custo computacional envolvido. Logo, é proposto enriquecer com as funções (3.20) somente os nós marcados em vermelho na Figura 4.11, padrão este que será referido nas figuras como *cloud*. Sobre estes mesmos nós, aplicou-se também o enriquecimento polinomial, inicialmente com o propósito de flexibilizar a zona de transição.

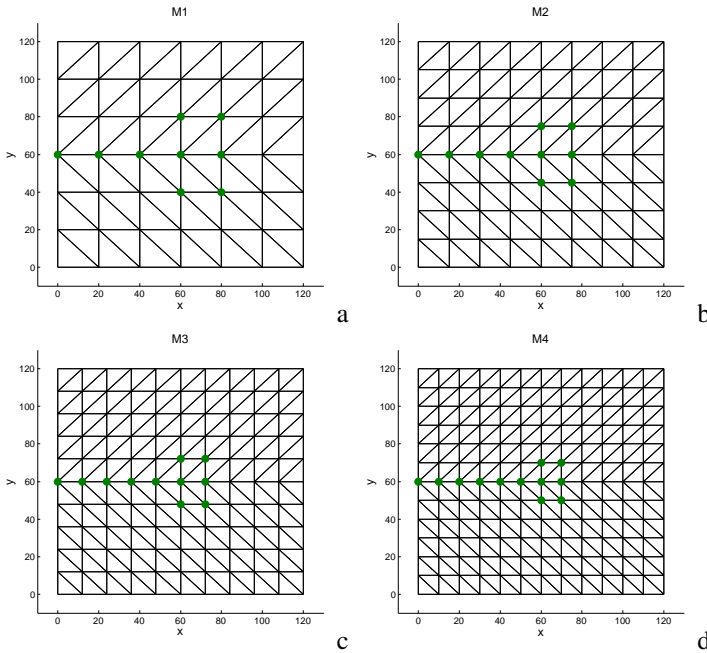


Figura 4.11: Padrão topológico de enriquecimento, segundo Béchet et al. (2005).

Da mesma forma, registra-se o comportamento do erro global tanto em termos da energia de deformação quanto na norma $\mathcal{H}^1(\Omega)$. A Figura 4.12 mostra a evolução do erro relativo na energia de deformação contra o número de graus de liberdade simultaneamente para aproximações $C^0(\Omega)$ e $C^\infty(\Omega)$. Notar que, como anteriormente, para cada malha fez-se o enriquecimento

polinomial até sexto grau, de forma que $1 \leq b \leq 6$. As linhas tracejadas são referentes a PU $C^0(\Omega)$ convencional. O enriquecimento polinomial é incapaz de levar o erro relativo a patamares inferiores a 6×10^{-2} , mesmo com elementos de menores dimensões. Salienta-se que a redução dos elementos faz reduzir o suporte das funções enriquecidas. O efeito desta redução foi observado por diversos autores, como citado anteriormente.

Por outro lado, a qualidade dos resultados para PU $C^\infty(\Omega)$ é marcante, principalmente por dois aspectos. Também na Figura 4.12, observa-se que mesmo para a malha M1 e $b = 1$ o erro é menor que para todas as discretizações com funções $C^0(\Omega)$. É de se reconhecer que a discretização mais pobre com funções contínuas gera aproximadamente 190 graus de liberdade a mais que a correspondente discretização para funções $C^0(\Omega)$. O segundo fato, é que parece não haver a tendência de saturação verificada para as PU convencionais, de modo que o erro diminui sempre que se enriquece a aproximação.

Os comentários acima também se aplicam para a norma $\mathcal{H}^1(\Omega)$. A Figura 4.13 registra que também se obtém aproximações mais acuradas mesmo reduzindo o suporte do enriquecimento com funções de frente de trinca.

A evolução do número de condicionamento da matriz de rigidez pode ser observada na Figura 4.14. Claramente, tem-se que o crescimento acentuado do número de condicionamento para as aproximações com PU $C^\infty(\Omega)$ pode ser inconveniente. Da mesma forma como executado para o padrão geométrico de enriquecimento com funções de ponta de trinca, a Figura 4.15 mostra a distribuição dos autovalores por ordem de grandeza. Novamente, tanto para a PU $C^0(\Omega)$ quanto a PU $C^\infty(\Omega)$, tem-se que a quantidade de autovalores menores, e cada vez menores, cresce à medida que se aumenta o grau de enriquecimento polinomial. Todavia, não foram obtidos autovalores nulos em nenhuma situação. Notar também que, no caso $C^\infty(\Omega)$, as ocorrências são mais numerosas até porque, para todos os graus b , os problemas são de maior dimensão que os correspondentes $C^0(\Omega)$, pela razão exposta na Seção 3.5.

Portanto, pode-se extrair destes resultados que a elevada regularidade se mostra interessante na presença de funções de enriquecimento de frente de trinca (3.20). Obtém-se melhoria da solução em relação à PU $C^0(\Omega)$ mesmo para configurações de enriquecimento em que se aplica as funções de frente de trinca ao número mínimo de nós. Adicionalmente, o custo relativo ao maior número de graus de liberdade envolvidos e o mal-condicionamento podem ser minimizados utilizando-se PU contínua de forma localizada, como será discutido no Capítulo 7.

Finalmente, são registradas as taxas de convergência para o refino h na

Tabela 4.1. Considerou-se o erro relativo na norma em energia com o objetivo de se confrontar os resultados com os valores teóricos apresentados por Szabó e Babuška (2011). Assintoticamente, tem-se que o erro é aproximado por

$$\log \|e\|_E \approx \log C - \beta \log(gdl) \quad (4.28)$$

onde o valor absoluto β é a taxa de convergência assintótica, gdl é o número de graus de liberdade e C é uma constante.

O problema do painel fraturado, objeto da análise, se enquadra na chamada “categoria B” devido à presença de um ponto singular no interior do domínio. A taxa de convergência assintótica obtida em modelagens com o MEF convencional é $\beta = \frac{1}{2} \min(b, \lambda)$, sendo b o grau da aproximação e λ o parâmetro que indica o grau da singularidade.

O campo de deslocamentos associado ao Modo I (puro) de abertura de trinca é, conforme Szabó e Babuška (2011), expresso por

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{a_1 r^{\lambda_1}}{2G} \left[\left(\kappa - \frac{1}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right] \\ u_y &= \frac{a_1 r^{\lambda_1}}{2G} \left[\left(\kappa + \frac{1}{2} \right) \text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) - \frac{1}{2} \text{sen} \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.29)$$

com a origem posicionada na ponta da trinca e $-\theta \leq \pi \leq \theta$. Em (4.29), $G = E/2(1 + \nu)$ é o módulo de cisalhamento e $\lambda_1 = \lambda = \frac{1}{2}$. Deste modo, a taxa de convergência assintótica na versão h do MEF fica limitada a $\beta = \frac{1}{4}$. Porém, como discutido em Laborde et al. (2005), o padrão geométrico de enriquecimento com funções de ponta de trinca é uma estratégia que pode permitir ao MGEF baseado em PU $C^0(\Omega)$ recuperar a taxa de convergência típica de problemas regulares, definidos como pertencentes à “categoria A”, na qual a taxa de convergência é dada por $\beta = b/2$ (SZABÓ; BABUŠKA, 2011). Uma justificativa para esta constatação é que o enriquecimento aplicado em uma área fixa ao redor da ponta da trinca seria suficiente para retirar a singularidade presente na solução que se pretende aproximar.

Da Tabela 4.1, tem-se que quando as funções de ponta de trinca (3.20) são aplicadas sobre uma área maior (R1) a taxa de convergência se aproxima do valor teórico para a categoria A quando $b = 2$ ou $b = 3$, em ambas as aproximações. Este fato concorda com a previsão de que o enriquecimento singular (3.20) efetivamente remove a singularidade da aproximação, verificando-se taxas de convergência típicas de problemas regulares.

No entanto, reduzindo-se a dimensão da região enriquecida tem-se a redução da taxa de convergência em aproximações $C^0(\Omega)$. Percebe-se que para baixos graus b a aproximação de elevada regularidade é praticamente insensível à redução da dimensão da região enriquecida com as funções (3.20). Para $C^\infty(\Omega)$ com $b = 3$ a redução significativa de β pode ser consequência do mal-condicionamento, como se observa na Figura 4.8.

Também, fica evidente que o padrão topológico de enriquecimento com funções de ponta de trinca é inviável sobre PU $C^0(\Omega)$. Por outro lado, a PU de elevada regularidade ainda assegura uma taxa de convergência ligeiramente melhor que a verificada no MEF convencional para a categoria B.

Tabela 4.1: Comparação entre taxas de convergência do erro relativo para refino h . Valores teóricos segundo Szabó e Babuška (2011).

padrão de enriq.	PU	$b = 1$	$b = 2$	$b = 3$
R1	$C^0(\Omega)$	0,33	0,91	1,42
	$C^\infty(\Omega)$	0,33	0,91	1,43
R2	$C^0(\Omega)$	0,24	0,74	1,07
	$C^\infty(\Omega)$	0,34	0,90	0,88
cloud	$C^0(\Omega)$	0,05	0,04	0,02
	$C^\infty(\Omega)$	0,29	0,26	0,28
teórico categ. A		0,50	1,00	1,50
teórico categ. B		0,25	0,25	0,25

Finalmente, são apresentadas as figuras 4.16 e 4.17 com as componentes, na direção de y , do erro exato, para aproximações $C^0(\Omega)$ e $C^\infty(\Omega)$, respectivamente. Foi selecionada a malha M3 (Figura 4.1) e o padrão geométrico de enriquecimento com funções de ponta de trinca, para R2. São mostrados os resultados para enriquecimentos polinomiais uniformes até $p = 3$ e $p = 4$, respectivamente, de forma que $b \leq 4$ em ambas as situações. Confrontando discretizações com iguais quantidades de graus de liberdade, por exemplo, considerando as figuras 4.16(d) e 4.17(c), claramente se percebe que na aproximação com elevada regularidade os valores de erro são menores e menos dispersos.

Todavia, além de medidas globais como as verificadas até aqui, faz-se necessário averiguar a acuracidade na previsão de parâmetros relacionados à severidade da trinca. Em mecânica da fratura elástica linear, os parâmetros utilizados são os fatores de intensidade de tensões \mathcal{K} e a integral \mathcal{J} . Desta forma, será apresentado no Capítulo 5 o procedimento adotado neste trabalho para tal finalidade.

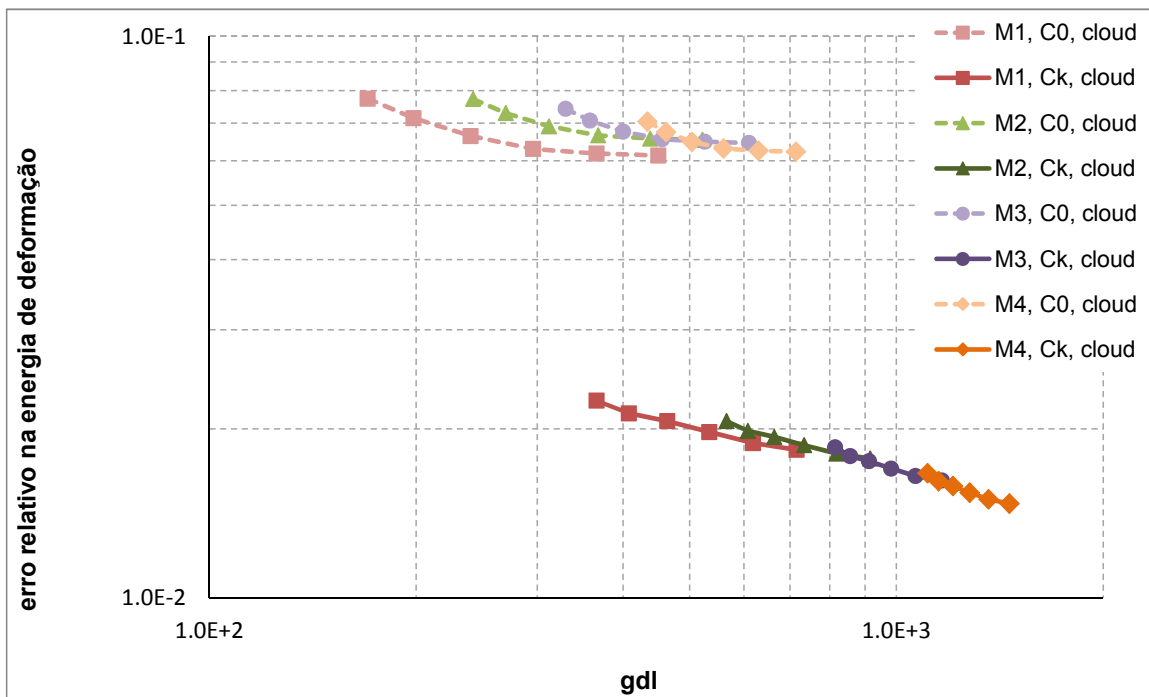


Figura 4.12: Erro relativo no cálculo da energia de deformação. Enriquecimento com funções de frente de trinca segundo padrão topológico. Enriquecimento polinomial localizado nos mesmos nós que receberam enriquecimento singular.

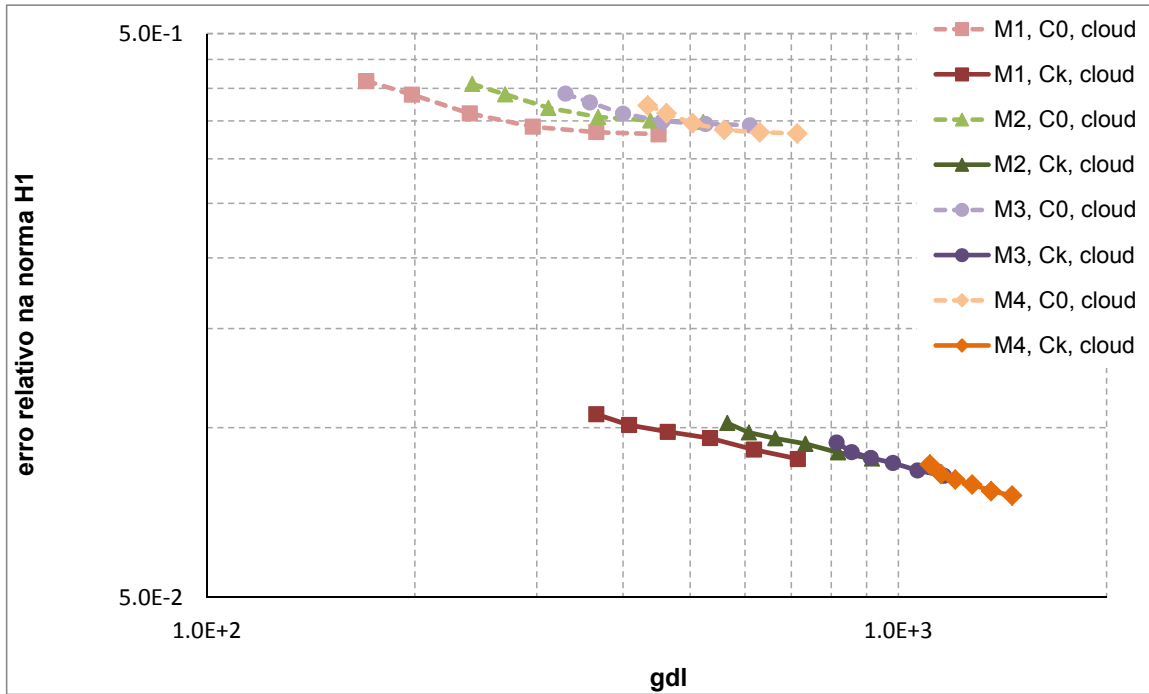


Figura 4.13: Erro relativo no cálculo da norma $\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}$. Enriquecimento com funções de frente de trinca segundo padrão topológico. Enriquecimento polinomial localizado nos mesmos nós que receberam enriquecimento singular.

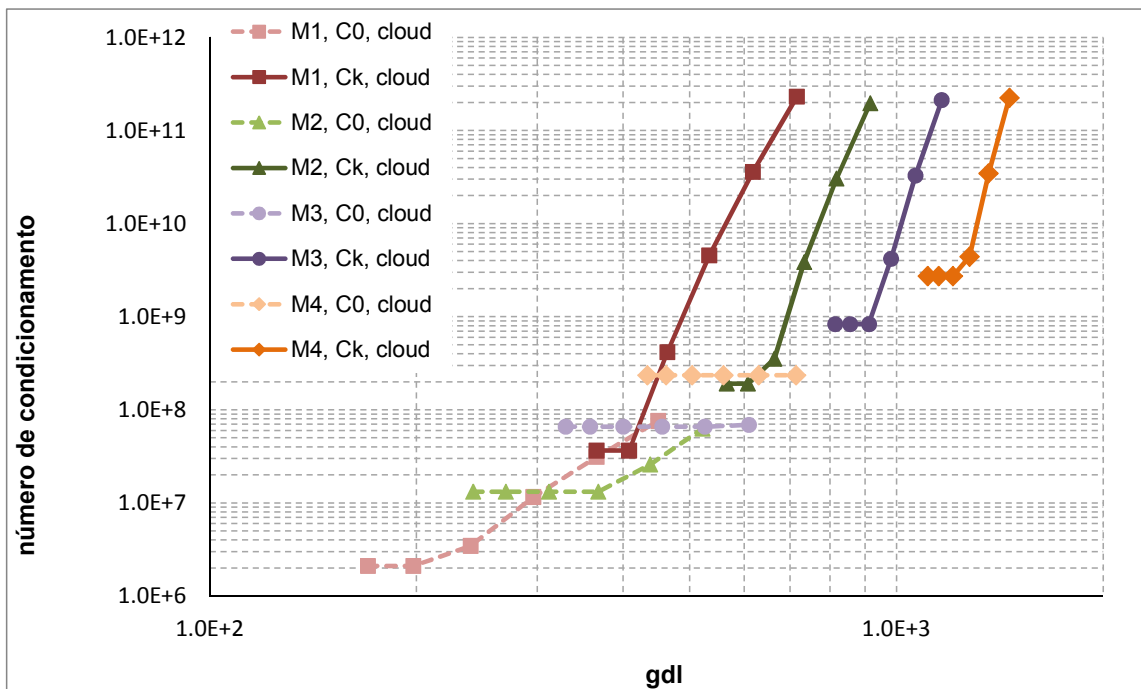


Figura 4.14: Evolução do número de condicionamento da matriz de rigidez global, antes do procedimento de Babuska (DUARTE; BABUŠKA; ODEN, 2000). Enriquecimento com funções de frente de trinca segundo padrão topológico. Enriquecimento polinomial localizado nos mesmos nós que receberam enriquecimento singular.

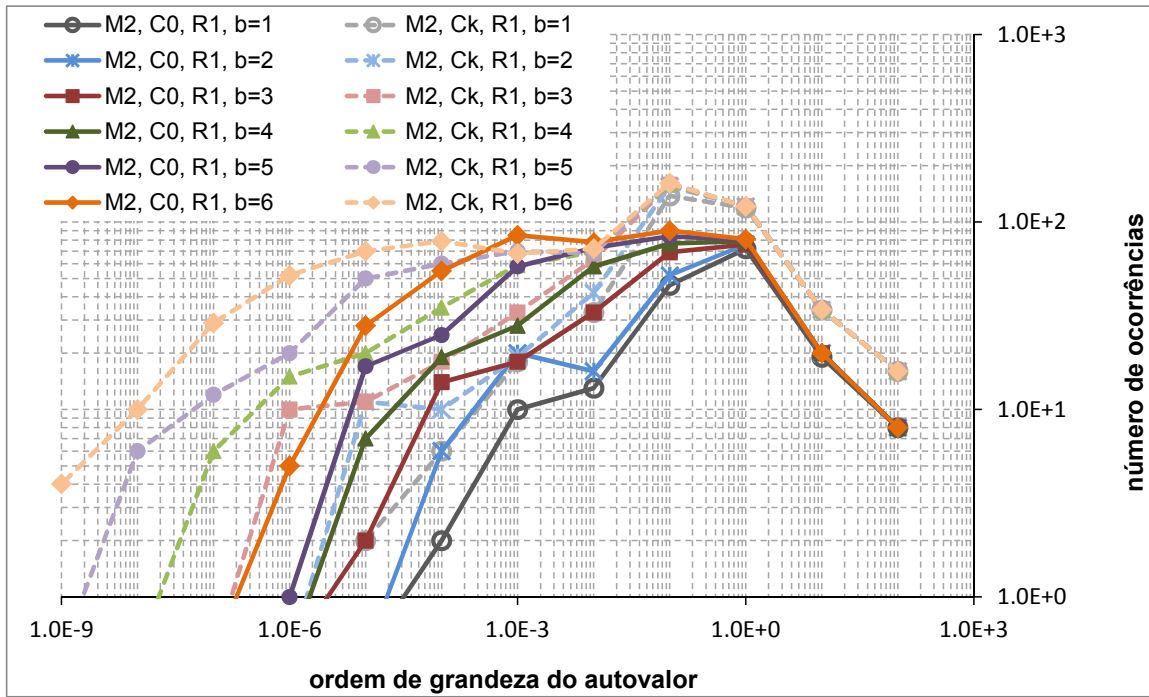


Figura 4.15: Distribuição dos autovalores da matriz de rigidez global, calculados antes do procedimento de Babuska (DUARTE; BABUŠKA; ODEN, 2000) para diferentes graus b . Malha M2. Aproximações $C^0(\Omega)$ e $C^\infty(\Omega)$. Padrão topológico de enriquecimento com funções de ponta de trinca (Figura 4.11).

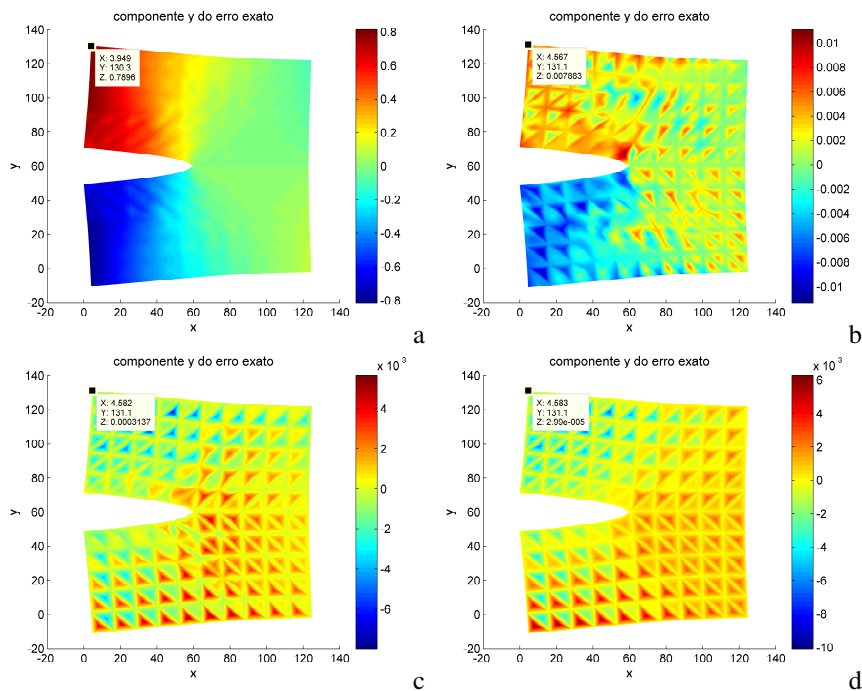


Figura 4.16: Componente e_y do campo de erro exato. Funções de aproximação com regularidade $C^0(\Omega)$. Malha M3 e enriquecimento singular segundo o padrão geométrico com R2 (Figura 4.1) e usando $p \leq 4$. a) grau $b = 1$, b) grau $b = 2$, c) grau $b = 3$ e d) grau $b = p = 4$.

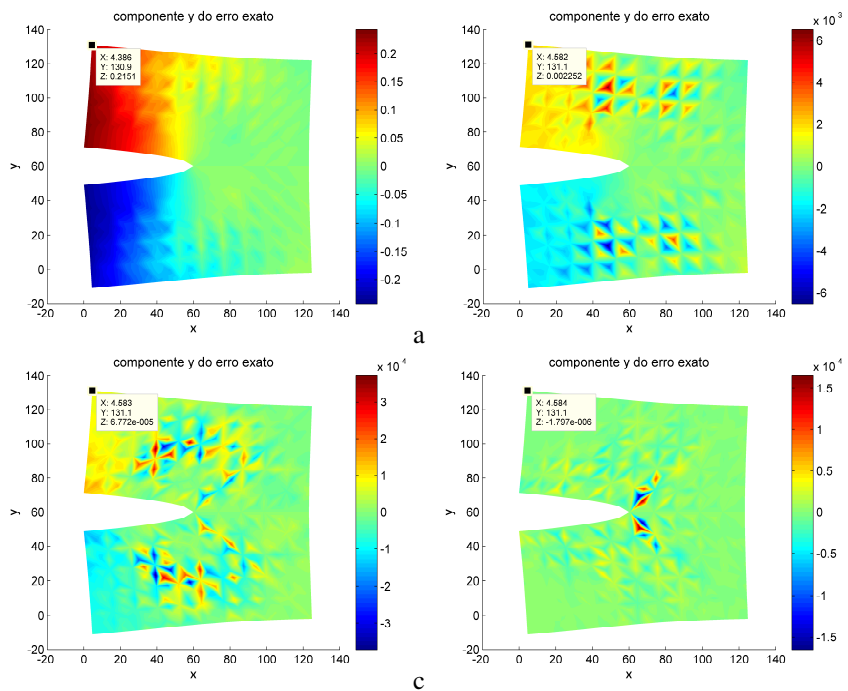


Figura 4.17: Componente e_y do campo de erro exato. Funções de aproximação com regularidade $C^\infty(\Omega)$. Malha M3 e enriquecimento singular segundo o padrão geométrico com R2 (Figura 4.1) e usando $p \leq 4$. a) grau $b = 1$, b) grau $b = 2$, c) grau $b = 3$ e d) grau $b = p = 4$.

5 MECÂNICA CONFIGURACIONAL

O ambiente espacial no qual vários fenômenos físicos são experimentados na vida cotidiana é chamado de *espaço físico*. Se o efeito da relatividade for negligenciado, tal espaço físico é geralmente designado como sendo um espaço euclidiano homogêneo e isotrópico. Como implicações, tem-se que as propriedades de um sistema fechado permanecem invariáveis mesmo que o sistema sofra uma translação ou rotação de corpo rígido. Existem outros princípios de invariância como, por exemplo, a propriedade de invariância de materiais com relação ao sistema de coordenadas (objetividade) e a invariância devido à similaridade de escalas espaciais para materiais que não possuem micro-estrutura aparente.

A formulação convencional para a análise de deformações de corpos elásticos, segundo o ponto de vista newtoniano, procura determinar o campo de deslocamentos que ocorre em um corpo sujeito a *forças espaciais* (físicas) que são exercidas pelo contato entre dois ou mais corpos ou forças de corpo resultantes como uma resposta frente às variações da posição espacial de partículas físicas com relação ao ambiente espacial. Em outras palavras, o problema clássico consiste em encontrar a configuração deformada (instantânea) de um corpo elástico sujeito à forças externas.

Eshelby (ESHELBY, 1951) observou que uma das integrais utilizadas para expressar o movimento da matéria no espaço físico, no contexto da mecânica do contínuo, pode ser usada como uma medida de força que governa o equilíbrio ou o movimento de um defeito topológico no interior de um sólido. Tal defeito topológico pode ser pontual, como um vazio intersticial, um defeito linear, como uma discordância, ou um defeito superficial, como uma trinca.

Deste modo, por analogia com a eletrostática, onde a integral da componente normal do tensor de Maxwell tomado sobre uma superfície fechada fornece a força total atuante sobre todas as cargas elétricas no interior da superfície (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2012), Eshelby sugeriu que seria possível calcular a força atuante sobre um defeito no interior de um corpo como uma expressão envolvendo um *tensor momento energia* apropriado para o campo elástico em consideração.

A razão pela qual tal integral invariante é chamada como *força material* se deve ao fato de que ela mede a variação da energia livre do sistema devido ao movimento ou evolução do defeito (STEINMANN; SCHERER; DENZER, 2009). Entretanto, o defeito não consiste de matéria e não é dotado de massa. Assim, a força atuando sobre o defeito não é uma força física no sentido con-

vencional da mecânica Newtoniana e não está relacionada à segunda lei de Newton. Esta força é referida como *força configuracional*, *força material*, *driving force* ou *força não-Newtoniana*, que governa a evolução topológica do defeito tal como um movimento de discordância, o crescimento de uma trinca ou a mudança no arranjo cristalino de um material.

Então, seguindo o formalismo da mecânica Eshelbiana (ESHELBY, 1951), estabelece-se uma formulação interessada na resposta do sistema perante variações nas posições materiais (partículas físicas) com relação ao ambiente material. A então chamada mecânica Eshelbiana, que introduziu o tensor de Maxwell na elasticidade, depois chamado tensor momento energia, busca determinar as forças materiais aplicadas à configuração deformada do corpo de tal forma que o processo inverso de deformação conduza o corpo novamente à sua configuração original, a configuração de referência da mecânica Newtoniana (RUTER; STEIN, 2007).

5.1 Definição do tensor de Eshelby

Para a dedução do tensor momento energia é necessário notar as dependências dos potenciais envolvidos no processo de deformação. Na dedução que segue, será empregada a notação indicial. Primeiramente, deve-se lembrar da definição da densidade de energia de deformação \mathfrak{W} por unidade de volume

$$\mathfrak{W} = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}(\bar{\varepsilon}_{ij}) d\bar{\varepsilon}_{ij} \quad (5.1)$$

que, no caso de um material elástico linear, pode ser diretamente integrado, resultando

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (5.2)$$

cujo caráter como um potencial elástico é revelado imediatamente pela diferenciação com relação a ε_{ij} fornecendo

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (5.3)$$

que é uma relação constitutiva.

Adicionalmente, a relação constitutiva (5.3) pode também ser expressa em termos do gradiente de deslocamentos devido à simetria do tensor de deformações e do tensor de tensões (devido ao balanço de momento angu-

lar físico), tal que

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial u_{j,i}} \quad (5.4)$$

Consequentemente, a densidade de energia de deformação pode ser interpretada como $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}(x_k, u_{j,i})$, dependendo explicitamente da posição x_k (a variável independente) se as constantes materiais são função de x_k , caracterizando uma heterogeneidade material.

Similarmente, um potencial de forças externas aplicadas \mathfrak{V} pode ser introduzido, para o caso de forças estáticas, como sendo

$$\mathfrak{V} = -b_i u_i \quad (5.5)$$

Deve-se notar que \mathfrak{V} pode ser também uma função explícita da posição x_k se as forças por unidade de volume b_i são função de x_k , caracterizando uma heterogeneidade física (vazio ou trinca, por exemplo) e, portanto, $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}(x_k, u_i)$.

Considerando um processo de deformação elástico linear, e portanto conservativo, tem-se um sistema dito lagrangeano, para o qual pode ser escrita uma função lagrangeana \mathfrak{H} que, em geral, é função das variáveis independentes x_k , das variáveis dependentes u_i , e das primeiras derivadas das variáveis dependentes $u_{i,j}$ ¹. A função lagrangeana é definida como

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{L} - \mathfrak{U} \quad (5.6)$$

e representa fisicamente o balanço entre a energia cinética, \mathfrak{L} , e a energia potencial total, \mathfrak{U} .

Em um processo quase estático de deformação elástica a função lagrangeana \mathfrak{H} coincide com a energia potencial total \mathfrak{U} e será definida como

$$\mathfrak{H} = -\mathfrak{U} = -(\mathfrak{W} + \mathfrak{V}) = \mathfrak{H}(x_k, u_i, u_{i,j}) \quad (5.7)$$

representando que o trabalho das forças externas aplicadas \mathfrak{V} é balanceado pela mudança na energia interna do sistema \mathfrak{W} .

Notar o caráter local da função lagrangeana definida em (5.7) como consequência de (5.2) e (5.5).

No entanto, se o material é homogêneo, tanto física quanto material-

¹Uma função lagrangeana pode também ser escrita em termos de derivadas de ordem superior das variáveis dependentes (KIENZLER; HERRMANN, 2000), no entanto esta situação não será abordada neste trabalho.

mente, tem-se que \mathfrak{H} não é explicitamente dependente de x_k conduzindo a $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(u_i, u_{i,j})$. Ainda, na ausência de forças de corpo ($b_i = 0$), \mathfrak{H} depende somente do gradiente de deslocamentos, sendo então $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(u_{i,j})$.

Tal função lagrangeana se manifesta como um potencial à medida que as componentes de tensões podem também ser obtidas a partir de

$$-\sigma_{ij} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial u_{j,i}} \quad (5.8)$$

assim como as componentes de forças de corpo podem ser escritas como

$$b_i = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial u_i} \quad (5.9)$$

Com o propósito de se identificar uma equação de balanço, define-se então a integral de ação \mathcal{A} associada à função lagrangeana sobre um domínio arbitrário Ω no espaço das variáveis independentes

$$\mathcal{A} = \int_{\Omega} \mathfrak{H}(x_i, u_j, u_{j,i}) d\Omega \quad (5.10)$$

a partir da qual, faz-se a variação nas variáveis dependentes u_j e $u_{j,i}$, como $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}$ e $\mathbf{u}_{,i} \rightarrow \mathbf{u}_{,i} + \delta \mathbf{u}_{,i}$ (GELFAND; FOMIN, 1963). Retendo somente os termos lineares em $\delta \mathbf{u}$ e $\delta \mathbf{u}_{,i}$ da expansão em série de Taylor de $\delta \mathcal{A}$ (KIENZLER; HERRMANN, 2000) pode-se identificar as equações de Euler-Lagrange, através da busca do ponto estacionário de $\delta \mathcal{A}$ (ponto estacionário de \mathcal{A} para uma variação espacial em uma posição material fixa (STEINMANN; SCHERER; DENZER, 2009))

$$\mathfrak{E}_k = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial u_k} - \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial u_{k,i}} = 0 \quad (5.11)$$

Finalmente, as equações locais de equilíbrio para a mecânica Newtoniana podem ser obtidas, equações estas chamadas de balanço de momento linear físico e estabelecem que as forças de corpo b_i perturbam o caráter livre de divergência do tensor de tensões de Cauchy

$$\sigma_{ji,j} = -b_i \quad (5.12)$$

O Princípio da Energia Potencial Total estabelece que a configuração que satisfaz o equilíbrio e as condições cinematicamente admissíveis é tal que minimiza a energia potencial total.

Por sua vez, para se obter uma equação de balanço na mecânica Eshel-

biana segue-se o método de Noether, que utiliza uma transformação \mathcal{A}^* da integral de ação associada à função lagrangeana através da transformação das variáveis dependentes \mathbf{u} e variáveis independentes \mathbf{x} , de acordo com

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &\rightarrow \mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \zeta \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{u} &\rightarrow \mathbf{u}^* = \mathbf{u} + \zeta \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\end{aligned}\quad (5.13)$$

para um parâmetro ζ pequeno o suficiente para fazer com que somente os termos de ordem zero e os termos lineares em ε , numa expansão em série de Taylor da função transformada, devam ser retidos em detrimento dos termos de ordem superior. As funções $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ e $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ são arbitrárias e são chamadas simetrias variacionais (KIENZLER; HERRMANN, 2000). Deve-se observar que a transformação pode gerar uma translação, ou mesmo uma rotação, de corpo rígido. Esta operação corresponde a uma variação material em uma posição espacial fixa (STEINMANN; SCHERER; DENZER, 2009).

A partir da função lagrangeana transformada \mathcal{A}^* define-se uma variável \mathbf{P} chamada corrente, como (KIENZLER; HERRMANN, 2000)

$$\mathbf{P} = \boldsymbol{\zeta} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathbf{u}_{,x}} + \boldsymbol{\phi} \left(\mathfrak{H} - \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathbf{u}_{,x}} \mathbf{u}_{,x} \right) \quad (5.14)$$

ou em notação indicial

$$P_i = \zeta_k \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial u_{k,i}} + \phi_j \left(\mathfrak{H} \delta_{ij} - \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial u_{k,i}} u_{k,j} \right) \quad (5.15)$$

Usando (5.7) e (5.8), o termo entre parênteses em (5.15) é definido como tensor de Eshelby

$$\Sigma_{ij} = (\mathfrak{W} + \mathfrak{Y}) \delta_{ij} - \sigma_{ik} u_{k,j} \quad (5.16)$$

que, juntamente com a substituição de (5.8) fornece

$$-P_i = \zeta_j \sigma_{ij} + \phi_j \Sigma_{ij} \quad (5.17)$$

Adicionalmente, a partir da derivada explícita da função lagrangeana \mathfrak{H} com relação à posição x_i

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x_i} = - \frac{\partial (\mathfrak{W} + \mathfrak{Y})}{\partial x_i} = \rho_i \quad (5.18)$$

define-se uma *força sobre heterogeneidade* ρ_i .

Então, pelo primeiro teorema de Noether², se existe uma lei de conservação verifica-se que $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, o que conduz a constatação de que a corrente é livre de divergência, ou seja

$$P_{i,i} = \frac{dP_i}{dx_i} = 0 \quad (5.19)$$

e que, por consequência, fornece as equações de equilíbrio local para a mecânica Eshelbiana. Estas equações de equilíbrio são expressas como

$$\Sigma_{ji,j} = -\rho_i \quad (5.20)$$

e estabelecem que o caráter livre de divergência do tensor de Eshelby é perturbado pelas forças de heterogeneidade ρ_i e são chamadas de balanço de momento linear material.

5.2 Formulação fraca na mecânica configuracional e método das forças configuracionais

A condição de equilíbrio na forma forte na mecânica configuracional estabelece, agora usando notação matricial e considerando o caso bidimensional, que as forças sobre heterogeneidades físicas ρ perturbam o caráter livre de divergência do tensor tensão de Eshelby Σ , de modo que

$$\mathbb{L}^T \Sigma(\mathbf{u}) + \rho = \mathbf{0}, \quad \text{em } \Omega \quad (5.21)$$

na qual

- $\Sigma = \{\Sigma_x, \Sigma_y, \Sigma_{xy}, \Sigma_{yx}\}^T$ é o vetor de componentes do tensor tensão de Eshelby; e
- $\rho = \{\rho_x, \rho_y\}^T$ é o vetor das componentes da força sobre heterogeneidade (física),

devendo-se notar que geralmente o tensor de Eshelby não é simétrico (KIENZLER; HERRMANN, 2000). Deste modo, o operador diferencial \mathbb{L} é expresso

²O primeiro teorema de Noether afirma que a cada simetria contínua corresponde uma corrente que satisfaz uma equação de continuidade ou, equivalentemente, uma quantidade que é conservada. O termo simetria refere-se a um conjunto de transformações infinitesimais definidas num conjunto de variáveis, dependentes ou independentes, que levam a expressão da integral de ação a ser invariante em forma. Assim, o teorema estabelece que, se a integral de ação \mathcal{A} é invariante com relação a uma transformação, como em (5.13), então existe uma lei de conservação (KIENZLER; HERRMANN, 2000).

por

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

De acordo com Mueller e Maugin (2002), a condição variacional de equilíbrio correspondente à (5.21) pode ser expressa por

$$\int \int_{\Omega} (\mathbb{L}^T \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{v} l_z dx dy = 0 \quad (5.23)$$

a partir da qual a integração por parte conduz à

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{v})^T \mathbb{N} \boldsymbol{\Sigma} ds - \int \int_{\Omega} (\mathbb{L} \mathbf{v})^T \boldsymbol{\Sigma} l_z dx dy + \int \int_{\Omega} (\mathbf{v})^T \boldsymbol{\rho} l_z dx dy \quad (5.24)$$

sendo o vetor normal \mathbb{N} dado por

$$\mathbb{N} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y & 0 \\ 0 & n_y & 0 & n_x \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Supondo que a função teste \mathbf{v} , tal que $\mathbf{v} = \{v_x, v_y\}^T$, se anula no contorno, a primeira integral é idênticamente nula, porque o contorno é considerado estacionário no sentido de que não ocorrem mudanças de posição material (MUELLER; MAUGIN, 2002). Consequentemente,

$$\int \int_{\Omega} (\mathbb{L} \mathbf{v})^T \boldsymbol{\Sigma} l_z dx dy = \int \int_{\Omega} (\mathbf{v})^T \boldsymbol{\rho} l_z dx dy \quad (5.26)$$

é a equação variacional de equilíbrio.

Notando que todas as quantidades envolvidas são conhecidas uma vez que a solução do campo de deslocamento foi determinada e visto que a condição (5.26) deve ser satisfeita para uma variação arbitrária, o único passo ainda necessário é expressar a variação como uma aproximação de Galerkin. Agora, tal aproximação é composta apenas pela PU, sem enriquecimentos (GLASER; STEINMANN, 2006) porque seu papel é somente de localizar a contribuição das integrais em cada nó.

Então, inserindo a aproximação de Galerkin $\tilde{\mathbf{v}} = \sum_{\alpha=1}^N \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha} \left\{ \begin{array}{c} v_{x\alpha} \\ v_{y\alpha} \end{array} \right\} = \boldsymbol{\Phi}_{\alpha} \mathbb{U}_{\alpha}$ tem-se

$$\sum_{\alpha=1}^N \mathbb{U}_{\alpha}^T \left[- \int \int_{\Omega^e} \mathbb{B}_{\alpha}^T \boldsymbol{\Sigma} l_z dx dy + \int \int_{\Omega^e} \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}^T \boldsymbol{\rho}_{\alpha} l_z dx dy \right] = 0 \quad (5.27)$$

com $\mathbb{B}_{\alpha} = \mathbb{L} \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}$, que deve ser satisfeita para valores nodais \mathbb{U}_{α} arbitrários, de tal modo que o termo entre colchetes deve se anular. Este fato acaba por definir as forças configuracionais nodais como

$$\mathbf{G}_{\alpha}^e = \left\{ \begin{array}{c} G_{x\alpha}^e \\ G_{y\alpha}^e \end{array} \right\} = \int \int_{\Omega^e} \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha} \boldsymbol{\rho}_{\alpha} l_z dx dy = \int \int_{\Omega^e} \mathbb{B}_{\alpha}^T \boldsymbol{\Sigma} l_z dx dy \quad (5.28)$$

As forças configuracionais \mathbf{G}_{α}^e de todos os N_{ad} elementos adjacentes ao nó α então são somadas para gerar a força configuracional no nó

$$\mathbf{G}_{\alpha} = \bigcup_{e=1}^{N_{ad}} \mathbf{G}_{\alpha}^e \quad (5.29)$$

Tem-se, com (5.28) e (5.29) uma ferramenta, para pós-processamento da solução, que será usada com o objetivo de se estimar o fator de intensidade de tensões através da integral \mathcal{J} como uma força configuracional que se manifesta na ponta da trinca.

5.3 Comparação com outros meios de cálculo da integral \mathcal{J}

Na mecânica da fratura elástica linear a severidade de uma trinca pode ser calculada através do fator de intensidade de tensão K ou pela taxa de variação da energia de deformação \mathcal{R} .

Os métodos pelos quais tais medidas de severidade são calculadas podem ser agrupados em dois grandes grupos: métodos diretos e métodos indiretos. Basicamente, todos os métodos são técnicas de pós-processamento da solução. Os métodos diretos conduzem ao valor do fator de intensidade de tensões K através de uma abordagem local, sem o cálculo do correspondente valor da taxa de variação de energia de deformação (ANDERSON, 2005). Para isso, entretanto, em aproximações pelo MEF, necessitam de malhas refinadas em torno da frente da trinca e o uso de elementos *quarter point* (BARSOUM,

1974). Estes elementos *quarter point* são elementos quadráticos, quadriláteros ou triangulares, nos quais os nós intermediários em arestas conectadas ao nó singular são deslocados para um quarto do comprimento da aresta, em direção à singularidade.

Medidas energéticas, por outro lado, se agrupam na classe dos métodos indiretos e são considerados os mais acurados (GINER et al., 2002). O parâmetro de avaliação nestes casos é a taxa de liberação de energia de deformação \mathcal{R} . Os métodos indiretos mais difundidos são integrais de contorno, tais como a integral \mathcal{J} (RICE, 1968), o *método da derivada de rigidez* (PARKS, 1974) (HELLEN, 1975) e o *método da integral de domínio equivalente* (LI; SHIH; NEEDLEMAN, 1985) (DELORENZI, 1985).

A integral \mathcal{J} de Rice (RICE, 1968) é expressa como

$$\mathcal{J} = \lim_{\Gamma_0 \rightarrow 0} \int_{\Gamma_0} \left[(\mathfrak{W} + \mathfrak{W}) \delta_{1i} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right] n_i d\Gamma \quad (5.30)$$

e notando a definição do tensor de Eshelby (5.16), percebe-se que (5.30) é uma particularização da força sobre singularidade definida por Eshelby (ESHELBY, 1951) na lei de conservação expressa por

$$\mathcal{J} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\rho} dV = \int_S \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{n} dA = 0 \quad (5.31)$$

que, basicamente, integra a projeção normal do tensor de Eshelby sobre uma linha ou superfície, respectivamente, para problemas em duas ou três dimensões, que envolve a frente da trinca. Trata-se de uma entidade vetorial que representa a resultante de forças configuracionais sobre as heterogeneidades contidas no interior do volume delimitado por uma superfície S (GURTIN, 2000).

Uma conclusão importante é que (5.31) independe da superfície no sentido de que seu valor é inalterado quando a superfície sobre a qual se efetua a integração é modificada, desde que o defeito (ou defeitos) permaneça envolto e nenhum outro seja atingido. Esta é característica importante para o cálculo da força sobre um defeito, o que é consequência do caráter livre de divergência do tensor de tensões de Eshelby (KIENZLER; HERRMANN, 2000).

Quando da implementação numérica, entretanto, o cálculo da integral \mathcal{J} (5.30) envolve desafios. A definição do contorno ou superfície de integração usando arestas ou faces elementares no MEF, apesar de parecer uma escolha óbvia, pode não ser interessante em virtude da descontinuidade dos campos de deformações (e consequentemente tensões).

Li, Shih e Needleman (1985) formularam uma medida energética por

uma integral de área (ou volume), denominada integral de área equivalente (do inglês, *equivalente domain integral*, EDI), que é mais versátil, comparado à definição original da integral \mathcal{J} de Rice (1968), pois é de implementação mais simples e mais eficiente numericamente. Esta proposta sugere

$$\mathcal{J} = \int_{\Omega^*} \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - (\mathfrak{W} + \mathfrak{Y}) \delta_{1i} \right] \frac{\partial Q}{\partial x_i} d\Omega \quad (5.32)$$

com Ω^* sendo uma porção do domínio que envolve toda a frente da trinca. Além disso, Q é uma função suficientemente suave que varia entre 0 e 1 e que corresponde à componente x do campo de velocidade, com relação ao sistema local de coordenadas localizada na frente da trinca, definido como sendo a derivada das coordenadas espaciais dos nós com relação ao comprimento da trinca, similar ao *método da derivada de rigidez* (PARKS, 1974) (GINER et al., 2002).

O método da integral de domínio equivalente (EDI) é similar ao método da extensão virtual da trinca (do inglês, *virtual crack extension*). No método da extensão virtual (DELORENZI, 1985) se considera que pontos materiais no interior de um contorno Γ_0 , ao redor da frente da trinca, experimentam uma translação de corpo rígido Δa na direção x_1 , enquanto os pontos materiais exteriores a um contorno maior Γ_1 permanecem fixos. Assim, na região entre os contornos Γ_0 e Γ_1 , os pontos experimentam uma translação de Δx_1 . Para uma material elástico, deLorenzi (1985) mostrou que a taxa de variação da energia é dada por

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\Delta a} \int_{\Omega^*} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - \mathfrak{W} \delta_{i1} \right) \frac{\partial \Delta x_1}{\partial x_i} d\Omega \quad (5.33)$$

com \mathfrak{W} sendo a densidade de energia de deformação. Em (5.33), é suposto que a espessura seja unitária, que o crescimento da trinca ocorra na direção x_1 , ausência de forças de corpo no interior de Γ_1 e ausência de forças de superfície nas faces da trinca. Notar que $\partial \Delta x_1 / \partial x_1 = 0$ fora de Γ_1 e no interior de Γ_0 . Assim, a integração em (5.33) necessita ser executada somente na região anelar entre Γ_0 e Γ_1 .

Logo, comparando (5.33) com (5.32) nota-se que as duas expressões são idênticas se $Q = \Delta x_1 / \Delta a$, de modo que Q pode ser interpretado como um deslocamento virtual normalizado, apesar de a dedução de Li, Shih e Needleman (1985) não requerer tal interpretação. A função Q é meramente uma ferramenta matemática para se obter uma integral de domínio que é mais adequada para implementação numérica (ANDERSON, 2005).

De acordo com Giner et al. (2002) uma desvantagem dos métodos

energéticos é a dificuldade em se obter estimativas independentes de K associados a cada modo de abertura de trinca, K_I , K_{II} ou K_{III} em modos mistos, requerendo métodos de decomposição de campo como, por exemplo, Bui (1983).

Métodos energéticos relacionados ao conceito de extensão virtual da trinca podem ser interpretados como análise de sensibilidade à mudança de forma supondo que existe uma única variável de projeto, por exemplo, no caso bidimensional. Assim, pode-se interpretar como a variação da energia total associada a uma translação unitária do defeito. Neste sentido, a função Q em (5.32) pode ser interpretada como a velocidade de mudança de forma e a parcela entre parênteses é referida como tensor energia associada à mudança de forma de primeira ordem (TAROCO, 2000).

O método da força configuracional apresentado na Seção 5.2 é diretamente relacionado à integral equivalente em domínio (EDI) de Li, Shih e Needleman (1985) mas, enquanto a EDI calcula somente uma quantidade energética escalar (5.32), o método da força configuracional determina uma quantidade \mathbf{G}_α de natureza vetorial (5.29), conjugada às mudanças materiais, ou em outras palavras, mudanças na posição material dos nós.

A variação material em uma posição espacial fixa geralmente não fornece um ponto estacionário, mas define uma variação da energia potencial total. Além disso, mudanças configuracionais são permitidas somente com redução da energia potencial (STEINMANN; SCHERER; DENZER, 2009).

Assim, reconhece-se que a energia total do sistema Π decresce de $\Delta\Pi = -\mathcal{R}$ à medida que o comprimento da trinca aumenta (GRIFFITH, 1921). A equação de balanço de energia então é enunciada como $\Delta\Pi + \mathcal{R} = 0$, sendo \mathcal{R} a energia de superfície específica por unidade de avanço da trinca, ou seja, é a energia liberada pelo avanço da trinca que é absorvida na criação de novas superfícies. O decréscimo da energia total do sistema por unidade de extensão da trinca é então chamada taxa de restituição da energia \mathcal{R} .

No caso de uma trinca, o módulo da força material \mathbf{G}_α que emana da raiz da trinca na direção de provável crescimento desta mas com sentido contrário corresponde ao valor da integral J . Esta força material pode ser interpretada como uma força restauradora. Ainda, como se trata de uma solução aproximada, podem ser geradas forças configuracionais em todos os nós da malha. Estas forças configuracionais espúrias indicam que uma mudança na posição do nó fornece uma malha com menos conteúdo de energia potencial (MUELLER; MAUGIN, 2002) e podem ser utilizadas para o propósito de estimação de erro, como proposto por Ruter e Stein (2007).

5.4 Avaliações numéricas

Além da razão exposta na Seção 5.3, a natureza vetorial da grandeza calculada que fornece informação sobre a severidade da trinca e a provável direção de crescimento, vale salientar que o método da força configuracional foi escolhido também devido à facilidade de implementação, por envolver somente integral no domínio dos elementos. Este aspecto é também interessante inclusive para as aproximações com funções PU $C^0(\Omega)$ convencionais de elementos finitos, visto que o método é mais conveniente devido aos próprios requisitos de continuidade da própria definição convencional da integral \mathcal{J} (SURANA; AHMADI; REDDY, 2002).

Novamente, foi considerado o problema investigado no Capítulo 3. Foram adotadas as mesmas estratégias de discretização. Primeiramente, examinou-se o efeito da redução do círculo usado para o enriquecimento geométrico (Figura 4.1). Na sequência, aplicou-se o padrão topológico de enriquecimento.

As forças configuracionais são calculadas como descrito na Seção 5.2, numa etapa de pós-processamento da solução, usando (5.28) e (5.29). Salienta-se que, como as forças de superfície são prescritas de acordo com as tensões calculadas pela solução analítica (4.24) com $K_I = 1, 0$, conhece-se previamente o valor exato da integral \mathcal{J} .

Na mecânica da fratura elástica linear, a taxa de restituição da energia de deformação \mathcal{R} é igual à integral \mathcal{J} . Assim, conforme estabelecido por Irwin (1957), tem-se a relação entre a taxa de restituição da energia \mathcal{R} e os fatores de intensidade de tensão, para problemas planos, expressa como

$$\mathcal{R} = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E^*} \quad (5.34)$$

com $E^* = E$ para estado plano de tensões e $E^* = E(1 - \nu^2)$ para estado plano de deformações.

Primeiramente, para o padrão geométrico de enriquecimento com as funções (3.20), observa-se na Figura 5.1 o erro relativo no cálculo da integral \mathcal{J} contra o número de graus de liberdade, considerando PU $C^0(\Omega)$ convencional. Pode-se notar que a redução da área de enriquecimento de R1 para R2 afeta a taxa de convergência à medida que as linhas tracejadas se afastam das correspondentes linhas contínuas, mesmo aumentando o grau de enriquecimento p , efetuado adição de funções do conjunto $\mathcal{L}_{\alpha_i}^p$, similar a (3.23).

No caso de aproximação com PU $C^\infty(\Omega)$, a Figura 5.2 permite observar que a influência da redução da região onde se aplica o enriquecimento

de frente de trinca é minimizada. Esta conclusão é possível notando que, para as três primeiras malhas, praticamente ocorre a sobreposição das linhas tracejadas e contínuas.

Com relação à integral \mathcal{J} , calculada através da força configuracional que se manifesta no nó sobre a frente da trinca, já chama a atenção a maior inclinação nos trechos iniciais das curvas para as funções contínuas. Outro aspecto importante é o fato de as curvas contínuas e tracejadas evoluírem praticamente juntas o que é consequência da menor dependência da dimensão da região enriquecida com as funções singulares.

Muito embora os valores no fim do processo de refinamento p sejam similares em ordem de grandeza para os dois casos, poderia-se argumentar que os erros obtidos com a PU $C^0(\Omega)$ são menores, para um dado montante de graus de liberdade. Deve-se reconhecer, novamente, que tal aspecto pode inviabilizar a utilização de funções contínuas.

Todavia, buscando esclarecer se há vantagem em utilizar a continuidade, faz-se o registro das taxas de convergência relativas à alguns segmentos das curvas das Figuras 5.1 e 5.2. Nota-se que o número de graus de liberdade de cada um dos primeiros pontos da Figura 5.2, relativos a $b = 1$, é igual ao número de graus de liberdade de cada um dos segundos pontos da Figura 5.1, relativos a $b = 2$. Isto se deve ao fato, já citado na Seção 4.4.1, de que para um dado grau b , a aproximação com PU $C^k(\Omega)$ requer mais funções de enriquecimento p que uma aproximação com PU $C^0(\Omega)$ convencional.

Logo, para efeito de comparação, considera-se o segundo segmento das curvas da Figura 5.1 e o primeiro segmento das curvas da Figura 5.2. Assim, tem-se a mesma quantidade inicial de graus de liberdade e a mesma variação em ambas situações. A Tabela 5.1 registra as taxas de convergência. Tem-se que a convergência com funções suaves é mais acentuada, já para as malhas M1 e M2. É também notório que para R2 a PU $C^\infty(\Omega)$ fornece maiores inclinações que a PU convencional, em todas as malhas. Isto sugere que a redução da área sobre a qual se aplica o enriquecimento exerce menor influência na presença da regularidade elevada da PU $C^\infty(\Omega)$.

Por fim, a Figura 5.3 apresenta o resultado para o caso de enriquecimento através do padrão topológico, como na Figura 4.11. Novamente, constata-se que usando PU $C^\infty(\Omega)$ são possíveis erros com menor ordem de grandeza que qualquer das discretizações com PU $C^0(\Omega)$ convencional. A mesma saturação observada nas Figuras 4.12 e 4.13 se repete para erro relativo na integral \mathcal{J} em se tratando do enriquecimento topológico sobre PU $C^0(\Omega)$.

Salienta-se que para o propósito da integração em área envolvida no

Tabela 5.1: Comparação entre inclinações das curvas de convergência do erro relativo na integral \mathcal{J} para aproximações com PU $C^0(\Omega)$ e $C^\infty(\Omega)$

		M1	M2	M3	M4
R1	$C^0(\Omega)$	-4,99	-8,19	-12,67	-11,42
	$C^\infty(\Omega)$	-6,53	-8,53	-9,09	-9,47
R2	$C^0(\Omega)$	-3,89	-4,03	-6,45	-5,41
	$C^\infty(\Omega)$	-6,28	-6,80	-8,15	-8,14

cômputo das forças configuracionais (5.28) utilizou-se exatamente a mesma quadratura utilizada para o cálculo das matrizes de rigidez elementares e para o cálculo da energia de deformação ou a norma $\mathcal{H}^1(\Omega)$, como descrito na Seção 4.4.2.

Fica claro que a regularidade contribui para a representação do enriquecimento na região de interesse à medida que se tem menor influência da dimensão da região enriquecida e, ainda, permitindo enriquecimento de um número reduzido de nós.

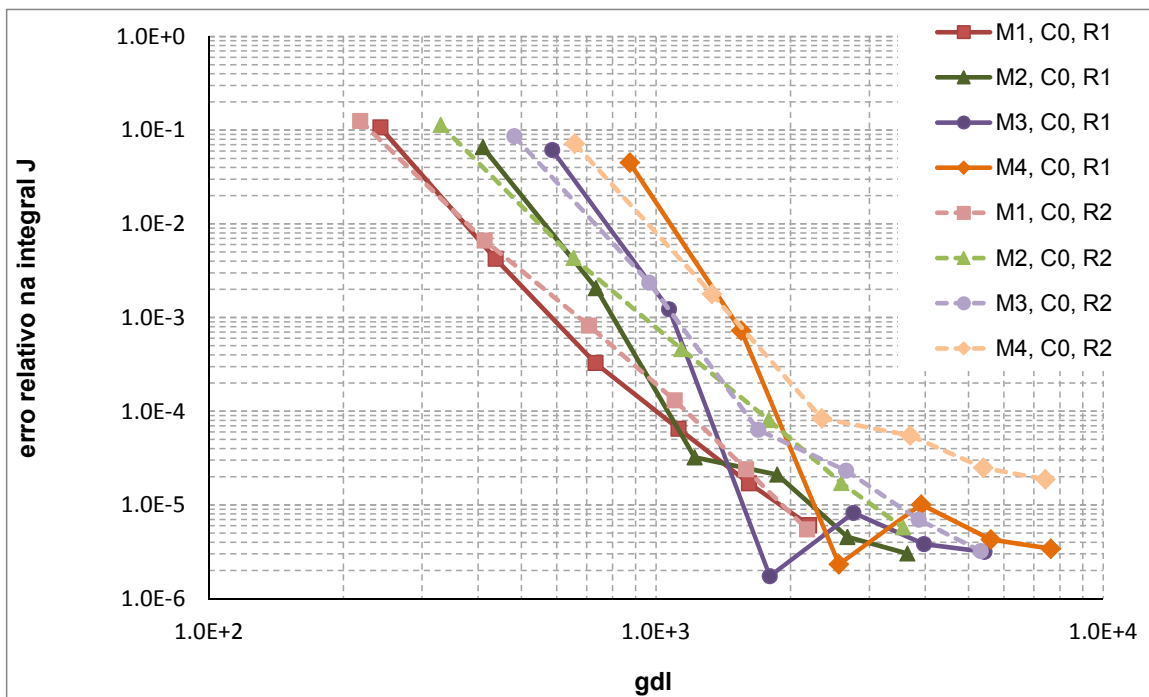


Figura 5.1: Erro relativo no cálculo da integral \mathcal{J} mediante força configuracional. Aproximação considerando PU $C^0(\Omega)$ convencional. Efeito do enriquecimento polinomial uniforme. Enriquecimento com funções de frente de trinca segundo padrões geométricos R1 e R2.

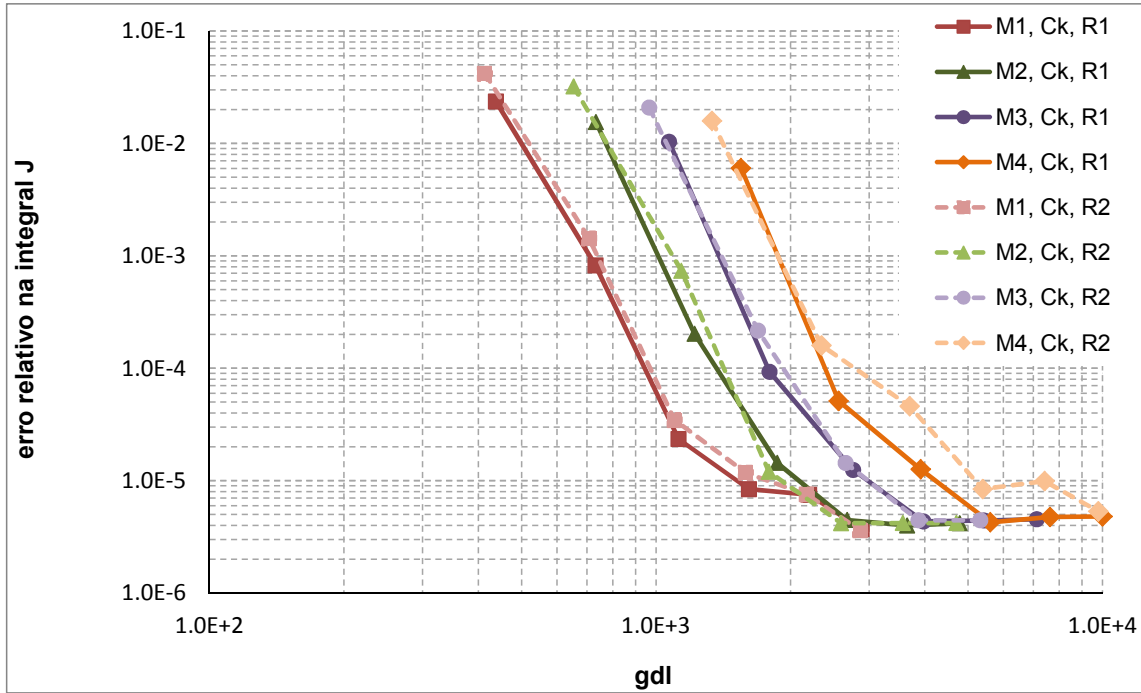


Figura 5.2: Erro relativo no cálculo da integral \mathcal{J} mediante força configuracional. Aproximação considerando PU contínua. Efeito do enriquecimento polinomial uniforme. Enriquecimento com funções de frente de trinca segundo padrões geométricos R1 e R2.

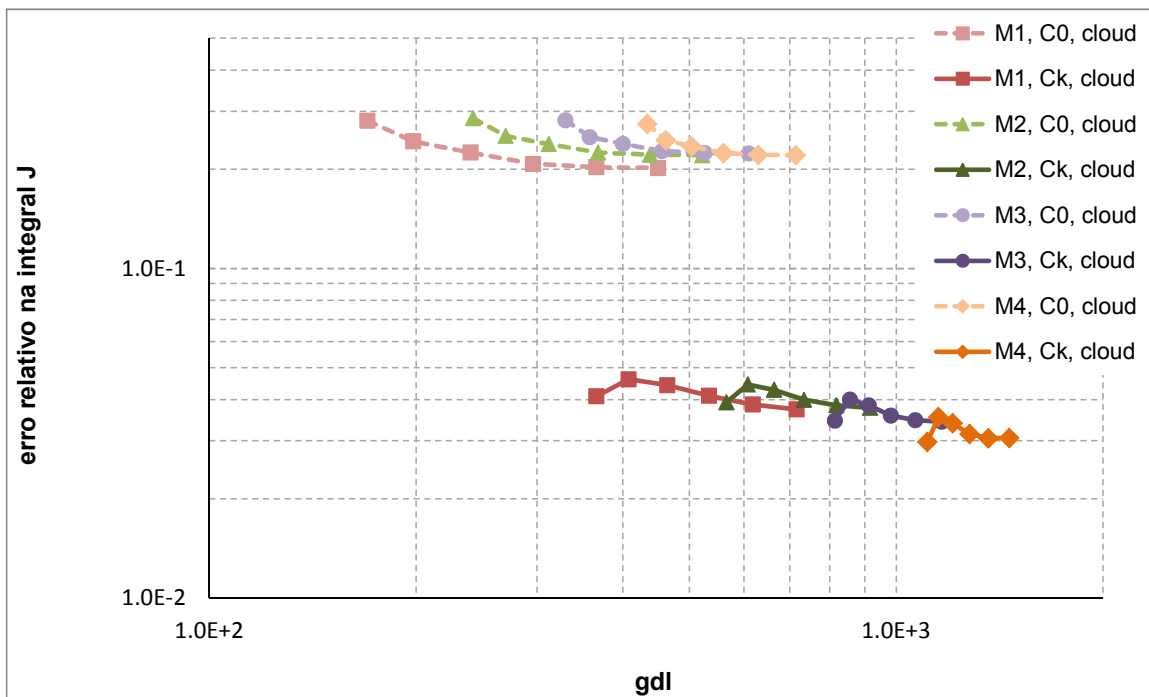


Figura 5.3: Erro relativo no cálculo da integral J mediante força configuracional. Enriquecimento com funções de frente de trinca segundo padrão topológico. Enriquecimento polinomial nos mesmos nós que receberam enriquecimento singular.

6 ESTIMAÇÃO DE ERRO

O método residual implícito em subdomínios é adequado às aproximações via MGEF por fornecer medidas nodais de erro. Assim, apresenta-se uma adaptação do método às funções suaves buscando extrair a excitação para os problemas locais de estimativa de erro diretamente do pós-processamento do campo de deslocamentos aproximado. O procedimento é verificado mediante avaliação da efetividade dos indicadores e estimadores em problemas com solução analítica.

6.1 Definição do erro de discretização

Seja \mathbf{u}_p a solução do problema variacional discreto (4.23), obtida de um subespaço de aproximação \mathcal{U}_h (veja Seção 4.3) gerado pelas funções da partição da unidade e pelo enriquecimento. Então, o erro de uma aproximação \mathbf{u}_p , tal que $\mathbf{e}_p \in \mathcal{U}$, pode ser definido como

$$\mathbf{e}_p = \mathbf{u} - \mathbf{u}_p \quad (6.1)$$

onde \mathbf{u} se refere à solução exata do modelo matemático (4.8), sendo $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$. Substituindo, $\mathbf{u} = \mathbf{e}_p + \mathbf{u}_p$ em (4.8), e considerando a linearidade da forma bilinear $\mathcal{B}(\bullet, \bullet)$, pode-se escrever

$$\mathcal{B}(\mathbf{e}_p + \mathbf{u}_p, \mathbf{v}) = \mathcal{L}(\mathbf{v}) \therefore \mathcal{B}(\mathbf{e}_p, \mathbf{v}) = \mathcal{L}(\mathbf{v}) - \mathcal{B}(\mathbf{u}_p, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (6.2)$$

sendo \mathcal{V} o espaço das variações admissíveis (veja Seção 4.2.2).

Uma equação global para o erro pode ser construída como: *encontrar* $\mathbf{e}_p \in \mathcal{U}$ tal que

$$\mathcal{R}(\mathbf{e}_p, \mathbf{v}) = \mathcal{R}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (6.3)$$

onde o funcional residual $\mathcal{R}(\bullet)$, equivalente variacional do residual na forma forte, quando não se verifica a condição estabelecida pela equação (4.6), é definido como

$$\mathcal{R}(\mathbf{v}) = \mathcal{L}(\mathbf{v}) - \mathcal{B}(\mathbf{u}_p, \mathbf{v}) \quad (6.4)$$

supondo, sem perda de generalidade, que as condições de contorno essenciais sejam exatamente satisfeitas.

Se na resolução da forma discretizada de (6.3) for utilizado o mesmo

espaço de aproximação empregado na solução do campo de deslocamentos aproximado, verifica-se a condição de ortogonalidade de Galerkin

$$\mathcal{B}(\mathbf{e}_p, \mathbf{v}_p) = \mathcal{R}(\mathbf{v}_p) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_p \in \mathcal{V}_h \quad (6.5)$$

constatação esta também relacionada à chamada condição de otimalidade. A condição de otimalidade estabelece que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_p\|_E = \min \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_p\|_E \quad \forall \mathbf{v}_p \in \mathcal{V}_h \quad (6.6)$$

considerando a definição da norma em energia (4.12), cuja interpretação assegura que a solução de elementos finitos de (4.3) é a melhor possível dentre as funções teste do espaço de variações admissíveis.

Em virtude da forma bilinear ser positiva definida, tem-se que o funcional residual é superiormente limitado, pois

$$\|\mathcal{R}\|_{\mathcal{V}^*} = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)} \frac{|\mathcal{R}(\mathbf{v})|}{\|\mathbf{v}\|_E} = \|\mathbf{e}_p\|_E = \sqrt{\mathcal{B}(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_p)} \quad (6.7)$$

onde $\|\mathcal{R}\|_{\mathcal{V}^*}$ denota a norma do funcional residual no espaço dual \mathcal{V}^* e $\|\bullet\|_E$ é a norma em energia, conforme definida em (4.12).

Na sequência, é apresentado um breve histórico sobre o desenvolvimento de algumas metodologias utilizadas para se estimar o erro \mathbf{e}_p em termos da sua norma em energia, que é uma grandeza que caracteriza o erro globalmente. Deve-se notar que se faz referência à estimação do erro uma vez que conhecê-lo de fato somente é possível no caso em que se disponha da solução exata \mathbf{u} de (4.8).

Salienta-se também que a ênfase é dada sobre os *estimadores residuais implícitos*, que consistem em uma classe de estimadores de erro pós-solução, diferentemente dos estimadores *explícitos* e dos estimadores baseados em *recuperação* de campos tensões (AINSWORTH; ODEN, 2000) (GRÄTSCHE; BATHE, 2005).

6.2 Estimativa do erro global da aproximação: medida via norma em energia

A equação variacional do erro (6.3) poderia ser resolvida globalmente, de forma aproximada, usando ou uma malha bastante refinada ou funções de ordem mais elevada. No entanto, tal estratégia não seria ótima no sentido de custo computacional, pois seria equivalente a calcular uma aproximação

melhor para o problema original, muito embora sua solução pudesse indicar, pelo menos qualitativamente, em quais regiões do domínio o erro é mais acentuado.

Uma primeira tentativa de se estimar a norma em energia do erro posteriormente à solução (também conhecida como “estimativa *a-posteriori* do erro”) consistiu nos estimadores explícitos, que foram originalmente propostos por Babuška e Rheinboldt (1979), no caso de problemas em uma dimensão. O caso bidimensional foi considerado no trabalho de Babuška e Miller (1987).

Tais estimadores explícitos utilizam os dados disponíveis de uma dada aproximação e fornecem um limite superior do erro de discretização, envolvendo uma constante, usando-se para isso estimativas clássicas da análise funcional, que podem ser encontradas, por exemplo, em Oden e Reddy (1976). É desejável que o estimador seja eficiente no sentido de que a constante deva existir, de forma que não dependa do tamanho da malha, e que também permita definir um limite inferior. A obtenção de estimadores explícitos com limites superior e inferior foi tratada por Verfürth (1994).

Para isso, são calculados o resíduo no interior dos elementos, $\mathbf{r} = \mathbf{b} + \text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_p)$, o resíduo no contorno de Neumann, $\mathbf{R} = \bar{\mathbf{t}} - \mathbf{t}$, e o salto das tensões nas arestas dos elementos, $[[\mathbf{t}(\mathbf{u}_p)]] = \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{K}} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{K}} + \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{K}'} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{K}'}$, definido sobre cada aresta interior γ separando quaisquer dois elementos \mathcal{K} e \mathcal{K}' , que representa a descontinuidade da aproximação do campo de tensões sobre a interface. Cada uma destas variáveis são bem definidas graças à suposta suavidade dos dados, \mathbf{b} , $\bar{\mathbf{t}}$ e \mathbb{C} , e da regularidade da aproximação \mathbf{u}_p quando restrita a um único elemento.

Uma breve exposição sobre estimadores explícitos pode ser encontrada em Ainsworth e Oden (2000).

Por outro lado, o método residual implícito consiste em decompor o problema residual global em problemas residuais locais, quer seja nos elementos ou em subdomínios formados por grupos de elementos. Este método trata diretamente tanto o membro do lado esquerdo quanto o membro do lado direito da equação variacional do erro (6.3), buscando uma solução local que a satisfaça, gerando novos sistemas de equações locais. Desta forma, pode-se reter mais a estrutura matemática do problema físico que os estimadores explícitos e assim espera-se que produzam estimativas mais acuradas do erro. Descrições detalhadas de variantes do método podem ser encontrados em Ainsworth e Oden (2000), Babuška e Strouboulis (2001) e Babuška, Whiteman e Strouboulis (2011).

A origem do método residual implícito elementar remonta a Dem-

kowicz, Oden e Strouboulis (1984) e Bank e Weiser (1985). Em métodos residuais convencionais o erro exato é estimado como solução aproximada de um problema variacional do erro construído sobre um espaço mais rico que o original, usado para aproximar a solução. Assim, os limites são calculados com relação a uma solução refinada e são válidos somente assintoticamente. O emprego de subespaços de funções tipo bolha para o método residual elementar aplicado a elementos de primeira ordem triangulares foi sugerido por Bank e Weiser (1985). O uso de condições de contorno de Dirichlet homogêneas, consequência da utilização de subespaços com funções tipo bolha, conduz a um limite inferior da norma em energia do erro global. Por outro lado, apesar dos métodos implícitos em elementos com condições de contorno de Neumann conduzirem a melhores estimativas do erro na norma em energia, o custo computacional envolvido na consideração da perda da suavidade da solução aproximada, devido à descontinuidade do campo de tensões, é elevado.

Assim sendo, na tentativa de se garantir a existência de solução para os problemas locais e obter limites superiores do erro, se faz necessário definir condições de contorno de Neumann compatíveis com o resíduo no interior dos elementos de forma a garantir que os dados representados por \mathbf{R} , \mathbf{r} e $\llbracket \mathbf{t}(\mathbf{u}_p) \rrbracket$ sejam ortogonais ao núcleo da transformação adjunta, elemento por elemento.

Os modelos convencionais de elementos finitos satisfazem a forma fraca do equilíbrio que é expressa como um equilíbrio das forças internas nodais. Esta forma de equilíbrio nodal é a origem da necessidade de se estabelecer formas mais fortes de equilíbrio através de um pós-processamento apropriado da solução.

O pós-processamento da solução para minimizar o salto das tensões nas arestas dos elementos consiste de um processo de equilibração com o objetivo de substituir $\llbracket \mathbf{t}(\mathbf{u}_p) \rrbracket$ por uma distribuição de tensões equilibradas $\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{X}}^{eq}(\mathbf{u}_p)$ nas arestas dos elementos.

Soluções equilibradas podem ser obtidas a partir de uma reanálise dual global, como sugerido por Almeida e Freitas (1991), mas a correspondente formulação pode não ser estável e tal procedimento envolve um custo computacional elevado.

Para se evitar o custo associado a uma reanálise global foi proposto por Ladevèze e Leguillon (1983) um método para se obter distribuições de tensões localmente equilibradas. Tal procedimento utiliza como dados as forças internas nodais resultantes em cada elemento e, por um equilíbrio variacional, determina distribuições de tensões estaticamente equivalentes que

não somente mantém cada elemento em equilíbrio com o resíduo interior, mas também define univocamente a interação entre dois elementos adjacentes.

Processos de equilibração também foram propostos por Ladevèze e Maunder (1996) e Ainsworth e Oden (1993). Algumas condições de equilibração com a derivação dos respectivos sistemas locais de equações algébricas para soluções aproximadas são apresentados e discutidos em Ainsworth e Oden (2000).

O método residual equilibrado então gera problemas locais, de dimensão infinita e com condições de contorno de Neumann, que conduzem diretamente a um limite superior teórico do erro. Todavia, os problemas locais são resolvidos aproximadamente, resultando na versão calculável do estimador, que pode não fornecer um limite superior de fato. Nestes casos, Babuška e Strouboulis (2001) sugerem ainda estimar o erro cometido na aproximação do erro estimado para melhorar o limite superior calculado.

Outras propostas para obtenção de soluções de referência mediante formulação dual, no âmbito dos estimadores implícitos equilibrados, foram apresentadas por Sauer-Budge et al. (2004) e Parés et al. (2006).

Realmente, é mais interessante, do ponto de vista de engenharia a obtenção de limites superiores garantidos, obtidos a partir da solução local exata. Anuvriev, Korneev e Kostylev (2007) sugerem o uso de campos equilibrados exatos a partir das equações diferenciais governantes para o propósito de estimação de erro, buscando obter um estimador calculável e garantidamente superior.

A dificuldade e o custo relacionados ao processo de equilibração dos dados de Neumann para os problemas residuais elementares motivaram a busca pelos procedimentos designados como livres de fluxos.

A decomposição do problema variacional do erro em subdomínios formados por grupos de elementos, conforme sugerido por Babuška e Rheinboldt (1978), ainda no âmbito dos estimadores explícitos, pode ser alcançada usando-se o conceito de partição da unidade. Isso permitiu formular o problema variacional local do erro de forma que o salto das tensões nas arestas internas do subdomínio de análise seja levado em consideração no cálculo do resíduo local, que se expressa como a excitação, sem a necessidade de procedimentos de equilibração e ainda tendo a vantagem de apresentar condições de contorno triviais.

O termo residual, $\mathcal{R}(\mathbf{v})$, da equação variacional do erro (6.3) pode ser ponderado por uma partição da unidade, formada pelas funções de forma convencionais de elementos finitos, subordinada a um grupo de elementos. Então, Carstensen e Funken (1999) propuseram buscar a solução local do

erro usando um subespaço de aproximação com funções que se anulam no contorno da nuvem, o que é equivalente a aplicar condições de contorno de Dirichlet homogêneas. Machiels, Maday e Patera (2000) mostraram que em problemas potenciais a técnica livre de fluxo conduz a problemas variacionais locais do erro bem postos. Condições de contorno de Dirichlet também foram usadas por Morin, Nochetto e Siebert (2003).

A abordagem de Prudhomme et al. (2004) difere das anteriores pela consideração de condições de contorno de Neumann homogêneas e também por introduzir uma ponderação da forma bilinear associada. Parés, Díez e Huerta (2006) também usam esta abordagem para problemas de elasticidade 2D e 3D e equacionam um limite superior do erro usando uma aproximação do erro. Um limite inferior do erro na norma em energia também pode ser recuperado, através da suavização do campo de erro que determina o limite superior, também usando-se o conceito de partição da unidade, conforme apresentado por Díez, Parés e Huerta (2003) ainda para o método residual em elementos.

De qualquer forma, uma deficiência presente na maioria das técnicas propostas é a não garantia de que a versão calculada do estimador forneça um limite superior da norma em energia do erro. Buscando superar esta dificuldade Cottreau, Díez e Huerta (2009) propõem uma técnica para calcular limites exatos, mediante energia complementar, para problemas de elasticidade 2D que é similar à apresentada por Almeida e Maunder (2009) quando a interpolação dos deslocamentos na solução compatível é no mínimo quadrática.

Muito embora ingredientes para melhorar a efetividade global do estimador se mostrem exitosos a efetividade local ainda é uma questão a ser discutida. O preço que se paga para obter sistemas de equações locais, que resultam diretamente da imposição de condições de Neumann homogêneas no contorno da nuvem de elementos, é que a compatibilidade entre nuvens adjacentes não é imposta. Desta forma, a função erro estimado obtida pelos processos em subdomínios e com condições de contorno de Neumann é buscada num subespaço dito quebrado e portanto é descontínua nas arestas interelementares, quando se utilizam aproximações com bases seccionalmente contínuas, ou seja, funções de forma convencionais $C^0(\Omega)$ de elementos finitos. A imposição desta compatibilidade demandaria condições de contorno internas entre as nuvens, destruindo a natureza local do cálculo. Deve-se ressaltar ainda que tal processo equacionado variacionalmente ainda não garante satisfação da equação diferencial de equilíbrio.

Devido à natureza nodal do enriquecimento do espaço de aproximação

particular do MGEF se tornou interessante procurar uma medida de erro associada aos nós. O método residual elementar foi implementado no contexto do MGEF por Barros, Proença e Barcellos (2004), onde um procedimento adaptativo de enriquecimento polinomial do espaço de aproximação foi proposto com o objetivo de alcançar a equidistribuição de uma medida de erro nodal. Tal medida nodal foi calculada a partir dos valores de erro nos elementos adjacentes a um nó, ponderados pelas relações entre as áreas (ou volumes) dos elementos e o somatório dentre todos elementos da nuvem. Diferentemente, Strouboulis et al. (2006) desenvolveram uma formulação de estimadores superiores e inferiores a partir de um formalismo completamente adaptado à natureza nodal das funções em MGEF.

Barros, Barcellos e Duarte (2007) avaliaram um procedimento p -adaptativo baseado em medidas nodais de erro quando utilizando espaços de funções com continuidade arbitrária, construídas usando o procedimento C^k -MGEF de Duarte, Kim e Quaresma (2006). Muito embora as funções sejam definidas em nuvens, o método residual equilibrado em elementos foi utilizado para determinação de um indicador de erro elementar a partir do qual, por ponderação de forma similar ao que foi feito em Barros, Proença e Barcellos (2004), foram obtidas medidas nodais de erro. Por outro lado, em Barros, Barcellos e Duarte (2009) foi formulado um estimador baseado em nuvens que, por construção, fornece diretamente um indicador de erro nodal. Esta última formulação foi adaptada para a utilização de funções de aproximação contínuas no presente trabalho. Aqui se propõe utilizar o resíduo da solução aproximada, na forma forte (contínuo por consequência), projetado sobre um subespaço de funções de referência para definir a excitação dos problemas variacionais do erro formulados nas nuvens.

6.3 Decomposição da equação variacional do erro

A partir da observação de que o funcional residual (6.4) é linear com relação a \mathbf{v} e com o auxílio da propriedade de partição da unidade verifica-se a igualdade expressa por

$$\mathcal{R}(\mathbf{v}) = \mathcal{R}\left(\sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha} \mathbf{v}\right) = \sum_{\alpha=1}^N \mathcal{R}(\varphi_{\alpha} \mathbf{v}) \quad (6.8)$$

onde φ_{α} representa qualquer tipo de partição da unidade. Esta igualdade representa a decomposição do funcional residual que inspirou os primeiros estimadores residuais implícitos livres de fluxos em problemas de condução de

calor (CARSTENSEN; FUNKEN, 1999) (MACHIELS; MADAY; PATERA, 2000) (MORIN; NOCHETTO; SIEBERT, 2003).

Assim, uma consequência é que se pode supor que a função erro \mathbf{e}_p (6.1) pode ser decomposta como

$$\mathbf{e}_p = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{e}_p^{\omega_\alpha} \quad (6.9)$$

sendo que as funções $\mathbf{e}_p^{\omega_\alpha} \in \mathcal{V}$ são soluções dos N problemas globais

$$\mathcal{B}(\mathbf{e}_p^{\omega_\alpha}, \mathbf{v}) = \mathcal{R}(\varphi_\alpha \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (6.10)$$

cada qual associado a uma nuvem ω_α (MARINÉ, 2005).

No entanto, observa-se que a função $\varphi_\alpha \mathbf{v}$, argumento em (6.8), é suportada apenas em ω_α , logo é possível perceber que $\mathcal{R}(\varphi_\alpha \mathbf{v})$ é suportado apenas em ω_α , ou seja, $\mathcal{R}(\varphi_\alpha \mathbf{v}) = 0$ quando $\omega_\alpha \cap \text{supp}(\mathbf{v}) = \emptyset$. Então, o funcional residual pode ser decomposto em contribuições locais definidas em cada nuvem, de modo que $\mathcal{R}(\varphi_\alpha \mathbf{v}) = \mathcal{R}(\varphi_\alpha \mathbf{v}|_{\omega_\alpha})$ com $\mathbf{v}|_{\omega_\alpha} \in \mathcal{V}(\omega_\alpha)$, a restrição de \mathcal{V} em ω_α , definida como

$$\mathcal{V}(\omega_\alpha) := \mathcal{V} \cap \mathcal{H}^1(\omega_\alpha, \mathbb{R}^2) \quad (6.11)$$

As funções $\mathbf{e}_p^{\omega_\alpha}$ não são definidas em todo o domínio Ω , mas somente na nuvem ω_α , muito embora possam ser extendidas além da nuvem fazendo seus valores fora da nuvem ω_α iguais a zero. Isto conduz a uma função que é geralmente descontínua através do contorno das nuvens, isto é, $\mathbf{e}_p^{\omega_\alpha} \in \mathcal{V}_{brok}$ com \mathcal{V}_{brok} sendo um chamado espaço quebrado, definido a partir de $\mathcal{V}(\Omega)$ através da relaxação do requisito de conformidade das funções, isto é, pode ser obtido pela soma direta dos espaços $\mathcal{V}(\omega_\alpha)$ como

$$\mathcal{V}_{brok} := \bigoplus_{\alpha=1}^N \mathcal{V}(\omega_\alpha) \quad (6.12)$$

Assim, $\mathbf{e}_p \in \mathcal{V}_{brok}$, com \mathbf{e}_p sendo a função erro global definida em (6.9).

Então, para se estabelecer problemas locais aproveitando a localização do funcional residual obtida com (6.8), a forma bilinear (4.9) é generalizada para aceitar funções do espaço quebrado como argumentos (PARÉS; DÍEZ; HURTA, 2006) e, desta forma, o problema variacional global do erro (6.3) pode ser substituído por um conjunto de problemas do erro em cada nuvem ω_α que consistem em: encontrar $\mathbf{e}_p^{\omega_\alpha} \in \mathcal{V}(\omega_\alpha)$ tal que

$$\mathcal{B}_{\omega_\alpha}^{\zeta_\alpha}(\mathbf{e}_p^{\omega_\alpha}, \mathbf{v}^{\omega_\alpha}) = \mathcal{R}_{\omega_\alpha}(\varphi_\alpha \mathbf{v}^{\omega_\alpha}) \quad \forall \mathbf{v}^{\omega_\alpha} \in \mathcal{V}(\omega_\alpha) \quad (6.13)$$

com a correspondente forma bilinear sendo expressa por

$$\mathcal{B}_{\omega_\alpha}^{\zeta_\alpha}(\mathbf{e}_p^{\omega_\alpha}, \mathbf{v}^{\omega_\alpha}) = \int \int_{\omega_\alpha} \zeta_\alpha \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}^{\omega_\alpha}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}_p^{\omega_\alpha}) l_z dx dy \quad (6.14)$$

sendo a ponderação efetuada através de uma função ζ_α . Esta ponderação foi sugerida por (PRUDHOMME et al., 2004) que considera $\zeta_\alpha = \varphi_\alpha$, isto é, a mesma PU associada à nuvem ω_α que foi usada na definição da família de funções (3.24) utilizada para aproximação do problema (4.23).

Em (6.13), o funcional residual na nuvem é definido como

$$\mathcal{R}_{\omega_\alpha}(\varphi_\alpha \mathbf{v}^{\omega_\alpha}) = \mathcal{L}_{\omega_\alpha}(\varphi_\alpha \mathbf{v}^{\omega_\alpha}) - \mathcal{B}_{\omega_\alpha}(\mathbf{u}_p, \varphi_\alpha \mathbf{v}^{\omega_\alpha}) \quad (6.15)$$

Então, seguindo a dedução apresentada em (BARROS; BARCELLOS; DUARTE, 2009) (BARROS et al., 2012) são definidos os termos componentes do funcional residual

$$\mathcal{L}_{\omega_\alpha}(\varphi_\alpha \mathbf{v}^{\omega_\alpha}) = \int \int_{\omega_\alpha} (\varphi_\alpha \mathbf{v}^{\omega_\alpha})^T \mathbf{b} l_z dx dy + \int_{\partial\omega_\alpha \cap \Gamma_N} (\varphi_\alpha \mathbf{v}^{\omega_\alpha})^T \bar{\mathbf{t}} l_z ds \quad (6.16)$$

que envolve o efeito das forças externas aplicadas, conforme (4.14) e com \mathbf{b} e $\bar{\mathbf{t}}$ definidos na Seção 4.2.1, e

$$\mathcal{B}_{\omega_\alpha}(\mathbf{u}_p, \varphi_\alpha \mathbf{v}^{\omega_\alpha}) = \int \int_{\omega_\alpha} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\varphi_\alpha \mathbf{v}^{\omega_\alpha}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_p) l_z dx dy \quad (6.17)$$

para se remover a parcela de energia associada à solução aproximada \mathbf{u}_p .

Adicionalmente, deve-se notar que a principal razão de se efetuar a localização do funcional residual pela partição da unidade, como em (6.8), é evitar qualquer tipo de integração de distribuição de tensões (ou fluxos) ao longo do contorno de nuvens internas, quando do cálculo de (6.16). Por consequência, os problemas locais possuem condições de contorno de Neumann homogêneas, exceto no caso de nuvens no contorno Γ_N de Ω , onde a integração em $\partial\Omega_\alpha \cap \Gamma_N$ é executada de forma convencional.

Assim, fica claro que a vantagem da chamada metodologia *livre de fluxos*, em se tratando de estimadores residuais implícitos, se deve a dois fa-

tores:

- condições de contorno de Neumann triviais, visto que a PU anula qualquer contribuição de contorno, no cômputo de (6.16);
- e, por consequência, a não necessidade de equilíbrio de tensões em qualquer aresta interelementar.

Salienta-se também que, como neste trabalho são usadas funções de aproximação suaves, o segundo fator naturalmente já não representaria qualquer impedimento, pois o campo de tensões aproximado é contínuo e continuamente diferenciável.

Ainda, com relação à generalização da forma bilinear para argumentos de um espaço quebrado, deve-se notar que a igualdade

$$\mathcal{B}(\bullet, \bullet) = \sum_{\alpha=1}^N \mathcal{B}_{\omega_\alpha}^{\zeta_\alpha}(\bullet, \bullet) \quad (6.18)$$

é verificada somente se ζ_α for também uma partição da unidade (MARINÉ, 2005).

Geralmente, é impossível procurar por uma solução exata $\mathbf{e}_p^{\omega_\alpha}$ para o problema (6.13). Logo, seguindo a sugestão de (ODEN et al., 1989) (DEMKOWICZ et al., 1989), procura-se uma aproximação do erro $\tilde{\mathbf{e}}_p^{\omega_\alpha}$ a partir de um subespaço definido como

$$\mathcal{X}_{p+q}^0(\omega_\alpha) = \left\{ \mathbf{v}_{p+q}^{0, \omega_\alpha} \in \mathcal{X}_{p+q}(\omega_\alpha); \Pi_p \left(\mathbf{v}_{p+q}^{0, \omega_\alpha} \right) = 0; \mathbf{v}_{p+q}^{0, \omega_\alpha} = 0 \text{ on } \partial \omega_\alpha \cap \Gamma_D \right\} \quad (6.19)$$

com $\Pi_p: \mathcal{V}(\omega_\alpha) \rightarrow \mathcal{X}_p(\omega_\alpha)$ sendo o operador projeção local de grau p (ODEN; REDDY, 1976), com $\mathcal{X}_p = \text{span}\{\mathcal{L}_\alpha^p\}$, conforme descrito na Seção 3.5. Em (6.19), p faz referência ao grau da aproximação \mathbf{u}_p e q representa um grau polinomial a ser acrescido para se estimar o erro.

Neste estudo, subespaços polinomiais de ordem superior $\mathcal{X}_{p+q}(\omega_\alpha) = \mathcal{X}_{p+1}(\omega_\alpha) \subset \mathcal{V}(\omega_\alpha)$ e $\mathcal{X}_{p+q}(\omega_\alpha) = \mathcal{X}_{p+2}(\omega_\alpha) \subset \mathcal{V}(\omega_\alpha)$ são testados. Por esta razão, nos problemas analisados neste capítulo (subseções 6.5.1 e 6.5.2) o enriquecimento polinomial é sempre aplicado uniformemente.

Para soluções suaves, a maior contribuição para o erro pode ser encontrada no subespaço de um grau polinomial imediatamente superior ao grau usado para a solução aproximada. Então, a prática corrente é utilizar $q = 1$.

Todavia, a preocupação em se empregar $q = 2$ se deve, primeiramente, ao fato de as soluções dos problemas aqui investigados serem sin-

gulares. Também, pelo fato de que, para aproximações seccionalmente polinomiais como as de elementos finitos convencionais, mostra-se que o erro tem características diferentes dependendo do grau da solução aproximada. Tal fenômeno é referido como *dicotomia* (BABUŠKA; YU, 1987) (BABUŠKA; STROUBOULIS, 2001) e sua manifestação ocorre porque as parcelas de erro devido ao resíduo no interior dos elementos e devido ao salto das derivadas normais às arestas dependem do grau da aproximação.

Além disso, neste trabalho, embora as aproximações sejam construídas com funções de regularidade arbitrária, justifica-se maior empenho na investigação do seu comportamento. Porém, faz-se opção de, por enquanto, não recorrer a $q = 3$, conforme empregado em Pled, Chamoin e Ladevêze (2011) e Prudhomme et al. (2004), pelo fato de que o problema de estimação em nuvens envolve maior quantidade de incógnitas que em elementos, o que geraria demasiado aumento do custo computacional associado.

Consequentemente, o problema de aproximação do erro para (6.13) pode ser enunciado como: *encontrar $\tilde{\mathbf{z}}_p^{\omega_\alpha} \in \chi_{p+q}^0(\omega_\alpha)$ tal que*

$$\mathcal{B}_{\omega_\alpha}^{\zeta_\alpha} \left(\tilde{\mathbf{z}}_p^{\omega_\alpha}, \mathbf{v}_{p+q}^{0,\omega_\alpha} \right) = \mathcal{R}_{\omega_\alpha} \left(\varphi_\alpha \mathbf{v}_{p+q}^{0,\omega_\alpha} \right) \quad \forall \mathbf{v}_{p+q}^{0,\omega_\alpha} \in \chi_{p+q}^0(\omega_\alpha) \quad (6.20)$$

com a forma bilinear ponderada $\mathcal{B}_{\omega_\alpha}^{\zeta_\alpha}$, associada ao erro aproximado $\tilde{\mathbf{z}}_p^{\omega_\alpha}$, e o funcional residual $\mathcal{R}_{\omega_\alpha}$ definidos similarmente a (6.14) e (6.15), fazendo-se a devida substituição dos argumentos.

6.4 Projeção do resíduo na forma forte

Em virtude da continuidade dos campos de tensões obtidos com as funções de aproximação contínuas, é proposto substituir a definição convencional de (6.15) por

$$\mathcal{R}_{\omega_\alpha} \left(\varphi_\alpha \mathbf{v}_{p+q}^{0,\omega_\alpha} \right) = \mathcal{R}_{\Omega}^{\omega_\alpha} \left(\varphi_\alpha \mathbf{v}_{p+q}^{0,\omega_\alpha} \right) + \mathcal{R}_{\Gamma_N}^{\omega_\alpha} \left(\varphi_\alpha \mathbf{v}_{p+q}^{0,\omega_\alpha} \right) \quad (6.21)$$

O termo $\mathcal{R}_{\Omega}^{\omega_\alpha}$ se refere ao resíduo distribuído no domínio e é escrito como

$$\mathcal{R}_{\Omega}^{\omega_\alpha} \left(\varphi_\alpha \mathbf{v}_{p+q}^{0,\omega_\alpha} \right) = \int \int_{\omega_\alpha} \left(\varphi_\alpha \mathbf{v}_{p+q}^{0,\omega_\alpha} \right)^T \mathbf{R}(\mathbf{u}_p) l_z dx dy \quad (6.22)$$

sendo $\mathbf{R}(\mathbf{u}_p) = \{R_x, R_y\}^T$ o campo resíduo na forma forte associado à aproximação \mathbf{u}_p , definido como

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}_p) = \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_p) + \mathbf{b} \quad (6.23)$$

visto que a aproximação \mathbf{u}_p , solução do problema (4.23), geralmente não satisfaz a forma forte (4.6).

Por sua vez, o termo $\mathcal{R}_{\Gamma_N}^{\omega_\alpha}$ é o termo relacionado ao resíduo no contorno de Neumann e é expresso por

$$\mathcal{R}_{\Gamma_N}^{\omega_\alpha} \left(\boldsymbol{\varphi}_\alpha \mathbf{v}_{p+q}^{0, \omega_\alpha} \right) = \int_{\partial \omega_\alpha \cap \Gamma_N} \left(\boldsymbol{\varphi}_\alpha \mathbf{v}_{p+q}^{0, \omega_\alpha} \right)^T \mathbf{r}(\mathbf{u}_p) l_z ds \quad (6.24)$$

sendo o resíduo no contorno de Neumann $\mathbf{r}(\mathbf{u}_p) = \{r_x, r_y\}^T$, na forma forte, definido por

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}_p) = \bar{\mathbf{t}} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_p) \mathbf{n} \quad (6.25)$$

segundo a notação apresentada na Seção 4.2.1.

Nota-se que (6.22) consiste em um produto interno entre o campo resíduo expresso por (6.23) com as funções de ordem superior do subespaço no qual se procura o erro (6.19).

6.4.1 Estimadores globais e indicadores nodais de erro

De acordo com Strouboulis et al. (2006), supondo que os dados do problema são tais que $\mathbf{e}_p^{\omega_\alpha}$ exista em todas as nuvens, aplicando a propriedade da partição da unidade, tem-se que a norma em energia do erro exato \mathbf{e}_p é expressa por

$$\|\mathbf{e}_p\|_E^2 = \mathcal{B}(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_p) = \sum_{\alpha=1}^N \mathcal{R}(\boldsymbol{\varphi}_\alpha \mathbf{e}_p) \quad (6.26)$$

usando a definição de norma em energia (4.12), a representação variacional do erro (6.3) e a decomposição do residual (6.8).

Pode-se mostrar que o erro \mathbf{e}_p , enquanto função contínua de um espaço de dimensão infinita \mathcal{V} , fornece um majorante em termos da norma em energia do erro verdadeiro (PRUDHOMME et al., 2004) (MARINÉ, 2005) (PARÉS; DÍEZ; HUERTA, 2006) (STROUBOULIS et al., 2006).

Segundo (STROUBOULIS et al., 2006), a norma em energia do erro verdadeiro \mathbf{e}_p é majorada por

$$\|\mathbf{e}_p\|_E^2 \leq \sqrt{\sum_{\alpha=1}^N \|\mathbf{e}_p^{\omega_\alpha}\|_{E(\omega_\alpha)}^2} \sqrt{M\mathcal{B}(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_p)} = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^N \|\mathbf{e}_p^{\omega_\alpha}\|_{E(\omega_\alpha)}^2} \sqrt{M} \|\mathbf{e}_p\|_E \quad (6.27)$$

e portanto, um estimador global \mathcal{E} , agora em termos do erro aproximado $\tilde{\mathbf{e}}_p^{\omega_\alpha}$, é escrito como

$$\mathcal{E} = \sqrt{M} \sqrt{\sum_{\alpha=1}^N \|\tilde{\mathbf{e}}_p^{\omega_\alpha}\|_{E(\omega_\alpha)}^2} \quad (6.28)$$

sendo a norma em energia do erro aproximado na nuvem expressa por

$$\|\tilde{\mathbf{e}}_p^{\omega_\alpha}\|_{E(\omega_\alpha)}^2 = \mathcal{B}_{\omega_\alpha}^{\zeta_\alpha}(\tilde{\mathbf{e}}_p^{\omega_\alpha}, \tilde{\mathbf{e}}_p^{\omega_\alpha}) \quad (6.29)$$

No estimador (6.28), a constante M é o índice de *sobreposição* da partição da unidade, que surge devido à opção de se fazer $\zeta_\alpha = 1$ em (6.14), empregada em (STROUBOULIS et al., 2006). Assim, como cada elemento faz parte de três nuvens, $M = 3$.

Um indicador nodal de erro, associado às nuvens, consistente com o estimador global (6.28) é definido como

$$\mathcal{J}_{\omega_\alpha} = \sqrt{M \|\tilde{\mathbf{e}}_p^{\omega_\alpha}\|_{E(\omega_\alpha)}^2} \quad (6.30)$$

que consiste em uma ferramenta primordial na concepção de um procedimento adaptativo.

Neste trabalho, também se verifica o efeito da ponderação da forma bilinear proposta por (PRUDHOMME et al., 2004), de forma que se faz $\zeta_\alpha = \varphi_\alpha$ em (6.14). Sendo assim, o correspondente estimador global $\mathcal{E}^{\zeta_\alpha}$ é calculado como

$$\mathcal{E}^{\zeta_\alpha} = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^N \|\tilde{\mathbf{e}}_p^{\omega_\alpha}\|_{E(\omega_\alpha)}^2} \quad (6.31)$$

de tal forma que a ponderação da energia de deformação associada à função erro faz verificar a condição (6.18) e, portanto, evitando a sobreposição expressa pelo índice de *sobreposição*. Logo, o indicador nodal de erro é

$$\mathcal{J}_{\omega_\alpha}^{\zeta_\alpha} = \sqrt{\|\tilde{\mathbf{e}}_p^{\omega_\alpha}\|_{E(\omega_\alpha)}^2} \quad (6.32)$$

6.5 Avaliações numéricas

A avaliação dos estimadores foi executada em duas etapas. Inicialmente, investigou-se o desempenho em um problema envolvendo somente enriquecimento polinomial. Para isso, foi considerado o problema com domínio na forma de L, com carregamento para o modo I de abertura. Trata-se de um problema clássico em elasticidade, cuja solução exata do campo de tensões exibe singularidade sobre o vértice reentrante. Logo, nesta situação, uma vez que a aproximação é obtida com enriquecimento polinomial, a singularidade está presente no erro que se pretende estimar usando, também, somente funções polinomiais.

Em seguida, o problema do painel fraturado, considerado nos capítulos 4 e 5, é tratado novamente. Como anteriormente, será aplicado o enriquecimento para introduzir a singularidade na aproximação do campo de tensões. Desta forma, espera-se que o erro não possua a singularidade e, conseqüentemente, que seja melhor capturado pelas funções polinomiais de ordem superior utilizadas nas estimativas.

Logo, como se pode conhecer os campos de erro exato destes problemas, a avaliação dos indicadores nodais e dos estimadores se dará por meio do índice de efetividade. O índice de efetividade local θ_α é então definido como

$$\theta_\alpha = \frac{J_{\omega_\alpha}}{\|\mathbf{e}_{EX}\|_{E(\omega_\alpha)}} \quad (6.33)$$

e definido de forma similar para o indicador $J_{\omega_\alpha}^\zeta$. A efetividade global θ , da mesma forma, é calculada como a razão entre a norma em energia do erro estimado e a norma em energia do erro exato \mathbf{e}_{EX}

$$\theta = \frac{\mathcal{E}}{\|\mathbf{e}_{EX}\|_{E(\Omega)}} \quad (6.34)$$

Claramente, o uso desta medida somente faz sentido numa investigação das propriedades do estimador, com o objetivo de verificar se é possível identificar as regiões de maiores erros e se é possível quantificá-las apropriadamente.

6.5.1 Domínio na forma de L

O problema do domínio na forma de L é outro problema clássico na teoria da elasticidade, para o qual se dispõe de solução analítica (SZABÓ;

BABUŠKA, 2011), e foi usado para se analisar o desempenho dos estimadores numa situação em que a singularidade não é adicionada como enriquecimento. A geometria do domínio é mostrada na Figura 6.1. Assim como no problema do painel fraturado, tem-se quatro malhas regulares nas quais ocorrem somente nuvens convexas e, portanto, aproximações $C^\infty(\Omega)$. O refino radical de malha não foi utilizado, pelas mesmas razões explicitadas no Capítulo 4. Os dados geométricos e propriedades materiais são listados abaixo:

- coeficiente de Poisson: $\nu = 0,3$
- módulo de elasticidade: $E = 1000,0$
- dimensão do domínio: $a = 100,0$
- espessura constante e unitária: $l_z = 1,0$

Assim como considerado no problema do painel fraturado (Seção 4.4), procedeu-se a restrição de deslocamentos minimamente necessária para se evitar os movimento de corpo rígido e em pontos onde a restrição na gera reações vinculares.

Forças de superfície, aplicadas nas arestas AB, BC, EF e FA, foram calculadas segundo as componentes de tensões correspondentes ao termo do Modo I da expansão assintótica do campo de deslocamentos (SZABÓ; BABUŠKA, 2011)

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= A_1 \lambda_1 r^{\lambda_1 - 1} \left[(2 - Q_1 (\lambda_1 + 1)) \cos(\lambda_1 - 1) \theta - (\lambda_1 - 1) \cos(\lambda_1 - 3) \theta \right] \\
 \sigma_y &= A_1 \lambda_1 r^{\lambda_1 - 1} \left[(2 + Q_1 (\lambda_1 + 1)) \cos(\lambda_1 - 1) \theta + (\lambda_1 - 1) \cos(\lambda_1 - 3) \theta \right] \\
 \tau_{xy} &= A_1 \lambda_1 r^{\lambda_1 - 1} \left[(\lambda_1 - 1) \sin(\lambda_1 - 3) \theta + Q_1 (\lambda_1 + 1) \sin(\lambda_1 - 1) \theta \right]
 \end{aligned}
 \tag{6.35}$$

com $Q_1 = 0,543075579$, $\lambda_1 = 0,544483737$ e A_1 sendo um número real arbitrário, mas que foi considerado $A_1 = 1,0$. Neste caso, a norma em energia exata pode ser calculada como $\|\mathbf{u}\|_E = 2,8825490 \left((A_1)^2 a^{2\lambda_1} l_z/E \right)^{1/2}$ (BARROS; PROENÇA; BARCELLOS, 2004).

O campo de tensões é singular no vértice reentrante, ponto D (Figura 6.1). A ordem da singularidade é descrita pelo parâmetro λ_1 .

Foi utilizada a quadratura de Wandzura (WANDZURA; XIAO, 2003) de 175 pontos em todas as integrações de área envolvidas na análise, ou seja,

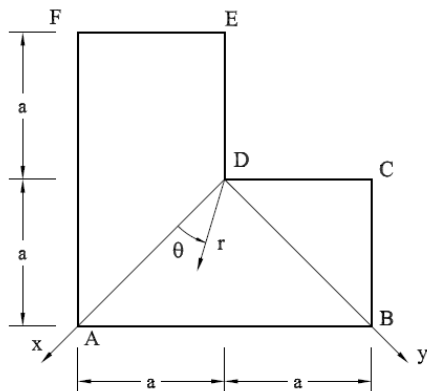


Figura 6.1: Domínio na forma de L.

para o cálculo das matrizes de rigidez para solução e estimação de erro, e para o cálculo de energia de deformação. Integrações no contorno de Neumann foram executadas com quadratura de Gauss-Legendre de 25 pontos, para cada aresta elementar.

Foram utilizadas quatro diferentes malhas regulares conforme mostrado na Figura 6.2. Para cada uma das malhas, aplicou-se enriquecimento polinomial uniforme até $p = 6$, de modo que as aproximações são de grau $1 \leq b \leq 6$. Para cada um dos estimadores estudados, considerou-se $q = 1, 2$ em (6.19) com o propósito de se verificar a influência, em cada caso, de se usar mais funções para se estimar o erro nas nuvens.

Primeiramente, são analisados os resultados para a efetividade global. A caracterização do estimador busca identificar se é possível obter um majorante para a norma em energia do erro global. A efetividade dos estimadores \mathcal{E} (6.28) e $\mathcal{E}^{\zeta\alpha}$ (6.31) é mostrada, respectivamente, nas Figuras 6.3 e 6.4.

Notadamente, a utilização de $q = 2$ permite capturar melhor o erro da aproximação. Salienta-se que neste problema, apesar de a solução exata ser singular, foram utilizadas somente funções de enriquecimento polinomiais (3.23) para composição do subespaço de aproximação. Para o estimador \mathcal{E} (6.28), nota-se que em nenhuma combinação de malha e enriquecimento foi possível obter um estimador majorante do erro da aproximação. A situação melhora quando se eleva o grau das funções usadas para se estimar o erro. As

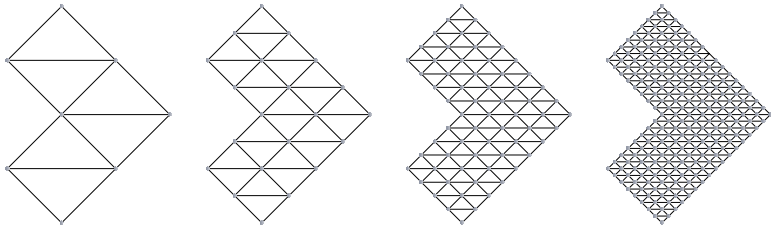


Figura 6.2: Malhas usadas para verificação de desempenho dos estimadores. Aproximações envolvendo somente enriquecimento polinomial. Da esquerda para a direita: M1, M2, M3 e M4.

melhores respostas ocorrem quando a solução aproximada tem graus $b = 2$ e $b = 3$.

Por outro lado, pela abordagem segundo Prudhomme et al. (2004), que introduziram uma ponderação na forma bilinear associada ao erro nas nuvens, fazendo $\zeta_\alpha = \varphi_\alpha$ em (6.14), tem-se um comportamento mais deficiente. A estimação do erro é precária, principalmente, para soluções aproximadas de graus mais elevados, $b \geq 4$, mesmo utilizando $q = 2$.

Todavia, se faz necessário observar o desempenho da estimativa em termos dos indicadores de erro associados aos nós. Para isso, verifica-se a efetividade local.

A Figura 6.5 mostra as efetividades locais para o indicador nodal J_{ω_α} (6.30), para uma aproximação grau $b = 1$ e considerando $q = 2$, para a malha M3. Nota-se que a efetividade local é superior à unidade para o nó exatamente no vértice reentrante, o que é bastante satisfatório por ser a região de interesse.

Então, buscando entender as razões pelas quais a efetividade global não é adequada, foi proposto modificar a forma como é calculada a contribuição para o funcional residual devida ao contorno de Neumann. Na composição da excitação para os problemas locais nas nuvens dos nós no contorno, ao invés de usar (6.24) com (6.25), considerou-se o segundo termo do membro à direita da igualdade em (6.16), relativo às condições de contorno de Neumann.

A Figura 6.6 mostra a efetividade global do estimador \mathcal{E} (6.28). Percebe-se que \mathcal{E} se mostra como um majorante do erro na maioria das situações. Notadamente, a utilização de $q = 2$ permite garantir a superestimação do erro global, se comportando como um limite superior.

Por outro lado, o comportamento do estimador (6.31) pode ser observado na Figura 6.7.

Novamente, são mostradas na Figura 6.8 as efetividades locais para a malha M3, solução aproximada grau $b = 1$ e considerando $q = 2$ para o propósito de estimação. A influência do tratamento diferenciado no contorno de Neumann se manifesta por meio de maiores efetividade locais no contorno, comparando com a Figura (6.5).

Deve-se observar que não há mudança na definição do subespaço, no qual se procura o erro, no caso dos dois estimadores testados. São utilizadas funções de ordem superior de acordo com a definição (6.19).

É também oportuno citar que os sistemas de equações originados pelos problemas (6.20) foram também resolvidos utilizando o procedimento de Babuška (DUARTE; BABUŠKA; ODEN, 2000), considerando o parâmetro de perturbação igual a 1×10^{-10} e a tolerância de convergência igual a 1×10^{-16} .

A comparação entre as efetividades apresentadas por \mathcal{E} e $\mathcal{E}^{\zeta_\alpha}$, para $q = 1$, pode ser vista na Figura 6.9. Primeiramente, extraindo os resultados das figuras 6.3 e 6.4. Fica clara a maior efetividade de \mathcal{E} frente a $\mathcal{E}^{\zeta_\alpha}$ pois todas as curvas tracejadas estão acima das correspondentes linhas contínuas. Agora, com $q = 2$, a Figura 6.10 novamente registra a superioridade de \mathcal{E} . Com relação ao estimador $\mathcal{E}^{\zeta_\alpha}$, para soluções com grau $b \leq 3$ percebe-se uma melhoria significativa perante os resultados para $q = 1$ (Figura 6.9). Para soluções com grau $b \geq 4$, o desempenho do estimador $\mathcal{E}^{\zeta_\alpha}$ sofre maior influência do aumento do grau q somente quando $b = 6$.

Fazendo a comparação dos estimadores também para a o tratamento diferenciado da contribuição das forças no contorno de Neumann, tem-se as figuras 6.11 e 6.12, respectivamente, para $q = 1$ e $q = 2$. Com relação à Figura 6.9, para $q = 1$, nota-se que praticamente não há alteração, no fim do refinamento h , quando a aproximação é de grau $b = 1$. Por outro lado, a alteração é mais significativa para as aproximações de grau superior, $b \geq 4$, ou seja, consegue capturar melhor o erro no contorno de Neumann quando as aproximações são de maior ordem. Quando $q = 2$, Figura 6.12, tem-se melhorias em todas as discretizações, inclusive para $b = 1$ nas malhas menos refinadas (maiores h 's).

A explicação para este fato pode ser a natureza da própria PU $C^\infty(\Omega)$. Pela observação da Figura 6.13, que mostra as componentes do campo resíduo na forma forte, R_x e R_y , conforme (6.23), para uma aproximação grau $b = 1$ com a malha M3, por exemplo, nota-se que o resíduo nas arestas é sempre de menor intensidade. Além disso, o traço da componente normal às arestas da derivada da PU, associada aos nós no contorno, não favorece a

aproximação da força distribuída na superfície. Fica constatada a necessidade de enriquecimento no contorno de Neumann para se aproximar, de forma apropriada, o campo de tensões. A conclusão vale independentemente do propósito de estimação de erro.

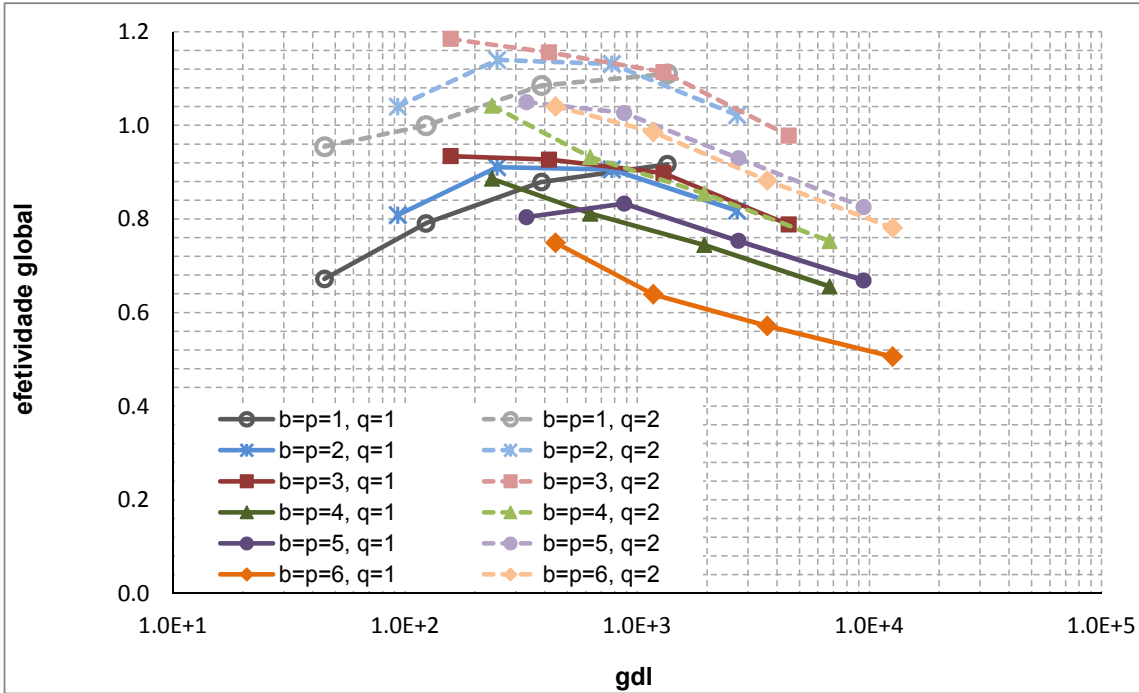


Figura 6.3: Efetividade global do estimador \mathcal{E} (6.28) perante enriquecimento polinomial uniforme. Cada curva representa o comportamento perante o refinamento de malha. Funcional residual calculado como em (6.21).

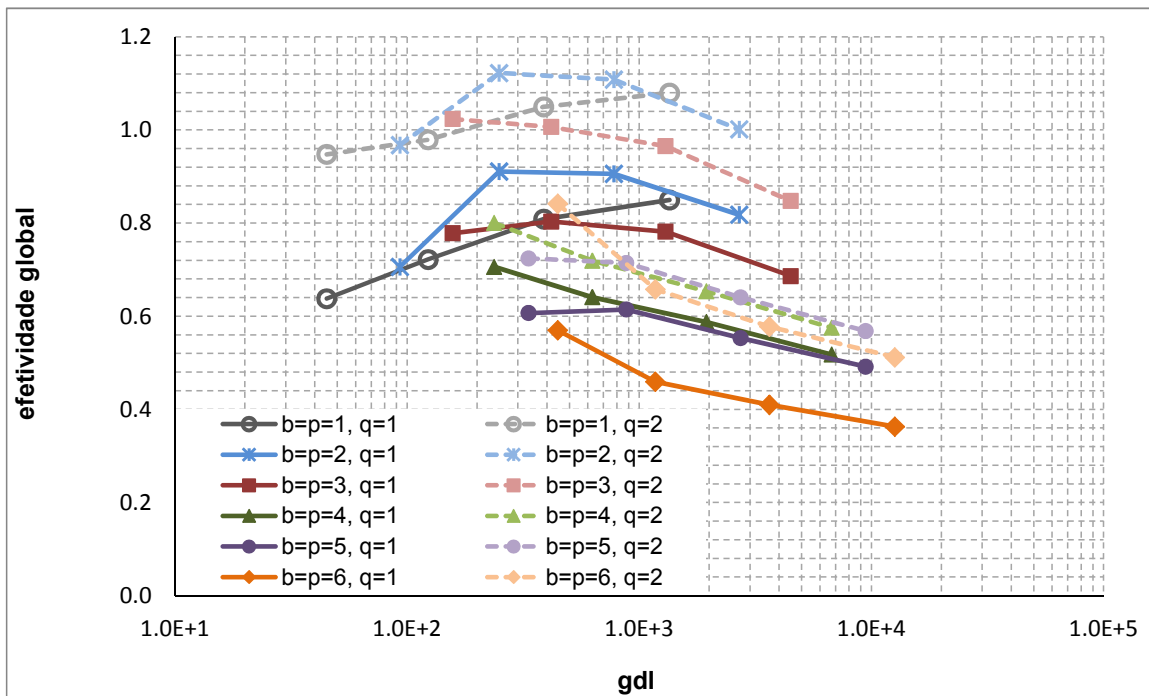


Figura 6.4: Efetividade global do estimador $\xi_{\zeta\alpha}$ (6.31) perante enriquecimento polinomial uniforme. Cada curva representa o comportamento perante o refinamento de malha. Funcional residual calculado como em (6.21).

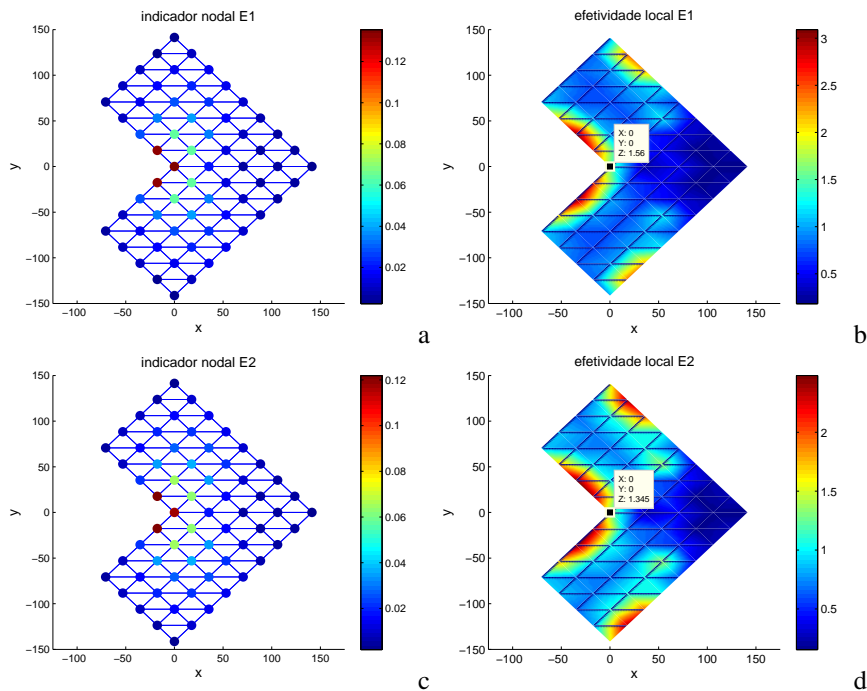


Figura 6.5: Indicadores nodais de erro e efetividades locais correspondentes. Aproximação grau $b = 1$ e usando $q = 2$, para a malha M3. a) indicadores $\mathcal{J}_{\omega_\alpha}$ (6.30), b) efetividades para \mathcal{J} , c) indicadores $\mathcal{J}_{\omega_\alpha}^{\zeta_\alpha}$ (6.32) e d) efetividades para $\mathcal{J}^{\zeta_\alpha}$.

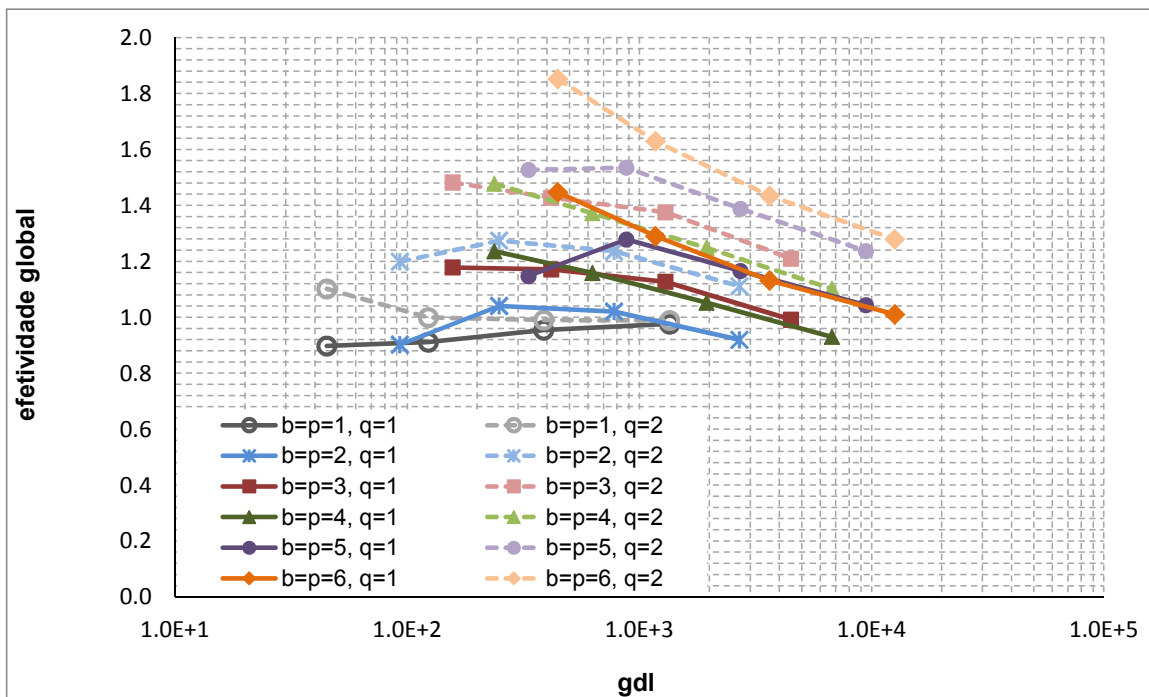


Figura 6.6: Efetividade global do estimador \mathcal{E} (6.28) perante enriquecimento polinomial uniforme, para quatro diferentes malhas. Parcela do resíduo no contorno de Neumann Γ_N calculado como em (6.16).

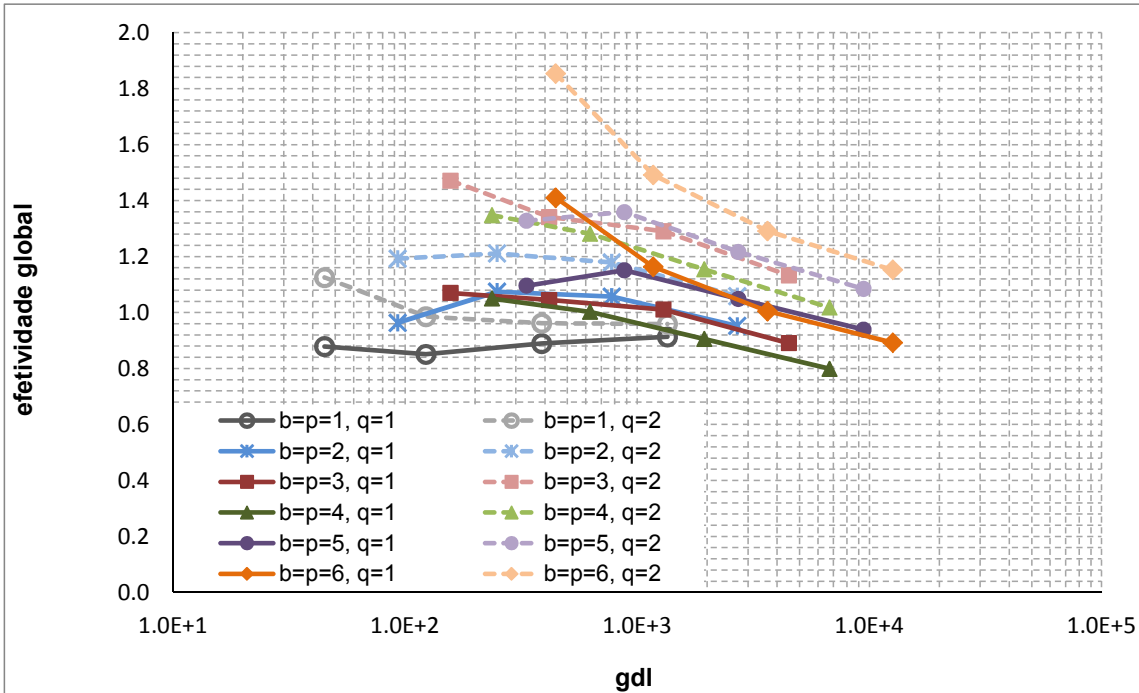


Figura 6.7: Efetividade global do estimador $\mathcal{E}^{\zeta\alpha}$ (6.31) perante enriquecimento polinomial uniforme, para quatro diferentes malhas. Parcela do resíduo no contorno de Neumann Γ_N calculado como em (6.16).

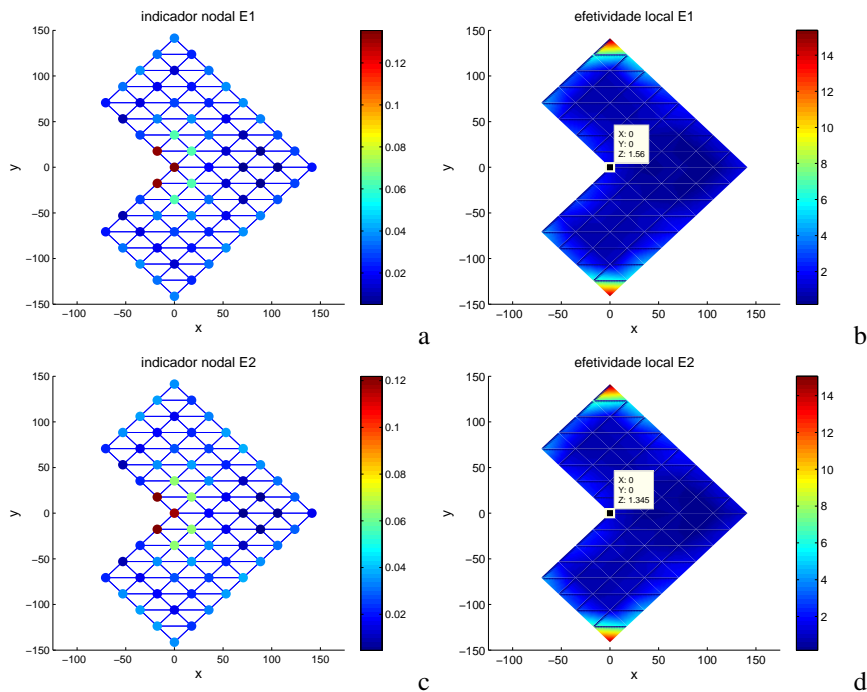


Figura 6.8: Indicadores nodais de erro e efetividades locais correspondentes. Aproximação grau $b = 1$ e usando $q = 2$, para a malha M3. a) indicadores $\mathcal{J}_{\omega_\alpha}$ (6.30), b) efetividades para \mathcal{J} , c) indicadores $\mathcal{J}_{\omega_\alpha}^\zeta$ (6.32) e d) efetividades para \mathcal{J}^ζ .

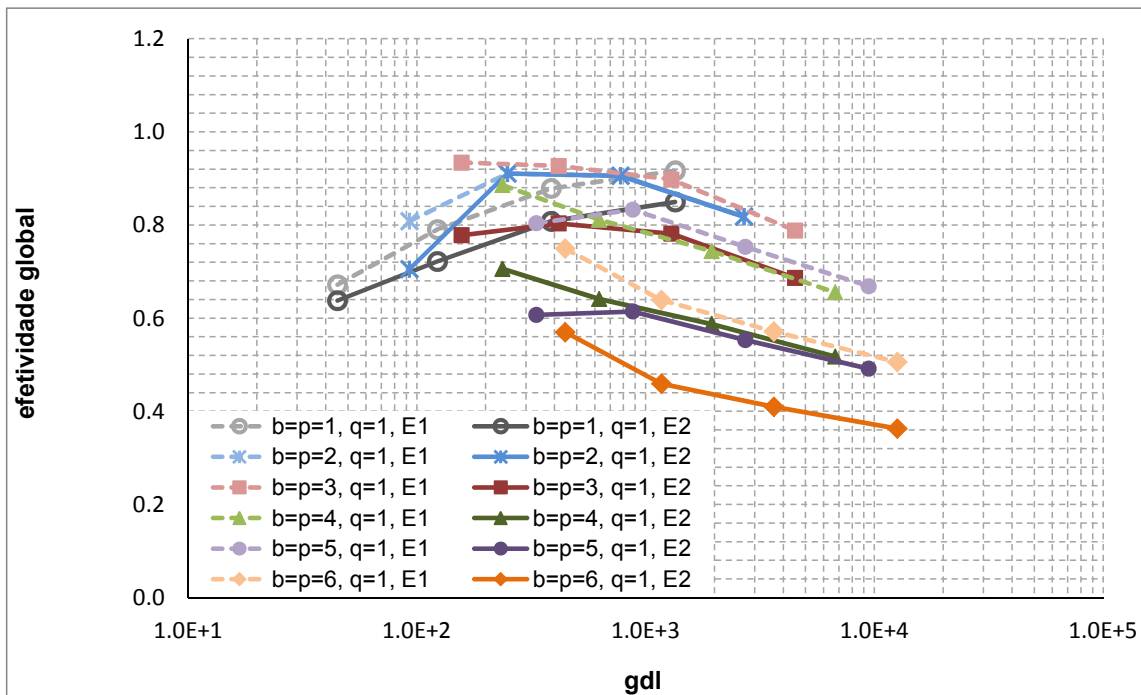


Figura 6.9: Comparação entre a efetividade dos estimadores \mathcal{E} (6.28) e $\mathcal{E}^{\zeta\alpha}$ (6.31), designados na legenda por E1 e E2, respectivamente, para $q = 1$. Funcional residual calculado como em (6.21).

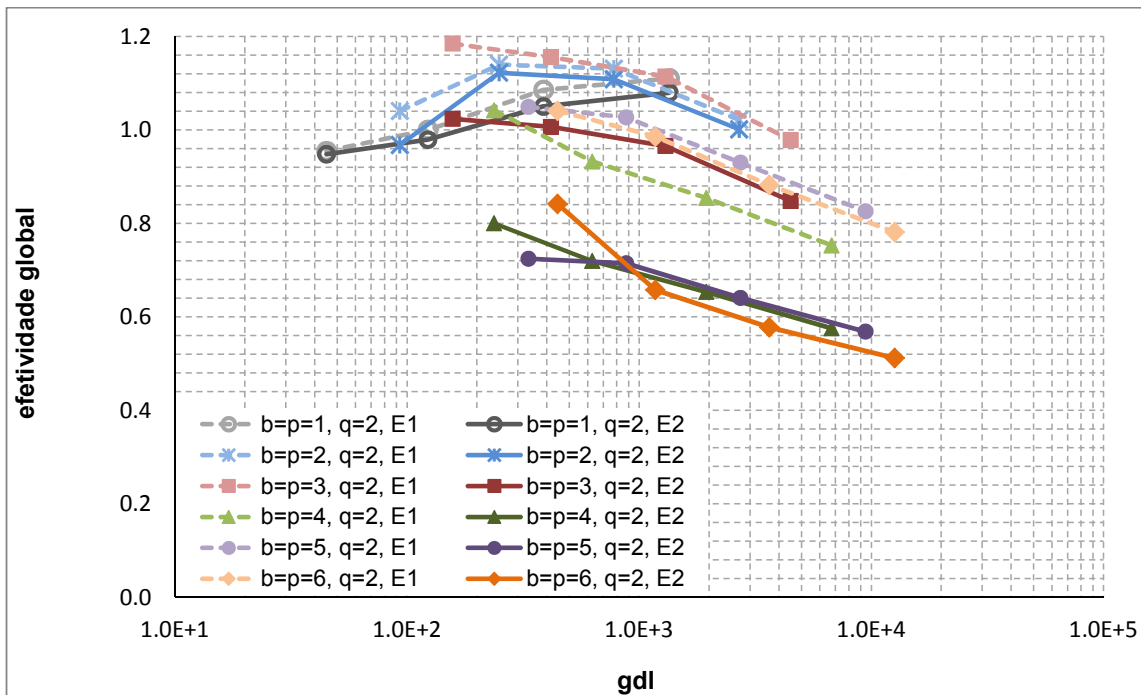


Figura 6.10: Comparação entre a efetividade dos estimadores \mathcal{E} (6.28) e $\mathcal{E}^{\zeta\alpha}$ (6.31), designados na legenda por E1 e E2, respectivamente, para $q = 2$. Funcional residual calculado como em (6.21).

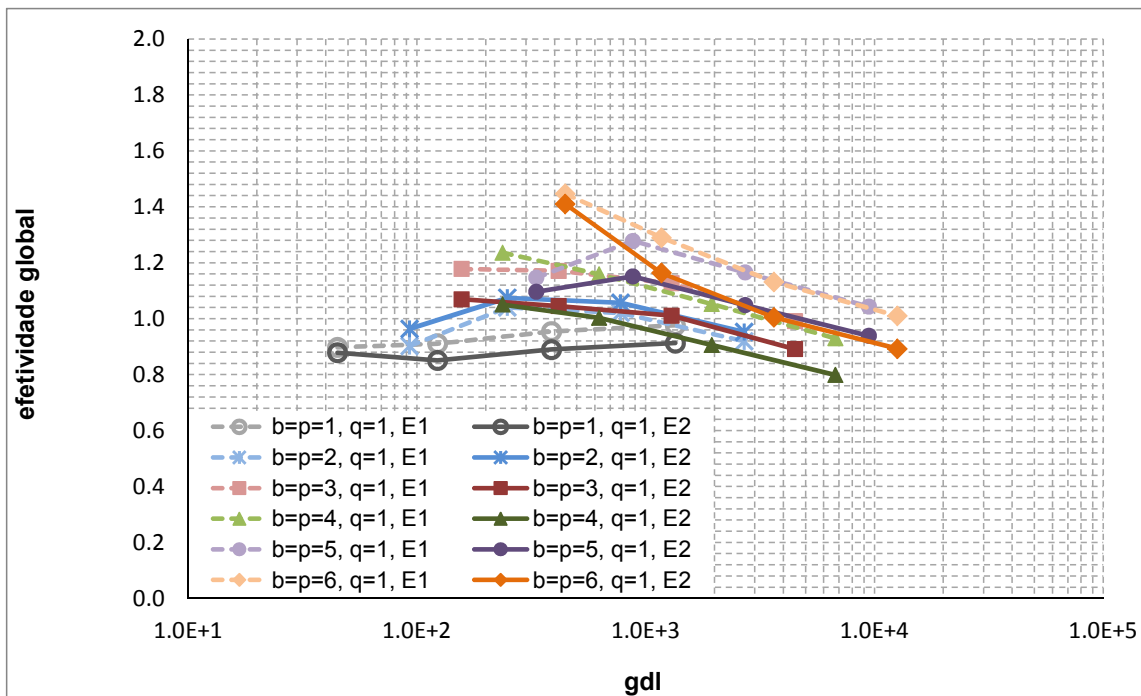


Figura 6.11: Comparação entre a efetividade dos estimadores \mathcal{E} (6.28) e $\mathcal{E}^{\xi\alpha}$ (6.31), designados na legenda por E1 e E2, respectivamente, para $q = 1$. Parcela do resíduo no contorno de Neumann Γ_N calculado como em (6.16).

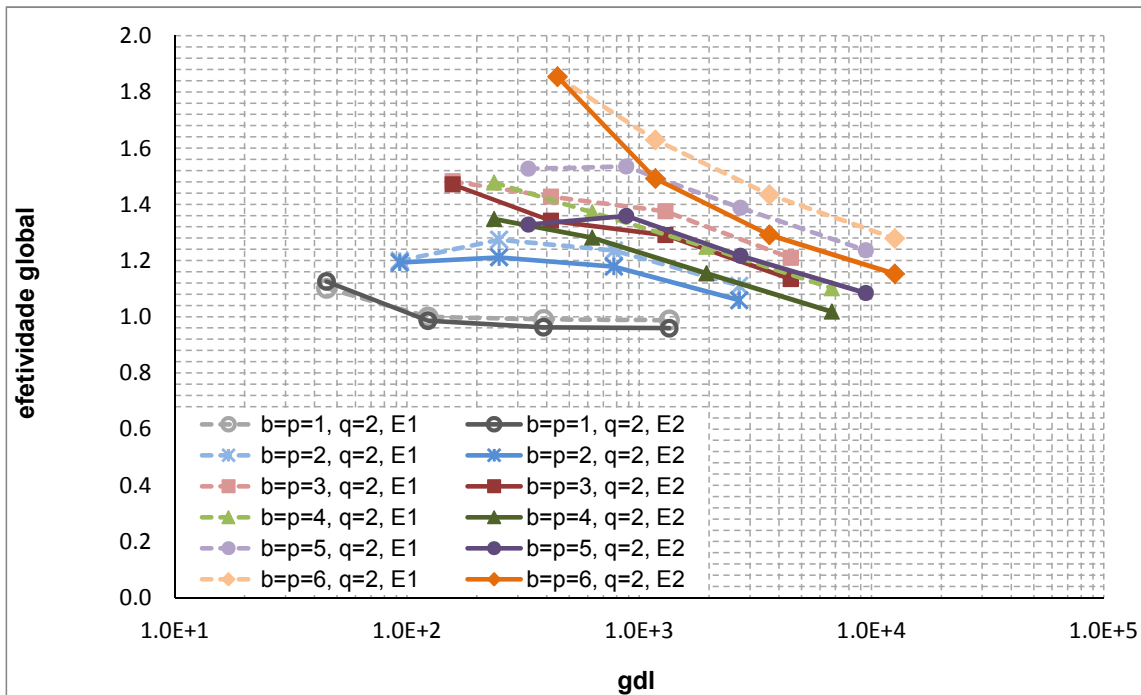


Figura 6.12: Comparação entre a efetividade dos estimadores \mathcal{E} (6.28) e $\mathcal{E}^{\zeta\alpha}$ (6.31), designados na legenda por E1 e E2, respectivamente, para $q = 2$. Parcela do resíduo no contorno de Neumann Γ_N calculado como em (6.16).

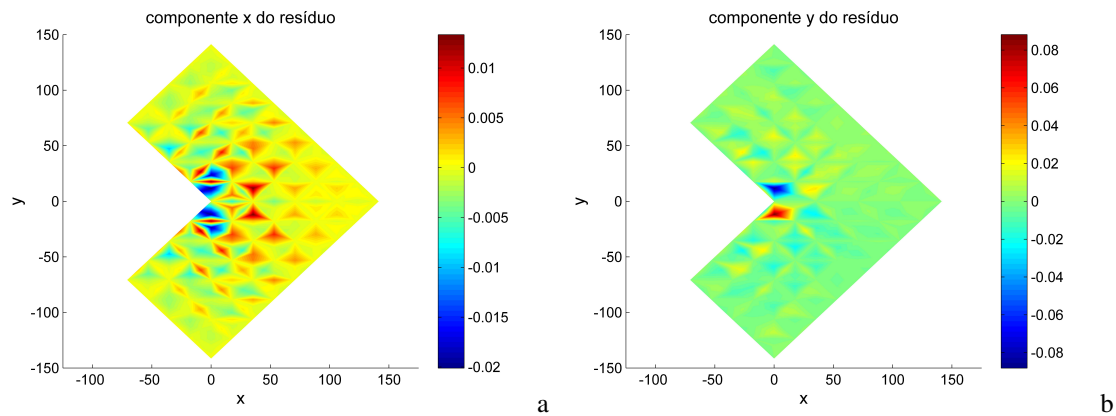


Figura 6.13: Componentes do campo resíduo na forma forte, para uma aproximação grau $b = 1$ considerando a malha M3. a) componente R_x e b) componente R_y .

6.5.2 Painel fraturado

O problema do painel fraturado é considerado novamente. Neste caso, foi aplicado enriquecimento com as funções de ponta de trinca (3.20) segundo o padrão topológico (BÉCHET et al., 2005), conforme a Figura 4.11. Em todos os casos, considerou-se enriquecimento polinomial (3.23) uniforme com $p \leq 4$, para se ter aproximações de grau $b \leq 4$. Esta opção de uniformizar o enriquecimento p objetiva representar melhor as condições de contorno de forças aplicadas e garantir que a premissa, acerca dos espaços nos quais se procura o erro, discutida na Seção 6.3, seja satisfeita.

Não foram testadas situações com enriquecimento polinomial superior a $p = 4$ pois, como verificado no Capítulo 4, ocorre comprometimento da solução por mau-condicionamento da matriz de rigidez. Para a estimativa de erro nas nuvens, foi utilizado $q = 1$. Como a singularidade é adicionada através do enriquecimento de ponta de trinca (3.20), espera-se que o erro seja predominantemente composto da parcela regular.

A Figura 6.14 mostra as efetividades globais fornecidas pelos estimadores globais \mathcal{E} (6.28) e $\mathcal{E}^{\zeta\alpha}$ (6.31), para aproximações com enriquecimento polinomial $p \leq 4$. Em todas as discretizações houve superestimação do erro global, com efetividades globais superiores à unidade.

No entanto, faz-se necessário identificar se a superestimação ocorre devido ao aumento da norma em energia do erro estimado à medida que se aumenta o grau da solução aproximada. Para tal propósito, as figuras 6.15 e 6.16 mostram separadamente a norma em energia do erro estimado e a norma em energia do erro exato, respectivamente, para os estimadores globais \mathcal{E} (6.28) e $\mathcal{E}^{\zeta\alpha}$ (6.31). Agora, é possível notar que ambas as medidas decrescem com o aumento do grau b , como esperado. Porém, a redução do erro verdadeiro ocorre de forma mais acentuada que o erro estimado. Vale investigar ainda a eficiência da integração numérica envolvida na estimativa de erro.

Uma vez que se dispõe da solução analítica, pode-se investigar aspectos como distribuição do campo resíduo na forma forte (6.23) em função do padrão de enriquecimento. Também, é possível avaliar a influência do refino p sobre os valores do campo resíduo na forma forte e erro exato na região de transição.

Pode-se observar nas figuras 6.17 e 6.18 a componente na direção x do campo de erro exato, para as malha M2 e M3, respectivamente, no caso de soluções com $p \leq 4$. Nota-se que a magnitude do erro decresce, como se espera. No entanto, mais importante, é observar a distribuição do erro na transição à medida que se acrescenta o enriquecimento polinomial. Esta

informação pode auxiliar na seleção de outros nós para receberem o enriquecimento com funções de frente de trinca.

Finalmente, a Figura 6.19 mostra a evolução dos indicadores nodais de erro à medida que se refina a malha, considerando aproximação grau $b = 1$ e estimativa de erro com $q = 1$. Claramente, uma vez mais, os indicadores mostram a região onde o erro é mais acentuado.

Deve-se salientar, ainda, que os indicadores nodais de erro fazem referência à norma em energia (4.12) do erro. Assim, não se pode fazer uma comparação imediata entre o campo de erro exato (figuras 6.17 e 6.18) e a distribuição dos indicadores nodais de erro (Figura 6.19) uma vez que estes últimos são relacionados ao gradiente do campo de erro estimado através do operador $\mathcal{B}(\bullet, \bullet)$.

Com relação ao problema do domínio na forma de L nota-se que, se a singularidade é adicionada à aproximação como enriquecimento, o uso de $q = 1$ já se mostra adequado para o propósito de se identificar a região com maiores erros.

Constata-se, portanto, que a utilização do campo resíduo em forma forte (quando disponível) pode conduzir a indicadores nodais efetivos, capazes de localizar as regiões com maiores erros. Os estimadores equacionados se mostram adequados às aproximações suaves obtidas com o MGEF $C^\infty(\Omega)$.

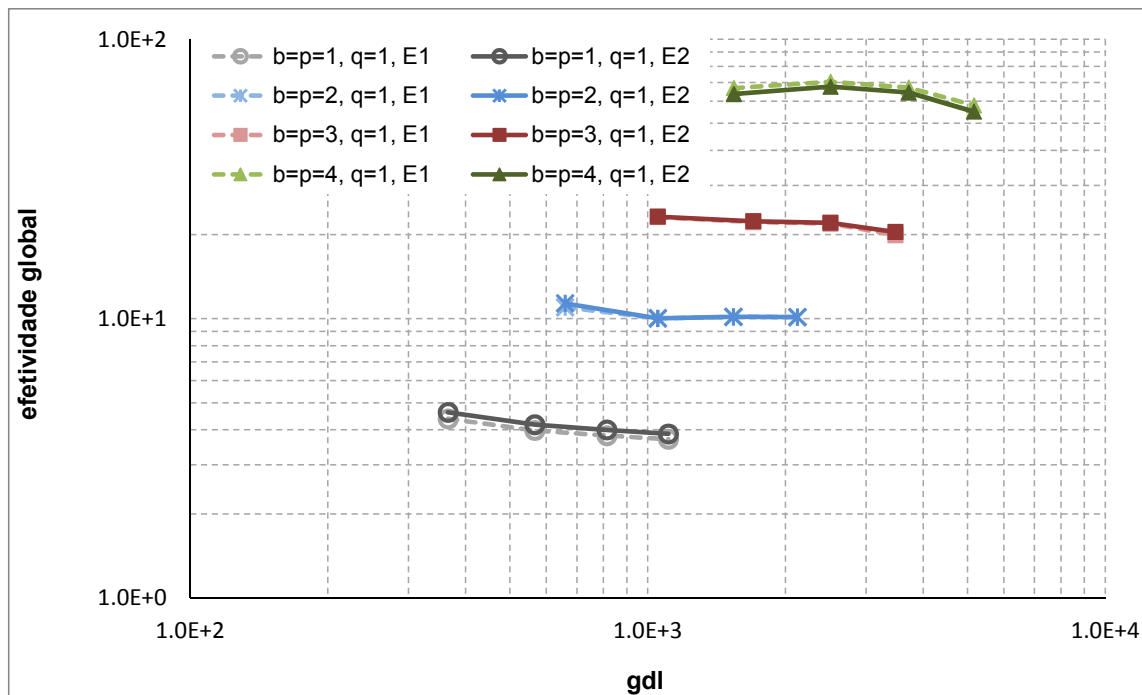


Figura 6.14: Comparação entre a efetividade dos estimadores \mathcal{E} (6.28) e $\mathcal{E}^{\zeta_\alpha}$ (6.31), designados na legenda por E1 e E2, respectivamente, para $q = 1$. Funcional residual calculado como em (6.21).

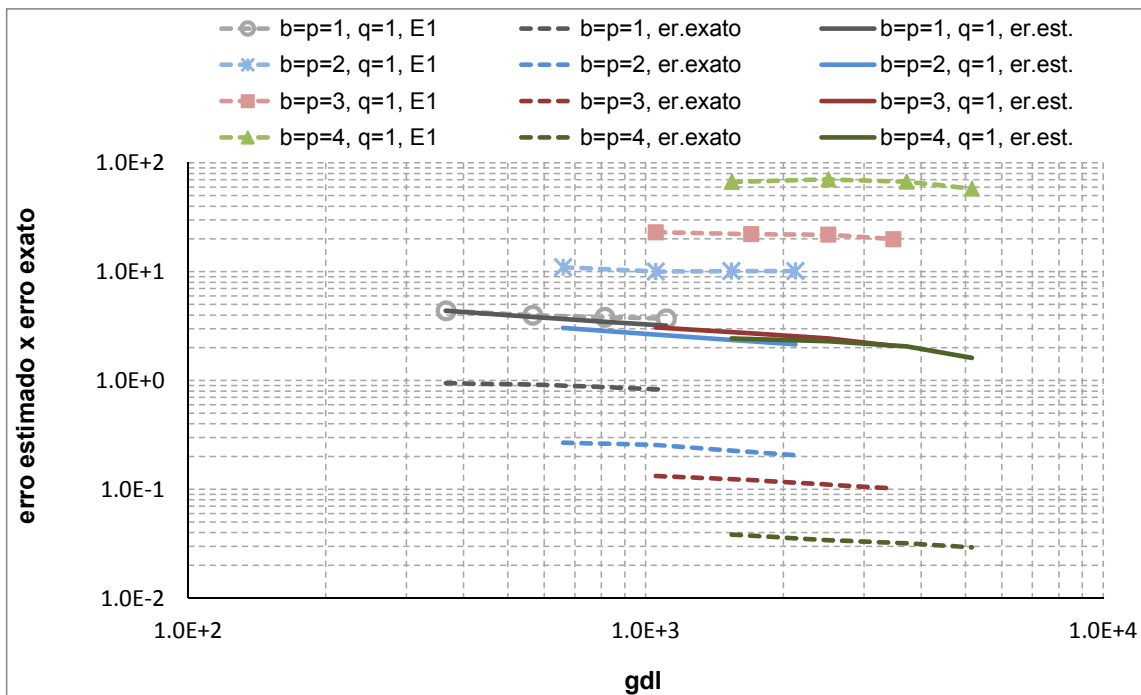


Figura 6.15: Comparação entre a norma em energia do erro estimado pelo estimador \mathcal{E} (6.28) e a norma em energia do erro exato, para $q = 1$. Funcional residual calculado como em (6.21).

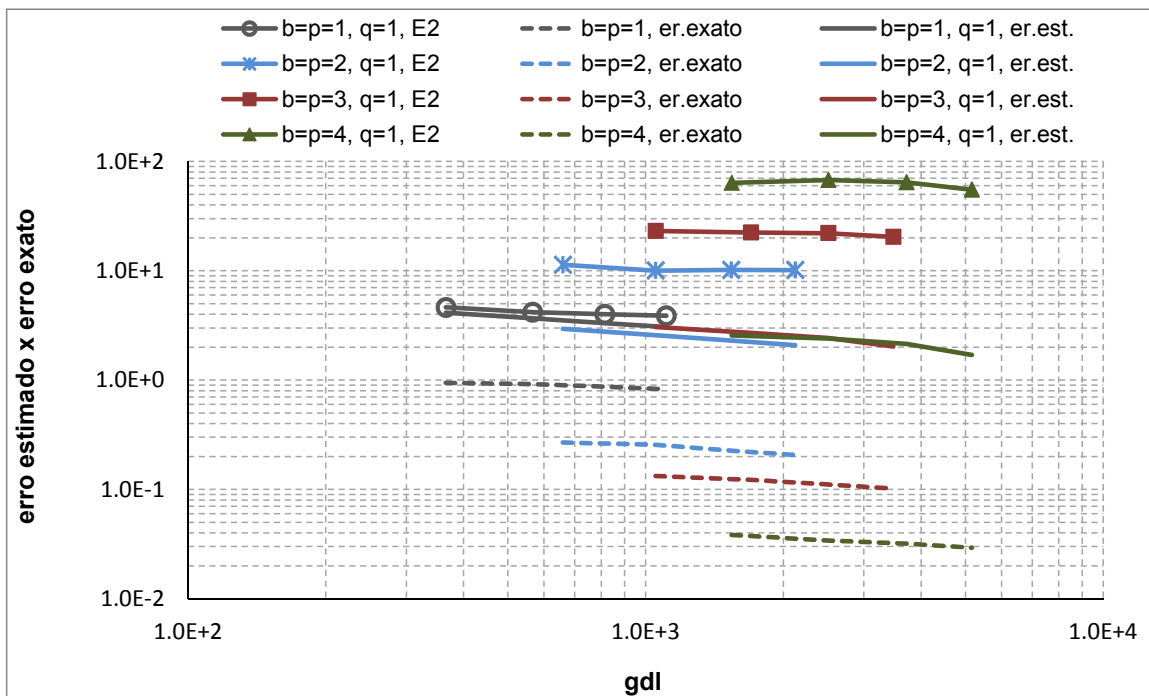


Figura 6.16: Comparação entre a norma em energia do erro estimado pelo estimador $\mathcal{E}^{\zeta\alpha}$ (6.31) e a norma em energia do erro exato, para $q = 1$. Funcional residual calculado como em (6.21).

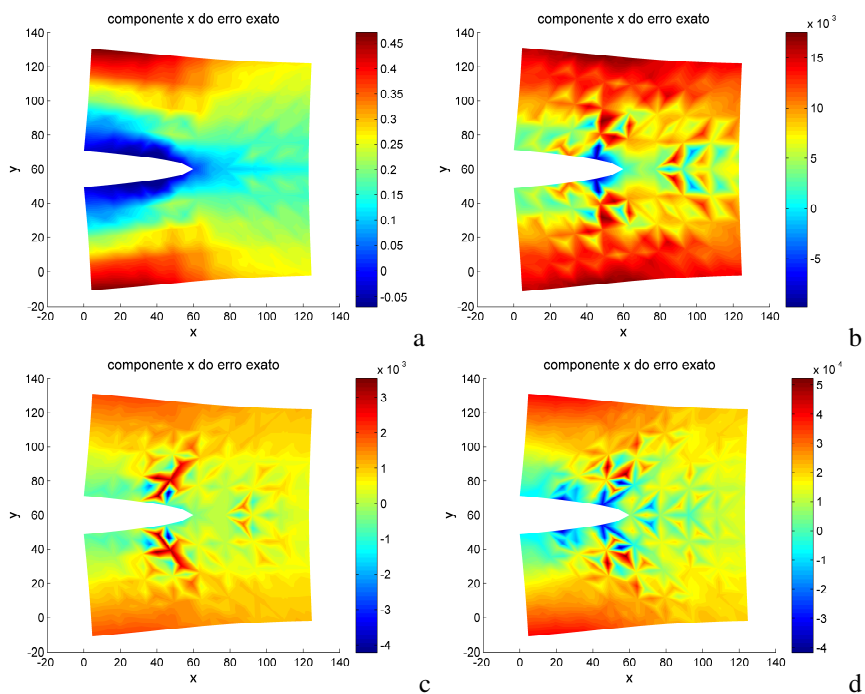


Figura 6.17: Componente e_x do campo de erro exato. Malha M2 e enriquecimento com funções de ponta de trinca segundo o padrão topológico com $p \leq 4$. a) grau $b = 1$, b) grau $b = 2$, c) grau $b = 3$ e d) grau $b = p = 4$.

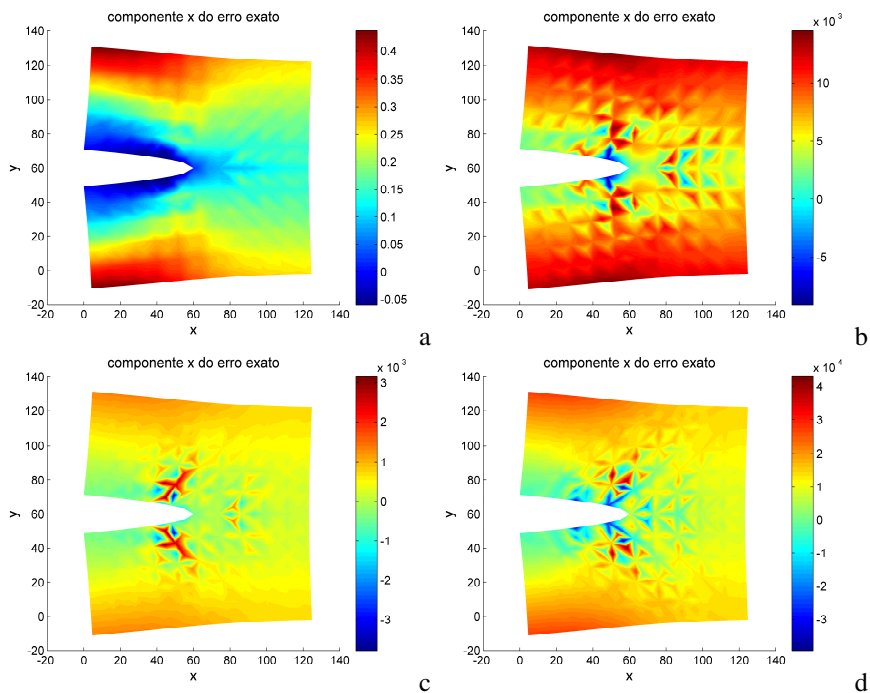


Figura 6.18: Componente e_x do campo de erro exato. Malha M3 e enriquecimento com funções de ponta de trinca segundo o padrão topológico com $p \leq 4$. a) grau $b = 1$, b) grau $b = 2$, c) grau $b = 3$ e d) grau $b = p = 4$.

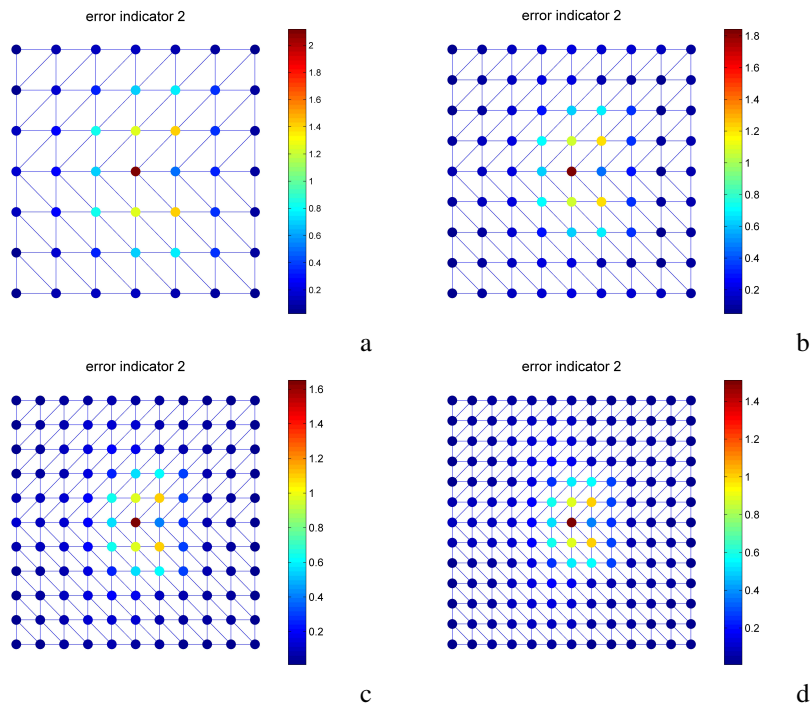


Figura 6.19: Distribuição dos indicadores nodais de erro para quatro diferentes malhas, considerando aproximação grau $b = 1$ e estimativa de erro com $q = 1$. a) malha M1, b) malha M2, c) malha M3 e d) malha M4.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A ordem de derivação mais elevada presente no operador diferencial da equação governante de um fenômeno, por exemplo (4.6), não é suficiente, por si só, para se inferir sobre a ordem da diferenciabilidade da solução analítica de um problema.

Muito embora soluções aproximadas pelo MEF, ou pelas suas versões generalizada ou estendida, converjam em termos do erro relativo na norma em energia, estas soluções aproximadas possuem a mínima suavidade característica da solução analítica. Isto se deve à própria natureza das funções utilizadas nas discretizações, que são seccionadamente contínuas.

Pode-se argumentar que processos adaptativos h , p ou hp podem ser usados para recuperar, até certo ponto, as perdas de regularidade introduzidas através do uso de funções de aproximação $C^0(\Omega)$. Entretanto, a recuperação completa não é possível devido à descontinuidade das derivadas normais ao longo das arestas (ou faces) dos elementos.

Faz-se oportuno citar que Reddy e colaboradores (SURANA; AHMADI; REDDY, 2002) comentam que, na aproximação de soluções contendo gradientes muito localizados, as aproximações calculadas a partir de formas fracas, como (4.8), usando subespaços minimamente conformes, podem falhar na convergência devido ao fato de que termos de ordem superior do problema de valor no contorno, e suas contribuições, podem não ser modelados adequadamente.

Neste contexto, o MGEF em sua versão de elevada regularidade pode ser explorado. Apesar de um conjunto de funções PU arbitrariamente contínuas, construídas através do método apresentado por Duarte, Kim e Quaresma (2006) e Edwards (1996), conforme descrito no Capítulo 3, não poder representar sequer uma função polinomial, é possível gerar facilmente funções de aproximação com as propriedades que se desejar. Para isso, utiliza-se o enriquecimento para ampliar o subespaço de busca da solução, que consiste de uma forma de refinamento algébrico. Neste processo de refinamento, é mais conveniente utilizar o enriquecimento externo, a exemplo de Duarte (1996), que o enriquecimento interno, por exemplo, do método de mínimos quadrados móveis.

Em aproximações suaves construídas, por exemplo, pelo método de mínimos quadrados móveis, a inserção de novos nós fornece uma versão h mas não permite o refinamento p -adaptativo sem comprometimento da regularidade das funções (LIU, 2003) (SCHWEITZER, 2008).

Assim, neste trabalho foram utilizadas as funções de enriquecimento

convencionais (3.20) para se representar a singularidade do campo de tensões na ponta de uma trinca. Além disso, foram aplicadas funções polinomiais de forma associada.

O refinamento algébrico de bases formadas por funções PU convencionais do MEF com o uso de funções de enriquecimento polinomiais, entretanto, pode comprometer a estabilidade da base e conduzir a matrizes de rigidez singulares. Schweitzer (2008) argumenta que uma generalização do MEF, através de (3.26) ou mesmo por (3.4), que garanta a estabilidade da base, independentemente das funções de enriquecimento, não pode ser conseguida com PU baseada em malha. Ainda, sugere que este inconveniente somente pode ser superado impondo-se a condição de *flap-top* à partição da unidade utilizada.

Para agravar ainda mais, a estratégia de enriquecimento geométrico (LABORDE et al., 2005), com funções de ponta de trinca, resulta num aumento considerável do número de graus de liberdade. Além disso, efeitos adversos sobre propriedades de condicionamento do sistema linear de equações também são verificados, como já apontado também por Béchet et al. (2005).

Por definição, a PU construída pela versão de elevada regularidade do MGEF, apresenta a propriedade do *delta de Kronecker* e possui derivadas de ordem superior (até uma ordem k ou infinitas) todas nulas sobre os nós. Por observação, no caso de uma PU $C^\infty(\Omega)$, a Figura 7.1 permite constatar que existe uma região no interior da nuvem onde, possivelmente, se tem um *flap top*.

Como observado nos resultados aqui reportados, as funções PU $C^\infty(\Omega)$ permitem melhores aproximações do campo de tensões ao redor da ponta da trinca, quando esta é modelada através de enriquecimento. Melhores taxas de convergência na versão p são obtidas (Figura 4.3, por exemplo). Verifica-se também menor dependência da forma como se promove o enriquecimento com as funções de frente de trinca, como evidenciado também pelas taxas de convergência na versão h (Tabela 4.1).

Esta constatação se dá tanto usando medidas globais de qualidade da aproximação quanto avaliando a severidade da trinca, medida por meio da equivalência entre a integral \mathcal{J} e a força configuracional. Também, nota-se que é possível melhorar a aproximação mesmo utilizando padrões de enriquecimento que adicionam funções com derivadas singulares a um número reduzido de nós ao redor da trinca (Figura 5.3). Sendo assim, a propriedade de *flap top* favorece o enriquecimento da PU à medida que permite melhor representar este enriquecimento.

Por outro lado, no tocante ao condicionamento, tem-se que a PU

$C^\infty(\Omega)$ gera matrizes de rigidez com número de condicionamento mais elevado, mesmo para baixos graus b . No entanto, a estabilidade da base se caracteriza no sentido do crescimento do número de condicionamento com o aumento do número de graus de liberdade. Assim sendo, apesar da ocorrência de auto-valores nulos, a PU $C^0(\Omega)$ fornece problemas melhor condicionados, com número de condicionamento crescendo a uma taxa menor, no caso da versão p (Figura 4.7).

Todavia, a partir da análise da distribuição dos autovalores (Figura 4.9, por exemplo), tem-se que o fator de maior influência no número de condicionamento é a dimensão da matriz de rigidez, visto que esta distribuição é bastante similar no caso de problemas com mesmo número de graus de liberdade. Também, nota-se que o fator de maior influência no crescimento do número de condicionamento é o enriquecimento p com as funções (3.23), pois geram autovalores cada vez menores.

Adicionalmente, a construção de funções ponderação nodais segundo o método proposto por Edwards (1996) é robusto, principalmente por dois aspectos:

- é livre de restrições geométricas quanto à forma dos elementos e das nuvens, e
- permite aumentar a regularidade sem exigir aumento do suporte das funções, somente usando funções de arestas adequadas ou o produto *booleano* com parâmetro k apropriado (no caso de arestas côncavas),

diferentemente de outros métodos que permitem elevada regularidade, porém com aumento do suporte das funções, como o reportado em Cottrell, Hughes e Reali (2007), por exemplo.

Por outro lado, funções PU muito suaves construídas por métodos sem malha, $\varphi_\alpha \in C^k(\Omega)$ com $k \geq 2$ por exemplo, geralmente possuem suportes alargados e se sobrepõe extensivamente com regiões de influência de outros nós.

Todavia, é de se reconhecer a necessidade de redução do custo da utilização da regularidade elevada. Pode-se considerar polinômios como funções de aresta (BARCELLOS; MENDONÇA; DUARTE, 2009) com o propósito de se obter regularidade limitada k e ainda, possivelmente, reduzir o custo de integração uma vez que as derivadas das funções $C^\infty(\Omega)$ são de difícil integração.

Também, vale propor aplicar a regularidade elevada somente em porções do domínio onde necessário, como a região que contém os nós que

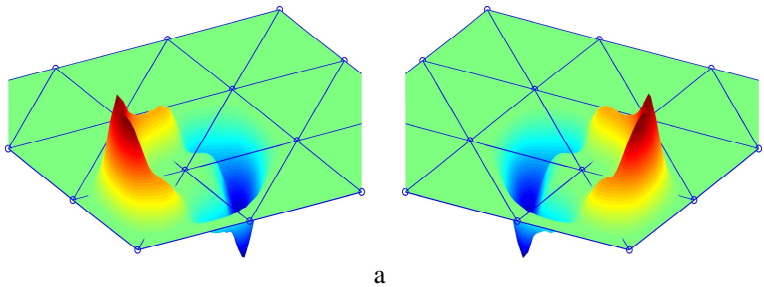


Figura 7.1: Derivadas da função PU do nó da figura 3.1: (a) derivada com relação a x e (b) derivada com relação a y .

receberão o enriquecimento com derivada singular. Considerando as funções de forma de elementos finitos como funções ponderação nodais pode se utilizar a equação de Shepard para acoplar funções suaves e não suaves, como sugerido por Duarte, Migliano e Baker (2005). Espera-se com isso reduzir o custo total da análise e usufruir do benefício das maiores taxas de convergência obtidas com as funções suaves ao redor da singularidade.

A argumentação pode prosseguir também no sentido da verificação da influência da regularidade na região de transição. Para citar, o efeito do enriquecimento p foi investigado por Tarancón et al. (2009). Por outro lado, no presente trabalho é possível notar que o benefício da regularidade se manifesta através dos melhores resultados obtidos, principalmente, para o padrão topológico de enriquecimento, tanto em medida global (Figura 4.12) quanto na avaliação da severidade da trinca (Figura 5.3). A Figura 4.17 evidencia que os erros são menores e menos dispersos quando se aplica o enriquecimento de ponta de trinca sobre a PU $C^\infty(\Omega)$.

Com relação à mecânica configuracional, utilizada como ferramenta para a obtenção de parâmetros da severidade da trinca, fica claro que a natureza vetorial, da quantidade calculada, representa uma vantagem perante métodos convencionais que fornecem somente uma medida escalar. Visto que a integração é realizada no domínio dos elementos, pode-se utilizar a uma estrutura de código similar àquela que calcula as contribuições elementares para a montagem do problema global de equilíbrio.

A determinação das forças configuracionais nodais pode ser realizada somente na região de interesse, na vizinhança da singularidade. Todavia, pode-se calcular a força configuracional em todos os nós como uma medida da qualidade da aproximação, uma vez que esta força deve se anular à medida

que a solução aproximada converge à solução exata.

Acerca do procedimento proposto para a estimativa de erro, constata-se que a projeção do resíduo, calculado em forma forte, pode ser usada para a definição das excitações dos problemas locais associados às nuvens.

Pela avaliação de dois problemas, cujas soluções apresentam singularidade no campo de tensões, é possível observar a efetividade local dos indicadores de erro associados aos nós da região de interesse.

Mesmo quando empregando somente enriquecimento polinomial na aproximação, e consequentemente restando a parcela singular na função erro, verifica-se que o procedimento permite identificar a região crítica, como se observa nas Figuras 6.5 e 6.8.

Entretanto, o estimador não captura bem o erro onde ele é suave, ou seja, em regiões distantes da singularidade. Pelo menos utilizando somente funções com dois graus acima da solução aproximada. De qualquer forma, a elevação do grau q eleva sobremaneira o custo da operação. Este fato pode ser devido à natureza das funções de enriquecimento ou devido à natureza da $PU C^\infty(\Omega)$. Em outras palavras, a explicação da baixa efetividade em regiões de solução suave pode ser devido à incapacidade das funções de enriquecimento polinomiais, utilizadas para o propósito de estimativa de erro, capturarem as segundas derivadas da solução aproximada.

Sendo assim, por mais esta razão, vale analisar as consequências de se empregar regularidade mais baixa, utilizando funções polinomiais para a construção das funções de aresta, de modo a se ter, por exemplo, aproximações $C^2(\Omega)$.

Finalmente, salienta-se que os objetivos estabelecidos, como a avaliação do efeito da regularidade na qualidade de aproximações envolvendo enriquecimento singular, aplicação da mecânica configuracional como ferramenta para a avaliação de severidade de trinca, em aproximações suaves, e a adaptação de um procedimento de estimativa de erro via norma em energia, utilizando o campo resíduo em forma forte, foram alcançados.

7.1 Investigações em andamento

Os seguintes tópicos são atividades que já se encontram em andamento:

- teste de formas alternativas de estimadores, como proposto em Barros et al. (2012);
- avaliação da localização do funcional residual do problema de estima-

tiva de erro com uma função constante e unitária, no caso de soluções regulares. Mesmo calculando o funcional residual de forma convencional, usando somente primeiras derivadas da solução (BARROS; BARCELLOS; DUARTE, 2007), (BARROS; BARCELLOS; DUARTE, 2009) ou (BARROS et al., 2012), isto pode ser viável devido à continuidade das tensões nas arestas;

- utilização da própria solução analítica como enriquecimento, na vizinhança da frente da trinca, com o propósito de substituir integrações em domínio por integrações nas arestas dos elementos, de acordo com proposta já apresentada por Ventura, Gracie e Belytschko (2009);
- avaliação de polinômios auto-equilibrados, também com vistas à aplicação de integração nas arestas dos elementos;
- análise mais refinada da interferência da regularidade elevada no cálculo das forças configuracionais;
- análise da qualidade da aproximação de campos singulares considerando malhas irregulares e trincas cortando elementos, para funções suaves;
- verificação do efeito da regularidade na distribuição dos valores de forças configuracionais em nós ao redor da frente da trinca, também em situações com trincas cortando elementos e singularidade não coincidente com um nó, e comparação com implementações $C^0(\Omega)$ de Glaser e Steinmann (2006) e Glaser e Steinmann (2007);
- utilização de produtos booleando (RVACHEV et al., 2001) e (RVACHEV; SHEIKO, 1995) para construção de enriquecimentos com regularidade mais elevada para representação de trincas com mudança de direção; e
- imposição de condições de contorno de Dirichlet não-homogêneas através do cálculo de coeficientes, pré-processados, associados à todas as funções de enriquecimento dos nós do contorno de Dirichlet.

7.2 Sugestões para trabalhos futuros

Sugere-se como trabalhos futuros:

- avaliação do desempenho quando aplicando a regularidade somente onde necessário, com vistas à redução do custo computacional;

- utilização de ferramentas da chamada geometria sólida construtiva (SHAPIRO, 2007) e funções distância generalizadas (SHAPIRO; TSUKANOV, 1999) e (RVACHEV; SHEIKO, 1995) para a construção das funções de aresta para contornos curvos, visando aplicar o MGEF suave a problemas com contornos arbitrários;
- verificar o efeito da regularidade obtida com a PU $C^\infty(\Omega)$ em problemas com não linearidade geométrica, por exemplo, consideração de grandes deformações na frente da trinca e implementação de grandes deslocamentos e grandes deformações para se investigar o desempenho frente à severas distorções de malha;
- utilização da mecânica configuracional para previsão da mudança de direção (*kinking*) de trincas, similar a Steinmann, Scherer e Denzer (2009), porém em modelagens com funções suaves;
- desenvolvimento de estimadores de erro por objetivo utilizando a mecânica Eshelbiana (RUTER; STEIN, 2007) e (RUTER; STEIN, 2003) e aplicados às aproximações suaves;
- avaliação do efeito da regularidade em modelagem global-local como, por exemplo, Kim, Duarte e Proença (2012), O'Hara, Duarte e Eason (2009) e Plews, Duarte e Eason (2012), principalmente na determinação de condições de contorno dos problemas locais;
- adaptação do método do hipercírculo (SYNGE, 1957) ao método residual implícito em subdomínios como meio de se garantir majorantes do erro (VEJCHODSKÝ, 2006);
- avaliação do efeito da regularidade elevada sobre o fenômeno de poluição (BABUŠKA; STROUBOULIS, 2001); e
- desenvolvimento de procedimentos adaptativos p e k explorando, simultaneamente, propriedades de estimadores de erro e mecânica configuracional.

REFERÊNCIAS

- ABDELAZIZ, Y.; HAMOUINE, A. A survey of the extended finite element. *Computers and Structures*, v. 86, p. 1141–1151, 2008.
- AINSWORTH, M.; ODEN, J. T. A unified approach to a posteriori error estimation using element residual methods. *Numerische Mathematik*, v. 65, p. 23–50, 1993.
- AINSWORTH, M.; ODEN, J. T. *A posteriori error estimation in finite element analysis*. New York: John Wiley and Sons, 2000. 240 p. (Pure and Applied Mathematics).
- ALMEIDA, J. P. M.; FREITAS, J. A. T. Alternative approach to the formulation of hybrid equilibrium finite elements. *Computers and Structures*, v. 40, p. 1043 – 1047, 1991.
- ALMEIDA, J. P. M.; MAUNDER, E. A. W. Recovery of equilibrium on star patches using a partition of unity technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 79, p. 1493–1516, 2009.
- ANDERSON, T. L. *Fracture mechanics*. 3rd. ed. [S.l.]: Taylor and Francis, 2005.
- ANUVRIEV, I.; KORNEEV, V.; KOSTYLEV, V. *A posteriori error estimation by means of the exactly equilibrated fields*. Austrian Academy of Sciences, 2007. Institutional Report.
- ASADPOURE, A.; MOHAMMADI, S. Developing new enrichment functions for crack simulation in orthotropic media by extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 69, p. 2150–2172, 2007.
- BABUŠKA, I.; CALOZ, G.; OSBORN, J. E. Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, v. 31, p. 945–981, 1994.
- BABUŠKA, I.; MELENK, J. M. The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, p. 727–758, 1997.

- BABUŠKA, I.; MILLER, A. A feedback element method with a posteriori error estimation: Part *i*. the finite element method and some basic properties of the a posteriori error estimator. *Computer Methods Applied Mechanics Engineering*, v. 61, p. 1–40, 1987.
- BABUŠKA, I.; RHEINBOLDT, W. C. Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 15, p. 736–754, 1978.
- BABUŠKA, I.; RHEINBOLDT, W. C. Analysis of optimal finite-element meshes in R^1 . *Mathematics of Computation*, v. 33, p. 435–463, 1979.
- BABUŠKA, I.; STROUBOULIS, T. *The finite element method and its reliability*. 1st. ed. [S.l.]: Oxford, 2001.
- BABUŠKA, I.; WHITEMAN, J. R.; STROUBOULIS, T. *Finite elements: an introduction to the method and error estimation*. 1st. ed. [S.l.]: Oxford, 2011.
- BABUŠKA, I.; YU, D. Asymptotically exact a posteriori error estimator for biquadratic elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 3, p. 341–354, 1987.
- BANK, R. E.; WEISER, A. Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations. *Mathematics of Computation*, v. 44, p. pp. 283–301, 1985.
- BANKS-SILLS, L.; BORTMAN, Y. Reappraisal of the quarter-point quadrilateral element in linear elastic fracture mechanics. *International Journal of Fracture*, v. 25, p. 169–180, 1984.
- BARCELLOS, C. S. de; MENDONÇA, P. T. R.; DUARTE, C. A. A C^k continuous generalized finite element formulations applied to laminated kirchhoff plate model. *Computational Mechanics*, v. 44, p. 377–393, 2009.
- BARROS, F. B.; BARCELLOS, C. S. de; DUARTE, C. A. p -Adaptive C^k generalized finite element method for arbitrary polygonal clouds. *Computational Mechanics*, v. 41, p. 175–187, 2007.
- BARROS, F. B.; BARCELLOS, C. S. de; DUARTE, C. A. Subdomain-based flux-free a posteriori estimator for generalized finite element

- method. In: *Proceedings of the Thirth Iberian-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*. Búzios, Rio de Janeiro: [s.n.], 2009.
- BARROS, F. B. et al. Subdomain-based error techniques for GFEM approximations of problems with singular stress fields. *Submetido à Computational Mechanics*. 2012.
- BARROS, F. B.; PROENÇA, S. P. B.; BARCELLOS, C. S. de. On error estimator and p -adaptivity in the generalized finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 60, p. 2373–2398, 2004.
- BARSOU, R. S. Application of quadratic isoparametric element in linear fracture mechanics. *International Journal of Fracture*, v. 10, p. 603–605, 1974.
- BÉCHET, E. et al. Improved implementation and robustness study of the xfem for stress analysis around cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 64, p. 1033–1056, 2005.
- BELLEÇ, J.; DOLBOW, J. E. A note on enrichment functions for modelling crack nucleation. *Communicationns in Numerical Methods in Engineering*, v. 19, p. 921–932, 2003.
- BELYTSCHKO, T.; BLACK, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 45, p. 601–620, 1999.
- BELYTSCHKO, T. et al. Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 58, p. 1873–1905, 2003.
- BELYTSCHKO, T.; GRACIE, R.; VENTURA, G. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. *Modeling and Simulation in Material Sciences and Engineering*, v. 17, p. 043001, 2009.
- BELYTSCHKO, T.; LU, Y. Y.; GU, L. Element-free galerkin method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 37, p. 229–256, 1994.

- BELYTSCHKO, T.; MOËS, N.; USUI, C. P. S. Arbitrary discontinuities in finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 50, p. 993–1013, 2001.
- BELYTSCHKO, T. et al. Structured extended finite element methods for solids defined by implicit surfaces. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 56, p. 609–635, 2003.
- BENZLEY, S. E. Representation of singularities with isoparametric finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 6, p. 49–53, 1974.
- BISWAS, A.; SHAPIRO, V. Approximate distance fields with non-vanishing gradients. *Graphical Models*, v. 66, p. 133–159, 2004.
- BORJA, R. Assumed enhanced strain and the extended finite element methods: a unification of concepts. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 197, p. 2789–2803, 2008.
- BORST, R. de; GUTIÉRREZ, M. A. A unified framework for concrete damage and fracture models including size effects. *International Journal of Fracture*, v. 95, p. 261–277, 1999.
- BUDYN, . et al. A method for multiple crack growth in brittle materials without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 61, p. 1741–1770, 2004.
- BUI, H. D. Associated path independent j -integrals for separating mixed modes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 31, p. 439–448, 1983.
- CARR, J. C. et al. Reconstruction and representation of 3d objects with radial basis functions. In: *Proceedings of the 28th annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*. Los Angeles, Califórnia: ACM Special Interest Group on Computer Graphics and Interactive Techniques, 2001.
- CARSTENSEN, C.; FUNKEN, S. A. Fully reliable localized error control in the fem. *SIAM J. Sci. Comput.*, v. 21, p. 1465–1484, 1999.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Métodos numéricos para Engenharia*. 5ed. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 2008.

- CHESSA, J.; BELYTSCHKO, T. An enriched finite element method and level sets for axisymmetric two-phase flow with surface tension. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 58, p. 2041–2064, 2003.
- CHESSA, J.; WANG, H.; BELYTSCHKO, T. On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 57, p. 1015–1038, 2003.
- COMI, C.; MARIANI, S. S. Extended finite element simulation of quasi-brittle fracture in functionally graded materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 196, p. 4013–4026, 2007.
- COTTEREAU, R.; DÍEZ, P.; HUERTA, A. Strict error bounds for linear solid mechanics problems using a subdomain-based flux-free method. *Computational Mechanics*, v. 44, p. 533–547, 2009.
- COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J. R.; REALI, A. Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 196, p. 4160–4183, 2007.
- COX, J. V. An extended finite element method with analytical enrichment for cohesive crack modeling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 78, p. 48–83, 2009.
- DAUX, C. et al. Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 48, p. 1741–1760, 2000.
- DELORENZI, H. G. Energy release rate calculations by the finite element method. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 21, p. 129–143, 1985.
- DEMKOWICZ, L. et al. Toward a universal h - p adaptive finite element strategy. part 1: Constrained approximation and data structure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 77, p. 79–112, 1989.
- DEMKOWICZ, L.; ODEN, J. T.; STROUBOULIS, T. Adaptive finite elements for flow problems with moving boundaries. part 1: Variational principles and a posteriori error estimates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 46, p. 217–251, 1984.

- DHIA, H. B.; RATEAU, G. Arlequin method as a flexible engineering design tool. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 62, p. 1442–1462, 2005.
- DÍEZ, P.; PARÉS, N.; HUERTA, A. Recovering lower bounds of the error by postprocessing implicit residual a posteriori error estimates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 56, p. 1465–1488, 2003.
- DOLBOW, J.; MOËS, N.; BELYTSCHKO, T. Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 36, p. 235–260, 2000.
- DUARTE, C. A. *Estudo da versão p do método de elementos finitos para problemas da elasticidade e de potencial*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 1991.
- DUARTE, C. A. *The hp-cloud method*. Tese (Doutorado) — The University of Texas at Austin, 1996.
- DUARTE, C. A.; BABUŠKA, I.; ODEN, J. T. Generalized finite element method for three-dimensional structural mechanics problems. *Computers and Structures*, v. 77, p. 215–232, 2000.
- DUARTE, C. A. et al. A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, p. 2227–2262, 2001.
- DUARTE, C. A.; KIM, D. J.; QUARESMA, D. M. Arbitrarily smooth generalized finite element approximations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 196, p. 33–56, 2006.
- DUARTE, C. A.; MIGLIANO, D. Q.; BAKER, E. B. *A technique to combine meshfree- and finite element-based partition of unity approximations*. Department of Civil and Environmental Engineering - University of Illinois at Urbana-Champaign, 2005. Structural Research Series 638.
- DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. *hp clouds - a meshless method to solve boundary-value problems*. The University of Texas at Austin, 1995.
- DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. An *h-p* adaptive method using cloud. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, p. 237–262, 1996.

- EDWARDS, H. C. C^∞ finite element basis functions. The University of Texas at Austin, 1996. Report 96-45.
- ESHELBY, J. The force on an elastic singularity. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: mathematical, physical and engineering sciences*, v. 244, p. 87–112, 1951.
- EVANS, L. C. *Partial differential equations*. 2nd. ed. [S.l.]: American Mathematical Society, 2010.
- FLEMING, M. et al. Enriched element-free galerkin methods for singular fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, p. 1483–1504, 1997.
- FRIES, T. P.; BELYTSCHKO, T. The intrinsic xfem: a method for arbitrary discontinuities without additional unknowns. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 68, p. 1358–1385, 2006.
- FRIES, T. P.; BELYTSCHKO, T. The extended/generalized finite element method: an overview of the method and its applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 84, p. 253–304, 2010.
- GARCIA, O. A. *Método sem malha hp-clouds na análise de placas de Reissner-Mindlin*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 1999.
- GARCIA, O. A.; FANCELLO, E. A.; MENDONÇA, P. T. R. Developments in the application of the generalized finite element method to thick shell problems. *Computational Mechanics*, v. 44, p. 669–682, 2009.
- GELFAND, I. M.; FOMIN, S. V. *Calculus of variations*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1963.
- GINER, E. et al. An implementation of the stiffness derivative method as a discrete analytical sensitivity analysis and its application to mixed mode in lefm. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 69, p. 2051–2071, 2002.
- GLASER, J.; STEINMANN, P. On material forces within the extended finite element method. In: *Proceedings of the 6th European Solid Mechanics Conference*. Budapest: [s.n.], 2006.

- GLASER, J.; STEINMANN, P. Material force method within the framework of the *xfem*: distribution of nodal material forces. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, Zurich, v. 7, n. Sixth International Congress on Industrial Applied Mathematics and GAMM Annual Meeting, p. 4030017–4030018, 2007.
- GRÄTSCH, T.; BATHE, K. J. A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis. *Computers and Structures*, v. 83, p. 235–265, 2005.
- GRAVOUIL, A.; MOËS, N.; BELYTSCHKO, T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets. part ii: level set update. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 53, p. 2569–2586, 2002.
- GRIFFITH, A. A. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society, Serie A*, v. 221, p. 163–198, 1921.
- GURTIN, M. E. *Configurational forces as basic concepts of continuum physics*. New York: Springer, 2000. 249 p.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de física*. 9th ed. [S.l.]: LTC, 2012.
- HANSBO, A.; HANSBO, P. An unfitted finite element method, based on nitsche’s method, for elliptic interface problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 191, p. 5537–5552, 2002.
- HANSBO, A.; HANSBO, P. A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, p. 3523–3540, 2004.
- HELLEN, T. K. On the method of virtual crack extension. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 9, p. 187–207, 1975.
- HETTICH, T.; HUND, A.; RAMM, E. Modeling of failure in composite by *xfem* and level-sets within a multiscale framework. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 197, p. 414–424, 2008.

- HONG, S.; KIM, K. S. Extraction of cohesive zone laws from elastic far-fields of a cohesive crack tip: a field projection method. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 51, p. 1267–1286, 2003.
- HUGHES, T. J. R. et al. The variational multiscale method - a paradigm for computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 166, p. 3–24, 1998.
- IRWIN, G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, v. 24, p. 361–364, 1957.
- JIRASEK, M.; BELYTSCHKO, T. Computational resolution of strong discontinuities. In: MANG, H.; RAMMERSTORFER, R.; EBERHARDSTEINER, J. (Ed.). *Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics*. Vienna, Austria: [s.n.], 2002.
- KARIHALOO, B. L.; XIAO, Q. Z. Modelling of stationary and growing cracks in fe framework without remeshing: a state-of-art review. *Computers and Structures*, v. 81, p. 119–129, 2003.
- KIENZLER, R.; HERRMANN, G. *Mechanics in material space with applications to defect and fracture mechanics*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2000. 298 p.
- KIM, D. J.; DUARTE, C. A.; PROENÇA, S. P. A generalized finite element method with global-local enrichment functions for confined plasticity problems. *Computational Mechanics*, v. 50, p. 563–578, 2012.
- KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: Wiley, 1989. 688 p.
- KRYSL, P.; BELYTSCHKO, T. Element-free galerkin method: convergence of the continuous and discontinuous shape functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 148, p. 257–277, 1997.
- LABORDE, P. et al. High-order extended finite element method for cracked domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 64, p. 354–381, 2005.
- LADEVÈZE, P.; LEGUILLON, D. Error estimate procedure in the finite element method and applications. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 20, p. 485–509, 1983.

- LADEVÈZE, P.; MAUNDER, E. A. W. A general method for recovering equilibrating element tractions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 137, p. 111 – 151, 1996.
- LANCASTER, P.; SALKAUSKAS, K. Surfaces generated by moving least squares methods. *Mathematics of Computation*, v. 137, p. 141–158, 1981.
- LI, F. Z.; SHIH, C. F.; NEEDLEMAN, A. A comparison of methods for calculating energy release rates. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 21, p. 405–421, 1985.
- LISZKA, T. J.; DUARTE, C. A. M.; TWORZYDLO, W. W. *hp*-meshless cloud method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, p. 263–288, 1996.
- LIU, G. R. *Mesh free methods: moving beyond the finite element method*. Boca Raton: CRC Press, 2003. 691 p.
- LIU, W. K.; JUN, S.; ZHANG, Y. Reproducing kernel particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 20, p. 1081–1106, 1995.
- LUENBERGER, D. G. *Optimization by vector space methods*. 1st. ed. [S.l.]: Wiley, 1969.
- MACHIELS, L.; MADAY, Y.; PATERA, A. T. A flux-free nodal neumann subproblem approach to output bounds for partial differential equations. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, v. 330, p. 249 – 254, 2000.
- MARINÉ, N. P. *Error assessment for functional outputs of PDE's: bounds and goal-oriented adaptivity*. Tese (Doutorado) — Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 2005.
- MELENK, J. M. *On generalized finite element method*. Tese (Doutorado) — University of Maryland, 1995.
- MELENK, J. M.; BABUŠKA, I. The partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, p. 289–314, 1996.

- MENDONÇA, P. T. R.; BARCELLOS, C. S. de; TORRES, D. A. F. Analysis of anisotropic Mindlin plate model by continuous and non-continuous GFEM. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 47, p. 698–717, 2011.
- MENDONÇA, P. T. R.; BARCELLOS, C. S. de; TORRES, D. A. F. Robust C^k/C^0 generalized FEM approximations for higher-order conformity requirements: application to reddy's HSDT model for anisotropic laminated plates. *Composite Structures*, v. 96, p. 332–345, 2013.
- MERGHEIM, J. A variational multiscale method to model crack propagation at finite strains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 80, p. 269–289, 2009.
- MOËS, N.; DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 46, p. 131–150, 1999.
- MOËS, N.; GRAVOUIL, A.; BELYTSCHKO, T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets. part i: Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 53, p. 2549–2568, 2002.
- MONAGHAN, J. J. Why particle methods work. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, v. 3, p. 422–433, 1982.
- MORIN, P.; NOCHETTO, R. H.; SIEBERT, K. G. Local problems on stars: A posteriori error estimators, convergence, and performance. *Mathematics of Computation*, v. 72, p. pp. 1067–1097, 2003.
- MUELLER, R.; MAUGIN, G. A. On material forces and finite element discretizations. *Computational Mechanics*, v. 29, p. 52–60, 2002.
- MUSKHELISHVILI, N. I. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity: fundamental equations plane theory of elasticity, torsion and bending*. Moscou: Moordhoff, 1963.
- NAGASHIMA, T.; OMOTO, T.; TANI, S. Stress intensity factor analysis of interface cracks using xfem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 56, p. 1151–1173, 2003.
- NGO, D.; SCORDELIS, A. C. Finite element analysis of reinforced concrete beams. *Journal of American Concrete Institute*, v. 64, p. 152–163, 1967.

- ODEN, J. T. et al. Toward a universal h - p adaptive finite element strategy. part 2: A posteriori error estimation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 77, p. 113–180, 1989.
- ODEN, J. T.; DUARTE, C. A. Clouds, cracks and fem's. In: REDDY, J. B. (Ed.). *Recent developments in computational and applied mechanics: a volume in honour of John B. Martin*. Barcelona, 1997. p. 432.
- ODEN, J. T.; DUARTE, C. A.; ZIENKIEWICZ, O. C. A new cloud-based hp finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 153, p. 117–126, 1998.
- ODEN, J. T.; REDDY, J. N. *An introduction to the mathematical theory of finite elements*. New York: Wiley, 1976. 429 p.
- O'HARA, P. J.; DUARTE, C. A.; EASON, T. Generalized finite element analysis of three-dimensional heat transfer problems exhibiting sharp thermal gradients. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 198, p. 1857–1871, 2009.
- OLIVER, J. Continuum modelling of strong discontinuities in solid mechanics using damage models. *Computational Mechanics*, v. 17, p. 49–61, 1995.
- ORTIZ, M.; LEROY, Y.; NEEDLEMAN, A. A finite element method for localization failure analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 61, p. 189–214, 1987.
- PARÉS, N. et al. The computation of bounds for linear-functional outputs of weak solutions to the two-dimensional elasticity equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, p. 406 – 429, 2006.
- PARÉS, N.; DÍEZ, P.; HUERTA, A. Subdomain-based flux-free a posteriori error estimators. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, p. 297–323, 2006.
- PARK, K. et al. Integration of singular enrichment function in the generalized/extended finite element method for three-dimensional problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 78, p. 1220–1257, 2009.

- PARKS, D. M. A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors. *International Journal of Fracture*, v. 10, p. 487–502, 1974.
- PLED, F.; CHAMOIN, L.; LADEVÈZE, P. On the techniques for constructing admissible stress fields in model verification: performances on engineering examples. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 88, p. 409–441, 2011.
- PLEWS, J.; DUARTE, C. A.; EASON, T. An improved nonintrusive global-local approach for sharp thermal gradients in a standard FEA platform. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 91, p. 426–449, 2012.
- PRUDHOMME, S. et al. Analysis of a subdomain-based error estimator for finite element approximations of elliptic problems. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, v. 20, p. 165–192, 2004.
- RABCZUK, T. et al. A new crack tip element for the phantom-node method with arbitrary cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 75, p. 577–599, 2008.
- RASHID, Y. R. Analysis of prestressed concrete pressure vessels. *Nuclear Engineering and Design*, v. 7, p. 334–344, 1968.
- REMMERS, J.; BORST, R. de; NEEDLEMAN, A. A cohesive segments method for the simulation of crack growth. *Computational Mechanics*, v. 31, p. 69–77, 2003.
- RÉTHORÉ, J.; ROUX, S.; HILD, F. Hybrid analytical and extended finite element method (HAX-FEM): a new enrichment procedure for cracked solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 81, p. 269–285, 2010.
- RICE, J. R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, v. 35, p. 379–386, 1968.
- RICE, J. R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. *Journal of Applied Mechanics*, v. 55, p. 98–103, 1988.
- RUTER, M.; STEIN, E. On the duality of global finite element discretization error-control in small strain newtonian and eshelbian mechanics. *Technische Mechanik*, v. 23, p. 265–282, 2003.

- RUTER, M.; STEIN, E. On the duality of finite element discretization error control in computational newtonian and eshelbian mechanics. *Computational Mechanics*, v. 39, p. 609–630, 2007.
- RVACHEV, V. L. *Theory of R-functions and some of its applications*. [S.l.]: Naukova Dumka, 1982. In Russian.
- RVACHEV, V. L.; SHEIKO, T. I. R-functions in boundary value problems in mechanics. *Applied Mechanics Reviews*, v. 48, p. 151–188, 1995.
- RVACHEV, V. L. et al. Transfinite interpolation over implicitly defined sets. *Computer Aided Geometric Design*, v. 18, p. 195–220, 2001.
- SAUER-BUDGE, A. M. et al. Computing bounds for linear functionals of exact weak solutions to poisson’s equation. *SIAM J Numer Anal*, v. 42, n. 4, p. 1610–1630, 2004.
- SCHWEITZER, M. A. *Meshfree and generalized finite element methods*. Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2008. Habilitation thesis.
- SETHIAN, J. A. A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 93, p. 1591–1595, 1996.
- SETHIAN, J. A. *Level set methods and fast marching methods*. New York: Cambridge University Press, 1999. 378 p.
- SHAPIRO, V. *Theory of R-functions and applications: a primer*. Cornell University, 1991.
- SHAPIRO, V. Semi-analytic geometry with r -functions. *Acta Numerica*, v. 16, p. 239–303, 2007.
- SHAPIRO, V.; TSUKANOV, I. Implicit functions with guaranteed differential properties. In: *Proceedings of the Fifth ACM Symposium on solid Modeling and Applications*. Ann Arbor, Michigan: [s.n.], 1999.
- SIH, G. C.; PARIS, P. C.; IRWIN, G. R. On cracks in rectilinearly anisotropic bodies. *International Journal of Fracture Mechanics*, v. 1, p. 189–203, 1965.

- SIMO, J. C.; OLIVER, J.; ARMERO, F. An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics*, v. 12, p. 277–296, 1993.
- SONG, J. H.; BELYTSCHKO, T. Cracking node method for dynamic fracture with finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 77, p. 360–385, 2009.
- STAZI, F. L. et al. An extended finite element method with higher-order elements for curved cracks. *Computational Mechanics*, v. 31, p. 38–48, 2003.
- STEINMANN, P.; ACHERMANN, D.; BARTH, F. J. Application of material forces to hyperelastostatic fracture mechanics. ii. computational setting. *International Journal of Solids and Structures*, v. 38, p. 5509–5526, 2001.
- STEINMANN, P.; SCHERER, M.; DENZER, R. Secret and joy of configurational mechanics: from foundations in continuum mechanics to applications in computational mechanics. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, v. 89, p. 614–630, 2009.
- STOLARSKA, M. et al. Modeling crack growth by level sets in the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 51, p. 943–960, 2001.
- STROUBOULIS, T.; BABUŠKA, I.; COPPS, K. The design and analysis of the generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 181, p. 43–69, 2000.
- STROUBOULIS, T.; BABUŠKA, I.; COPPS, K. The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, p. 4081–4193, 2001.
- STROUBOULIS, T.; ZHANG, L.; BABUŠKA, I. Generalized finite element method using mesh-based handbooks: application to problems in domains with many voids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 192, p. 3109–3161, 2003.
- STROUBOULIS, T. et al. A posteriori error estimation for generalized finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, p. 852–879, 2006.

- SUKUMAR, N. et al. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, p. 6183–6200, 2001.
- SUKUMAR, N. et al. Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 59, p. 1075–1102, 2004.
- SUKUMAR, N. et al. Extended finite element method for three-dimensional crack modeling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 48, p. 1549–1570, 2000.
- SURANA, K. S.; AHMADI, A. R.; REDDY, J. N. The k -version of finite element method for self-adjoint operators in bvp. *International Journal of Computational Engineering Science*, v. 3, p. 155–218, 2002.
- SYNGE, J. L. *The hypercircle in mathematical physics: a method for the approximate solution of boundary value problems*. New York: Cambridge University Press, 1957.
- SZABÓ, B.; BABUŠKA, I. *Finite element analysis*. New York: John Wiley and Sons, 1991. 368 p.
- SZABÓ, B.; BABUŠKA, I. *Introduction to finite element analysis: formulation, verification and validation*. Chichester, United Kingdom: Wiley, 2011. 372 p.
- SZABÓ, B.; DUSTER, A.; RANK, E. The p -version of the finite element method. In: STEIN, E.; BORST, R. de; HUGHES, T. J. R. (Ed.). *Encyclopedia of Computational Mechanics*. [S.l.]: Wiley, 2004.
- SZABÓ, B. A. Estimation and control of error based on p -convergence. In: BABUŠKA, I. (Ed.). *Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations*. [S.l.: s.n.], 1986. (Wiley Series in Numerical Methods in Engineering), p. 61–78.
- TARANCÓN, J. E. et al. Enhanced blending elements for XFEM applied to linear elastic fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 77, p. 126–148, 2009.
- TAROCO, E. Shape sensitivity analysis in linear elastic fracture mechanics. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, v. 188, p. 697–712, 2000.

- TORRES, D. A. F.; MENDONÇA, P. T. R. Analysis of piezoelectric laminates by generalized finite element method and mixed layerwise-HSDT models. *Smart Materials and Structures*, v. 19, p. 035004, 2010.
- TORRES, D. A. F.; MENDONÇA, P. T. R. HSDT-layerwise analytical solution for rectangular piezoelectric laminated plates. *Composite Structures*, v. 92, p. 1763–1774, 2010.
- TORRES, D. A. F.; MENDONÇA, P. T. R.; BARCELLOS, C. S. de. Evaluation and verification of an HSDT-layerwise generalized finite element formulation for adaptive piezoelectric laminated plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 200, p. 675–691, 2011.
- TU, L. W. *An introduction to manifolds*. New York: Springer, 2008. (Universitext).
- VEJCHODSKÝ, T. Guaranteed and locally computable a posteriori error estimate. *IMA Journal of Numerical Analysis*, v. 26, p. 525–540, 2006.
- VENTURA, G.; GRACIE, R.; BELYTSCHKO, T. Fast integration and weight function blending in the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 77, p. 1–29, 2009.
- VENTURA, G.; XU, J. X.; BELYTSCHKO, T. A vector level set method and new discontinuity approximations for crack growth by efg. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 54, p. 923–944, 2002.
- VERFÜRTH, R. A posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 50, p. 67 – 83, 1994.
- WANDZURA, S.; XIAO, H. Symmetric quadrature rules on a triangle. *Computers and Mathematics with Applications*, v. 45, p. 1829 – 1840, 2003.
- WESTERGAARD, H. M. Bearing pressures and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, v. 6, p. 49–53, 1939.
- WILLIAMS, M. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *ASME Journal of Applied Mechanics*, v. 24, p. 109–114, 1957.

- YAN, Y.; PARK, S. H. An extended finite element method for modeling near-interfacial crack propagation in a layered structure. *International Journal of Solids and Structures*, v. 45, p. 4756–4765, 2008.
- ZHANG, W.; DENG, X. Mixed-mode i/ii fields around a crack with a cohesive zone ahead of the crack tip. *Mechanics Research Communications*, v. 34, p. 172–180, 2007.
- ZI, G.; BELYTSCHKO, T. New crack-tip elements for xfem and applications to cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 57, p. 2221–2240, 2003.