

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA**

**ANÁLISE NUMÉRICO-EXPERIMENTAL DE COMPONENTES SUJEITOS À FADIGA POR
SOLICITAÇÕES ALEATÓRIAS – AVALIAÇÃO DE MODELOS**

Dissertação submetida à

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

para a obtenção do grau de

MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

RAUL BOSCO JUNIOR

Florianópolis, Março de 2007.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA**

**ANÁLISE NUMÉRICO-EXPERIMENTAL DE COMPONENTES SUJEITOS À FADIGA POR
SOLICITAÇÕES ALEATÓRIAS - AVALIAÇÃO DE MODELOS**

RAUL BOSCO JUNIOR

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA

sendo aprovada em sua forma final.

Prof. Edison da Rosa, Dr. Eng. – Orientador

Fernando Cabral, Ph. D. - Coordenador do Curso

BANCA EXAMINADORA

Prof. Arcanjo Lenzi, Ph. D. – Presidente

Prof. Marco Antonio Martins Cavaco, Ph. D.

Prof. Eduardo Alberto Fancello, D. Sc.

**“Se consegui ver mais longe,
é porque estava de pé sobre ombros de gigantes”**

Isaac Newton

**Aos meus pais, Raul Bosco e Cladis Bosco, pelo apoio e incentivo ao meu
desenvolvimento;
À minha mulher Cynthia Carolina A. Bosco, pela compreensão e apoio
ao longo de todo o trabalho;
Aos meu Amigos pelo carinho**

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador o Prof. Dr. Edison da Rosa pela dedicação e orientação ao longo de todo o período de Mestrado.

À instituição, UFSC, pela oportunidade e disponibilidade de toda sua estrutura bibliotecária, laboratorial e principalmente, o corpo Docente.

Ao CCT e a Coordenação do PosMec por propiciar e incentivar o Mestrado em regime Especial, aos colegas pelo incentivo e colaboração, em especial aos professores, que em grande parte participaram desta jornada.

Aos amigos e companheiros do PosMec, em especial Celso Meneghini e Tiago Poletto, pelo apoio e amizade.

Em especial a Embraco, por todo o incentivo, prestação, colaboração e credibilidade devotada ao crescimento profissional e pessoal de seus colaboradores. Ao Diretor de Tecnologia Roberto Campos, pelo seu constante apoio às minhas investidas profissionais, ao amigo e mentor Marcos Giovanni Dropa de Bortoli, aos técnicos mecânicos Everton Magnabosco e ao Físico e técnico em acústica Otavio Santini Junior: pessoas fundamentais ao longo de todo o trabalho.

Índice

| | |
|--|-----------|
| ÍNDICE | 6 |
| ÍNDICE DE TABELAS | 9 |
| ABREVIÇÕES | 10 |
| LISTA DE SÍMBOLOS | 11 |
| RESUMO | 14 |
| ABSTRACT | 15 |
| 1. INTRODUÇÃO | 16 |
| 1.1 JUSTIFICATIVA DO ESTUDO DE FADIGA ALEATÓRIA | 17 |
| 1.2 O ESTUDO DA FADIGA NO DOMÍNIO DO TEMPO E DA FREQUÊNCIA | 19 |
| 1.2.1 <i>Vantagens e Desvantagens das Abordagens: Domínio no Tempo e Domínio no Frequência</i> | 19 |
| 1.3 MOTIVAÇÃO | 21 |
| 1.4 CONTRIBUIÇÕES | 23 |
| 1.5 SÍNTESE DO CAPÍTULO | 24 |
| 2. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E PROCESSO ESTOCÁSTICO | 25 |
| 2.1 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS | 25 |
| 2.1.1 <i>Classificação dos Processos Aleatórios</i> | 26 |
| 2.1.2 <i>Valor Esperado e Probabilidade</i> | 27 |
| 2.1.3 <i>Função Densidade de Probabilidade – FDP, ou Probabilistic Density Function – PDF</i> | 29 |
| 2.1.4 <i>Função Densidade de Probabilidade Acumulada – FPA, ou Cumulative Density Function – CDF</i> | 35 |
| 2.2 PROCESSOS ESTOCÁSTICOS | 37 |
| 2.2.1 <i>Definição</i> | 37 |
| 2.2.2 <i>Processo Estacionário</i> | 39 |
| 2.2.3 <i>Processo Aleatório Estacionário Ergódico</i> | 40 |
| 2.3 ANÁLISE NO TEMPO E NA FREQUÊNCIA | 41 |
| 2.3.1 <i>Autocorrelação</i> | 41 |
| 2.3.2 <i>Transformada de Fourier</i> | 42 |
| 2.3.3 <i>Função Densidade Espectral de Potência (Power Spectral Density) PSD</i> | 44 |
| 2.3.4 <i>Momentos da PSD</i> | 45 |
| 2.3.5 <i>Propriedades da PSD</i> | 46 |
| 2.3.6 <i>Aspectos Práticos da PSD</i> | 47 |
| 2.3.7 <i>Expectativa de zeros, de picos e fator de irregularidade</i> | 48 |
| 2.3.7 <i>Processo Aleatório Analítico e Momentos Espectrais</i> | 49 |
| 2.4 SÍNTESE DO CAPÍTULO | 52 |
| 3. RESPOSTA DINÂMICA DE SISTEMAS LINEARES | 53 |
| 3.1 SISTEMAS DE 1 GRAU DE LIBERDADE: 1GL | 54 |
| 3.1.1 <i>Resposta no Tempo</i> | 54 |
| 3.1.2 <i>Resposta em Frequência</i> | 55 |
| 3.2 SISTEMAS DE N GRAUS DE LIBERDADE: NGL | 57 |
| 3.2.1 <i>Resposta no Tempo</i> | 58 |
| 3.2.2 <i>Resposta em Frequência</i> | 58 |
| 3.3 RESPOSTA A SOLICITAÇÕES ALEATÓRIAS | 60 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 3.4 | EFEITO DO AMORTECIMENTO ESTRUTURAL NA RESPOSTA DINÂMICA | 62 |
| 3.5 | SÍNTESE DO CAPÍTULO | 62 |
| 4. | ANÁLISE EXPERIMENTAL: INSTRUMENTAÇÃO E ANÁLISE DIGITAL DE SINAIS | 63 |
| 4.1 | ANÁLISE DIGITAL DE SINAIS | 63 |
| 4.1.1 | <i>Frequência de Nyquist</i> | 63 |
| 4.1.2 | <i>Resolução da Frequência - Amostragem</i> | 63 |
| 4.1.3 | <i>Aliasing</i> | 64 |
| 4.1.4 | <i>Armazenamento em Memória e Médias</i> | 65 |
| 4.1.5 | <i>Janelamento (Windowing)</i> | 65 |
| 4.1.6 | <i>Filtros</i> | 66 |
| 4.2 | INSTRUMENTAÇÃO: ACELEROMETRIA E EXTENSOMETRIA | 67 |
| 4.2.1 | <i>Acelerometria: Acelerômetro Piezelétrico</i> | 67 |
| 4.2.2 | <i>Extensometria</i> | 69 |
| 4.3 | SÍNTESE DO CAPÍTULO | 73 |
| 5. | MODOS DE FALHA | 74 |
| 5.1 | RESISTÊNCIA À FADIGA ESTRUTURAL | 75 |
| 5.1.1 | <i>Introdução</i> | 75 |
| 5.1.2 | <i>Histórico de Fadiga</i> | 76 |
| 5.1.3 | <i>Métodos de Análise e Critérios de Projeto em Fadiga</i> | 78 |
| 5.1.4 | <i>Efeito das Tensões Médias</i> | 79 |
| 5.1.5 | <i>Regime de Fadiga – Baixo Ciclos a Giga Ciclos. Curvas ϵ-N e σ-N</i> ... | 80 |
| 5.2 | CRITÉRIOS DE FALHA | 85 |
| 5.3 | ANÁLISE DE FADIGA POR SOLICITAÇÕES ALEATÓRIAS | 86 |
| 5.3.1 | <i>Critérios de Acúmulo de Dano</i> | 87 |
| 5.3.2 | <i>Domínio no Tempo</i> | 90 |
| 5.3.3 | <i>Domínio na Frequência</i> | 92 |
| 5.4 | SÍNTESE DO CAPÍTULO | 114 |
| 6 | DESCRIÇÃO DO PROBLEMA E ABORDAGEM | 115 |
| 6.1 | FLUXOGRAMA DE ANÁLISE | 116 |
| 6.2 | SISTEMA SIMPLIFICADO SUGERIDO | 117 |
| 6.2.1 | <i>Modelo</i> | 117 |
| 6.2.2 | <i>Excitação – PSD</i> | 120 |
| 6.2.3 | <i>Material</i> | 120 |
| 6.3 | SÍNTESE DO CAPÍTULO | 122 |
| 7 | ANÁLISE NUMÉRICA E RESULTADOS EXPERIMENTAIS | 123 |
| 7.1 | ANÁLISE MODAL | 124 |
| 7.2 | ANÁLISE HARMÔNICA | 125 |
| 7.3 | ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL - IMPACTAÇÃO POR MARTELO | 126 |
| 7.4 | ANÁLISE HARMÔNICA - “VARREDURA” DE 1-600HZ | 126 |
| 7.4.1 | <i>Determinação experimental do Amortecimento</i> | 128 |
| 7.5 | ANÁLISE ESPECTRAL EXPERIMENTAL - PSD | 131 |
| 7.5.1 | <i>Aceleração no tempo</i> | 131 |
| 7.5.2 | <i>Tensão no tempo</i> | 132 |
| 7.5.3 | <i>Contagem de Ciclos Rainflow</i> | 139 |
| 7.5.4 | <i>Tensão na Frequência (PSD)</i> | 141 |
| 7.6 | ANÁLISE ESPECTRAL NUMÉRICA - PSD | 148 |
| 7.6.1 | <i>Simulação de Monte Carlo a partir de uma simulação PSD</i> | 159 |
| 7.6.2 | <i>Análise Espectral Experimental comparada à numérica – PSD</i> | 163 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 7.7 | ANÁLISE COM SEGUNDO MODELO | 167 |
| 7.8 | DESCRIÇÃO DO ENSAIO EXPERIMENTAL | 170 |
| 7.9 | ANÁLISE E COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS NUMÉRICOS E EXPERIMENTAIS DE VIDA DE FADIGA | 174 |
| 7.9.1 | <i>Estimativa de Vida no domínio do tempo – Rainflow.</i> | 174 |
| 7.9.2 | <i>Estimativa de Vida no domínio da Frequência - PSD</i> | 179 |
| 7.9.3 | <i>Resultados Experimentais – Vida sob excitação PSD</i> | 185 |
| 7.10 | DISCUSSÃO DOS RESULTADOS | 192 |
| 7.10.1 | <i>Aspectos estatísticos da Fadiga</i> | 192 |
| 7.10.2 | <i>Resposta em frequência de Sistemas não lineares.</i> | 193 |
| 7.10.3 | <i>Erros intrínsecos ao processo aleatório espectral</i> | 195 |
| 7.10.4 | <i>Análise harmônica Linear versus Não-linear</i> | 197 |
| 7.11 | SÍNTESE DO CAPÍTULO | 198 |
| 8 | ESTUDO DE CASO: APLICAÇÃO EM COMPONENTE DO COMPRESSOR | 199 |
| 9 | CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS | 203 |
| | APÊNDICES | 212 |
| | APÊNDICE I – EXEMPLO DE CÁLCULO DE VIDA COM σ -N | 212 |
| | APÊNDICE II – ANÁLISE DIGITAL DE SINAIS | 214 |
| | APÊNDICE III – FLUXOGRAMA PARA ESTIMATIVA DE VIDA UTILIZANDO-SE A ABORDAGEM DE TENSÃO-VIDA PARA E CONTAGEM DE CICLOS. | 217 |
| | APÊNDICE IV – PSD SEGUNDO NORMAS | 218 |
| | APÊNDICE V – PROBLEMAS ENCONTRADOS | 220 |
| | APÊNDICE VI - VERIFICAÇÃO DO PROGRAMA MATLAB® PARA CÁLCULO DE MOMENTOS DA PSD. | 227 |
| | APÊNDICE VII - DESENHO DOS COMPONENTES | 234 |
| | APÊNDICE VIII - ANÁLISE DOS FILTROS UTILIZADOS E ESTIMATIVAS DAS PSD | 235 |
| | APÊNDICE IX – DANO POR DIRLIK | 254 |
| | APÊNDICE X - TELAS DO SOFTWARE VIRTUAL LAB | 257 |
| | APÊNDICE XI - VERIFICAÇÃO DA ESTACIONALIDADE DO SINAL DE EXCITAÇÃO | 262 |
| | APÊNDICE XII – CÓDIGO ASTM PARA MÉTODOS DE CONTAGEM DE CICLOS | 264 |
| | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 270 |

Índice de Tabelas

| | |
|--|-----|
| TABELA 1 – CORRELAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DETERMINÍSTICAS E NÃO-DETERMINÍSTICAS | 25 |
| TABELA 2 – CRONOLOGIA DOS ASPECTOS E CONCEITOS RELACIONADOS À FADIGA. | 76 |
| TABELA 3 – CONTAGEM DE CICLOS <i>RAINFLOW</i> PARA A AMOSTRA NO TEMPO..... | 107 |
| TABELA 4 – DESCRIÇÃO DOS COMPONENTES DO SISTEMA | 117 |
| TABELA 5 – VALORES DA PSD SEGUNDO NORMA ASTM..... | 120 |
| TABELA 6 – RESULTADOS MODAIS PARA O SISTEMA COMPLETO E O SIMPLIFICADO. | 124 |
| TABELA 7 – PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS PARA UMA AMOSTRA DE DADOS DE TENSÃO PARA DUAS TAXAS DISTINTAS DE AQUISIÇÃO DO SINAL. | 133 |
| TABELA 8 – LEVANTAMENTO DAS PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS DAS PSD DOS SINAIS DE TENSÃO. SINAL PURO, SEM FILTRO E SINAL FILTRADO COM BUTTERWORTH – TEMPO 2MIN..... | 147 |
| TABELA 9 – ESPECIFICAÇÕES DOS EQUIPAMENTOS E SOFTWARES DE AQUISIÇÃO DE SINAL | 171 |
| TABELA 10 – CÁLCULO DE DANO POR PALMGREN-MINER PARA CONTAGEM DE CICLOS <i>RAINFLOW</i> | 178 |
| TABELA 11 – CÁLCULO DE VIDA POR <i>RAINFLOW</i> PARA UM $K_T = 1,4$ E CRITÉRIO DE ACÚMULO DE DANO POR PALMGREN-MINER IGUAL A 1. | 178 |
| TABELA 12 – CÁLCULO DAS PROPRIEDADES DA PSD – MOMENTOS ESPECTRAIS – PARA DIFERENTES CASOS VARIANDO-SE A TAXA DE AQUISIÇÃO, TEMPO DOS DADOS, FILTRO, JANELAMENTO E MÉTODO DE CÁLCULO DA PSD – MOMENTO OBTIDO NO SG. | 180 |
| TABELA 13 – CÁLCULO DAS PROPRIEDADES DA PSD – MOMENTOS ESPECTRAIS – PARA DIFERENTES CASOS VARIANDO-SE A TAXA DE AQUISIÇÃO, TEMPO DOS DADOS, FILTRO, JANELAMENTO E MÉTODO DE CÁLCULO DA PSD – MOMENTO OBTIDO NO SG MULTIPLICADO POR $(K_T)^2=1,9$ | 181 |
| TABELA 14 – ESTIMATIVA DE VIDA POR DIFERENTES CRITÉRIOS PARA OS CASOS UTILIZANDO-SE VALORES DE MOMENTOS A PARTIR DA TABELA 13. DANO = 1,0..... | 182 |
| TABELA 15 – CÁLCULO DAS PROPRIEDADES DA PSD – MOMENTOS ESPECTRAIS – PARA A VIGA V2 – CALCULADA NUMERICAMENTE. | 184 |
| TABELA 16 – ESTIMATIVA DE VIDA POR DIFERENTES CRITÉRIOS PARA O CASO DA TABELA 15. DANO = 1,0..... | 185 |
| TABELA 17 – VARIABILIDADE DE DIVERSOS FATORES APLICÁVEIS À FADIGA E ANÁLISE ESTRUTURAL | 193 |
| TABELA 18 – CONCLUSÃO DOS MODELOS DE ESTIMATIVA DE VIDA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA..... | 209 |
| TABELA 19 – DADOS PARA A PSD DE DIVERSOS MEIOS DE TRANSPORTE – FONTE NORMA ASTM PRACTICE D4169 ASSURANCE LEVEL II..... | 218 |

Abreviações

| | |
|-----------------------|---|
| PSD | = <i>Power Spectrum Density</i> , ou Densidade Espectral de Potência |
| PDF | = <i>Probabilistic Density Function</i> , ou Função de Densidade de Probabilidade |
| CDF | = Cumulative Probability Density Function ou Função Densidade de Probabilidade Acumulada. |
| RMS | = Root Mean Square |
| H(f) | = Função Transferência entre a resposta de saída e a solicitação de entrada |
| SG | = Strain Gage |
| BE | = Banda Estreita |
| NB | = <i>Narrow Band</i> , ou Banda Estreita |
| BL | = Banda Larga |
| FPB | = Filtro Passa Baixa |
| FRF | = Função Resposta em Frequência |
| FEA | = Finite Element Analysis |
| FEM | = Finite Element Method |
| MEF | = Método dos Elementos Finitos |
| MEV | = Microscopia Eletrônica de Varredura |
| Kt | = Fator de concentração de tensão |
| $\sigma_{eng.}$ | = tensão no engaste |
| $\sigma_{SG.}$ | = tensão no <i>strain gage</i> |
| $\bar{\sigma}_{lin.}$ | = tensão linearizada |
| $\sigma_{eqv.}$ | = tensão equivalente de Von mises |
| σ_x | = tensão normal na direção <i>x</i> . |

Lista de Símbolos

| | |
|------------------|---|
| a | = tamanho inicial de trinca |
| a_0 | = parâmetro da transformada de Fourier |
| a_n | = parâmetro da transformada de Fourier |
| b_n | = parâmetro da transformada de Fourier |
| C | = constante de crescimento de trinca para o material |
| E | = evento |
| $E[.]$ | = valor esperado |
| $E[0]$ | = expectativa de zeros |
| $E[0^+]$ | = expectativas de zero cruzamentos positivos |
| $E[p]$ | = expectativa de picos |
| $E[D_{NB}]$ | = valor esperado para o dano calculado pelo critério de banda estreita |
| $E[D_{RFC}]$ | = valor esperado para o dano calculado por <i>Rainflow</i> |
| $E[D_{RC}]$ | = valor esperado para o dano calculado por <i>Range Counting</i> |
| F_c | = frequência central |
| f | = frequência natural amortecida |
| f_n | = frequência natural não-amortecida |
| $f(x)$ | = função densidade de probabilidade da variável aleatória x |
| $F(x)$ | = função de Probabilidade Acumulada |
| $G_x(\omega)$ | = PSD “one-sided” definida em $0 < f < \infty$, rad/s |
| $G_x(f), G(f)$ | = PSD “one-sided” definida em $0 < f < \infty$, s ⁻¹ ou Hertz |
| $G_m(f)$ | = PSD média obtida através das medias das $G_x(f)$, s ⁻¹ ou Hertz |
| $H(f)$ | = função resposta em frequência, ou função de transferência |
| K | = coeficiente da curva de fadiga do material. Equação de Basquin |
| ΔK | = fator de intensidade de tensão para o crescimento de trinca |
| m | = expoente da curva de fadiga do material. Equação de Basquin |
| m_n | = momento n-ésimo da PSD |
| n, N | = número de observações |
| $n(\sigma)$ | = número de ciclos atuantes |
| $N(\sigma)$ | = número de ciclos resistentes |
| $p(x)$ | = probabilidade de ocorrência da variável aleatória |
| $\text{Prob}[.]$ | = probabilidade do valor esperado |
| q_x | = parâmetro de Vanmarcke da PSD |
| R_x | = função autocorrelação cruzada da variável aleatória x . Simplificadamente de R_{xx} |
| S | = espaço amostral |
| $S_x(f)$ | = função densidade de probabilidade em frequência. Uma PSD “two-sided”, |

| | |
|-----------------|--|
| | s^{-1} ou Hertz |
| $S_x(\omega)$ | = função densidade de probabilidade em frequência. Uma PSD “two-sided”, rad/s |
| t | = variável tempo |
| T | = tempo de observação do processo aleatório, período |
| V | = unidade da PSD correspondente à grandeza medida |
| $Var[.]$ | = variância de [.] |
| x | = variável aleatória |
| $x(t), y(t)$ | = valor da variável aleatória no tempo |
| $X(f)$ | = transformada direta de Fourier |
| $X_t(f)$ | = transformada finita de Fourier |
| $[X]$ | = variável aleatória |
| $[x]$ | = valor da variável aleatória |
| Z | = variável padronizada para a distribuição de probabilidade normal |
| α | = parâmetro de escala da distribuição de probabilidade de Weibull |
| α_x | = fator de irregularidade da PSD |
| β | = parâmetro de escala para a distribuição de probabilidade de Birnbaum-Saunders |
| β_x | = parâmetro relacionado à Vanmarcke da PSD |
| $\delta()$ | = função Delta |
| Δx | = incremento no tempo da variável aleatória |
| Δf | = incremento na frequência |
| ε | = deformação |
| γ | = parâmetro de forma da distribuição de probabilidade de Weibull |
| $\mu(x), \mu_x$ | = média da variável aleatória |
| μ | = valor médio |
| ν | = coeficiente de Poisson |
| θ | = ângulo de fase da onda de vibração |
| ρ | = densidade mássica do material [Kg/mm^3] |
| σ | = desvio padrão |
| σ^2 | = variância |
| σ_a | = tensão alternada |
| σ_m | = tensão média |
| σ_u | = tensão de ruptura |
| σ_y | = tensão de escoamento |
| $\sigma_{y'}$ | = tensão de escoamento cíclico. |
| σ_f | = limite de fadiga uniaxial reversa |

| | |
|-------------|---|
| σ_f | = limite de fratura verdadeira |
| σ -N | = denominação para curva de fadiga tensão – σ , e vida – N |
| τ | = avanço no tempo |
| ω | = frequência , em rad/s |
| ψ_x^2 | = valor quadrático médio |
| ζ | = coeficiente de amortecimento |
| ξ | = parâmetro de localização para análise modal de sistemas contínuos |
| Γ | = função Gamma |
| Φ | = distribuição de probabilidade acumulada da distribuição normal padronizada. |
| ϕ | = modo de vibração generalizado |

Resumo

Na análise estrutural de componentes mecânicos sujeitos a cargas alternadas cíclicas, em trabalho ou serviço, um modo de falha predominante é a fadiga, decorrente do acúmulo do dano causado pelos ciclos alternantes. Um dos critérios de estimativa de vida de fadiga baseia-se na curva de fadiga do material – σ -N, que relaciona a tensão cíclica com o número de ciclos até a falha. Quando a solitação alternante é constante e invariável, o cálculo de dano baseia-se no somatório do número de ciclos atuantes a uma determinada tensão, e o seu respectivo tempo ou número de ciclos de vida restantes. Ocorre que em diversas situações o componente está sujeito a solicitações aleatórias e variáveis no tempo, como o que está sujeita a estrutura veicular em um transporte rodoviário, carregamento de turbulência em uma asa de avião, solicitações sob ação de vento e terremoto em pontes e estruturas metálicas, etc. Para a estimativa do dano em fadiga nessas ocasiões de solitação aleatória, o simples cálculo de número de ciclos em determinado nível de tensão não é mais um procedimento simples e determinístico, mas sim probabilístico e estatístico, e depende do histórico de carregamento presente na estrutura. Esta estimativa pode ser realizada no domínio do tempo, baseada na contagem de ciclos em cada nível de tensão determinado a partir da análise de um sinal gravado no tempo (*Rainflow*, *Racetrack*, *Range-Pair*, etc. citando alguns métodos), ou então no domínio da frequência, onde um tratamento estatístico baseado na resposta dinâmica da estrutura àquela solitação atuante é considerado para o cálculo de fadiga. Esta análise de fadiga no domínio da frequência se baseia na resposta dinâmica em frequência da estrutura, a partir da Função Resposta em Frequência, PSD (*Power Spectrum Density*) e de parâmetros espectrais (momentos da PSD e PDF – *Probabilistic Density Function*). O presente trabalho estuda o cálculo em fadiga de uma estrutura do tipo viga-massa sob solitação de um processo estocástico, ergódico e Gaussiano, utilizando-se métodos de contagem de ciclos (*Rainflow*) e métodos probabilísticos no domínio da frequência. Vários modelos e critérios de estimativa de vida em função dos parâmetros espectrais extraídos da PSD de tensão são aplicados e comparados com resultados experimentais de testes de vida. São realizados estudos de função de transferência e respostas dinâmicas, através da análise experimental com strain-gages e de simulações FEA. Os resultados comparam a vida estimada através dos modelos de estimativa de vida e também resultantes da análise numérica por elementos finitos, com aquela vida observada em testes de falha por fadiga em corpos de prova.

Palavras-chave: Fadiga aleatória, PSD, *Rainflow*, Domínio da frequência, Fadiga espectral.

Abstract

In the structural analysis of mechanical components subject to cyclical alternating loads, in working or service, a predominant failure mode is the so called fatigue caused by the damage accumulation of the alternating cycles. One of the criteria of life estimation in fatigue is based on the fatigue curve of the material - σ -N, relating the alternating stress with the number of cycles till failure. When the alternating stress is constant and invariable, the damage calculation can be done based on the sum of the number of cycles at that stress and its correspondent number of remaining cycles of life. However, it widely happens situations where mechanical system are subject to random and variable load, as those ones present in a road transportation, those ones subject to airplane wings in case of turbulence loads, random load by the action of wind and earthquake in bridges and metallic structures, etc. Aiming to estimate the fatigue damage in those situations of random loads, the simple calculation of the number of cycles in each stress level is not a simple linear sum and deterministic procedure. Nevertheless, non-deterministic, probabilistic and statistical analysis depending on the actual stress load and dynamic behavior of the structure. This fatigue estimation can be carried out in the time domain, based on cycle counting algorithm, where each stress level is determined by the analysis of a sample recorded in the time (Rainflow, Racetrack, Range-Pair, etc. citing some methods) or in frequency domain. In this last one, a statistical base approach is dealt in the dynamic behavioral of the structure and the fatigue calculation is performed concerning some probabilistic issues. This fatigue analysis in the frequency domain is based on the dynamic response of the structure in frequency, by the PSD (Power Spectrum Density) of the stress and its spectral parameters (moments of PSD and PDF - Probabilistic Density Function). The present work dealing with the fatigue calculation of a beam-mass type structure under random, ergodic and Gaussian, applying methods of life estimation based on cycle counting methods (Rainflow) and those ones based on probabilistic frequency domain. Various models and criteria of life estimation based on spectral parameters is evaluated and compared with experimental results of life tests. Studies are carried out throughout experimental measurements with strain gages and FEA simulations where a given PSD is applied as input conditions. The numerical results of damage models are compared with those ones experimentally determined by actual laboratory test specimens subjected to random load.

Key-word: Random Vibration Fatigue, PSD, Rainflow, Frequency Domain, Spectral Fatigue.

1. Introdução

De acordo com um estudo independente conduzido por Battelle em 1982, as falhas em componentes causados por mecanismo de fadiga representam 80 a 90% de todas as falhas estruturais registradas, estimando-se um custo anual nos EUA de U\$1,5bi. Também, segundo Battelle, este custo poderia ser reduzido em torno de 29% através da simples aplicação de tecnologia e conhecimentos atuais em fadiga (1982). [HALFPENNY, nCode®].

Desenvolvimentos recentes demonstram várias abordagens para a análise do fenômeno de fadiga. Estas podem ser desde as mais simples e com grande dispersão nos resultados, até as mais complexas e onerosas, porém mais precisas. Assim, uma importante questão no estudo de fadiga é a relação custo, benefício e procedimento a ser adotado em um projeto estrutural. Atualmente, normas e padrões têm estabelecido e exigidos procedimentos explícitos de testes e análises, além da crescente exigência de mercado para projetos confiáveis e de qualidade.

Uma análise completa de fadiga envolve a síntese do problema, a análise, testes e certificações numéricas e experimentais de parâmetros e critérios de fadiga, determinados pelas variações de solicitação e resistência do material. Análises mais complexas ainda, podem envolver análises probabilísticas e estatísticas de variação dos parâmetros do processo.

A fadiga do material, como será melhor descrita nos capítulos subsequentes, é um fenômeno que depende basicamente da variação da solicitação ao longo do tempo, e do acúmulo de dano que estas cargas provocam reduzindo a resistência do material dos componentes de um sistema mecânico. Desta forma, duas informações são mandatórias para a análise e estudo da fadiga: solicitação atuante no sistema e resistência do material do componente.

Esta última, depende basicamente do material e dos parâmetros de modificação do mesmo (aumento ou redução da resistência), que podem ser obtidos através de análises experimentais. Quanto à solicitação, porém, esta pode ser simplesmente cíclica e determinística de tensão alternada constante ou podem ser do tipo aleatória e probabilística de tensão variável. Neste último caso, a abordagem para a estimativa do dano de fadiga, ou a predição do tempo restante de vida de fadiga ou ainda, o fator de segurança para uma determinada condição de solicitação aleatória, exige estudos e análises mais complexas e profundas daquela para cargas determinísticas.

Como será visto no Item 5.3, no que se refere ao domínio de estudo da fadiga, este pode ser no domínio do tempo, onde a solicitação aleatória é uma variável que oscila aleatoriamente no tempo e as tensões cíclicas são tratadas a cada instante de tempo, ou no domínio da frequência. Esta última considera a resposta dinâmica espectral da estrutura quando submetida à uma solicitação no domínio da frequência.

A principal vantagem em se aplicar a metodologia de análise de fadiga no domínio da frequência, é a possibilidade em se reproduzir, de forma aproximada ou exata, expressões analíticas, através da qual se pode estimar a distribuição dos ciclos e o dano em fadiga sem, de fato, conhecer o exato sinal de tensão ou solicitação no tempo.

1.1 Justificativa do Estudo de Fadiga Aleatória

Um compressor hermético utilizado para refrigeração em aplicações diversas como, por exemplo, refrigeradores, freezer e balcões frigoríficos, está mostrado na Figura 1-1. Por questões técnicas diversas, o Kit mecânico, disposto de forma a ser envolto pela carcaça hermética, possui movimento relativo em relação a esta, sendo suspenso por molas de suspensão e conectado também por um tubo de descarga ligado à carcaça.

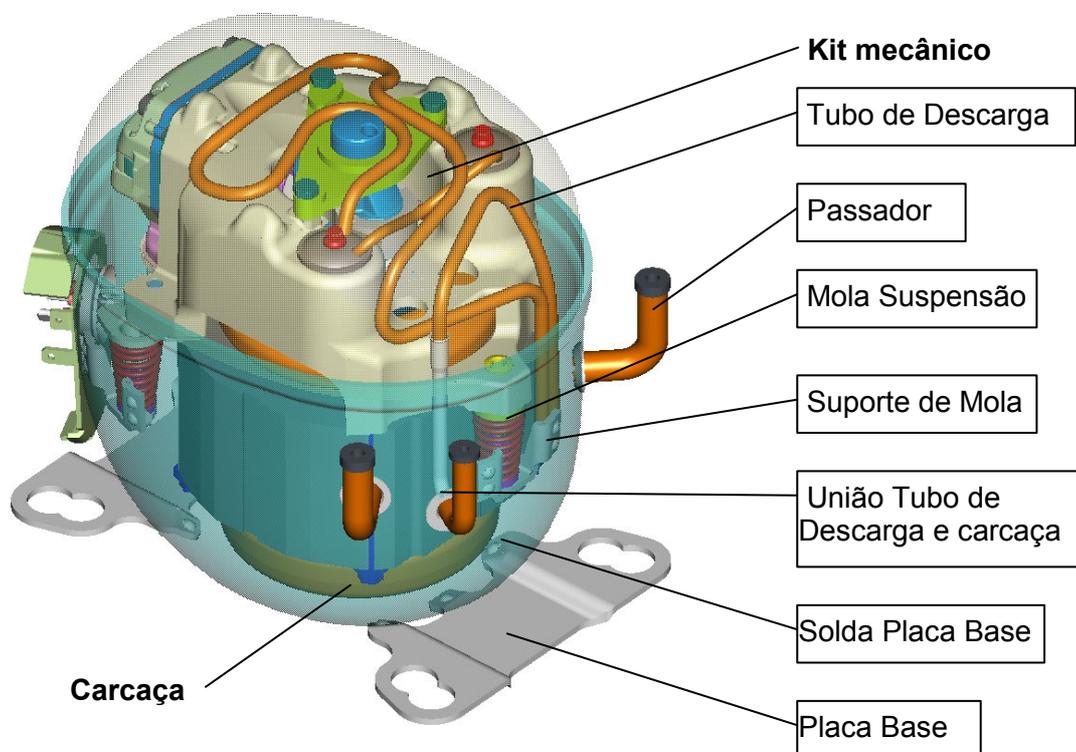


Figura 1-1 – Representação de um compressor hermético para refrigeração e os componentes internos sujeitos à fadiga por vibração de transporte (destacados por caixa).

Durante o transporte do compressor desde as linhas de montagem na fábrica até o cliente final, o compressor está sujeito a carregamentos de transporte diversos. Normalmente, a vibração de transporte chega até a placa base, fixada às demais estruturas do sistema, e então é transferida aos componentes internos do compressor.

Porém, é de conhecimento que os meios de transporte variam de acordo com a distância a percorrer, bem como as condições de transporte às quais o compressor está submetido. Seja qual for o meio de transporte utilizado (aéreo, rodoviário, ou ferroviário, por exemplo), o presente trabalho considera que a solicitação à qual está sujeito o componente em questão enquadra-se em um processo estocástico, estacionário, ergódico e que

apresenta uma distribuição probabilística da variável aleatória – tensão, normal ou Gaussiana, como será visto e detalhado no decorrer deste trabalho.

Um esquema de transporte rodoviário de compressores pode ser esquematizado pela Figura 1-2, bem como as variáveis que envolvem o processo.

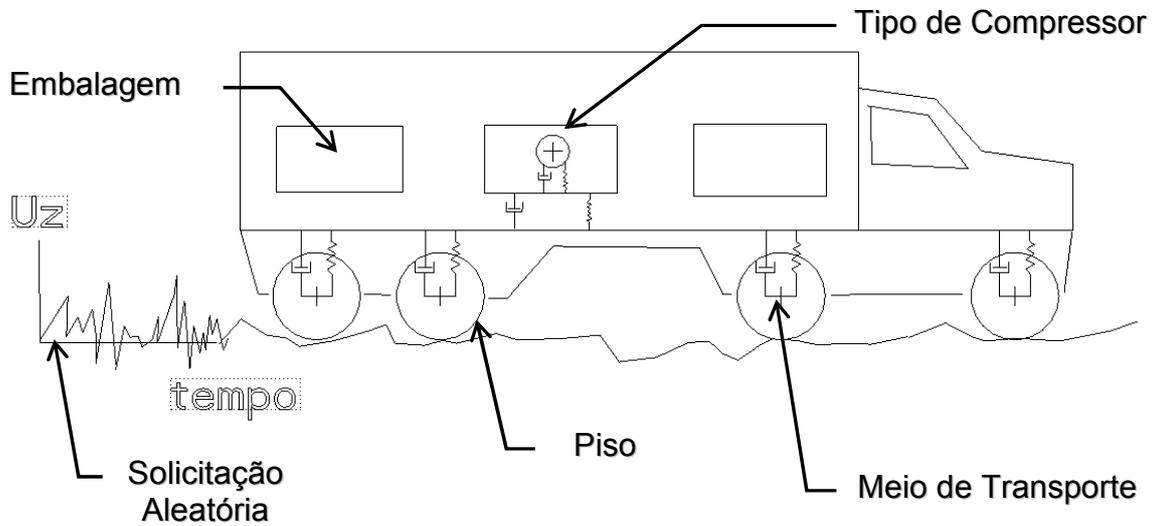


Figura 1-2 - Representação de um transporte rodoviário típico.

Uma das características do transporte de compressores, ou de produtos e sistemas, que pode ser medido é a solicitação aleatória imposta aos mesmos. Esta aquisição pode ser realizada com extensômetros, acelerômetros ou outro dispositivo de medição. Representativamente poderia ser ilustrado através da Figura 1-3, como uma vibração aleatória forçada imposta à base. É importante observar que a posição do compressor pode variar conforme o transporte do sistema.

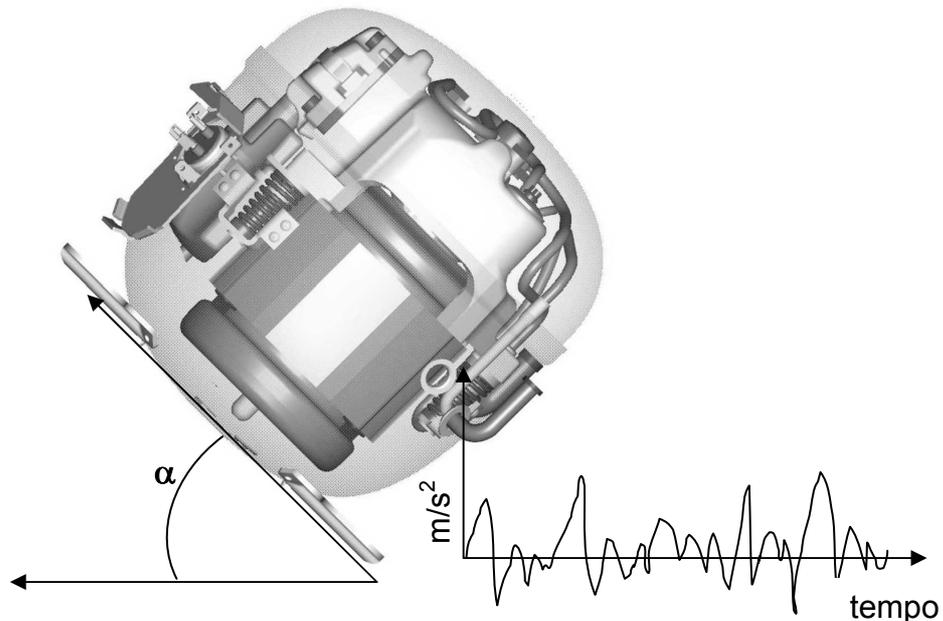


Figura 1-3 - Compressor sujeito à vibração aleatória excitada pela base.

1.2 O estudo da Fadiga no Domínio do Tempo e da Frequência

Análises de fadiga são determinadas tradicionalmente por meio dos sinais de carregamento ao longo do tempo, geralmente na forma de tensão ou deformação. Entretanto, há muitos casos onde o carregamento, ou o processo de dano por fadiga, não pode ser facilmente definido usando sinais no tempo. Nestes casos o engenheiro projetista geralmente deve recorrer a testes baseados em aproximações de modo a avaliar a vida de fadiga de uma estrutura ou componente. Alternativamente, um cálculo de fadiga baseado em frequência pode ser utilizado, sendo o carregamento e a resposta representados por funções de densidade espectral de potência, ou *Power Spectrum Density* (PSD).

Métodos de análise por fadiga no domínio do tempo consistem basicamente na sequência de passos conforme ilustrado na Figura 1-4. Primeiramente, se faz a contagem do número de ciclos do histórico do carregamento. Uma das formas usuais de contagem dos ciclos é através do processo chamado de Contagem de Ciclos por *Rainflow* [Norma ASTM, 1049-85]. O dano causado por cada ciclo é, então, determinado através de um diagrama σ - N , sendo somados de modo a obter o dano acumulado ao longo da vida. Este processo utiliza geralmente a regra linear de acúmulo do dano de Palmgren-Miner. Este procedimento de análise de fadiga pode ser interpretado como uma abordagem no domínio do tempo.

Um método alternativo para análise de fadiga consiste no levantamento de uma curva de resposta espectral dada uma excitação. Esta abordagem considera um levantamento probabilístico do carregamento, bem como da resposta de um sistema dinâmico no domínio da frequência.

Uma comparação macro das duas abordagens pode ser vista na Figura 1-4.

1.2.1 Vantagens e Desvantagens das Abordagens: Domínio no Tempo e Domínio no Frequência

Quando comparados entre si, os dois métodos de abordagem de predição de fadiga apresentam as seguintes vantagens e desvantagens. As proposições abaixo, de autoria do próprio autor deste, são resultados dos trabalhos e análises de fadiga em ambos os domínios.

- **Domínio no Tempo**

Vantagens:

- Os níveis de tensão máxima e mínima não são estimados indiretamente, mas sim, a partir da observação direta do fenômeno;
- O número de ciclos a uma determinada tensão não é determinada através da probabilidade, mas sim por meio da observação e contagem de ciclos;
- Mais preciso que o método probabilístico.

Desvantagens:

- A obtenção da tensão em locais críticos pode ser inviável tendo em vista as dificuldades de instrumentação ou devido a grandes deformações localizadas;
- É necessária a medição em peças físicas reais não sendo possível através de protótipos virtuais;
- Computacionalmente mais caro;
- Ruídos de alta frequência podem estar presentes no sinal;
- Exige uma maior quantidade de informações a serem tratadas e armazenadas durante o teste;
- Não pode ser extrapolado ou interpolado para outros níveis de carregamento;
- O sinal se aplica somente ao ponto para o qual foi medido o sinal de tensão, não podendo ser transferido diretamente para outros pontos de interesse na estrutura.

- **Domínio na Frequência**

Vantagens:

- A resposta de um sistema mecânico pode ser completamente analisada ao longo da frequência;
- Menor quantidade de dados a serem arquivados e manipulados;
- Melhor entendimento do comportamento dinâmico da estrutura;
- Capacidade de analisar o comportamento completo ao longo da faixa de frequência ao invés de análises simplificadas e/ou superestimadas;
- Maior eficiência computacional para uma análise de fadiga.

Desvantagens:

- A estimativa da resposta em frequência, PSD, é sensível à aplicação de filtros e janelamentos;
- A determinação da resposta espectral, PSD, depende da metodologia de estimativa da mesma;
- Alguns métodos de estimativa de vida são particularizados para casos específicos de regime de solicitação.

Como ilustração da aquisição de um sinal aleatório típico como o que ocorre em transporte, está representado pela Figura 1-4. Nota-se a quantidade de informação que deve ser armazenada e manipulada no caso de uma abordagem no domínio do tempo. Por outro lado, nota-se que da análise do gráfico no domínio da frequência, extrai-se o comportamento dinâmico em frequências de ressonância e não apenas sinais aleatórios. Alguns exemplos de tipos diversos de carregamento no domínio do tempo podem ser observados na Figura 1-5.

Há muitas situações onde as estruturas estão sujeitas a uma forma aleatória do carregamento, tal como a vibração de uma asa, vibrações do motor, vibração imposta ao veículo ou sua carga durante um transporte rodoviário, e assim por diante. Todas estas situações podem ser analisadas usando as técnicas de estimativa de vida de fadiga incorporadas no ambiente de Análise pelo Método dos Elementos Finitos (FEA).

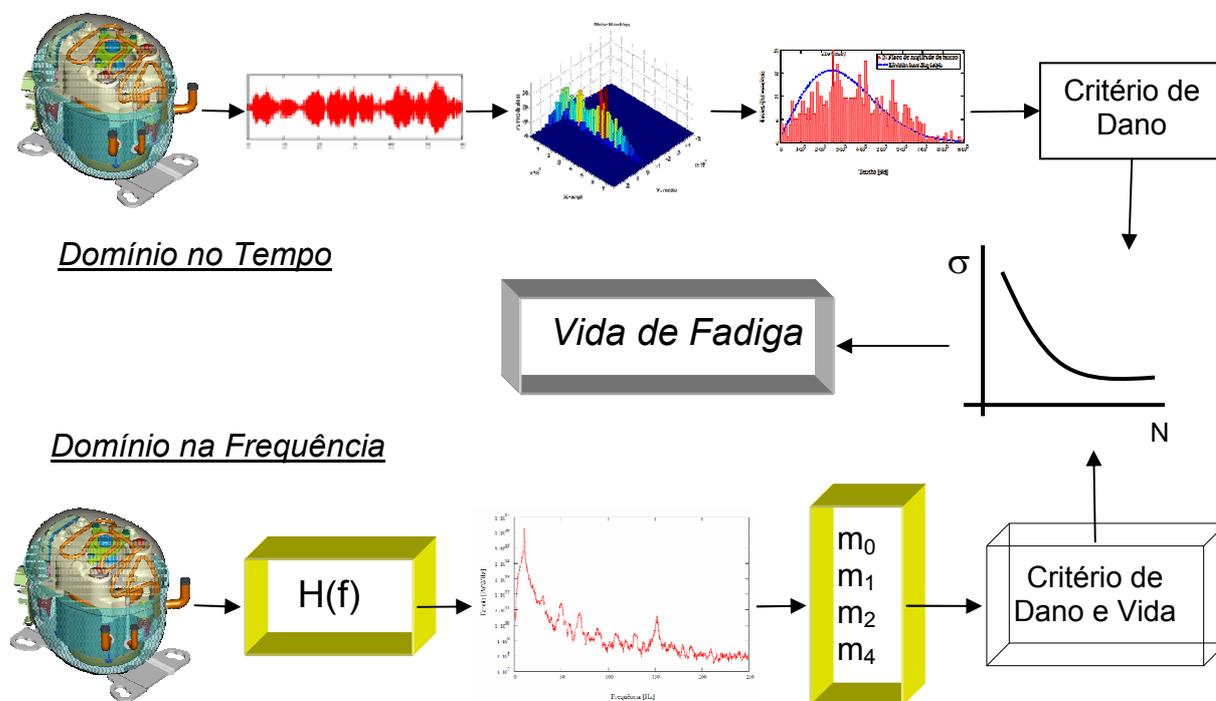


Figura 1-4: Comparação quanto ao fluxo de análise de fadiga no domínio do tempo e da frequência.

O estudo de vibrações aleatórias, ou randômicas, tem-se desenvolvido nos últimos anos de forma a proporcionar um estudo detalhado dos danos que causam a estruturas, tanto nas Engenharias Civil quanto na Mecânica. Porém, mais recentemente, a corroboração de técnicas e métodos numéricos para as análises de estruturas sujeitas a estes carregamentos, tem colaborado para uma maior velocidade e precisão nas previsões de fadiga.

1.3 Motivação

O fenômeno de fadiga em componentes mecânicos tem sido estudado há séculos nas várias áreas industriais, tais como aeronáutica, automobilística, e indústrias de máquinas e ferramentas, em geral. É de conhecimento que a fadiga é um fenômeno dinâmico causado pelo acúmulo de dano devido aos diversos ciclos de tensão cuja estrutura está submetida ao longo da vida útil. Este carregamento dinâmico, embora muito inferior

àquele que causaria uma falha estrutural estática, causa micro trincas na estrutura cristalina do material, estas então se desenvolvem até a ruptura total e falha da estrutura.

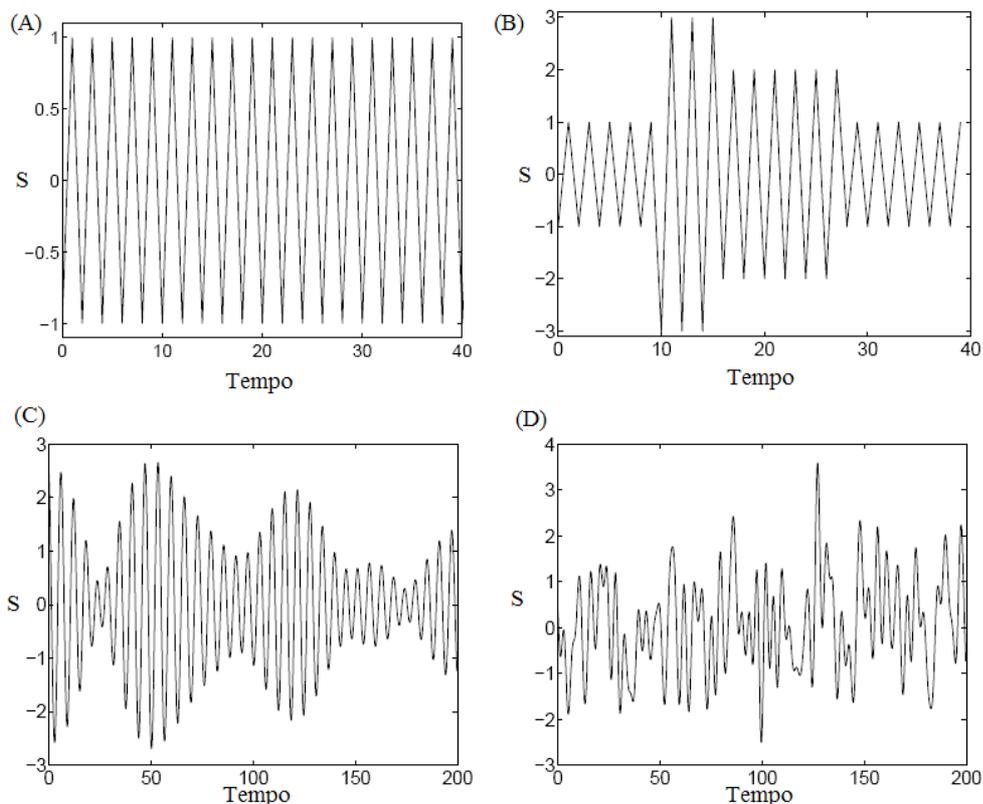


Figura 1-5 – Exemplos de tipos diversos de carregamentos no domínio do tempo: (A) Amplitude Constante, (B) Carregamento em Blocos de Amplitudes constantes, (C) Aleatório do Tipo Banda Estreita e (D) Aleatório do tipo Banda Larga. Fonte [JOHANNESSON, 1999].

Devido a diferenças micro estruturais presentes em materiais teoricamente idênticos, variações do processo de fabricação, variações do carregamento a qual a estrutura está sujeita e diversas outras “incertezas”, o estudo da fadiga não pode ser considerada como uma ciência exata, mas deve ser tratada estatisticamente e como uma ciência probabilística.

Até poucos anos atrás, os componentes mecânicos eram simplesmente projetados de maneira que suportassem uma sobrecarga estática de esforço, ou no mais preciso, resistissem a testes de fadiga de carregamentos simplesmente alternados. Em uma eventual falha deste componente em campo, material adicional era então adicionado de modo a reforçar a estrutura e permitir então um coeficiente de segurança muitas vezes próximo de 3 vezes para a vida infinita. Custos adicionais em matéria-prima e peso excessivo eram um problema econômico menos agravante.

Mesmo recentemente, com algumas indústrias estudando profundamente o fenômeno de fadiga, focando suas análises em engenharia aplicada e em normas internas, ainda são necessários inúmeros testes e ensaios no processo de aprovação do produto. Testes estes, que ainda necessitam de um protótipo real, horas de análise em laboratórios e recursos técnicos avançados e limitantes no tempo.

Sendo baseado em testes normalizados e padronizados, estes geralmente são realizados para casos extremos ou “pior caso”, para a “condição mais crítica”, e da maneira mais segura e “simples” resultando em uma grande margem de segurança. Em alguns casos inclusive, os testes e condições de aprovação são baseados em exigências de clientes, mesmo sem o completo entendimento e sem mesmo considerar a própria aplicação do sistema em questão. Além também, de uma série de outros fatores que nem mesmo se aplicariam ao produto.

Mas esta abordagem de “durabilidade” (lê-se super dimensionamento), caminha no sentido contrário às novas condições que o mercado vem exigindo das indústrias. Principalmente no que diz respeito a baixos custos, redução de massa, tempos de desenvolvimento menores, novos materiais e o pior, menos recurso pessoal e financeiro para dedicação ao desenvolvimento do produto. O projeto não pode ser mais super dimensionado, mas sim super otimizado.

1.4 Contribuições

O presente trabalho estuda as principais variáveis encontradas em uma análise e projeto de fadiga por solicitações aleatórias. Englobará a aplicação de instrumentação e aquisição de sinais, como extensometria e acelerometria para a aquisição do sinal de tensão e de aceleração atuantes em uma estrutura sob solicitação aleatória. Também estudará recursos de análise digital de sinais, como filtros, janelamentos, métodos de estimativa do espectro de tensão, entre outros. Estas variáveis são estudadas, comparadas quanto à estimativa de vida, e os resultados são analisados através de estimativas de parâmetros espectrais.

Quanto aos modelos de estimativa de vida de fadiga, seja no domínio do tempo ou da frequência, vários autores e modelos serão estudados, aplicando-se os parâmetros espectrais ou probabilidades da distribuição de tensão na estrutura, para a estimativa de vida dada uma solicitação aleatória. Estes modelos de estimativa são comparados com aqueles resultados de vida de fadiga obtidos experimentalmente. Desta forma, obter-se-á uma análise profunda das aplicações, tendências e limitações de cada modelo aplicado.

Ao término deste trabalho, será elaborado um procedimento completo de análise de componentes sujeito à fadiga por vibrações aleatórias decorrentes do transporte, convenientemente, denominado “*script*” de análise e projeto.

Como um resultado secundário inerente, convém salientar que do estudo no qual este trabalho se baseia, serão estabelecidos critérios racionais de projeto, bem como domínio dos esforços e danos causados aos componentes do compressor ao longo da inevitável solicitação de transporte. Desta forma, do desenvolvimento de novos produtos derivarão componentes otimizados quanto a materiais, custos e de

confiabilidade/durabilidade conhecida. Além também, ao se conhecer tecnicamente o dano causado pelo transporte, implica diretamente na redução ou eliminação de prejuízos causados por falhas do produto em clientes.

1.5 Síntese do Capítulo

O estudo e análise de fadiga em um componente sob solicitação aleatória pode ser feito sob duas abordagens distintas: no domínio do tempo e no domínio da frequência. Cada modelo e abordagem possui vantagens, desvantagens e limitações, sendo que sua aplicação e escolha por um dos métodos, deve se basear na experiência e aplicabilidade de cada um.

O presente trabalho foca o estudo de fadiga no domínio da frequência, e deste modo, nos capítulos subsequentes, será abordado e detalhado os parâmetros e propriedades da solicitação aleatória, necessários para a análise posterior de dano de fadiga que esta causa em uma estrutura. Deste modo, é fundamental o entendimento da variável aleatória (solicitação) e do seu tratamento probabilístico que permitem, desta forma, estabelecer critérios e modelos de análise de fadiga.

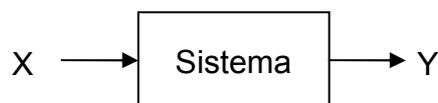
2. Variáveis Aleatórias e Processo Estocástico

2.1 Variáveis Aleatórias

Qualquer dado experimental representando um fenômeno físico pode, de modo geral, ser definido como determinístico ou não-determinístico. Dados determinísticos são aqueles que podem ser descritos através de uma relação matemática explícita, como por exemplo, a resposta de um sistema massa-mola de constantes conhecidas. O movimento pode ser descrito explicitamente através de uma equação que define a posição exata da massa para um determinado instante no tempo. Outros exemplos podem ser citados como a posição de um satélite em órbita, a temperatura da água quando aplicado uma taxa de calor, etc.

Por outro lado, há sistemas mecânicos e físicos os quais não podem ser definidos como determinísticos, como por exemplo, a pressão acústica em um tubo excitado por escoamento turbulento, o exato movimento e altura de ondas marítimas, etc. Estes fenômenos não podem ser determinados de forma explícita matematicamente e não há como prever exatamente o seu valor em um determinado instante de tempo. Estas variáveis possuem características aleatórias e podem ser descritas melhor em termos *probabilísticos* e médias estatísticas [BENDAT e PIERSOL, 1971].

No entanto, na prática, qualquer experimento ou sistema físico pode conter uma não-linearidade de modo que as equações explícitas apresentam um desvio quanto à exata predição, ou então, o experimento pode conter uma variável não considerada no equacionamento. Desta forma, define-se como determinístico aquele experimento que pode ser reproduzido de forma repetitiva atingindo-se o mesmo resultado. Do contrário, o sistema é considerado aleatório por natureza. Esta colocação pode ser ilustrada como:



Para a determinação da resposta de saída Y deve-se analisar o comportamento da solicitação de entrada X e do sistema S conforme a Tabela 1:

Tabela 1 – Correlação das características determinísticas e não-determinísticas

| Solicitação X | Sistema S | Resposta Y |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| Determinístico | Determinístico | Determinístico |
| Determinístico | Não-Determinístico | Não-Determinístico |
| Não-Determinístico | Determinístico | Não-Determinístico |
| Não-Determinístico | Não-Determinístico | Não-Determinístico |

Assim, das quatro combinações possíveis, somente uma delas permite obter uma resposta determinística. As outras são dependentes da variabilidade da solicitação de entrada ou do sistema e a resposta não pode ser avaliada de forma determinística.

Pode-se ilustrar, por exemplo, um conjunto de observações obtidos em laboratório a partir de um experimento, com medições realizadas em tempos diversos como representado na Figura 2-1, [BENDAT e PIERSOL, 1980]. O conjunto dos valores da variável aleatória $x_i(t)$, $i=1,2,3...$ é denominado conjunto que define desta forma o processo aleatório $\{x(t)\}$, que descreve o fenômeno.

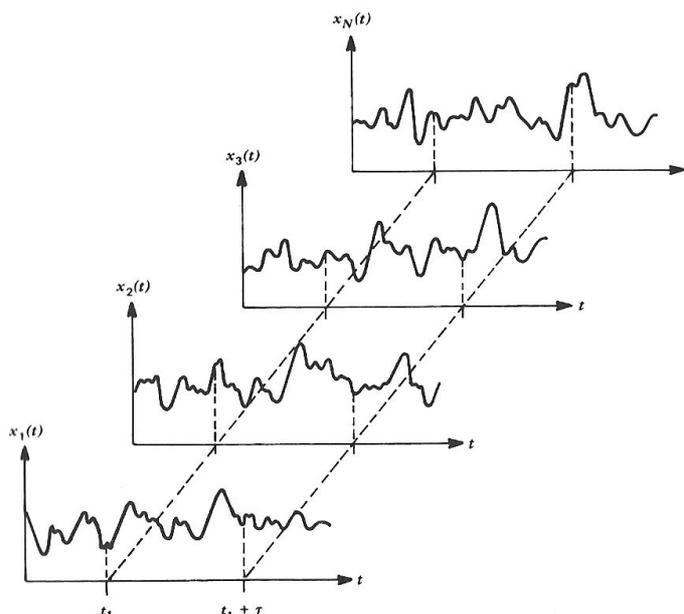


Figura 2-1 – Conjunto de dados experimentais para a variável aleatória $x(t)$ definindo um processo aleatório.

2.1.1 Classificação dos Processos Aleatórios

Somente os fenômenos determinísticos podem ser representados analiticamente por uma função ou sistema de equações, enquanto que processos não determinísticos são representados de forma probabilística. Os processos determinísticos e não-determinísticos configuram-se em categorias conforme a Figura 2-2 [BENDAT e PIERSOL, 1971].

Dados representando um fenômeno físico aleatório não podem ser descritos de forma determinística através de uma relação matemática, isto é, a cada instante de tempo t , a variável aleatória assume um valor não determinado explicitamente. Desta forma, tomando-se n medições de mesmo intervalo de tempo dt , cada aquisição não apresentará exatamente quanto àquela antecessora, [BENDAT e PIERSOL, 1971].

Uma simples aquisição de dados representando um fenômeno aleatório é chamada de *conjunto de observações* (quando observado em um intervalo finito de tempo). O conjunto de várias aquisições define o fenômeno de variável estocástica ou aleatória. Um processo aleatório pode ainda ser caracterizado em estacionário ou não estacionário.

Estacionário pode ainda ser caracterizado em ergódico ou não ergódico. Não estacionário caracteriza-se por tipos específicos, conforme o caso.

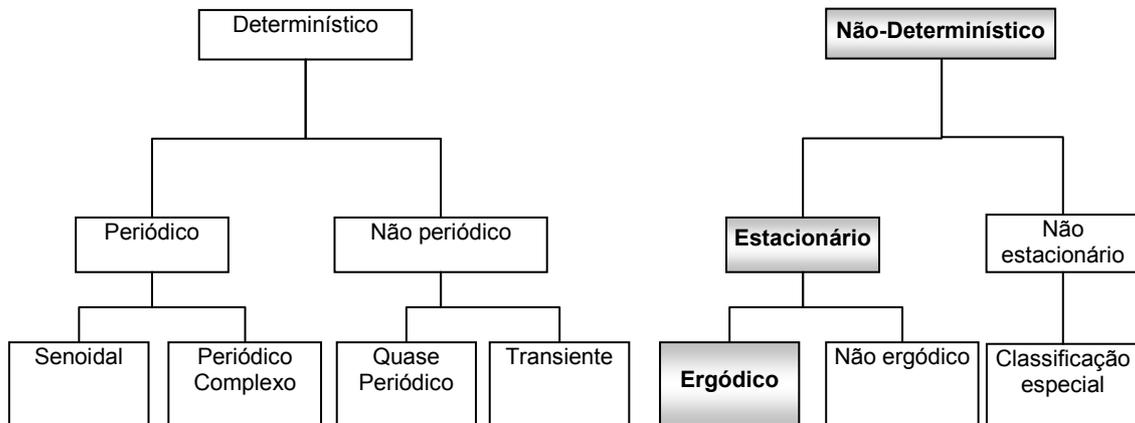


Figura 2-2: Classificação de variáveis determinísticas e aleatórias, [BENDAT e PIERSOL, 1971].

2.1.2 Valor Esperado e Probabilidade

O axioma da Probabilidade [DOOB, 1996] predica que:

Dado um evento E em um espaço amostral S podendo ser finito com N elementos ou infinito com $N=\infty$ elementos, pode-se escrever:

$$S \equiv \left(\bigcup_{i=1}^N E_i \right)$$

E a quantidade $P(E_i)$, denominado probabilidade do evento E_i , é definido tal que:

1. $0 \leq P(E_i) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. Propriedade aditiva: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$, sendo E_1 e E_2 eventos mutuamente exclusivos;

Basicamente, quatro propriedades estatísticas principais são utilizadas para descrever um processo aleatório: i) valor quadrático médio, ii) Função Densidade de Probabilidade (ou *Probability Density Function* – PDF), iii) função de autocorrelação, e iv) função densidade espectral de potência (ou *Power Spectrum Density*).

Segundo [WEISSTEIN, 2005] os momentos são definidos como:

Um momento m_n de uma função de probabilidade $P(x)$ calculado sobre o zero é:

$$m_n = \langle x^n \rangle = \int x^n P(x) dx \quad (2-1)$$

Se o momento, por outro lado, for calculado sobre um determinado valor a ,

$$m_n(a) = \langle (x - a)^n \rangle = \int (x - a)^n P(x) dx \quad (2-2)$$

Os momentos, no entanto, são usualmente calculados em torno da média e são denominados **momentos centrais**:

$$\begin{aligned} m_n &= \langle (x - \mu)^n \rangle \\ &= \int (x - \mu)^n P(x) dx \end{aligned} \quad (2-3)$$

O segundo momento sobre a média é igual a variância

$$m_2 = \sigma^2 \quad (2-4)$$

E o desvio padrão é calculado por

$$\sigma = \sqrt{m_2} \quad (2-5)$$

Os **momentos em relação à origem** são definidos como:

Dada uma variável aleatória discreta X com limites de variação $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e dado que $P_{(X=x_i)} = f(x_i)$, sendo $i=1, 2, \dots, n$, o valor esperado de X é definido como [HUGHES, 1971]

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) \quad (2-6)$$

Também o valor esperado do valor quadrático médio é dado por:

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^n x_i^2 f(x_i) \quad (2-7)$$

Os **momentos centrais** podem ser definidos em termos da variância, como o quadrado da variação da variável aleatória X em relação ao seu valor esperado $E[X]$:

$$Var[X] = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 f(x_i) \quad (2-8)$$

O desvio padrão de uma variável aleatória é dado como a raiz quadrada da variância. Assim, se X é a variável aleatória com variância $Var(X)$, o desvio padrão de X , σ é dado por:

$$\sigma = \sqrt{Var[X]} \quad (2-9)$$

Estes valores esperados podem ainda ser definidos genericamente como:

| | |
|---------------------------------|---|
| Momentos em relação à origem | $E[X^m] = \sum_{i=1}^n x_i^m f(x_i) \quad (2-10)$ |
|---------------------------------|---|

| | |
|-------------------|---|
| Momentos centrais | $E[(X - E(X))^m] = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^m f(x_i) \quad (2-11)$ |
|-------------------|---|

2.1.3 Função Densidade de Probabilidade – FDP, ou *Probabilistic Density Function – PDF*

A Função Densidade de Probabilidade ou PDF (*Probability Density Function*) descreve a probabilidade de uma variável assumir um valor definido em um instante de tempo t . Tomando-se uma janela Δx , sendo que a probabilidade da variável aleatória $x(t)$ assumir o valor entre x e $x + \Delta x$ é:

$$\text{Prob}[x < x(t) \leq x + \Delta x] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T[x < x(t) \leq x + \Delta x]}{T} \quad (2-12)$$

E para valores pequenos de Δx , A PDF pode ser definida como:

$$\text{Prob}[x < x(t) \leq x + \Delta x] \approx p(x)\Delta x \quad (2-13)$$

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{Prob}[x < x(t) \leq x + \Delta x]}{\Delta x} \quad (2-14)$$

A probabilidade da variável ocorrer nos intervalos x_1 e x_2 é dada por:

$$p(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx \quad (2-15)$$

Além disto, há 100% de probabilidade que a função ocorra entre $-\infty$ e $+\infty$, isto é:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1 \quad (2-16)$$

Distribuição de Probabilidade

Abaixo, serão apresentados alguns conceitos e modelos de distribuição da probabilidade comumente aplicados em análise de confiabilidade e tratamento de sinais aleatórios. Outras referências para maiores informações são [JOHNSON, 1994] e [EVANS, 2000].

De [NIST, 2006] e [BENDAT e PIERSOL, 1980] algumas definições e teorias de distribuição de probabilidade são listadas.

Distribuições de probabilidade são definidas em termos de funções de densidade de probabilidade. No entanto, existem várias funções de probabilidades definidos e aplicados para cada caso em particular.

Para uma função contínua, a Função Densidade de Probabilidade (*Probabilistic Density Function – PDF*) é a probabilidade da variável assumir um valor x , sendo que para um sistema contínuo a distribuição de probabilidade em um ponto é zero. Ela é sempre expressa em termos de uma integral entre dois pontos conforme (2-17).

$$\int_a^b f(x)dx = P[a \leq X \leq b] \quad (2-17)$$

Para uma distribuição discreta, a PDF é a probabilidade de a variável assumir o valor x :

$$f(x) = P[X = x] \quad (2-18)$$

Sendo $f(x)$ a função contínua para a $p(x)$ da variável aleatória.

Algumas distribuições contínuas de probabilidade são:

- Normal
- F
- Lognormal
- Potência log-normal
- Uniforme
- Chi-Square
- Gamma
- Tukey-Lambda
- Cauchy
- Exponencial
- Dupla-exponencial
- Beta
- T
- Weibull
- Potencia Normal
- Poisson Birnbaum-Saunders ou Distribuição de Vida de fadiga
- Etc.

• A função Gamma

Embora haja uma distribuição de probabilidade denominada Distribuição Gamma, convém detalhar a função *Gamma* uma vez que muitas das distribuições e teorias de estimativa de vida a seguir a utilizam em suas formulações.

A função *Gamma* se apresenta da forma:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt \quad (2-19)$$

Integrando a equação (2-19) por partes para um argumento real x , tem-se

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\ \Gamma(x) &= [-t^{x-1} e^{-t}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} (x-1)t^{x-2} e^{-t} dt \\ \Gamma(x) &= (x-1) \int_0^{\infty} t^{x-2} e^{-t} dt \\ \Gamma(x) &= (x-1)\Gamma(x-1) \end{aligned} \quad (2-20)$$

Logo, se x é um inteiro, $n = 1, 2, 3, \dots$, então:

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ \Gamma(n) &= (n-1)(n-2)\dots 1 = (n-1)! \end{aligned} \quad (2-21)$$

Assim, a função gama se reduz ao fatorial para um argumento real positivo.
[WEISSTEIN, 2005]

- **Distribuição de Weibull**

A equação da função de densidade de probabilidade da distribuição geral de Weibull é:

$$f(x) = \frac{\gamma}{\alpha} \left(\frac{x - \mu}{\alpha} \right)^{(\gamma-1)} \exp \left(- \left(\frac{x - \mu}{\alpha} \right)^\gamma \right) \quad x \geq \mu ; \gamma, \alpha > 0 \quad (2-22)$$

sendo:

μ = média ou parâmetro de localização

α = parâmetro de escala

γ = parâmetro de forma

Para o caso onde $\mu=0$ e $\alpha=1$, é a chamada distribuição de Weibull padronizada.

Para o caso onde $\mu \neq 0$, é o chamando distribuição de Weibull-2 parâmetros.

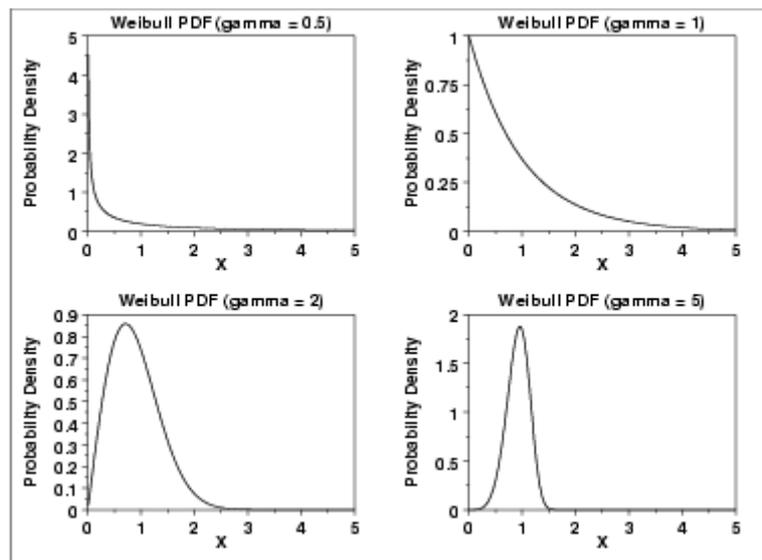


Figura 2-3 – Representação da função densidade de probabilidade de Weibull.

Algumas propriedades da distribuição de Weibull para uma distribuição de $\mu=0$ e parâmetro de escala $\alpha=1$:

| | | |
|-------|---|--------|
| Média | $\Gamma \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma} \right)$ | (2-23) |
|-------|---|--------|

| | | |
|---------|-----------------------------|--------|
| Mediana | $\ln(2)^{\frac{1}{\gamma}}$ | (2-24) |
|---------|-----------------------------|--------|

$$\text{Modo} \quad \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}} & \gamma > 1 \\ 0 & \gamma \leq 1 \end{cases} \quad (2-25)$$

Faixa Zero a infinito positivo

$$\text{Desvio Padrão} \quad \sqrt{\Gamma\left(\frac{\gamma+2}{\gamma}\right) - \left(\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)\right)^2} \quad (2-26)$$

$$\text{Coeficiente de Variação} \quad \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+2}{\gamma}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)\right)^2} - 1} \quad (2-27)$$

- **Teoria da distribuição normal ou Gaussiana**

A equação geral para a função densidade de probabilidade normal é:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2-28)$$

sendo:

μ = média ou parâmetro de localização

σ = desvio padrão ou parâmetro de escala

Para o caso onde $\mu=0$ e $\sigma=1$, é a chamada *distribuição normal padronizada*.

A Figura 2-4 mostra um gráfico da densidade de probabilidade normal padronizada.

E a variável padronizada Z , possuindo $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ é:

$$Z = \frac{(x - \mu)}{\sigma} \quad (2-29)$$

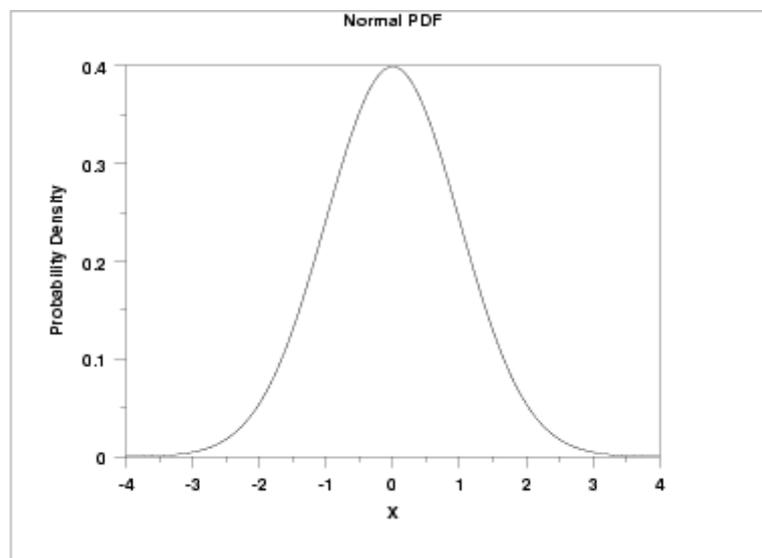


Figura 2-4 Representação da função densidade de probabilidade Normal.

Assim, a função densidade de probabilidade para a variável padronizada Z fica:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (2-30)$$

Algumas propriedades da distribuição normal são:

| | |
|-------------------------|---------------------------------------|
| Média | μ |
| Mediana | μ |
| Modo | μ |
| Faixa | Infinito negativo a infinito positivo |
| Desvio Padrão | σ |
| Coeficiente de Variação | σ/μ |
| Skewness | 0 |
| Kurtosis | 3 |

- **Birnbaum-Saunders ou Distribuição de Vida de Fadiga**

A distribuição de probabilidade de Birnbaum-Saunders [BIRNBAUM e SAUNDERS, 1968 e 1969] é derivada de um modelo que prediz que a falha do material é devido ao crescimento de uma trinca dominante.

A equação geral da probabilidade de distribuição da vida de fadiga de Birnbaum e Sanders é:

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt{\frac{x-\mu}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{x-\mu}}}{2\gamma(x-\mu)} \right) \Phi \left(\frac{\sqrt{\frac{x-\mu}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x-\mu}}}{\gamma} \right) \quad x > \mu; \gamma, \beta > 0 \quad (2-31)$$

sendo:

μ = média ou parâmetro de localização

β = parâmetro de escala

γ = parâmetro de forma

Φ = distribuição de probabilidade acumulada da distribuição normal padronizada.

Para o caso onde $\mu=0$ e $\beta=1$, é a chamada distribuição de vida de fadiga normalizada.

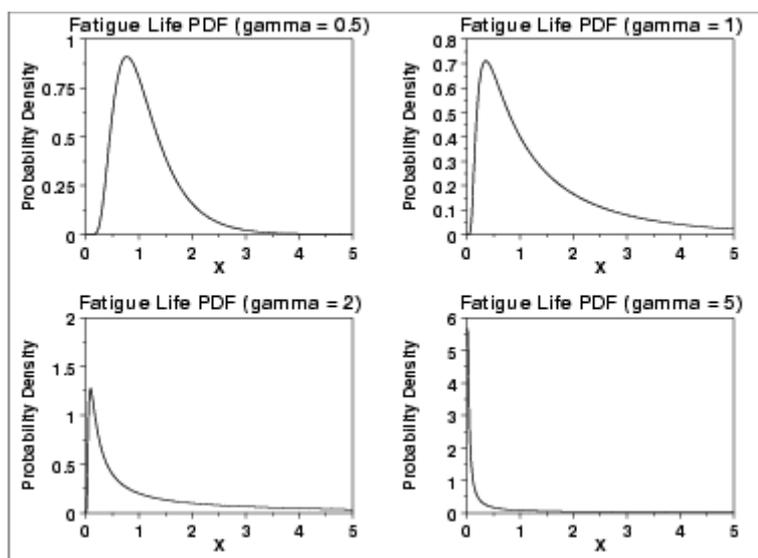


Figura 2-5 – Representação da função densidade de probabilidade de vida de fadiga.

Algumas propriedades da distribuição de vida de fadiga para $\mu = 0$ e $\beta = 1$ são:

$$\text{Média} \quad 1 + \frac{\gamma^2}{2} \quad (2-32)$$

Faixa Zero a infinito positivo

$$\text{Desvio Padrão} \quad \gamma \sqrt{1 + \frac{5\lambda^2}{4}} \quad (2-33)$$

$$\text{Coeficiente de Variação} \quad \frac{2 + \gamma^2}{\gamma \sqrt{1 + 5\gamma^2}} \quad (2-34)$$

[SINCLAIR e DOLAN, 1953], desenvolveram um levantamento estatístico em corpos de prova de alumínio utilizando 6 diferentes níveis de tensão alternada. A Figura 2-6 ilustra o histograma de distribuição da vida de fadiga de 57 corpos de prova testados a 207 MPa. Como pode ser observado, a distribuição de vida não segue uma distribuição normal mas sim log-normal e a equação (2-30) da distribuição normal é resolvida fazendo-se $x = \log N_f$.

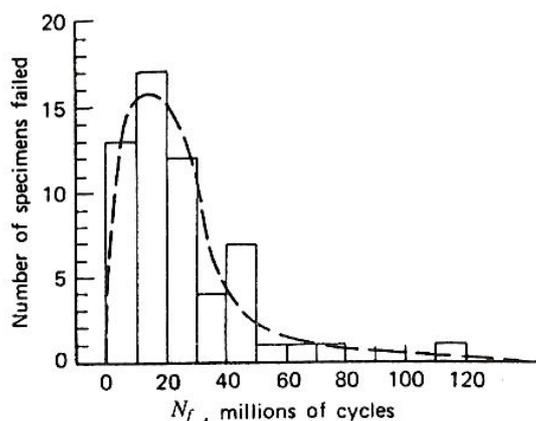


Figura 2-6 – Histograma da distribuição de vida de fadiga para 57 CP de alumínio 7075-T6 testados a 207MPa, [SINCLAIR e DOLAN, 1953].

- **Distribuição de Rayleigh**

De acordo com [NEWLAND, 1984] a distribuição de picos para uma amplitude de resposta do tipo banda estreita segue uma distribuição de probabilidade segundo a forma:

$$Prob[Pico exceder y=a] = \int_a^{\infty} p(a) da \quad (2-35)$$

Se $y(t)$ é Gaussiano, então a função de distribuição da probabilidade de Rayleigh é

$$p(a) = \frac{a}{\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \quad 0 \leq a \leq \infty \quad (2-36)$$

sendo a um valor para a determinação da amplitude máxima e y a variável aleatória. A função de probabilidade $p_p(a)$ apresenta o seu máximo no desvio padrão σ do processo aleatório. Assim, a probabilidade de algum pico, escolhido aleatoriamente, exceda um valor determinado a é igual a:

$$Prob[Pico exceder a] = e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \quad (2-37)$$

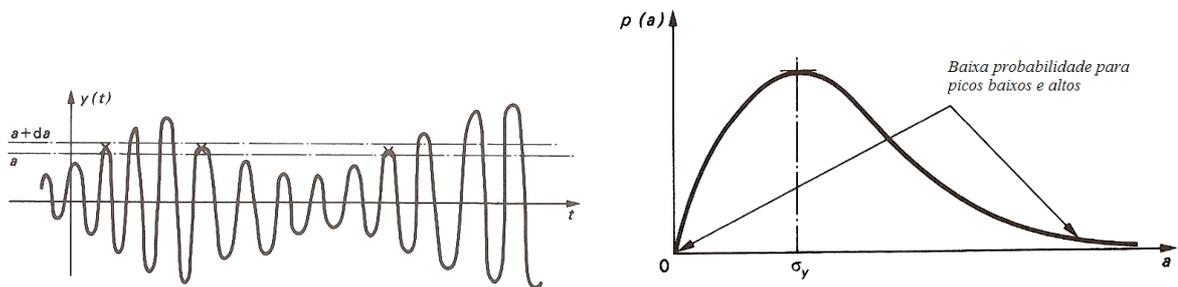


Figura 2-7 – Processo de Banda Estreita e identificação de picos na faixa de amplitude $y=a$ e $y=a+da$.

2.1.4 Função Densidade de Probabilidade Acumulada – FPA, ou Cumulative Density Function – CDF

Para um processo que segue uma distribuição de probabilidade da forma Normal ou Gaussiana, pode-se definir a sua função de probabilidade acumulada.

Dada uma variável aleatória X , discreta ou contínua, a distribuição de probabilidade de que X assumira um valor igual ou menor do que x_i , isto é, $P(X \leq x_i)$ é chamada de função de probabilidade acumulada de X , denominada $F(x)$. Se x_i varia, $F(x_i)$ também varia, sendo assim, $F(x)$ é uma função de x . O intervalo de $F(x)$ é um intervalo fechado $[0,1]$.

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f(\mu) d\mu \quad (2-38)$$

Para calcular a CDF a partir da função densidade de probabilidade – $f(x)$, calcula-se:

$$F(x) = \int_{-\infty}^a f(x)dx \quad (2-39)$$

Sendo a o limite que se deseja calcular a função de probabilidade acumulada.

Weibull possui a seguinte equação que define a CDF:

$$F(x) = 1 - e^{-(x^\gamma)} \quad x \geq 0; \gamma > 0 \quad (2-40)$$

A Figura 2-8 mostra a CDF para os mesmo valores da PDF mostrada na Figura 2-3.

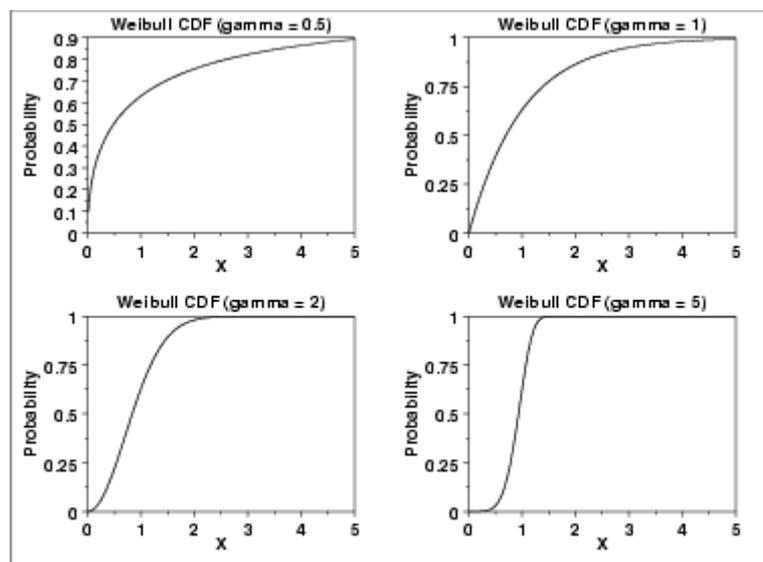


Figura 2-8 – Representação da CDF para a distribuição e Weibull variando-se o parâmetro γ .

Para a distribuição de Birnbaum-Saunders, a função probabilidade acumulada é dada:

$$F(x) = \Phi \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{x}}}{\gamma} \right) \quad x > 0; \gamma > 0 \quad (2-41)$$

sendo Φ a função probabilidade acumulada normal.

A Figura 2-9 mostra a CDF para os mesmos valores da PDF mostrada na Figura 2-5.

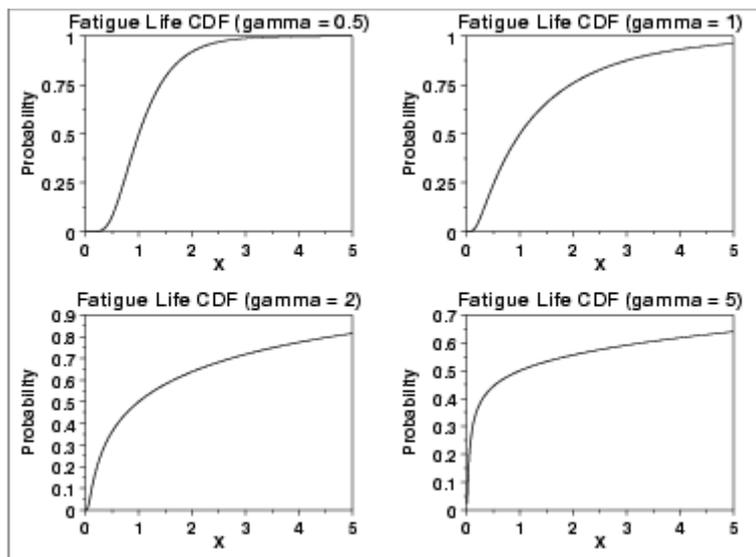


Figura 2-9 – Representação da CDF para a distribuição e Birnbaum-Saunders variando-se o parâmetro γ .

Para a distribuição normal, porém, não existe uma equação fechada para a CDF. Entretanto pode ser calculada apenas através de integração numérica e tem a forma mostrada na Figura 2-10.

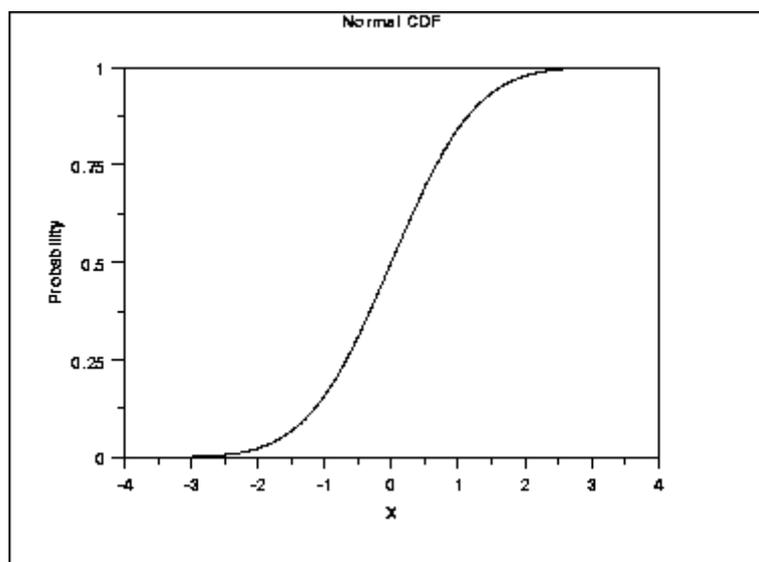


Figura 2-10 – Representação da função de probabilidade acumulada normal.

2.2 Processos Estocásticos

2.2.1 Definição

Segundo [DOOB, 1996] um processo estocástico é definido como um conjunto de variáveis aleatórias pertencente a um domínio probabilístico. Já [PAPOULIS, 1984], define processo estocástico como o conjunto formado por uma função real aleatória pertencente a um domínio probabilístico.

No Capítulo 2.1.2, foram definidos os momentos centrais e em relação à origem para uma variável aleatória X no domínio das variáveis aleatórias x_i , para $i=1,2,3...n$. Uma vez que na prática trata-se apenas com uma parcela limitada – amostra, da população das variáveis aleatórias, algumas definições devem ser consideradas para as propriedades estatísticas no conjunto das amostras.

Um processo estocástico $\{x_k(t)\}$, $-\infty < t < \infty$, denominado pelo símbolo $\{ \}$, é um conjunto de observações de uma variável aleatória sendo caracterizado pela sua distribuição probabilística. Cada valor particular da variável aleatória $x_k(t)$ onde t é variável e k fixo é denominado amostra, interpretado como o valor obtido em um dado experimento no instante de tempo t . O número possível de experimentos representa o espaço amostral de índice k . Para um dado número N e tempos t_1, t_2, \dots, t_N , os valores das variáveis $x_k(t_1), x_k(t_2), \dots, x_k(t_N)$, representam N variáveis aleatórias no espaço amostral k . Um conjunto de amostras formando um processo aleatório está representado na Figura 2-1. [BENDAT e PIERSOL, 1971].

Uma amostra em particular da variável aleatória $x_k(t)$, em geral, não é suficiente para representar todo o domínio do processo aleatório $\{x_k(t)\}$. Porém, sob certos aspectos relacionados abaixo, para casos especiais do processo ergódico, é possível derivar propriedades estatísticas que representem todo o conjunto do processo aleatório.

Considerando-se desta forma, um processo aleatório $\{x_k(t)\}$, as seguintes propriedades estatísticas podem ser obtidas no domínio, isto é, no espaço amostral.

Valor esperado da variável aleatória $x(t)$ - média

$$E[x_k(t)] = \mu_x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t) \quad (2-42)$$

O **valor quadrático médio** representa a intensidade do sinal e é definido como:

$$E[x^2(t)] = \Psi_x^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t)^2 \quad (2-43)$$

A **variância** σ^2 , o qual é o valor médio quadrático em torno da média e é definida como:

$$\sigma_x^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [x_k(t) - \mu_x(t)]^2 \quad (2-44)$$

ou também:

$$\sigma_x^2 = \Psi_x^2 - \mu_x^2 \quad (2-45)$$

A **covariância** em um tempo arbitrário $t_1 = t$ e $t_2 = t + \tau$ é:

$$C_x(t, t + \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [x_k(t) - \mu_x(t)][x_k(t_1 + \tau) - \mu_x(t)] \quad (2-46)$$

$$C_x(t, t + \tau) = R_x(t, t + \tau) - \mu_x(t)^2$$

O **desvio padrão** – σ , é o valor positivo da raiz quadrática da variância :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad (2-47)$$

Para o projeto de uma estrutura sujeita a uma vibração aleatória, a amplitude e a frequência de ocorrência dos picos de solitação é determinante para o cálculo de vida e dano.

Poder-se-ia abordar a análise calculando-se a média da excitação, mas porém, é de conhecimento que uma excitação randômica possui média zero, pois de outro modo a estrutura não seria isostática. Por outro lado, aplicando-se uma média quadrática, os valores negativos são modulados e tem-se assim:

2.2.2 Processo Estacionário

Considerando um sistema físico em termos de processo aleatório, as propriedades do fenômeno podem ser hipoteticamente descritas em determinado tempo computando-se valores médios ao longo da coleção de amostras que descrevem o processo aleatório. Por exemplo, considerando a coleção de amostras mostrada na Figura 2-1 também chamado de conjunto, o valor médio (*primeiro momento*) da variável aleatória em um determinado tempo t_1 pode ser calculado observando-se o valor instantâneo de cada amostra do sinal no tempo t_1 , somando os valores e dividindo pelo número de amostras observadas. De forma similar, a correlação entre os valores da variável aleatória em dois instantes diferentes de tempo (chamado de função de autocorrelação) pode ser calculada extraindo-se o valor médio das montagens dos produtos do valor instantâneo em dois tempos, t_1 e $t_1 + \tau$. A covariância, ou autocovariância, é definida como o somatório do produto da diferença entre o valor da variável aleatória $x(t)$ e sua média $\mu_x(t)$.

Se o valor médio da variável aleatória $\mu_x(t)$ juntamente com a covariância $C_x(t, t + \tau)$ resultarem em um mesmo valor para todo e qualquer instante de tempo t , (independente da translação do tempo), então o processo aleatório $\{x_k(t)\}$ é dito *fracamente estacionário*. Por outro lado, se todas as demais propriedades probabilísticas que envolvem $\{x_k(t)\}$ forem também independentes de t , o processo é dito *fortemente estacionário*. Para um processo Gaussiano ou normal, ambos os conceitos coincidem, [BENDAT e PIERSOL, 1971].

Assim, em um processo aleatório estacionário, o valor médio, o valor quadrático médio e a autocovariância, ou autocorrelação, independem do tempo t . Assim, para todo t :

$$\mu_x = E[x_k(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx \quad (2-48)$$

$$\mu_x^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \quad (2-49)$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dx \quad (2-50)$$

Para um processo estacionário, a autocovariância é igual a autocorrelação para médias iguais a zero.

Para o caso onde esses valores apresentam variações com o tempo t , o processo é dito como não estacionário. Uma ilustração de um processo aleatório estacionário está mostrada na Figura 2-11, sendo que para qualquer intervalo de tempo Δt , obtém-se os mesmos valores para as propriedades do processo aleatório.

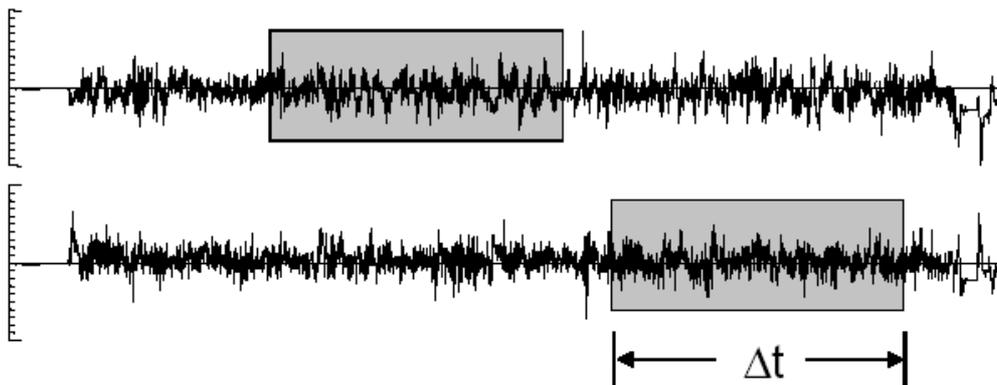


Figura 2-11 – Sinal de vibração de amplitude aleatória ao longo do tempo, mas de aspecto estocástico e estacionário.

2.2.3 Processo Aleatório Estacionário Ergódico

Segundo [BENDAT e PIERSOL, 1971], considerando o i -ésimo valor da variável aleatória da Figura 2-1, com $\mu_x(t_i)$ e $R_x(t_i, t_i + \tau)$ calculados através da equação (2-48) e (2-50), sendo o processo aleatório $\{x(t)\}$ estacionário e $\mu_x(t)$ e $R_x(t, \tau)$ não variar conforme t varia, tem-se assim que, $\mu_x(t_i) = \mu_x$ e a correlação depende apenas do incremento de tempo τ , $R_x(t, t + \tau) = R_x(\tau)$ e o processo é dito *ergódico*. Somente processo aleatório estacionário pode ser ergódico.

Também, de [BENDAT e PIERSOL, 1980], os valores calculados no tempo t_i do conjunto de dados aleatório é equivalente aquele calculado em um único histórico no tempo. Assim, os valores das propriedades da variável aleatória das equações (2-48) a (2-50) tornam-se:

$$\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (2-51)$$

$$\psi_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (2-52)$$

$$R_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau) dt \quad (2-53)$$

$$C_x = R_x - \mu_x^2 \quad (2-54)$$

Considerando agora um processo aleatório estacionário, $\{x_i(t)\}$ com uma função arbitrária de amostragem $x_i(t)$, este processo aleatório estacionário é dito *fracamente ergódico*, se o valor médio e a covariância puderem ser obtidos através da observação da variável aleatória no conjunto em qualquer instante de tempo. Sendo assim, ambas podem ser calculadas através da observação de uma coleção limitada de amostra no tempo, não necessitando de uma coleção grande de amostra do conjunto. Nestes casos, as equações (2-51) a (2-53) podem ser utilizadas.

Por outro lado, se não somente o valor médio e a covariância puderem ser obtidas através da uma observação limitada das variáveis aleatórias, o processo é dito *fortemente ergódico*. Assim, um processo fortemente ergódico é obrigatoriamente fracamente ergódico, mas a recíproca não é verdadeira.

Segundo [OSGOOD, 1982], e [NEULAND, 1984] um processo estocástico, estacionário e ergódico tem a característica de possuir uma distribuição estatística normal ou Gaussiana, mas os picos de solicitação, e assim, os picos de amplitude de tensão se apresentam com distribuição de Rayleigh.

2.3 Análise no Tempo e na Frequência

Para um processo estocástico, estacionário e ergódico, algumas propriedades podem ser aplicadas e definidas:

2.3.1 Autocorrelação

As propriedades de um processo aleatório estacionário e ergódico podem ser determinadas calculando-se as médias em um intervalo definido no tempo (T) ao invés de uma montagem de dados [BENDAT e PIERSOL, 1971]. Assim, tem-se.

i) autocorrelação

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] \quad (2-55)$$

A Função de Autocorrelação, como já definido por (2-50), descreve a dependência do valor instantâneo da variável $x(t)$ com o valor da mesma no tempo $x(t+\tau)$, calculada em um intervalo de tempo T . É a medida da similaridade entre duas variáveis aleatórias.

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \quad (2-56)$$

Em termos de autocorrelação, o valor médio e o valor quadrático médio assumem a seguinte forma:

$$\mu_x = \sqrt{R_x(\infty)} \quad \text{e} \quad \Psi_x^2 = R_x(0)$$

Uma característica importante dos sinais de banda larga é o gráfico da autocorrelação apresentar um pico central que decresce rapidamente com o aumento de τ indicando uma baixa correlação dos valores de $x(t+\tau)$ com o valor prévio $x(t)$. Para um sinal idealmente “branco”, a função de autocorrelação é um delta de Dirac centrado em $\tau=0$.

Uma aplicação típica da autocorrelação é na detecção de uma variável determinística, mas que pode ser mascarada por um ruído de fundo.

2.3.2 Transformada de Fourier

De [BENDAT e PIERSOL, 1971], considerando um processo periódico:

$$x(t) = x(t \pm nT) \quad n : 1,2,3,\dots,n. \quad (2-57)$$

de frequência fundamental $f_1 = \frac{1}{T}$, este processo pode ser expandido em uma série de

Fourier de acordo com a equação:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n f_1 t + b_n \sin 2\pi n f_1 t) \quad (2-58)$$

sendo:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos 2\pi n f_1 t dt \quad n = 0,1,2,\dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin 2\pi n f_1 t dt \quad n = 1,2,3,\dots$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \mu(x)$$

Um modo alternativo de expressar a série de Fourier para um processo periódico é:

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(2\pi n f_1 t - \theta_n) \quad (2-59)$$

sendo:

$$X_0 = a_0 / 2$$

$$X_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\theta_n = \tan^{-1}(b_n/a_n) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Em outras palavras, um processo periódico consiste em um componente estático, X_0 , e um número infinito de componentes senoidais chamados harmônicos, de amplitude X_n e fase θ_n . As frequências harmônicas são múltiplas de f_1 . [BENDAT e PIERSOL, 1971].

Para um processo aleatório e estacionário, a série de Fourier é obtida considerando t infinito:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt \quad -\infty < f < \infty \quad (2-60)$$

sendo $X(f)$ a transformada direta de Fourier ou espectro de $x(t)$.

Também, sendo $X(f)$ conhecido, sua inversa é calculada através de:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi f t} df \quad (2-61)$$

Para sinais obtidos de dados experimentais, que teoricamente existem por um tempo indeterminado e de longa duração, a integral $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = \infty$ e a equação (2-60) não é definida. Porém, os sinais são ditos de tempos finitos t e assim, a *análise de Fourier finita* torna-se:

$$X_t(f) = \int_0^t x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt \quad (2-62)$$

2.3.3 Função Densidade Espectral de Potência (*Power Spectral Density*) *PSD*

A PSD descreve uma composição dos valores da variável aleatória em termos de densidade espectral em frequência de seus respectivos valores quadráticos, calculando-se o seu valor médio quadrático [BENDAT e PIERSOL, 1971]. Este valor médio se aproxima de um valor médio exato a medida que T tende ao infinito, segundo a equação:

$$\psi_x^2(f, \Delta f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t, f, \Delta f) dt \quad (2-63)$$

Para valores pequenos de Δf , a função densidade de probabilidade $S_x(f)$ pode ser definida por:

$$\psi_x^2(f, \Delta f) = S_x(f) \Delta f \quad (2-64)$$

$$S_x(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\Psi_x^2(f, \Delta f)}{\Delta f} = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta f} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t, f, \Delta f) dt \right] \quad (2-65)$$

Uma importante propriedade da PSD é a sua relação com a função de autocorrelação para processo estacionário, através de uma transformada de Fourier.

Segundo [BENDAT e PIERSOL, 1971], a variável aleatória pode ser representada na frequência como uma PSD bilateral, (*two-sided*), sendo a transformada de Fourier da função de autocorrelação:

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2-66)$$

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2-67)$$

Porém, na prática, se lida com a PSD de frequência positiva, unilateral (*one-sided*):

$$G_x(f) = \begin{cases} 2S_x(f), & 0 < f < \infty \\ S_x(0) & f = 0 \end{cases} \quad (2-68)$$

sendo que a área sob as duas curvas é igual.

$$G_x(f) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = 4 \int_0^{+\infty} R_x(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau \quad (2-69)$$

$$G_x(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 4 \int_0^{+\infty} R_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (2-70)$$

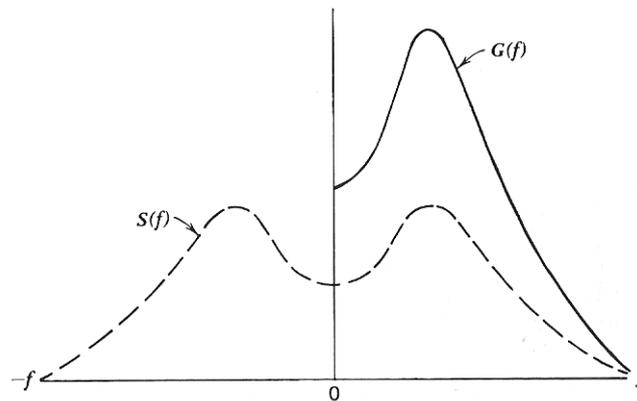


Figura 2-12 – PSD “one-sided” – $G(f)$ e “two-sided” – $S(f)$

A $G(f)$ indica a quantidade de energia em uma banda de frequência. Quando a densidade espectral é dada em termos de médias quadráticas, a energia total é obtida simplesmente somando-se a densidade espectral para cada incremento de frequência ao longo do espectro. Daí a unidade em g^2/HZ .

Nas definições acima, a seguinte convenção de unidades de frequência e PSD são definidas:

$$S_x(f) ; G_x(f) \quad - \quad Y^2/HZ$$

$$S_x(\omega) ; G_x(\omega) \quad - \quad Y^2/rad/s$$

Onde Y representa a unidade correspondente ao sinal medido. Através da calibração, pode-se representar a resposta física sendo analisada.

2.3.4 Momentos da PSD

São propriedades extraídas diretamente da função Densidade Espectral de Potência – PSD. Elas possibilitam a análise do sistema dinâmico sob o processo aleatório no domínio da frequência, sem a necessidade de geração de amostra no domínio do tempo. Os mais relevantes momentos de ordem n^i para análise de fadiga espectral são extraídos da PSD unilateral, $G(f)$ através da equação (2-71).

$$m_n = \int_0^{\infty} f^n \cdot G(f)df = \sum_k f_k^n \cdot G_k(f)\delta f \quad (2-71)$$

O momento de ordem n^i da curva PSD é calculado dividindo-se a curva em intervalos e multiplicando-se este pela respectiva frequência elevada à potência n . O momento n^i é então calculado somando-se os respectivos momentos calculados nos intervalos. Uma interpretação gráfica do cálculo pode ser visto na Figura 2-13.

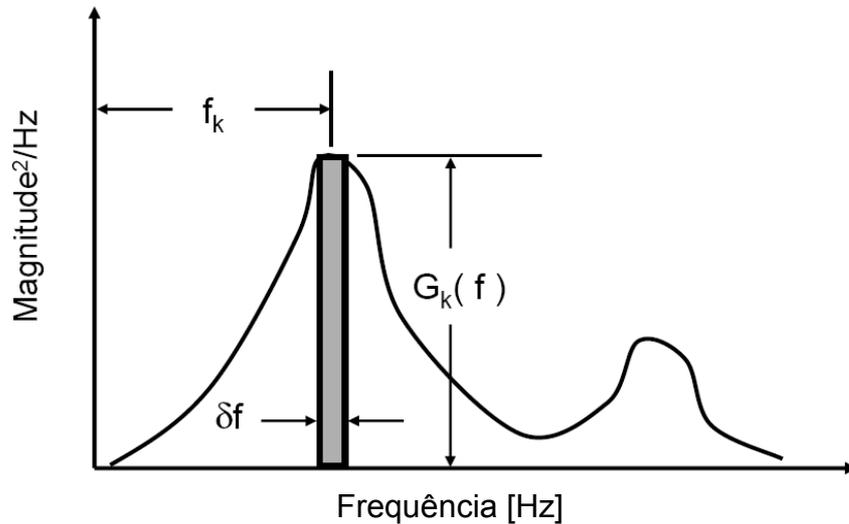


Figura 2-13 – cálculo dos momentos da PSD – Fonte [SOCIE, 2001].

Na prática, apenas os momentos m_0 , m_1 , m_2 e m_4 são suficientes para o cálculo de fadiga espectral subsequente.

O precursor que possibilitou o cálculo de dano em fadiga espectral através da PSD foi [RICE, 1954] em 1954, desenvolvendo relações para a determinação do número de zeros e picos diretamente da PSD determinados exclusivamente pela aplicação dos momentos m_n .

2.3.5 Propriedades da PSD

As principais propriedades extraídas dos momentos da PSD, de aplicação direta em análise de fadiga espectral são:

- (2-72)
- | | |
|---|--|
| i. Expectativa de zeros: | $E[0] = \sqrt{\frac{m_4}{m_2}}$ |
| ii. Expectativa de zeros cruzamento-positivo: | $E[0^+] = \sqrt{\frac{m_2}{m_0}}$ |
| iii. Expectativa de Picos: | $E[p] = \sqrt{\frac{m_4}{m_2}}$ |
| iv. Fator de irregularidade: | $\alpha_x = \frac{m_2}{\sqrt{m_0 m_4}}$ $\alpha_x = \frac{E[0^+]}{E[p]}$ |

- v. Parâmetro de Vanmarcke: $q_x = \sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_0 m_2}}$
- vi. Parâmetro β_x relacionado a Vanmarcke: $\beta_x = \frac{m_1}{\sqrt{m_0 m_2}}$
- vii. Variância: $Var = \sigma_x^2 = m_0$
- viii. Derivada da Variância: $\sigma_x^{\cdot 2} = m_2$
- ix. Segunda Derivada da Variância: $\sigma_x^{\cdot\cdot 2} = m_4$
- x. Área sobre a PSD: $A_{psd} = m_0$
- xi. Desvio Padrão: $\sigma = \sqrt{m_0}$
- xii. Frequência Central: $f_c = \frac{m_1}{m_0}$
- xiii. Frequência média esperada: $f_m = \frac{m_1}{m_0} \sqrt{\frac{m_2}{m_4}}$
- xiv. Período Fundamental das Tensões pseudo-periódicas: $T_f = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{m_4}}$ se os momentos são calculados a partir de $G(\omega)$

2.3.6 Aspectos Práticos da PSD

No **domínio da frequência**, o carregamento é dado na forma de PSD da solicitação e a estrutura é modelada através de uma função de transferência linear, relacionando a solicitação como dado de entrada, e a tensão em um determinado ponto da estrutura como dado de saída, isto é, a PSD de tensão no ponto crítico.

No **domínio do tempo**, o modelo estrutural deve ser resolvido para cada caso de solicitação, isto é, se quisermos avaliar “n” carregamentos distintos, isto implicará no cálculo de “n” soluções para a estrutura. Ao contrário do domínio da frequência, onde uma PDF é obtida apenas para um caso e os “n-1” que se seguem são obtidos automaticamente.

Na utilização da PSD, somente a amplitude é mantida enquanto que a fase é perdida. Porém, em processos gaussianos aleatórios, tem sido observado que o ângulo de fase é randomicamente atribuído. Desta forma, séries no tempo podem ser geradas através da PSD as quais são estatisticamente iguais àquelas originais, Figura 2-14

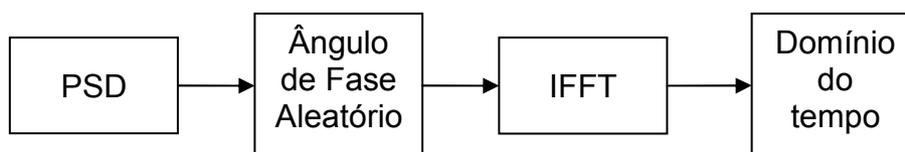


Figura 2-14 – Geração de amostra da variável no tempo a partir de uma PSD

Considerando os tipos de carregamento que podem ser observados ao analisar uma estrutura, estes podem ser classificados através da observação de sua resposta no tempo e na frequência. Porém, quatro tipos devem ser tomados como exemplos para ilustrar as diferenças básicas em termos qualitativos [BISHOP et al., 1999].

Para uma solicitação do tipo **senoidal temporal**, este aparece como um simples pico na PSD. O pico é centrado na frequência básica do senóide e a área abaixo da PSD representa a amplitude média quadrática da onda. A largura e a altura do pico podem variar, embora em teoria deve ser infinitamente amplo e estreito. Porém, na prática, toda onda senoidal é limitada no tempo. Porém vale ressaltar que para uma análise PSD, a área abaixo da curva é de interesse.

Uma solicitação do tipo **narrow band**, ou banda estreita, caracteriza-se por uma composição de ondas senoidais as quais envolvem uma faixa estreita de frequência. Observando-se no tempo, esta se caracteriza por apresentar uma modulação de amplitude em torno da média.

Um processo aleatório do tipo **wide band**, ou banda larga, caracteriza-se pela formação de ondas senoidais englobadas em uma grande faixa de frequência. Caracteriza-se por apresentar uma PSD formada por vários picos englobando distintas frequências ou um pico “largo” englobando distintas frequências. No domínio do tempo, caracteriza-se por apresentar vales reversos acima da média e também picos negativos.

No processo aleatório do tipo **white noise**, ou ruído branco, o espectro é formado por uma combinação de senos ao longo de uma ampla faixa de frequência.

Expectativa de zeros, de picos e fator de irregularidade

Processos aleatórios podem ser caracterizados por suas propriedades estatísticas. Sendo o processo aleatório, estacionário e ergódico, e sendo uma PSD formada por inúmeras observações correspondendo desta forma a uma média de eventos, uma propriedade extraída de um dado intervalo é estatisticamente semelhante àquela extraída de um outro intervalo. Em seguida, definem-se as principais propriedades estatísticas extraídas tanto do domínio no tempo quanto na frequência, PSD. [BISHOP et al., 1999]

- **Cruzamento positivo de zero ou “upward zero crossing”** – representa o número de cruzamentos em zero ou através da média, de derivada positiva.

- **Número de picos** – representa o número de picos. Como exemplo, tomando-se o exemplo da Figura 2-15:
 - – representa o número de cruzamento de zeros positivo
 - X – representa o número de picos
- **Fator de Irregularidade** – é o quociente entre o número de cruzamento em zeros e o número de picos, α_x .

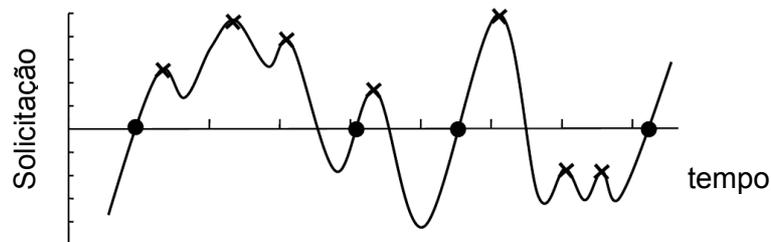


Figura 2-15 – Representação de zeros cruzamento positivo e número de picos.

Fonte [SOCIE, 2001].

Narrow Band $\rightarrow \alpha_x$ e $\beta_x \rightarrow 1$

Wide Band $\rightarrow \alpha_x$ e $\beta_x \rightarrow 0$

2.3.7 Processo Aleatório Analítico e Momentos Espectrais

De [PETRUCCI E ZUCARELLO, 2004]:

Conceitos preliminares: Sendo $x(t)$ um processo estocástico, ergódico tendo como 0 o valor médio, cuja função densidade de probabilidade $p(x)$ é Gaussiana e independente do tempo, sua função de autocorrelação pode ser dado por:

$$R_x(\tau) = E[x(t) \cdot x(t + \tau)] \quad (2-73)$$

Também a PSD é a transformada de Fourier da Função de autocorrelação. Assim, a PSD, $S_x(\omega)$ do processo aleatório $x(t)$ é:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2-74)$$

sendo j imaginário. Para processos aleatórios reais, $S_x(\omega)$ é real e a área é a variância σ_x^2 .

Para descrever completamente a distribuição da potência ao longo da frequência, a PSD da derivada da função aleatória também é de interesse. Assim, a PSD da derivada $x'(t)$ de $x(t)$ esta relacionada através de:

$$S_x(\omega) = \omega^2 S_x(\omega) \quad (2-75)$$

Parâmetros Espectrais e variável aleatória analítica. A distribuição ao longo da frequência de uma PSD é dada em termos de médias dos momentos espectrais m_n definido por:

$$m_n = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^n U(\omega) S_x(\omega) d\omega \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2-76)$$

$U(\omega)$ = função step

$$U(\omega) = 1 \quad \forall \omega \geq 0$$

$$U(\omega) = 0 \quad \forall \omega < 0$$

A física e a matemática podem ser melhor compreendidas quando se substitui o valor real aleatório $x(t)$ por seu correspondente analítico $X(t)$. $X(t)$ é uma variável aleatória complexa de parte real $x(t)$ e parte imaginária conforme a transformada de Hilbert de $x(t)$:

$$X(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \quad (2-77)$$

sendo \hat{x} a transformada de Hilbert

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (2-78)$$

A transformada de Hilbert retorna uma função que está em quadratura com a função original.

A relação entre os momentos espectrais e a sequência de picos e vales em um processo aleatório é melhor visto através de um vetor rotacional em um plano complexo.

$$\begin{aligned} X(t) &= A_X(t) \exp[j\Theta_X(t)] \\ X(t) &= A_X(t) [\cos \Theta_X(t) + j \sin \Theta_X(t)] \end{aligned} \quad (2-79)$$

$A_X(t)$ = Amplitude e $\Theta_X(t)$ = ângulo de fase.

$$A_X(t) = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)} \quad (2-80)$$

$$\Theta_X(t) = \tan^{-1} \left(\frac{\hat{x}(t)}{x(t)} \right) \quad (2-81)$$

Considerando $x(t)$ a projeção de $X(t)$ sobre o eixo real horizontal, $x(t)$ torna-se zero, ou "cruzamento de zeros" quando $\Theta_X(t) = \pi/2$ ou $3\pi/2$;

Também, torna-se pico quando sua derivada é zero $\dot{\Theta}_x(t) = \pi/2$ ou $3\pi/2$;

Relação entre PSD e o Processo analítico. A PSD de $X(t)$ está relacionada com a PSD da variável real $x(t)$ através de:

$$S_X(\omega) = 2U(\omega)S_x(\omega) \quad (2-82)$$

Nota-se que a PSD $S_X(\omega)$ da variável analítica $X(t)$ é unilateral e positiva.

Os momentos espectrais relacionam-se com a variável analítica na forma:

$$m_n = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^n S_X(\omega) d\omega \quad (2-83)$$

Em termos de valores médios dos momentos espectrais, a frequência central Ω_x e o raio de giração ρ_x da PSD em relação à frequência de origem é:

$$\begin{aligned} \Omega_x &= \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = E \left[\dot{\Theta}_x(t) \right] \\ \rho_x &= \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}} = E \left[\left| \dot{\Theta}_x(t) \right| \right] \end{aligned} \quad (2-84)$$

A distância entre Ω_x e ρ_x é a medida da dispersão do conteúdo da PSD. Em um processo banda estreita, Ω_x e ρ_x são coincidentes.

É importante notar que os valores dos momentos da PSD são os mesmos para o processo real e para o complexo. Assim, X e x são equivalentes.

Para a completa caracterização da distribuição estatística das amplitudes e do campo de frequência de uma variável gaussiana aleatória e estacionária são necessários quatro parâmetros.

- fator de irregularidade α_x : é a razão entre “cruzamento de zeros” e valor esperado de picos.

$$\alpha_x = \frac{\rho_x}{\rho_{x'}} = \frac{m_2}{\sqrt{m_0 m_4}} = \frac{E \left[\left| \dot{\Theta}_x(t) \right| \right]}{E \left[\dot{\Theta}_x(t) \right]} \quad (2-85)$$

- fator β_x introduzido por [VANMARK, 1998]

$$\beta_x = \frac{\Omega_x}{\rho_x} = \frac{\sqrt{m_1^2}}{\sqrt{m_0 m_2}} = \frac{E \left[\dot{\Theta}_x(t) \right]}{E \left[\left| \dot{\Theta}_x(t) \right| \right]} \quad (2-86)$$

- Os outros são: α_x e β_x .

Todos estes 4 parâmetros tendem a 1 \Rightarrow Narrow band e 0 \Rightarrow Wide band.

2.4 Síntese do Capítulo

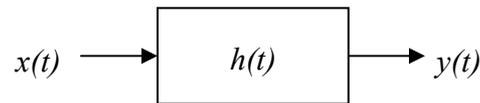
Uma solicitação resultante do transporte de um sistema mecânico, caracteriza-se por sua solicitação aleatória imposta à estrutura. Esta solicitação pode ser tratada estatisticamente, através de propriedades da sua função densidade de probabilidade, PDF e também através dos momentos espectrais de sua resposta espectral, PSD. Através da análise dos momentos espectrais, é possível correlacionar probabilidades de ocorrência da tensão na estrutura, por exemplo, ou ainda sua distribuição ao longo da frequência.

A resposta da estrutura sob uma solicitação aleatória, depende de sua característica dinâmica. Desta forma, é fundamental desenvolver um estudo da dinâmica estrutural e de seus parâmetros e característica, como amortecimento e sua correlação com a resposta em frequência da estrutura. Este estudo será importante para, por exemplo, a aplicação de funções transferência ou na determinação do amortecimento estrutural para a análise numérica por elementos finitos.

3. Resposta Dinâmica de Sistemas Lineares

Resposta no Tempo

Considerando um sistema dinâmico linear, de parâmetros constantes e invariáveis, a resposta dinâmica pode, segundo [BENDAT e PIERSOL, 1980], ser deduzida a partir da resposta de uma função impulso ou função peso $h(t)$:



Assim,

$$h(t) = y(t) \quad \text{para} \quad x(t) = \delta(t) \quad (3-1)$$

sendo t o tempo medido ao aplicar-se a função delta.

Para qualquer valor de entrada arbitrário $x(t)$, a resposta do sistema é dada pela superposição ou pela integral da convolução, isto é, a resposta $y(t)$ será dada pelo soma linear ponderada ao longo do tempo total da solicitação de entrada $x(t)$.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \quad (3-2)$$

Porém, em um sistema físico real, não há resposta sem que um carregamento de entrada seja solicitado, desta forma, o limite inferior da integral da equação (3-2) torna-se zero.

Um sistema linear comporta-se de maneira aditiva e homogênea, isto é, dadas duas entradas $x_1 + x_2$, a saída será $y_1 + y_2$. Além disto, responderá de cy_1 se a entrada for cx_1 . Desta forma $h(\tau)$ é constante e não dependente da entrada x_1 . Assim:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \quad \forall \quad x(t) \quad (3-3)$$

Resposta em Frequência

A resposta dinâmica de um sistema é geralmente descrito em termos de transformações lineares da função resposta ao impulso $h(\tau)$. Para sistemas ideais, a transformada de Fourier da equação (3-3) descreve a resposta em frequência do sistema dada a função resposta onde $h(\tau) = 0$ para $\tau < 0$:

$$H(f) = \int_0^{\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (3-4)$$

denominada Função Reposta em Frequência.

Esta é comumente chamado de função transferência na denominação de engenharia, porém, mais precisamente, função transferência é dada pela transformada de Laplace:

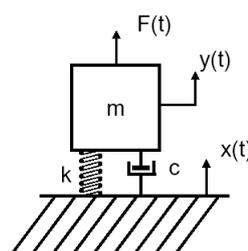
$$H(f) = \int_0^{\infty} h(\tau)e^{-p\tau} d\tau \quad p = a + jb \quad (3-5)$$

Para $a \neq 0$, a transformada de Laplace será diferente da de Fourier, porém quando $a=0$, e tomando $b=2\pi f$ a parte imaginária de ambas tornam-se iguais.

Adicionalmente, é importante considerar a velocidade de resposta de um sistema dinâmico com o carregamento ou excitação, também chamado de impedância mecânica. Como exemplo: um pico de solicitação relativamente de longa duração pode causar uma falha na estrutura enquanto que o mesmo pico, mas de duração curta, pode não causar a falha devido à estrutura ser incapaz de responder àquela velocidade ou frequência. Assim, de modo a descrever o comportamento dinâmico da estrutura na devida solicitação aleatória, torna-se necessário determinar o seu espectro de frequência, isto é, a resposta do sistema em frequência. [OSGOOD, 1982]

3.1 Sistemas de 1 Grau de Liberdade: 1GL

Um sistema mecânico de um grau de liberdade pode ser ilustrado pela Figura 3-1 composto por uma massa, mola e amortecedor. Assumindo que o sistema esteja sujeito a uma força $F(t)$, ou então a um deslocamento prescrito pela base $x(t)$, a equação diferencial do movimento segundo a lei de Newton é:



$$z(t) = y(t) - x(t)$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} + c \frac{dz}{dt} + kz = F(t) - m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dz}{dt} + \omega_n^2 z = - \frac{d^2x}{dt^2}$$

Figura 3-1 – modelo dinâmico de 1GL com vibração forçada pela base.

3.1.1 Resposta no Tempo

A equação do movimento de um sistema estrutural linear pode ser expressa em termos da equação diferencial segundo a equação (3-6) ou na forma matricial segundo a equação (3-7). O sistema de equações diferenciais do sistema no domínio do tempo é calculado diretamente correspondendo a cada incremento no tempo.

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = F(t) \quad (3-6)$$

ou na forma matricial

$$[M]\{x''(t)\} + [C]\{x'(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{F(t)\} \quad (3-7)$$

sendo $\{x(t)\}$ o vetor deslocamento do sistema, $[M]$, $[C]$ e $[K]$, as matrizes massa, amortecimento e rigidez simultaneamente. $\{F(t)\}$ é o vetor carregamento.

Quando a estrutura está sujeita a múltiplos carregamentos de solicitação aleatória, uma matriz dos carregamentos espectrais, PSD, pode ser gerada aplicando-se a transformada de Fourier do vetor carregamento $\{F(t)\}$.

$$S_p(\omega)_{m \times m} = \begin{bmatrix} S_{11}(\omega) & \Lambda & S_{1i}(\omega) & \Lambda & S_{1m}(\omega) \\ M & 0 & & \Lambda & M \\ S_{i1}(\omega) & & S_{ii}(\omega) & & S_{im}(\omega) \\ M & \Lambda & & 0 & M \\ S_{m1}(\omega) & \Lambda & S_{m1}(\omega) & \Lambda & S_{mm}(\omega) \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

sendo m o número de múltiplos carregamentos aleatórios. Os termos diagonais $S_{ii}(\omega)$ é a correlação cruzada dos termos $F_{ii}(t)$ e os outros não diagonais $S_{ij}(\omega)$ são a correlação cruzada dos termos $F_i(t)$ e $F_j(t)$. Segundo propriedades da PSD, pode ser mostrado que a matriz de múltiplas PSD $[S_p(\omega)]$ é uma matriz Hermitian.

3.1.2 Resposta em Frequência

[BENDAT e PIERSOL, 1980]

Obtém-se a função resposta em frequência do sistema tomando-se a entrada $F(t) = \delta(t)$ na equação (3-7), e da equação (3-1) a resposta corresponde a $y(t) = h(t)$. Tomando-se a transformada de Fourier em ambos os lados da (3-6, tem-se para 1GL.

$$\left[-(2\pi f)^2 m + j2\pi f c + k \right] Y(f) = 1 \quad (3-9)$$

sendo o primeiro termo representado por $H(f)$.

Convenientemente, pode-se reescrever a equação (3-9) introduzindo-se o termo de coeficiente de amortecimento ζ e o termo de frequência natural não-amortecida f_n . Desta forma,

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3-10)$$

A função resposta em frequência $H(f)$, para um 1GL fica

$$H(f) = \frac{\frac{1}{k}}{1 - \left(\frac{f}{f_n}\right)^2 + j2\zeta\left(\frac{f}{f_n}\right)} \quad (3-11)$$

E o seu ganho definido como:

$$|H(f)| = \frac{1/k}{\sqrt{\left[1 - (f/f_n)^2\right]^2 + \left[2\zeta f/f_n\right]^2}} \quad (3-12)$$

conforme ilustrado na Figura 3-2.

O sistema de equações diferenciais no domínio do tempo (3-6) é reduzida a um sistema de equações algébricas no domínio da frequência: [SU, 2005]

$$[S_x(\omega)]_{n \times n} = [H(\omega)]_{n \times m} [S_p(\omega)]_{m \times m} [H(\omega)]_{m \times n}^T \quad (3-13)$$

sendo n o número de variáveis de resposta. $[H(\omega)]$ é a matriz de função transferência entre a excitação de entrada e a variável de resposta:

$$[H(\omega)] = \left(-[M]\omega^2 + i[C]\omega + [K]\right)^{-1} \quad (3-14)$$

desta forma, a variável de resposta espectral aleatória $[S_x(\omega)]$, como por exemplo, tensão, aceleração, deslocamento em termos de funções de densidade espectral, PSD, são obtidos resolvendo-se o sistema linear de equações algébricas (3-13).

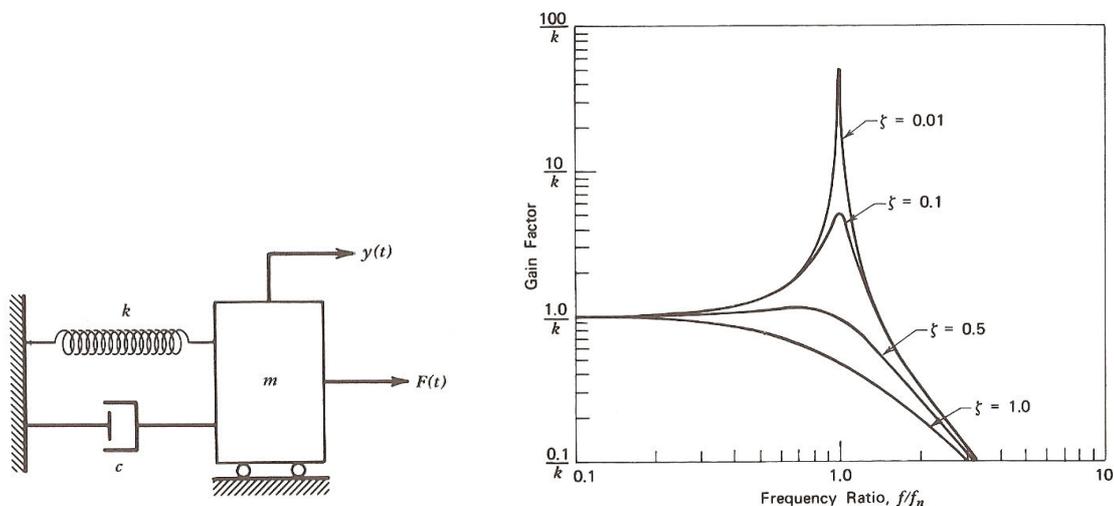


Figura 3-2 – Representação da curva função transferência ou $H(f)$ de um sistema dinâmico e sua dependência com o amortecimento ζ , [BENDAT e PIERSOL, 1980].

3.2 Sistemas de n Graus de Liberdade: nGL

Em um sistema físico contínuo, este não possui somente um modo de vibração a uma dada frequência, mas sim “ n ” modos de vibrar, e este responderá de modo particular para cada frequência modal. Supondo submeter o sistema à uma excitação de frequência variável, este responderá com amplitudes máximas em determinadas frequências. Essas máximas correspondem aos *modos de vibração* e as frequências com as *frequências de ressonância*.

Para estruturas contínuas e simples, como vigas engastadas, bi-engastadas, com massa concentrada ou não, estes modos de vibração podem ser matematicamente determinados. Para estruturas mais complexas, porém, o uso de métodos numéricos, como elementos finitos, pode ser aplicado.

Dados os modos de vibração e frequências de ressonância de um sistema conhecido, sua resposta para uma dada posição espacial ξ e tempo t é teoricamente dado por:

$$y(\xi, t) = \sum_i \phi_i(\xi) q_i(t) \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3-15)$$

Sendo $\phi_i(\xi)$ o modo de vibração do i -ésimo modo e $q_i(t)$ a coordenada generalizada descrevendo a resposta para o i -ésimo modo.

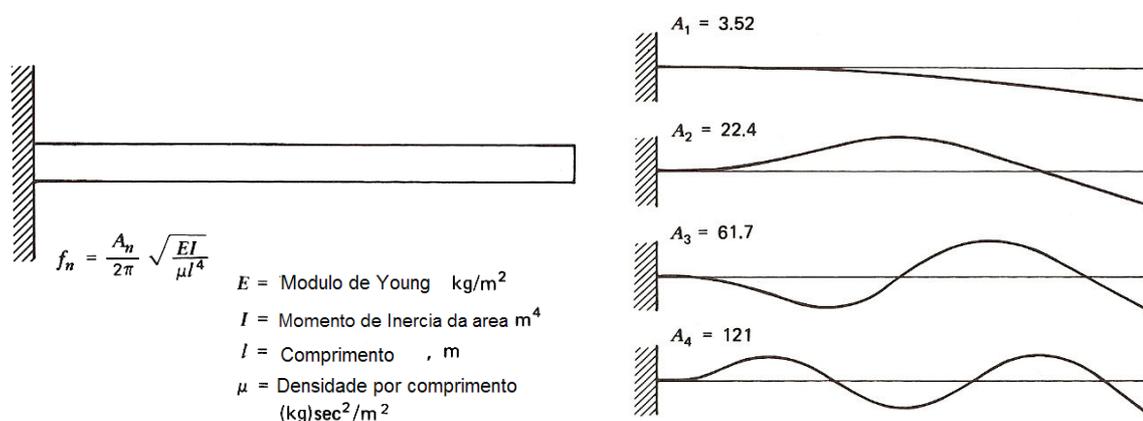


Figura 3-3 – Modos de Vibração normalizados e frequências naturais para uma viga engastada.

Assim, um sistema linear com n graus de liberdade terá n picos de ressonância, como por exemplo, o sistema da Figura 3-4 de 3 GDL e 3 picos de resposta em frequência.

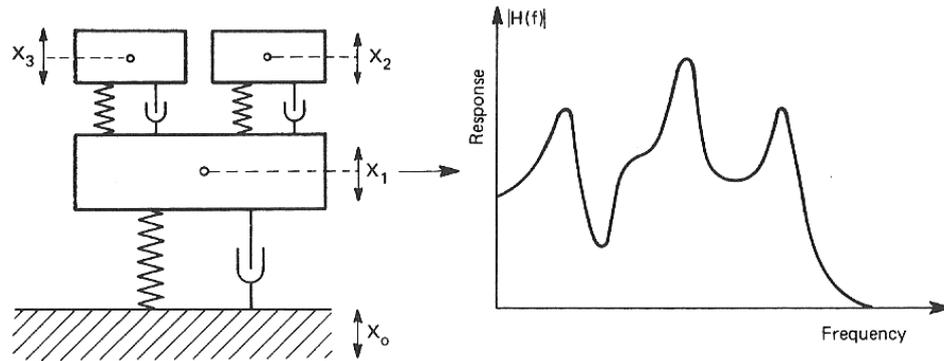


Figura 3-4 – Exemplo de um sistema de múltiplos graus de liberdade (3 GL) e sua resposta em frequência. Fonte: [BROCH, 1980].

3.2.1 Resposta no Tempo

Considerando o sistema de n graus de liberdade como uma composição de n sistemas de 1 grau de liberdade, a equação (3-6) pode ser reescrita segundo sua equação diferencial:

$$M_i \frac{d^2 q_i(t)}{dt^2} + C_i \frac{dq_i(t)}{dt} + K_i q_i(t) = F_i(t) \quad (3-16)$$

sendo

$$\begin{aligned} M_i &= \int_0^l \phi_i^2(\xi) m(\xi) d\xi && \text{massa generalizada} \\ C_i &= \int_0^l \phi_i^2(\xi) c(\xi) d\xi && \text{amortecimento generalizado} \\ K_i &= 4\pi^2 f_i^2 M_i && \text{rigidez generalizada} \\ F_i(t) &= \int_0^l \phi_i^2(\xi) p(\xi, t) d\xi && \text{força generalizada} \end{aligned} \quad (3-17)$$

Na (3-17), $m(\xi)$ é a densidade mássica, $c(\xi)$ é a densidade de amortecimento da estrutura na localização ξ , $p(\xi, t)$ a densidade de carregamento na localização ξ e tempo t , e $\phi_i(\xi)$ o modo de vibração do i -ésimo modo.

3.2.2 Resposta em Frequência

Nota-se que a forma da equação (3-16) assemelha-se àquela da equação (3-6), o que sugere que a resposta em frequência em qualquer localização ξ para um dado modo normalizado, deduz-se da mesma forma daquela para o sistema de 1GL.

Pode-se dizer que a função resposta em frequência de qualquer ponto ξ de uma estrutura com n graus de liberdade, é o somatório do conjunto de funções de resposta em frequência de n sistemas de 1GL com diferentes frequências de ressonância.

3.2.2.1 Resposta de um sistema contínuo. Caso especial: viga

Muitos autores já deduziram e desenvolveram a equação que rege a resposta harmônica de um sistema contínuo como uma viga. Utiliza-se a solução exata derivando-se a equação de viga de Euler-Bernoulli, ou de Timoshenko, ou também métodos de energia, como as equações de Lagrange, ou ainda métodos aproximados, como os de Rayleigh, Rayleigh-Ritz, Galerkin, método dos *modos prescritos (assumed modes)*, Holzer, entre outros. Para um detalhamento de alguns destes métodos, vide [(SHABANA, 1997), [MEIROVITCH, 1977] e [RAO, 1986].

Segundo este último, e considerando as forças externas $f(x,t)$, momentos $M(x,t)$, forças cortantes $V(x,t)$ atuantes sobre a viga, e a força de inércia atuante sobre a viga como

$\rho A(x)dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t)$ e considerando as equações para viga de Euler-Bernoulli, para uma vibração livre, isto é, $f(x,t) = 0$, a equação de movimento da viga torna-se:

$$c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x,t) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) = 0 \quad (3-18)$$

sendo:

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (3-19)$$

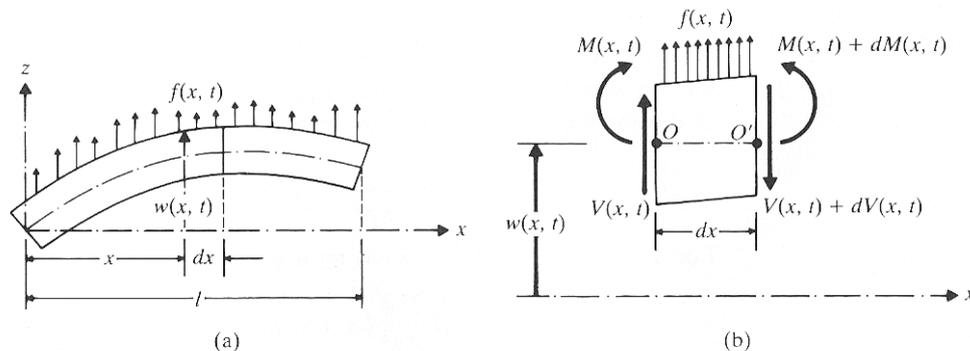


Figura 3-5 - Viga sobre flexão. Formulação de Euler-Bernoulli.

Como a equação (3-18) envolve uma derivada de segunda ordem em relação ao tempo e uma derivada de quarta ordem em relação a x , duas condições iniciais e quatro condições de contorno são necessárias para determinar uma solução única para $w(x,t)$. Normalmente, estas são definidas como deslocamentos ou velocidades nas extremidades.

Outros autores também desenvolveram um equacionamento para o problema de viga engastada e massa fixa no topo, sob solicitações harmônicas impostas à base [ESMAILZADEH, 1997], Figura 3-6. Uma referência para diversas frequências naturais e modos de vibração para uma grande variedade de vigas e estruturas pode ser encontrado em [BLEVINS, 1979].

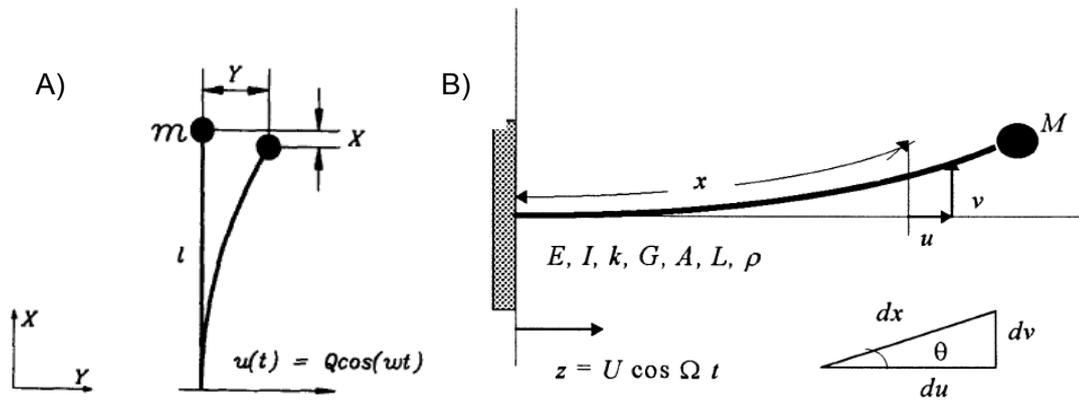


Figura 3-6 – Modelamento da resposta dinâmica de uma viga com massa na extremidade, dada uma solicitação horizontal a base. Fonte: B) [ESMAILZADEH, 1997].

3.2.2.2 Resposta de um sistema contínuo com massas pontuais. Caso especial: método de Dunkerley

Para os casos particulares onde se deseja determinar apenas a primeira frequência fundamental do sistema de múltiplos graus de liberdade sobre vibração livre, o método de Dunkerley pode ser utilizado. Consiste em uma aproximação que permite uma vasta aplicação e determinação da frequência natural através de uma composição de sistemas simples de 1 GL segundo a equação (3-20). Para maiores detalhes vide [BEARDS, 1996].

$$\frac{1}{\omega^2} \cong \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \dots + \frac{1}{\omega_n^2} \quad (3-20)$$

sendo ω a frequência natural do sistema e ω_n as frequências dos sub-sistemas. Uma aplicação da equação acima será vista na estimativa da primeira frequência natural do sistema em questão.

3.3 Resposta a Solicitações Aleatórias

Em geral, uma estrutura responderá da seguinte forma a uma solicitação aleatória do tipo PSD: [OSGOOD, 1982]:

$$G(f)_{resposta} = H^2(f) \cdot G(f)_{entrada} \quad (3-21)$$

$$G_{rms} = \sqrt{\int_{f_1}^{f_2} T^2(f) G(f)_{entrada} df} \quad (3-22)$$

Também a função resposta em frequência de um sistema de um simples grau de liberdade pode ser representada pela equação (3-11).

Supondo uma excitação espectral teórica de ruído branco como solicitação de entrada, $G_w(f) = C_k$, constante, tem-se: [ARIDURU, 2004].

$$G_m(f) = |H(f)|^2 G_w(f) \quad (3-23)$$

Assim,

$$G_m(f) = \frac{\frac{C_k}{k^2}}{\left[1 - \left(\frac{f}{f_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\left(\frac{f}{f_n}\right)\right]^2} \quad (3-24)$$

O valor de pico da $G_m(f)$ ocorre na frequência de ressonância, f_r e é dado por:

$$G_m(f_r) = \frac{C_k}{4k^2\zeta^2(1-\zeta^2)} \quad (3-25)$$

Se $\zeta \ll 1$, tem-se $f_r \sim f_n$

$$G_m(f_n) = \frac{C_k}{4k^2\zeta^2} \quad (3-26)$$

Se uma vibração forçada de forma senoidal for aplicada a uma estrutura linear, esta responderá com um deslocamento senoidal na mesma frequência da excitação. Da mesma forma, um aumento ou decréscimo desta excitação causará um aumento ou decréscimo proporcional em termos de deslocamento. Esta resposta pode ser definida como Função Transferência, [BISHOP et al., 1999].

É definida em termos práticos como a resposta por unidade de solicitação em função da frequência. Uma propriedade importante é que, para um sistema linear, é característica e invariante com a excitação ou frequência.

Desta forma, a resposta de um sistema pode ser obtida multiplicando-se a excitação pela função transferência visando obter a resposta do mesmo.

A função transferência pode ser obtida de diversas maneiras, sendo uma delas através de uma análise experimental, numérica através de MEF ou híbrida de MEF e experimental. Intuitivamente, pode-se pensar em aplicar uma série de senóides a um modelo numérico e achar a amplitude correspondente da resposta estrutural para cada frequência. Esta amplitude pode ser transformada em tensão.

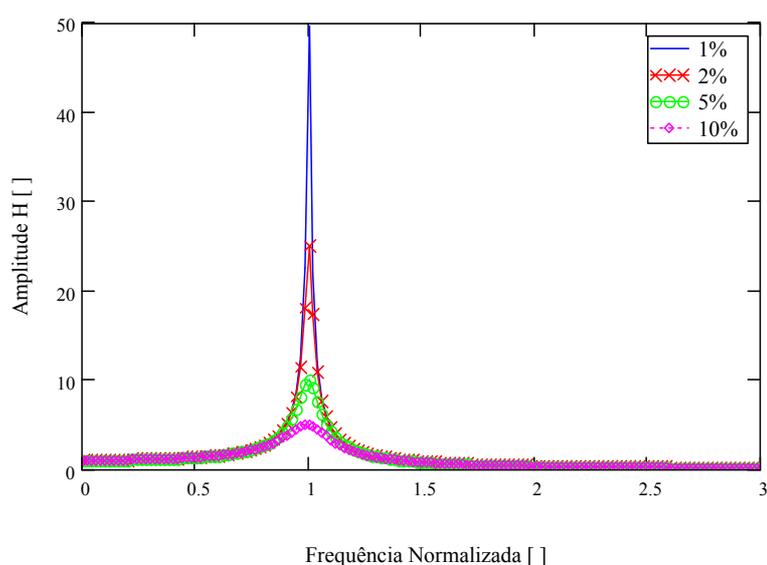
De modo a se obter a resposta em uma unidade coerente, é importante notar a unidade em que se procura a função transferência. As unidades da PSD de entrada, função transferência e PSD de resposta são dadas por:

$$\begin{array}{l} \text{PSD de entrada} \quad \times \quad \text{Função transferência} \quad = \quad \text{PSD de resposta} \\ \frac{\text{g}^2}{\text{Hz}} \quad \times \quad \left[\frac{\text{MPa}^2}{\text{g}^2} \right] \quad = \quad \frac{\text{MPa}^2}{\text{Hz}} \end{array}$$

3.4 Efeito do Amortecimento Estrutural na Resposta Dinâmica

Visando representar o efeito do amortecimento estrutural na resposta dinâmica de uma estrutura, calculou-se a resposta de um sistema com um grau de liberdade, variando-se o amortecimento de 1%, 2%, 5% e 10%.

A resposta em frequência para um sistema de um grau de liberdade é dada pela equação (3-11), e a resposta gráfica do sistema esta representado pela Figura 3-7.



| ζ | H(f)/k | |
|---------|-----------|--------------|
| | $f/f_n=1$ | $f/f_n=0,99$ |
| 0,01 | 50 | 35,62 |
| 0,02 | 25 | 22,56 |
| 0,05 | 10 | 9,90 |
| 0,10 | 5 | 5,02 |

Figura 3-7 – Resposta em frequência de um sistema com 1 grau de liberdade variando-se o amortecimento estrutural. Variação da relação f/f_n e resposta dinâmica do ganho $H(f)/k$.

3.5 Síntese do Capítulo

A principal característica dinâmica, para o estudo de fadiga por solicitações aleatórias, é a sua função de transferência. Ela é característica da estrutura, podendo desta forma, ser aplicada para a determinação da resposta para uma outra PSD solicitante, bastando multiplicar esta nova PSD pela função transferência.

A medição da resposta aleatória da estrutura, como tensão e aceleração e também para a determinação da função transferência, se dá com a aplicação de dispositivos e instrumentos de medição, como acelerômetros e extensômetros. Sendo assim, é necessário conhecer as características de cada dispositivo de medição e, também, de ferramentas de análise e processamento de sinais. Sinais estes, provenientes da resposta à solicitação aleatória caracterizando-se como a variável em estudo.

4. Análise Experimental: Instrumentação e Análise Digital de Sinais

Um estudo de esforços e tensões causadas por solicitações aleatórias deve prevê a análise experimental de tensões e acelerações na estrutura, através de aplicação de extensômetros (*strain gages* – SG), e acelerômetros instalados em determinados pontos na estrutura. Desta forma, é fundamental a observação de procedimentos e cuidados visando obter resultados concisos e que corroborem com a análise numérica e o estudo de fadiga por solicitações aleatórias, seja no domínio do tempo bem como na frequência.

4.1 Análise Digital de Sinais

Visando garantir uma medição precisa e representativa do sinal medido, seja deslocamento, tensão, aceleração ou qualquer outra variável aleatória de interesse, alguns cuidados devem ser observados na aquisição e determinação da FFT e PSD, dentre eles:

4.1.1 Frequência de Nyquist

A máxima frequência calculada pela PSD é governada por um limite teórico chamada de Frequência de Nyquist. É definida pela metade da frequência de aquisição do sinal aleatório. Assim, é necessário estabelecer uma taxa de aquisição do sinal de pelo menos duas vezes a máxima frequência de interesse na PSD, [BISHOP et al., 1999].

$$freq. aquisicao \geq 2 \times f_{max}.$$

4.1.2 Resolução da Frequência - Amostragem

A frequência de Nyquist e o número de pontos do sinal definem a resolução da frequência δf . Define o intervalo entre cada frequência calculada.

$$\delta f = f_{max} / \text{número de pontos}$$

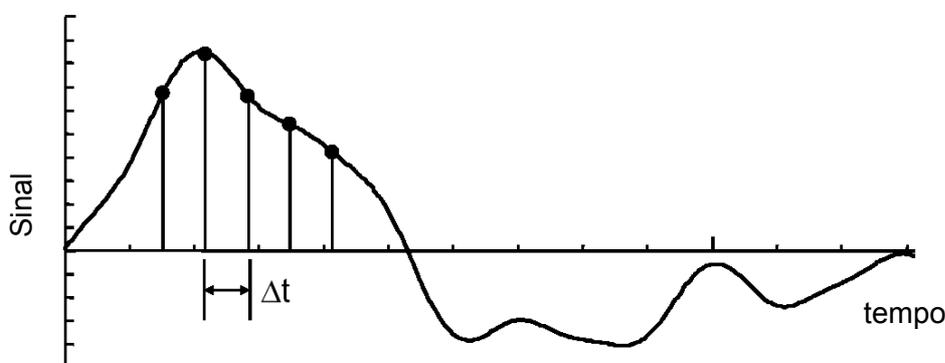


Figura 4-1 – Representação de aquisição de um sinal aleatório no tempo e frequência de amostragem (taxa de aquisição).

4.1.3 Aliasing

Se o sinal medido possuir frequências acima da frequência de Nyquist, a FFT pode se equivocar na frequência medida. De modo a evitar o erro, taxas de amostragem superiores a duas vezes a frequência de Nyquist predizem corretamente a frequência. Por outro lado, frequência menor que duas vezes predizem inadequadamente. Outra ferramenta importante é a aplicação de filtros *anti-aliasing* (*low pass*) abaixo da frequência de Nyquist.

Exemplificando, supondo um sinal no tempo segundo a equação (4-1):

$$x_t = \sin(2\pi\omega_t) \quad (4-1)$$

sendo $\omega t = 1/50$ rad/s, e período de 50s, gera uma resposta em função do tempo conforme a Figura 4-2.

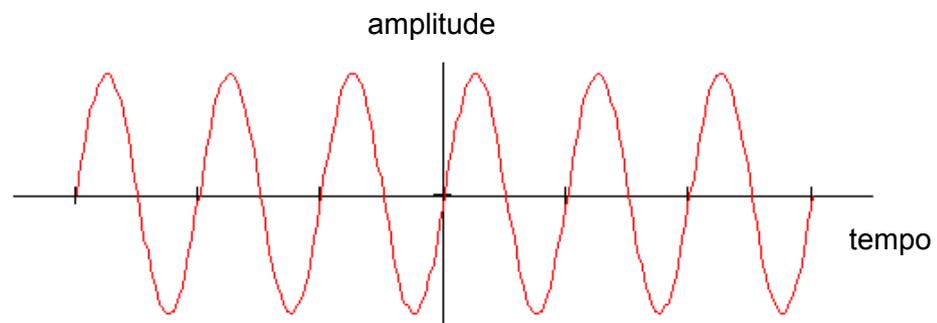


Figura 4-2 – Exemplo de sinal aleatória senoidal no tempo.

Fazendo-se uma amostragem do sinal com uma taxa de amostragem de $\Delta t = 2s$, a frequência estimada segundo a amostragem pode ser representada pela Figura 4-3a . Por outro lado, com uma taxa de $\Delta t = 40s$, a frequência extraída da amostragem é de 4 vezes a frequência original do sinal: Figura 4-3a.

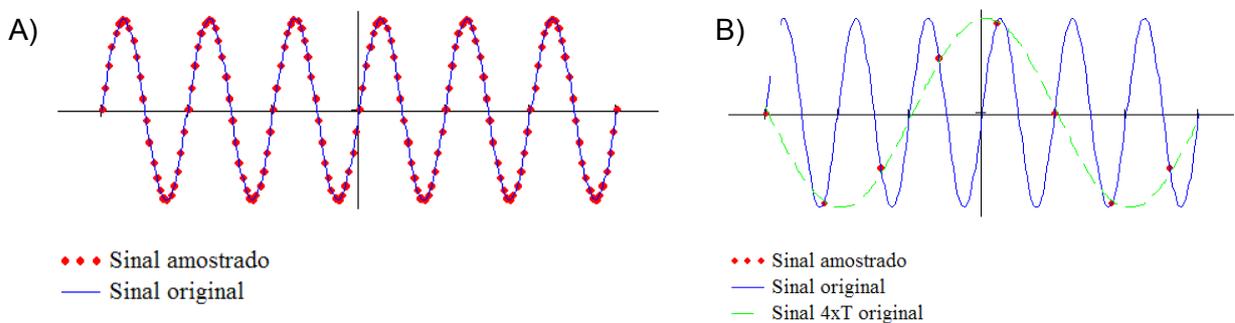


Figura 4-3 – A) Sinal amostrado com $\Delta t = 2s$. B) Sinal amostrado com $\Delta t = 40s$.

4.1.4 Armazenamento em Memória e Médias

Visando a eficiência computacional e a agilidade do processo de gravação dos dados, a utilização do armazenamento em memória (*Buffers*) torna-se fundamental na aquisição de sinais aleatórios. Com a aplicação desta prática, o sinal é subdividido em vários intervalos de tempos menores ao invés de uma única gravação de tempo integral. A FFT é calculada para cada subdivisão, calculando-se então a PSD. A PSD final é, então, calculada considerando-se a média de cada intervalo. Este procedimento resulta em uma PSD mais “limpa” e com menos ruído daquela calculada sem considerar as médias.

4.1.5 Janelamento (*Windowing*)

Um problema típico que ocorre no cálculo da FFT para um sinal discreto é a introdução de frequências causadas pelo corte impróprio do sinal no tempo. Por exemplo, se tomarmos um sinal de 6Hz por um intervalo de tempo, “buffer” de 1 segundo. Ao calcular a PSD, aparecerá somente um pico exatamente em 6 Hz. Por outro lado, tomando-se um sinal de 4,8 Hz por um intervalo de 1 segundo, a PSD aparecerá com o pico em 4,8 Hz, porém com outros menores lateralmente. Este fenômeno é conhecido como *spectral leakage*, ou vazamento espectral, Figura 4-4. Isto ocorre porque no cálculo da FFT, o sinal de 1 segundo é interpretado como sendo subsequente a outro exatamente igual introduzindo uma “falsa” frequência. Este problema é solucionado com a aplicação de janelas, que consiste em funções suaves que multiplicam o sinal. Como exemplo, o janelamento “*Hanning*”, que multiplica o sinal por zero nas extremidades e gradualmente atinge o máximo do sinal no centro, Figura 4-5. Há várias outras funções que podem ser observadas no Apêndice II – Análise digital de sinais.

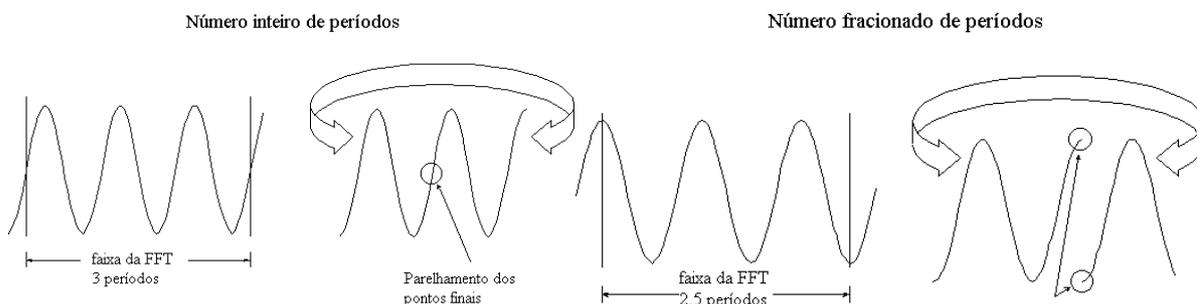


Figura 4-4 – Exemplo de “vazamento espectral” causado pela descontinuidade no número de ciclos utilizados na faixa de cálculo da FFT.

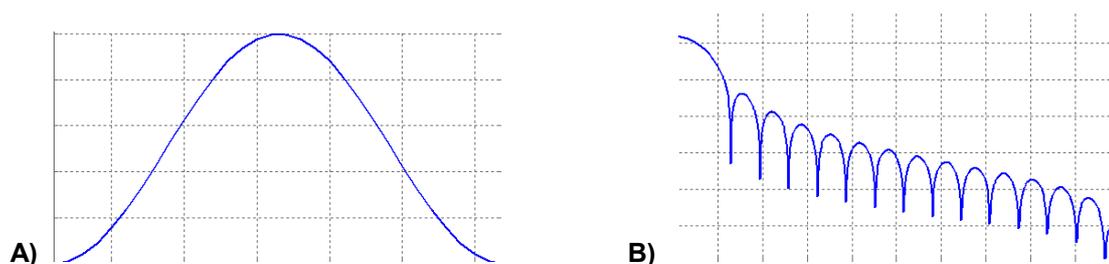


Figura 4-5 – Janelamento “hanning” no domínio do tempo (A) e no domínio da frequência (B).

4.1.6 Filtros

Um filtro digital é basicamente um operador analítico, o qual recebe um sinal digital como entrada, opera em uma determinada frequência ou faixa de frequência, resultando em um sinal na saída modificado matematicamente. A relação entre o sinal de entrada e o de saída pode ser descrito através de equações diferenciais que descrevem um filtro digital.

Na prática, a aplicação de filtros digitais possibilitam a eliminação de ruídos indesejáveis provenientes do sistema de medição, e do processo de aquisição de dados do sinal de vibração. Estes ruídos podem ser de alta frequência, acima daquelas frequências dominantes no sistema em teste, ou frequência baixas provenientes de excitação externa.

No exemplo da Figura 4-6, o sinal no domínio do tempo é mostrado na sua forma original a partir da aquisição experimental e o mesmo após a aplicação do filtro *Butterworth* passa baixa (*low-pass*) em 200 Hz. O ruído de alta frequência indesejado para esta aplicação é eliminado.

Como uma consequência, de certo modo indesejável, é que os filtros digitais intrinsecamente provocam um atraso na fase entre o sinal de entrada e o que é conferido na saída do filtro.

Uma análise e comparação de alguns filtros digitais aplicados e estudados no presente trabalho encontram-se no Apêndice VIII - Análise dos filtros utilizados e estimativas das PSD e na Figura 4-7.

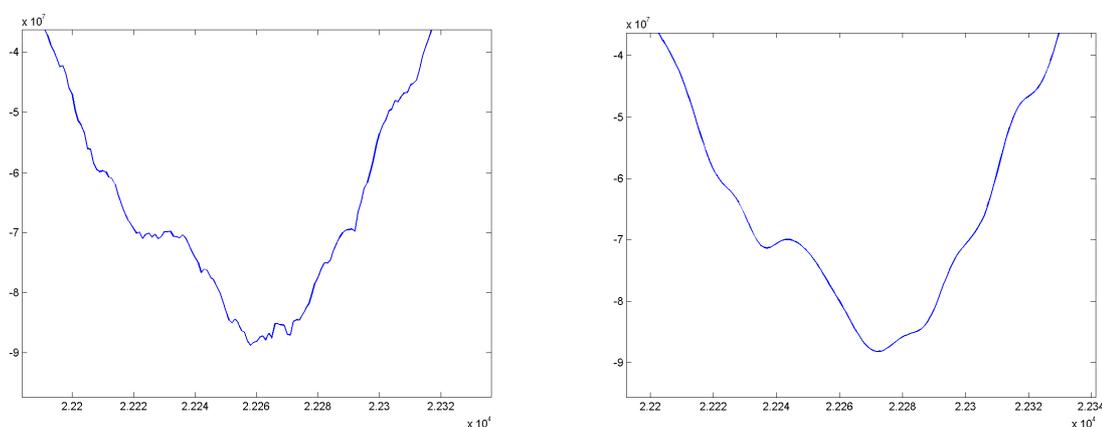


Figura 4-6 – Aplicação de filtro Butterworth PB em 200Hz e seu sinal antes da aplicação do filtro e após a filtragem. Ruído de alta frequência eliminado.

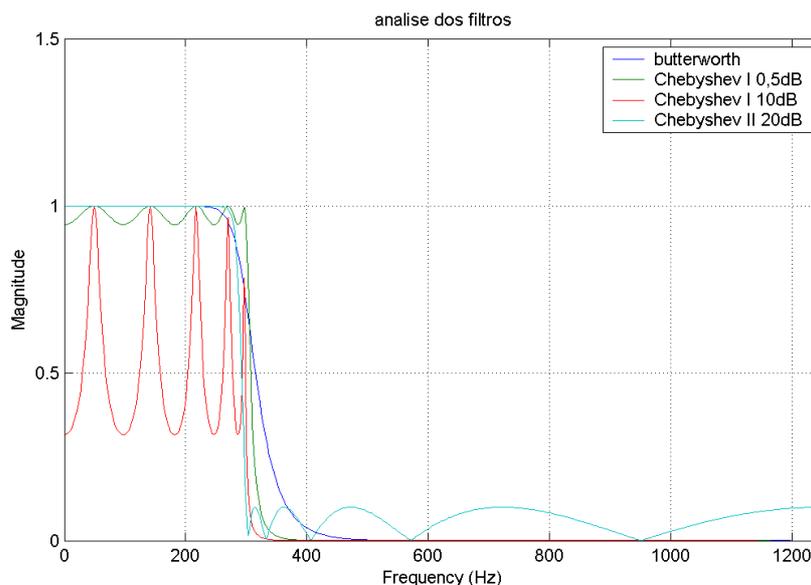


Figura 4-7 – Exemplo de alguns filtros Passa Baixa em 200Hz aplicados sobre o sinal no domínio do tempo para a estimativa da PSD ou FFT no domínio da frequência.

4.2 Instrumentação: Acelerometria e Extensometria

4.2.1 Acelerometria: Acelerômetro Piezelétrico

Um transdutor universalmente utilizado para medição de vibrações é o do tipo piezelétrico por apresentar, de modo geral, as melhores características entre os transdutores. Possui uma grande faixa de frequência de aplicação além de comportamentos dinâmicos com boa linearidade por toda a faixa de frequência. Além disso apresentam boa robustez e confiabilidade, de modo que suas características se apresentem estáveis por um longo período de tempo. Adicionalmente, o acelerômetro piezelétrico é autogerador de energia de modo a não requerer uma fonte elétrica extra. Não possui partes móveis que se desgastam, e seu sinal de saída pode ser convertido em dados de velocidade ou deslocamento. Dois modelos estão representados em Figura 4-8 e sua FRF na Figura 4-9.



Figura 4-8 – Dois modelos de acelerômetros do tipo ICP utilizados na análise experimental de aceleração. Fonte: [Brüel & Kjaer, 2006].

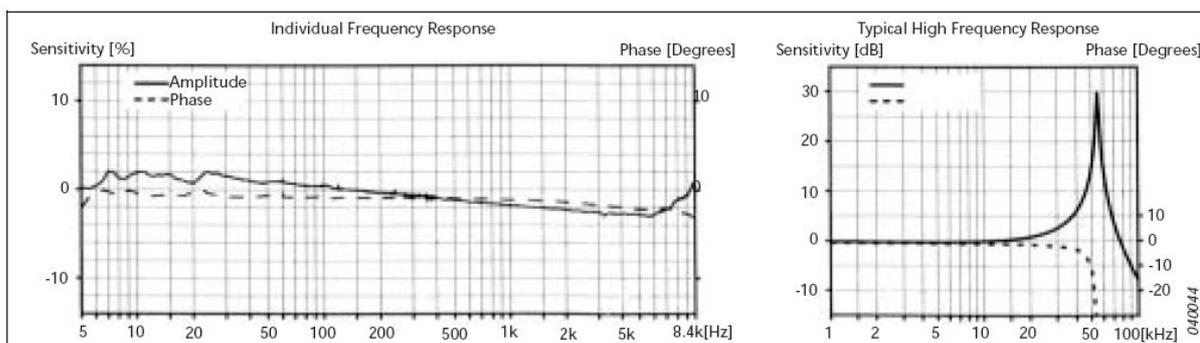


Figura 4-9 –Gráfico típico de resposta em frequência de um modelo do tipo piezelétrico. Fonte: [Brüel & Kjaer, 2006]

O coração de um acelerômetro piezelétrico, é um elemento de material piezelétrico, usualmente de cerâmica ferroelétrica artificialmente polarizada que apresenta o efeito piezelétrico: quando submetido a uma tensão, seja compressão ou cisalhamento, ele gera uma corrente elétrica através dos pólos, proporcional àquela tensão mecânica. Uma representação de um acelerômetro piezelétrico pode ser visto na Figura 4-10. A curva de resposta em frequência de um acelerômetro está representada na Figura 4-9.

Na aplicação de acelerômetros, o elemento piezelétrico é disposto de modo que, quando a massa vibra, ela aplica uma força ao elemento piezelétrico proporcional à aceleração devido à vibração do sistema, segundo a lei $Força = massa \times aceleração$.

Para frequências bem abaixo daquela de ressonância do conjunto mecanismo mais piezelétrico, a aceleração da massa corresponde exatamente àquela da base e o sinal de saída será então proporcional à aceleração da mesma. Uma aplicação de um acelerômetro PZT montado sobre uma base pode ser vista na Figura 4-11.

Duas configurações são comuns para o PZT

O do tipo compressão, onde a massa exerce uma força compressiva ao elemento piezelétrico;

O do tipo cisalhante, onde a massa exerce uma força cisalhante no elemento piezelétrico.

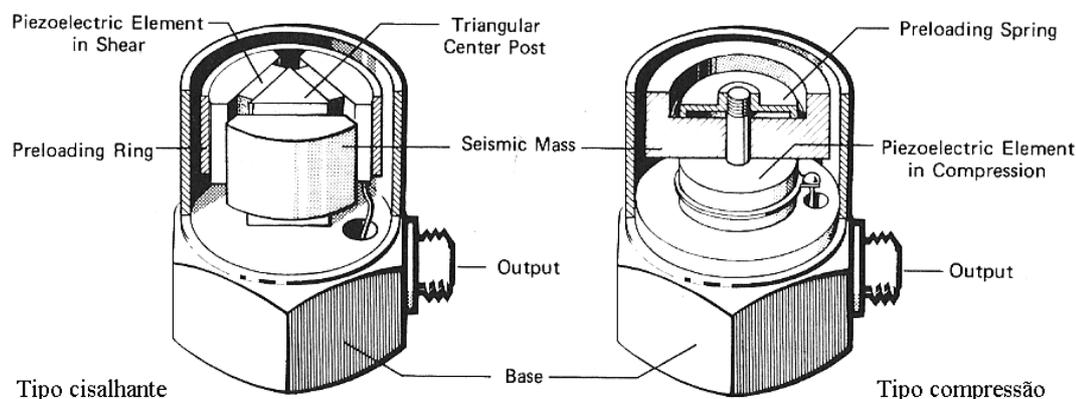


Figura 4-10 – Configurações mais comuns de acelerômetros: do tipo cisalhante e do tipo compressão.

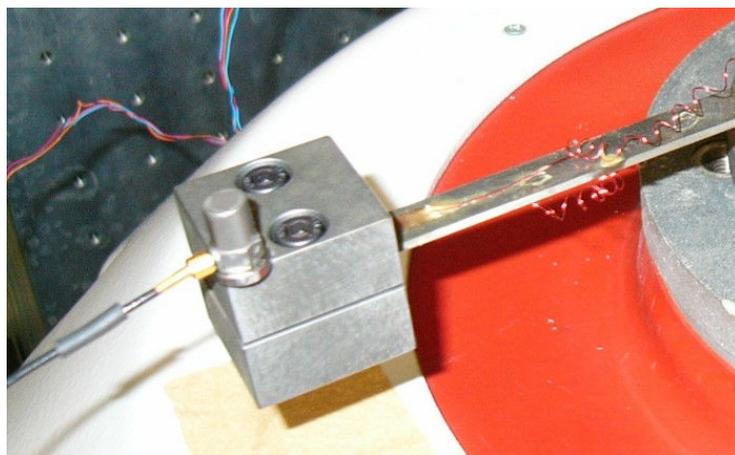


Figura 4-11 – Aplicação típica de um acelerômetro. Montagem sobre uma estrutura.

4.2.2 Extensometria

Uma das ferramentas mais utilizadas para a determinação experimental da deformação e indiretamente, da tensão presente em uma estrutura dada uma solicitação externa ou interna (temperatura), é o extensômetro de resistência elétrica, ou do termo em inglês, *strain gage* (SG) [RILLEY e Daly, 1991].

A determinação da deformação baseia-se na variação da resistividade do dispositivo elétrico, que é medida através da Ponte de Wheatstone.

Uma aplicação em sistemas de medição da deformação possui as seguintes características, [VISHAY, 2005].

1. Detectar pequenas mudanças na resistividade do circuito elétrico produzido pela deformação da superfície à qual o *strain gage* está aplicado;
2. Produzir uma tensão nula de saída quando não solicitado;
3. Possibilitar uma compensação de uma eventual deformação induzida pela mudança de temperatura no circuito elétrico;

Um modelo de um *strain gage* está representado na Figura 4-12.

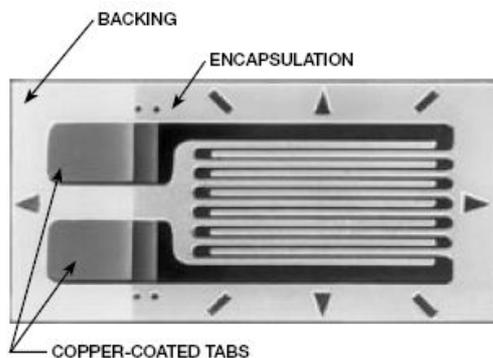


Figura 4-12 – Extensômetro do tipo resistência elétrica ou *Strain gage*.

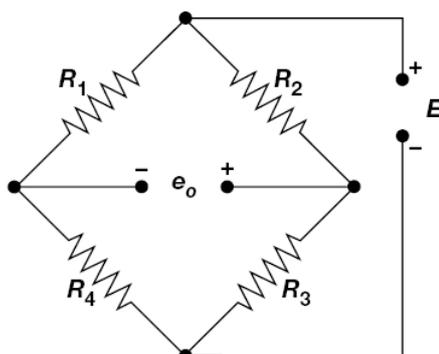


Figura 4-13 – Representação do circuito elétrico da ponte de Wheatstone.

O circuito da ponte de Wheatstone em sua forma mais simplificada, Figura 4-13, consiste em 4 elementos resistivos, ou braços da ponte, (R_1 , R_2 , R_3 e R_4) dispostos em uma conexão série-paralelo, alimentados com uma fonte de tensão (E). Os pontos adjacentes formados pelos pares de conexão dos resistores e pelos conectores da fonte são os pontos de entrada para o sinal da ponte; e aqueles formados pelos braços dos resistores e do sinal de excitação de medição (e_o) são a saída da ponte. Se o circuito da ponte for resistivamente simétrico sobre uma linha imaginária conectando ambos os pontos de saída, o sinal de saída (e_o) será nulo independente do nível de excitação e a ponte é dita “balanceada”. [VISHAY, 2005]. O sistema esquemático de medição da ponte está representado pela Figura 4-14.

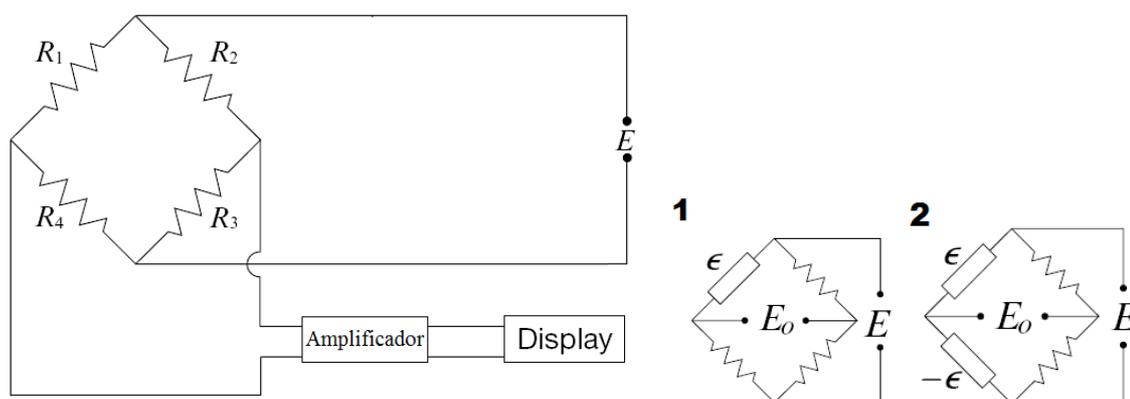


Figura 4-14 – Sistema esquemático de medição através da ponte de Wheatstone. Disposição com simples SG, $\frac{1}{4}$ de ponte desbalanceada (1) e com meia ponte, balanceada (2).

Erros devido à não linearidade da ponte de Wheatstone, fonte: [VISHAY, 2005]

$$\begin{array}{l} \frac{1}{4} \text{ de ponte} \\ \text{Figura 4-14 1)} \end{array} \quad \eta = \frac{F\varepsilon \times 10^{-6}}{2 + F\varepsilon \times 10^{-6}} \quad (4-2)$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2} \text{ de ponte} \\ \text{Figura 4-14 2)} \end{array} \quad \eta = 0 \quad (4-3)$$

4.2.2.1 Calibração do *Strain Gage*

No sistema de medição com a utilização de *Strain Gages* composto de circuito-elétrico (ponte de wheatstone), torna-se necessária a conversão do sinal elétrico gerado pelo alongamento do circuito elétrico do SG em um resultado de deformação. Este processo de conversão da deformação do SG pelo valor do sinal elétrico resultante chama-se calibração. Um SG é dito calibrado quando a leitura do sinal do SG pode ser diretamente relacionada à deformação que originou este sinal.

Há basicamente três maneiras de se fazer esta calibração: através da aplicação do fator de calibração fornecido pelo fabricante do SG, através da imposição de uma deflexão conhecida ao espécime onde o SG está instalado resultando em uma deformação conhecida, ou ainda através da calibração automática do sistema de medição pela chamada autocalibração “Shunt”.

Calibração *Shunt* é aquela onde uma deformação pré-determinada é imposta ao SG e a leitura é realizada ajustando-se o fator do SG, ou *gage factor*, até que o registro coincida com a deformação imposta. Um circuito elétrico da calibração *shunt* está mostrado na Figura 4-15.

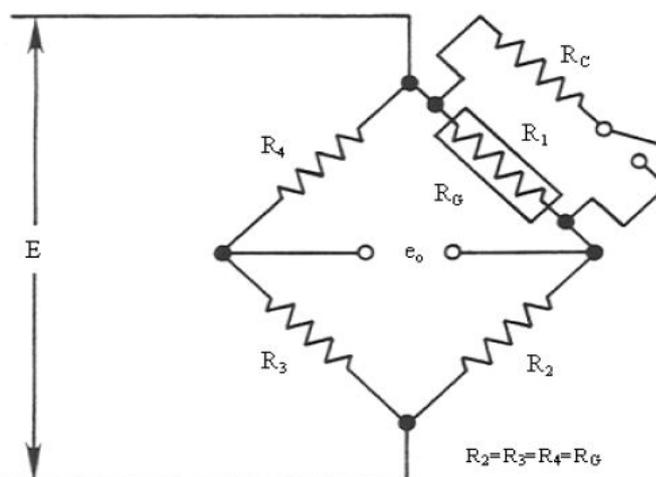


Figura 4-15 – Calibração (Shunt) de um *Strain gage* disposto de maneira simples (1 quarto de ponte). Fonte [ARIDURU,2004].

O sistema de medição da deformação, no caso o software de aquisição do sinal de deformação, é calibrado através da conexão de uma resistência R_C de resistividade conhecida, no braço ativo da ponte de wheatstone, resultando em uma variação da resistividade neste braço de ΔR_G . É assumido que $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$, $R_G = R_1$ e $\Delta R_G = \Delta R_1$ (1 quarto de ponte). Assim, a ponte está equilibrada e o resistor de calibração R_C é chaveado entre R_C . [ARIDURU, 2004]

A resistividade equivalente do circuito chaveado através deste braço do circuito é

$$R_e = \frac{R_1 R_C}{R_1 + R_C} \quad (4-4)$$

E a variação da resistência do braço é $\Delta R_1 = R_e - R_1$ e aplicando-se a equação (4-4):

$$\frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{-R_1}{R_1 + R_c} \quad (4-5)$$

A variação unitária da resistividade no SG está relacionada à deformação através da definição do fator *gage factor*:

$$\frac{\Delta R}{R_G} = F_G \varepsilon \quad (4-6)$$

como $R_G = R_1$

$$\varepsilon_s = \frac{-R_G}{F_G (R_G + R_c)} \quad (4-7)$$

sendo ε_s a deformação calibrada que produz o mesmo sinal de tensão de saída da ponte do que o resistor calibrado R_c .

No referido experimento, realizou-se a calibração através da leitura do sinal do strain-gage a partir de uma solicitação inicial. Como o sistema é composto por uma viga engastada em uma extremidade e uma massa fixada à outra, esta última exerce uma força à extremidade devido a própria aceleração gravitacional. O sistema foi fixado pela base, e a massa livre na extremidade exercendo a força à viga gerou um sinal de deformação ao *strain gage* localizado na base desta. Este sinal de deformação, e conseqüentemente tensão, medido experimentalmente é então comparado com valores analíticos para a tensão e também com resultados numéricos como o da Figura 4-16.

Analiticamente, através da aplicação da equação simplificada para vigas, chega-se a:

$$\sigma_x = \frac{Mc}{I} = \frac{Plc12}{bh^3} \quad (4-8)$$

sendo:

P = carregamento aplicado à extremidade da viga = Mg

l = distância entre a aplicação da carga P à base da viga

h = altura da viga

c = distância da linha média à extremidade seccional da viga ($h/2$)

b = largura da viga

chegando-se a:

$$\sigma_x = \frac{Mc}{I} = \frac{2,12 \cdot 165 \cdot 1 \cdot 12}{10 \cdot 2^3} = 52,47 \text{ MPa} \quad (4-9)$$

o que corresponde aos valores numéricos e experimentais obtidos através de simulação por FEM Figura 4-16 e da leitura do SG.

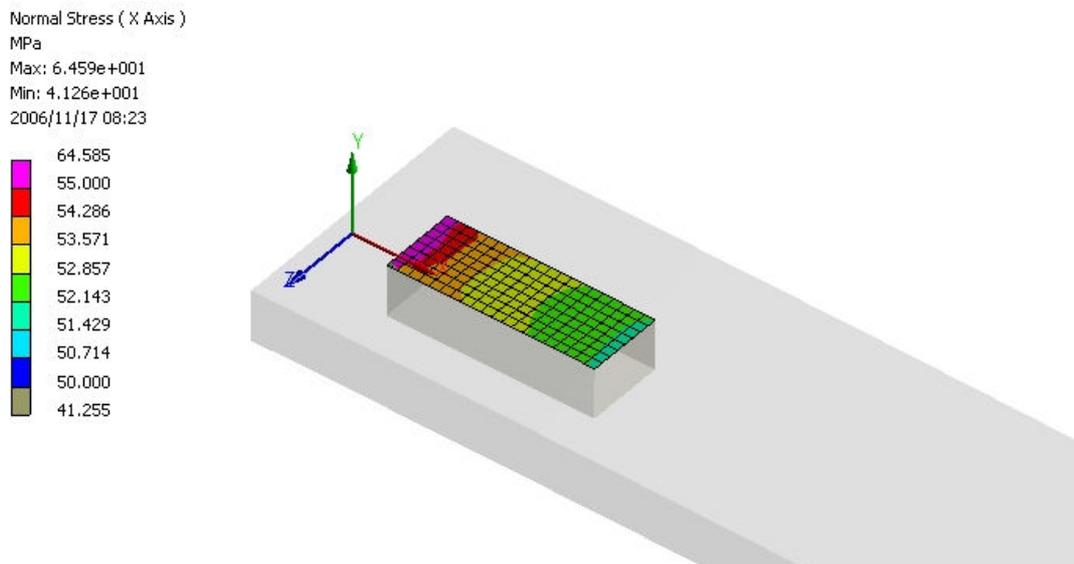


Figura 4-16 – Resultado de tensão na região do SG para o sistema submetido à aceleração gravitacional. σ_{\min} na região do SG =50MPa, σ_{\max} na região do SG =64MPa.

4.3 Síntese do Capítulo

A aplicação de dispositivos de medição, como extensômetros e acelerômetros, permite a obtenção experimental dos esforços de tensão e aceleração presentes na estrutura, quando esta é sujeita a uma solicitação aleatória. Os valores de tensão obtidos a partir desta instrumentação, é utilizado então para a determinação da resposta espectral em frequência, PSD, da estrutura.

Esta PSD obtida experimentalmente, bem como o valor instantâneo da variável aleatória de tensão, será utilizada para a aplicação de critérios e modelos de estimativa do dano em fadiga causado à estrutura, e posterior cálculo de vida em fadiga. Existem vários modelos para o cálculo de vida em fadiga, sendo que serão estudados no próximo capítulo, e alguns modelos utilizados para a estimativa de vida de uma estrutura submetida a uma vibração aleatória espectral.

5. Modos de Falha

Ao iniciar o estudo da performance estrutural de um componente ou sistema mecânico, é preciso primeiramente estabelecer critérios e definições para embasar uma análise de funcionalidade ou falha de um equipamento ou sistema. Uma definição fundamental é aquela que descreve e define a falha de um componente sujeito a uma dada solicitação. Segundo [da ROSA,2002], a falha pode ser definida como:

Definição Funcional de Falha

A falha é a situação em que o sistema deixa de cumprir seu requisito funcional, ou seja, deixa de atender e desempenhar a função para a qual foi projetado. Pode ser colocado como a perda da habilidade de executar a função requerida. Esta situação engloba uma falha por colapso total do sistema, em que deixa de operar por completo, ou condições em que o sistema continua operando, mas fora de uma faixa tolerada, desviando-se assim do ponto desejado de operação e comprometendo sua funcionalidade. Generalizando, o desempenho de um sistema pode ser colocado como a resposta que este fornece a uma dada entrada, ou excitação, como ilustra a Figura 5-1.

Definição Física da Falha

A falha funcional ocorre porque a capacidade do sistema de suportar uma dada demanda foi excedida, o que em problemas estruturais pode ser colocado na forma de que a resistência do sistema, R , não é suficiente para suportar a solicitação, S . Assim, a falha é definida pelo evento $S > R$. A solicitação está diretamente ligada à entrada u , muitas vezes $S = u$. Já a resistência é uma característica intrínseca do sistema, dependendo de como este é construído, dimensões, materiais, etc.

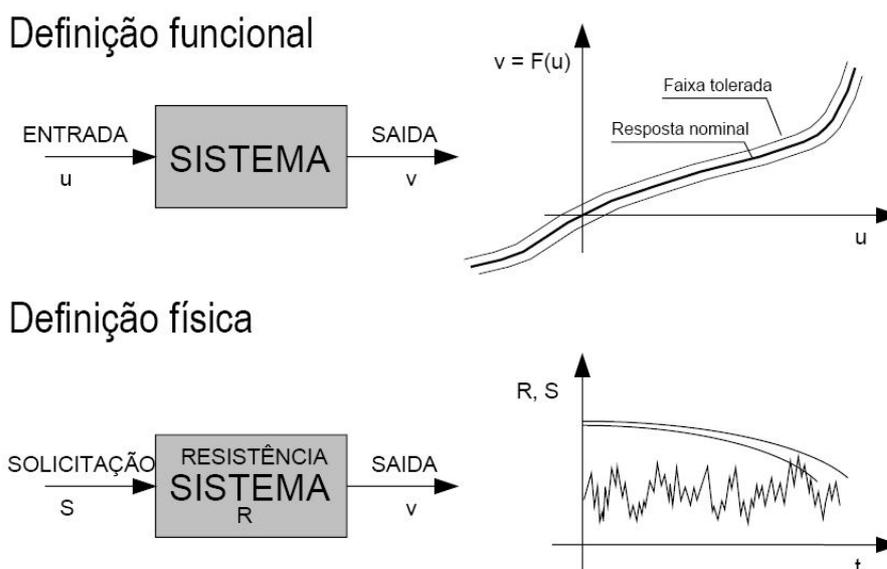


Figura 5-1 – Representação esquemática de um sistema e a definição funcional e física de falha. Fonte, [da ROSA, 2002]

As formas nas quais o componente estrutural pode falhar dependem do tipo de carregamento, tipo do material, condições ambientais, tempo de vida, cuidados com manutenção, etc. Uma distinção bem marcante pode ser feita, considerando os modos que não são influenciados pela idade do componente, ou tempo de aplicação do carregamento e os modos que dependem do tempo de vida ou de carregamento. [da ROSA, 2002]

Modos de falha Independentes do tempo

Modos de falha ditos como independentes do tempo são aqueles que independem do tempo de vida ou uso do componente. São tratados como determinísticos e ocorrem quando a estrutura é submetida a uma sobrecarga da solicitação, e esta supera o limite de resistência do material.

Podem ocorrer por: Fratura, escoamento, plastificação generalizada, fragilização por hidrogênio, flambagem e deformação elástica excessiva.

Modos de falha dependentes do tempo

Modos de falha ditos como dependentes do tempo são aqueles onde o tempo de uso e vida do componente influencia na resposta e resistência da estrutura. É caracterizado por envelhecimento ou desgaste do material onde há uma degradação das propriedades originais do mesmo. Uma falha dependente do tempo ocorre com níveis de solicitações os quais não causariam a falha da estrutura caso o tempo não fosse degradante.

Os modos podem ser: fadiga determinística, fadiga probabilística, deformação plástica progressiva, corrosão, corrosão sob tensão, fluência, desgaste e *fretting*.

O presente trabalho trata do modo de falha por fadiga probabilística.

5.1 Resistência à Fadiga Estrutural

Segundo [Madayag, 1968] Fadiga pode ser definida como uma falha progressiva em um componente sob solicitações repetitivas, cíclicas ou oscilantes. Teoricamente, desconsiderando-se outros modos de falha como fluência ou corrosão, uma estrutura sujeita a um estado de tensão estático e permanente abaixo do limite de resistência do material, resistirá indefinidamente. Por outro lado, se a estrutura está sujeita a uma solicitação alternada repetitiva, cíclica ou oscilante, esta pode vir a falhar mesmo em um estado de tensões inferiores àquele requerido para uma falha estática.

5.1.1 Introdução

O fenômeno de fadiga é caracterizado pela mandatoriedade de três aspectos: tensões cíclicas, tensões trativas e deformações plásticas. Se algum deste aspecto for eliminado, a fadiga não ocorrerá.

Mesmo em componentes estruturais formados por materiais isentos de defeitos, quando submetidos a esforços repetitivos e apresentarem pontos com elevado nível de tensão, nestes desenvolver-se-á o processo de nucleação de trincas de fadiga. O processo de nucleação se desenvolve a partir de uma micro deformação plástica localizada mesmo que as tensões nominais estejam dentro do limite elástico do material. Isto ocorre devido às descontinuidades geométricas, metalúrgicas, micro trincas, etc. [MADYAG, 1969].

Em muitos casos a trinca, que leva à falha, não passa pelo período de nucleação, pois a peça possui trincas previamente existentes, na forma de defeitos oriundos do processo de fabricação, ou mesmo pelo uso do equipamento. Estes defeitos podem ser, por exemplo, provenientes do processo de fabricação, como soldagem, fundição, forjamento, retífica, ou devido a um tratamento térmico inadequado, muito severo, ou ainda devido a um ataque do meio ambiente agressivo, que leva a uma corrosão na superfície do material. [da ROSA, 2002]

5.1.2 Histórico de Fadiga

Em uma escala de tempo, podem-se citar cronologicamente os fatos relevantes quanto à fadiga conforme a Tabela 2 abaixo

Tabela 2 – Cronologia dos aspectos e conceitos relacionados à fadiga.

| Data | Autor | Conceito |
|------|------------------|---|
| 1829 | Albert | Solicitações repetitivas |
| 1837 | Wilhelm Albert | Primeiro artigo de fadiga |
| 1839 | Poncelet | Termo “fadiga” |
| 1843 | Rankine | Concentração de Tensão |
| 1849 | Hodgkinson | Projeto contra a fadiga |
| 1860 | Wöhler | Investigação sistemática em fadiga |
| 1868 | Bauschinger | Efeito no limite elástico cíclico |
| 1870 | Wöhler | Limite de resistência à fadiga |
| 1890 | Goodman | Efeito das tensões médias |
| 1903 | Ewing & Humfrey | Mecanismos de fadiga microscópica |
| 1910 | Basquin | Curva log-log para a relação σ -N |
| 1920 | Griffith | Mecânica da fratura |
| 1924 | Palmgren | Dano acumulado |
| 1945 | Miner | Dano acumulado |
| 1954 | Coffin & Manson | Deformação plástica |
| 1961 | Paris | Crescimento de trinca |
| 1963 | Peterson | Método de deformação-vida |
| 1967 | Matsuishi e Endo | Contagem de ciclos |
| 1970 | Elber | Mecânica de fechamento de trinca |
| 1980 | Wirsching | Modelo de estimativa de viga no domínio da frequência |
| 1985 | Dirlik | “ |
| 1985 | Chaudhury e | “ |

| | | |
|------|-----------------------|---|
| | Dover | |
| 1986 | Tunna | " |
| 1988 | Kam e Dover | " |
| 1988 | Hancock | " |
| 1999 | Bishop | " |
| 2000 | Steinberg | " |
| 2004 | Petrucci & Zuccarello | " |

Mecanismo de nucleação e propagação de trincas:

O fenômeno de nucleação e propagação de trinca pode ser representado pela Figura 5-2 através da formação de bandas de cisalhamento dos planos cristalinos causadas pela sollicitação cíclica. Na nucleação, a formação da trinca inicial se dá por deslocamento e cisalhamento dos planos cristalinos e esta se propaga no estágio I de forma intergranular. No estágio II, a trinca nucleada se propaga de forma intragranular até a falha completa da estrutura.

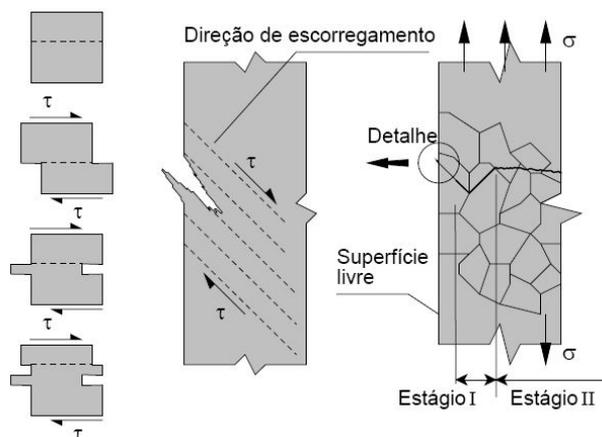


Figura 5-2 – Representação da formação das bandas de deslizamento pela sollicitação cíclica. Estágios de propagação de uma trinca de fadiga. Fonte [da ROSA, 2002]

A Figura 5-3 representa a parcela de vida quanto a nucleação e propagação da trinca por fadiga para regiões de baixo ciclo e de alto ciclo. Nota-se que para fadiga de alto ciclo (baixa tensão), a nucleação é responsável por mais de 90% da vida de fadiga, sendo que apenas os ciclos finais são responsáveis pela propagação.

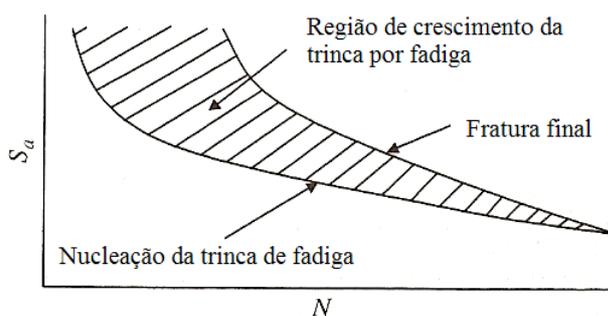


Figura 5-3 - Representação do processo envolvendo a fadiga: nucleação, crescimento da trinca e ruptura final. Fonte [STEPHENS, 2001]

August Wöhler foi o primeiro a estudar a fadiga e propor uma formulação empírica. Entre 1852 e 1870, Wöhler estudou a falha progressiva de eixos de locomotivas. Ele construiu um equipamento de teste conforme a Figura 5-4 e submeteu eixos sob flexão rotativa em vários níveis de sollicitação visando levantar a curva de tensão-vida (σ -N).

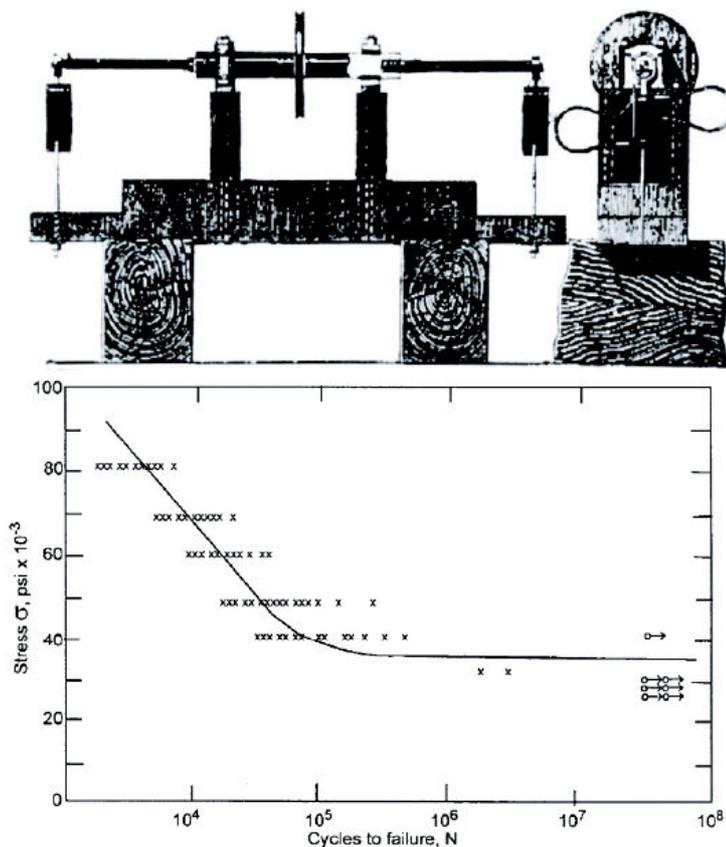


Figura 5-4 – Máquina de ensaio de fadiga por flexão rotativa de Wöhler.

5.1.3 Métodos de Análise e Critérios de Projeto em Fadiga

Modelo para estimativa de vida de fadiga:

- 1 – Modelo tensão-vida nominal (σ -N) – 1850-1870
- 2 – Modelo deformação-vida local (ϵ -N) – 1960
- 3 – Modelo por crescimento de trinca, mecânica da fratura $\frac{da}{dN}$ – 1960
- 4 – Modelos de duplo estágio: combinação de 2 e 3.

Critério de projeto a fadiga:

- 1 – Projeto para vida Infinita, (*Infinite-Life*);
- 2 – Projeto para Vida Segura, (*Safe-Life*);
- 3 – Projeto para Falha Segura, (*Fail-Safe*);
- 4 – Projeto para tolerância ao dano; (*Damage-Tolerant*);

Na Figura 5-5, está representada a nomenclatura e representação gráfica das tensões cíclicas, médias, etc., utilizados no cálculo de fadiga.

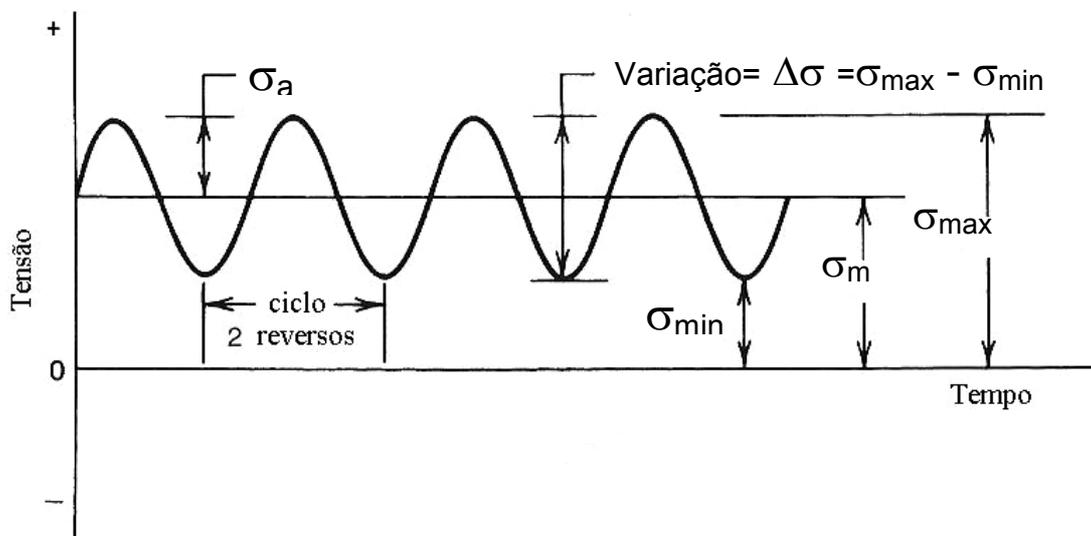


Figura 5-5 - Nomenclatura das tensões presentes em solicitações alternantes.

Sendo que dela se extrai:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{m\acute{a}x.} - \sigma_{m\acute{i}n.}}{2} \quad (5-1)$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{m\acute{a}x.} + \sigma_{m\acute{i}n.}}{2} \quad (5-2)$$

Vida de fadiga para tensão uniaxial reversa (*Fully reversed uniaxial stress*)

Com base em testes com variações de razão de tensão, $\frac{\sigma_a}{\sigma_m}$ tem se mostrado que, aproximadamente, pode-se estimar a vida de fadiga segundo [STEPHENS, 2001]:

$$\sigma_f \approx 0,5 S_u \quad \text{para } \sigma_u \leq 1400 \text{ MPa}$$

$$\sigma_f \approx 700 \text{ MPa} \quad \text{para } \sigma_u > 1400 \text{ MPa}$$

5.1.4 Efeito das Tensões Médias

Os experimentos normalmente reproduzidos em laboratório, dos quais se obtém as curvas de fadiga, são em sua maioria, de comportamento cíclico senoidal apresentando duas componentes: a tensão média σ_m e a tensão alternante σ_a como descrito na Figura 5-5. Porém, observa-se que as curvas de resistência à fadiga comportam-se diferentemente dependendo dos níveis de tensões médias as quais o material estava sujeito para o levantamento das mesmas. [MADAYAG, 1969]. Desta forma, visando a utilização destas curvas já pesquisadas e estudas com àquela solicitação real na estrutura na prática, uma correlação torna-se necessária.

Assim, torna-se necessária uma correlação que relacione efeitos combinados de tensão média e alternante realmente presentes na estrutura, com àquela combinação à qual o ensaio de fadiga foi executado.

Vários autores propuseram um equacionamento para tal correção, como [SINES, 1959], além do critério de Goodman e Gerber, entre outros, equações (5-3) a (5-7).

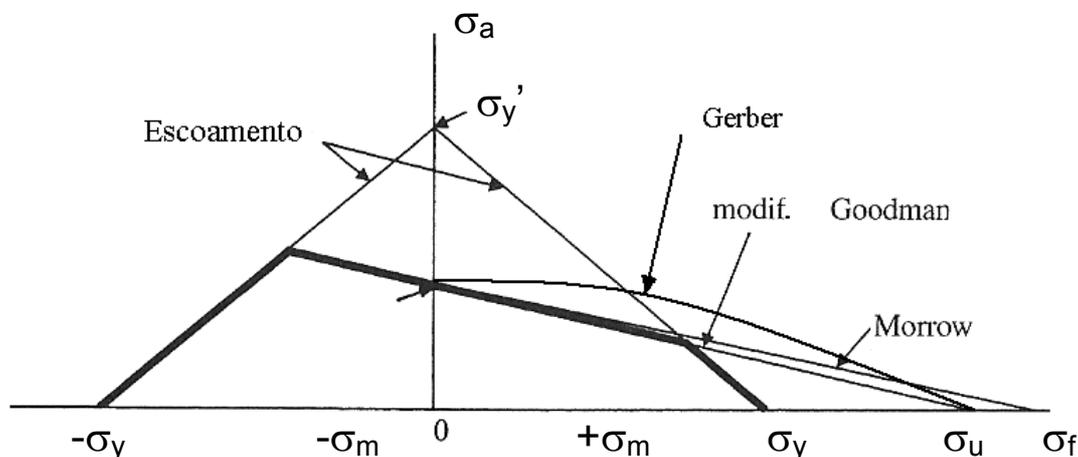


Figura 5-6 – Critério de correção das tensões médias. Comparação entre as relações

| | | |
|--------------------|---|-------|
| Goodman Modificado | $\frac{\sigma_a}{\sigma_f} + \frac{\sigma_m}{\sigma_u} = 1$ | (5-3) |
|--------------------|---|-------|

| | | |
|--------|--|-------|
| Gerber | $\frac{\sigma_a}{\sigma_f} + \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_u} \right)^2 = 1$ | (5-4) |
|--------|--|-------|

| | | |
|--------|--|-------|
| Morrow | $\frac{\sigma_a}{\sigma_f} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{f'}} = 1$ | (5-5) |
|--------|--|-------|

| | | |
|---------------------------------|--|-------|
| Critério de escoamento uniaxial | $\frac{\sigma_a}{\sigma_{y'}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_y} = 1$ | (5-6) |
|---------------------------------|--|-------|

| | | |
|------|---|-------|
| Sine | $\frac{\sigma_a}{\sigma_f} + K \frac{\sigma_m}{\sigma_f} = 1$ | (5-7) |
|------|---|-------|

5.1.5 Regime de Fadiga – Baixo Ciclos a Giga Ciclos. Curvas ϵ -N e σ -N

Uma curva de fadiga é representada normalmente segunda a Figura 5-10 compondo-se basicamente de três regiões distintas: fadiga de baixo-ciclo (alta tensão), também chamada de regime de K-N (Quilociclo), o regime de alto-ciclo (baixa tensão), ou de G-N (Gigaciclos) e entre estas duas fronteiras, encontra-se a fadiga de médio ciclos, doravante denominada de M-N (Megaciclos).

Em termos absolutos, esta divisão arbitrária distingue-se pelo número de ciclos:

$$K-N = 0 < n < 10^4$$

$$M-N = 10^4 < n < 10^8$$

$$G-N = n > 10^8$$

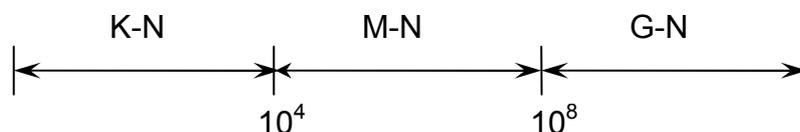


Figura 5-7 – Representação na escala de vida de fadiga para ciclos de K-N, M-N e G-N.

Esta distinção torna-se fundamental em função do critério de análise e do estado de tensão elástica ou plástica presente na estrutura, ou ainda se esta apresenta regiões de concentração de tensão com micro deformações plásticas localizadas (entalhe).

Até meados dos anos 40, o estudo de fadiga de baixo-ciclo era negligenciado pois as falhas ocorridas eram em sua maioria de alto-ciclo. Porém, da observação de falhas em vasos de pressão, componentes acionadores de aeronaves, entre outros que apresentavam falhas por fadiga em regimes de ciclagem baixas, é que o estudo da fadiga de baixo ciclo tornou-se fundamental.

Comparando-se o comportamento à fadiga de dois corpos de prova, sem entalhe (*Unnotched*) e com entalhe (*Notched*), segundo a Figura 5-8, observa-se uma diferença no comportamento inicial da curva para regimes de baixo ciclo, e que se relaciona a curva tensão-deformação do material.

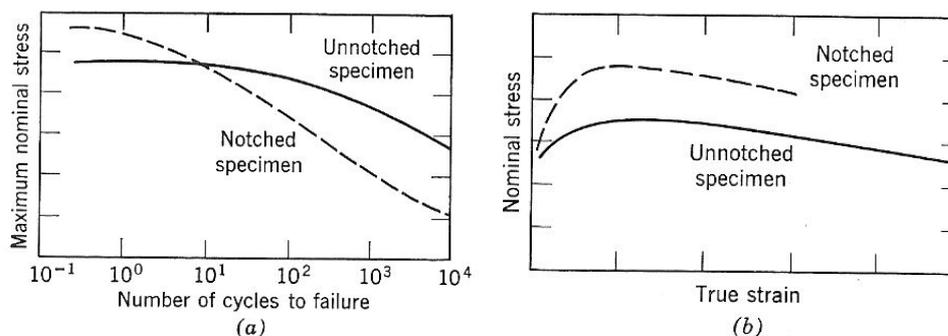


Figura 5-8 – (a) Curva σ -N típica para tensão constante e (b) curva tensão-deformação típica [MADAYAG, 1969]

Quando o número de ciclos é baixo, o limite de fadiga do material aproxima-se do limite estático de ruptura, desta forma, quando o limite de resistência estática do componente entalhado é maior do que o do estado plano de tensão, o limite de fadiga também é maior. Por outro lado, quando o número de ciclos aumenta, a resistência à fadiga com entalhe decresce abaixo daquela sem entalhe.

Comparando-se este comportamento com aquela da Figura 5-8b, sendo que o comportamento do corpo com entalhe mostra uma deformação plástica reduzida em teste

estático e uma vida mais curta em teste de fadiga, conclui-se que a deformação plástica relaciona-se à resistência à fadiga. Desta forma, a deformação plástica é mais coerente como predição de vida do que a tensão nominal. [MADAYAG, 1969]

Assim, para regimes de baixa vida, ou baixos ciclos, uma abordagem diferente daquela para regimes de altos ciclos torna-se conveniente, assim como sugere a equação de COFFIN:

$$\Delta \varepsilon_p \sqrt{N} = C \quad (5-8)$$

sendo C uma constante relacionada à redução da área (estricção) do ensaio de tensão uniaxial e ε_p a deformação plástica.

Em regimes de baixos ciclos, a vida, e portanto o dano, é dominada pelo crescimento de trinca, como pode ser observado na Figura 5-3. Assim, a mecânica da fratura deve ser utilizada. Outros autores que estudaram fadiga de baixo ciclo e determinaram critérios de análise de deformação-vida são Morrow, Manson, Gilman, Grosskeutz, e Smith, Watson e Topper que desenvolveram o parâmetro conhecido por SWT.

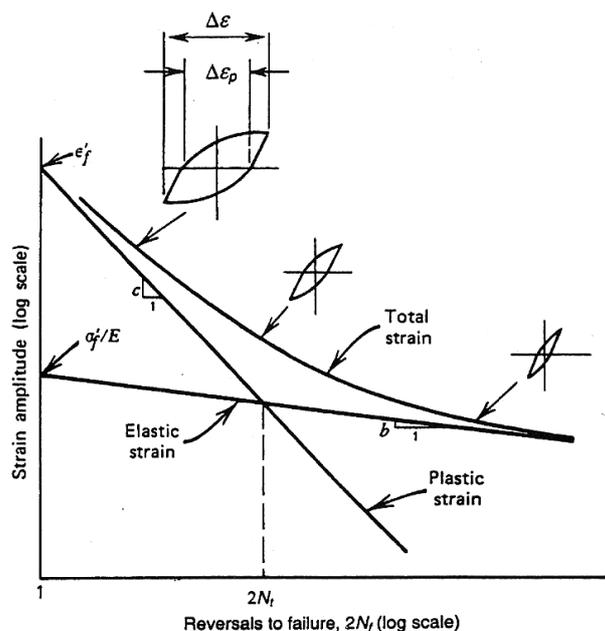


Figura 5-9 – Curva deformação vida, ε - N representada pela componente elástica, plástica e deformação total.

Da Figura 5-9, b e c são os expoentes da curva elástica e plástica do material respectivamente, obtém-se a equação da deformação-vida conforme:

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = \varepsilon_a = \frac{\Delta \varepsilon_e}{2} + \frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = \frac{\sigma_f'}{E} (2N_f)^b + \varepsilon_f' (2N_f)^c \quad (5-9)$$

A relação entre a deformação plástica e a vida é:

$$\frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = \varepsilon_f' (2N_f)^c \quad (5-10)$$

que é a equação de Coffin-Manson proposta em 1960 e adaptada posteriormente por Morrow.

O estudo de fadiga de baixo ciclo, que envolve a análise da deformação localizada presente no material e não a tensão nominal na estrutura, não é o escopo deste presente trabalho. No entanto, seu detalhamento e análise pode ser estudado, como sugestão, em [STEPHENS, 2001].

Representação e aproximação da curva σ -N

Para regimes de fadiga de alto ciclo, a deformação plástica localizada não é de grande influência para a estimativa e estudo da fadiga do material. Assim, uma abordagem que utiliza a tensão nominal presente no sistema em análise torna-se conveniente.

Basquin (1910), baseado nos experimentos de Wöhler (1870), propôs uma equação para relacionar o número de ciclos e a respectiva tensão alternada para níveis de tensão de vida finita:

$$N = K\sigma_a^{-m} \quad (5-11)$$

Conhecida como a Equação de Basquin para o material sendo:

N = Número de ciclos para atingir a falha.

K = Constante da curva de Wöhler para o material

m = expoente da curva de Wöhler para o material.

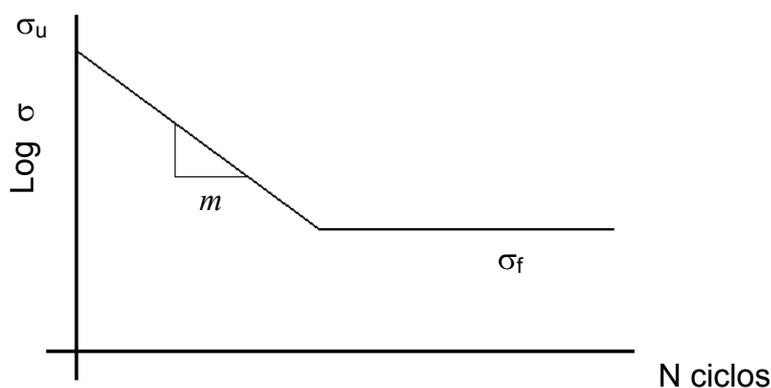


Figura 5-10 – Representação simplificada e ideal da curva σ -N, com patamar bem definido de vida infinita, σ_f . Está representado os principais termos da curva.

Na prática, porém, a curva de fadiga do material como representada na Figura 5-10 apresenta-se dispersa em uma distribuição estatística em torno de uma tendência média, como pode ser observada na Figura 5-11.

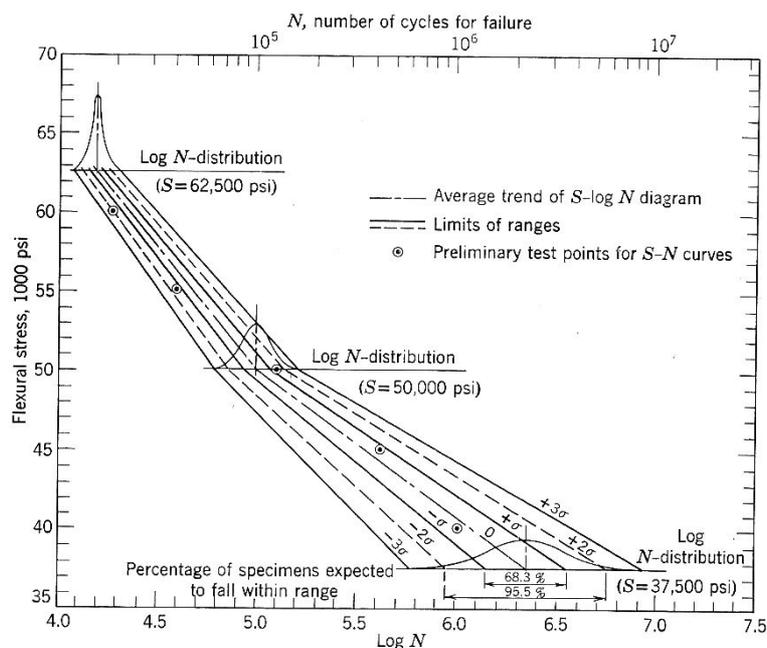


Figura 5-11 – Representação mais realista da curva σ -N, mostrando a dispersão da curva de fadiga em torno de uma média. fonte: [Johannesson, et al.]

Determinação da curva σ -N para amplitudes constantes e amplitudes variáveis.

Johannesson et al., publicaram um estudo realizado no centro de pesquisa Fraunhofer, onde a curva de limite de fadiga foi obtida de modo a verificar o seu comportamento para cargas aleatórias, de banda estreita e de banda larga comparando-se com àquela obtida no ensaio de tensão puramente cíclica senoidal. O resultado pode ser observado na Figura 5-12.

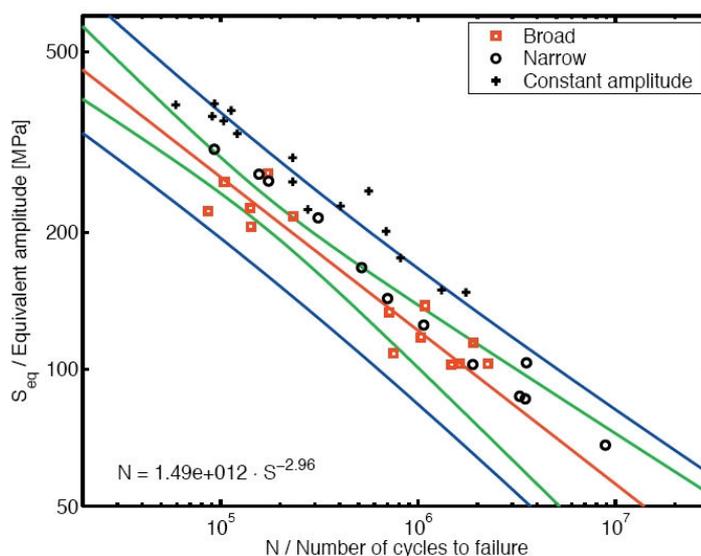


Figura 5-12 – Curvas Tensão-Vida levantadas para carregamentos com amplitude constante e variável.

Fatores que influenciam na estimativa da curva σ -N.

- Microestrutura
- Efeito do tamanho
- Acabamento superficial
- Frequência de aplicação da carga
- Concentração de tensões
- Tensões residuais
- Amplitude do carregamento variável. Cargas aleatórias
- Multiaxialidade de torção
- Corrosão
- *Fretting*
- Temperaturas baixas ou altas
- Soldas
- Fatores estatísticos

Vale ressaltar o efeito da frequência na vida de fadiga do material, uma vez que o presente trabalho trata de fadiga no domínio da frequência.

Segundo comprovado por [HARRIS, 1961] a tensão é função da deformação, bem como da taxa de deformação:

$$\sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) \quad (5-12)$$

Para tanto, utilizou-se de um equipamento provido de um excitador acústico varrendo, para uma mesma tensão, frequências entre 10 a 1000 Hz de aplicação da tensão. O resultado conclui que para um mesmo nível de tensão, a tensão limite de fadiga depende da taxa de deformação e, conseqüentemente, da frequência de aplicação da tensão.

5.2 Critérios de Falha

Do ponto de vista estatístico, fadiga é um processo estacionário, banda estreita e que se caracteriza por possuir 3 critérios de falha: [OSGOOD, 1982].

Falha devido ao primeiro pico acima de um certo valor, conhecido como fadiga de $\frac{1}{4}$ de ciclo ou *first-passage problem*. Não tem interesse estatístico por se tratar de um caso isolado, como uma sobrecarga no sistema.

Fadiga devido ao dano causado por um certo período onde o componente esteve sujeito a níveis altos de tensão. Como exemplos, tem-se o transporte de componentes eletrônicos e de compressores. Neste caso, durante o transporte, o sistema está sujeito a níveis de tensões acima daqueles em que estará sujeito em sua aplicação normal para os

quais fora projetado. Resulta não necessariamente em fratura, mas na perda de resistência ou dano acumulado.

E por último, a fadiga causada por dano acumulado, em que o componente mesmo sujeito a níveis muito inferiores àquele que causaria escoamento, por exemplo, mas de forma alternada e contínua, sofre um dano localizado microestrutural (nucleação) e este se propaga ao longo do tempo. Este último critério de falha e acúmulo do dano será estudado mais profundamente ao longo deste trabalho.

5.3 *Análise de Fadiga por Solicitações Aleatórias*

Em uma análise de fadiga, o objetivo é a estimativa do tempo necessário para que uma estrutura, quando sujeita a uma carga oscilante, entre em colapso ou falhe de acordo com o critério de falha. Para uma solicitação puramente senoidal, como aquela da Figura 5-5, esta previsão de vida pode ser simplesmente calculada através da estimativa e contagem do número de ciclos necessários para que haja a falha naquela determinada tensão cíclica. Esta característica de tensão cíclica constante é perfeitamente coerente e prática em muitas aplicações onde o movimento ou a deformação, isto é, a solicitação, é constante e determinística.

No entanto, em muitas situações práticas, as solicitações não são constantes ao longo da aplicação do componente ou sistema mecânico, ocorrendo flutuações dos níveis de tensão e até mesmo com solicitações aleatórias por natureza, como cargas em regime aleatório, terremoto, vibração aleatória, solicitações de transporte, ação do vento, etc. Para estes casos de solicitação aleatória, a própria contagem de ciclos para então estimar o dano causado na vida a fadiga é não determinístico e probabilístico.

Especificamente para solicitações aleatórias, existem basicamente duas abordagens para a estimativa do dano por fadiga na estrutura. Uma utiliza algoritmos para a contagem de ciclos a partir da solicitação aleatória no tempo, e a outra utiliza metodologias, empíricas ou não, para a estimativa da probabilidade de ocorrência de determinado nível de tensão e, então, estimativa do dano à fadiga causado por este nível. Em especial para este último, que é a principal abordagem do presente trabalho, utiliza-se amplamente a PSD do registro de tensão para a estimativa da Função de Probabilidade – PDF e, então, a estimativa do dano em fadiga.

Em uma análise de tensões em um componente, a função PSD de tensão é calculada para cada ponto de interesse da estrutura (pontos críticos de tensão) através de uma análise FEM ou através de medições experimentais com a utilização de extensômetros. Também se pode realizar uma análise híbrida de tensões recorrendo-se a dados experimentais e simulações numéricas, e aplicando-se as funções de transferência. Utiliza-se a metodologia híbrida quando a fixação de extensômetros ao ponto de máxima tensão é

inadequado ou impraticável, ou quando o ponto de máxima tensão não é facilmente determinável.

De qualquer forma, ambas as abordagens utilizam um critério de acúmulo do dano para a estimativa do dano que um determinado nível ou probabilidade de tensão causa ao material. A escolha deste critério de acúmulo de dano é mandatório para a estimativa de vida e nível de confiabilidade da mesma dada a solicitação à estrutura.

5.3.1 Critérios de Acúmulo de Dano

Existem dezenas de critérios para a estimativa e cálculo do acúmulo de dano. Visam identificar o processo físico que causa o dano microestrutural ou simplesmente uma abordagem empírica que comprovem com resultados experimentais. Basicamente, envolvem o conceito de acúmulo gradual do dano durante o processo de solicitação aleatória. Algumas abordagens utilizam parâmetros para correção do espectro do carregamento e outros parâmetros de correção da curva σ -N ou ε -N do material. Para informações mais detalhadas dos diversos critérios, duas referências são indicadas, como [MADAYAG, 1969] e [OSGOOG, 1982].

Mais recentemente, [FATEMI, A. e YANG, L, 1998] escreveram um artigo intitulado: *Teoria de predição de vida e acúmulo de dano em fadiga, levantamento do estado da arte para materiais homogêneos*, onde levantaram mais de 50 modelos e critérios de acúmulo de dano. No geral, critérios desenvolvidos antes dos anos 70 eram puramente fenomenológicos, enquanto que após, consistem em critérios semi-analíticos envolvendo a mecânica do dano.

Podem ser divididos em 6 subgrupos:

1. Evolução do dano linear e somatório linear;
2. Curva de dano não linear e abordagem de linearização em dois estágios;
3. Modificação da curva de fadiga considerando-se a interdependência dos carregamentos;
4. Abordagem baseada no crescimento de trinca e mecânica da fratura;
5. Modelo baseado na mecânica do dano contínuo;
6. Modelos baseados em energia.

5.3.1.1 Palmgren-Miner

Desde o seu desenvolvimento, em 1924 por Palmgren, e posteriormente em 1945 por Miner, a regra linear de acúmulo do dano de Palmgren-Miner, vem sendo utilizada amplamente em métodos e critérios de análise de fadiga por solicitações aleatórias. Mesmo com sua limitação linear e de não considerar efeitos combinados dos carregamentos, a regra linear de Palmgren-Miner tem extensa aplicação em função de sua facilidade de implementação numérica e analítica.

Segundo [MINER, 1945] que estudou mais sistematicamente o fenômeno com corpos de prova em alumínio em diversos níveis de solicitação, a regra determina que:

1. Cada grupo de tensão senoidal contribui com uma certa quantidade de dano dado pela razão linear de dano;
2. O dano causado por cada subgrupo de tensão independe de sua posição ao longo do grupo total de tensão aplicada;
3. O dano total é a somatória dos danos causados por cada subgrupo de tensão senoidal.

Assim, o dano causado por cada subgrupo de tensões cíclicas senoidais pode ser equacionado na forma do valor esperado do Dano de Palmgren-Miner:

$$E[AD] = \sum_i \frac{n(\sigma_{a_i})}{N(\sigma_{a_i})} \quad (5-13)$$

sendo:

$E[AD]$ = valor esperado para o acúmulo do dano

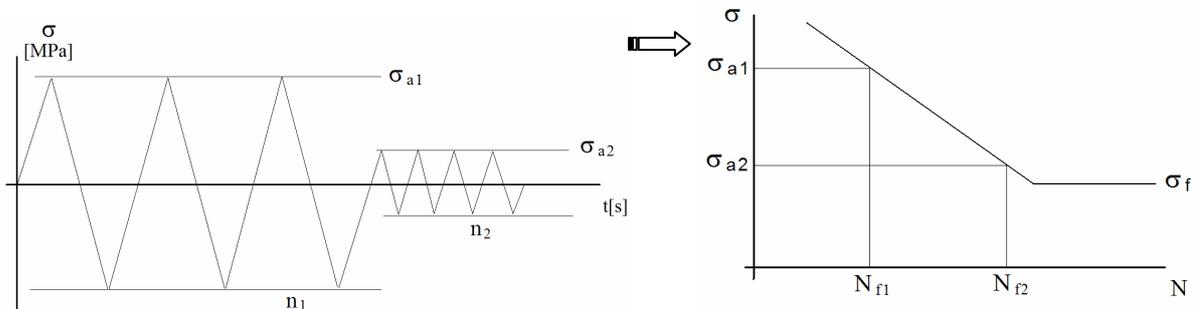
$n(\sigma_a)$ = número de ciclos submetendo a estrutura a uma amplitude de tensão alternada σ_a

$N(\sigma_a)$ = número de ciclos que causariam a falha por fadiga quando submetendo a estrutura a uma amplitude de tensão alternada σ_a

A vida final de um componente é dado quando $E[AD]=1$, isto é, quando o valor esperado para o dano é 1. Porém, na prática, demonstra-se que este valor pode ser da ordem de 0,5 até 3. [MAINS, 1958], [OSGOOG, 1982].

A regra não prevê, por exemplo, que carregamentos em níveis baixos de tensão são responsáveis pela nucleação de trincas, enquanto que aqueles a níveis superiores, pela propagação da mesma até o colapso. [STEPHENS, 2001]

Em uma aplicação simples, pode-se expressar a aplicação da equação (5-13) através da solicitação conforme ilustrado na Figura 5-13.



$$D = \sum \frac{n_i}{N_{F_i}} = \frac{n_1}{N_{F_1}} + \frac{n_2}{N_{F_2}} + \dots + \frac{n_i}{N_{F_i}} = 1$$

Figura 5-13 – Exemplo de cálculo do dano linear através da aplicação da regra de acúmulo de dano de Palmgren-Miner.

Substituindo-se a equação (5-11) na (5-13), tem-se para uma distribuição de amplitudes continuamente distribuídas:

$$E[D] = \frac{T \cdot E[p]}{K} \int_0^{\infty} \sigma_a^m p(\sigma_a) d\sigma_a \quad (5-14)$$

Sendo:

T = duração da solitação.

$E[p]$ = expectativa de picos

$p(\sigma_a)$ = probabilidade de ocorrer a amplitude de tensão alternada σ_a

A grande dificuldade está na determinação de $p(\sigma_a)$. Dai os estudos em estabelecer um critério para a sua estimativa através de propriedades probabilísticas.

5.3.1.2 Variações da Regra de acúmulo do Dano: Linear e Não-linear

Observa-se que a regra de acúmulo de dano linear de Palmgren-Miner, para solitações de carregamentos senoidais em diversos níveis de tensão, prevê uma vida conservadora, isto é, maior do que observada na prática para muitas ligas metálicas. Buscam-se, desta forma, modificações e variações da regra linear para o dano que estime vida de fadiga menos conservadora e mais próximo da realidade. Uma variação mais simples da equação de Palmgren-Miner é:

$$D = \left(\frac{n}{N} \right)^c \quad (5-15)$$

onde c é uma constante positiva.

Citando outros autores e teorias de acúmulo do dano baseado na regra de Palmgren-Miner, tem-se MARCO-STARKEY, que considera o efeito de dependência do nível de tensão, correspondendo na equação (5-15), ao valor constante de c para cada nível de tensão; SHANLEY, que considera a tensão equivalente para o cálculo do dano e este dependente do número de ciclos de tensão sujeitando a estrutura, e CORTEN-DOLAN, que assim como Shanley, considera o efeito do número de ciclos em uma determinada tensão adicionando-se constantes à equação de Palmgren-Miner.

FREUDENTHAL-HELLER, propuseram a consideração dos efeitos combinados entre subgrupos de tensão cíclica em carregamentos complexos, através do estudo e avaliação de resultados obtidos experimentalmente. Basicamente, consiste na modificação da inclinação da curva σ -N dependendo do nível de tensão alternante. Esta mesma abordagem de modificação da curva σ -N também foi adotada por KOMMERS e também por RICHART E NEWMARK.

Estes e outros diversos métodos e critérios de acúmulo do dano encontram-se em [OSGOOD, 1982], [MADAYAG, 1969] e [FATEMI, A. e YANG, L., 1998].

Uma análise gráfica do comportamento do dano efetivo para falha do material, em relação ao efeito da sequência de carregamento e da taxa de deformação é apresentada na Figura 5-14, segundo [SOCIE, 2002].

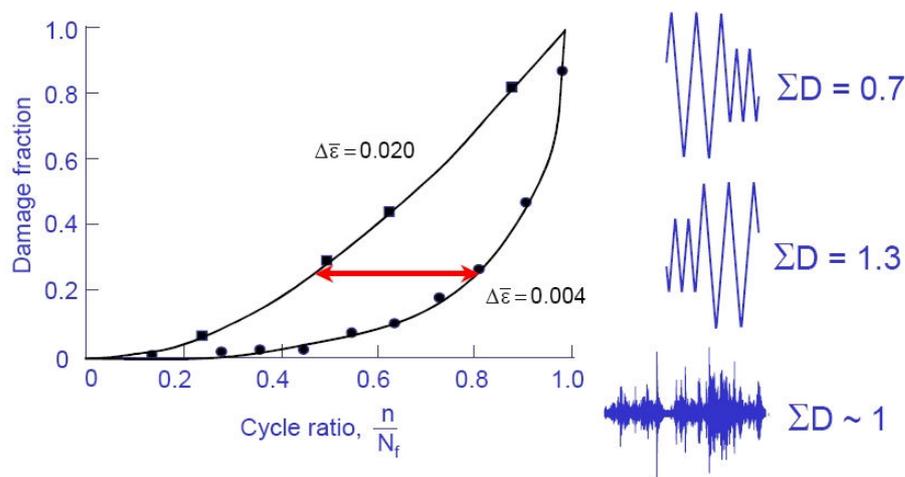


Figura 5-14 – Comportamento do dano efetivo para falha dependente da razão de tensão dos ciclos. Fonte [SOCIE, 2002]

5.3.2 Domínio no Tempo

O estudo e cálculo da vida de fadiga, através da estimativa e cálculo do dano que uma sollicitação aleatória causa a um sistema é calculado, no domínio do tempo, através do *método de contagem de ciclos* para processos aleatórios. Esta metodologia no domínio do tempo não é o principal escopo deste trabalho, mas será aplicado como comparação na estimativa de vida por métodos no domínio da frequência.

Baseiam-se no critério de acúmulo do dano causado por cada ciclo, ou grupo de ciclos presentes na sollicitação aleatória para estimar o dano total causado por um determinado bloco de sollicitação, ou tempo de exposição do componente àquela determinada sollicitação. Determina-se, então, o número de blocos ou tempo total de vida restante em função do dano que aquele causou à estrutura. Há diversos métodos e algoritmos para a estimativa e contagem do número de ciclos em um registro de sollicitação, como:

- *Rainflow*
- Range-Pair
- Race track
- Level-Crossing
- Peak Counting

O detalhamento e procedimento destes métodos encontram-se no Apêndice XII – Código ASTM para Métodos de Contagem de Ciclos, e também na norma da ASTM 1049-85. Uma aplicação experimental será visto em 7.9.1.

O objetivo de todo método de contagem de ciclo é relacionar o efeito do carregamento de amplitude variável com os dados de fadiga e curvas obtidas com ciclos de amplitude constante. Para tanto, em sua maioria, utiliza-se a regra de acúmulo do dano linear e também se considera o efeito das tensões médias em cada ciclo. A utilização de métodos diferentes de contagem de ciclos para um mesmo sinal de solicitação pode modificar a estimativa de vida em uma ordem de magnitude [STEPHENS, 2001].

Após o número de ciclos em cada nível de tensão alternada ser calculado a partir da análise do registro no tempo de uma solicitação aleatória, tem-se uma matriz de nível de tensão e número de ciclos. Calcula-se então o dano que aquele bloco de solicitação ou registro causou ao material. A vida é aquela que representa o número de repetições daquele bloco que a estrutura pode suportar até atingir o dano acumulado de $D=1$, por exemplo, no caso da utilização da regra linear de acúmulo do dano.

5.3.2.1 Método de Contagem de Ciclos *Rainflow*

Este é o método mais popular e provavelmente o melhor método de contagem de ciclos [STEPHENS, 2001], proposto inicialmente por [MATSUISHI e ENDO, 1968].

Com o registro de tensão, ou deformação aleatória disposto de forma vertical como na Figura 5-15b, por exemplo, representa-se por linhas "escorregando" horizontalmente através dos ciclos até o próximo reverso e, assim, sucessivamente, como linhas de água da chuva caindo no telhado de uma *Pagoda* (construção típica japonesa), referenciando um registro aleatório de tensão típico. Dai o nome de *Rainflow*.

O método consiste no seguinte algoritmo:

1. Reordenar o histórico de carregamento de modo que inicie com o maior pico ou com o menor vale;
2. Iniciando-se do maior pico, "descer" até o próximo reverso. Continuar até que a magnitude do próximo pico for igual ou superior àquele pico iniciado ou um outro ciclo *Rainflow* for encontrado;
3. Repetir o mesmo procedimento ao próximo reverso até o final do processo;
4. Repetir o processo de contagem a todas as amplitudes de tensão que não foram ainda contabilizadas.

O resultado desta contagem é, então, utilizada no cálculo do dano e estimativa da vida para o tempo do registro de tensão utilizado. Para a determinação do tempo total até a falha, multiplica-se o tempo de registro inicial até que se obtenha o valor do critério de acúmulo do dano.

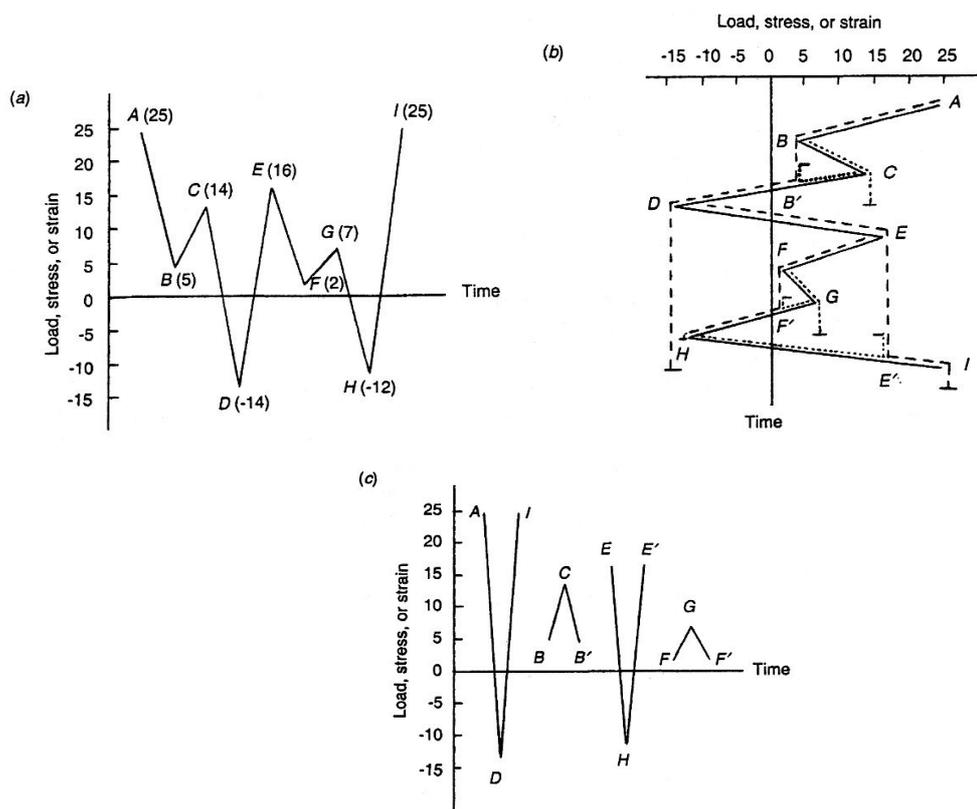


Figura 5-15 – Exemplo do método de contagem de ciclos *Rainflow*. Procedimento de contagem do algoritmo.

5.3.3 Domínio na Frequência

Para a aplicação da abordagem de estimativa de vida para solicitações aleatórias no domínio do tempo, é necessário o registro da tensão ou deformação ou esforço atuante na estrutura. Muitas vezes, este registro torna-se impraticável ou pouco prático em casos onde o acesso à instrumentação não é viável ou, então, em estágios iniciais do projeto, pois não há sistemas físicos para realizar o experimento. Além do mais, torna-se necessária uma grande quantidade de registros a fim de formular uma estatística confiável em torno da distribuição de ciclos *Rainflow*, do dano em fadiga e da vida do sistema, o que torna o processo custoso e moroso.

Alternativamente, uma análise no domínio da frequência, denominado métodos espectrais, pode ser utilizado de modo a modelar a solicitação aleatória de tensão como um processo aleatório e estacionário. Estes métodos espectrais utilizam uma formulação empírica ou analítica objetivando estimar e simular a função densidade de probabilidade da distribuição dos ciclos alternantes, a partir de parâmetros da resposta espectral ou PSD do componente em análise.

Ao analisar um sinal de solicitação aleatória no domínio do tempo, pela característica do sinal, torna-se difícil a verificação das frequências dominantes, bem como da distribuição destes ao longo do tempo.

Por outro lado, no domínio da frequência, o sinal é convertido para uma visualização estatística onde a probabilidade do carregamento estar situado em uma determinada frequência é dada pela PSD do carregamento aleatório.

Assim, de uma distribuição PSD, se as solicitações estiverem distribuídas e apresentarem valores significativos ao longo de toda a faixa de frequência, este sinal é dito “banda larga” (*wide band*). Por outro lado, se os valores dos picos estiverem concentrados em uma faixa pequena de frequência quando comparado com o domínio, o sinal é dito “banda estreita” (*narrow band*), conforme ilustrado pela Figura 5-16.

De modo a quantificar o sinal em banda larga ou banda estreita, ao invés de uma análise apenas qualitativa e subjetiva, recorre-se ao levantamento estatístico do sinal através dos momentos espectrais e fator de irregularidade conforme equação (2-72).

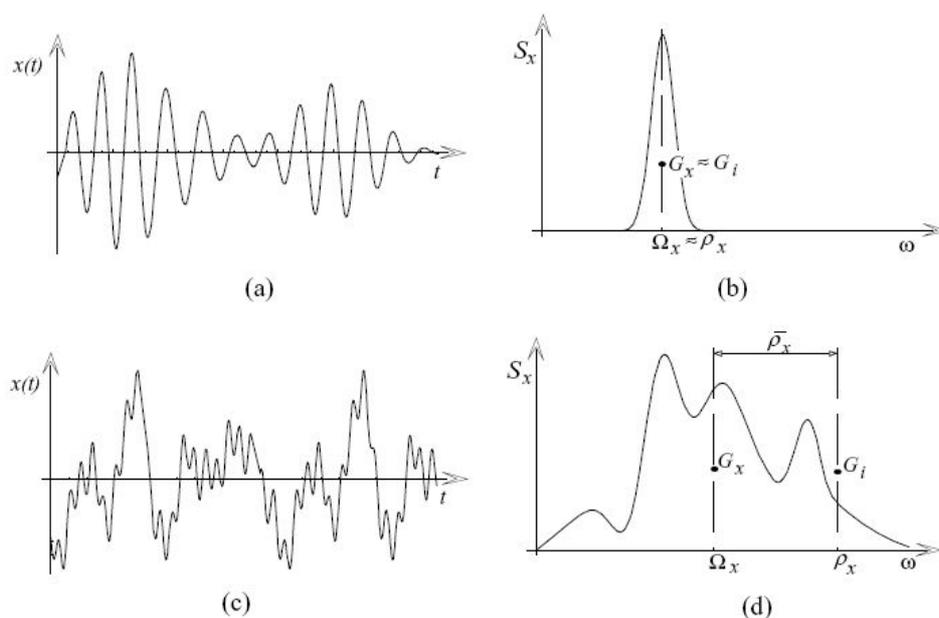


Figura 5-16 – Processos aleatórios típicos representando uma solicitação de banda estreita no tempo (a) e na frequência (b); solicitação de banda larga no tempo (c) e na frequência (d) – Fonte: [PETRUCCI e ZUCARELLO, 2004]

5.3.3.1 Métodos de Análise de Fadiga no Domínio da Frequência

Comparados ao método no domínio do tempo, métodos espectrais tendem a ser mais rápidos e fáceis de serem implementados mesmo nas fases iniciais do projeto de sistemas mecânicos, uma vez que a resposta a uma solicitação aleatória pode ser calculada aplicando-se as funções de transferência da resposta dinâmica da estrutura.

As metodologias e critérios para estimativa da distribuição de probabilidade de ciclos de tensão, a partir de parâmetros extraídos da PSD de resposta estrutural consistem, em sua maioria, de aproximações empíricas ou analíticas provenientes de simulação e comparação.

Para o presente trabalho, uma extensa pesquisa de métodos de predição do dano e cálculo de vida foi realizada e alguns métodos selecionados e descritos a seguir. Esta seleção baseou-se nos resultados obtidos pelos autores e pela repercussão de seu conteúdo científico em publicações técnicas e revistas científicas de fadiga e confiabilidade.

5.3.3.1.1 Predição de Vida a Fadiga de alto ciclo para processos aleatórios – Caso Geral

Em casos ideais, a PDF da média e variação de tensão podem ser estimada através de $p(m, \sigma)$ sendo $p(\cdot)$ a probabilidade de médias (m) e variação de tensão (σ).

Para se considerar o efeito das tensões médias e do dano acumulado, para o seguinte estudo foi considerado o critério de Goodman para correção das tensões médias e Palmgren-Miner para o critério de acúmulo de dano.

Assim, de Palmgren-Miner e Goodman, para uma solicitação aleatória, o dano acumulado é dado por [SOBCZYK e SPENCER, 1992] e [WIRSCHING, 1995].

$$D = \frac{N}{K} \int \int p(m, \sigma) \left(\frac{1}{1 - \frac{m}{\sigma_u}} \right)^m dmd\sigma \quad (5-16)$$

sendo:

- K e m são a constante e o expoente da curva de Wöhler (σ -N) do material
- σ_u = resistência à tração do material.

Também, segundo [BENASCIUTTI e TOVO, 2004], a distribuição da contagem dos ciclos de amplitudes $p(\sigma_a)$ e ignorando o valor médio, é definida por:

$$p(\sigma_a) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\sigma_a) d\sigma_a \quad (5-17)$$

Assim, a expectativa de Dano $E[D]$, também considerando Palmgren-Miner, pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$E[D] = \frac{N}{K} \int_0^{\infty} \sigma_a^m p(\sigma_a) d\sigma_a \quad (5-18)$$

Em um processo aleatório, o número de ciclos está relacionado ao intervalo de tempo T em que ele ocorre através de [PETRUCCI & ZUCARELLO, 2004].

$$T = 2\pi N \sqrt{\frac{m_2}{m_4}} \quad (5-19)$$

Das equações (5-16) e (5-19), a vida de fadiga T_f correspondendo a um dano D_r , pode ser definida como:

$$T_f = \sqrt{\frac{m_2}{m_4}} \frac{2\pi K D_r}{\int \int_{m_r} p(m, \sigma) \left(\frac{\sigma}{1 - \frac{m}{\sigma_u}} \right)^m dmd\sigma} \quad (5-20)$$

Assim, os dados necessários para o cálculo da vida de fadiga são:

PSD = m_2 e m_4

PDF = $p(m, \sigma)$

Material = (K, m, σ_u)

D_r = dano que causa a ruptura ou falha

5.3.3.1.2 Processos Aleatórios tipo Banda Estreita

Em um processo aleatório do tipo banda estreita (*narrow band*), como já definido anteriormente, a distribuição de picos e vales são praticamente simetricamente distribuídos em torno da média da variável de modo que a distribuição estatística das amplitudes máximas coincide com a distribuição dos picos.

Lembrando que para um processo do tipo banda estreita: $E[p] = E[0] = f_0$

e reescrevendo (2-36) conforme já deduzido no item 2.1.3 para a distribuição de picos em um processo aleatório de banda estreita, seguindo a distribuição de Rayleigh, tem-se de forma diferencial:

$$p(x)dx = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \quad (5-21)$$

sendo $p(x)dx$ a probabilidade de ocorrência de picos em uma faixa infinitesimal dx . Figura 5-17.

e o dano parcial causado por estes ciclos de tensão alternada os quais geram estes picos em um nível de tensão x é, segundo o critério de acúmulo de dano de Palmgren-Miner, é dado por:

$$Dx = \frac{n(x)}{N(x)} = E[p]T \frac{p(x)dx}{N(x)} \quad (5-22)$$

e o dano total acumulado no período de tempo T , é:

$$E[D] = \sum \frac{n(x)}{N(x)} = E[p]T \int_0^{\infty} \frac{p(x)dx}{N(x)} \quad (5-23)$$

$$E[D] = E[p] T \int_0^{\infty} \frac{p(\sigma_a) d\sigma_a}{K \sigma_a^{-m}} \quad (5-24)$$

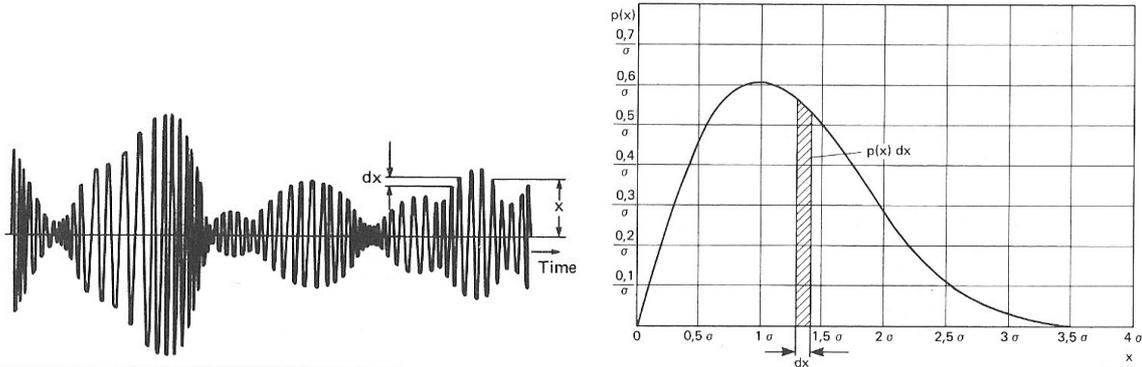


Figura 5-17 – Representação de um sinal do tipo banda estreita e sua distribuição de probabilidade segundo Rayleigh.

Desta forma, utilizando-se a equação de Basquin do material e a expressão de Rayleigh para a estimativa da distribuição da probabilidade $p(x)$, o dano total para Banda estreita é estimado segundo [SU, 2005]:

$$E[D_{NB}] = \frac{T E[p]}{K} (\sqrt{2} \sqrt{m_0})^m \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right) \quad (5-25)$$

E segundo [WEITZER, 2005]:

$$E[D_{NB}] = \frac{T E[0]}{K} (\sqrt{2} \sqrt{m_0})^m \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right) \quad (5-26)$$

Considerando que para um processo de banda estreita, $m_1/m_2 \cong m_2/m_0$, a vida de fadiga T_f correspondente a um dano D_r pode simplesmente ser obtida segundo [PETRUCCI & ZUCARELLO, 2004], através de:

$$T_f = \frac{\pi K D_r}{\sqrt{2^{3m} m_0^m m_2} \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right)} \quad (5-27)$$

Segundo [CEBON, 1999], a estimativa de vida, é obtida através de:

$$T_f = \frac{2^{1-\frac{m}{2}} \pi K D_r m_0^{1-m}}{m_2 \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right)} \quad (5-28)$$

sendo $\Gamma(\cdot)$ a função Gamma nas equações acima.

A Figura 5-18 ilustra o porquê da análise por banda estreita se mostrar conservadora ao ser aplicada em um processo de banda relativamente larga. [BISHOP et al., 1999].

A solução por banda estreita ignora os picos negativos e as inversões positivas de sinal, e todos os picos positivos são considerados como correspondentes a outros negativos, embora não existam. Desta forma, picos negativos são interpretados como se tivessem seu correspondente positivo gerando muito mais ciclos de amplitude máxima de tensão do que o sinal original. Esta é a razão do conservadorismo excessivo da solução por banda estreita.

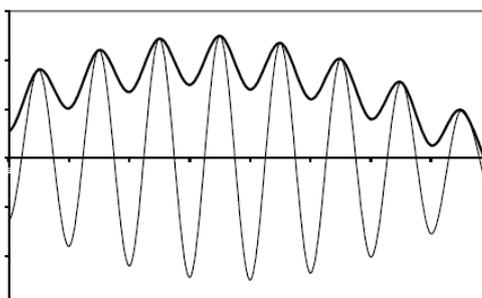


Figura 5-18 – Demonstração da interpretação de um sinal banda larga com envelope superior e de como uma falsa estimativa de sinal banda estreita é gerado. A cada pico positivo do sinal estima-se um pico negativo. [BISHOP et al., 1999]

5.3.3.1.3 Processo Aleatório Tipo Banda Larga

Ao contrário do processo de banda estreita, não há uma função analítica entre $p(m, \sigma)$ e a PSD assim como apresentada pela equação (5-20), e a estimativa de vida de fadiga só pode ser determinada precisamente no domínio do tempo [PETRUCCI e ZUCARELLO, 2004].

No entanto, partindo-se de uma dada PSD de tensão calculada ou medida em um determinado ponto crítico da estrutura, é possível reproduzir, conforme [SOBCZYK e SPENCER, 1992], uma simulação do que seria o processo aleatório no domínio do tempo conforme a Figura 5-19.

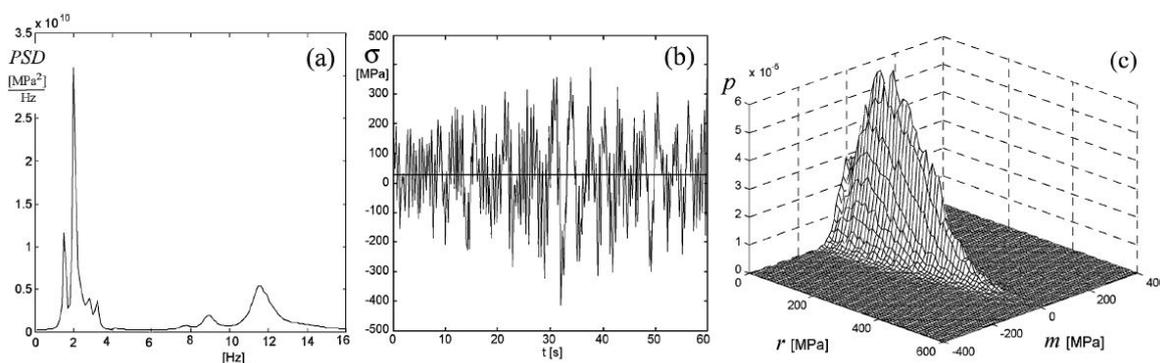


Figura 5-19 – Avaliação de vida de fadiga no domínio do tempo partindo-se de uma simulação do processo no domínio do tempo (b) gerado a partir da PSD (a). Função densidade de probabilidade obtido através do método de contagem *Rainflow*. Fonte [PETRUCCI e ZUCARELLO, 2004].

Obtém-se desta forma, através de métodos de contagem de ciclos, como por exemplo, *Rainflow*, a função densidade de probabilidade $p(m, \sigma)$. Assim, a vida pode ser estimada considerando o critério de Goodman e Palmgren-Miner aplicando-se (5-20).

Nos últimos anos, vários autores (vide referências) propuseram métodos para a estimativa da vida de fadiga diretamente da PSD sem a necessidade da utilização no domínio do tempo e a contagem de ciclos. As vantagens da aplicação desta técnica é principalmente, a utilização da $H(f)$ para análises de casos partindo-se apenas da função de transferência e de uma PSD de entrada conhecida.

Utilizando-se de métodos empíricos, estatísticos, correlações e limitações onde uma equação é corrigida e dedicada para uma aplicação apenas, alguns métodos demonstram-se coerentes e praticáveis, e merecem especial atenção.

5.3.3.1.4 Petrucci e Zuccarello

Este método não exige o levantamento da função de probabilidade $p(m, \sigma)$, e permite uma estimativa da vida de fadiga de alto ciclo para componentes sujeitos a um estado de tensão uniaxial de banda larga.

Sendo σ_e a tensão equivalente de Goodman, conforme definida em [SHIGLEY, 1977]:

$$\sigma_e = \frac{\sigma}{1 - \frac{m}{\sigma_u}} \quad (5-29)$$

a equação (5-16) pode ser reescrita na forma:

$$D = \frac{N}{K} \int_{\sigma_e} p(\sigma_e) \sigma_e^m d\sigma_e = \frac{N}{K} \chi_\mu \quad (5-30)$$

sendo χ_μ a m^{th} ordem do momento da função densidade de probabilidade $p(\sigma_e)$ da tensão equivalente de Goodman.

$$\chi_\mu = \int_{\sigma_e} p(\sigma_e) \sigma_e^m d\sigma_e \quad (5-31)$$

e a equação da durabilidade (5-20) fica:

$$T_f = \sqrt{\frac{m_2}{m_4} \frac{2\pi K D_r}{\chi_\mu}} \quad (5-32)$$

Valores estimados dentro de um erro de 40% na estimativa da vida podem ser obtidos resolvendo-se o momento χ_μ para:

$$\chi_{\mu} = m_0 \frac{m}{2} g(\alpha_x, \beta_x, \alpha_{x'}, \beta_{x'}, m, \gamma) \quad (5-33)$$

sendo

$$\gamma = \frac{x_{\max}}{\sigma_u}; \quad x_{\max} = \text{valor máximo da variável } x \text{ (ou } 3\sqrt{m_0} \text{)} \quad (5-34)$$

Desta forma, χ_{μ} pode ser avaliado, tendo-se:

- As características do material (m, σ_u);
- Variância (m_0) dos valores de tensão σ ;
- Parâmetros da PSD, α_x e β_x ;

A transformada inversa de uma PSD para o domínio no tempo, pode ser gerada dividindo-se a PSD em N intervalos, $\Delta\omega$, e utilizando-se a equação da inversa da PSD: [SOBCZYK e SPENCER, 1992].

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^N \sqrt{2\sigma_x(\omega_k)\Delta\omega} [\cos(\omega_k t + \Phi_{k,n})] \quad (5-35)$$

com $\omega_k = (k-0,5)\Delta\omega$, sendo $\Phi_{k,n}$ uma distribuição aleatória mutuamente independente do ângulo de fase ($0 - 2\pi$).

Através de várias simulações, conforme a Figura 5-20, partindo-se de valores usuais de $3 \leq m \leq 9$ e para fadiga de alto ciclo $0,15 < \gamma < 0,9$, Petrucci e Zuccarello chegaram ao seguinte equacionamento:

Uma função $g(\alpha_x, \beta_x, m, \gamma)$ pode ser relacionada aos parâmetros espectrais α_x e β_x aproximadamente através de um polinômio de segundo grau e definindo agora a função:

$$\Psi(\alpha_x, \beta_x, m, \gamma) = \log[g(\alpha_x, \beta_x, m, \gamma)] \quad (5-36)$$

segue que :

$$\Psi(\alpha_x, \beta_x, m, \gamma) = c_0 + c_1\alpha_x + c_2\beta_x + c_3\alpha_x\beta_x + c_4\alpha_x^2 + c_5\beta_x^2 \quad (5-37)$$

Algebricamente, aplicando-se a equação (5-37) nos resultados obtidos no gráfico da Figura 5-21, chega-se a:

$$\Psi(\alpha_x, \beta_x, m, \gamma) = \frac{(\Psi_2 - \Psi_1)}{6}(m-3) + \Psi_1 + \left[\frac{2}{9}(\Psi_4 - \Psi_3 - \Psi_2 + \Psi_1)(m-3) + \frac{4}{3}(\Psi_3 - \Psi_1) \right](\gamma - 0.15) \quad (5-38)$$

Sendo:

$$\Psi_1 = -1,994 - 9,381\alpha_x + 18,349\beta_x + 15,261\alpha_x\beta_x - 1,483\alpha_x^2 - 15,402\beta_x^2 \quad (5-39)$$

$$\Psi_2 = 8,229 - 26,510\alpha_x + 21,522\beta_x + 27,748\alpha_x\beta_x + 4,338\alpha_x^2 - 20,026\beta_x^2 \quad (5-40)$$

$$\Psi_3 = -0,946 - 8,025\alpha_x + 15,692\beta_x + 11,867\alpha_x\beta_x + 0,382\alpha_x^2 - 13,198\beta_x^2 \quad (5-41)$$

$$\Psi_4 = 8,780 - 26,058\alpha_x + 21,628\beta_x + 26,487\alpha_x\beta_x + 5,379\alpha_x^2 - 19,967\beta_x^2 \quad (5-42)$$

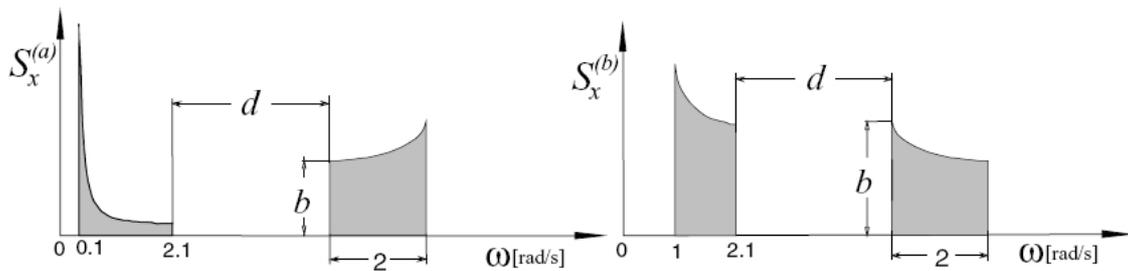


Figura 5-20 – PSD utilizadas por Petrucci e Zuccarello variando-se os parâmetros b e d para as simulações.

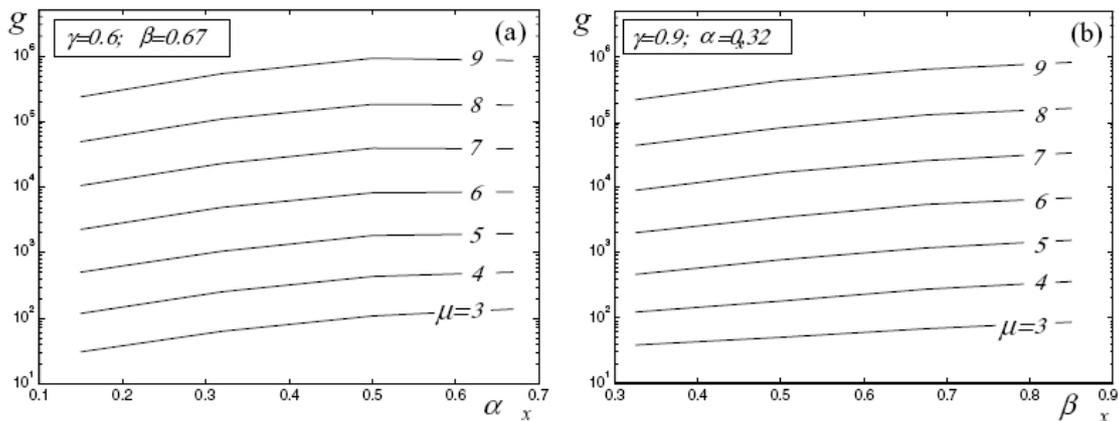


Figura 5-21 – Resultados numéricos para estimativa de $g(\alpha_x, \beta_x, m, \gamma)$ em função dos parâmetros espectrais α_x e β_x .

Utilizando-se as relações de (5-39) a (5-42) na equação (5-38) e substituindo-se pelo inverso logaritmo em (5-36), por fim a vida pode ser calculada através da equação (5-32), tendo-se então:

$$T_f = \sqrt{\frac{m_2}{m_4}} \frac{2\pi K D_r}{\sqrt{m_0^m} \exp[\Psi(\alpha_x, \beta_x, m, \gamma)]} \quad (5-43)$$

E a vida de fadiga pode ser determinada com:

- Momentos espectrais: m_0 , m_2 e m_4 ;

- Parâmetros da PSD: α_x e β_x ;
- Propriedades do material: K , m , D_r , σ_u .

Visando a verificação do método proposto, Petrucci e Zuccarello testaram o método em 3 tipos distintos de PSD: do tipo ruído branco, decrescente e bi modal . Esta última, vale ressaltar, que se assemelha com a obtida no presente trabalho experimental, Figura 5-22.

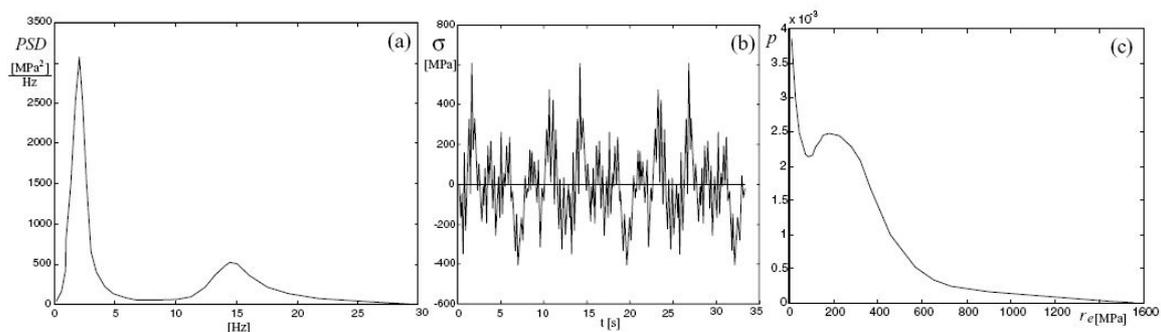


Figura 5-22 – PSD proposta por [PETRUCCI e ZUCCARELLO, 2004] visando validar o método. (a) PSD bi modal, (b) simulação da variável no tempo, (c) Probability Density Function da tensão equivalente de Goodman.

Os seguintes dados foram utilizados no cálculo de vida para um componente sujeito ao carregamento da Figura 5-22:

- Material:
 - $K = 4,9 \times 10^{40} \text{ Mpa}^{11,75}$
 - $m = 11,76$
 - $\sigma_u = 1850 \text{ Mpa}$
 - $D_R = 1$
- PSD:
 - $\sqrt{m_0} = 250 \text{ Mpa}$
 - $\sqrt{m_2/m_4} = 0,0538 \text{ s}$
 - $\alpha_x = 0,54$
 - $\beta_x = 0,70$
 - $\gamma = x_{max}/\sigma_u = 0,405$

$$T_f = \sqrt{\frac{m_2}{m_4}} \frac{2\pi K D_r}{\sqrt{m_0}^m \exp[\Psi(\alpha_x, \beta_x, m, \gamma)]}$$

$$T_f = 0,0583 \frac{2\pi 4,9 \times 10^{40}}{1,15 \times 10^{27} \exp[14,17]}$$

$$T_f = 1,1 \times 10^7 \text{ s}$$

Foram realizadas, então, 10^5 simulações no domínio no tempo e aplicado *Rainflow* para a contagem de ciclos. Calculou-se, então, a função densidade de probabilidade e aplicou-se a (5-43) para a estimativa de vida.

Assim, segundo *Rainflow*, $T_f = 1,9 \times 10^7$ segundos

Desta forma, Petrucci e Zuccarello subestimaram a vida em 42,1%.

5.3.3.1.5 Tunna

Consiste em um processo empírico aplicado à solução de banda estreita visando reduzir o conservadorismo intrínseco. Foi desenvolvido gerando-se amostras de sinais no domínio do tempo através da inversa da FFT, partindo-se da PSD. Segue-se então, o cálculo de vida pela contagem de ciclos *Rainflow*. [BISHOP et al., 1999]

$$p(\sigma)_T = \left[\frac{\sigma}{4\alpha_x^2 m_0} e^{-\frac{\sigma^2}{8\alpha_x^2 m_0}} \right] \quad (5-44)$$

5.3.3.1.6 Wirsching

Assim como Tunna, também consiste em um processo empírico modificado a partir da solução do processo de banda estreita. Utiliza um “fator” empírico de correção do dano $E[D]_{NB}$ deduzido a partir do processo de banda estreita. Segue-se o cálculo da vida pela contagem de ciclos *Rainflow*, por Wirsching e Light [1980]. [BISHOP et al., 1999]

$$E[D]_{wirsch} = E[D]_{NB} \cdot \left[a(m) + [1 - a(m)](1 - \varepsilon)^{c(m)} \right] \quad (5-45)$$

sendo:

$$a(m) = 0,926 - 0,033m$$

$$c(m) = 1,587m - 2,323$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \alpha_x^2}$$

Assim, seguindo a definição do $E[D]$ de banda estreita segundo [SU, 2005] a partir da equação (5-25), tem-se:

$$E[D]_{wirsch} = \frac{T E[p]}{K} \left(\sqrt{2} \sqrt{m_0} \right)^m \Gamma \left(1 + \frac{m}{2} \right) \cdot \left[a(m) + [1 - a(m)](1 - \varepsilon)^{c(m)} \right] \quad (5-46)$$

5.3.3.1.7 Hancock Equivalent Stress

Segundo [BISHOP et al., 1999], o método da tensão equivalente desenvolvido por Hancock é definido a partir da distribuição de banda estreita e visa corrigir o conservadorismo presente na definição de banda estreita. É definido pela seguinte equação:

$$\sigma_{eqHanc} = \left(2\sqrt{2m_0}\right) \left[\alpha_x \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)\right]^{1/m} \quad (5-47)$$

5.3.3.1.8 Chaudhury & Dover Equivalent Stress

Segundo [BISHOP et al., 1999], esta correlação empírica proposta por Chaudhury e Dover (1988), também é derivada da definição de banda estreita e apresenta-se como:

$$\sigma_{eqC\&D} = \left(2\sqrt{2m_0}\right) \left[\frac{\varepsilon^{m+2}}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) + \frac{\alpha_x}{2} \Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right) + erf(\alpha_x) \frac{\alpha_x}{2} \Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)\right]^{1/m} \quad (5-48)$$

sendo:

$$erf(\alpha_x) = 0,3012\alpha_x + 0,4916\alpha_x^2 + 0,9181\alpha_x^3 - 2,3534\alpha_x^4 - 3,3307\alpha_x^5 + 15,6524\alpha_x^6 - 10,7846\alpha_x^7$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \alpha_x^2}$$

5.3.3.1.9 Steinberg

Steinberg propôs uma solução simples baseada em termos estatísticos de desvio padrão, σ . Assume que em uma dada solicitação de tensão, cuja distribuição apresenta-se na forma Gaussiana, não ocorre níveis de tensão acima de 6 desvios padrões. As tensões são consideradas arbitrariamente distribuídas seguindo a função da distribuição Gaussiana. [BISHOP et al., 1999],

Assim, os níveis de tensão são distribuídos seguindo as seguintes probabilidades:

68,3% do tempo a 2σ

27,1% do tempo a 4σ

4,3% do tempo a 6σ

$$\sigma_{eqStein} = \left[0,683(2\sqrt{m_0})^m + 0,271(4\sqrt{m_0})^m + 0,043(6\sqrt{m_0})^m\right]^{1/m} \quad (5-49)$$

5.3.3.1.10 Dirlik

Propôs uma expressão empírica fechada para a função densidade de probabilidade para as amplitudes de tensão – σ_a , dos ciclos de *Rainflow*. Resulta de uma aproximação de simulações numéricas do sinal via Monte Carlo. É também provavelmente a mais famosa formulação empírica para a estimativa da função densidade de probabilidade das amplitudes de tensão de *Rainflow*, aproximada como um somatório de uma densidade de probabilidade Exponencial e duas segundo distribuição de Rayleigh. [BENASCIUTTI e TOVO, 2005].

$$p(\sigma_a)_{dirlik} = \frac{\frac{D_1}{Q} e^{-\frac{Z}{Q}} + \frac{D_2 Z}{R^2} e^{-\frac{Z^2}{2R^2}} + D_3 Z e^{-\frac{Z^2}{2}}}{\sqrt{m_0}} \quad (5-50)$$

sendo:

$$Z = \frac{\sigma_a}{\sqrt{m_0}} \quad x_m = \frac{m_1}{m_0} \left(\frac{m_2}{m_4} \right)^{1/2} = \beta_x \cdot \alpha_x \quad R = \frac{\alpha_x - x_m - D_1^2}{1 - \alpha_x - D_1 + D_1^2}$$

$$D_1 = \frac{2(x_m - \alpha_x^2)}{1 + \alpha_x^2} \quad D_2 = \frac{1 - \alpha_x - D_1 + D_1^2}{1 - R} \quad D_3 = 1 - D_1 - D_2$$

$$Q = \frac{1,25(\alpha_x - D_3 - (D_2 R))}{D_1}$$

Obtém-se uma distribuição de “ σ_a ” explícita sendo função dos parâmetros de banda α_x e β_x . A intensidade do dano correspondente a *Rainflow* é calculada, então, por:

$$E[D] = \frac{n}{K} \int_0^{\infty} \sigma_a^m p(\sigma_a)_{dirlik} \quad (5-51)$$

Segundo [BENASCIUTTI e TOVO, 2004], a solução por Dirlik tem se mostrada superior em termos de aproximação quando comparada a outros métodos de predição do dano, embora não haja qualquer embasamento teórico no equacionamento.

Também, [ARIDURU, 2004] aplicou o método de Dirlik para uma aplicação de estimativa da vida de fadiga para uma viga em alumínio sujeita a cargas aleatórias, tendo como resultado o exposto na Figura 5-23 e Figura 5-24.

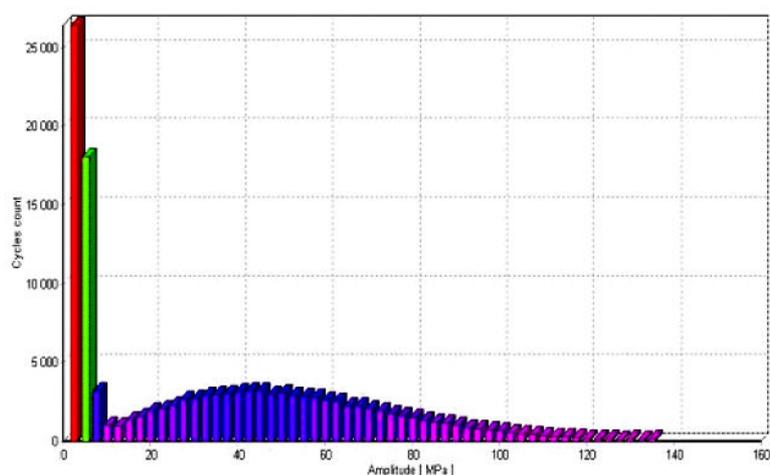


Figura 5-23 – Resultado das amplitude de tensão pela contagem de ciclos *Rainflow*.

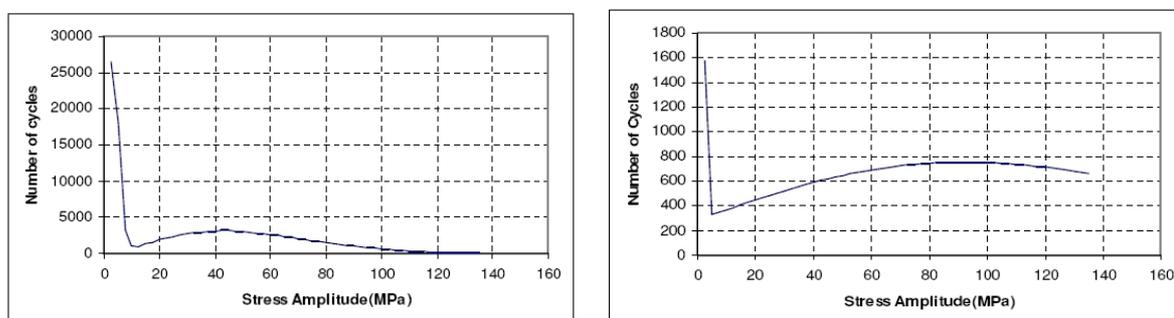


Figura 5-24 – Distribuição das amplitudes de tensão calculada através do método *Rainflow* no domínio do tempo e através de Dirlik.

5.3.3.1.11 Bishop

Visando ilustrar o mecanismo de cálculo de fadiga por solicitações aleatórias, [BISHOP e SHERRATT, 1990], demonstraram um cálculo simplificado para uma PSD bi-senoidal, como segue:

- i. Partindo-se de uma PSD bi modal, de frequências 1 Hz e 10 Hz, formando um espectro de banda larga como o da Figura 5-25:

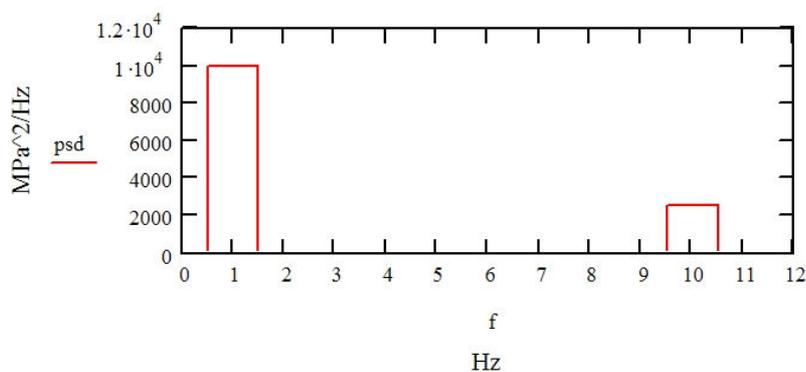


Figura 5-25 – PSD Bi modal com frequências centradas em 1Hz e 10Hz

- ii. Para o cálculo no domínio do tempo, calcula-se a amplitude da tensão correspondente a cada área da PSD centrada na frequência através da seguinte aproximação:

$$\sigma_{amplitude} = \sqrt{[PSD]} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{2}$$

e a variação de tensão, segundo a teoria de Narrow Band, é $2 \times \sigma_{amplitude}$

Assim,

$$\sigma = 2 \cdot \sqrt{[PSD]} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Senóide a 1Hz} \rightarrow \sigma = 2 \cdot \sqrt{10000} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{2} = 282 \text{ MPa}$$

$$\text{Senóide a 10Hz} \rightarrow \sigma = 2 \cdot \sqrt{2500} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{2} = 141 \text{ MPa}$$

Desta forma, um sinal no tempo pode ser gerado somando-se duas ondas senoidais na forma, sendo $A_1=141\text{MPa}$, $\omega_1=1\text{Hz}$, $A_2=70,5\text{MPa}$, $\omega_2=10\text{Hz}$

$$y(t) = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t$$

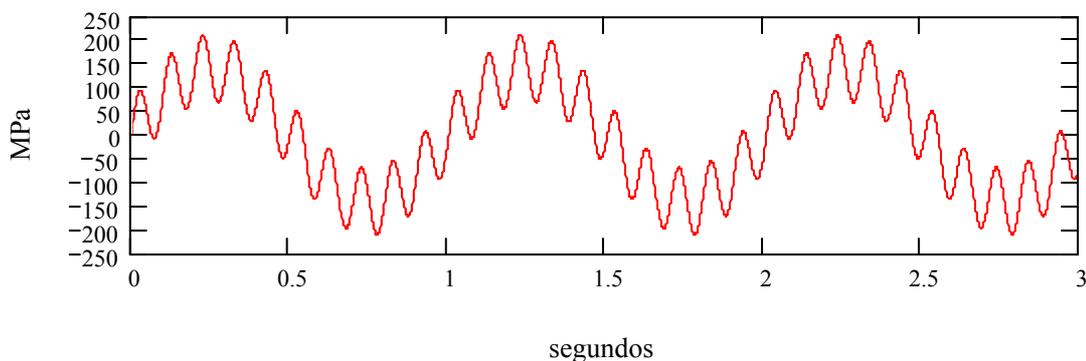


Figura 5-26 – Simulação da solicitação no tempo da PSD bi modal da Figura 5-25.

- iii. Contagem *Rainflow*: Aplicando-se *Rainflow*, o algoritmo extrai a frequência de 10Hz e range de 141MPa, e também um ciclo composto de 141MPa e 282MPa, somando-se 423MPa de frequência 1Hz. O número de ciclos e a variação encontram-se na Tabela 3.
- iv. Cálculo da vida no domínio do tempo: Considerando um aço de propriedades da curva σ - N^\ddagger , iguais a: $K=1 \times 10^{15}$ e $m= -4.2$. Tem-se que:

$$N = 1 \times 10^{15} \times \sigma^{-4.2}$$

[‡] Neste caso, a curva de σ - N para o material é caracterizada pela variação de tensão x número de ciclos

O número de ciclos para atingir a falha encontra-se na Tabela 3.

Tabela 3 – Contagem de ciclos *Rainflow* para a amostra no tempo

| Número de Ciclos por Segundo | Ciclo de tensão (variação) [MPa] | Ciclos para a Falha [N] |
|------------------------------|----------------------------------|-------------------------|
| 10 | 141 | 9.4E5 |
| 1 | 423 | 9.3E3 |

Aplicando-se a regra linear de acúmulo de dano de Palmgren-Miner, tem-se:

$$E[D] = \frac{10}{9.4 \times 10^5} + \frac{1}{9.3 \times 10^3} = 1.18 \times 10^{-4}$$

Que corresponde a uma vida de $\frac{1}{1.18 \times 10^{-4}} = 8474$ segundos

- v. Para o cálculo no domínio da frequência a partir da PSD, calculam-se os momentos espectrais conforme a equação (2-71). Para um detalhamento do cálculo dos momentos, vide Apêndice VI - Verificação do programa Matlab® para cálculo de momentos da PSD.

$$m_0 = 12500 \quad m_1 = 35000 \quad m_2 = 260000 \quad m_4 = 25010000$$

Com os quais se calcula $E[0]$ e $E[p]$ e através da equação(2-72) i , ii, iii

$$E[0] = 4,6$$

$$E[p] = 9,8$$

$$\alpha_x = 0,465$$

Com o m_0 , calcula-se o desvio padrão através da equação

$$\sigma = \sqrt{m_0} = 112 \text{ MPa}$$

Com o qual se calcula a amplitude de uma onda senoidal equivalente:

$$\sigma_{\text{variação}} = \sigma \cdot \frac{2\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = 315 \text{ MPa}$$

- vi. Cálculo da vida através de Basquin e Palmgren-Miner:

$$N = 1 \times 10^{15} \times S^{-4.2}$$

$$N = 32144 \text{ ciclos}$$

sendo $E[p]=9,8$ por segundo, a vida calculada é:

$$Tf = \frac{N}{E[p]} = \frac{32144}{9.8} = 3265 \text{ segundos}$$

5.3.3.1.12 Cebon

Propôs uma teoria para uma sollicitação de tensão do tipo bi-modal. Supondo uma excitação do tipo bi modal formada por duas amplitudes em distintas frequências:

$$y_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t)$$

$$y_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t)$$

sendo a resposta total conforme a Figura 5-27

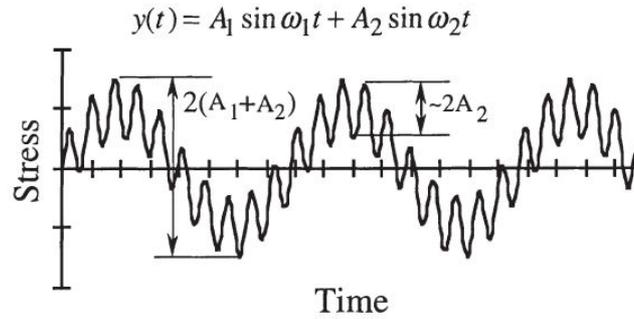


Figura 5-27 – Sinal de tensão no tempo formado por duas ondas senoidais.

Assumindo que as duas frequências sejam largamente espaçadas em frequência, banda larga, $\frac{\omega_2}{\omega_1} \geq 4$

Tornam-se evidentes dois ciclos de amplitude:

Um “longo” de amplitude $\sigma_1 \cong A_1 + A_2$, e número de ciclos $n_1 = \frac{\omega_1 T}{2\pi}$

Um “curto” de amplitude $\sigma_2 \cong A_2$, número de ciclos $n_2 - n_1 = \frac{(\omega_2 - \omega_1)T}{2\pi}$

Aplicando-se Palmgren-Miner com esses conceitos prévios, tem-se:

$$\sum_i D_i = \frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2 - n_1}{N_2} = \frac{T}{2\pi K} \left[\frac{\omega_1}{\sigma_1^{-m}} + \frac{\omega_2 - \omega_1}{\sigma_2^{-m}} \right] \quad (5-52)$$

Generalizando-se para as funções de densidade de probabilidade dos picos σ_1 e σ_2 $p_{\sigma_1}(\sigma)$ e $p_{\sigma_2}(\sigma)$ e usando a equação para banda larga segundo [NEWLAND, 1984]

$$\sum_i D_i = \int_0^{\infty} \frac{n(\sigma)}{N(\sigma)} d\sigma = E[p]T \int_0^{\infty} \frac{p_p(\sigma)}{N(\sigma)} d\sigma = 1 \quad (5-53)$$

assim,

$$\sum_i D_i = \frac{T}{2\pi K} \left[\omega_1 \int_0^{\infty} \frac{p_{\sigma_1}(\sigma)}{\sigma^{-m}} d\sigma + (\omega_2 - \omega_1) \int_0^{\infty} \frac{p_{\sigma_2}(\sigma)}{\sigma^{-m}} d\sigma \right] \quad (5-54)$$

Como $y_1(t)$ e $y_2(t)$ seguem individualmente distribuição de Rayleigh, a distribuição de picos σ_1 e σ_2 podem ser derivadas como:

$$p_{\sigma_2}(\sigma) = p_{A_2}(\sigma) = \frac{\sigma}{m_{0,2}} e^{-\frac{\sigma^2}{2m_{0,2}^2}} \quad (5-55)$$

$$p_{\sigma_1}(\sigma) = p_{A_1+A_2}(\sigma) = \int_0^\infty p_{A_1}(y) p_{A_2}(\sigma - y) dy = \frac{1}{m_{0,1} m_{0,2}} e^{-\frac{\sigma^2}{2m_{0,2}^2}} \int_0^\infty (\sigma y - y^2) e^{-Uy^2 + Vy} dy \quad (5-56)$$

sendo

$$U = \frac{1}{2m_{0,1}} + \frac{1}{2m_{0,2}}; \quad V = \frac{1}{m_{0,2}}$$

$m_{0,1}$ e $m_{0,2}$ são os momentos 0 de y_1 e 0 de y_2 . Utilizando-se (5-54) e (5-56), a vida a fadiga pode ser calculada através de:

$$T = \frac{2\pi K}{\omega_1 \int_0^\infty \frac{p_{\sigma_1}(\sigma)}{\sigma^{-m}} d\sigma + (\omega_2 - \omega_1) \int_0^\infty \frac{p_{\sigma_2}(\sigma)}{\sigma^{-m}} d\sigma} \quad (5-57)$$

sendo:

$$\int_0^\infty \frac{p_{\sigma_1}(\sigma)}{\sigma^{-m}} d\sigma = \frac{1}{m_{0,1} m_{0,2}} \int_0^\infty e^{-\frac{\sigma^2}{2m_{0,2}^2}} \sigma^m \left[\int_0^\infty (\sigma y - y^2) e^{-Uy^2 + Vy} dy \right] d\sigma$$

$$\int_0^\infty \frac{p_{\sigma_2}(\sigma)}{\sigma^{-m}} d\sigma = 2^{\frac{m}{2}} m_{0,2}^m \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right)$$

5.3.3.1.13 Sakai

SAKAI e OKAMURA [1995] propuseram um modelo para avaliação da vida de fadiga para espectros de tensão possuindo dois modos dominantes de vibração, adicionando-se duas distribuições de Rayleigh juntas. Sendo ω_1 e ω_2 duas frequências dominantes correspondentes a dois modos dominantes de vibração, a contribuição de cada modo à densidade espectral é proporcional à sua frequência dominante. A vida de fadiga pode ser aproximada por esta abordagem aplicando-se a equação (5-28) duas vezes e adicionando parâmetros de peso:

$$T = \frac{2^{\frac{1-m}{2}} \pi K}{\Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right)} \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \left(\omega_1 \frac{m_{0,1}^{1-m}}{m_{2,1}} + \omega_2 \frac{m_{0,2}^{1-m}}{m_{2,2}} \right) \quad (5-58)$$

sendo $m_{i,1}$ e $m_{i,2}$ os momentos i^{th} associados à primeira e segunda frequência natural.

Uma definição do processo de obtenção destes parâmetros encontra-se em [SAKAI, 1995].

5.3.3.1.14 Benasciutti e Tovo

[BENASCIUTTI e TOVO, 2004] propuseram um método para a estimativa do dano resultante de *Rainflow*, sem necessariamente aplicar o método de contagem de ciclos. Desta forma, formularam o dano estimado por *Rainflow*, $E[D_{RFC}]$, como:

$$E[D_{RFC}] = bE[D_{NB}] + (1-b)E[D_{RC}] \quad (5-59)$$

sendo $E[D_{RC}]$ o valor esperado do dano através de “*range counting*” proposto por [MADSEN et al. 1986] e $E[D_{NB}]$ o valor esperado para o dano para o processo de banda estreita, *Narrow-band*.

$$E[D_{RC}] \cong \frac{E[p]}{2\pi} \frac{1}{K} - \left(\sqrt{2m_0} \alpha_x\right)^m \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right) = E[D_{NB}] \alpha_x^{m-1} \quad (5-60)$$

O termo de peso “ b ” é dependente dos parâmetros da largura de banda da PSD. Porém, não existem teorias comprobatórias de sua dependência. Assim, adotou-se uma equação aproximada:

$$b_{approx}(\alpha_x, \beta_x) = \min\left\{\frac{\beta_x - \alpha_x}{1 - \beta_x}, 1\right\} \quad (5-61)$$

Substituindo as equações (5-61) e (5-60) em (5-59), tem-se:

$$E[D_{RFC}] = E[D_{NB}] \left[b + (1-b) \alpha_x^{m-1} \right] \quad (5-62)$$

$$E[D_{RFC}] = \frac{E[p]}{2} K - 1 \alpha_x \left(\sqrt{2m_0}\right)^m \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right) \left[b + (1-b) \alpha_x^{m-1} \right] \quad (5-63)$$

Desta forma, bastam os parâmetros da PSD, m_0 , m_1 , m_2 e m_4 e os parâmetros do material K e m . Após algumas simulações com PSD diversas a fim de melhor avaliar a

equação (5-61) chegaram a uma nova equação para a determinação do parâmetro “b” através da técnica de aproximação por mínimos quadrados:

$$b_{aprox} = \frac{(\beta_x - \alpha_x) \left[1,112(1 + \beta_x \alpha_x - (\beta_x + \alpha_x)) e^{2,11\alpha_x} + (\beta_x - \alpha_x) \right]}{(\alpha_x - 1)^2} \quad (5-64)$$

E o dano é calculado através da equação (5-63).

5.3.3.1.15 Jiao – Modelo Teórico para a predição de fadiga sobre carregamento combinado de vibração gaussiana e Impacto

Formulou uma estimativa de dano causada por uma sollicitação combinada de fadiga por sollicitação aleatória Gaussiana e impactos, como ilustrado pela Figura 5-28.

Resposta à sollicitação Gaussiana

Este modelo aborda a estimativa de vida de componentes através do cálculo de dano pela regra do dano acumulado de Palmgren-Miner e pela mecânica da fratura através do cálculo de propagação de trinca. [JIAO, 1995]

O dano à fadiga pode ser calculado através da equação (5-13) e de forma alternativa, aplicando-se a mecânica da fratura através da equação de Paris:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (5-65)$$

sendo:

a – tamanho inicial da trinca

N – número de ciclos de tensão

C e m – constantes de crescimento de trinca

ΔK – fator de intensidade de tensão, dado por:

$$\Delta K = F(a)\sigma\sqrt{\pi a} \quad (5-66)$$

$F(a)$ – função geométrica

Integrando-se (5-65), o tamanho da trinca no tempo T é obtido pela equação:

$$\int_{a_0}^{a(T)} \frac{da}{[F(a)\sqrt{\pi a}]^m} = C \sum_{i=1}^{N(T)} \sigma_i^m \quad (5-67)$$

Se a tensão média de propagação for definida como o valor esperado da variação de tensão (*Stress range*) elevado ao expoente da curva σ -N, isto é:

$$E[\sigma^m] = \frac{1}{N(T)} \sum_{i=1}^{N(T)} \sigma_i^m \quad (5-68)$$

Das equações (5-14) e (5-67) nota-se que o mandatório para a predição da vida de fadiga, tanto por dano como por propagação da trinca, está no cálculo da tensão média para propagação da trinca. Assim, se a tensão σ tiver uma função densidade de probabilidade $p(\sigma)$, a equação (5-68) fica:

$$E[\sigma^m] = \int_0^{\infty} \sigma^m p(S) ds \quad (5-69)$$

Sendo $x_1(t)$ uma variável aleatória Gaussiana de banda estreita, a amplitude de tensão máxima local σ_{a1} segue uma distribuição de Rayleigh, para um momento m_0 de $x_1(t)$.

$$p(\sigma_{a1}) = \frac{\sigma_{a1}}{m_0} \exp\left(-\frac{\sigma_{a1}^2}{2m_0}\right) \quad (5-70)$$

A variação de tensão para cada ciclo pode então ser considerada como duas vezes a tensão máxima local no ciclo, isto é, $\sigma = 2\sigma_{a1}$. Assim, o dano correspondente é:

$$D_{x_1} = \frac{E[0^+]T}{K} \int_0^{\infty} (2x_1)^m p(\sigma_{a1})(x_1) dx_1 = \frac{E[0^+]T}{K} \left(2\sqrt{2\sqrt{m_0}}\right)^m \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) \quad (5-71)$$

O valor médio de tensão de propagação de trinca é:

$$E[\sigma^m] = \left(2\sqrt{2\sqrt{m_0}}\right)^m \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) \quad (5-72)$$

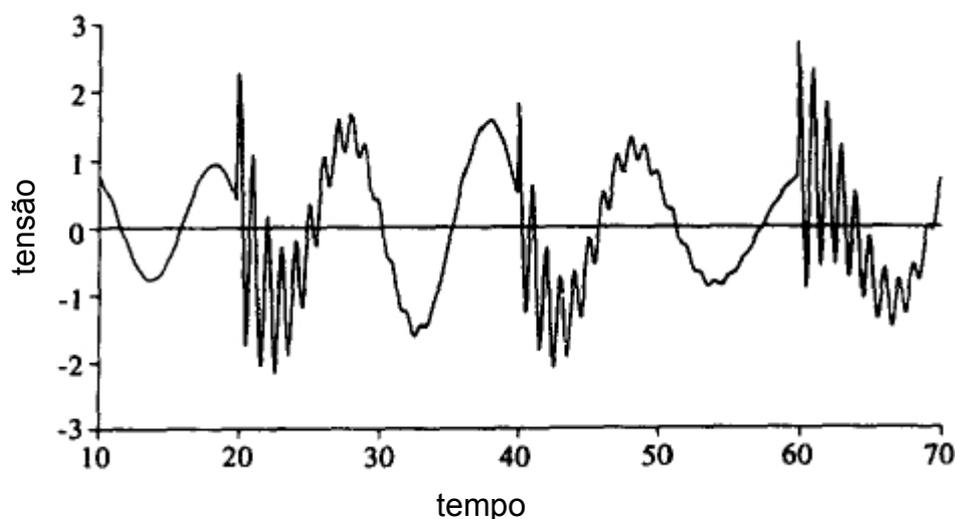


Figura 5-28 – Ilustração de uma resposta a uma solicitação combinada de carregamento Gaussiano e impacto. Fonte: [JIAO, 1995]

Resposta ao Impacto

A resposta ao impacto é expressa por:

$$V(t) = \sum_{k=1}^{N(T)} V_k \delta(t - t_k) \quad (5-73)$$

sendo $N(T)$ o número total de impactos no tempo T , V_k é a intensidade do k^{th} carregamento de impacto e $\delta(t-t_k)$ é uma função de delta de Dirac.

A resposta $Z(t)$ excitada por $V(t)$, pode ser expressa por:

$$Z(t) = \sum_{k=1}^{N(T)} \sigma_{2,k} e^{-\zeta \omega_2 t} \sin(\omega_2 t + \theta) \quad (5-74)$$

onde:

ζ – amortecimento estrutural

ω_2 – é a frequência natural de vibração

θ – é o ângulo de fase

$\sigma_{2,k}$ – é o pico de resposta

E o dano causado pela solitação x_2 de impacto é:

$$D_{x_2} = \frac{1}{K} \frac{2^m}{1 - e^{-2\pi\zeta m}} \int_0^{\infty} \sigma_2^m p(\sigma_{a2}) d\sigma_2 \quad (5-75)$$

Dano combinado de solitação Gaussiana e impacto

A dedução completa da resposta de um sistema sobre uma solitação combinada de tensão aleatória Gaussiana e impacto não é o escopo deste presente trabalho. Desta forma a dedução matemática completa pode ser consultada em [JIAO, 1995] sendo que a equação do dano final deduzida apresenta-se da seguinte forma:

$$DT = \frac{E[0^+]T}{K} E[\sigma^m] \quad (5-76)$$

onde:

$$E[\sigma^m] = \frac{1}{E[0^+]} \frac{2^m}{1 - e^{-2\pi\zeta m}} \int_0^{\infty} \sigma_{a2}^m p(\sigma_{a2}) d\sigma_{a2} + \frac{2^m}{m_0} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (z + \alpha \sigma_{a2})^m z \exp\left[-\frac{z^2}{2m_0}\right] p(\sigma_{a2}) dz d\sigma_{a2} dt \quad (5-77)$$

Sendo α um parâmetro de distribuição desenvolvido por [JIAO, 1995].

5.4 Síntese do Capítulo

Dos modelos de estimativa de vida sob solicitação aleatória no domínio da frequência estudados neste capítulo, nove serão aplicados para o cálculo de vida em fadiga para uma estrutura: Petrucci & Zuccarello, modelo de banda estreita (*Narrow Band*) descritos por Su e Sweitzer, modelos de Hancock, Chaudhury & Dover, Steinberg, Bishop, Wirsching e Dirlik. Também será realizado um cálculo de vida de fadiga no domínio do tempo para comparação, aplicando-se a metodologia de contagem de ciclos de tensão alternada segundo *Rainflow*.

Para tanto, foi desenvolvido um modelo estrutural e realizado medições experimentais de tensão, submetendo o mesmo, a uma solicitação aleatória imposta à base segundo uma PSD. O material especificado para os componentes da estrutura, bem como a PSD de solicitação escolhida, tem razões técnicas e práticas, visando atender o objetivo do trabalho. Assim, optou-se por um material que tivesse dados da curva de tensão x vida disponíveis na literatura, e uma PSD segunda norma ASTM que representasse a solicitação típica de um transporte rodoviário.

6 Descrição do Problema e Abordagem

Visando validar um modelo de análise de fadiga por solicitações aleatórias, bem como abranger e verificar todas as variáveis do processo de análise e simulação de fadiga aleatória espectral, criou-se um modelo simplificado para a validação numérico x experimental.

As teorias e critérios de análise e falha são aplicados a esse modelo, com o objetivo de estimar a vida do componente baseado nos dados experimentais e numéricos. Essa estimativa de vida é, então, verificada com testes de vida em corpos de prova submetendo-os a esforços aleatórios até a falha dos mesmos.

Após a validação do modelo e comparação dos diversos métodos de estimativa de vida, como aqueles vistos no capítulo 5.3, a mesma metodologia de estimativa de vida sob solicitações aleatórias pode ser aplicada para a análise e cálculo da vida de fadiga para um sistema mecânico, como será visto no item 8 Estudo de Caso: Aplicação em Componente do Compressor.

Para tanto, algumas hipóteses e simplificações serão necessárias de modo a atingir o objetivo deste trabalho, como por exemplo:

- i. as curvas PSD de excitação serão aquelas segundo normas ISO e ASTM;
- ii. propriedades do material segundo aquelas levantadas por [PUFF, 2002];
- iii. critérios de acúmulo de dano: linear Palmgren-Miner

A escolha do critério de acúmulo do dano segundo Palmgren-Miner se dá pela facilidade na implementação numérica, haja visto que sua formulação é linear e simples de ser aplicada. Também pela ampla utilização de seu modelo pelos autores estudados no capítulo anterior.

Um fluxograma simplificado da abordagem aplicada para uma análise de fadiga aleatória está mostrado na Figura 6-1.

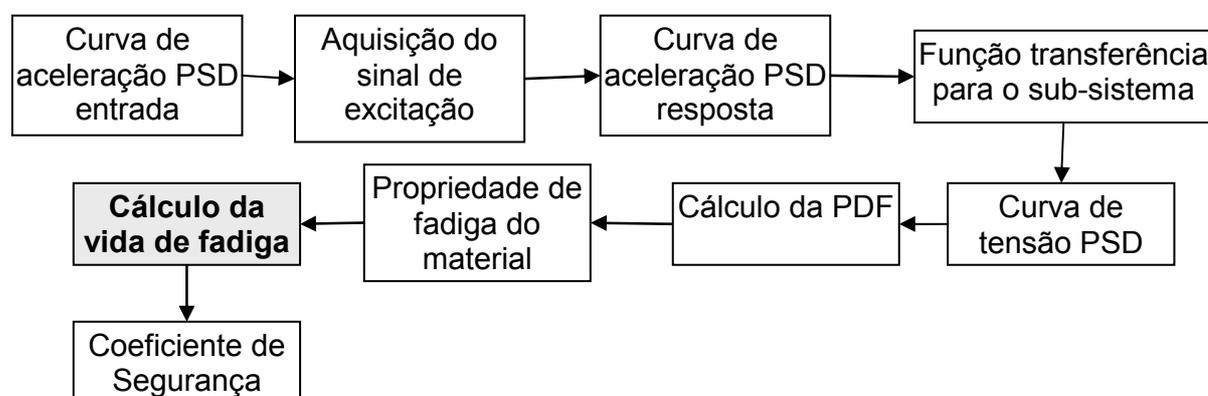


Figura 6-1 – Fluxograma simplificado de estimativa e análise de fadiga por solicitações aleatórias.

6.1 Fluxograma de Análise

Uma análise completa de fadiga por vibrações aleatórias envolve uma série de considerações, manipulação de dados de arquivos e a integração de vários software distintos, sendo softwares matemáticos, de CAD, CAE entre outros. Assim, um fluxograma de todo o processo é mandatório para o desenvolvimento da análise conforme a Figura 6-2.

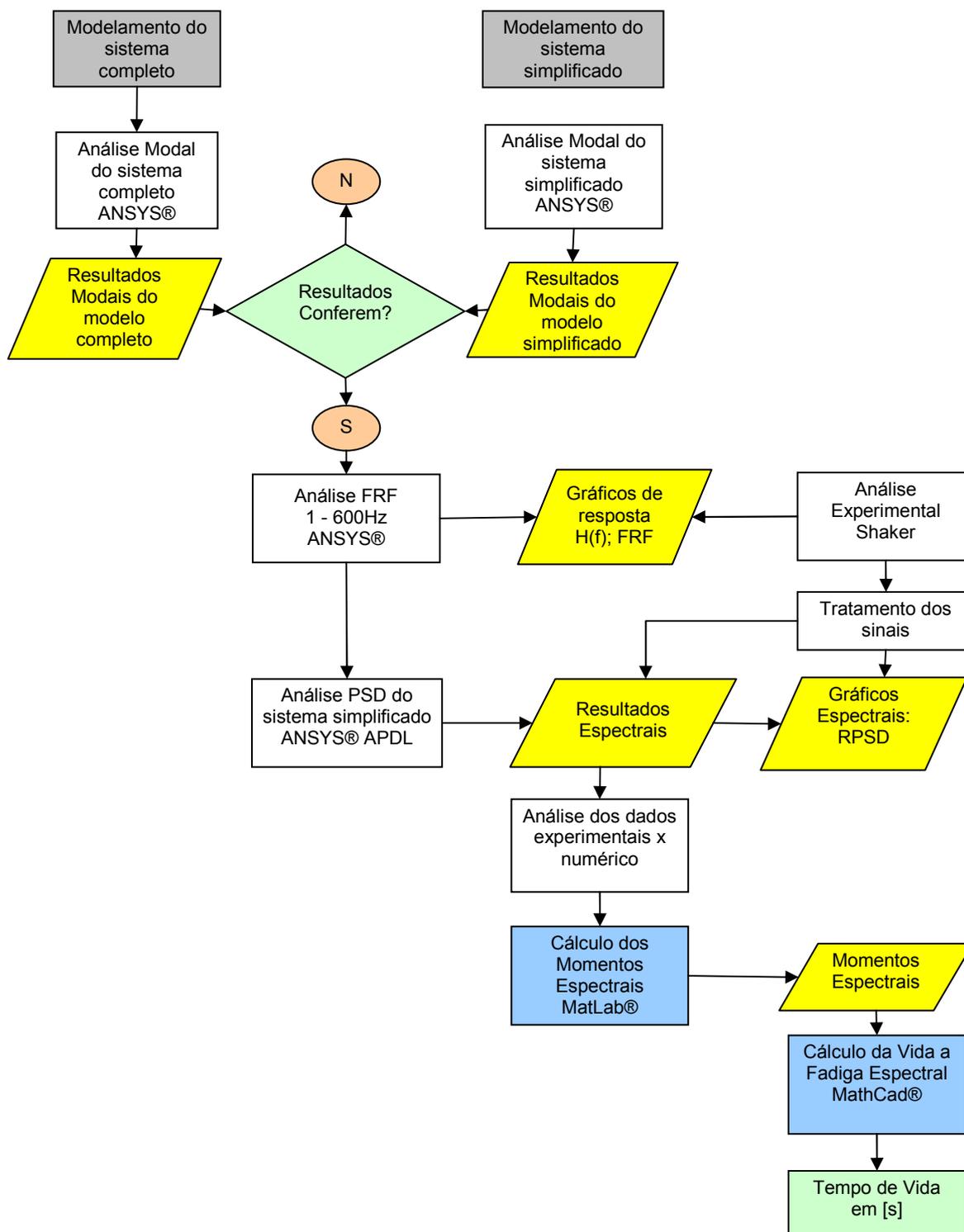


Figura 6-2 – Fluxograma de uma análise de fadiga espectral por solicitações aleatórias.

6.2 Sistema Simplificado Sugerido

Visando estabelecer uma metodologia de análise para fadiga por solicitações aleatórias, um modelo do tipo viga-massa foi escolhido para o estudo. A vantagem do modelo selecionado é o de poder aplicar soluções analíticas, redução de variações e incertezas do processo causados por modelos mais complexos, e simplificação visando a intercambialidade dos corpos de prova e o dinamismo dos ensaios de fadiga. O material escolhido foi tal que tivesse dados precisos e confiáveis na literatura e ao mesmo tempo de fácil acesso e disponibilidade. Optou-se por um aço carbono laminado a frio de processo de obtenção por corte a laser, de modo que fosse o mesmo daquele cuja curva de fadiga fora obtido segundo [PUFF, 2002].

6.2.1 Modelo

O sistema mecânico sugerido para o estudo dos aspectos envolvidos em uma análise de fadiga por solicitação aleatória pode ser observado através do modelo CAD 3D, conforme Figura 6-3 e Figura 6-4. Consiste em uma base e torres de fixação em aço carbono, uma viga intercambiável constituindo o corpo de prova submetido à tensão, e uma massa, também intercambiável, na extremidade. O dispositivo foi concebido objetivando a simplicidade e a intercambialidade dos corpos de prova. O desenho detalhado dos componentes encontra-se como anexo no Apêndice VII - Desenho dos componentes. O sistema consiste nos seguintes componentes, conforme Tabela 4.

Tabela 4 – Descrição dos componentes do sistema

| Componente | Material | Descrição | Propriedades | | |
|----------------|-------------------|--|--------------------|-------|---------------------------------|
| | | | E [GPa] | ν | ρ [Kg/mm ³] |
| Base | SAE 1020 | Usinado fresadora | 210 | 0,3 | 7,85E-9 |
| Fixador | SAE 1020 | Usinado fresadora | 210 | 0,3 | 7,85E-9 |
| Haste | aço mola SAE 1075 | laminado a frio, temperado e cortado por eletroerosão a fio sem acabamento superficial nem tamboreamento | 207 ⁽¹⁾ | 0,3 | 7,85E-9 |
| Massa inferior | SAE 1020 | Usinado fresadora | 210 | 0,3 | 7,85E-9 |
| Massa superior | SAE 1020 | Usinado fresadora | 210 | 0,3 | 7,85E-9 |
| Parafuso | | comercial | 210 | 0,3 | 7,85E-9 |

(1) – conforme determinado experimentalmente por [PUFF, 2002]

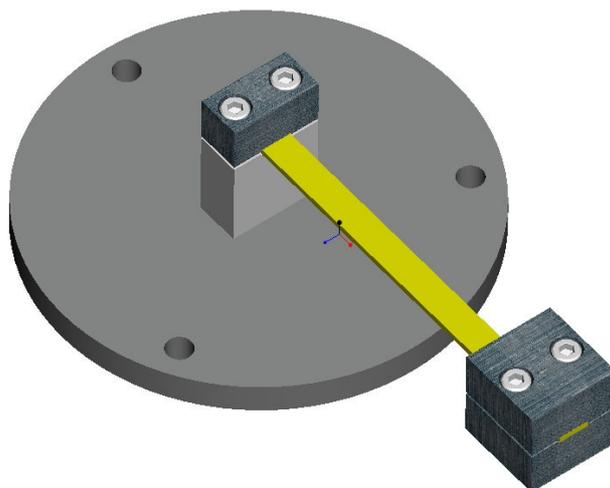


Figura 6-3 – Modelo completo em CAD, (versão V1) composto de: base para fixação no *shaker*, viga corpo de prova e massa.

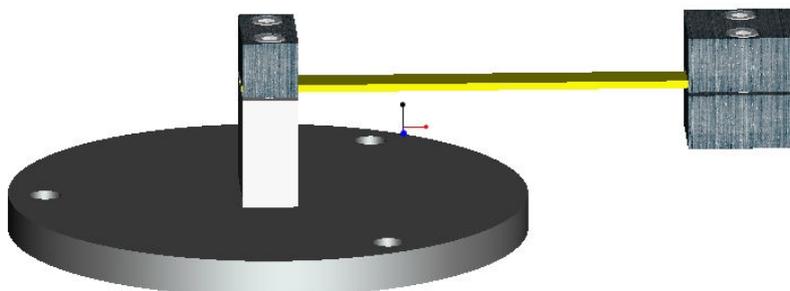


Figura 6-4 – Representação CAD 3D do sistema utilizado para o presente estudo

Para a análise por elementos finitos, uma simplificação pode ser realizada visando acelerar o processo de convergência e o tempo de processamento.

Para tanto, foi realizada uma análise modal do sistema completo para a verificação dos modos de vibração, considerando contato em todos os componentes, e também análise modal para um sistema simplificado equivalente em termos de rigidez e massa.

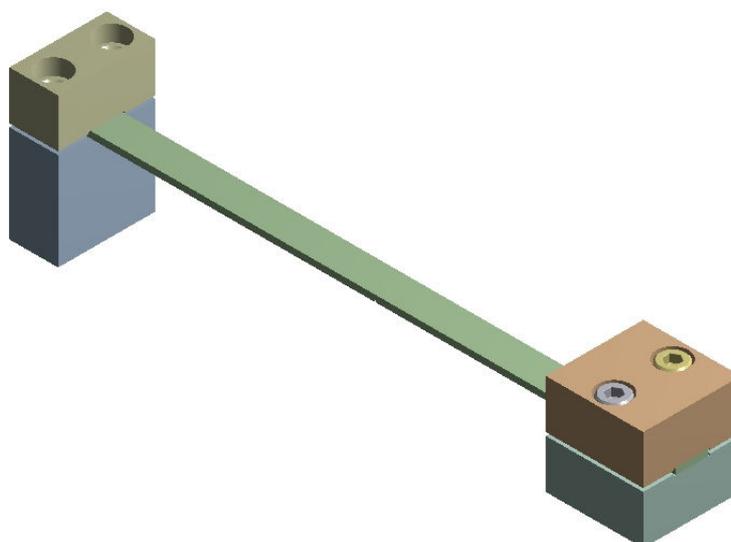


Figura 6-5 – Modelo FEA completo para análise modal ANSYS®

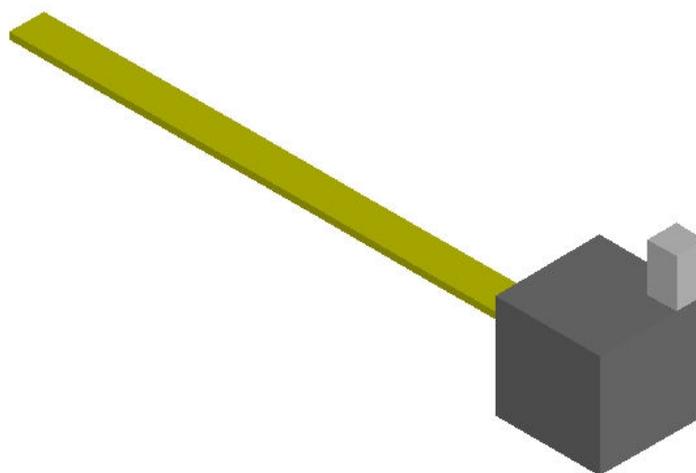


Figura 6-6 – Modelo FEA simplificado para análise modal e PSD ANSYS®. Detalhe para a inclusão da massa equivalente do acelerômetro visando correlações com o experimento

Os valores comparativos dos modos de vibração e frequências modais estão na Tabela 6.

Estimativa da frequência natural para o modelo sugerido

A frequência natural fundamental de uma viga delgada e uniforme com massa concentrada na extremidade é dada pela equação:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{3EI}{L^3(M + 0,24Mb)} \right]^{1/2} \quad (6-1)$$

Esta equação, de modo geral, estima com um erro de 1% da solução exata. É derivada da solução pela técnica de energia de Rayleigh o qual está descrito em [TIMOSHENKO et al., 1974].

Para o modelo sugerido, a aplicação da equação (6-1) resulta nos seguintes valores:

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{10 \cdot 2^3}{12} = 6,67 \text{ mm}^4$$

$$M = 212 + 7 = 219 \text{ g}$$

$$Mb = 23,4 \text{ g}$$

$$L = 165 \text{ mm}$$

A frequência calculada é 10,19 Hz

Aplicando-se por outro lado, o método aproximado por Dunkerley (Capítulo 3.2.2.2), a solução para aproximação da primeira frequência natural para o sistema viga-massa é:

f da viga sem a massa = 61,2 Hz

f da massa sobre uma mola de rigidez equivalente a da viga = 10,3 Hz

A frequência do sistema é 10,18 Hz

6.2.2 Excitação – PSD

Para a excitação pela base, adotou-se a PSD segundo a norma *ASTM Practice D4169, assurance level II*, conforme a Tabela 5. A representação gráfica da PSD pode ser observada na Figura 6-7.

Tabela 5 – Valores da PSD segundo norma ASTM

| Frequência [Hz] | Nível [g^2/Hz] |
|-------------------|--------------------|
| 1 | 0,00005 |
| 4 | 0,01 |
| 16 | 0,01 |
| 40 | 0,001 |
| 80 | 0,001 |
| 200 | 0,00001 |
| Nível médio (rms) | 0,52 |

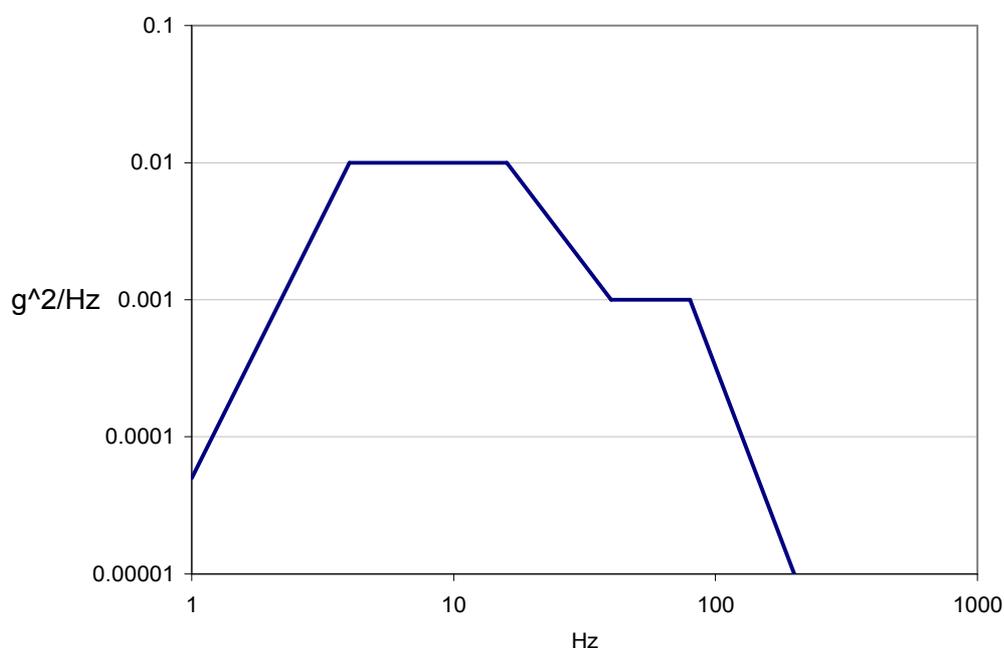


Figura 6-7 – Representação gráfica da PSD de excitação

Exemplos de outras PSD de normas de transporte e embalagem podem ser vistas no Apêndice IV – PSD segundo normas.

6.2.3 Material

O material e condição de fornecimento foi escolhido visando a redução de incertezas caso fosse escolhido um material que não houvesse informações precisas disponíveis na literatura. A curva da Figura 6-8 foi obtida de [PUFF, 2002].

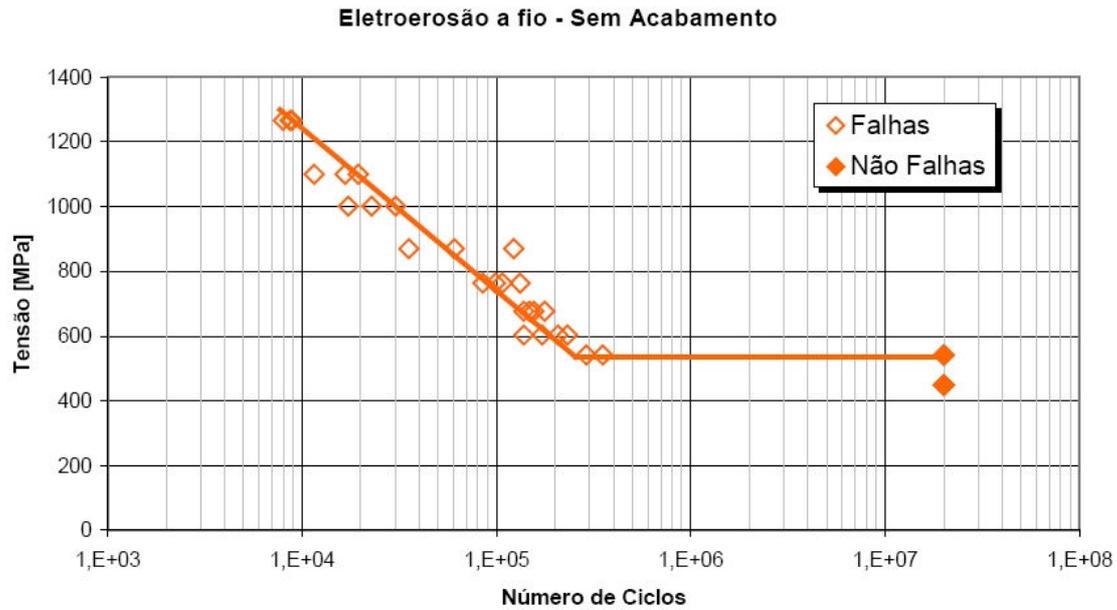


Figura 6-8 – Curva σ -N para o material da haste, corpo de prova segundo levantamento experimental realizado por [PUFF, 2002]

Extração dos parâmetros para a equação de Basquin, equação (5-11):

Dois pontos do gráfico da região de vida finita, em unidades de tensão = [Pa].

| Tensão [$\times 10^6$ Pa] | Vida [N ciclos] |
|-------------------------------|--------------------|
| 600 | 1,6E5 |
| 1200 | 1,27E4 |

Assim, aplicando-se Basquin para os dois pontos acima:

$$\begin{cases} 1,6E5 = C \cdot 600E6^m \\ 1,27E4 = C \cdot 1200E6^m \end{cases}$$

Aplicando-se o logaritmo nos dois lados da equação e subtraindo, tem-se:

$$C = 5,9E36$$

$$m = 3,598$$

Então, a equação de Basquin fica:

$$N = 5,9E36 \times S^{-3,598}$$

(6-2)

E a tensão limite de fadiga segundo a Figura 6-8 é

$$S_f = 535 \text{ MPa}$$

6.3 Síntese do Capítulo

O modelo desenvolvido visa a obtenção da resposta de tensão aleatória, no domínio do tempo e da frequência, quando submetido a uma PSD de aceleração imposta à base. A vantagem em se utilizar, para o corpo de prova (haste), um material que possui uma curva de tensão x vida obtida experimentalmente, é a credibilidade e a redução da incerteza do resultado de estimativa de vida.

No próximo capítulo, os resultados experimentais de tensão e aceleração deste modelo sugerido, serão comparados com os resultados provenientes de uma análise por elementos finitos, MEF da estrutura discretizada. De posse dos resultados de tensão, os modelos de estimativa de vida do capítulo anterior são aplicados para a estimativa de vida em fadiga, e estes, comparados com a vida em fadiga obtidos em testes experimentais de fadiga.

7 Análise Numérica e Resultados Experimentais

Nos itens subsequentes, os resultados numéricos, bem como os dados experimentais serão abordados e analisados, eventualmente de forma alternante ou reunidos em um mesmo gráfico visando a corroboração de um com o outro. Os dados numéricos provém de análises e simulações FEM do modelo simplificado, o qual foi validado numericamente quando comparado com o modelo completo. O modelo numérico com a malha de elementos finitos está representado pela Figura 7-1.

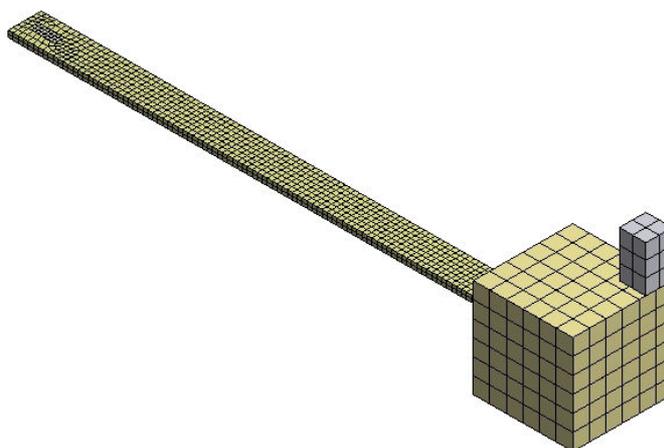


Figura 7-1 – Discretização do modelo em uma malha de Elementos Finitos, utilizada para as análises numéricas. Malha hexaédrica de elemento parabólico.

Visando a compreensão dos dados que se seguem, tanto experimental quanto numérico, convém localizar e denominar os seguintes pontos na estrutura onde foram realizadas medições de tensão e aceleração, Figura 7-2.

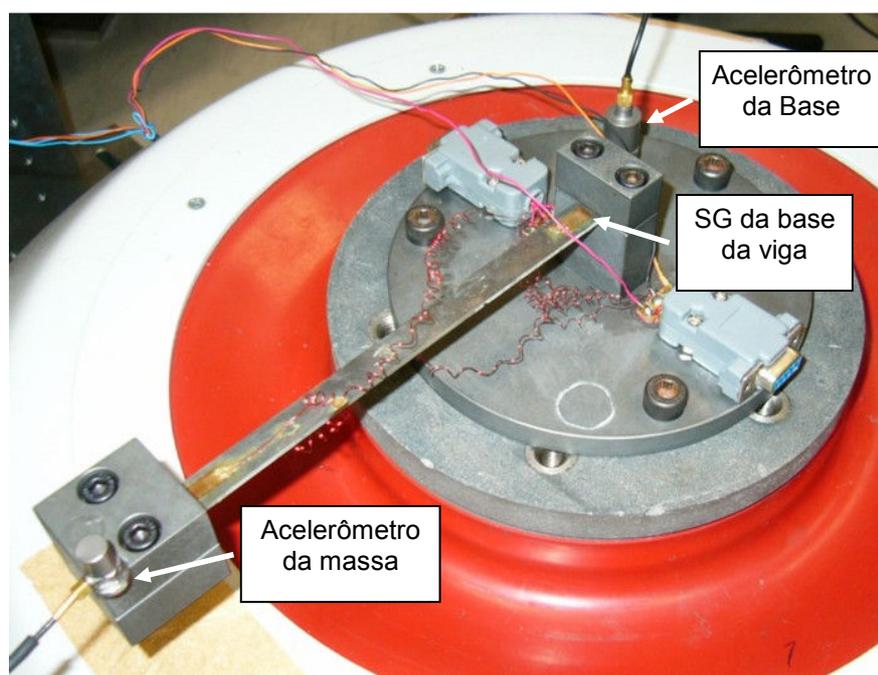


Figura 7-2 – Sistema experimental e localização dos pontos de medição.

7.1 Análise Modal

Realizou-se uma análise modal numérica no software ANSYS® partindo-se de uma condição de contorno de vibração livre com o modelo fixado à base. Os modos de vibração e as frequências modais estão representados graficamente na Figura 7-3

Os resultados de análise modal estão representados na Tabela 6.

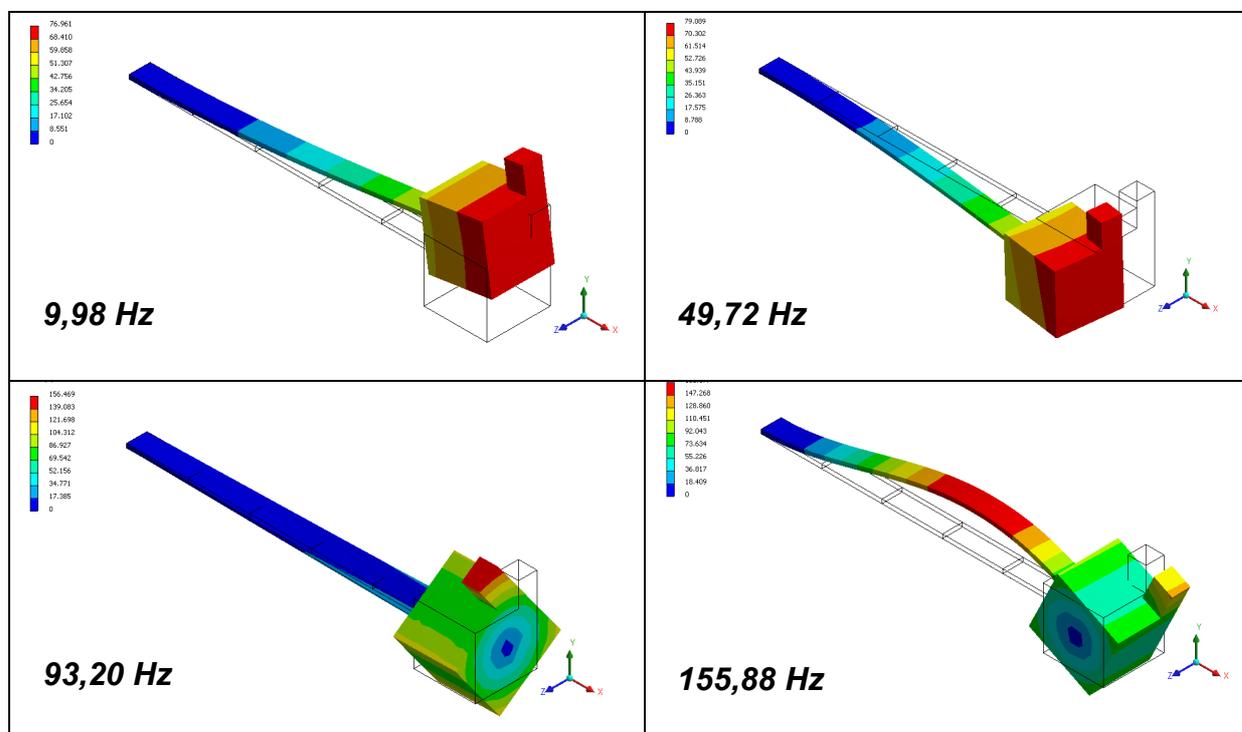
Tabela 6 – Resultados modais para o sistema completo e o simplificado.

| Modo # | Frequência [Hz] | | | | Característica |
|--------|-----------------|---------------------|--------------|-----------|-----------------|
| | Modelo Completo | Modelo Simplificado | Experimental | Erro % ** | |
| 1 | 9,99 | 9,98 | 10,44 | 4,3 | Flexão vertical |
| 2 | 48,46 | 49,72 | * | – | Flexão lateral |
| 3 | 93,46 | 93,20 | 94,45 | 1,3 | Torção |
| 4 | 154,14 | 155,88 | 154 | 1,2 | Flexão vertical |
| 5 | 511,79 | 523,70 | 495,7 | 5,6 | Flexão vertical |
| 6 | 801,34 | 791,56 | * | – | Flexão lateral |

* A medição experimental foi feita com um acelerômetro colocado na extremidade da massa na direção vertical e a varredura na faixa de frequência de 1 a 600 Hz.

** Erro calculado para o Modelo Simplificado tendo como referência o Experimental

Os modos laterais não foram possíveis de serem medidos experimentalmente em função da localização do acelerômetro. Porém, estes modos podem ser desconsiderados dada a direção da excitação imposta a base ser vertical.



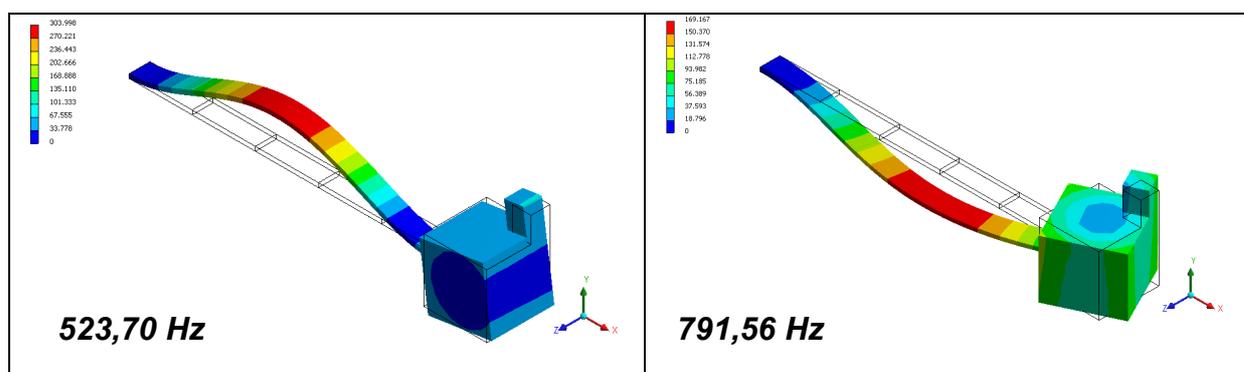


Figura 7-3 – Resultado da análise modal. Seis primeiros modos de vibração e as respectivas frequências naturais. A configuração inicial também está representada (*Wireframe*).

7.2 Análise Harmônica

Uma análise harmônica numérica da estrutura foi realizada aplicando-se uma aceleração de 0,3g imposta à base. A mesma varredura de frequência, de mesma intensidade foi realizada experimentalmente visando à comparação dos resultados.

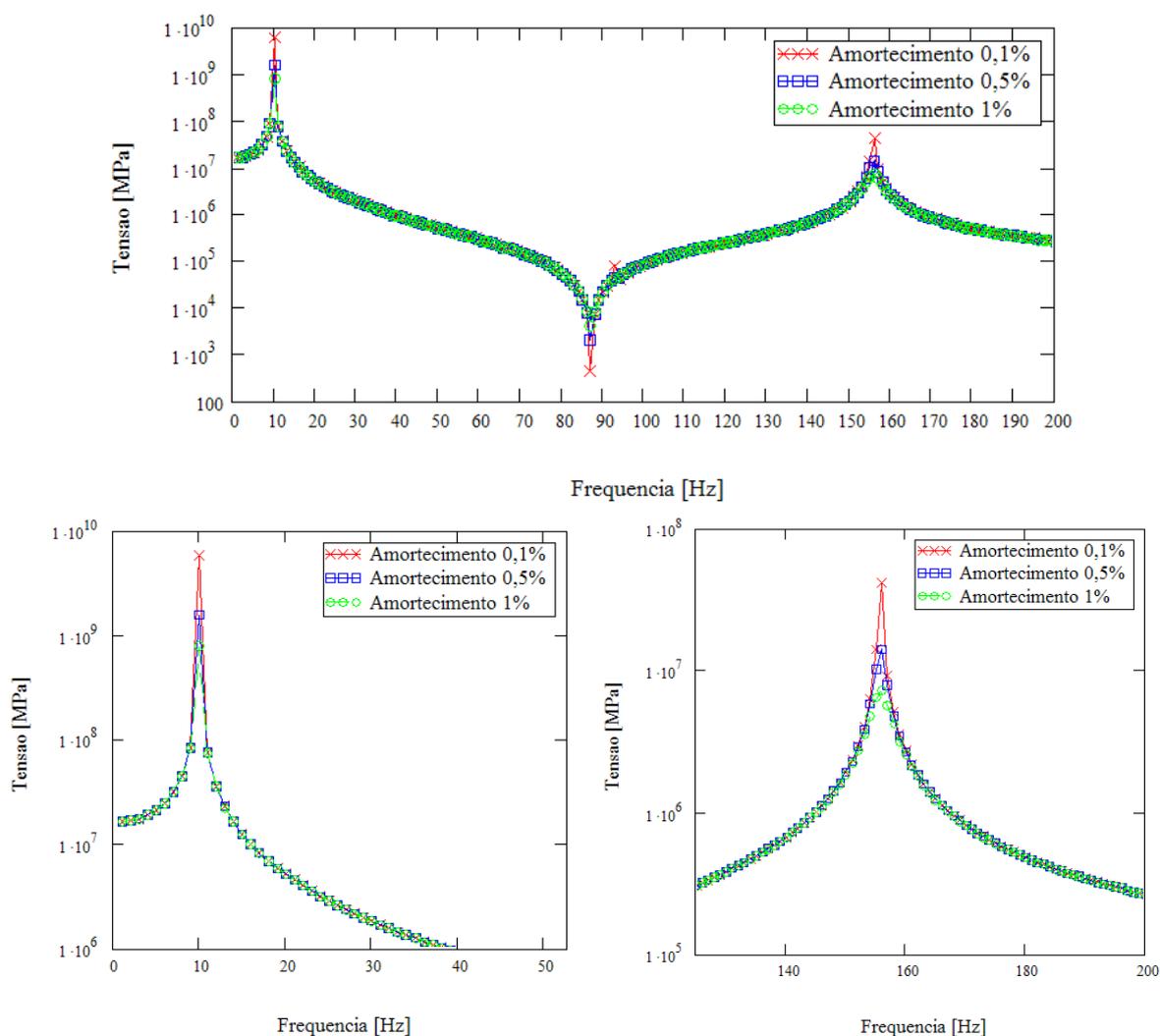


Figura 7-4 – Resposta em frequência do sistema proveniente de uma análise harmônica de aceleração fixa e variando-se a frequência de 1 a 200Hz. Avaliação da resposta do sistema variando-se o valor do amortecimento estrutural. As janelas mostram detalhes dos dois modos proeminentes nesta faixa de frequência.

Através da análise da resposta em frequência da Figura 7-4, percebe-se o efeito do valor de amortecimento na resposta da tensão. Este efeito interfere no valor máximo da tensão, tendo assim, um grande impacto na estimativa da vida de fadiga.

7.3 *Análise Modal Experimental - Impactação por Martelo*

Objetivando-se determinar experimentalmente a resposta em frequência da estrutura, realizou-se uma análise de impactação com martelo (ponteira em aço) e medição da resposta em função da frequência. O resultado da FRF obtido na impactação e analisados através do software Pulse[®] está representado na Figura 7-5.

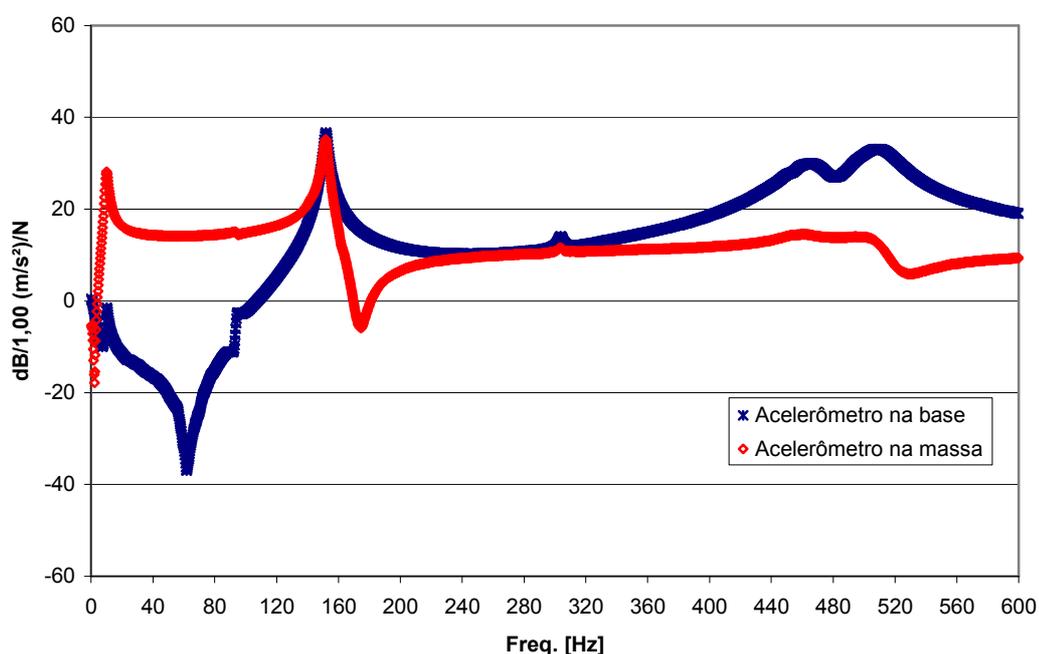


Figura 7-5 – Resposta em frequência da estrutura proveniente do teste de impactação por martelo

O ensaio foi realizado impactando-se a extremidade do modelo, na massa, e o acelerômetro foi fixado em duas regiões distintas: próximo à base e na massa. Em ambos observam-se os modos em 10 Hz e 153 Hz, sendo que o modo de 520 Hz aparece mais evidente naquela medição com o acelerômetro localizado na base.

7.4 *Análise Harmônica - “Varredura” de 1-600Hz*

Visando obter a resposta em frequência da estrutura quando submetida a uma aceleração imposta à base, realizou-se experimentalmente uma varredura em frequência em uma faixa de 1 a 600Hz de aceleração constante de 0,3g. A resposta de aceleração e $H(f)$ da estrutura está representada nas Figura 7-6 a Figura 7-9.

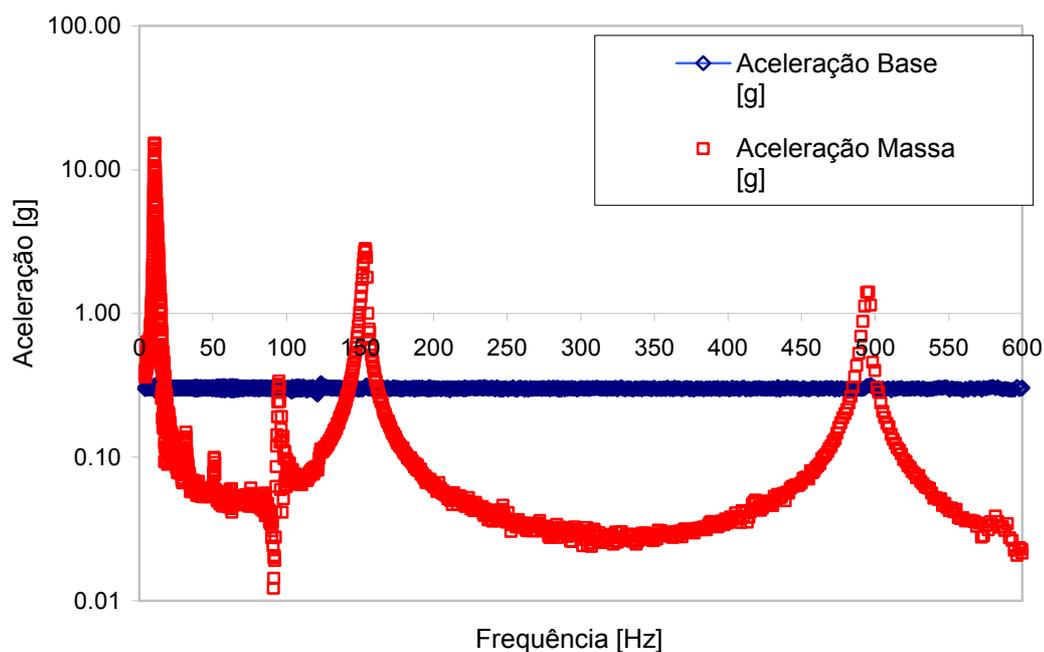


Figura 7-6 – Resposta em frequência experimental da amplitude da aceleração em função da aceleração imposta à base. Varredura de aceleração constante de 0,3g variando-se a frequência de 1 a 600 Hz.

Analisando-se a Figura 7-6 é possível observar as ressonâncias que ocorrem nas frequências naturais. Comparando-se os valores da Figura 7-3, observam-se ressonâncias em 10,4 Hz (1º modo), 94,4Hz, (3º modo), 155 (4º modo) e 495,7 (5º modo). No primeiro modo de vibração, o fator de multiplicação da aceleração resultante pela aceleração na base é de $15,20/0,3 = 50,67$.

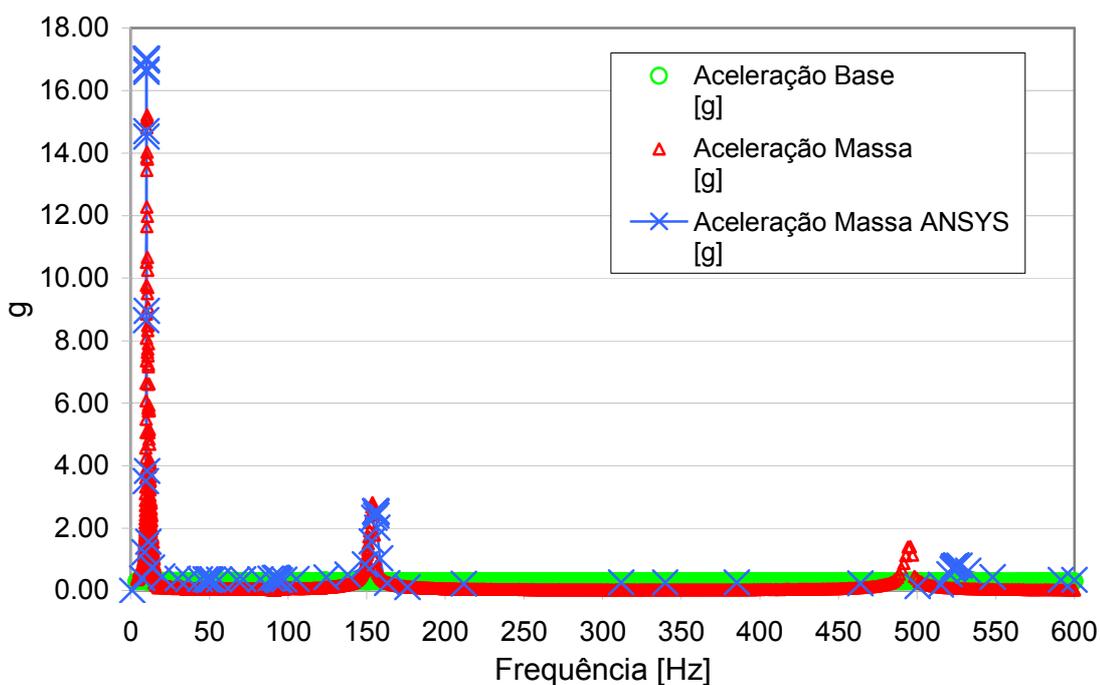


Figura 7-7 – Resposta em frequência experimental e numérica, resultante da aceleração constante de 0,3g imposta à base.

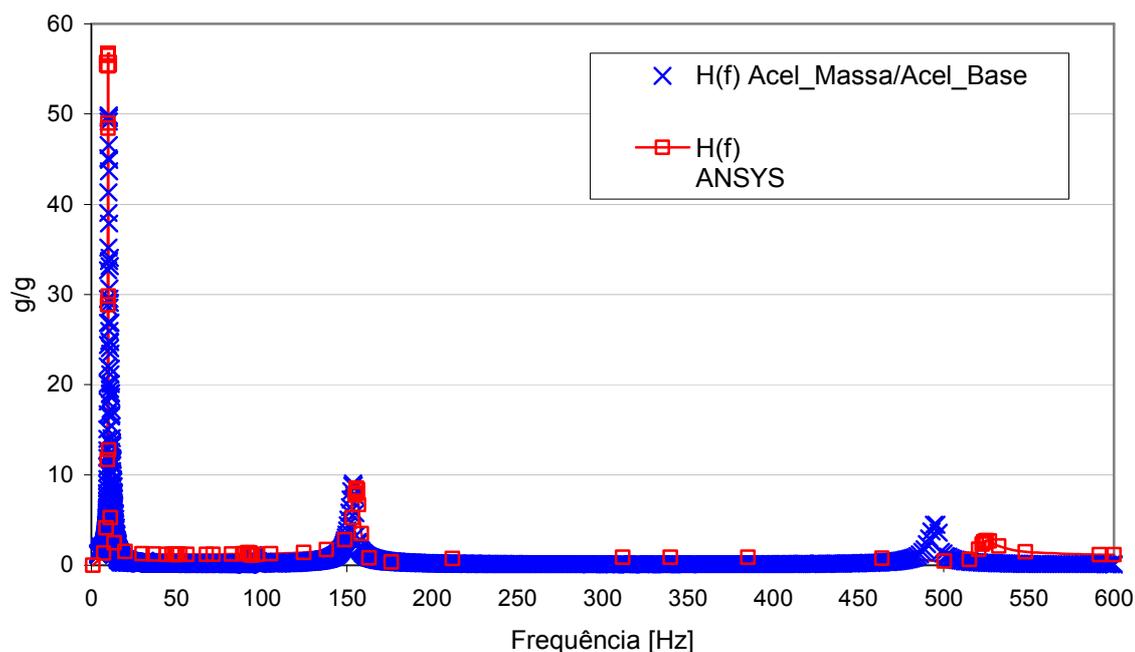


Figura 7-8 – resposta em frequência experimental e numérica de uma varredura em frequência de 1 a 600Hz. Função de transferência $H(f)$ sob uma aceleração constante da base de 0,3g.

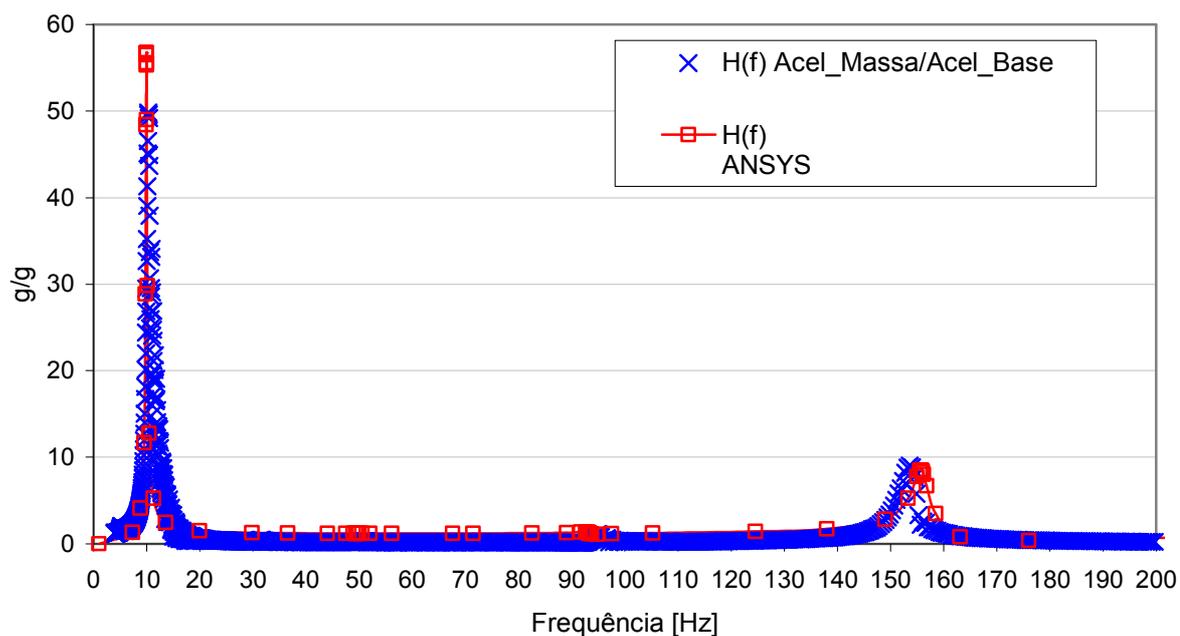


Figura 7-9 – Ampliação da Figura 7-8 para a faixa de frequência de 1 a 200Hz.

7.4.1 Determinação experimental do Amortecimento

Segundo [NASHIF, 1985], o amortecimento estrutural pode ser obtido através da resposta característica de certas estruturas. A resposta dinâmica em estado permanente de um sistema de 1 grau de liberdade, excitado por uma força harmônica de amplitude constante, pode ser observada pelos seguintes aspectos: largura de banda da resposta em

frequência, pela amplitude de resposta na ressonância, gráficos de Nyquist, decaimento da amplitude de vibração, etc.

Um dos métodos de determinação do coeficiente de amortecimento é a medição da largura da banda entre dois pontos na curva de resposta em frequência, onde a resposta é uma fração da amplitude máxima da ressonância, Figura 7-10. Convenientemente adotam-se aqueles pontos onde a amplitude da resposta é $1/\sqrt{2}$ vezes a máxima resposta. A largura da banda nestes dois pontos é chamada de “banda de meia-potência”. Esta razão de amplitudes de $1/\sqrt{2}$ corresponde a uma redução na escala decibel de:

$$20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -3,01 \text{ dB} \quad (7-1)$$

daí o método ser normalmente chamado de “banda de 3dB”.

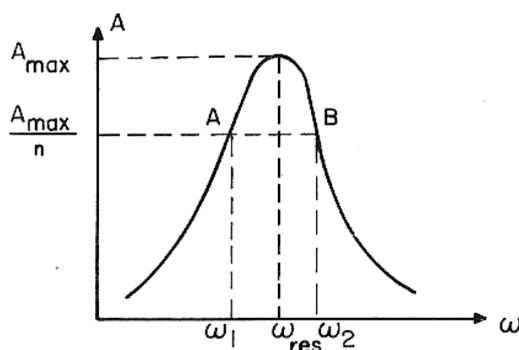


Figura 7-10 – Método de cálculo do amortecimento através da banda fracional de potência.

Também segundo [NASHIF, 1985] através de operações algébricas para o cálculo da amplitude da resposta em frequência no ponto de máxima ressonância e nos dois pontos de $1/\sqrt{2}$, chega-se a:

$$\zeta = \frac{\Delta \omega}{2 \cdot \omega_{res}} \quad (7-2)$$

assim, aplicando-se a equação (7-2) baseado nas informações extraídas da Figura 7-11 e Figura 7-12 tem-se para o amortecimento:

$$\zeta = \frac{10,46 - 10,26}{2 \cdot 10,36} = 0,00965 \approx 1\% \quad (7-3)$$

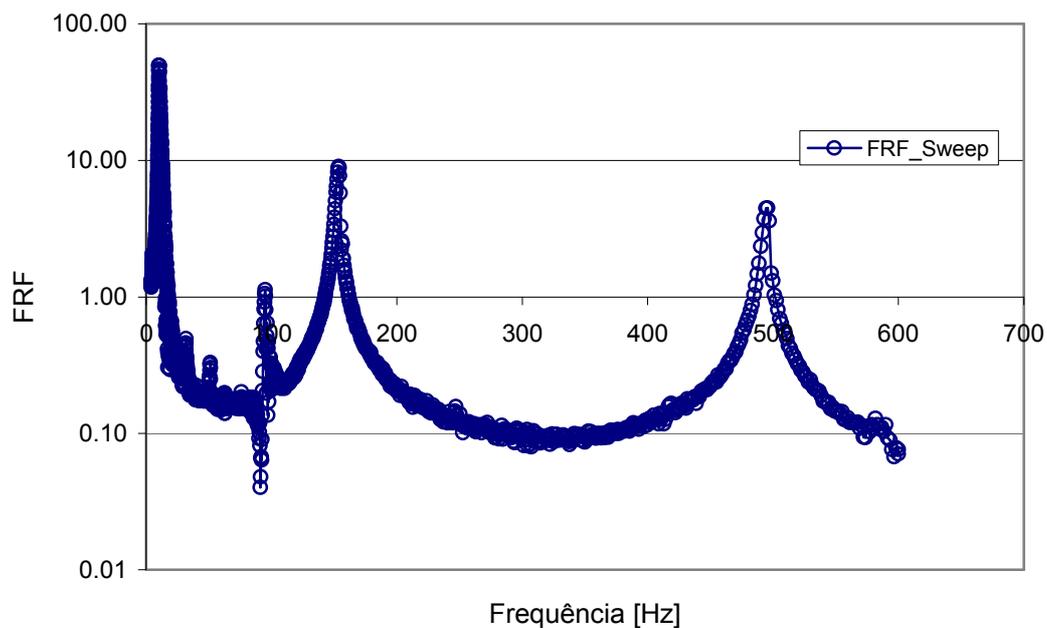


Figura 7-11 – FRF de aceleração obtido da análise harmônica experimental com amplitude constante imposta a base de 0,3g.

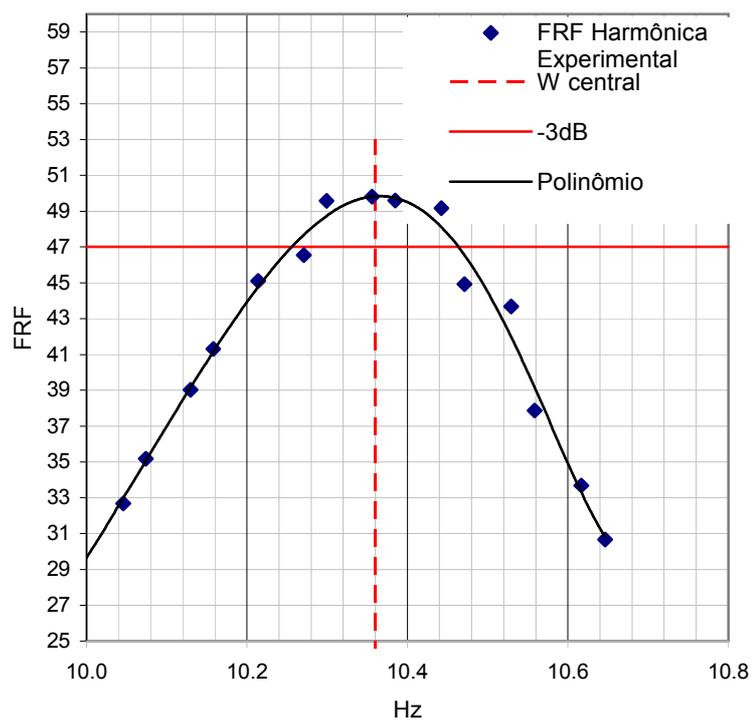


Figura 7-12 – Ampliação da FRF para obtenção do amortecimento no primeiro modo de vibração.

7.5 Análise Espectral Experimental - PSD

7.5.1 Aceleração no tempo

O sistema foi submetido a PSD imposta à base sendo medidas a aceleração e a tensão. O sinal no tempo está representado nas Figura 7-13 a Figura 7-16.

Do gráfico da Figura 7-13 é possível verificar a resposta de ampliação do sistema, através da medida de aceleração da massa quando comparada à aceleração da base. Realizou-se a aquisição do sinal da base no tempo em 3 tempos distintos visando a verificação da propriedade estocástica do sinal estacionário. Observa-se a aceleração máxima da base próxima a 1,5g enquanto que a massa acelera a níveis de 5g.

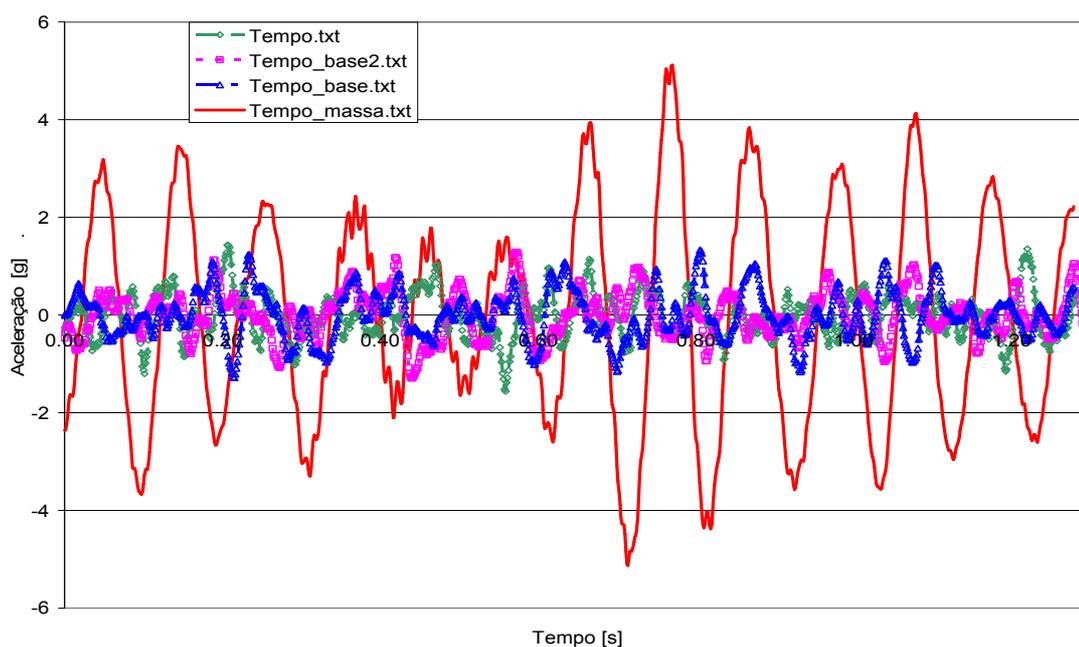


Figura 7-13 – Resposta de aceleração no tempo da base e da extremidade da viga (massa), de uma aceleração aleatória imposta à base. Observa-se a amplificação da aceleração no tempo.

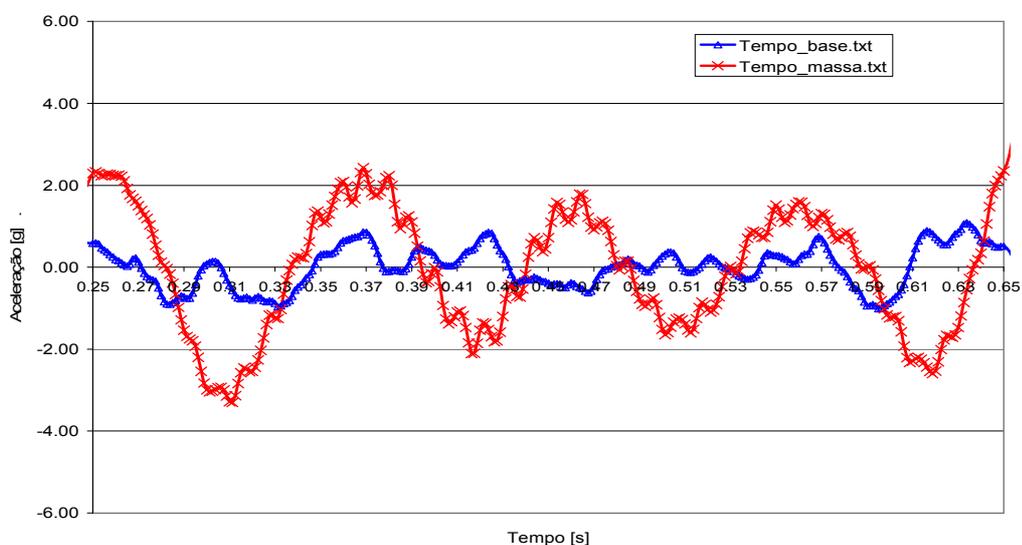


Figura 7-14 – Resposta no tempo da estrutura excitada por uma PSD na base. Resposta da base e da massa da extremidade.

Analisando-se o gráfico da Figura 7-14, pode-se visualizar nitidamente dois aspectos relacionados à medição de aceleração da base e da massa:

- 1 – a resposta no tempo da base caracteriza-se por um padrão estocástico aleatório dentro da faixa de frequência a qual a PSD de excitação engloba de 1 a 200 Hz;
- 2 – da resposta da massa pode-se notar duas frequências dominantes no espectro. Medindo-se aproximadamente o período das oscilações tem-se:

- a) entre 0,34 e 0,44 segundos contam-se 9 ciclos, o que resulta em um período de frequência de:

$$T = \frac{0,1}{9} = 0,0111111 \text{ [s]} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,011111} = 90 \text{ [Hz]}$$

- a) entre 0,34 e 0,64 segundos contam-se 3 ciclos, o que resulta em um período de frequência de:

$$T = \frac{0,3}{3} = 0,1 \text{ [s]} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ [Hz]}$$

Ambos os resultados verificam a resposta do sistema que possui a primeira frequência natural, no modo de flexão, em 10 Hz e o terceiro, no modo torcional, em 94 Hz.

7.5.2 Tensão no tempo

O sinal de tensão medido no extensômetro (*strain gage*) localizado na base da viga está mostrado na Figura 7-15 e Figura 7-16 para um tempo de aquisição de 60s.

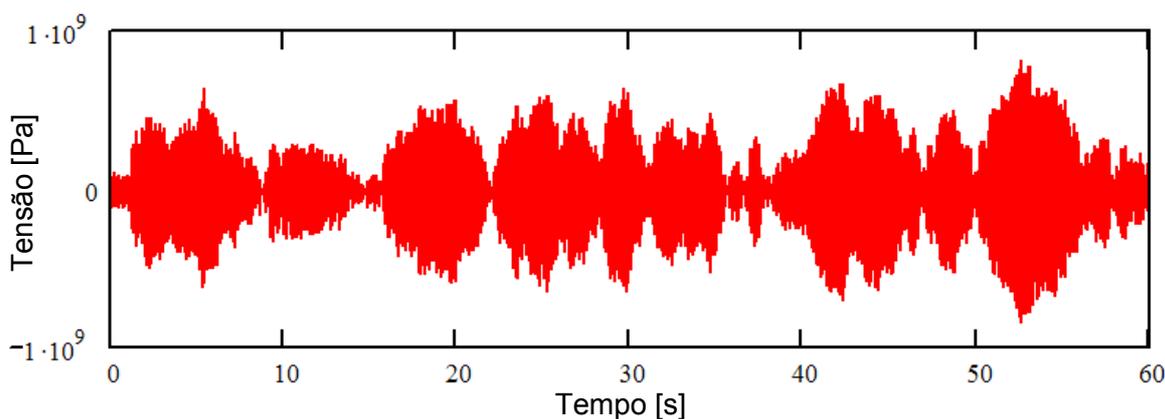


Figura 7-15 – Resposta de tensão no SG localizado na base da viga. Aceleração PSD imposta à base. Período de aquisição de 60s.

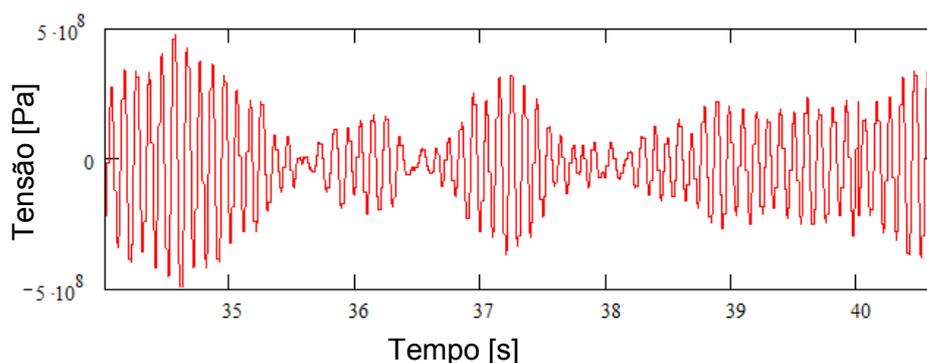


Figura 7-16 – Detalhe da Figura 7-15 para uma faixa de tempo compreendida entre 34s e 41.

Estadística do Sinal de Tensão

Foram realizadas medições de tensão na viga e a aquisição de sinais se deu de tal forma que se obteve ao total 24 vetores com duração de 10 segundos de medições de tensão com taxa de aquisição de 2500^{-1} e 58 vetores com duração de 10 segundos de tensão com taxa de 1250^{-1} . Esta aquisição foi feita em tempos distintos visando a verificação da estabilidade e estacionaridade do sistema.

Através de uma análise estatística dos sinais com diferentes taxas de aquisição, é possível verificar propriedades estatísticas do sinal de tensão medido. As principais propriedades estatísticas, como média, desvio padrão, variância, Kurtosis, etc. podem ser vistas na Tabela 7.

Tabela 7 – propriedades estatísticas para uma amostra de dados de tensão para duas taxas distintas de aquisição do sinal.

| Amostra | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Kurtosis (excesso) | -0.59 | -0.13 | -0.05 | 0.35 | -0.73 |
| Mínimo | -5.25E+08 | -4.41E+08 | -4.41E+08 | -4.43E+08 | -2.90E+08 |
| Máximo | 4.76E+08 | 4.29E+08 | 3.93E+08 | 3.79E+08 | 2.52E+08 |
| Média | -1.99E+07 | -2.27E+07 | -2.31E+07 | -2.33E+07 | -2.44E+07 |
| Mediana | -2.06E+07 | -2.04E+07 | -2.57E+07 | -2.15E+07 | -2.45E+07 |
| Desvio Padrão | 195E+06 | 163E+06 | 148E+06 | 137E+06 | 122E+06 |
| Variância | 3.79E+16 | 2.66E+16 | 2.18E+16 | 1.87E+16 | 1.48E+16 |
| Skewness | -0.006 | 0.018 | -0.005 | -0.009 | 0.013 |

Os gráficos com os valores obtidos para os dados de tensão para as duas taxas de amostragem podem ser analisados através das propriedades estatísticas nas Figura 7-17 a Figura 7-19:

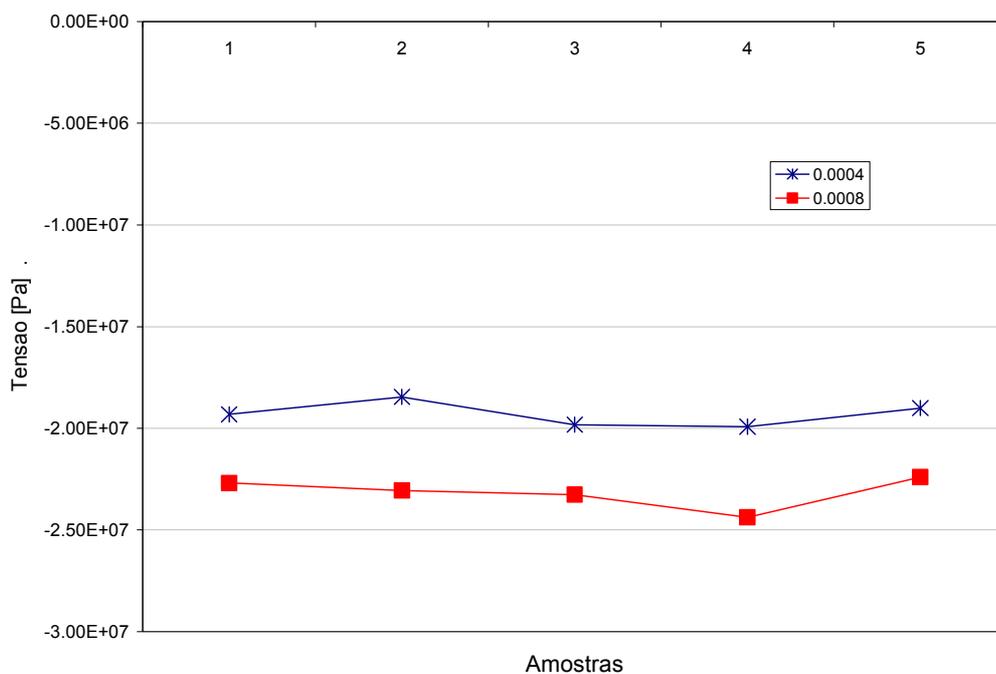


Figura 7-17 – Distribuição dos valores médios para a tensão com duas taxas distintas de aquisição: 0,0004 e 0,0008.

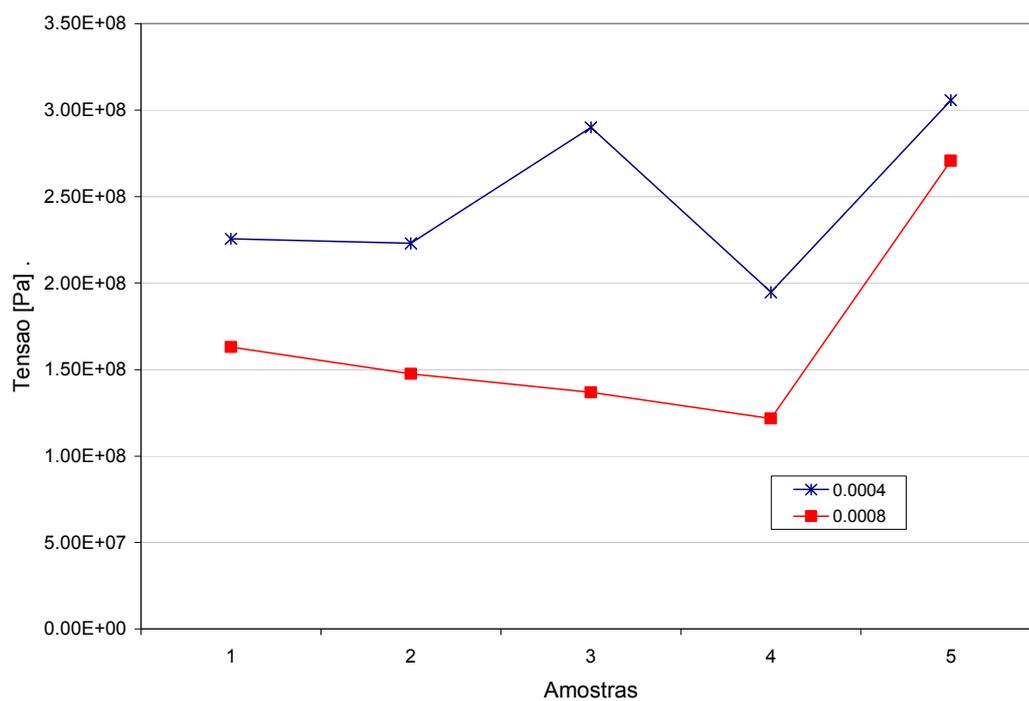


Figura 7-18 – Distribuição dos valores de desvio padrão para os dados de tensão com duas taxas distintas de aquisição: 0,0004 e 0,0008.

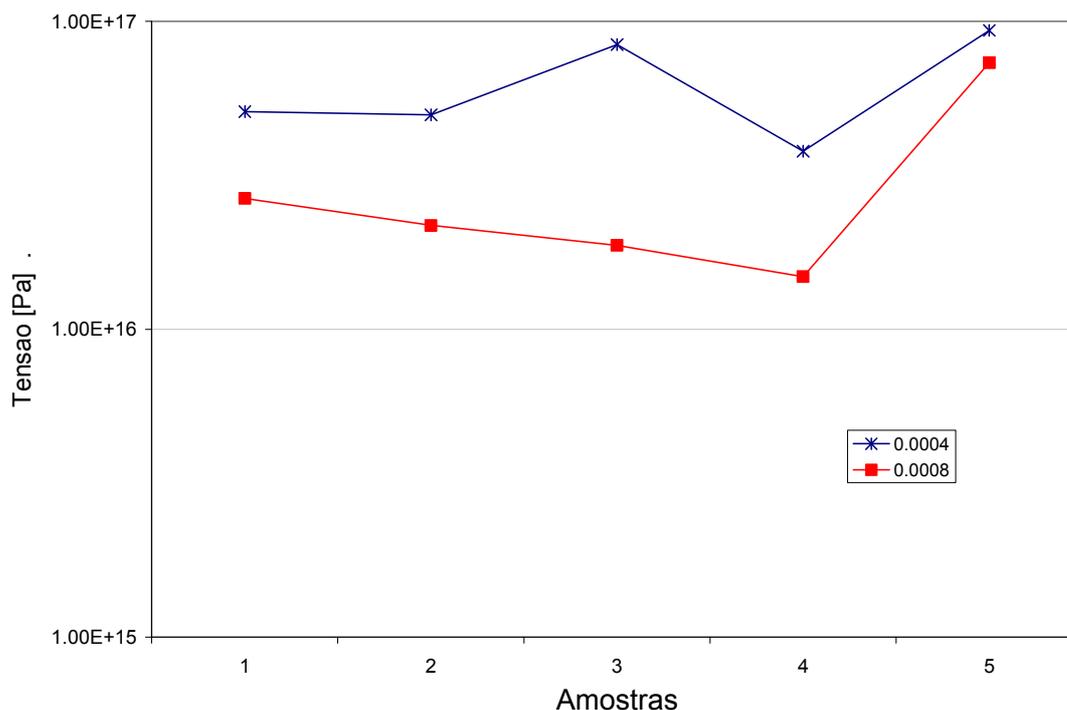


Figura 7-19 – Distribuição dos valores de variância para os dados de tensão com duas taxas distintas de aquisição: 0,0004 e 0,0008.

Da Tabela 7, analisando-se duas propriedades em particular, Skewness e Kurtosis, pode-se verificar como os dados se comportam estatisticamente e se podem ser tratados como uma distribuição normal. Para uma distribuição normal, tem-se:

Kurtosis (Normal) = 3

Excesso de Kurtosis = 0

Skewness (Normal) = 0

Kurtosis < 0 indica uma distribuição relativamente mais plana do que à normal, Kurtosis > 0 indica uma distribuição relativamente mais de pico em relação à normal.

Skewness indica a simetria dos dados em relação a média. “Zero” significa que a distribuição é simétrica em relação à média.

Nas Figura 7-20 a Figura 7-26 estão as representações estatística e de histograma da distribuição de alguns sinais obtidos com taxas e tempos de aquisição diversas, no domínio do tempo.

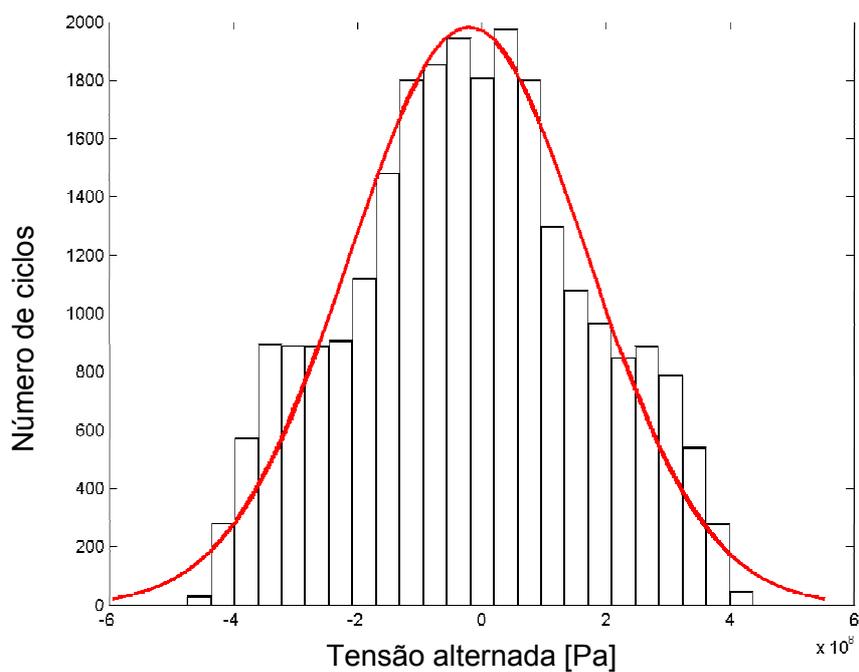


Figura 7-20 – Histograma de tensão alternada para a aquisição de 10 segundos a uma taxa de 2500^{-1} e tamanho da resolução do histograma em 24. Projeção da distribuição Normal

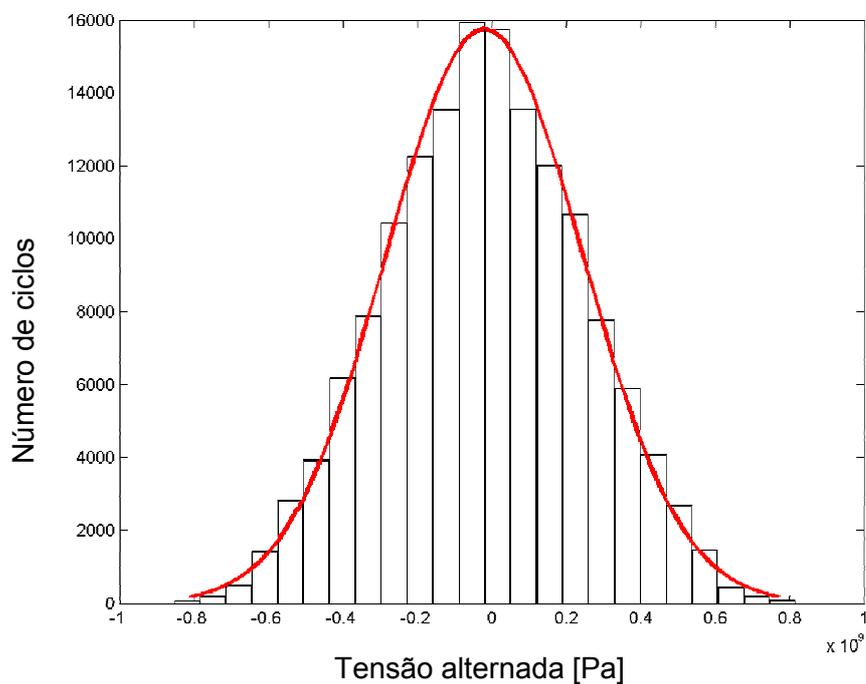


Figura 7-21 – Histograma de tensão para a aquisição de 60 segundos a uma taxa de 2500^{-1} e tamanho da Resolução do histograma em 24. Projeção da distribuição Normal

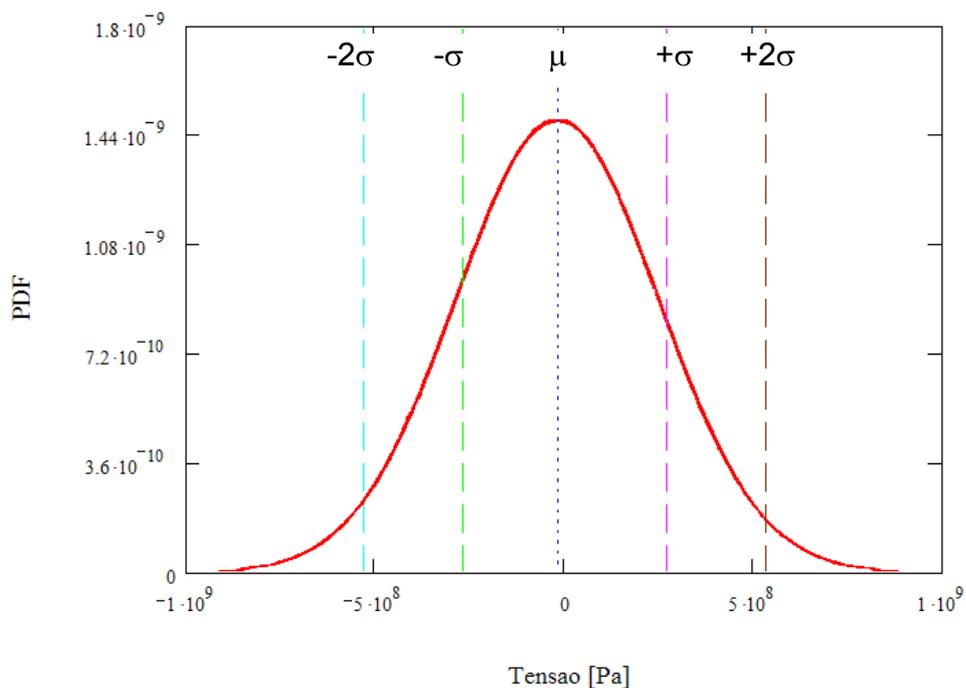


Figura 7-22 – função densidade de probabilidade normal para uma aquisição de 30s com $dt = 2500^{-1}$. Plotagem das linhas verticais de média (μ), desvio padrão (σ) e $\pm 2\sigma$.

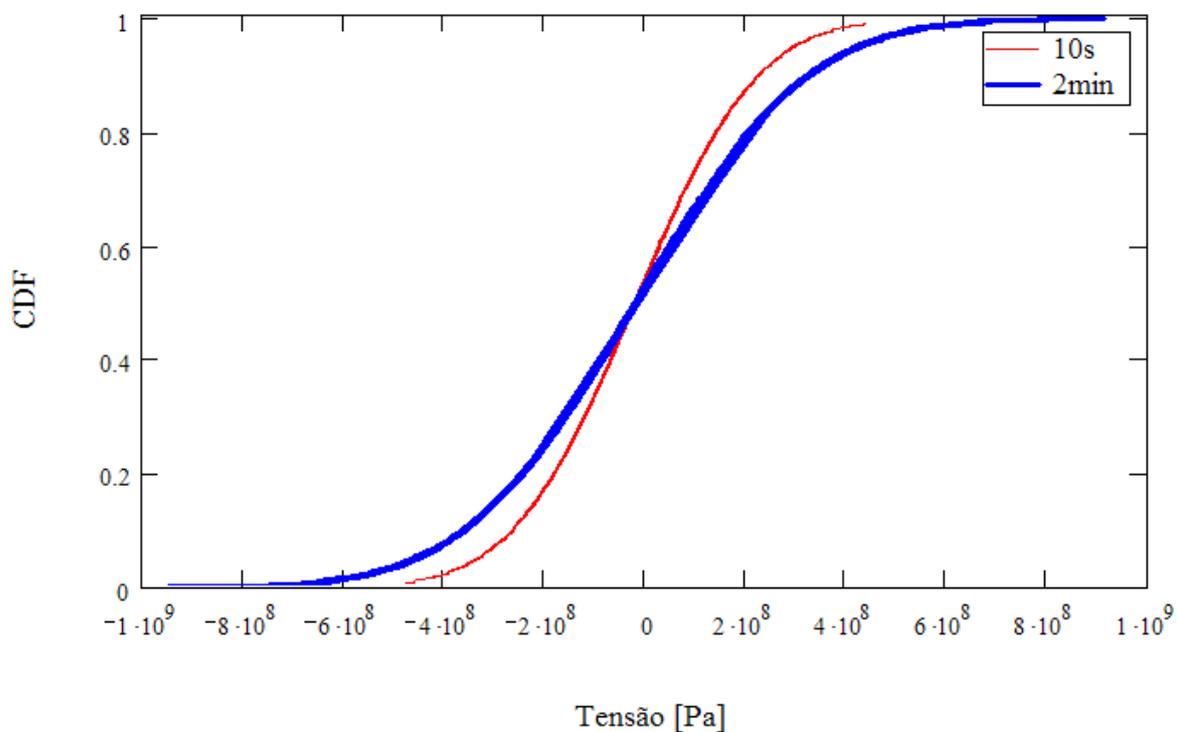


Figura 7-23 – Função de probabilidade acumulada normal para duas aquisições de 10s e outra de 2min com $dt = 2500^{-1}$ realizadas em tempos diferentes.

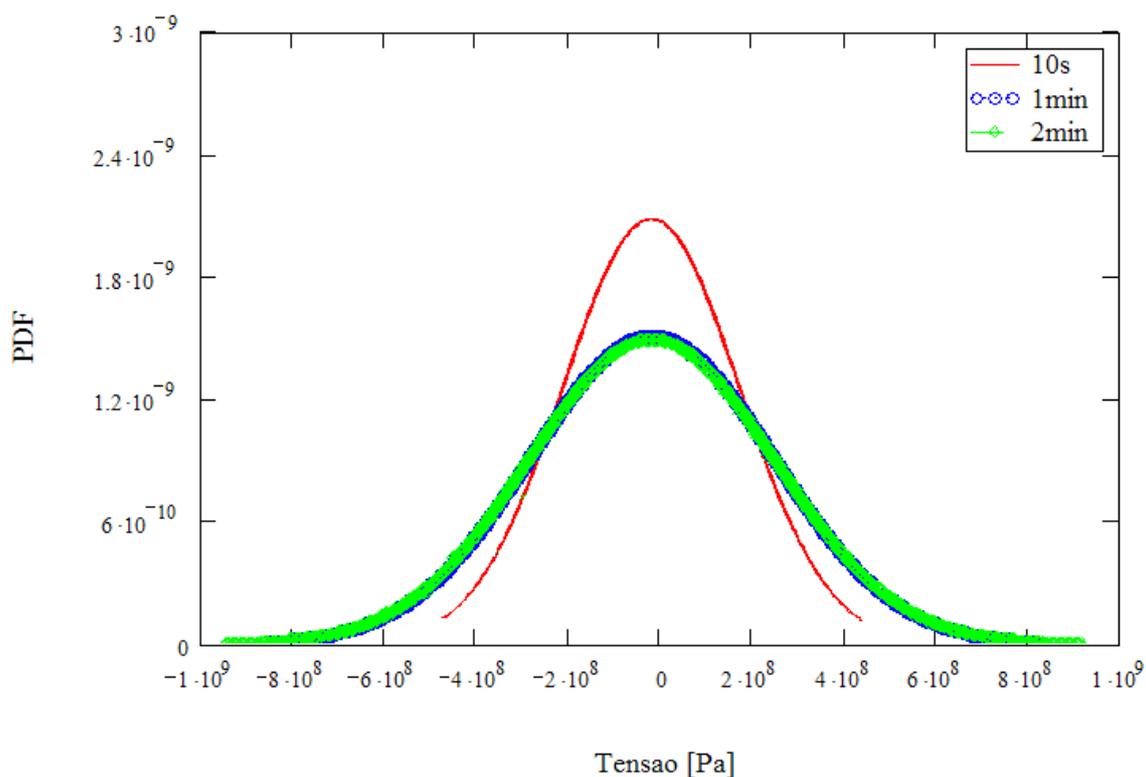


Figura 7-24 – Função densidade de probabilidade normal para aquisições de 10s, 1min. e 2min. com $dt\ 2500^{-1}$ realizadas em tempos diferentes.

Comparação das distribuições de probabilidade para duas taxas de aquisição diferenciadas: 2500^{-1} e 1250^{-1} e com dois tempos de aquisição: 10s e 2 minutos, Figura 7-25 e Figura 7-26.

10 Segundos de tempo de aquisição

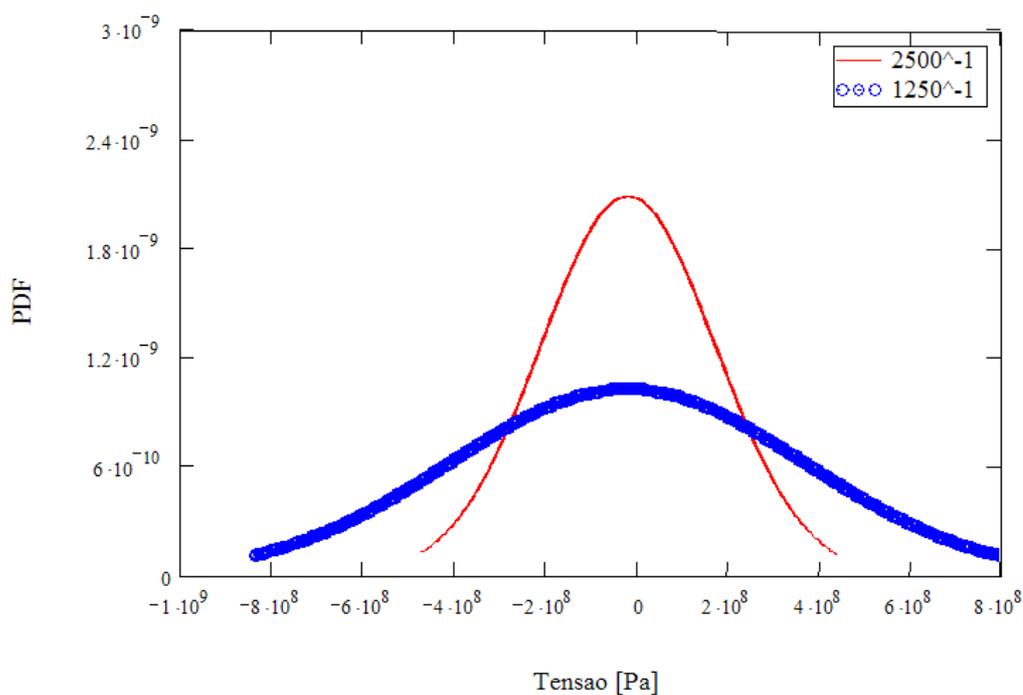


Figura 7-25 – função densidade de probabilidade normal para duas aquisições de 10s, com dt diferentes: 2500^{-1} e 1250^{-1} .

2 Minutos de tempo de aquisição

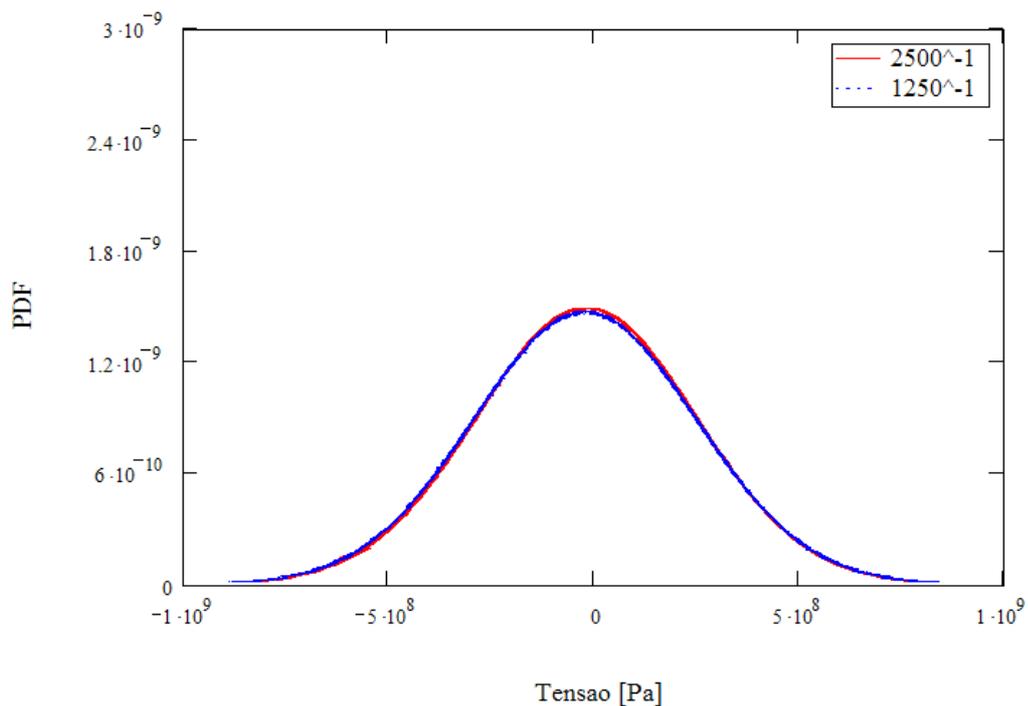


Figura 7-26 – função densidade de probabilidade normal para duas aquisições de 2min, com dt diferentes: $dt = 2500^{-1}$ e $dt = 1250^{-1}$.

7.5.3 Contagem de Ciclos *Rainflow*

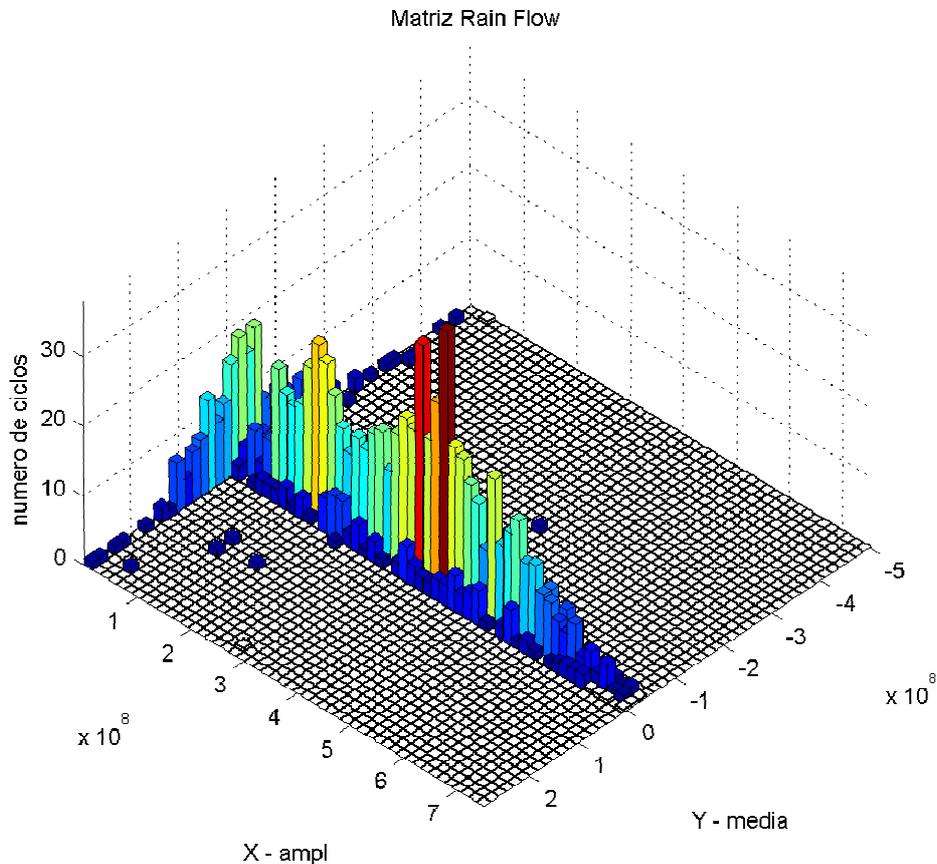


Figura 7-27 – Matriz de ciclos de amplitudes e médias de tensão através da contagem de ciclos *Rainflow* – 120 segundos de aquisição – filtro PB 200Hz

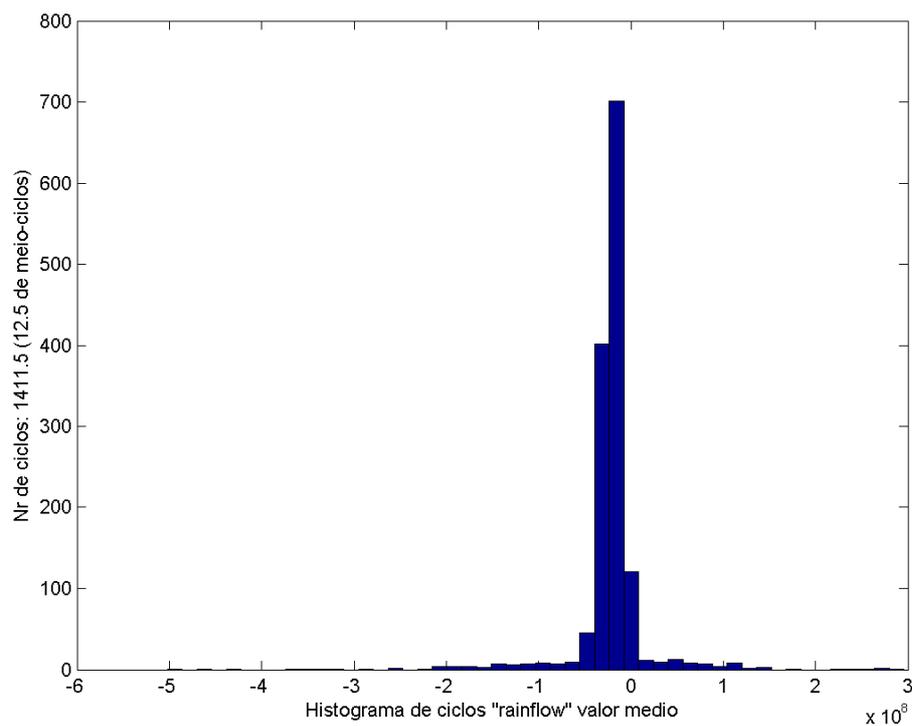


Figura 7-28 – Contagem de ciclos de valor médio através de *Rainflow* – 120 segundos de aquisição – filtro PB 200Hz

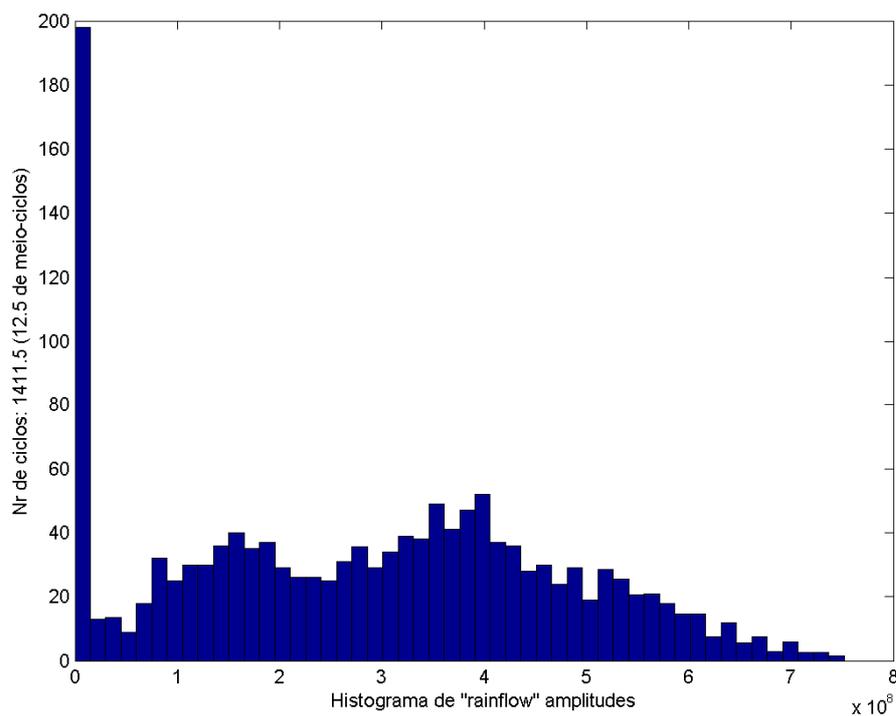


Figura 7-29 – Contagem de ciclos de amplitude de tensão alternada através de *Rainflow* - 120 segundos de aquisição – filtro PB 200Hz

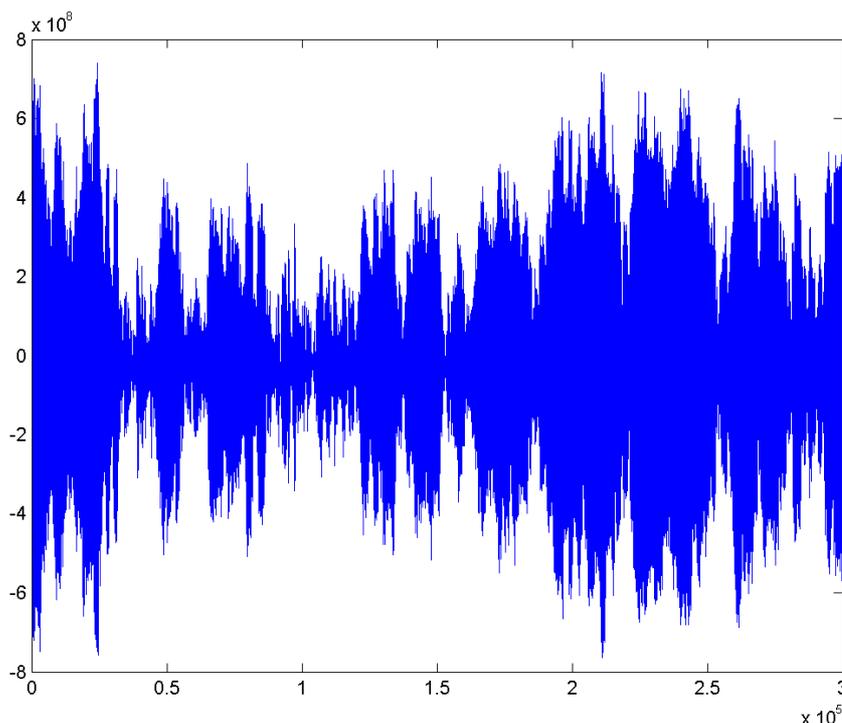


Figura 7-30 – Reprodução dos ciclos pico-a-pico. Extração através do método de extração de ciclos *Rainflow* – 120 segundos de aquisição a $dt\ 2500^{-1}$

7.5.4 Tensão na Frequência (PSD)

Há vários métodos para o cálculo e estimativa da PSD, que podem ser categorizados em:

- Métodos Não-Paramétricos
- Métodos Paramétricos
- Métodos Subespaço (alta-resolução)

Métodos Não-paramétricos são aqueles nas quais a estimativa da PSD é feita diretamente a partir do sinal, como por exemplo, o método mais simples de Periodograma ou a versão aperfeiçoada denominada método de *Welch*. Nesta categoria, a mais avançada é o método conhecido por *Multitaper Method* ou MTM.

Métodos Paramétricos são aqueles nas quais o sinal é assumido como resultante de um sistema linear excitado por um sinal de ruído branco. Estes métodos estimam a PSD a partir, primeiramente, do levantamento dos parâmetros (coeficientes) do sistema linear que hipoteticamente “gerou” o sinal. Entre os métodos paramétricos estão o autoregressivo de *Yule-Walker*, o método de *Burg* e o da *Covariância*. Eles tendem a produzir melhores resultados quando comparados aos métodos não-paramétricos para sinais de curta duração.

Métodos subespaço, também conhecidos como de alta resolução, estimam a PSD de um sinal baseado numa análise de autovalor e autovetor, ou também, autodecomposição da matriz de correlação. Exemplos destes métodos são o *Multiple Signal Classification (MUSIC)* e o método de *Autovetor*. (EV). São métodos apropriados para identificação de sinais senoidais “escondidos” em um sinal com “ruído” presente.

É importante observar que cada método de estimativa espectral (PSD) apresenta vantagens e desvantagens, sendo apropriados para sinais de longa ou curta duração, com ruído ou sem, etc. Nota-se que o tempo de processamento e cálculo, bem como a resolução da amplitude do espectro variam conforme o método aplicado. Mais detalhes podem ser obtidos em [Matlab®, Manual *Signal Processing Toolbox*].

Para a aplicação da PSD no cálculo de fadiga aleatória espectral, vários métodos de estimativa da PSD foram aplicados e comparados em termos quantitativos. Estas PSD e os resultados dos parâmetros espectrais podem ser observados nos capítulos subsequentes e na Tabela 12 e também no Apêndice VIII - Análise dos filtros utilizados e estimativas das PSD.

Abaixo as PSD de vários sinais de tensão obtidos nos softwares LabView® e Matlab®.

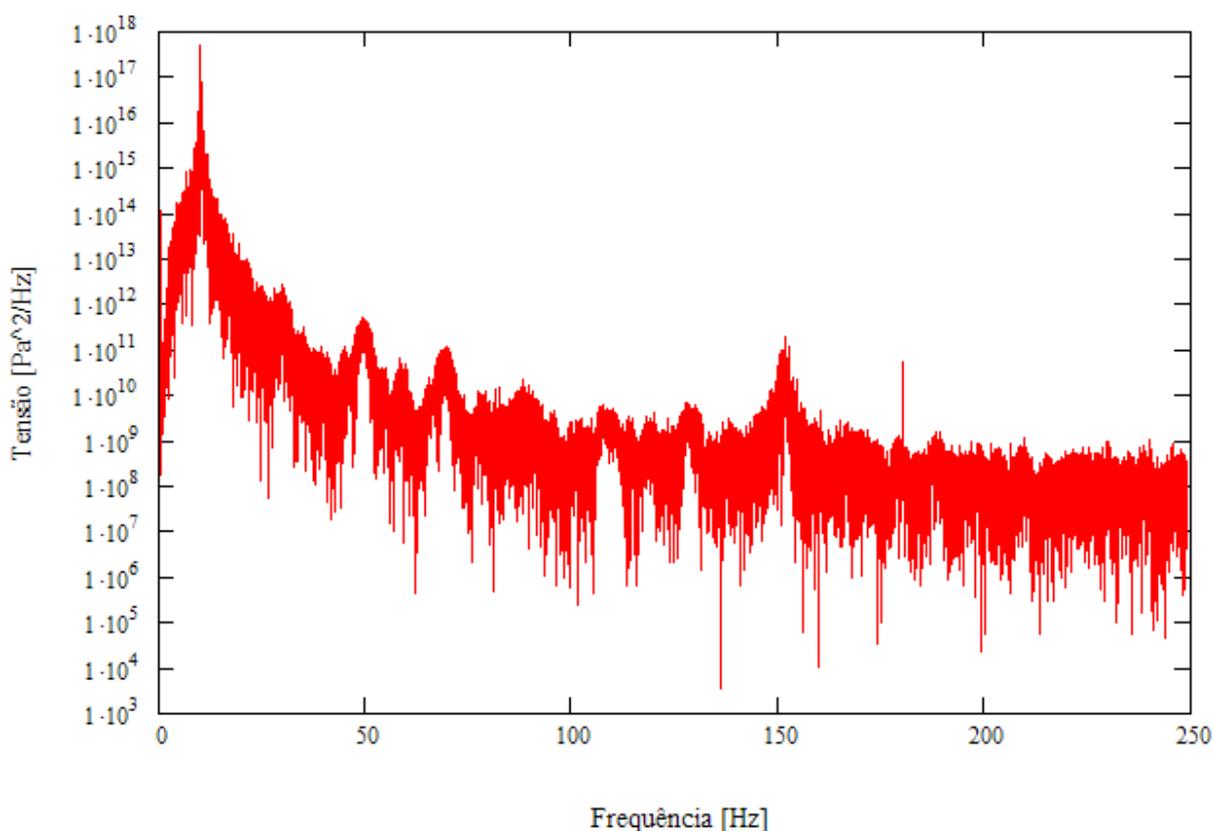


Figura 7-31 – PSD de tensão Pa sem média experimental, 100s de medição, para a aquisição de sinal no SG da base da viga. Picos de tensão no primeiro e segundo modo de flexão.

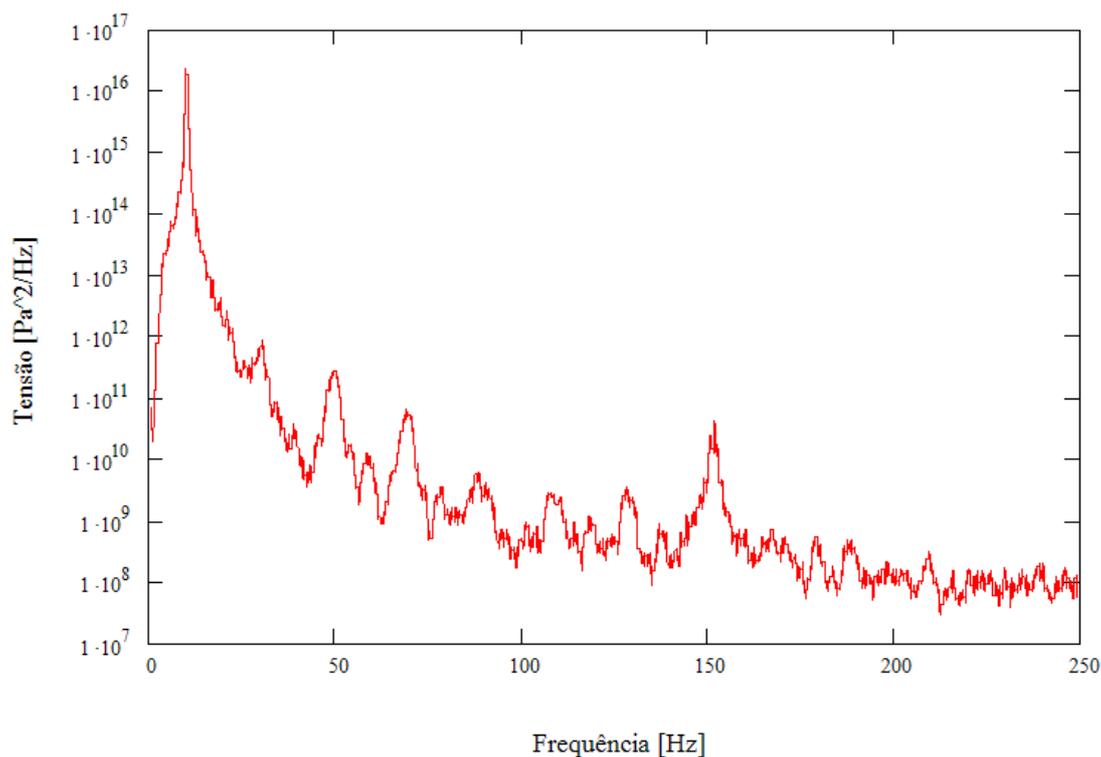


Figura 7-32 – PSD de tensão Pa sem média experimental, 100s de medição, após o “smoothing” do tipo média inteiro 11. Aquisição de sinal na base da viga, mesmo da Figura 7-31.

Observou-se então a necessidade em se fazer as PSD como uma média das PSD das aquisições a cada 10s para uma melhor resolução.

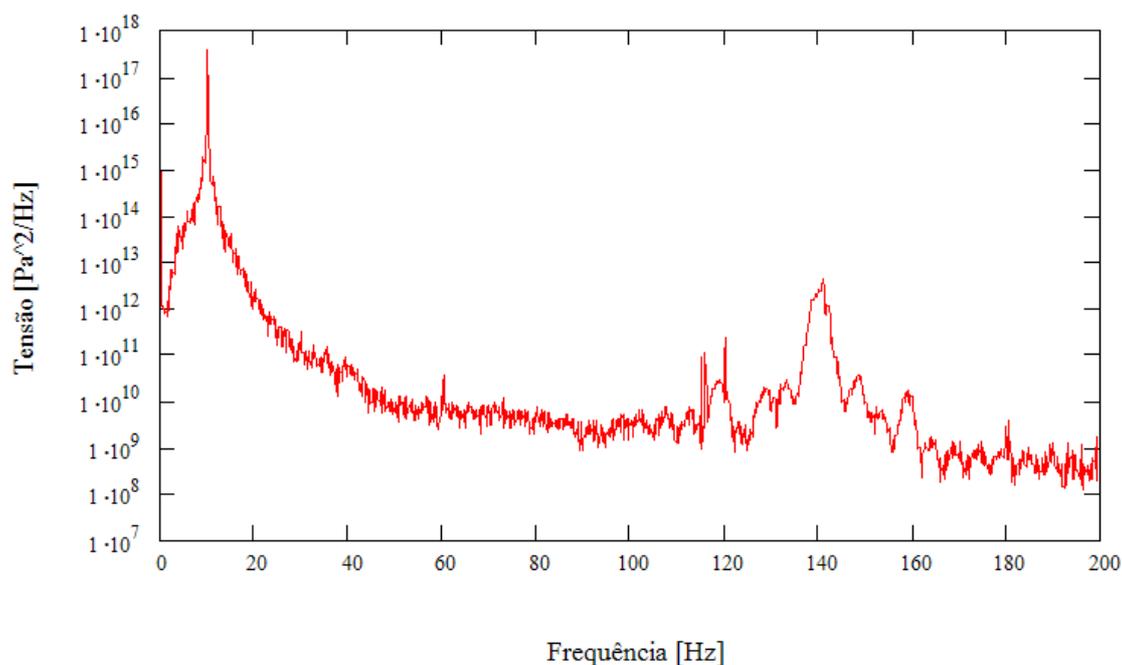


Figura 7-33 – PSD de tensão Pa com média experimental, aquisição de 200s com 20 médias de 10s de medição, para a aquisição de sinal na base da viga.

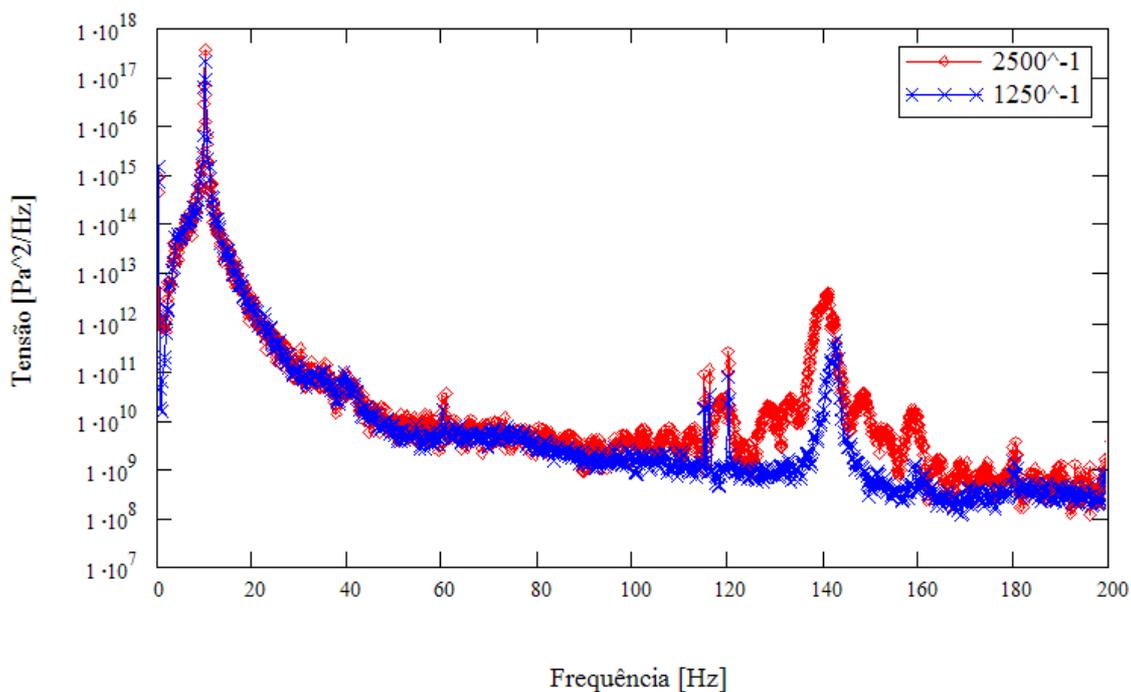


Figura 7-34 – PSD de tensão Pa com média experimental, aquisição de 200s com 20 médias de 10s de medição, para a aquisição de sinal na base da viga. Comparação entre taxas de amostragem do sinal.

Na Figura 7-35 e Figura 7-36 está representada a densidade espectral quando projetada ao longo da linha do tempo.

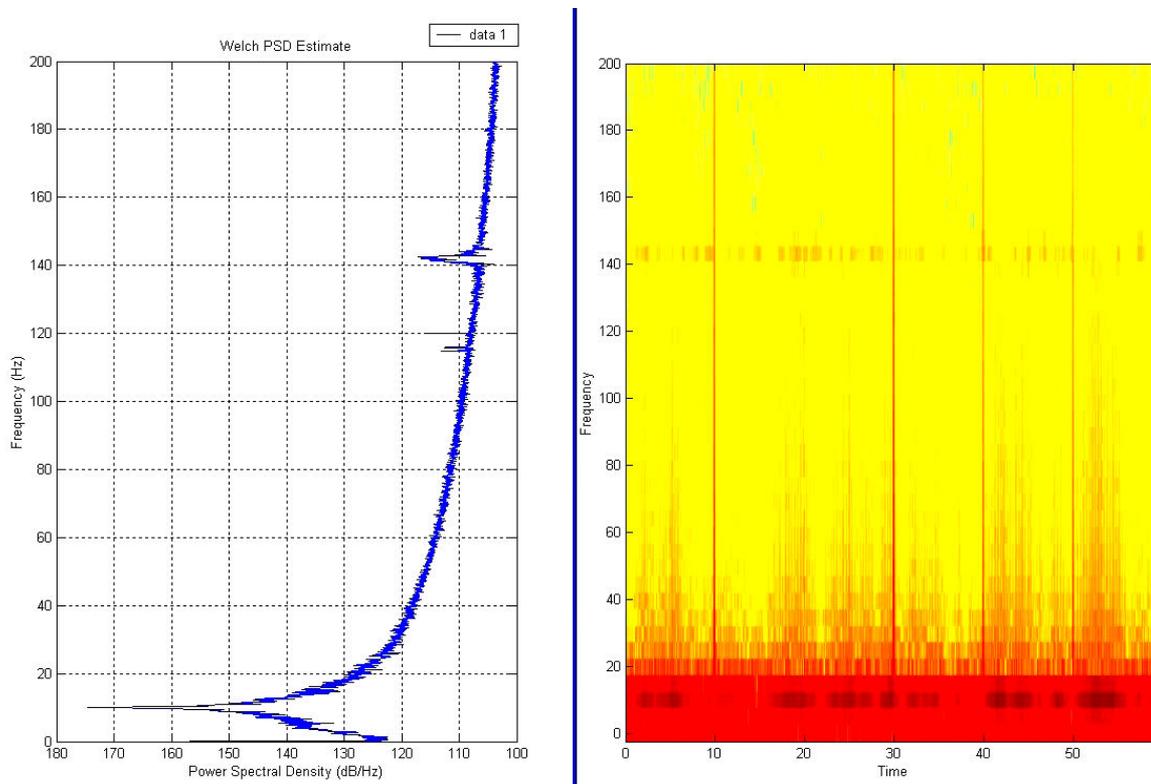


Figura 7-35 – Espectrograma do sinal de tensão, PSD pelo método de Welch, filtro 200Hz. Projeção do espectro sobre a linha do tempo. Sinal de tensão de taxa de aquisição 0,0004s por um tempo de 60s.

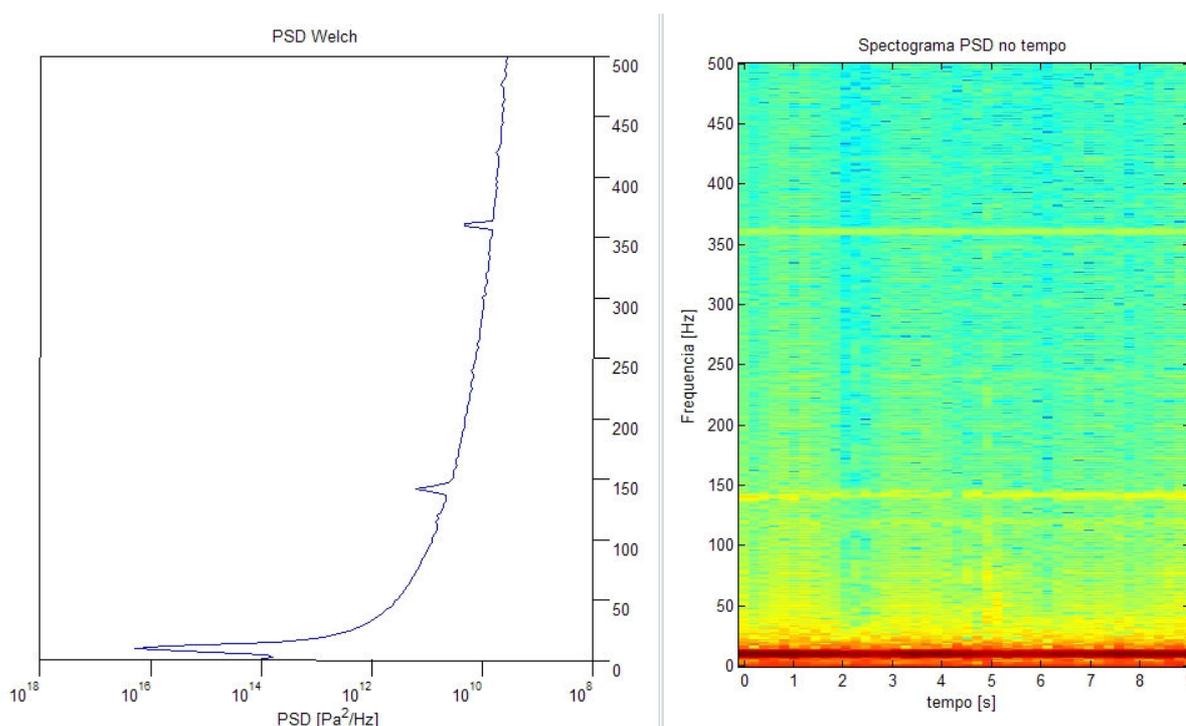


Figura 7-36 – Espectrograma do sinal de tensão, PSD por Welch, filtro de 200Hz. Projeção do espectro sobre a linha do tempo. Sinal de tensão de taxa de aquisição 0,0004s por um tempo de 10s

A Figura 7-35 e Figura 7-36, mostra a amplitude espectral “projetada”, como uma vista lateral esquerda na projeção para o 3º diedro. Isto representa a estacionaridade do sinal aleatório, como se extraísse a PSD de tensão ao longo de todo o período de aquisição do sinal – 60s. A coerência e repetibilidade da PSD visualiza-se na tonalidade da figura.

Análise dos filtros

Para a estimativa da PSD dado o sinal de tensão proveniente do SG localizado junto à base da viga, tanto os métodos para estimativa da mesma quanto os filtros digitais foram estudados e comparados entre si. Como exemplo de estimativa de uma PSD através do método do Periodograma, esta foi calculada para o sinal base, sem filtro e também após o filtro passa baixa em 200Hz, conforme a Figura 7-37 e Figura 7-38.

Para mais detalhes, vide Apêndice VIII - Análise dos filtros utilizados e estimativas das PSD.

Calculou-se também, algumas propriedades estatísticas para um sinal de tensão puro, sem a aplicação de filtro, e após a aplicação de filtro Butterworth passa baixa em 200Hz. O resultado está na Tabela 8.

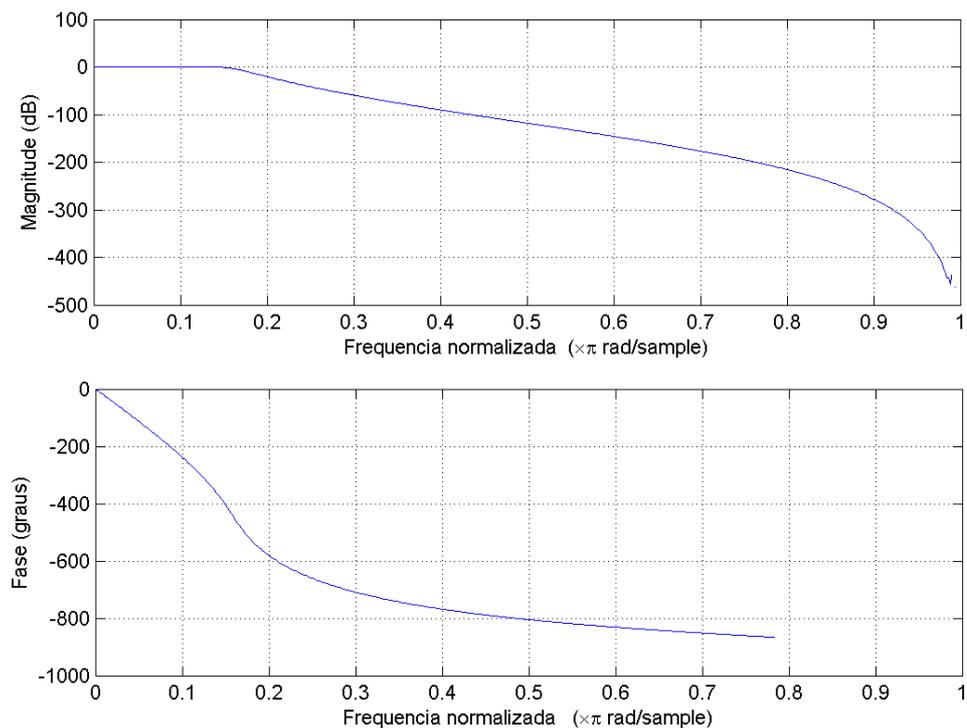


Figura 7-37 – Filtro Butterworth aplicado para o cálculo da PSD da Figura 7-38. Butterworth 10ª ordem passa baixa em 200Hz.

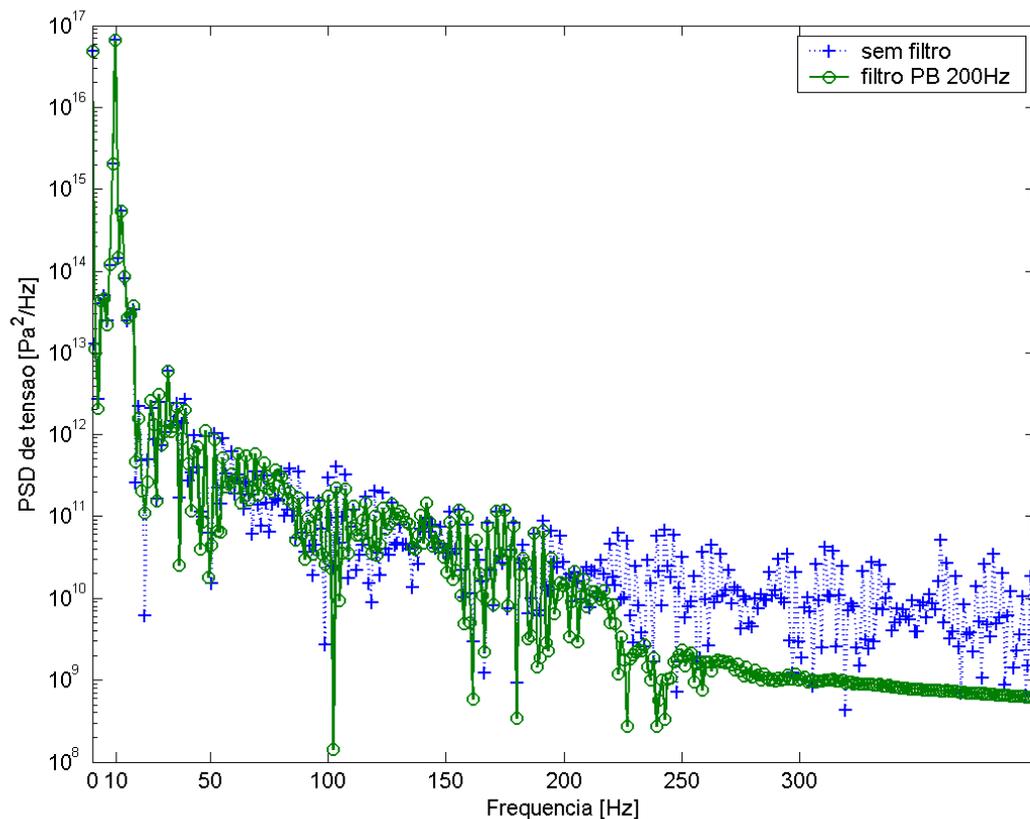


Figura 7-38 – Comparação da estimativa da PSD pelo mesmo método sem aplicação do filtro e com filtro Butterworth passa baixa em 200Hz.

Tabela 8 – Levantamento das propriedades estatísticas das PSD dos sinais de tensão. Sinal puro, sem filtro e sinal filtrado com Butterworth – tempo 2min.

| Propriedades estatísticas do sinal | Sem filtro | Com filtro PB 200Hz |
|------------------------------------|------------|---------------------|
| Min. | -7.65E+8 | -7.65E+8 |
| Max. | 7.39E+8 | 7.39E+8 |
| Média | -2.02E+7 | -2.02E+7 |
| Mediana | -2.03E+7 | -2.02E+7 |
| Desvio Padrão (σ) | 2.61E+8 | 2.61E+8 |
| Faixa | 1.50E+9 | 1.50E+9 |

Nas Figura 7-39 e Figura 7-40, observa-se o comportamento detalhado do sinal no domínio do tempo, para uma taxa de aquisição de 0,0004s.

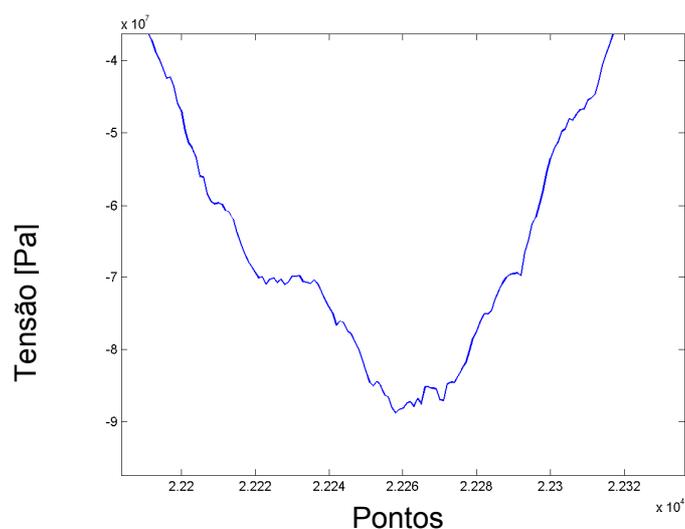


Figura 7-39 – Amplificação de um sinal de tensão de 10s a uma taxa de aquisição de 0,0004 sem aplicação de filtro.

A aplicação do filtro PB possibilita a eliminação do ruído de aquisição do sinal além de filtrar frequências em uma faixa predeterminada.

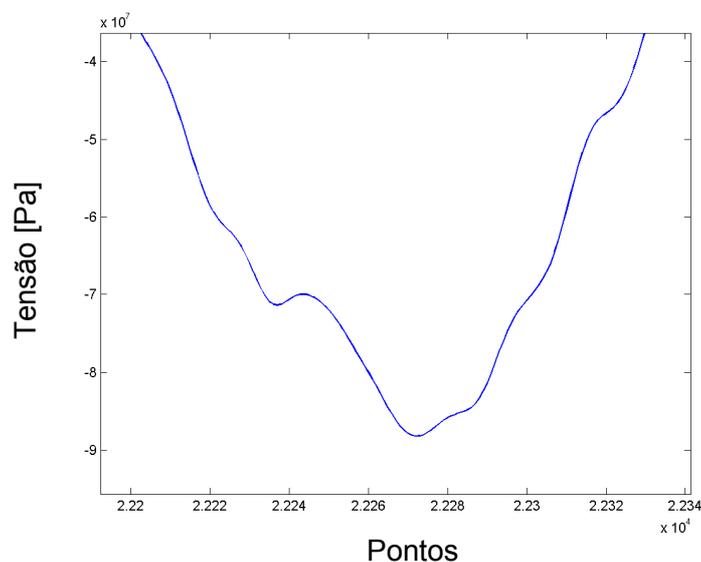


Figura 7-40 – Mesmo sinal de tensão da Figura 7-39, porém com a aplicação de filtro Butterworth passa baixa de 200Hz.

7.6 Análise Espectral Numérica - PSD

As principais hipóteses e restrições da análise espectral numérica, em termos de solução numérica através do software ANSYS®, são transcritos abaixo.

Hipóteses e restrições para a análise espectral PSD:

- 1 – A estrutura é linear;
- 2 – Fadiga uniaxial;
- 3 – A estrutura possui matriz de rigidez e efeito de massa constante;
- 4 – A estrutura não possui carregamento variável no tempo;
- 5 – A Análise espectral deve ser precedida de uma análise modal. Caso seja necessária a combinação modal, esses modos deverão ser expandidos;
- 6 – Amortecimento:

$$\varepsilon_i' = \frac{\beta \omega_i}{2} + \zeta_c + \frac{\sum_{j=1}^{N_m} \beta_j^m E_j^s}{\sum_{j=1}^{N_m} E_j^s} + \zeta_i^m \quad (7-4)$$

Sendo:

- ζ_i' = coeficiente efetivo de amortecimento para o modo i
- β = amortecimento beta
- ω_i = frequência natural não amortecida para o modo i
- ζ_c = coeficiente de amortecimento
- N_m = número de materiais presentes
- β_j^m = matriz de amortecimento constante multiplicadora para o material j
- $E_j^s = \frac{1}{2} \{\phi_i\}^T [K_j] \{\phi_i\}$ = energia de deformação
- $\{\phi_i\}$ = vetor deslocamento para o modo i
- $[K_j]$ = matriz rigidez da porção da estrutura do material j
- ζ_i^m = coeficiente de amortecimento modal para o modo i

Sendo que o amortecimento foi considerado constante para todos os modos ficando assim a equação (7-4) fica da forma:

$$\varepsilon_i' = \zeta_c \quad (7-5)$$

Resultados Numéricos

A PSD da Figura 7-41 é imposta à base, correspondendo à mesma excitação aplicada experimentalmente. É fornecida aos nós da malha de elementos finitos localizados na base.

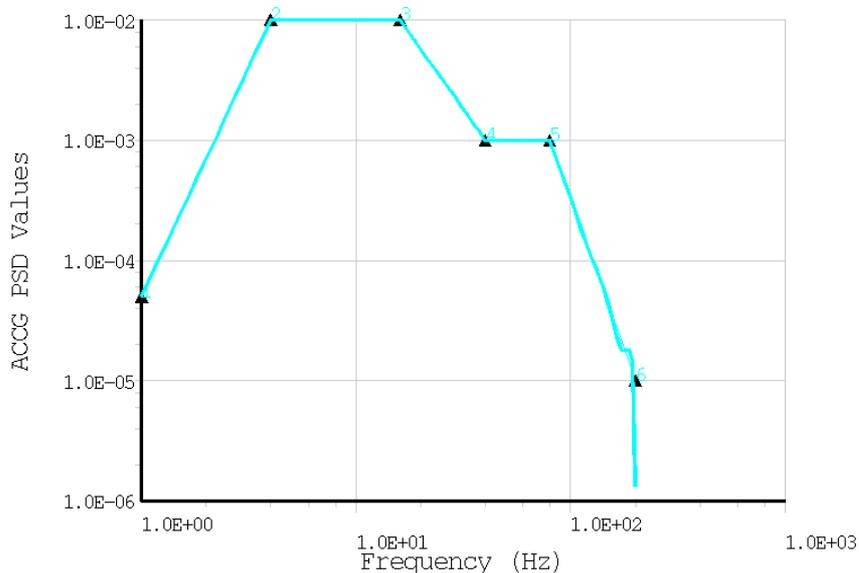


Figura 7-41 – PSD de entrada fornecida para a análise espectral.

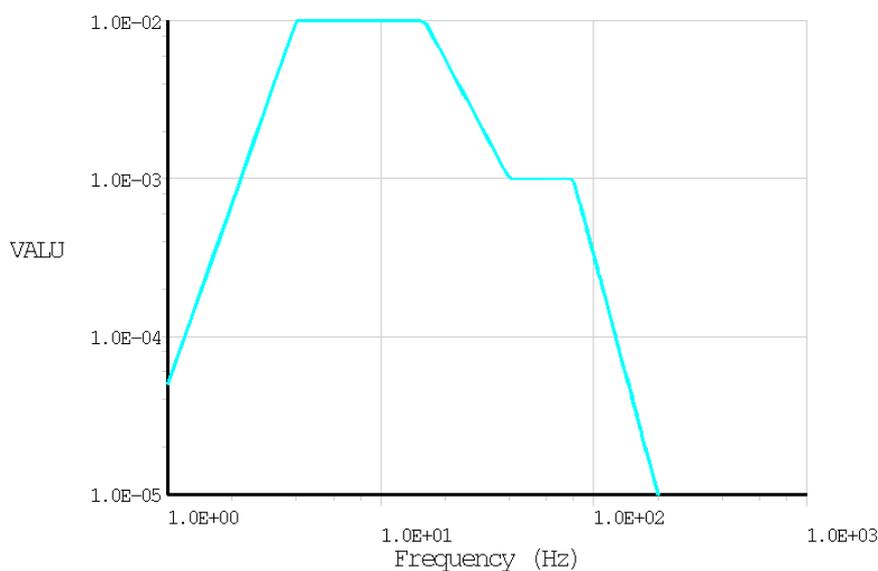


Figura 7-42 – PSD de resposta da base. Verificação do dado de entrada.

A partir da análise numérica espectral, extraiu-se a resposta do sistema em pontos desejados para obter a resposta em frequência da viga sob a excitação PSD de entrada. A resposta de aceleração espectral da extremidade da massa relativa à base, bem como a resposta de aceleração de um ponto junto à base da viga estão representadas na Figura 7-43. Observa-se que a resposta de um ponto junto à base deve coincidir com a PSD de entrada da análise numérica, assim como o é comparando-se as Figura 7-42 e Figura 7-43.

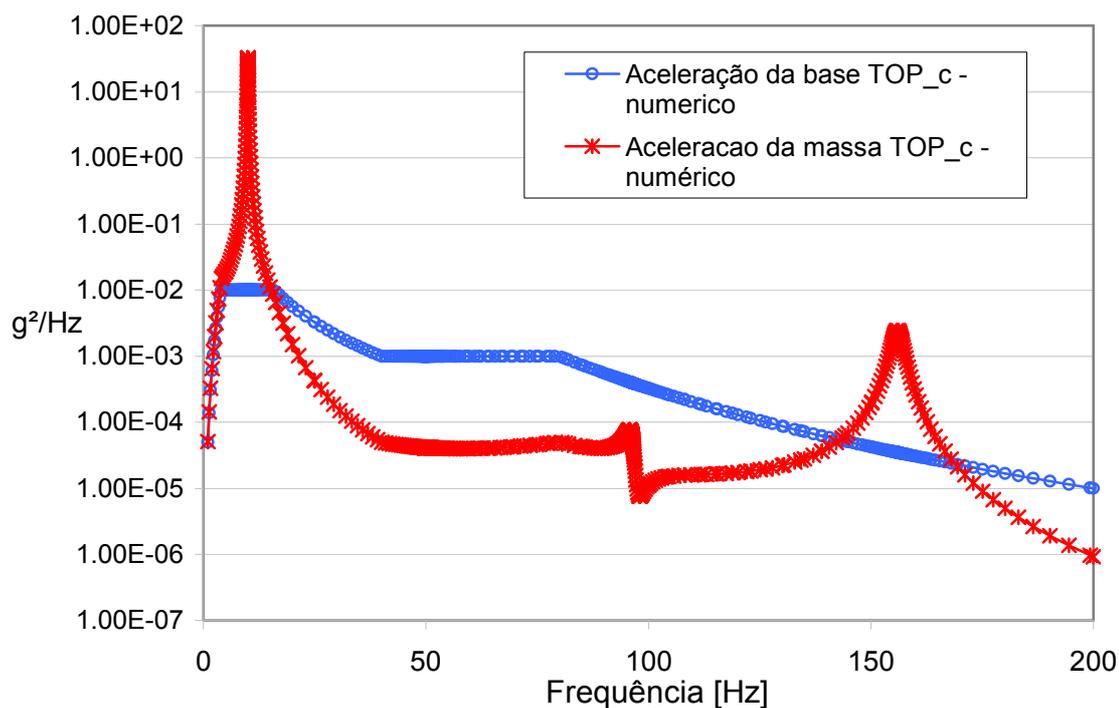


Figura 7-43 – PSD de resposta sobre a entrada. PSD de aceleração resultante na extremidade do acelerômetro (massa) e da base.

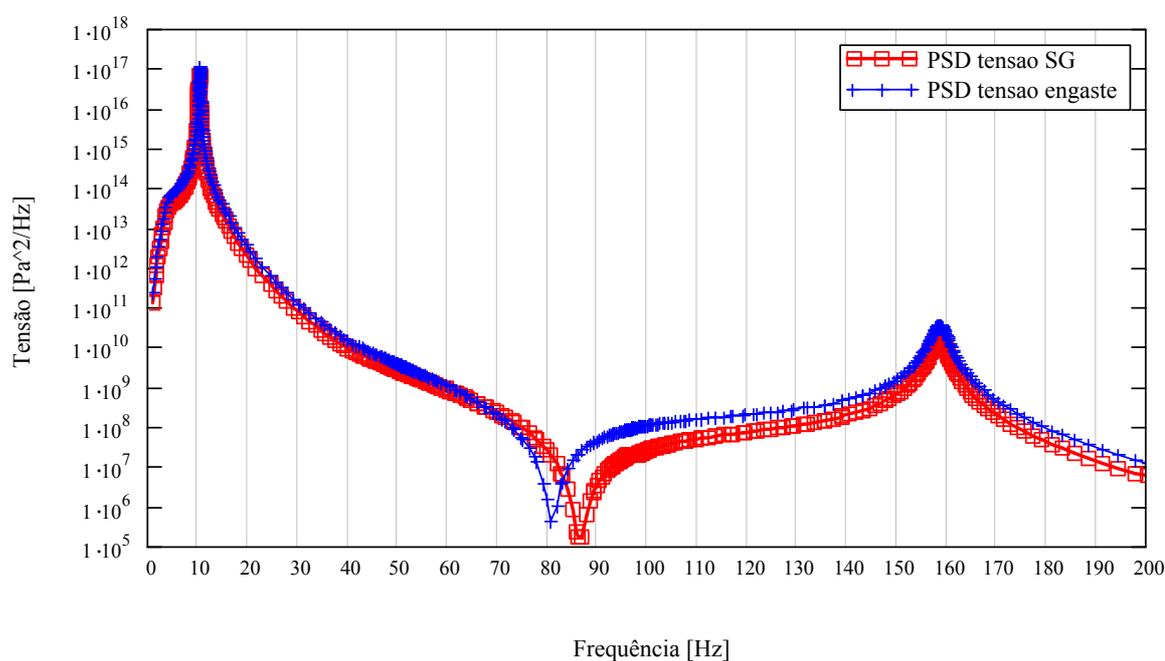


Figura 7-44 – PSD de tensão normal σ_x para um nó na linha do engaste, e outro ligeiramente próximo ao engaste, no *strain gage*.

A resposta espectral de tensão em dois pontos da viga está representada na Figura 7-44. Dois pontos relevantes estão representados nesta figura: um ponto na linha de engaste e outro na localização do SG experimental, próximo à linha do engaste.

Dividindo-se as duas respostas da Figura 7-44, isto é, a PSD de tensão no engaste pela PSD de tensão no *strain gage*, chega-se a $H(f)$ ou função transferência da tensão do ponto medido, SG, para o ponto máximo, engaste, conforme pode ser observado na Figura 7-45.

O valor da $H(f)$ obtido do gráfico para uma frequência dominante de 10Hz é de 1,3. O valor da $H(f)$ máximo ocorre no modo 3 de vibração estrutural correspondendo a frequência de 86Hz.

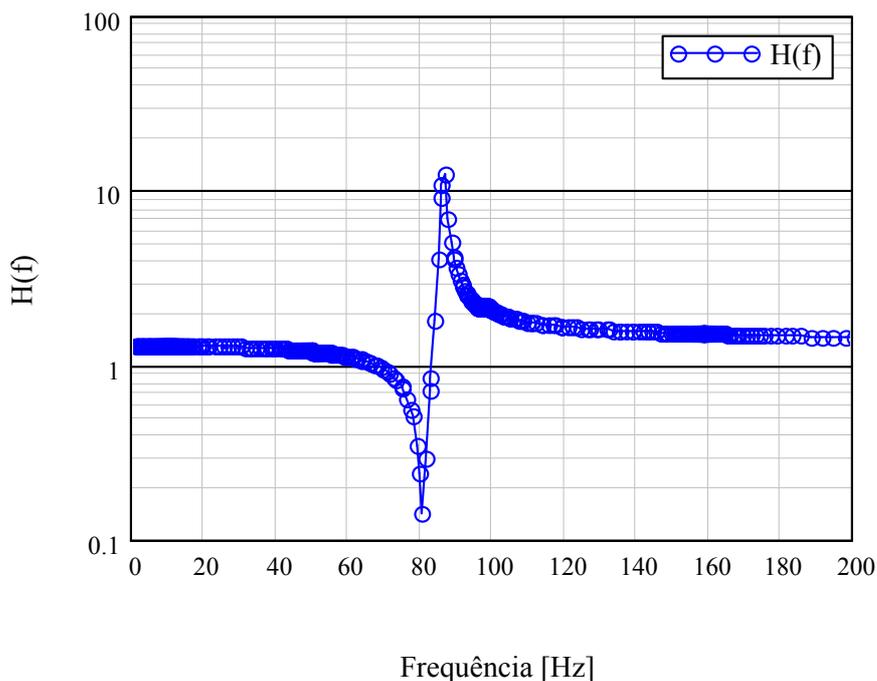


Figura 7-45 – $H(f)$ da tensão calculada na linha do engaste dividida pela tensão no SG.

As informações de momentos espectrais para as duas PSD da Figura 7-44 podem ser observadas na Tabela 12.

É oportuna uma visualização da resposta 1 desvio padrão – 1σ , dos valores de tensão normal e equivalente, deslocamentos e acelerações resultantes da excitação PSD. Os valores 1σ RMS de deslocamento, tensão e aceleração estão representados na Figura 7-6 a Figura 7-9.

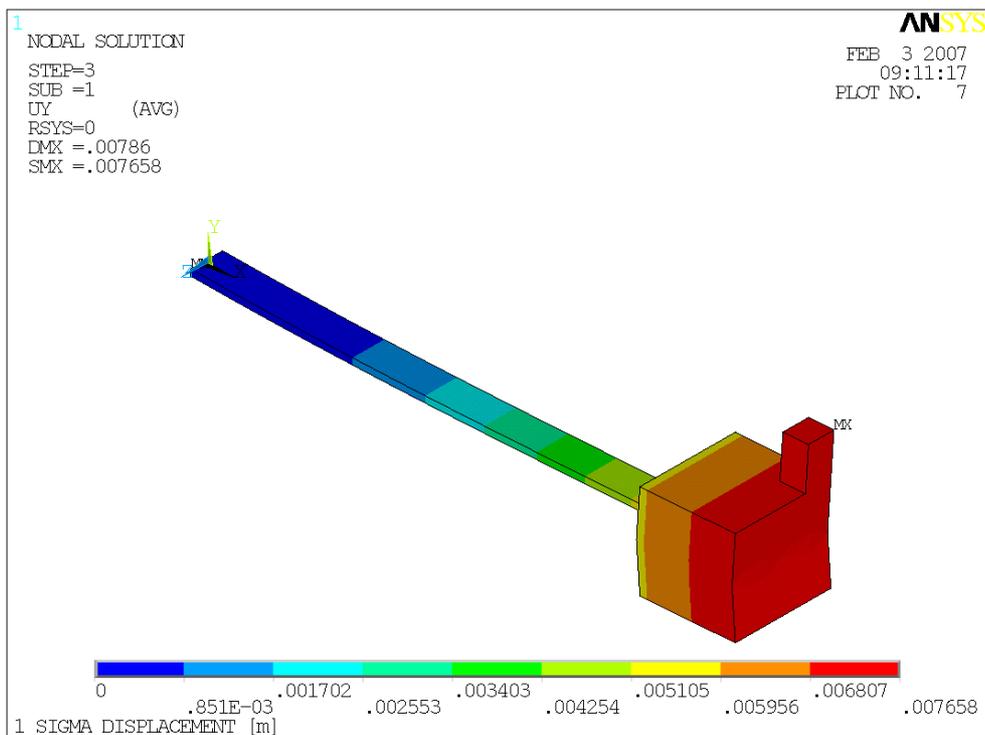


Figura 7-46 – Resposta 1 Sigma de deslocamento vertical = 7,6mm.

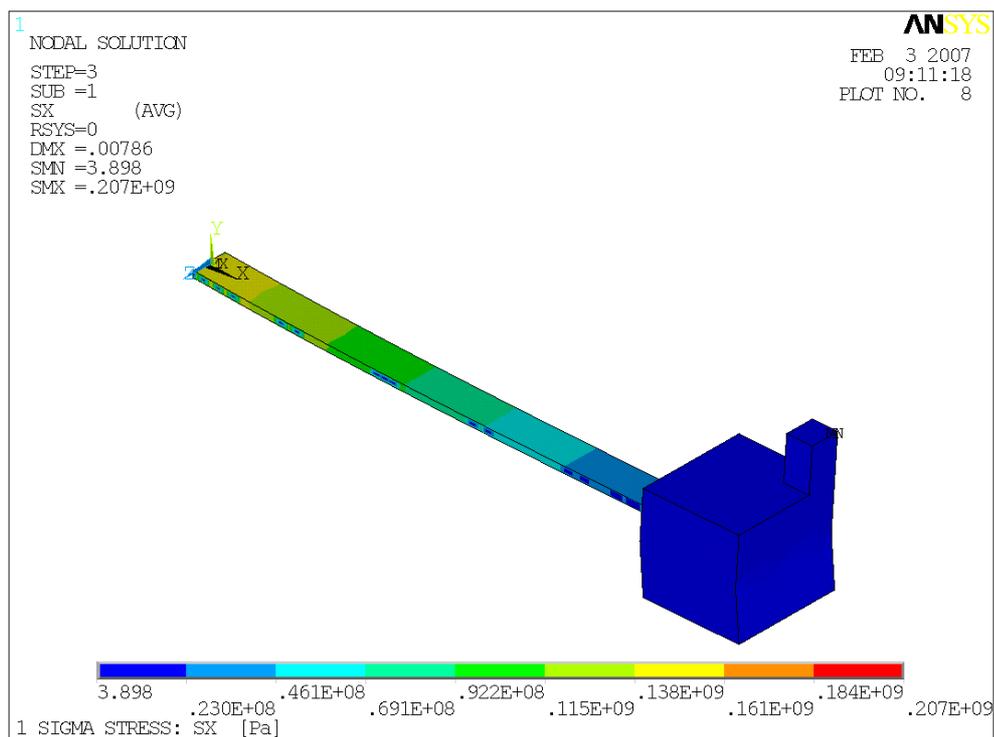


Figura 7-47 – Resposta 1 Sigma de tensão normal $\sigma_x = 207\text{MPa}$. Observação: $(207\text{E}6)^2 = 4,28\text{E}+16$

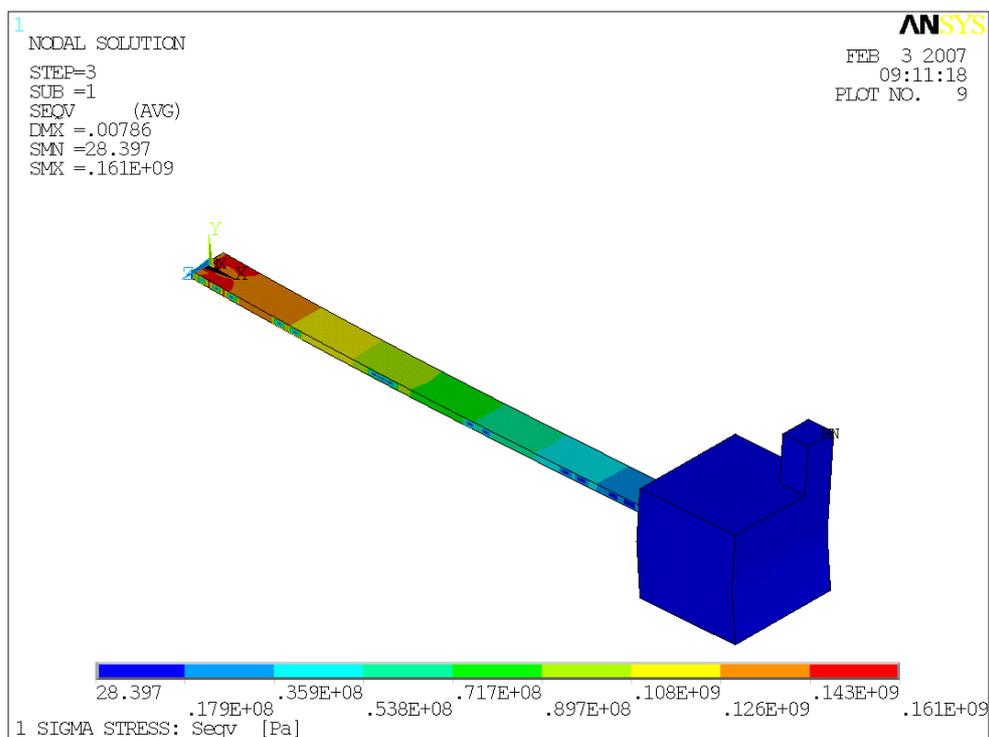


Figura 7-48 – Resposta 1 Sigma de tensão equivalente $\sigma_{eqv} = 161\text{MPa}$. Observação: $(161\text{E})^2 = 2,59\text{E}+16$

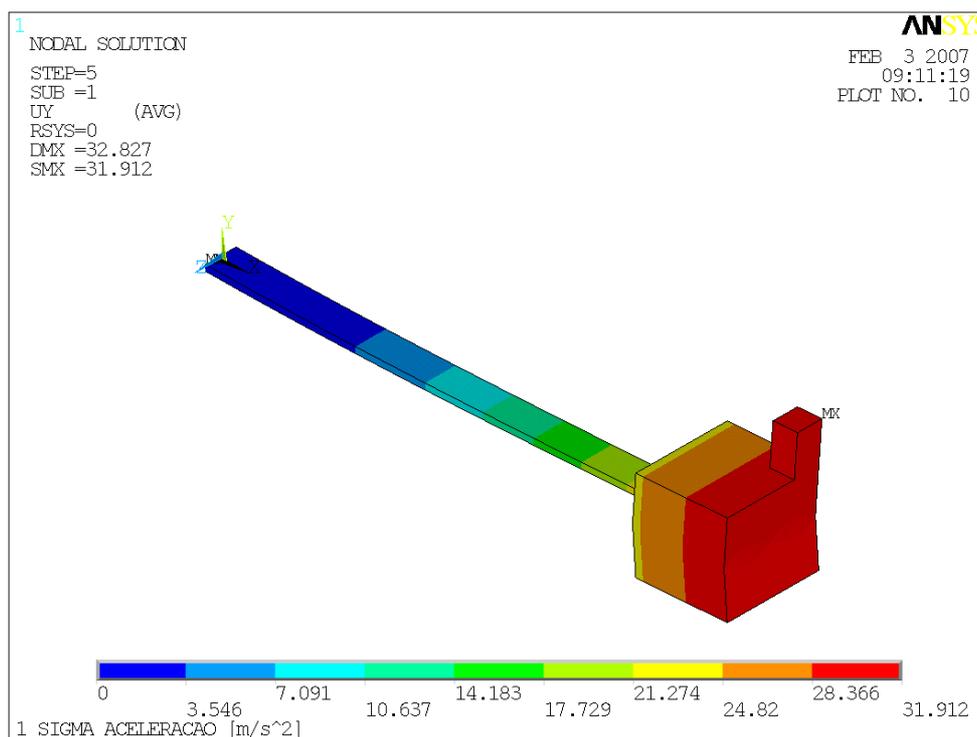


Figura 7-49 – Resposta 1 Sigma de aceleração – Resultado de 3,3 g.

Estes valores são coerentes quando comparados aos resultados experimentais, como a tensão 1σ de 207MPa é equivalente ao obtido estatisticamente segundo a Tabela 7. Convém ressaltar o limite de tensão para vida infinita deste material é de 535MPa, conforme Figura 6-8.

Uma análise das tensões para um deslocamento vertical da massa de 30mm, considerando as não linearidades presentes, como geométrica e de contato foi realizada visando a análise das tensões na região do engaste.

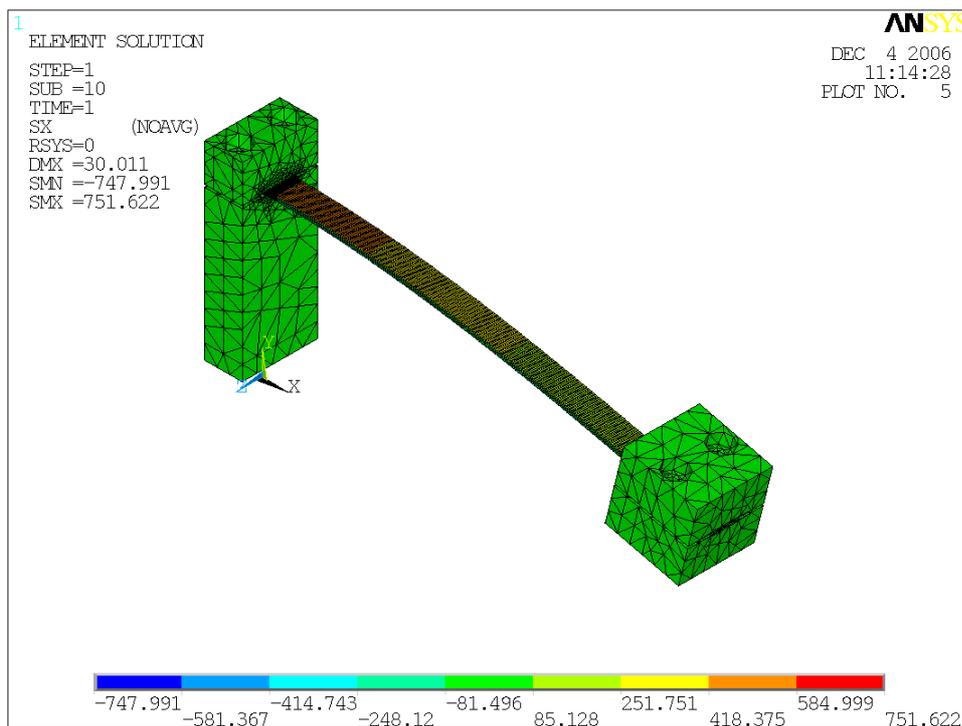


Figura 7-50 – Resultado de tensão normal para um deslocamento imposto à massa de 30mm. Valor ligeiramente superior a 3σ do deslocamento resultante da PSD.

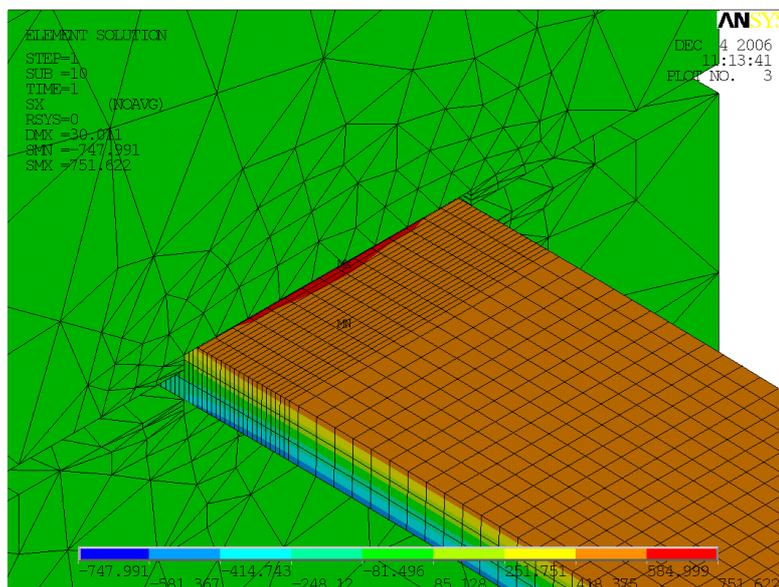


Figura 7-51 – Amplificação do resultado de tensão no engaste. Detalhe da malha refinada.

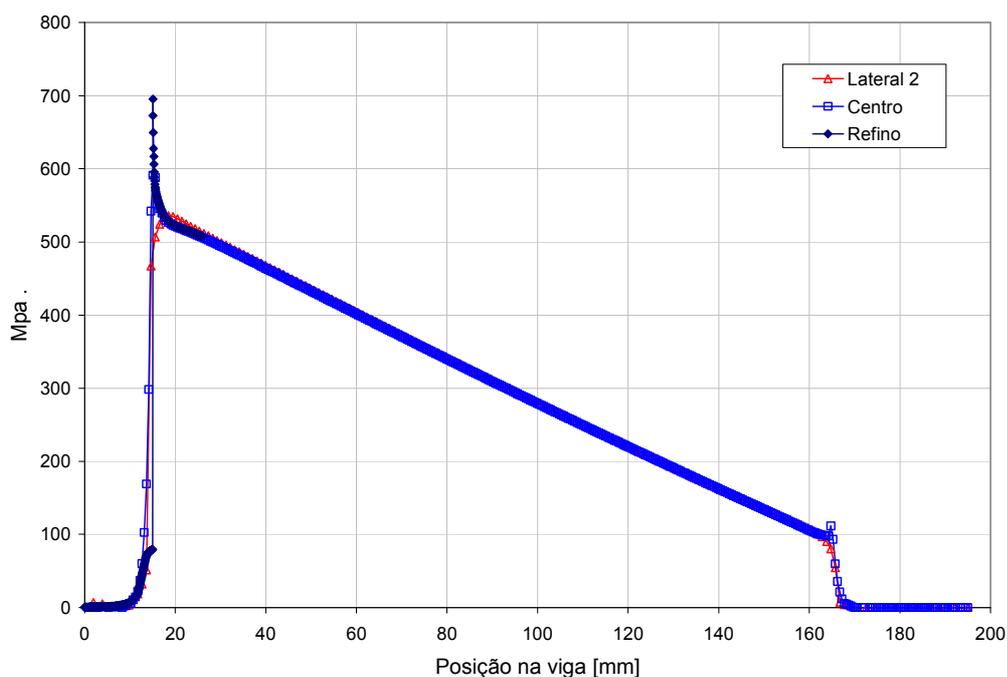


Figura 7-52 – Resultado da tensão normal (longitudinal na viga) ao longo de todo o seu comprimento, contemplando o engaste e a região sob a massa.

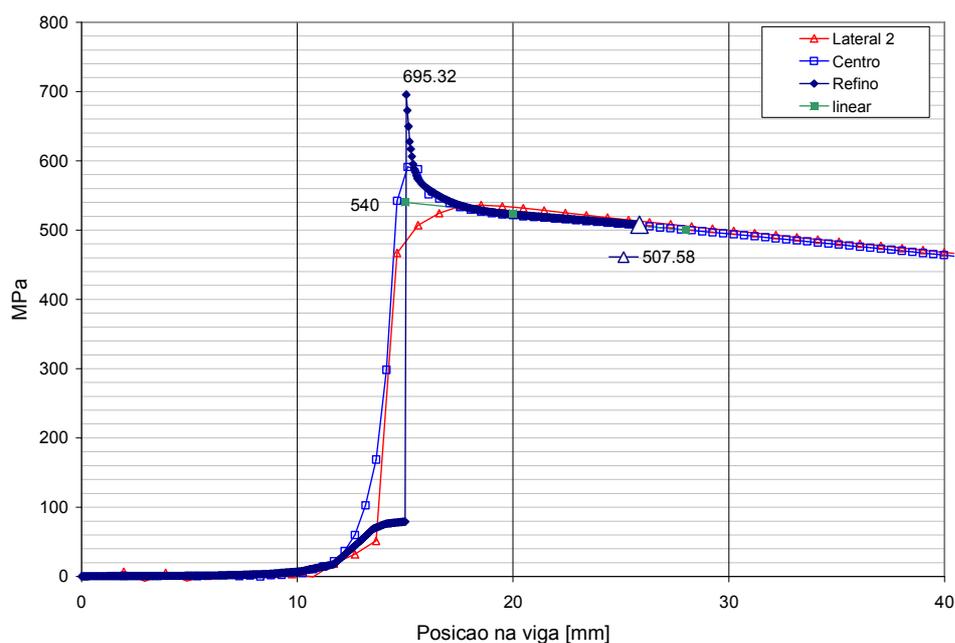


Figura 7-53 – Detalhe da região definido pelo engaste e linearização da tensão projetando-se ao engaste.

Da Figura 7-53, extrai-se as tensões e calcula-se:

Fator de concentração devido ao engaste:

$$K_t = \frac{\sigma_{eng.}}{\sigma_{lin.}} = \frac{695,3}{540} = 1,28 \quad (7-6)$$

Fator de multiplicação entre a tensão no SG e a tensão no engaste:

$$K_t = \frac{\sigma_{eng.}}{\sigma_{SG.}} = \frac{695,3}{507,6} = 1,37 \quad (7-7)$$

Verificação do modelo de cálculo por Função Transferência – $H(f)$

Com esta análise, pretende-se verificar o procedimento de cálculo de maneira indireta, isto é, medindo-se a resposta em um determinado ponto da estrutura e através de multiplicação da função de transferência, determinar a resposta de qualquer outro ponto da mesma. Da mesma forma, também, obter uma função transferência com uma determinada PSD, para então obter a resposta do ponto para uma outra PSD diversa, bastando multiplicar a entrada pela $H(f)$. Para tanto, foram realizadas duas simulações com PSD distintas, chamadas aqui de PSD de transporte (segundo a norma ASTM, como já utilizada em 6.2.2) e PSD de característica branca, ou de amplitude constante ao longo da faixa de frequência.

Através de uma análise numérica utilizando-se uma PSD branca, extraiu-se a $H^2(f)$ dividindo-se a resposta de saída de tensão em um determinado ponto pela excitação de entrada, aceleração, conforme Figura 7-54. Depois, mudou-se a PSD de excitação e multiplicou-se a $H^2(f)$ determinada anteriormente por esta nova PSD de entrada. Comparou-se esta resposta de saída determinada indiretamente com àquela medida diretamente na estrutura. O resultado pode ser observado na Figura 7-57.

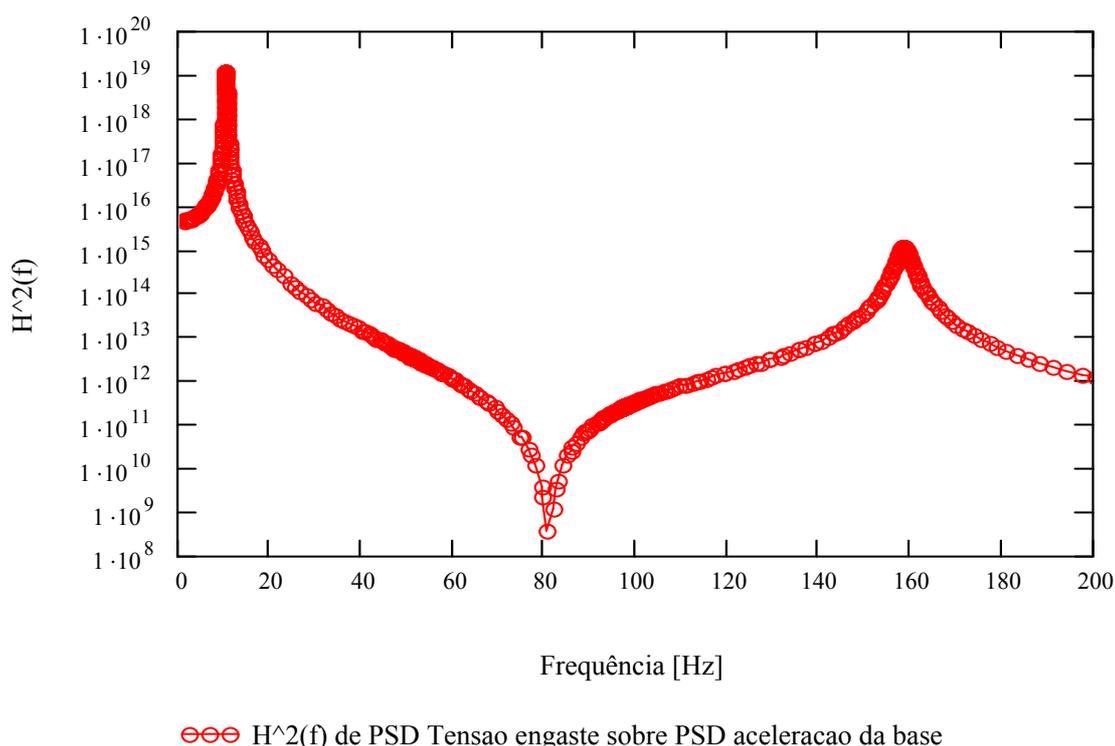


Figura 7-54 – Resultado da tensão em um determinado ponto (engaste) sobre a aceleração PSD aplicada à base de conteúdo constante (PSD branca) de $0,01g^2/Hz$.

Para o cálculo da nova resposta, seja esta de tensão ou aceleração, toma-se o seguinte procedimento:

Aplicando-se a equação (3-21), tem-se, por exemplo, para o cálculo de tensão:

$$\left(\frac{MPa^2}{Hz}\right)_{saída} = H^2(f) \left(\frac{g^2}{Hz}\right)_{entrada} \quad (7-8)$$

$$H^2(f) = \frac{MPa^2}{g^2} \quad (7-9)$$

Assim, desejando-se então, a nova PSD de saída, em MPa^2/Hz , aplicando-se uma nova PSD na entrada em termos de g^2/Hz , basta multiplicar essa nova PSD de entrada pela função transferência:

$$\left(\frac{MPa^2}{Hz}\right)_{saída2} = H^2(f) \left(\frac{g^2}{Hz}\right)_{entrada2} = \frac{MPa^2}{g^2} \left(\frac{g^2}{Hz}\right)_{entrada2} = \left(\frac{MPa^2}{Hz}\right)_{saída2} \quad (7-10)$$

Os resultados calculados diretamente para as duas PSD, de transporte e branca, para a resposta de tensão no engaste, estão representados na Figura 7-55.

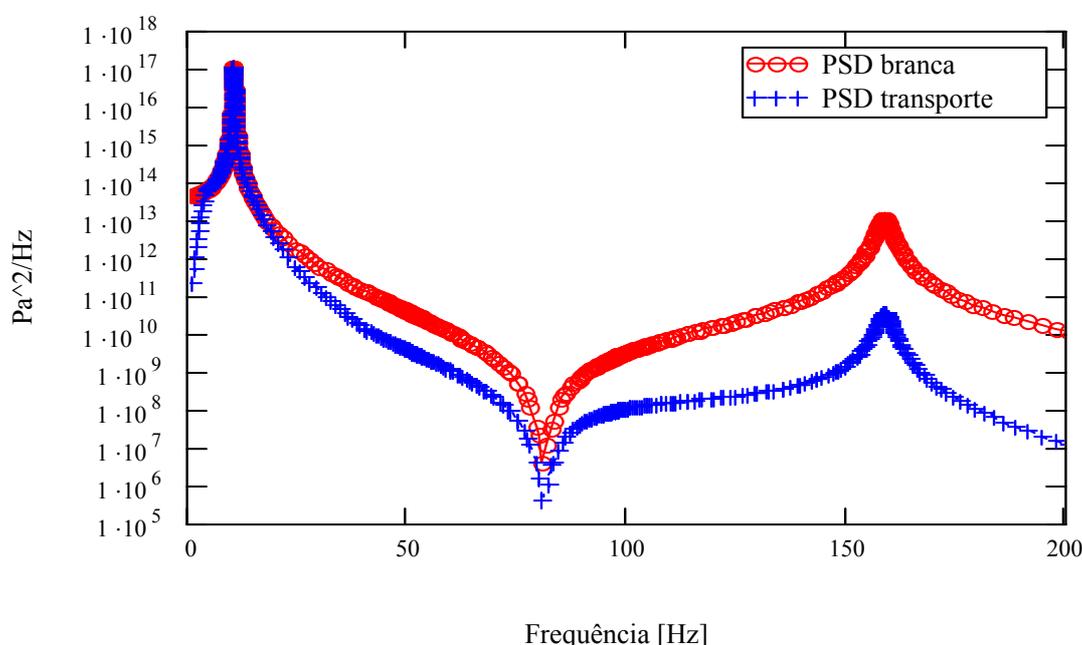


Figura 7-55 – Resposta espectral de tensão no engaste segundo duas PSD distintas aplicado à base. PSD's calculadas diretamente. PSD branca é uma de aceleração constante de $0,01g^2/Hz$.

Importa-se no ANSYS®, desta forma, a nova PSD com os respectivos valores para a excitação da base conforme a Figura 7-56. Porém, o ANSYS® faz uma interpolação linear entre os pontos, mas a referente PSD é linear na escala LOG, resultando em não linearidade entre os pontos interpolados. Uma opção seria adicionar mais pontos na PSD de entrada para minimizar este erro conforme a Figura 7-56.

Este procedimento relata uma limitação do pós-processamento do ANSYS®. Pode ser evitado através do pós-processamento em outros aplicativos matemáticos, porém tem-se a vantagem de integrar os resultados automaticamente (interpolando) quando se multiplica pela PSD de tensão, por exemplo.

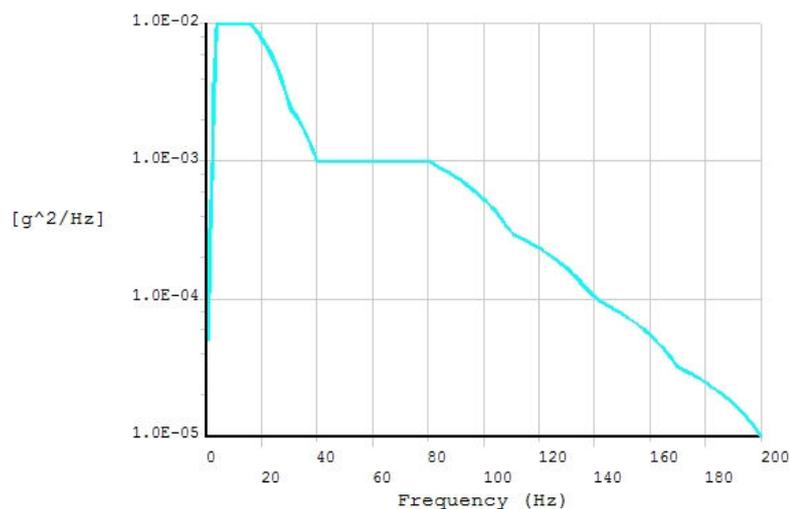


Figura 7-56 – PSD importada com pontos extras para melhor aproximação da interpolação.

Resultados

Com a aplicação desta técnica, obtém-se um ganho de tempo de processamento, quando se deseja obter a resposta em frequência (PSD) de tensão no ponto desejado, quando o sistema está sujeito a uma outra PSD qualquer.

Assim, basta multiplicar a Função de Transferência numérica, $H^2(f)$ obtido para qualquer PSD anteriormente já simulado pela nova PSD de entrada na base. Obtém-se, desta forma, a nova PSD de tensão no ponto desejado sem a necessidade de se resolver o sistema numérico. Os resultados aplicando-se esta técnica, bem como daquela resolvendo todo o sistema novamente apenas para comparação, está demonstrado na Figura 7-57.

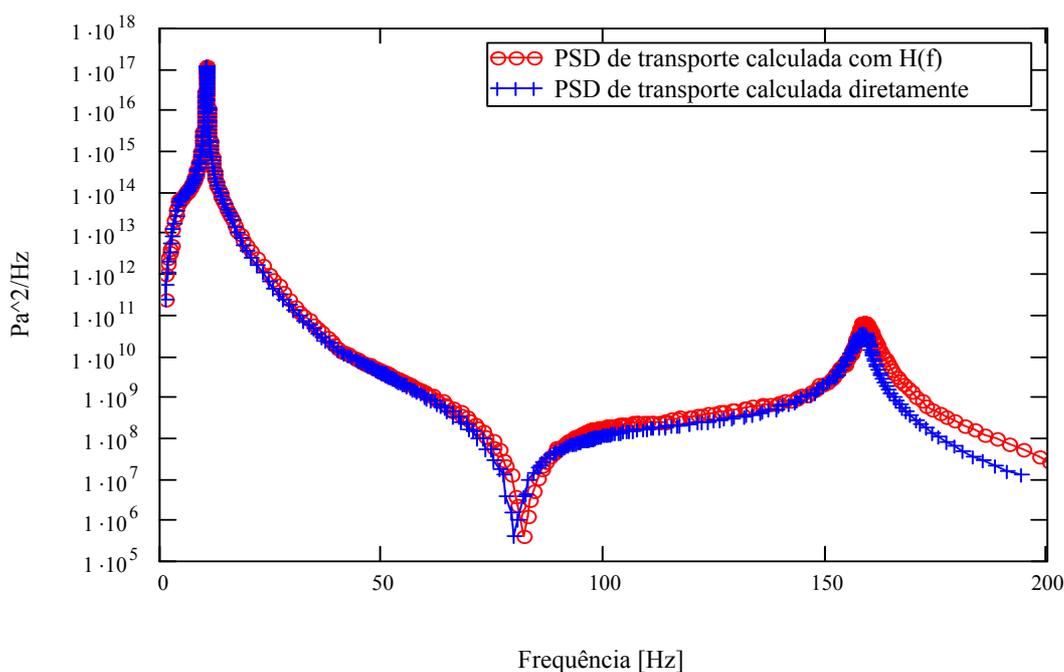


Figura 7-57 – Simulação da resposta de tensão no engaste. Solução por PSD direta e solução por aplicação da função de transferência $H(f)$.

7.6.1 Simulação de Monte Carlo a partir de uma simulação PSD

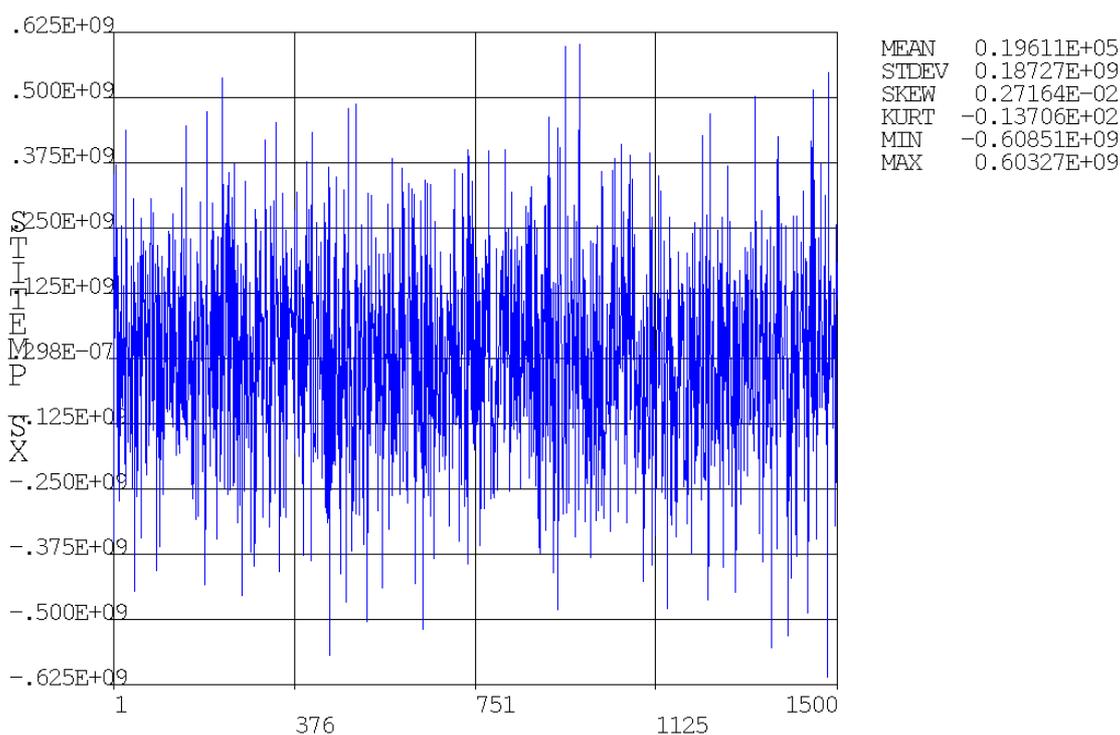
Partindo-se da PSD de resposta da tensão de um determinado ponto na viga, realizou-se uma simulação estatística aleatória através do método de Monte-Carlo, sendo os dados de entrada os momentos espectrais da PSD.

Aplicando-se esta metodologia e partindo-se dos resultados RMS provenientes da análise espectral, é possível verificar as funções de distribuição estatísticas das componentes de tensão e também das derivadas, como a tensão equivalente, por exemplo.

É possível também estimar a probabilidade de uma determinada componente de tensão, no caso a tensão normal σ_x da estrutura, assumir um valor maior que o limite de fadiga do material. Ou ainda, através de ferramentas estatísticas, determinar as probabilidades 1σ , 2σ e 3σ da distribuição Gaussiana diretamente na simulação numérica.

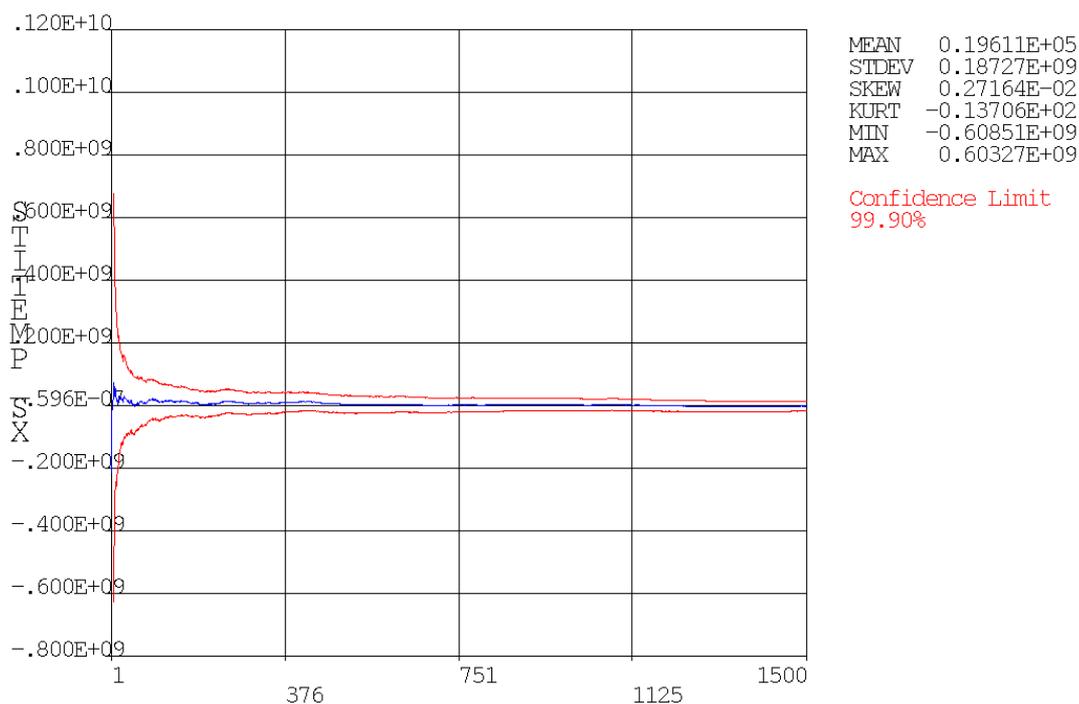
Os resultados das simulações de Monte Carlo, a partir da PSD de transporte, está representado nas Figura 7-58 a Figura 7-62.

ANSYS



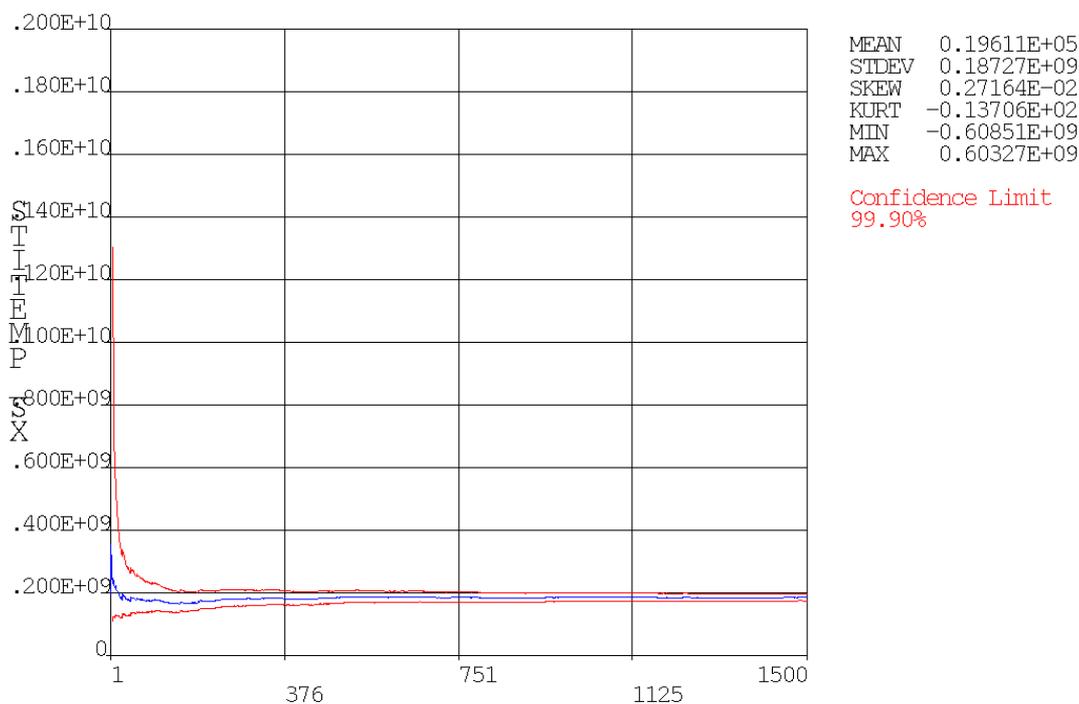
Simulacao de Monte Carlo - PSD transporte - Tensao Sx

Figura 7-58 – Simulação de Monte-Carlo a partir dos momentos espectrais da PSD de tensão no ponto de interesse da viga. Resultado das 1500 amostras geradas, equivalendo-se a uma variação no “tempo” das tensões, com média próxima a 0 Mpa.



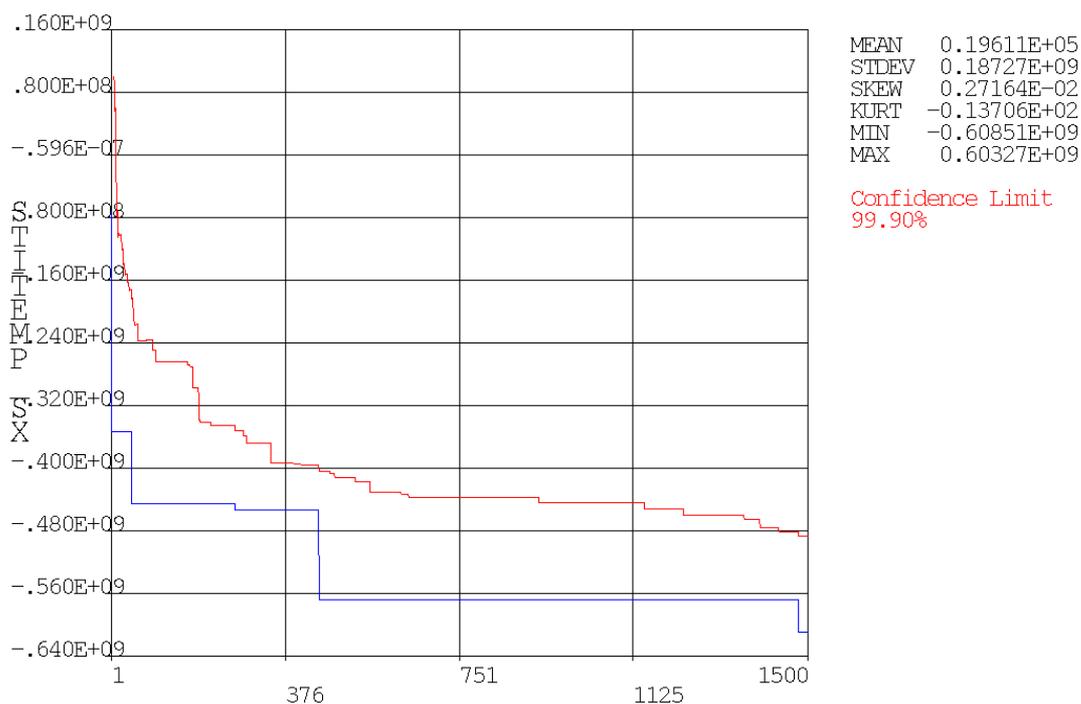
Simulacao de Monte Carlo - PSD transporte - Tensao Sx

Figura 7-59 – Simulação de Monte-Carlo a partir dos momentos espectrais da PSD de tensão no ponto de interesse da viga. Resultado de convergência da tensão normal σ_x média para uma amostra de 1500 modelos.



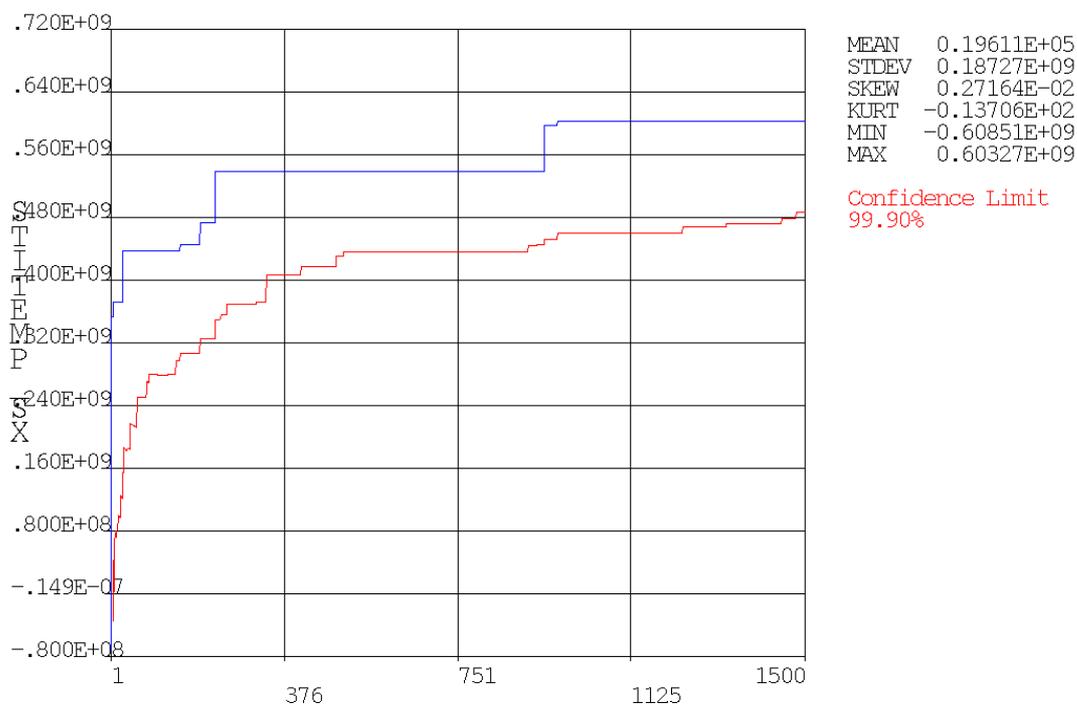
Simulacao de Monte Carlo - PSD transporte - Tensao Sx

Figura 7-60 – Simulação de Monte-Carlo a partir dos momentos espectrais da PSD de tensão no ponto de interesse da viga. Resultado de convergência do desvio padrão da tensão normal σ_x para uma amostra de 1500 modelos.



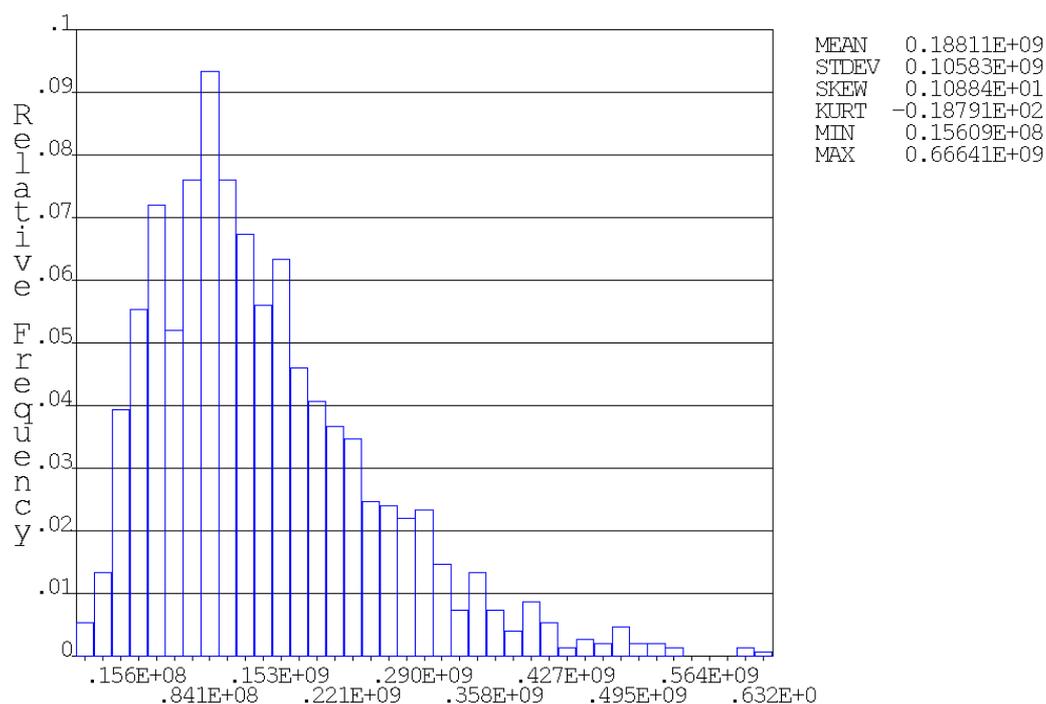
Simulacao de Monte Carlo - PSD transporte - Tensao Sx

Figura 7-61 – Simulação de Monte-Carlo a partir dos momentos espectrais da PSD de tensão no ponto de interesse da viga. Resultado de probabilidade de ocorrência das tensões normais σ_x mínimas.



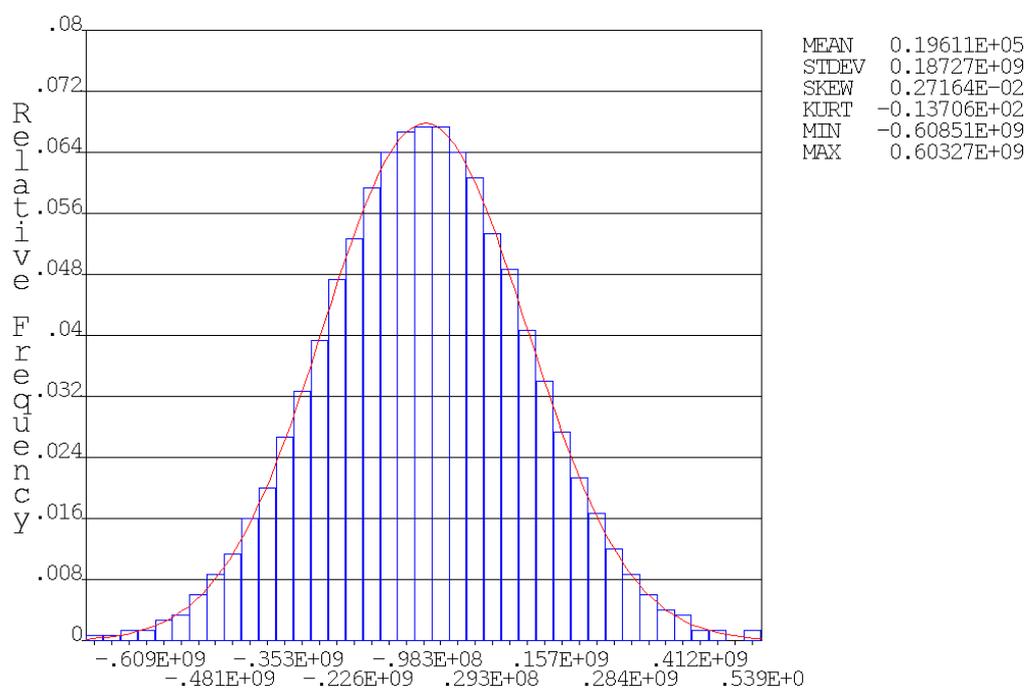
Simulacao de Monte Carlo - PSD transporte - Tensao Sx

Figura 7-62 – Simulação de Monte-Carlo a partir dos momentos espectrais da PSD de tensão no ponto de interesse da viga. Resultado de probabilidade de ocorrência das tensões normais σ_x máximas.



Simulacao de Monte Carlo - PSD transporte - Tensao Seqv

Figura 7-63 – Histograma da tensão equivalente, σ_{eqv} em um ponto na base resultante de uma análise probabilística de Monte Carlo a partir dos momentos espectrais da PSD de tensão.



Simulacao de Monte Carlo - PSD transporte - Tensao Sx

Figura 7-64 – Histograma das tensões normais, σ_x em um ponto na base resultante de uma análise probabilística de Monte Carlo a partir dos momentos espectrais da PSD de tensão. O valor de desvio padrão aproxima-se daquele da Figura 7-47.

Observa-se que as tensões normais apresentam-se distribuídas em uma função de probabilidade normal (Gaussiana) enquanto que as tensões equivalentes apresentam uma distribuição de Rayleigh. Resposta semelhante também foi apresentada por (IMAOKA, 2004). Aplicando-se a análise de Monte Carlo, uma avaliação probabilística de uma determinada variável pode ser extraída, como por exemplo, a probabilidade da tensão normal σ_x , ser maior que o limite de fadiga do material: 535MPa. O resultado é mostrado na Figura 7-65.

```

Probability Result of Random Input Variable STITEMP_SX
=====

Solution Set Label      = STRESS_EVALUATION
Simulation Method      = Monte Carlo with Latin Hypercube Sampling
Number of Samples      = 1500
Mean (Average) Value   = 1.9611279e+004
Standard Deviation     = 1.8726505e+008
Skewness Coefficient   = 2.7163608e-003
Kurtosis Coefficient   = -1.3706380e+001
Minimum Sample Value   = -6.0851065e+008
Maximum Sample Value   = 6.0326761e+008

The probability that STITEMP_SX is larger than 5.3500000e+008 is:

Probability [ Lower Bound, Upper Bound]
2.56867e-003 [ 2.70700e-004, 9.46978e-003]

NOTE: The confidence bounds are evaluated with a confidence level of
99.900%.

```

Figura 7-65 – Resultados numéricos da simulação de Monte-Carlo partindo-se da PSD de transporte

7.6.2 Análise Espectral Experimental comparada à numérica – PSD

Neste sub-capítulo, as respostas numéricas espectrais – PSD, de aceleração e tensão resultantes da excitação PSD de transporte imposta à base, são comparadas com aqueles resultados obtidos experimentalmente. As acelerações experimentais foram obtidas a partir dos acelerômetros colocados na base e na extremidade da viga, na massa. As tensões experimentais foram obtidas com a aquisição do sinal de deformação no strain-gage localizado próximo ao engaste.

As respostas encontram-se ilustradas nas Figura 7-66 a Figura 7-72.

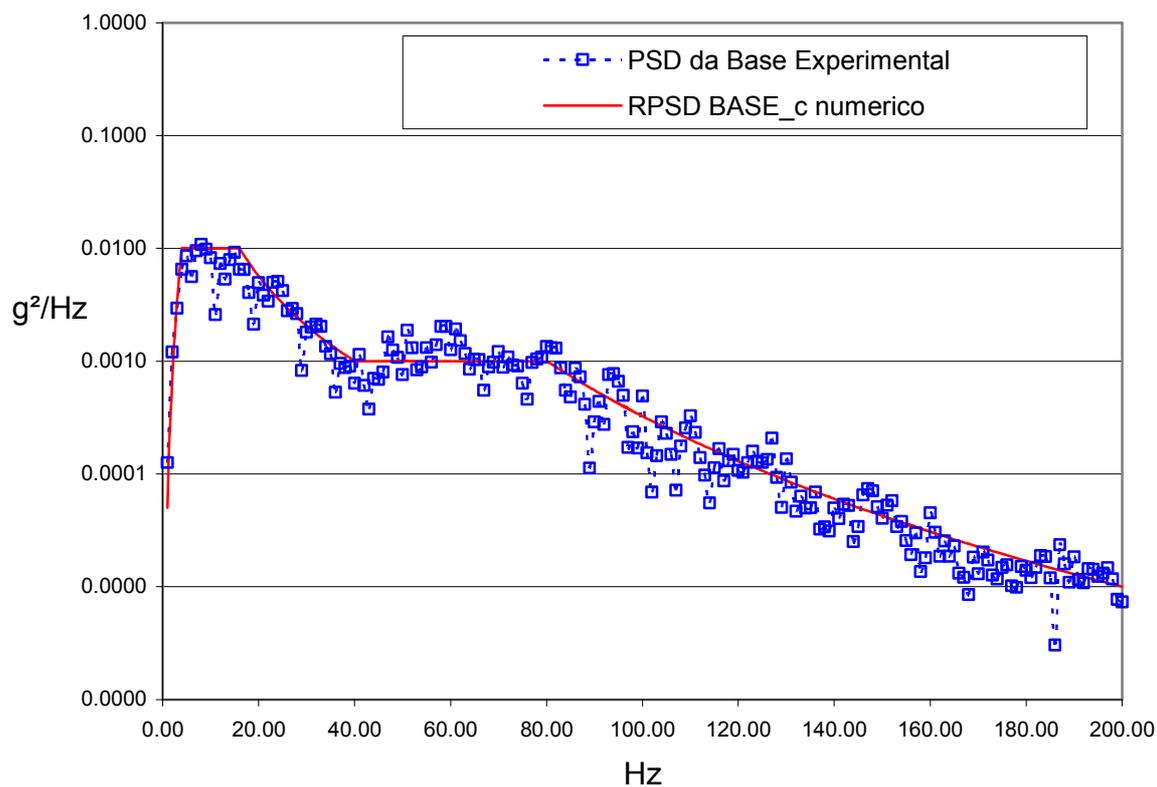


Figura 7-66 – Resposta espectral da base quando imposta aceleração PSD à base: Numérico e experimental.

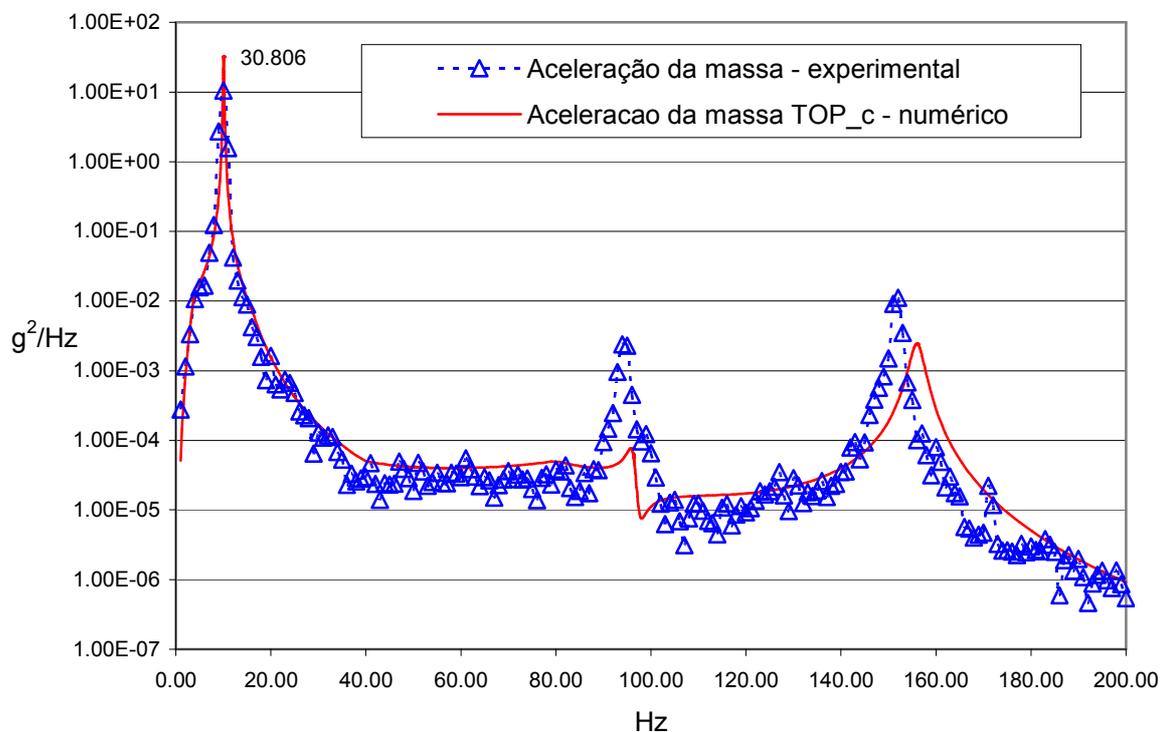


Figura 7-67 – Resposta espectral da massa quando imposta aceleração PSD à base: Numérico e experimental.

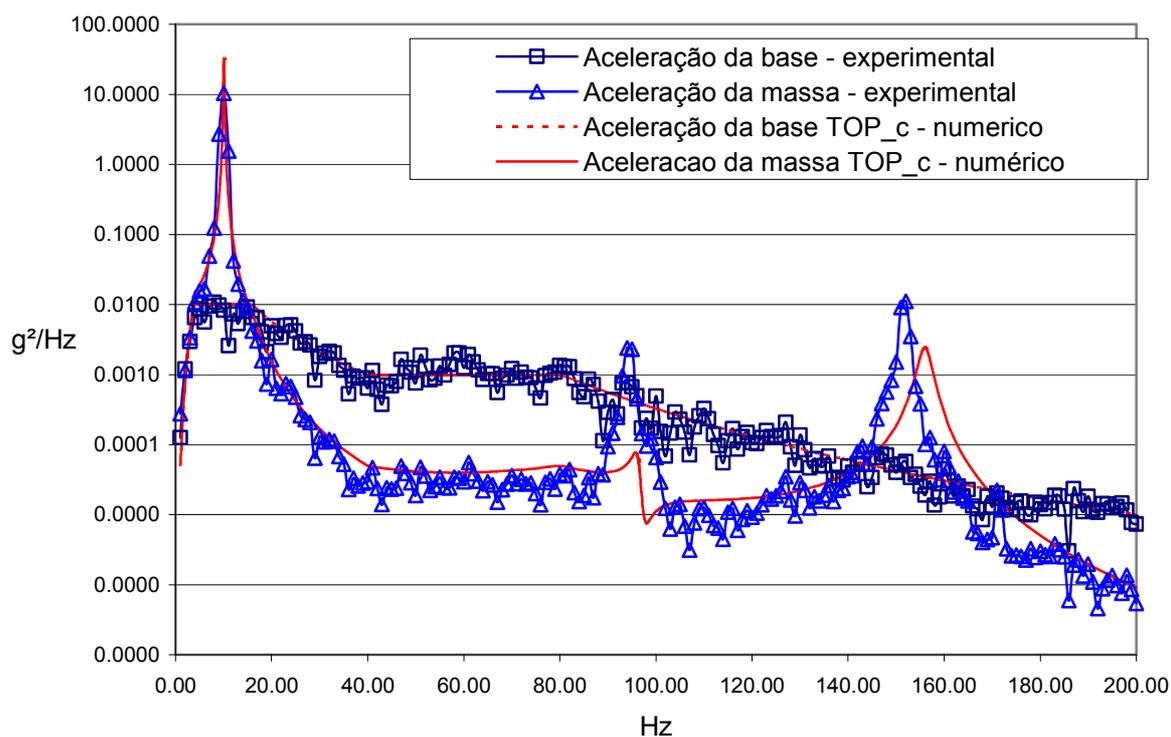


Figura 7-68 – Resposta espectral da massa e da base sobrepostos quando imposta aceleração PSD à base: Numérico e experimental.

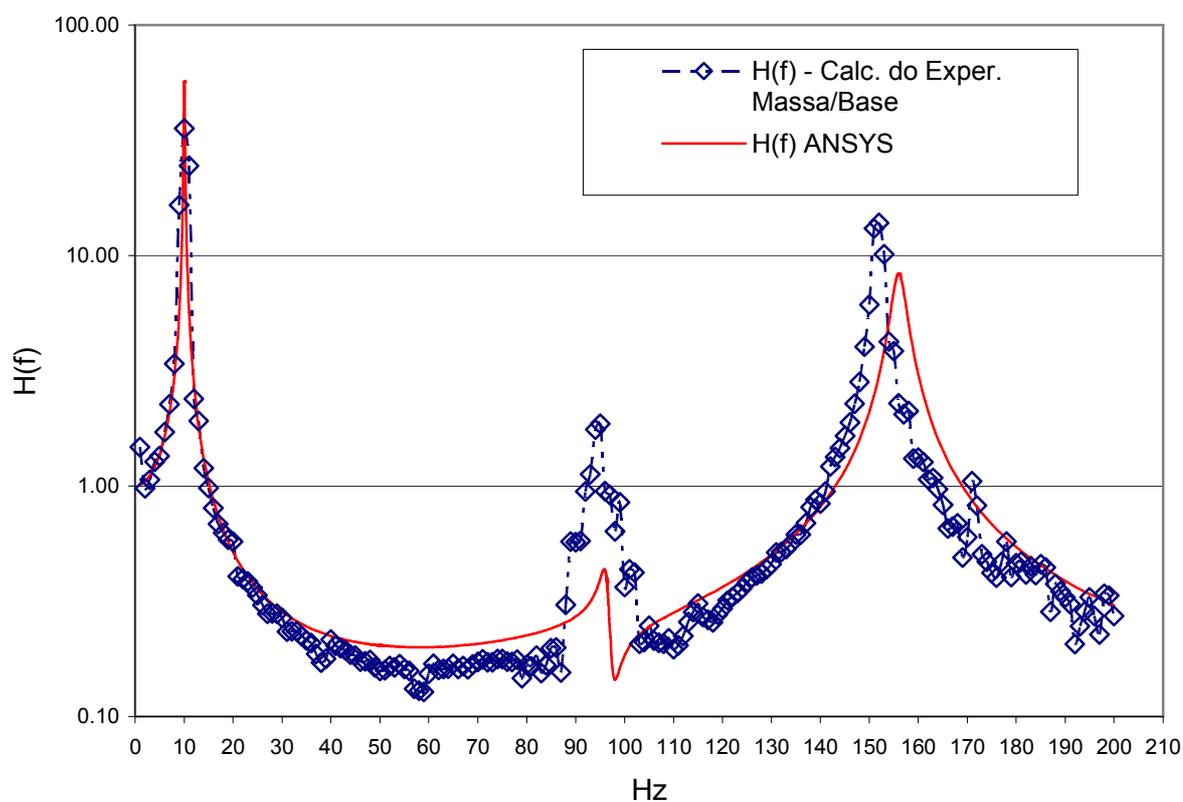


Figura 7-69 – H(f) da aceleração da massa sobre aceleração da base, calculado pela análise espectral PSD experimental e numérica.

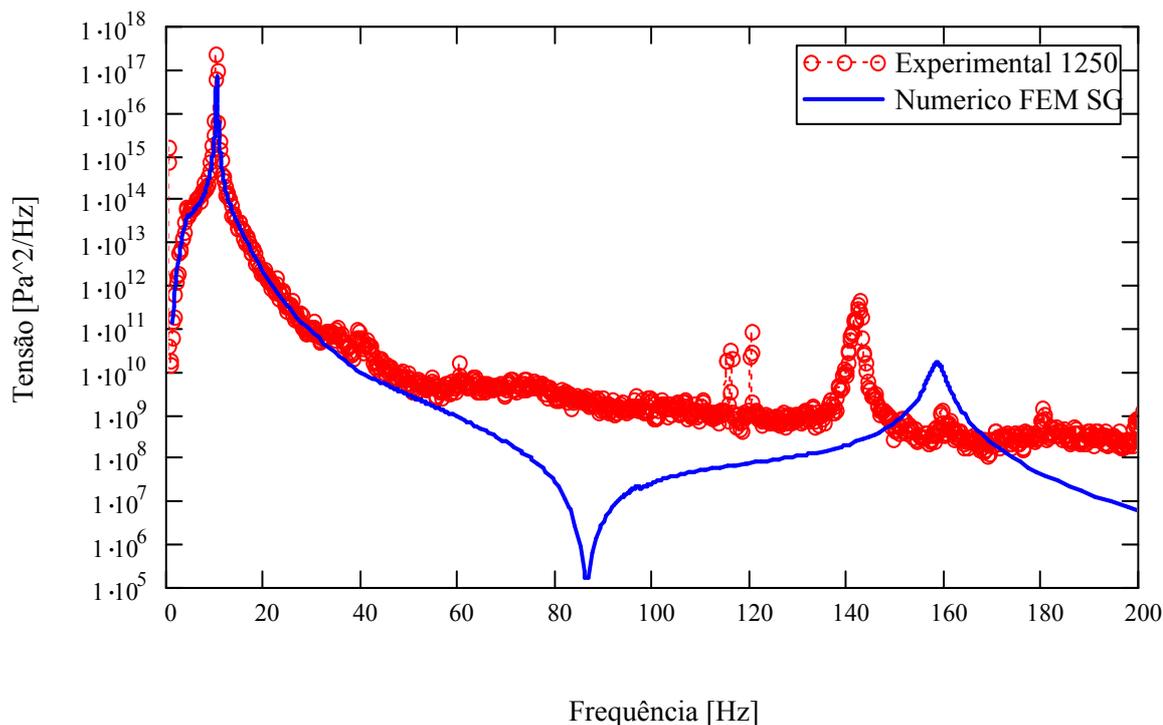


Figura 7-70 – Resposta espectral da tensão, numérico e experimental no strain-gage. Área da PSD (m_0) experimental = $3,49E16$; Área da PSD (m_0) numérica (no SG) = $2,1E16$.

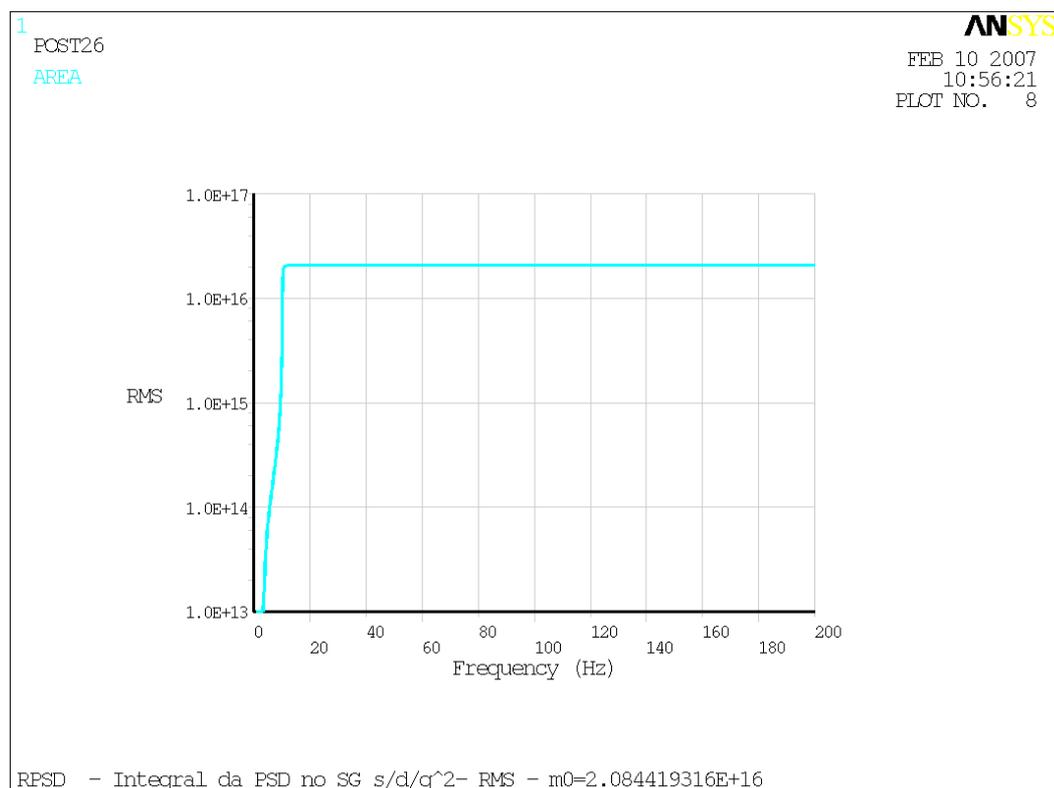


Figura 7-71 – Cálculo da área da PSD, integral da frequência pela resposta de tensão na região do Strain-Gage. O valor da área corresponde ao primeiro momento da PSD, m_0 .

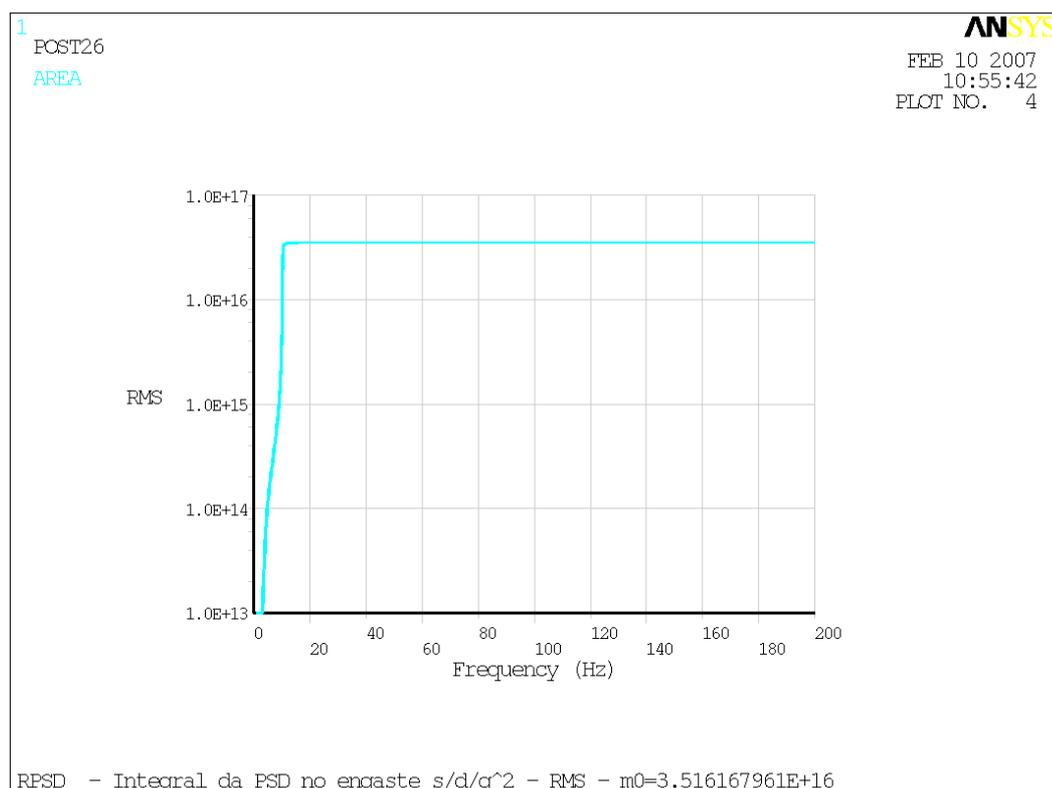


Figura 7-72 – Cálculo da área da PSD, integral da frequência pela resposta de tensão no engaste. O valor da área corresponde ao primeiro momento da PSD, m_0 .

Os dois gráficos da Figura 7-71 e Figura 7-72 justificam a aplicação de um amortecimento estrutural constante para todos os modos de vibração dentro da faixa de análise. Esta justificativa se dá pelo fato do valor do momento m_0 da PSD ser dominada pelo primeiro modo de vibração em 10Hz, assumindo um valor praticamente constante até 200Hz. Assim, não se espera que a aplicação de amortecimento diferenciado para os outros modos de vibração representem diferenças quantitativas na análise.

7.7 Análise com Segundo Modelo

Um segundo modelo, chamado de V2 de geometria semelhante, porém apresentando uma redução no perfil lateral, foi simulado e submetido à mesma experimentação da viga inicial de modelo simples. Este modelo de viga visa concentrar as maiores tensões longe do engaste e foi projetada de modo que as tensões principais e normais estejam localizadas na região central da viga (redução no perfil). O modelo com a malha MEF gerada está representada pela Figura 7-73.

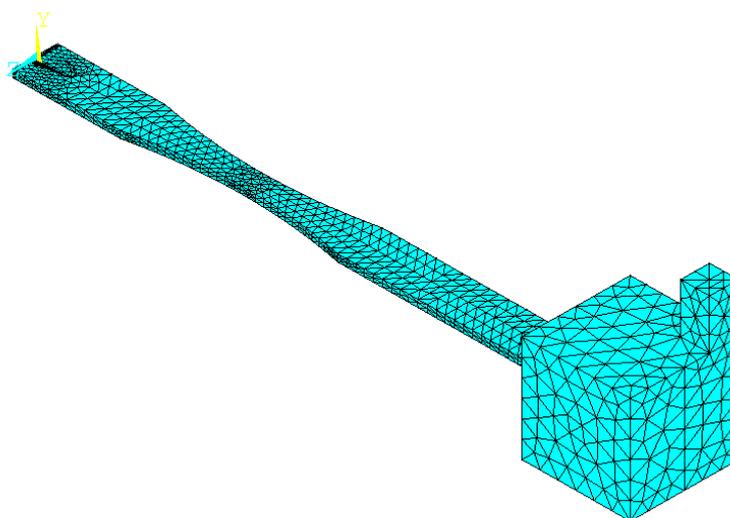


Figura 7-73 – Malha de elementos finitos aplicado ao segundo modelo com refino nas regiões de máxima tensão.

A mesma PSD de transporte foi aplicado inicialmente visando uma comparação, Figura 7-74. O resultado de 1 desvio padrão da tensão normal – σ_x , e a resposta espectrais de tensão – PSD, está representado na Figura 7-75 e Figura 7-76. Observa-se o ponto de máxima tensão ocorrendo no centro da viga, distante do engaste como era o objetivo.

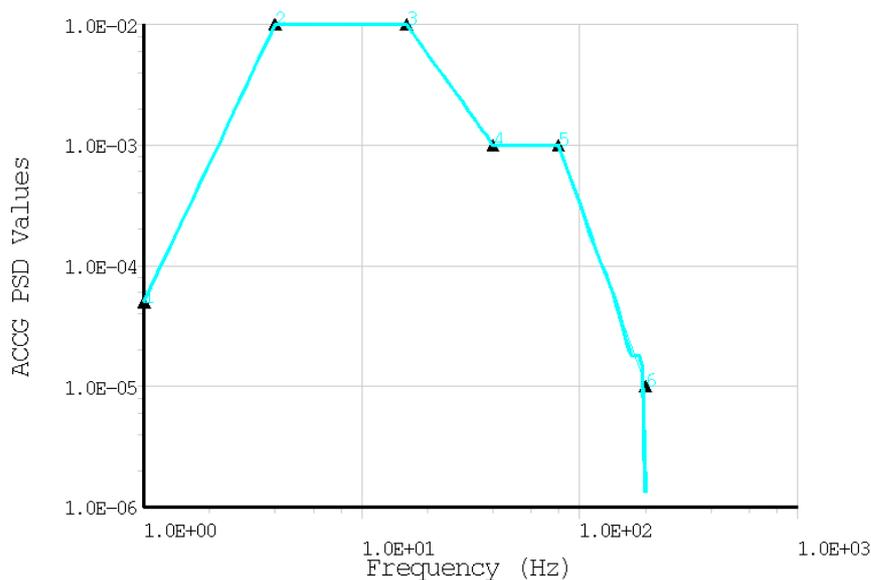


Figura 7-74 – PSD de transporte, entrada aplicada ao modelo V2.

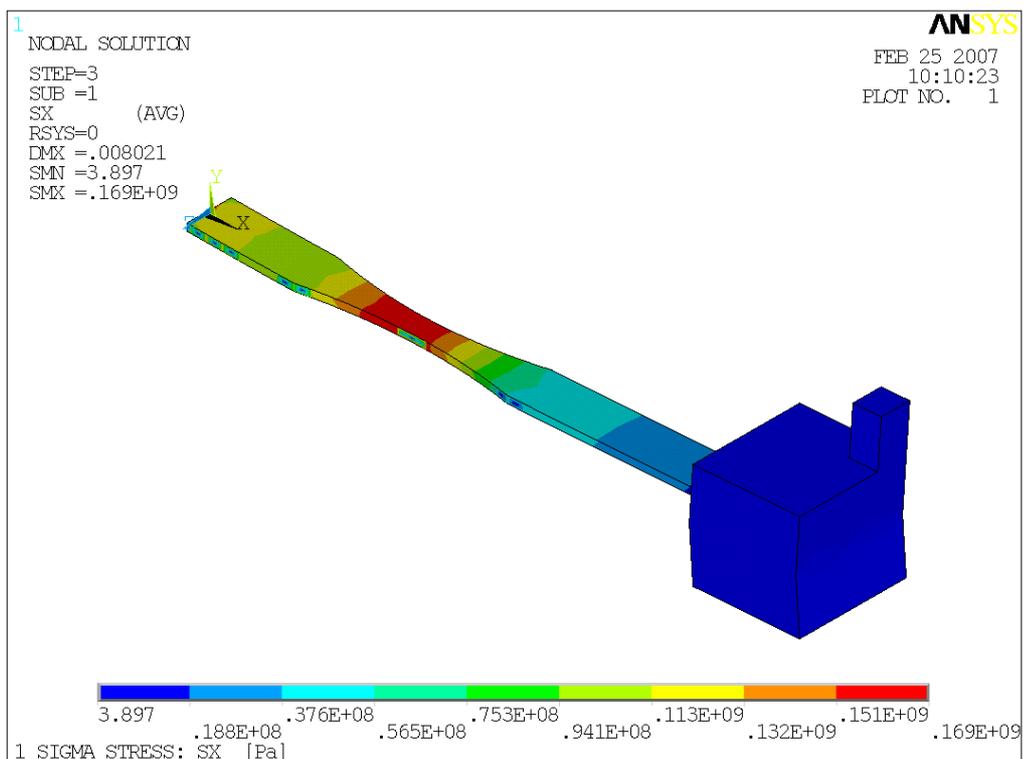


Figura 7-75 – Resposta 1 Sigma de tensão normal σ_x , para o modelo V2. Observa-se a distribuição de tensão no centro da viga: $\sigma^2 = 2,86E16$.

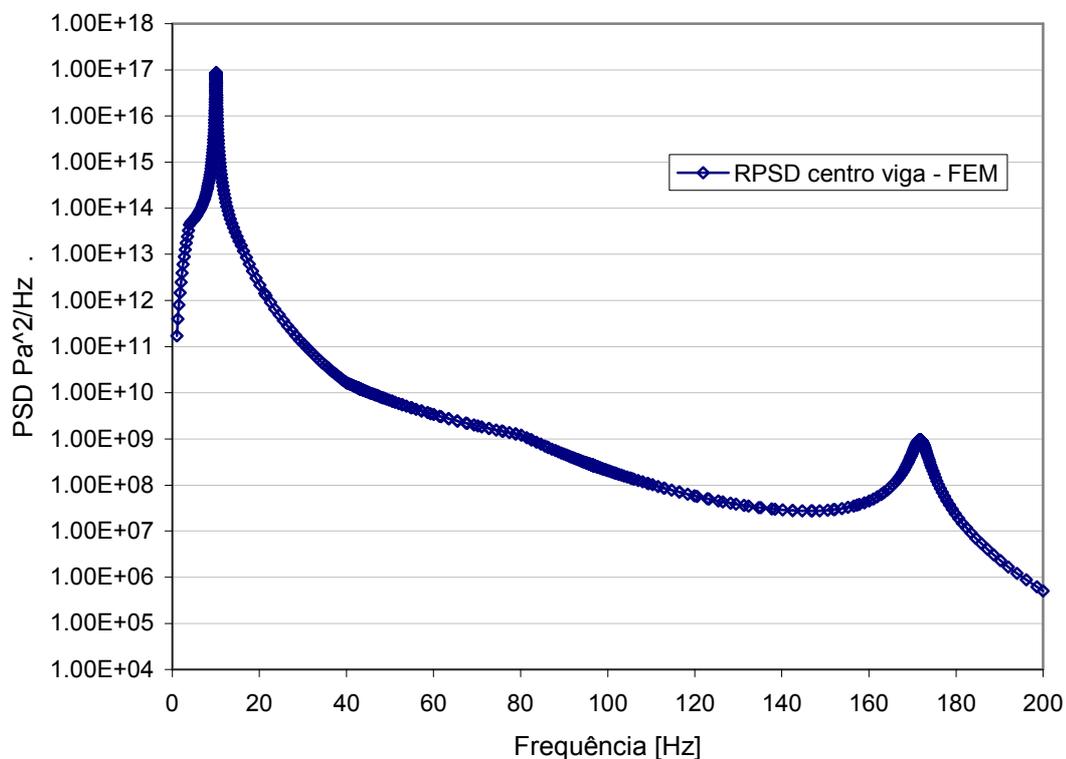
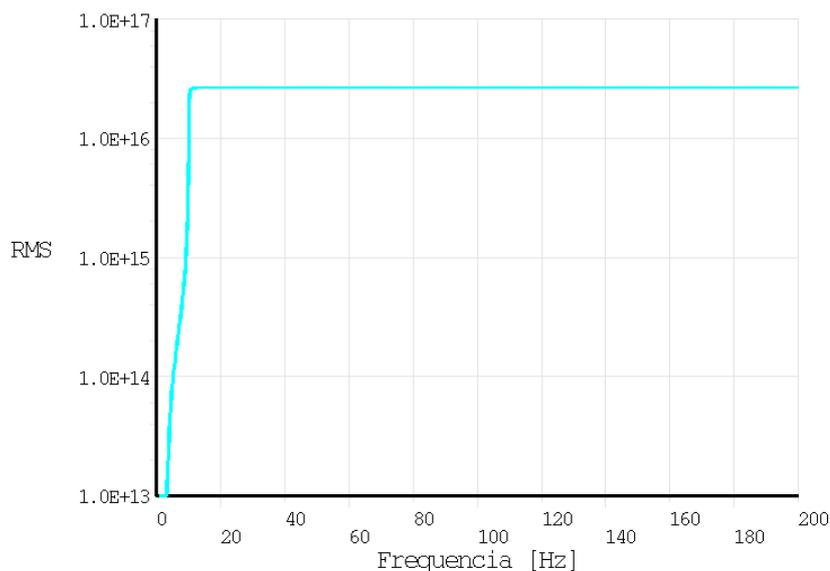


Figura 7-76 – PSD de tensão no ponto crítico (centro da viga).



Integral da PSD no centro da viga - RMS - $m_0=2.667635124E+16$

Figura 7-77 – Cálculo da área sob a PSD de tensão no centro da viga. Equivalente a m_0 .

7.8 Descrição do Ensaio Experimental

A excitação aleatória do sistema foi realizada utilizando-se um excitador (*Shaker*), eletromagnético conforme as especificações da Tabela 9. Utilizou-se de um módulo de controle de sinais, software de controle de vibrações aleatórias, módulo de medição para a extensometria, software para medição e tratamento dos sinais de tensão, além de um aparato eletrônico de conexão e interface. Estes equipamentos estão representados na Figura 7-79 a Figura 7-84. O dispositivo com o corpo de prova – viga, esta representado na Figura 7-78.

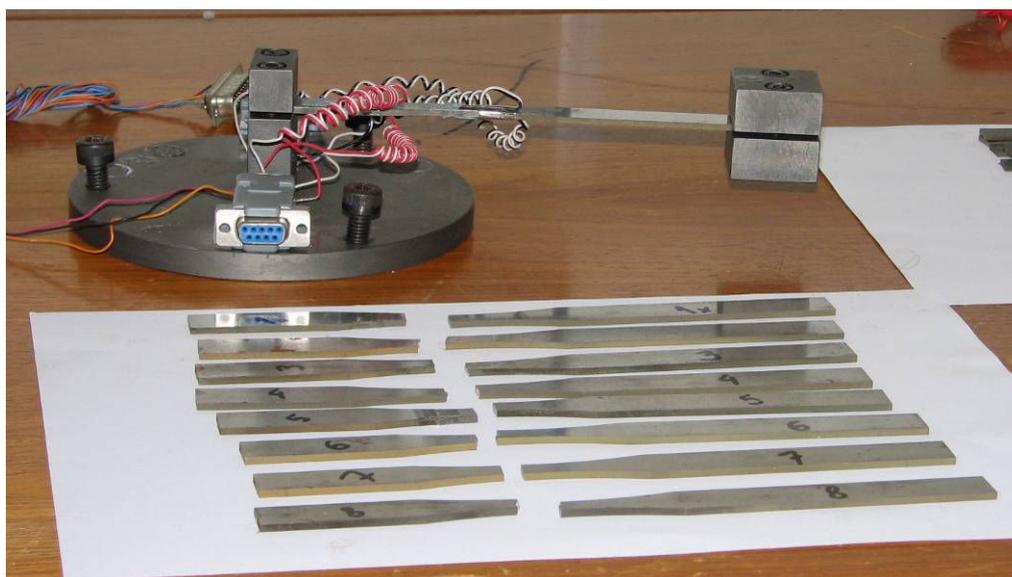


Figura 7-78 – Detalhe do dispositivo de fixação dos corpos de prova e CP's viga modelo V2 após o teste de fadiga.

Tabela 9 – Especificações dos Equipamentos e Softwares de Aquisição de Sinal

| | | |
|---|---|--|
| • Excitador | Fabricante: Modelo: Campo de Frequência: Deslocamento máximo: Máxima aceleração: Força de pico | TIRAvib TIRAvib 56263/LS 3000 [Hz] 50,8 [mm] 80 / 160 [g] 6,3 / 12,6 [KN] |
| • Módulo de Controle do excitador | Fabricante: Modelo: | LMS Scadas III |
| • Software de controle do excitador | Fabricante: Nome: | LMS Virtual.Lab |
| • Módulo de aquisição de sinal do Strain-gage (ponte) | Fabricante: Modelo: | HBM MGCPlus AB22A |
| • Software de Aquisição de sinal do SG | Fabricante: Nome: | National Struments LabView |
| • Placa de aquisição de sinal do SG | Fabricante: Modelo: | Micro-measurements EA-06-062AQ-350 |
| • Acelerômetro aplicado à base | Fabricante: Modelo: | PCB piezotronics ICP 353B04 |
| • Acelerômetro aplicado à massa | Fabricante: Modelo: | Brüel & Kjaer ICP 4397A |

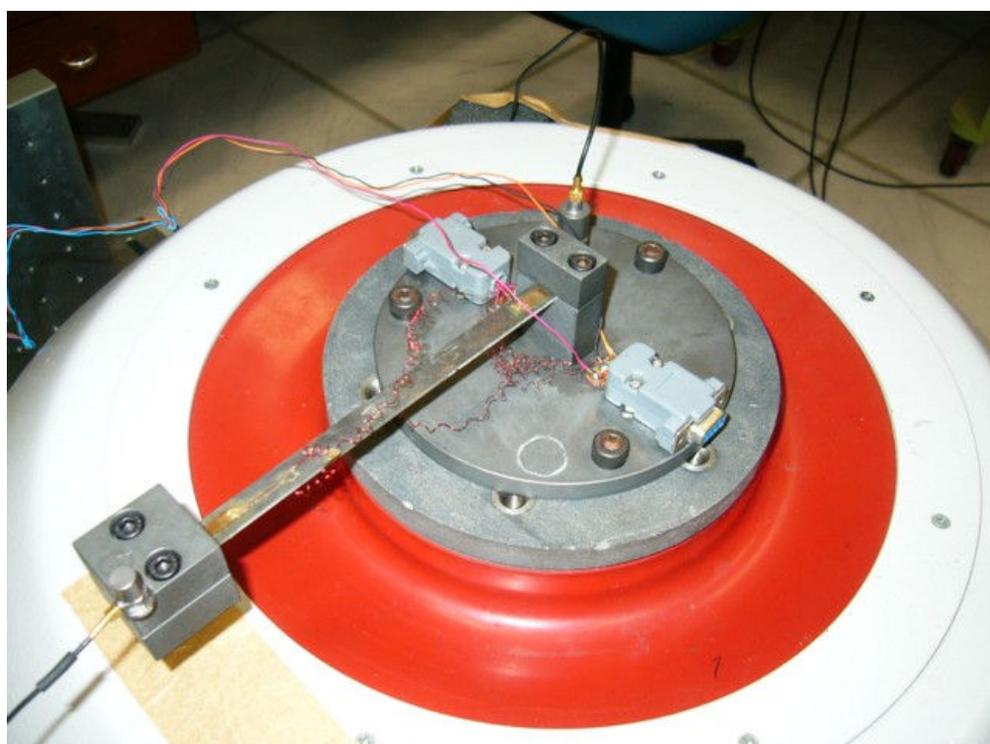


Figura 7-79 – Sistema para aquisição dos sinais de tensão e acelerações montado sobre o dispositivo e o excitador (*shaker*).



Figura 7-80 – Aparato experimental com placas de aquisição, controladora do *shaker* (à direita ao fundo), ponte MGC para aquisição de tensões e software LabView® (à esquerda).



Figura 7-81 – Detalhe do sistema de aquisição dos dados, *shaker*, ponte MGC e software labView.



Figura 7-82 – Detalhe do sistema de vibração aleatória e controladora do *shaker*.



Figura 7-83 – Detalhe do módulo de aquisição de tensões do SG – Ponte MGC.



Figura 7-84 – Detalhe da placa para interface da ponte MGC e placa PC.

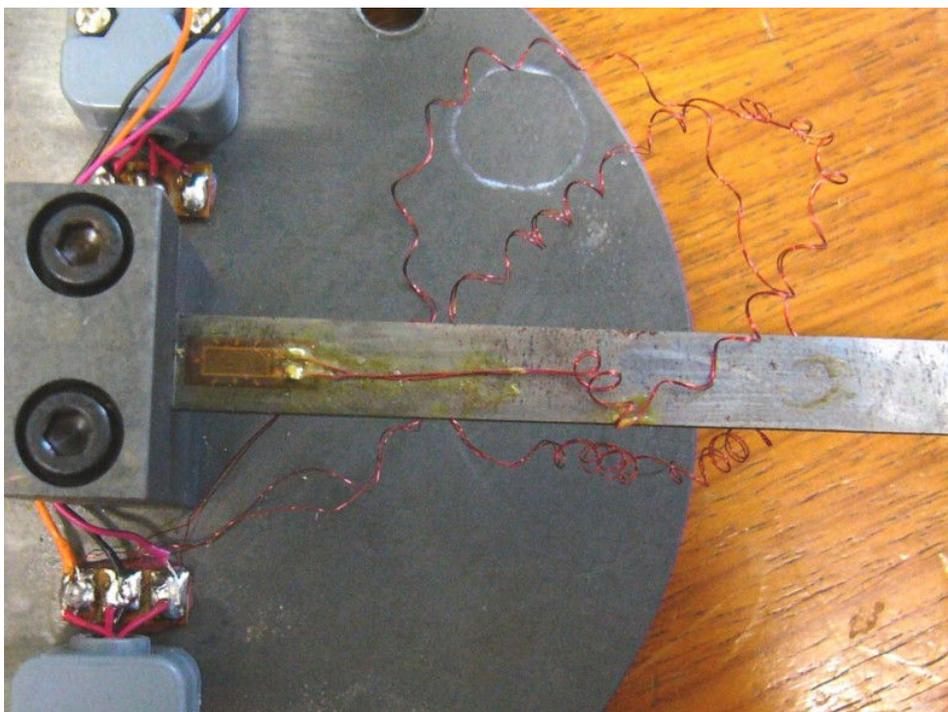


Figura 7-85 – Detalhe da viga instrumentada com SG e saída para cabo de aquisição dos sinais. A montagem dos SG é em meia-ponte, com dois em cada localização. O segundo está imediatamente abaixo, amplificando-se as tensões.

7.9 *Análise e Comparação dos Resultados Numéricos e Experimentais de Vida de Fadiga*

Viga Modelo V1

7.9.1 *Estimativa de Vida no domínio do tempo – Rainflow.*

A estimativa de vida de fadiga sob solicitação aleatória, tanto no domínio do tempo quanto da frequência, necessita de um critério de acúmulo de dano que os ciclos de tensão alternada causam à estrutura. O critério adotado para as estimativas a seguir, foi o de Palmgren-Miner, com critério de dano, isto é, falha por fadiga quando $E[D] = 1$.

Para a aplicação da metodologia de estimativa de vida pela contagem de ciclos *Rainflow* e subsequente aplicação do critério de acúmulo do dano de Palmgren-Miner, foi aplicado *Rainflow* em um sinal de tensão de 1 minuto de duração, a uma taxa de aquisição $2500^{-1}s$. Trata-se do sinal de tensão medido no extensômetro colocado junto à base da viga do modelo V1.

A Figura 7-86 mostra a contagem de ciclos de amplitude de tensão alternante caracterizando-se desta forma a probabilidade de tensão, Figura 7-87. A Figura 7-88 mostra a contagem de ciclos de valor médio. Nota-se a distribuição do valor médio das tensões próximas a zero como já mostrado na estatística do sinal de tensão nos capítulos anteriores.

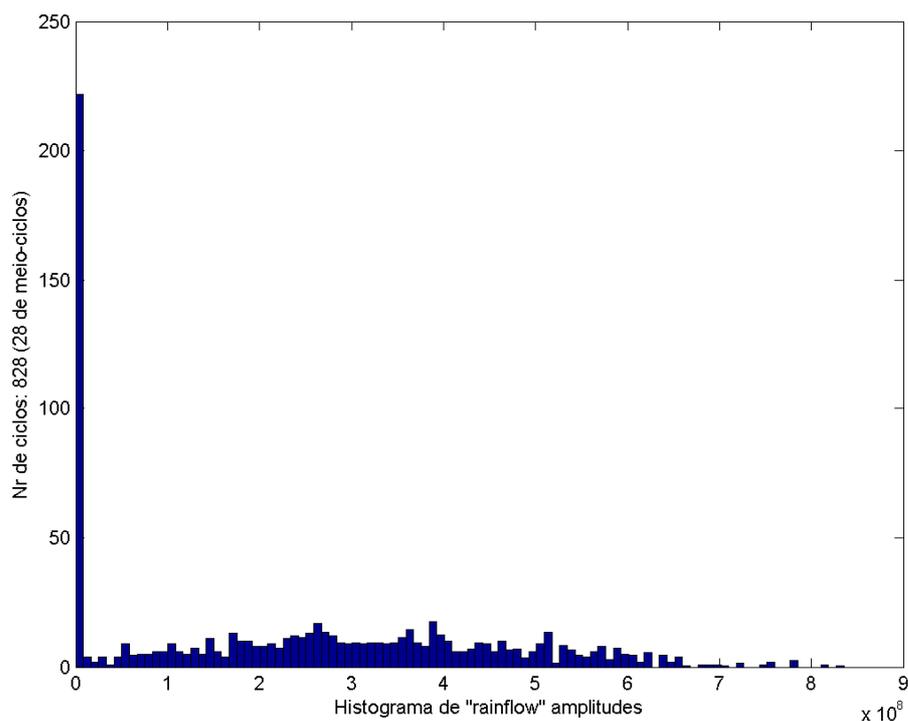


Figura 7-86 – Contagem de ciclos através de *Rainflow*. Amplitude de tensão versus número de ciclos, para um sinal de 1 minuto de duração.

O sinal foi filtrado aplicando-se um filtro passa baixa a 300 Hz visando eliminar o ruído de alta frequência presente na medição original. Mais detalhes quanto aos filtros aplicados e resposta da sua utilização ou não, encontram-se mais detalhados no Apêndice VIII - Análise dos filtros utilizados e estimativas das PSD.

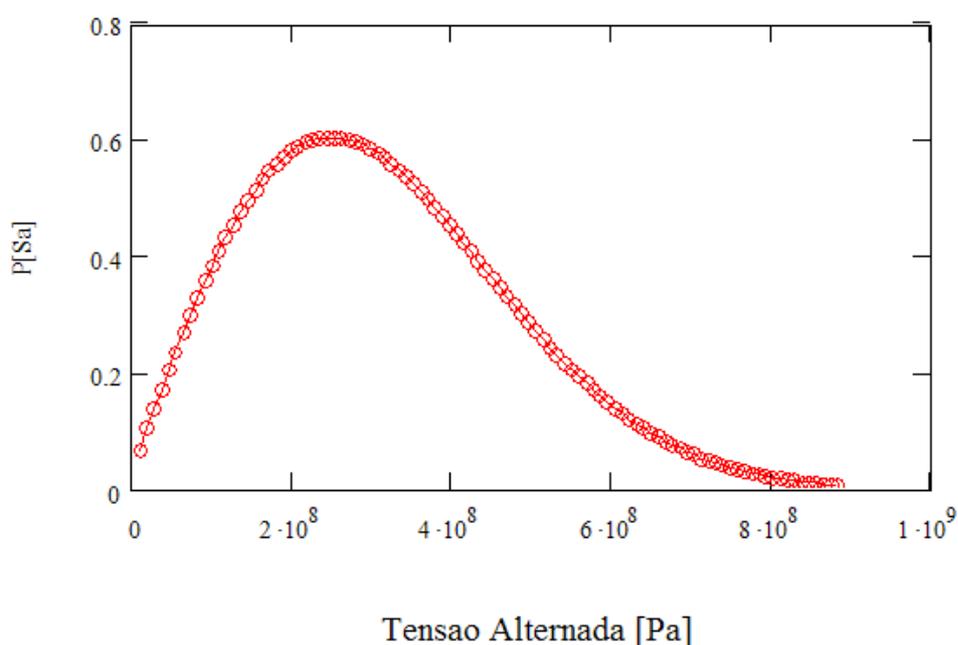


Figura 7-87 – Distribuição de Rayleigh para as tensões alternadas.

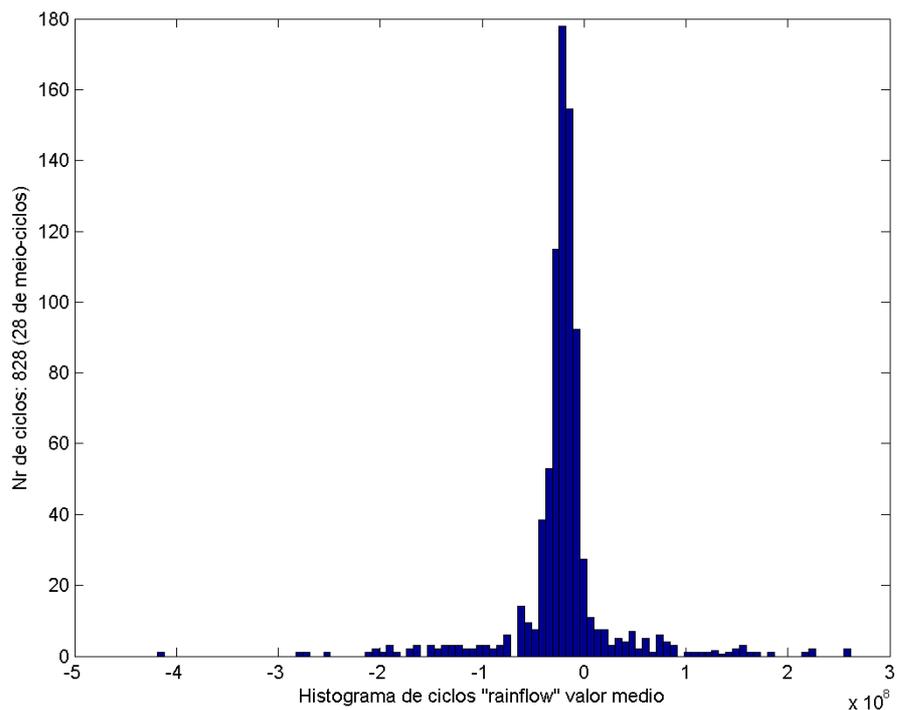


Figura 7-88 – Contagem de ciclos através de *Rainflow*. Valor médio de tensão versus número de ciclos.

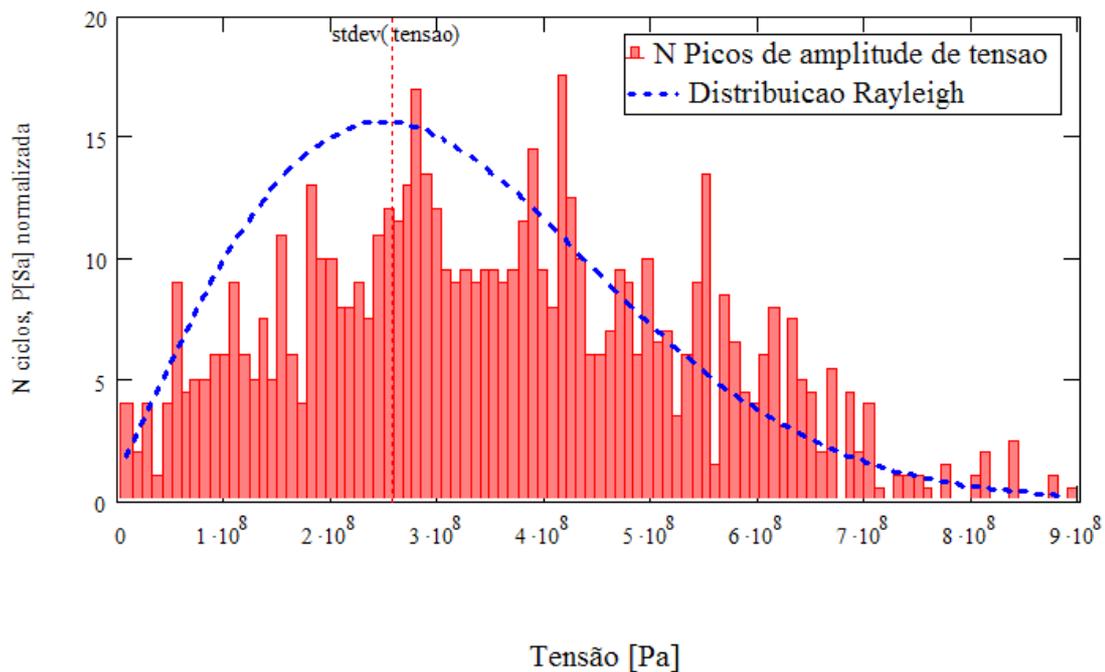


Figura 7-89 – Histograma do número de picos de tensão alternada e sobreposta à distribuição de Rayleigh mostrando a tendência de probabilidade. (a amplitude da PDF foi normalizada pelo σ da tensão)

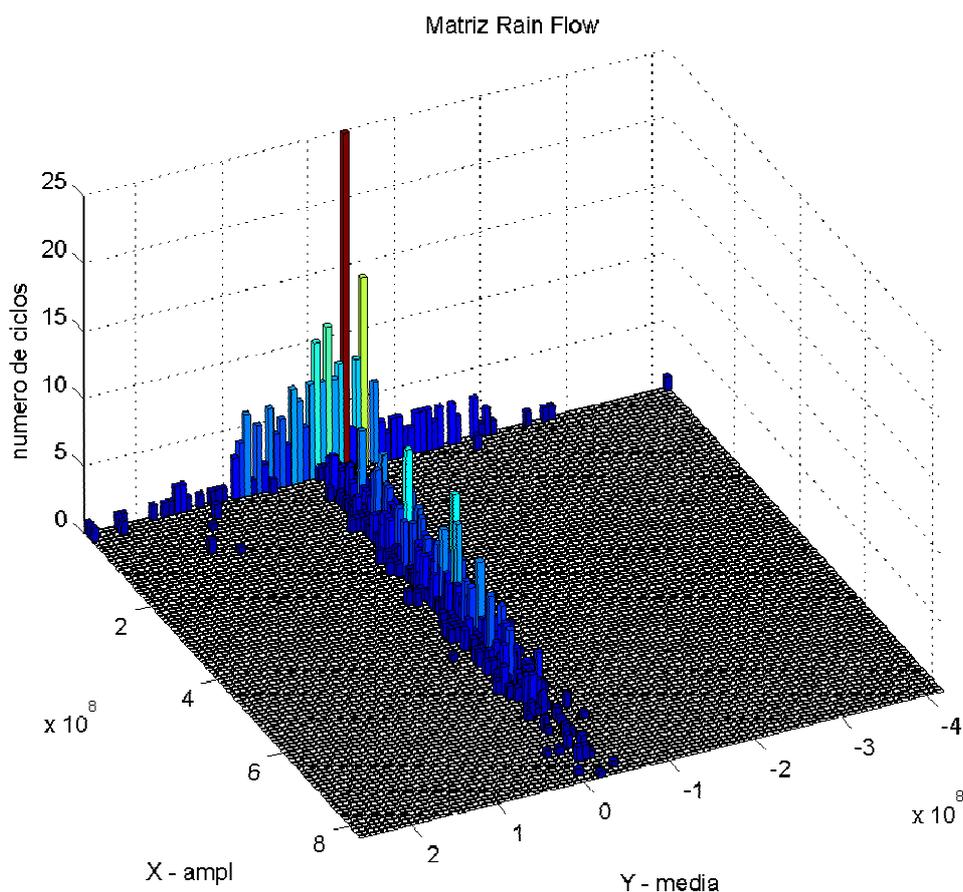


Figura 7-90 – Matriz *Rainflow*. Composição do número de ciclos de amplitudes e de tensões médias. Resolução =100

A tabela completa dos ciclos de amplitude de tensão versus o número de ciclos e o dano acumulado calculado por Palmgren-Miner encontra-se no Apêndice IX – Dano por Dirlik. A Tabela 10 –, mostra apenas os ciclos que causam dano, segundo a equação e curva característica do material da Figura 6-8. Para a correção das tensões foi aplicado o K_t determinado em (7-7), em função dos dados de tensão experimentais terem sido obtidos no *strain gage* ao invés no engaste, de maior tensão e local da falha.

O resultado de estimativa de vida no Domínio do Tempo, a partir da contagem de ciclos pelo método de *Rainflow* para diversos sinais de tensão, filtro, taxa de aquisição e da resolução do *Rainflow* encontra-se na Tabela 11.

Tabela 10 – Cálculo de dano por Palmgren-miner para contagem de ciclos *Rainflow*

| Ampl.*Kt | N até a falha | Ciclos | Dano |
|----------|---------------|--------|----------|
| 5.39E+08 | 2.26E+05 | 23 | 1.02E-04 |
| 5.49E+08 | 2.12E+05 | 16 | 7.56E-05 |
| 5.59E+08 | 1.98E+05 | 21 | 1.06E-04 |
| 5.70E+08 | 1.86E+05 | 20 | 1.08E-04 |
| 5.80E+08 | 1.74E+05 | 17 | 9.76E-05 |
| 5.90E+08 | 1.64E+05 | 14 | 8.56E-05 |
| 6.00E+08 | 1.54E+05 | 15 | 9.75E-05 |
| 6.10E+08 | 1.45E+05 | 13 | 8.98E-05 |
| 6.20E+08 | 1.36E+05 | 16 | 1.17E-04 |
| 6.31E+08 | 1.29E+05 | 10 | 7.77E-05 |
| 6.41E+08 | 1.21E+05 | 13 | 1.07E-04 |
| 6.51E+08 | 1.15E+05 | 14 | 1.22E-04 |
| 6.61E+08 | 1.09E+05 | 15 | 1.38E-04 |
| 6.71E+08 | 1.03E+05 | 9 | 8.76E-05 |
| 6.81E+08 | 9.73E+04 | 12 | 1.23E-04 |
| 6.92E+08 | 9.23E+04 | 13 | 1.41E-04 |
| 7.02E+08 | 8.76E+04 | 14.5 | 1.66E-04 |
| 7.12E+08 | 8.31E+04 | 11 | 1.32E-04 |
| 7.22E+08 | 7.90E+04 | 14.5 | 1.84E-04 |
| 7.32E+08 | 7.51E+04 | 9 | 1.20E-04 |
| 7.42E+08 | 7.15E+04 | 10.5 | 1.47E-04 |
| 7.53E+08 | 6.81E+04 | 12 | 1.76E-04 |
| 7.63E+08 | 6.49E+04 | 10 | 1.54E-04 |
| 7.73E+08 | 6.19E+04 | 9.5 | 1.54E-04 |
| 7.83E+08 | 5.90E+04 | 8.5 | 1.44E-04 |
| 7.93E+08 | 5.63E+04 | 7.5 | 1.33E-04 |
| 8.03E+08 | 5.38E+04 | 6 | 1.12E-04 |
| 8.14E+08 | 5.14E+04 | 8 | 1.56E-04 |
| 8.24E+08 | 4.92E+04 | 7.5 | 1.53E-04 |
| 8.34E+08 | 4.71E+04 | 4 | 8.50E-05 |
| 8.44E+08 | 4.50E+04 | 3.5 | 7.77E-05 |
| 8.54E+08 | 4.31E+04 | 4 | 9.27E-05 |
| 8.64E+08 | 4.13E+04 | 8 | 1.93E-04 |
| 8.75E+08 | 3.96E+04 | 3.5 | 8.83E-05 |
| 8.85E+08 | 3.80E+04 | 2 | 5.26E-05 |
| 8.95E+08 | 3.65E+04 | 3.5 | 9.59E-05 |
| 9.05E+08 | 3.50E+04 | 4 | 1.14E-04 |
| 9.15E+08 | 3.37E+04 | 2 | 5.94E-05 |
| 9.25E+08 | 3.24E+04 | 1 | 3.09E-05 |
| 9.36E+08 | 3.11E+04 | 2 | 6.43E-05 |
| 9.46E+08 | 2.99E+04 | 4 | 1.34E-04 |
| 9.56E+08 | 2.88E+04 | 0 | 0.00E+00 |
| 9.66E+08 | 2.77E+04 | 2.5 | 9.02E-05 |
| 9.76E+08 | 2.67E+04 | 1.5 | 5.62E-05 |
| 9.86E+08 | 2.57E+04 | 1 | 3.89E-05 |
| 9.97E+08 | 2.48E+04 | 1 | 4.04E-05 |
| 1.01E+09 | 2.39E+04 | 0.5 | 2.09E-05 |

Tabela 11 – Cálculo de vida por *Rainflow* para um Kt = 1,4 e critério de acúmulo de dano por Palmgren-Miner igual a 1.

| Taxa de aquisição | 1250 | | | | | 2500 | | | | Média de vida experimental |
|--|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|----------------------------|
| Tempo | 2min | | 10s | | 1min | 2min | | 4min | | |
| Filtro | - | - | - | - | - | sim | - | - | - | |
| Resolução <i>Rainflow</i> | 200 | 200 | 400 | 200 | 100 | 200 | 200 | 200 | 200 | |
| Dano Total | 3,49 E-3 | 6,95 E-5 | 2,99 E-3 | 2,59 E-3 | 3,21 E-3 | 5,95 E-3 | 5,96 E-3 | 7,69 E-3 | 1,47 E-2 | |
| Dano de Palmgren-Miner | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| Número de blocos de solicitação para a falha | 2,87 E2 | 1,65 E4 | 3,35 E2 | 3,86 E2 | 3,11 E2 | 1,68 E2 | 1,68 E2 | 1,30 E2 | 7,31 E1 | |
| Tempo do bloco medido[s] | 120 | 10 | 60 | 60 | 60 | 120 | 120 | 120 | 240 | |
| Tempo de vida [horas] | 9,6 | 45,9 | 5,6 | 6,4 | 5,2 | 5,6 | 5,6 | 4,3 | 4,9 | 4,6 |

7.9.2 Estimativa de Vida no domínio da Frequência - PSD

Para a estimativa de vida no Domínio da Frequência, o princípio fundamental e ponto de partida é o cálculo da Densidade Espectral de Potência, ou PSD da tensão atuante no ponto crítico da estrutura, no caso o mais solicitado em termos de tensão. Porém, como uma limitação da análise experimental de tensões, ocorre que muitas vezes o extensômetro não pode ser instalado no ponto crítico por limitações físicas de espaço ou de solicitação alta o suficiente para danificar o extensômetro e não possibilitar a medição. Desta forma, torna-se necessário “transferir” a PSD de tensão calculada no SG para aquele ponto mais solicitante. Para o caso presente, a $H(f)$ da tensão calculada no SG para o ponto de máxima tensão, no caso, o engaste, como já observado, é linear na região de máxima tensão no primeiro modo, também devido à proximidade dos dois pontos.

Assim, os momentos espectrais foram calculados a partir da PSD obtida no SG e multiplicados por Kt^2 segundo deduzido no cálculo da PSD e verificado através do Apêndice VI - Verificação do programa Matlab® para cálculo de momentos da PSD.

Também, visando estudar a influência do método para estimativa da PSD, do janelamento, filtro aplicado, tempo de amostragem e taxa de aquisição, além da PSD calculada numericamente através do ANSYS®, uma série de momentos, estimativa de picos e fator de irregularidade foram calculados e estes utilizados na estimativa de vida segundo a Tabela 12.

Aplicando-se então a equação (7-7) para a transferência da PSD de tensão calculada no Strain-Gage para a tensão no engaste (máxima), a partir da Tabela 12, tem-se aos valores da Tabela 13:

$$PSD_{engaste} = H^2(f) \cdot PSD_{SG} \quad (7-11)$$

$$PSD_{engaste} = 1,37^2 \cdot PSD_{SG} \quad (7-12)$$

Determinação dos momentos espectrais, numérico e experimental.

Tabela 12 – Cálculo das propriedades da PSD – momentos espectrais – para diferentes casos variando-se a taxa de aquisição, tempo dos dados, filtro, janelamento e método de cálculo da PSD – Momento obtido no SG.

| Caso | Arquivo / Tempo | Método para cálculo da PSD | Filtro aplicado | Janela | Propriedades da PSD | | | | | |
|------|---------------------------------|----------------------------|-----------------|-------------------|---------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|
| | | | | | m_0 | m_1 | m_2 | m_4 | $E[P]$ | α_x |
| 01 | Tempo2500 ⁻¹ 10s | Welch | Butterworth | Hanning | 3,49 E16 | 3,88 E17 | 4,40 E18 | 1,01 E21 | 15,2 | 0,74 |
| 02 | | | | Blackman | 3,47 E16 | 3,86 E17 | 4,39 E18 | 1,02 E21 | 15,2 | 0,74 |
| 03 | | | | Chebyshev 01dB | Hanning | 3,43 E16 | 3,81 E17 | 4,3E 18 | 1,01 E21 | 15,2 |
| 04 | Tempo2500 ⁻¹ 1min | Welch | Butterworth | Hanning | 7,08 E16 | 7,91 E17 | 9,05 E18 | 3,70 E21 | 20,2 | 0,56 |
| 05 | Tempo2500 ⁻¹ 2min | Periodogram | Butterworth | Hanning | 4,84 E16 | 4,66 E17 | 4,90 E18 | 3,72 E21 | 27,5 | 0,36 |
| 06 | | Welch | | | 6,81 E16 | 7,61 E17 | 8,74 E18 | 3,92 E21 | 21,2 | 0,53 |
| 07 | | Yule-Walker | | | N/A* | 6,69 E16 | 6,73 E17 | 7,12 E18 | 1,05 E23 | 122 |
| 08 | Tempo1250 ⁻¹ 10s | Welch | Butterworth | Hanning | 1,44 E17 | 8,05 E17 | 4,52 E18 | 2,28 E20 | 7,1 | 0,79 |
| 09 | | Burg | Butterworth | N/A | 1,62 E17 | 8,18 E17 | 4,19 E18 | 7,76 E20 | 13,6 | 0,37 |
| 10 | | Welch | N/A | Hanning | 1,44 E17 | 8,05 E17 | 4,55 E18 | 4,45 E21 | 31,3 | 0,18 |
| 11 | | Periodogram | Butterworth | Hanning | 1,18 E17 | 5,89 E17 | 2,96 E18 | 1,55 E20 | 7,2 | 0,69 |
| 12 | Psd 2500 ⁻¹ | Labview | N/A | Hanning | 7,52 E16 | 7,56 E17 | 7,84 E18 | 8,80 E22 | 106 | 0,09 |
| 13 | Psd 1250 ⁻¹ | Labview | N/A | Hanning | 3,46 E16 | 1,76 E17 | 9,19 E17 | 1,84 E21 | 44,7 | 0,11 |
| 14 | ANSYS base | ANSYS® | N/A | N/A | 2,08 E16 | 2,11 E17 | 2,16 E18 | 2,94 E20 | 10,4 | 0,98 |
| 15 | ANSYS engaste | ANSYS® | N/A | N/A | 3,52 E16 | 3,57 E17 | 3,66 E18 | 4,99 E20 | 11,7 | 0,87 |

* N/A – Não se aplica

Tabela 13 – Cálculo das propriedades da PSD – momentos espectrais – para diferentes casos variando-se a taxa de aquisição, tempo dos dados, filtro, janelamento e método de cálculo da PSD – Momento obtido no SG multiplicado por $(Kt)^2=1,9$.

| Caso | Arquivo / Tempo | Método para cálculo da PSD | Filtro aplicado | Janela | Propriedades da PSD | | | | | |
|----------|---------------------------|----------------------------|-----------------|-------------------|---------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|
| | | | | | m_0 | m_1 | m_2 | m_4 | $E[P]$ | α_x |
| 01 | Tempo 2500^{-1} 10s | Welch | Butterworth | Hanning | 6,63 E16 | 7,37 E17 | 8,36 E18 | 1,92 E21 | 15,2 | 0,74 |
| 02 | | | | Blackman | 6,59 E16 | 7,33 E17 | 8,34 E18 | 1,94 E21 | 15,2 | 0,74 |
| 03 | | | | Chebyshev 01dB | Hanning | 6,52 E16 | 7,24 E17 | 8,17 E18 | 1,92 E21 | 15,2 |
| 04 | Tempo 2500^{-1} 1min | Welch | Butterworth | Hanning | 1,35 E17 | 1,50 E18 | 1,72 E19 | 7,03 E21 | 20,2 | 0,56 |
| 05 | Tempo 2500^{-1} 2min | Periodogram | Butterworth | Hanning | 9,20 E16 | 8,85 E17 | 9,31 E18 | 7,07 E21 | 27,5 | 0,36 |
| 06 | | Welch | | | 1,29 E17 | 1,45 E18 | 1,66 E19 | 7,45 E21 | 21,2 | 0,53 |
| 07 | | Yule-Walker | | N/A* | 1,27 E17 | 1,28 E18 | 1,35 E19 | 2,00 E23 | 122 | 0,08 |
| 08 | Tempo 1250^{-1} 10s | Welch | Butterworth | Hanning | 2,74 E17 | 1,53 E18 | 8,59 E18 | 4,33 E20 | 7,1 | 0,79 |
| 09 | | Burg | Butterworth | N/A | 3,08 E17 | 1,55 E18 | 7,96 E18 | 1,47 E21 | 13,6 | 0,37 |
| 10 | | Welch | N/A | Hanning | 2,74 E17 | 1,53 E18 | 8,65 E18 | 8,46 E21 | 31,3 | 0,18 |
| 11 | | Periodogram | Butterworth | Hanning | 2,24 E17 | 1,12 E18 | 5,62 E18 | 2,95 E20 | 7,2 | 0,69 |
| 12 | Psd 2500^{-1} | Labview | N/A | Hanning | 1,43 E17 | 1,44 E18 | 1,49 E19 | 1,67 E23 | 106 | 0,09 |
| 13 | Psd 1250^{-1} | Labview | N/A | Hanning | 6,57 E16 | 3,34 E17 | 1,75 E18 | 3,50 E21 | 44,7 | 0,11 |
| 14 ** | ANSYS engaste | ANSYS® | N/A | N/A | 3,52 E16 | 3,57 E17 | 3,66 E18 | 4,99 E20 | 11,7 | 0,87 |

* N/A – Não aplicado

** Valores não multiplicados pela amplificação uma vez que é calculado através da análise por MEF no ponto de engaste

As estimativas de vida encontram-se na Tabela 14 e foram calculadas segundo diversos modelos de predição de vida referenciados ao longo do texto, partindo-se dos valores dos momentos segundo calculado na Tabela 13.

Estimativa da Vida de fadiga aleatória

Tabela 14 – Estimativa de vida por diferentes critérios para os casos utilizando-se valores de momentos a partir da Tabela 13. Dano = 1,0

| Caso / Series | Estimativa da vida em horas Métodos Diversos | | | | | | | | | Média Experimental |
|---------------|---|--------------|---------------|---------|-------------------|-----------|--------|-----------|----------|--------------------|
| | Petrucci & Zuccarello | NB (Hong Su) | NB (Sweitzer) | Hancock | Chaudhury & Dover | Steinberg | Bishop | Wirsching | Dirlik * | |
| 01 | 1,7 | 10,1 | 13,7 | 1,1 | 1,3 | 0,8 | 17,0 | 8,2 | 10,0 | 4,6 |
| 02 | 1,7 | 10,2 | 13,8 | 1,1 | 1,3 | 0,8 | 17,0 | 8,3 | 10,0 | |
| 03 | 1,8 | 10,3 | 14,2 | 1,2 | 1,3 | 0,8 | 17,1 | 8,4 | 10,2 | |
| 04 | 0,7 | 2,1 | 3,8 | 0,3 | 0,4 | 0,2 | 3,6 | 1,71 | 2,2 | |
| 05 | 2,0 | 3,1 | 8,5 | 0,7 | 0,7 | 0,2 | 5,2 | 2,5 | 0,9 | |
| 06 | 0,8 | 2,2 | 4,1 | 0,4 | 0,4 | 0,2 | 3,7 | 1,8 | 2,2 | |
| 07 | 0,9 | 0,4 | 4,6 | 0,4 | 0,2 | 0,0 | 0,7 | 0,3 | 0,2 | |
| 08 | 0,2 | 1,7 | 2,1 | 0,2 | 0,2 | 0,1 | 2,8 | 1,4 | 5,9 | |
| 09 | 0,5 | 0,7 | 1,9 | 0,2 | 0,2 | 0,1 | 1,2 | 0,6 | 1,8 | |
| 10 | 0,6 | 0,4 | 2,1 | 0,2 | 0,1 | 0,0 | 0,6 | 0,3 | 0,6 | |
| 11 | 0,5 | 2,4 | 3,4 | 0,3 | 0,3 | 0,3 | 4,0 | 1,9 | 7,0 | |
| 12 | 0,8 | 0,4 | 3,8 | 0,3 | 0,1 | 0,0 | 0,6 | 0,3 | 0,2 | |
| 13 | 8,2 | 3,5 | 30,3 | 2,5 | 1,2 | 0,3 | 5,9 | 2,8 | 0,4 | |
| 14 | 4,0 | 41,1 | 47,1 | 3,9 | 4,0 | 3,2 | 68,9 | 34,0 | 18,4 | |

* algumas PDF foram corrigidas para $\sum p(\sigma_a) = 1$

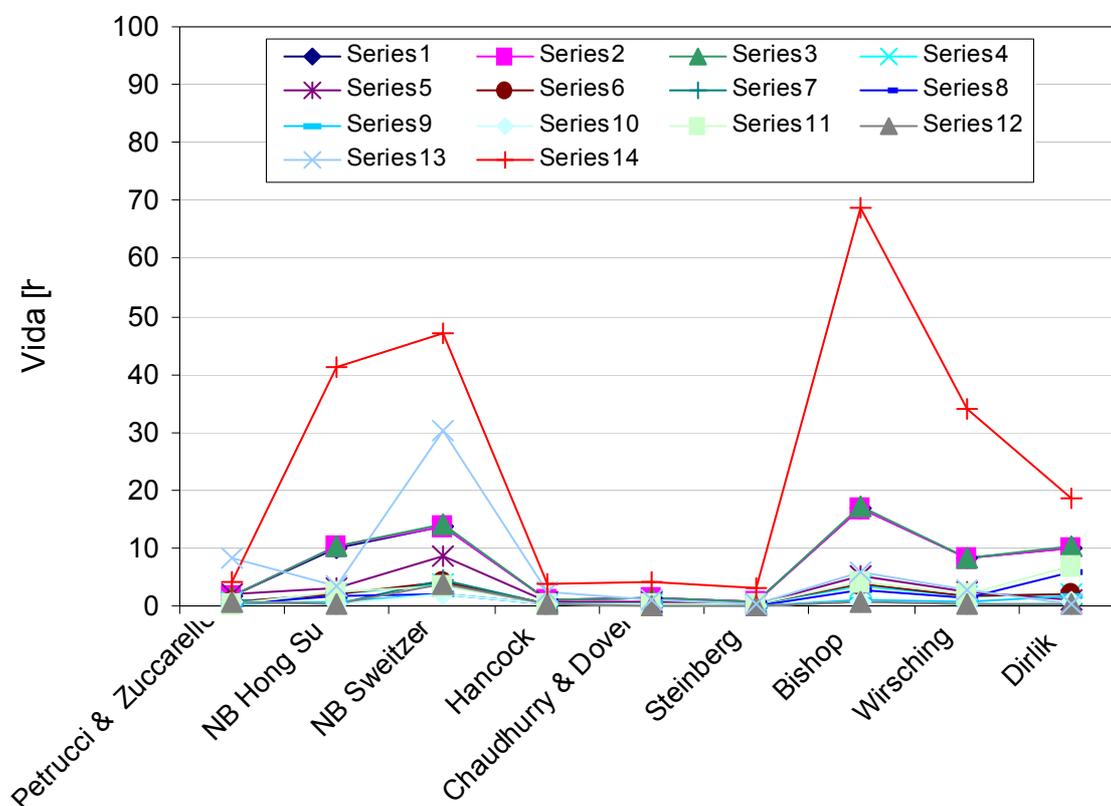


Figura 7-91 – Resultado da estimativa de vida para os casos da Tabela 14. Resultado de estimativa de vida para diversos modelos.

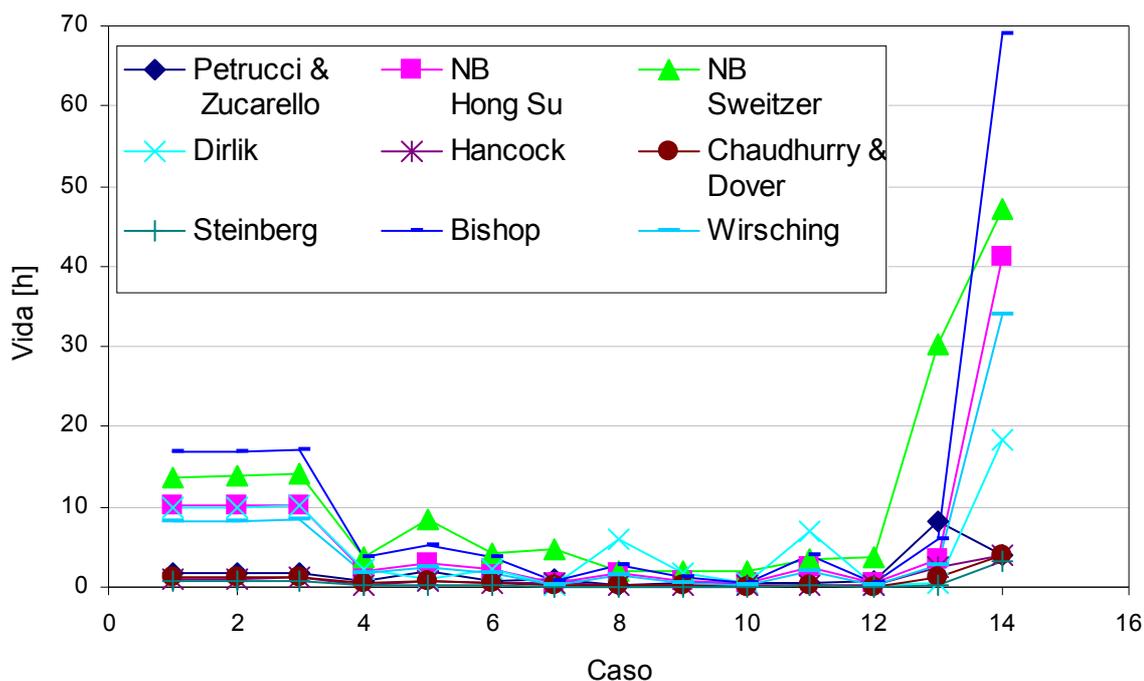


Figura 7-92 – Resultado da estimativa de vida para os casos da Tabela 14. Resultado de estimativa de vida para diversos modelos. Tendência de cada modelo.

7.9.2.1 Resultados de Vida – Dirlik

Para o cálculo de vida por Dirlik, parte-se dos momentos espectrais calculados na Tabela 13, calcula-se a PDF de tensão alternada, Figura 7-93 e Figura 7-94, e a partir dela o número de estimativa de ciclos para cada nível de tensão e seu respectivo dano.

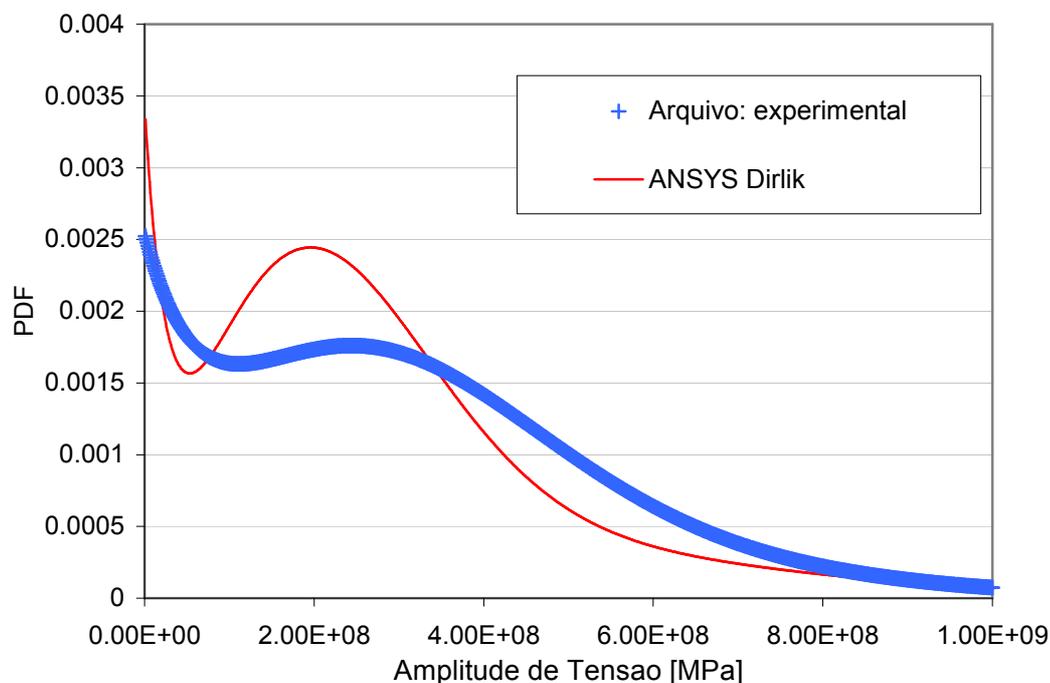


Figura 7-93 – Estimativa da PDF segundo Dirlik para um sinal de 10s calculado a partir dos momentos espectrais da Tabela 14, caso 1 PSD experimental, e caso 14 PSD ANSYS®.

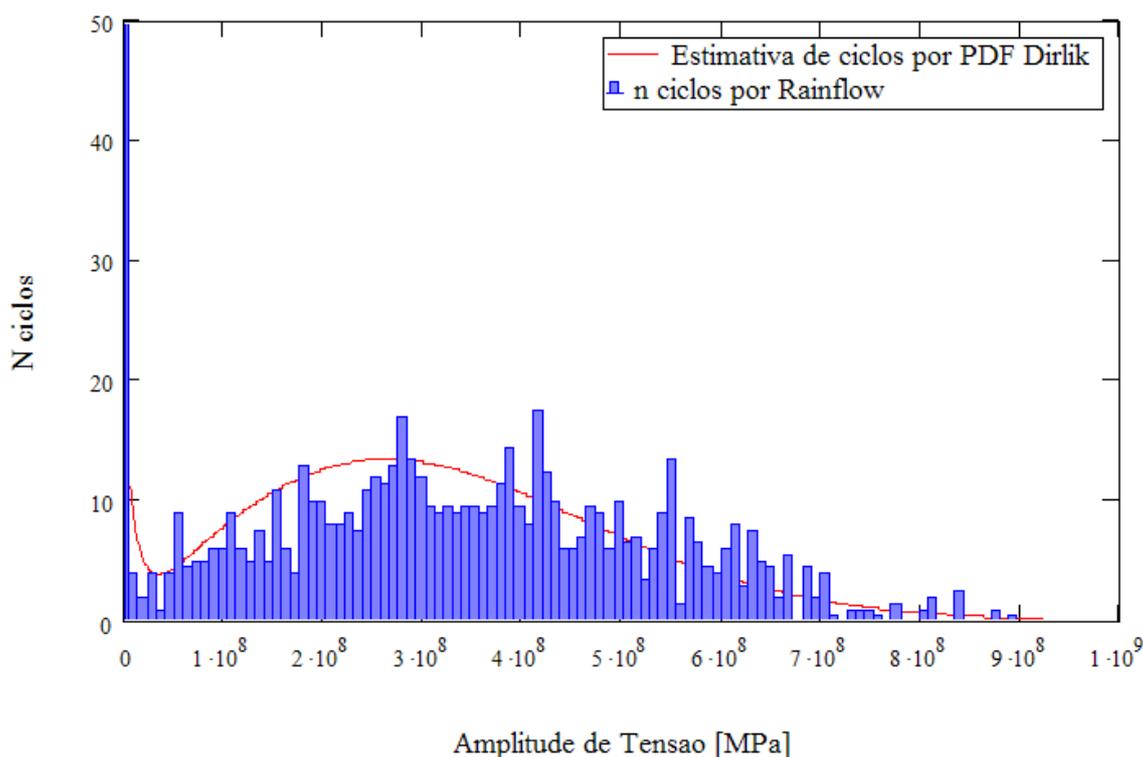


Figura 7-94 – Comparação do número de ciclos em determinada amplitude de tensão, para dados experimentais calculados por *Rainflow* e estimativa DIRLIK através da PSD. Dados normalizados para visualização da tendência da PDF.

Viga Modelo V2

Para o caso da viga V2, de perfil reduzido visando concentrar as tensões no centro da viga e não ser influenciado pelo engaste, apenas a PSD numérica foi calculada, não sendo realizada a análise de tensões experimentais. O cálculo da PSD e de estimativa de vida podem ser comparados com resultados experimentais de vida, com uma amostragem de 8 corpos de prova submetidos a PSD de transporte solicitado à base. A Tabela 15 mostra os resultados obtidos da PSD numérica através do software ANSYS® e a Tabela 16 mostra as estimativas de vida segundo vários modelos de análise.

Tabela 15 – Cálculo das propriedades da PSD – momentos espectrais – Para a viga V2 – calculada numericamente.

| Caso | Arquivo \ Localização | Método para cálculo da PSD | Filtro aplicado | Janela | Propriedades da PSD | | | | | |
|------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------|--------|---------------------|-------------|-------------|-------------|--------|------------|
| | | | | | m_0 | m_1 | m_2 | m_4 | $E[P]$ | α_x |
| 01 | Centro da viga | ANSYS | N/A | N/A | 2,66 E16 | 2,67 E17 | 2,71 E18 | 2,89 E20 | 10,33 | 0,97 |

Tabela 16 – Estimativa de vida por diferentes critérios para o caso da Tabela 15. Dano = 1,0.

| Caso | Estimativa da vida em horas Métodos Diversos | | | | | | | | | |
|------|---|--------------|---------------|---------|-------------------|-----------|--------|-----------|--------|--------------------|
| | Petrucci & Zuccarello | NB (Hong Su) | NB (Sweitzer) | Hancock | Chaudhury & Dover | Steinberg | Bishop | Wirsching | Dirlik | Média Experimental |
| 01 | 5,1 | 77,0 | 78,8 | 6,5 | 6,6 | 5,9 | 129,0 | 68,8 | 772 | 4,9 |

Para este caso em particular, a PDF estimada segundo Dirlik resultou em uma vida super-estimada para a viga. Isto pode ser observado na Figura 7-95, onde a maior probabilidade da tensão ocorrer está em torno de 200MPa, por outro lado, acima de 535MPa (limite de fadiga para este material) a probabilidade é muito baixa.

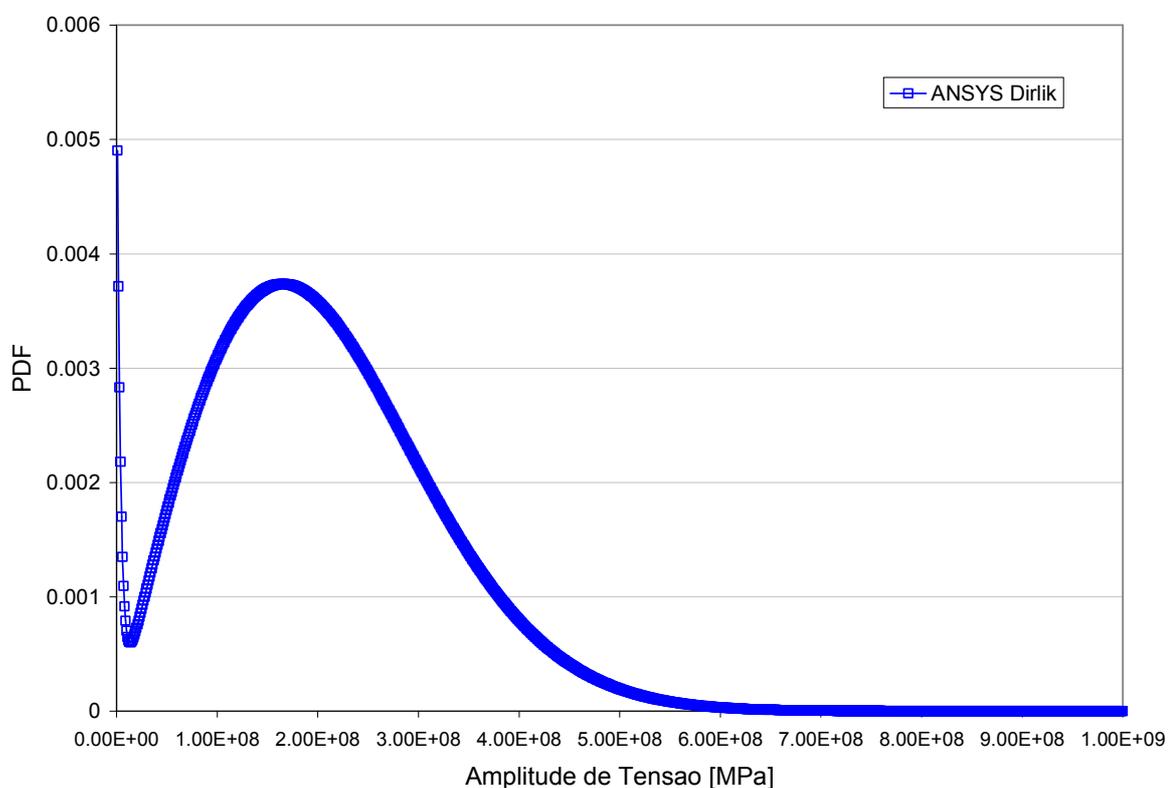


Figura 7-95 – Estimativa da PDF por Dirlik para o caso da

Tabela 16 a partir do resultado numérico por MEF para a viga V2, solicitação de transporte.

7.9.3 Resultados Experimentais – Vida sob excitação PSD

7.9.3.1 Resultados de Vida

Visando avaliar e comparar experimentalmente os modelos de estimativa de vida, vários corpos de prova foram submetidos à mesma solicitação aleatória a partir da PSD de

transporte utilizando-se o excitador. Os resultados e o número de corpos de prova experimentados encontram-se nos histogramas de vida da Figura 7-96 a Figura 7-100, para vigas do modelo V1 e V2.

Caso Modelo V1 – Viga de perfil paralelo

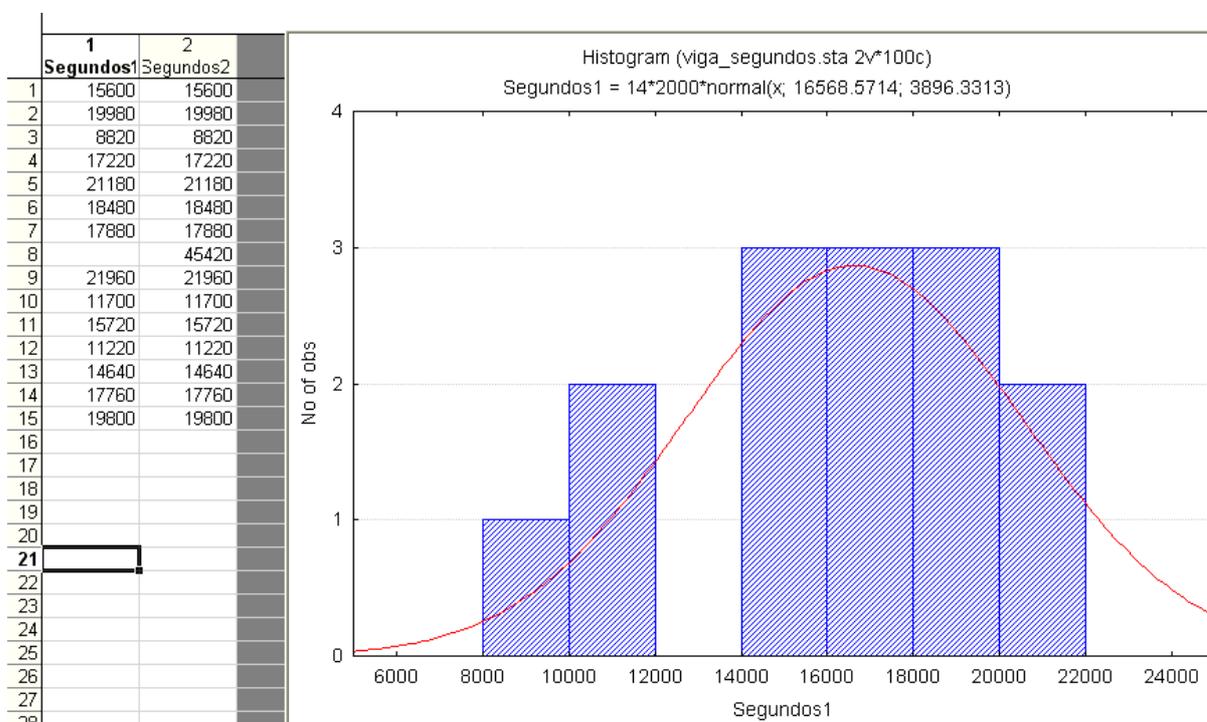


Figura 7-96 – Histograma da distribuição Normal – O resultado de 45.420 segundos foi suprimido. Tempo médio de vida = 4,6 h.

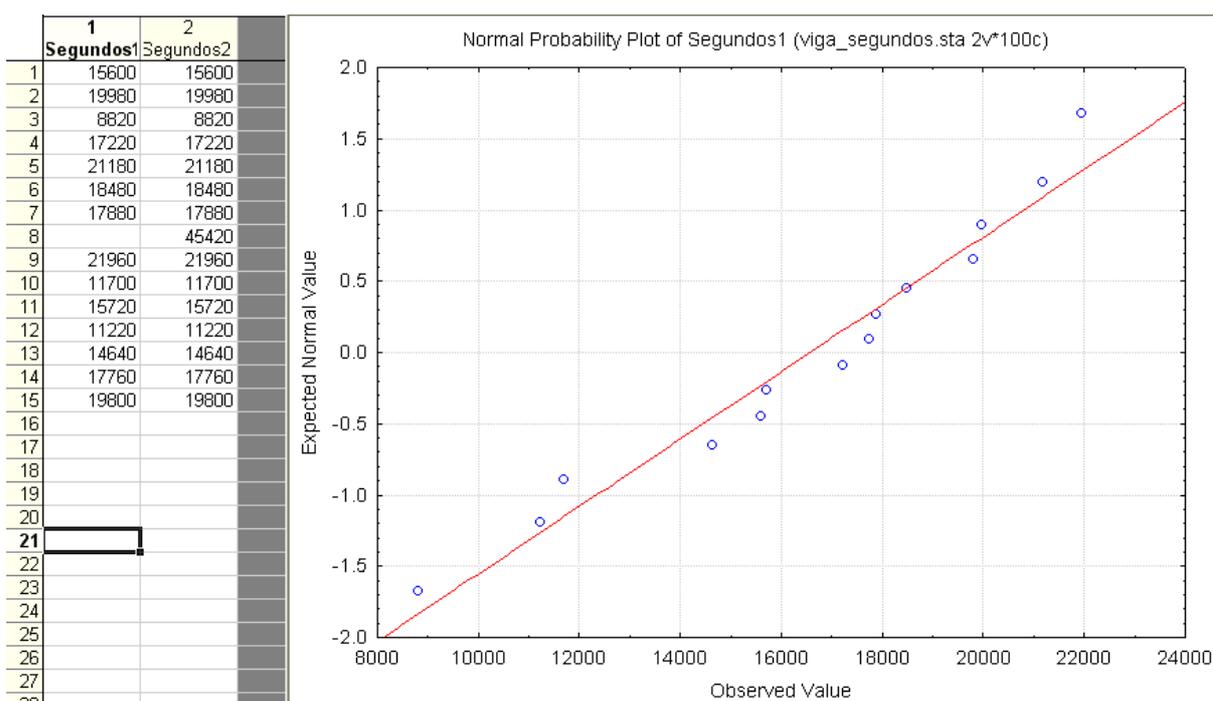


Figura 7-97 – Distribuição da probabilidade Normal – O resultado de 45.420 segundos foi suprimido.

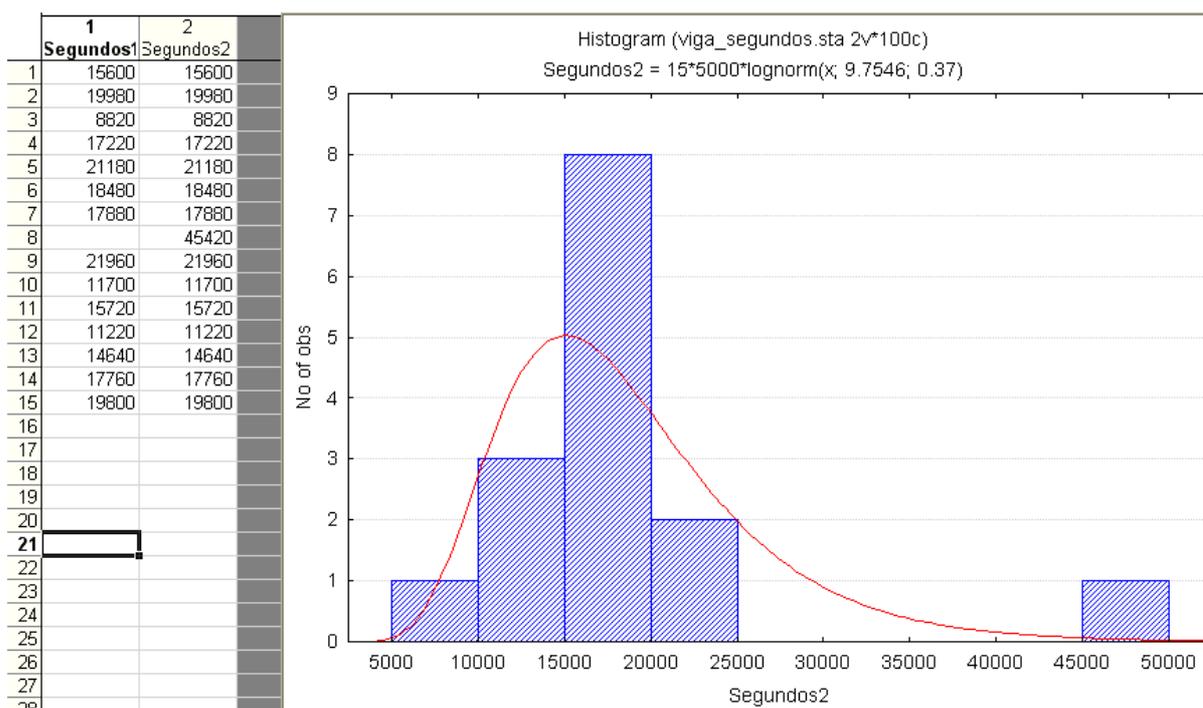


Figura 7-98 - Histograma da distribuição Lognormal – O resultado de 45.420 aparece como um ponto fora da faixa normal.

Os corpos de prova experimentados e falhados por fadiga encontram-se na Figura 7-99. Para o modelo V1, totalizou-se 15 corpos de prova[§] e para o V2, 8 CP.

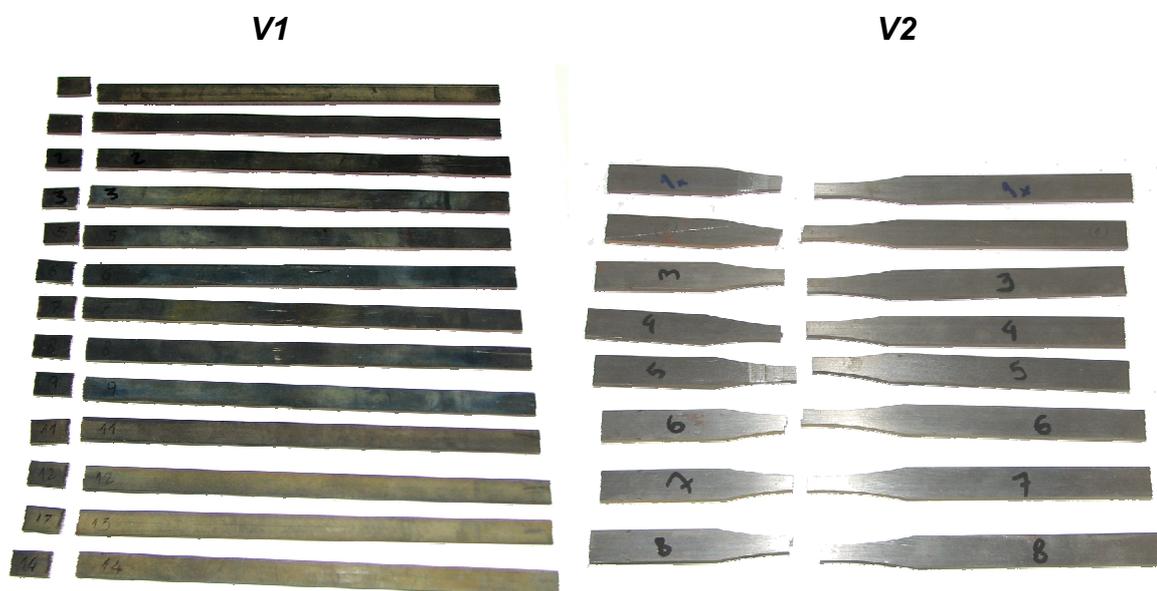


Figura 7-99 – Corpos de prova falhados após os testes de fadiga aleatória. Modelos V1 e V2.

[§] Uma viga V1 foi disponibilizada para análise e não aparece na Figura 7-99.

Caso Modelo V2 – Viga de perfil reduzido

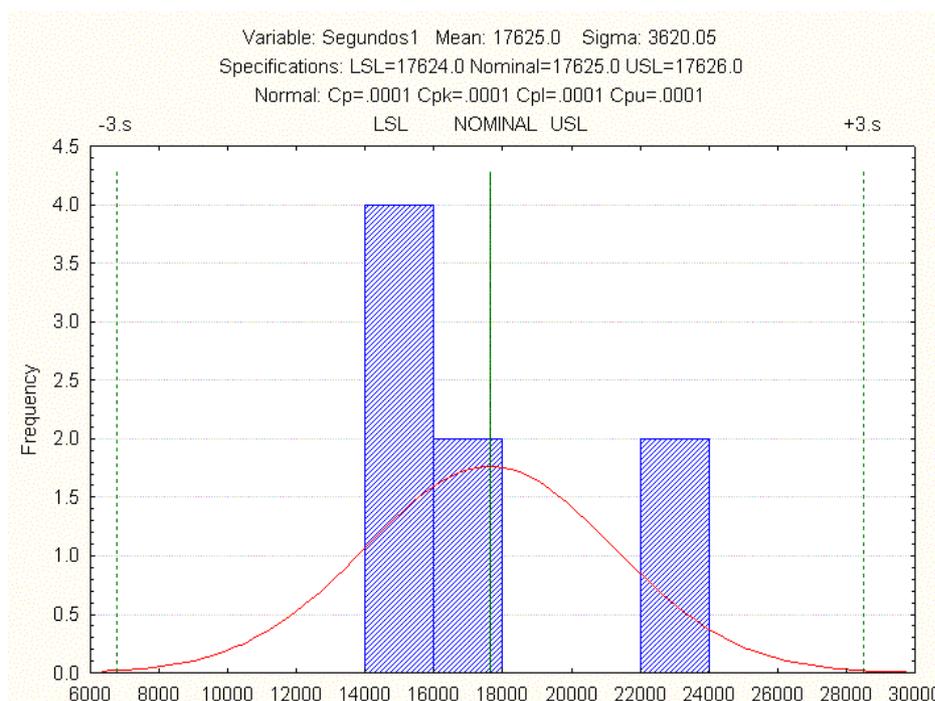


Figura 7-100 – Histograma da distribuição Normal – As linhas indicam a média e +/-3 desvios padrão, σ . Tempo médio de vida = 4,9 h.

7.9.3.2 Análise da Fratura

Os corpos de prova fraturados foram observados através de microscopia por varredura de elétrons – MEV, visando observar o aspecto da fratura e identificação do início da nucleação da trinca por fadiga. As superfícies fraturadas podem ser observadas nas figuras abaixo, para o modelo de viga V1 Figura 7-101 e Figura 7-102. Para a viga modelo V2, a Figura 7-103 a Figura 7-107. Também foi analisada uma viga modelo V2 quando submetida a uma solicitação 40% menor (*offset -40%*) do que aquela PSD característica do transporte, Figura 7-108 a Figura 7-110.

Caso Modelo V1 – Viga de perfil paralelo

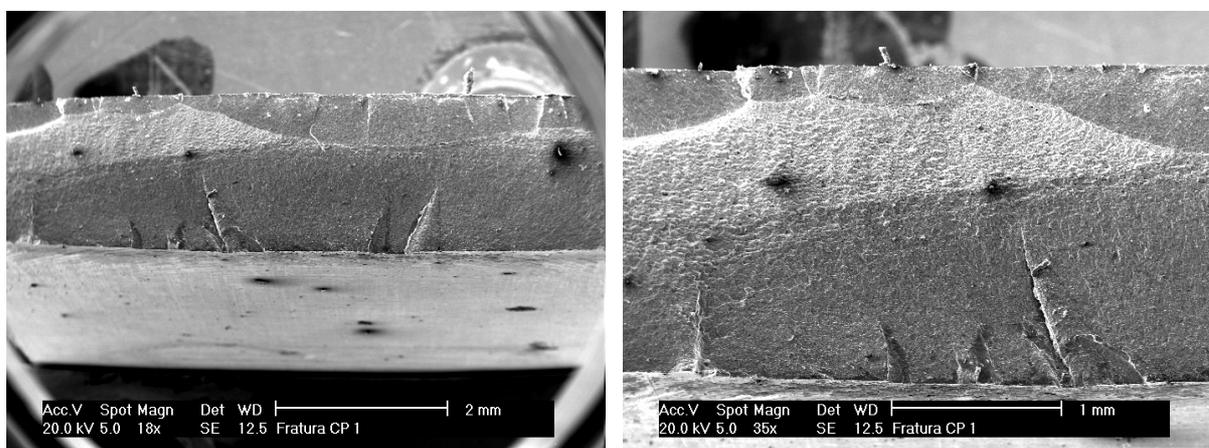


Figura 7-101 – Vista da fratura do CP1 sob solicitação da PSD de transporte. Ampliação 18X e 35X

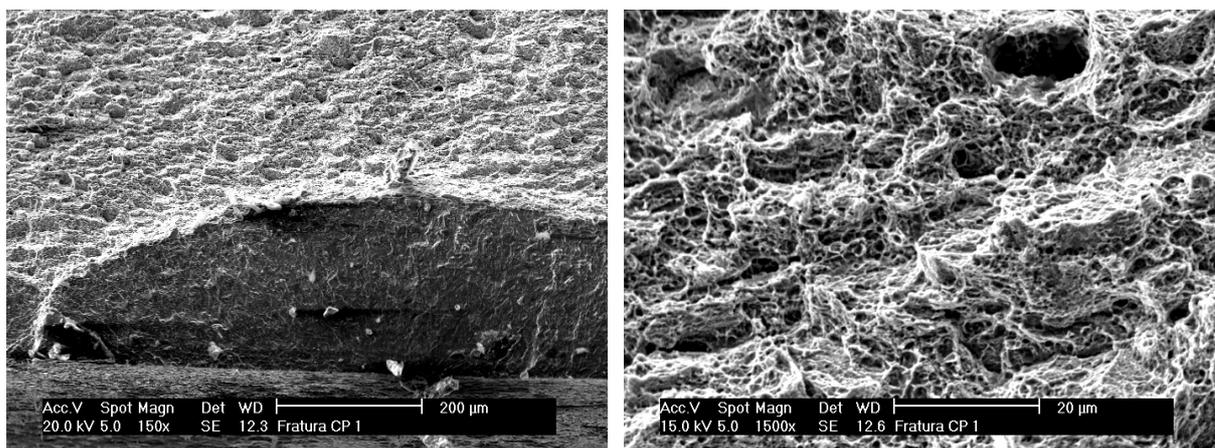


Figura 7-102 – Vista amplificada 150X de uma nucleação originada por fadiga e ampliação dos dimples formada pela fratura plástica dúctil.

Caso Modelo 2 – Viga de perfil reduzido

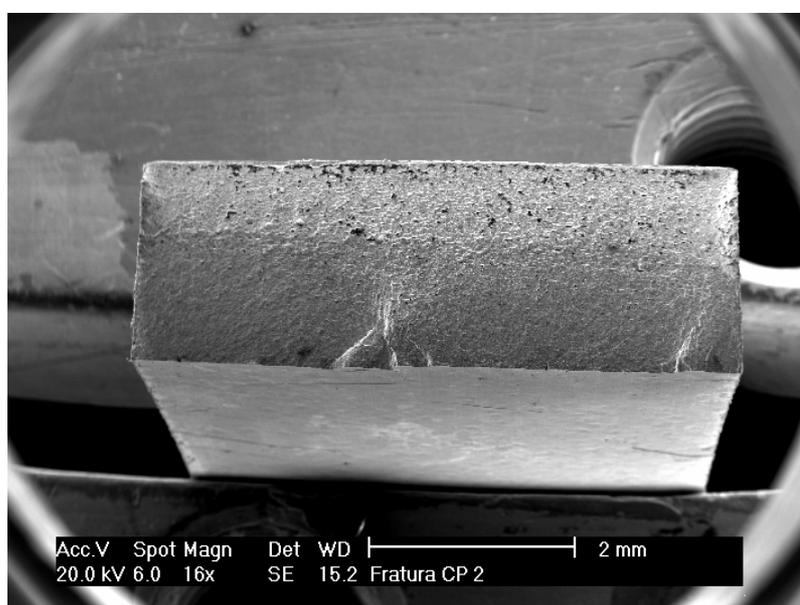


Figura 7-103 – Visão geral da seção fraturada do CP2 sob solicitação da PSD de transporte. Ampliação 16X.

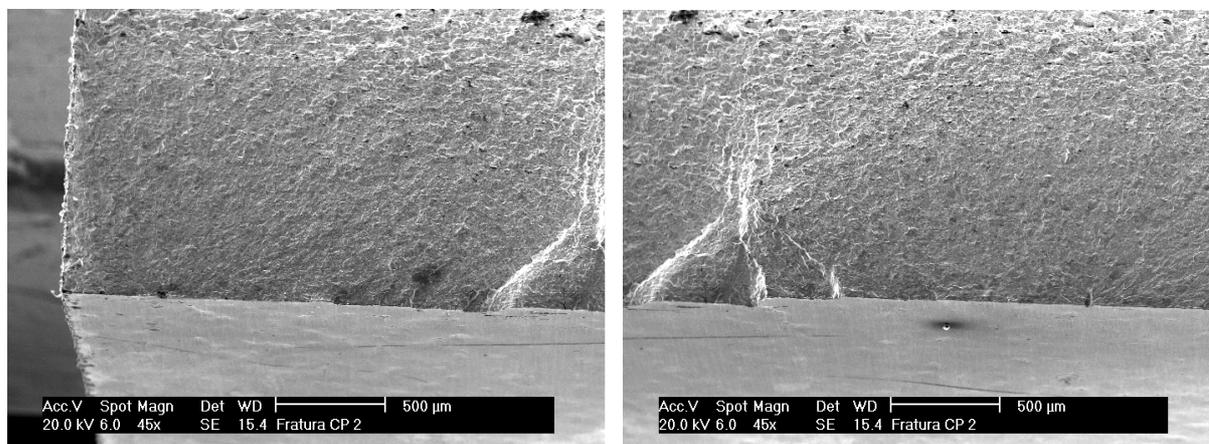


Figura 7-104 – Vista amplificada 45X da seção fraturada do CP1. Lado esquerdo e lado direito da seção, mostrando a linha de encontro no centro das duas frentes de propagação de trinca.

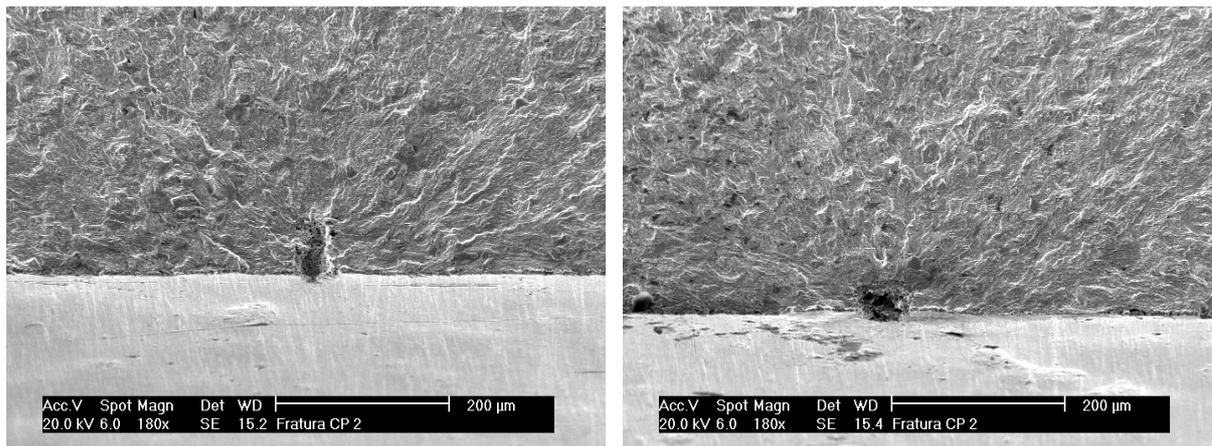


Figura 7-105 – Ampliação 180 x do ponto de origem da nucleação de uma frente de fadiga. Marcas radiais a partir da origem.

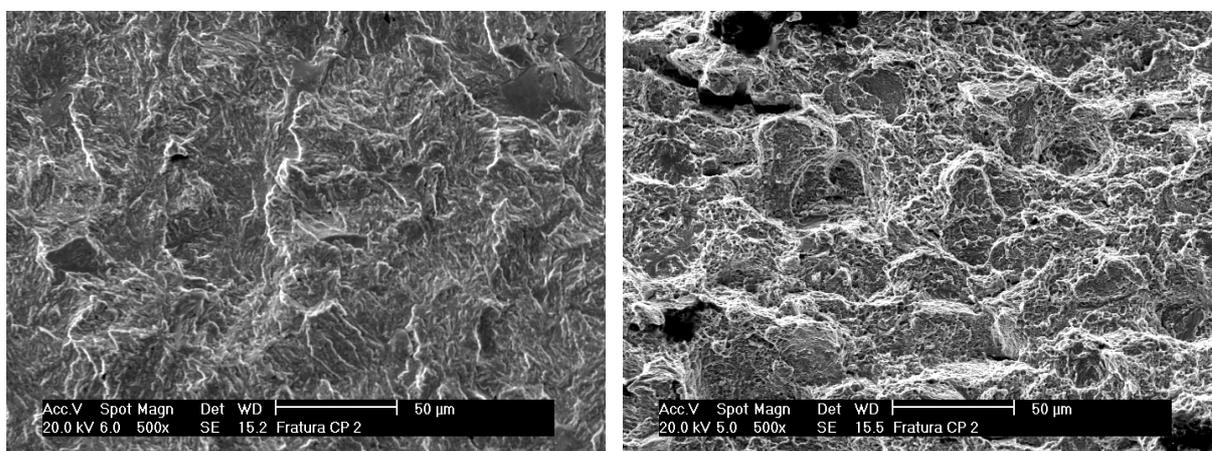


Figura 7-106 – Ampliação de 500X da região de deformação plástica (propagação e fechamento da trinca) e da região da formação de fratura dúctil, *dimples*.

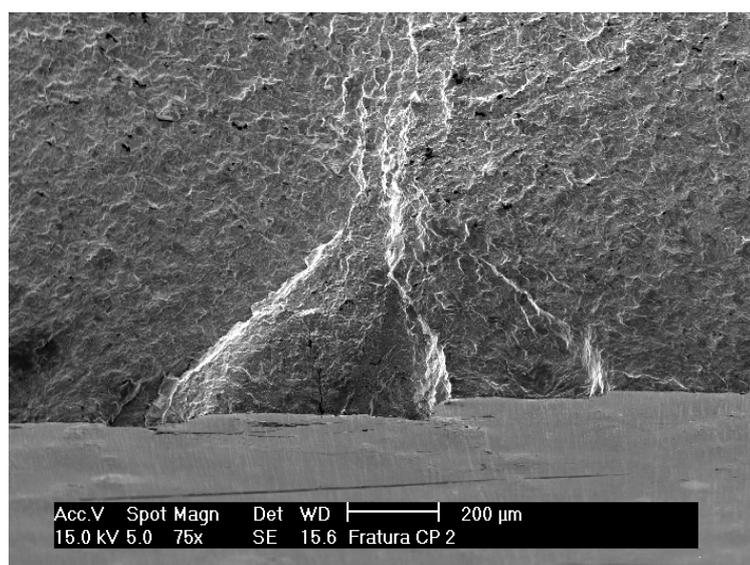


Figura 7-107 – Ampliação 75X da região central da seção fraturada. Encontro das duas frentes de abertura de trinca por fadiga.

Caso Modelo 2 – Viga de perfil reduzido – Solicitação Transporte -40%

Visando verificar o comportamento e o aspecto microscópico da fratura, para uma viga quando submetida a um carregamento alternativo, um ensaio com uma PSD 40% menor (*offset*) em relação à PSD de transporte foi aplicada. O tempo de vida para esta viga foi de 12h, 4 vezes superior quando comparada à vida da PSD de transporte. Os resultados podem ser observados na Figura 7-108 a Figura 7-110 .

Na Figura 7-108, observa-se a formação de vários núcleos de fadiga a partir da superfície, resultado de uma vida mais longa quando comparada àquela da PSD de transporte, Figura 7-103.

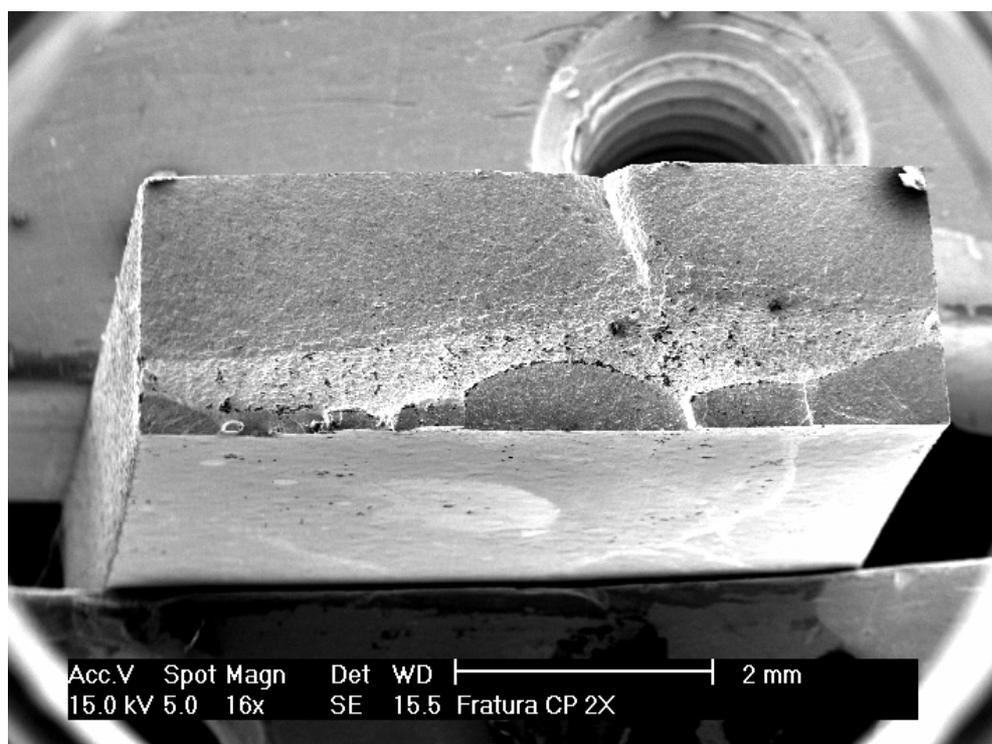


Figura 7-108 – Vista da seção de fratura do CP2 sob solicitação de transporte -40%.

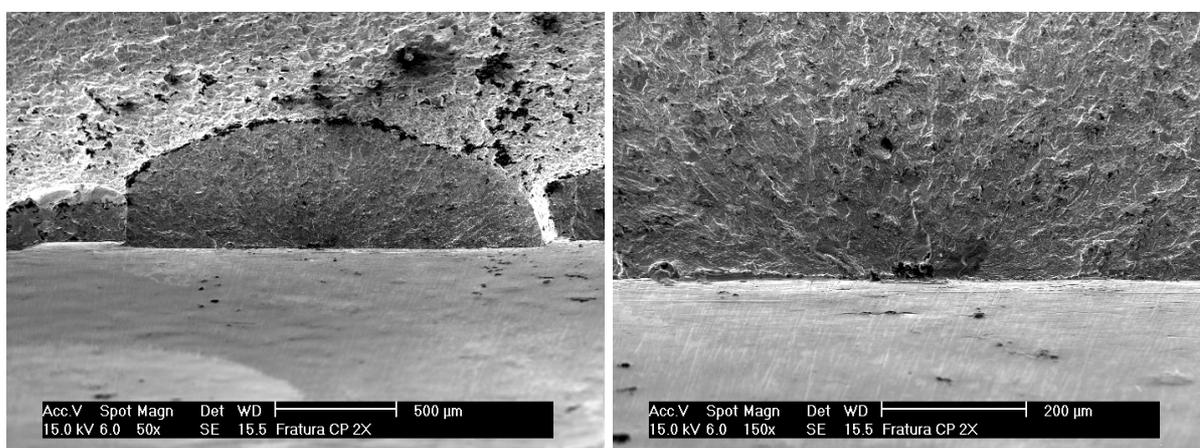


Figura 7-109 – Ampliação de uma nucleação na seção fraturada (50X) e ampliação em 150X do centro deste núcleo evidenciando o ponto de origem da falha por fadiga.

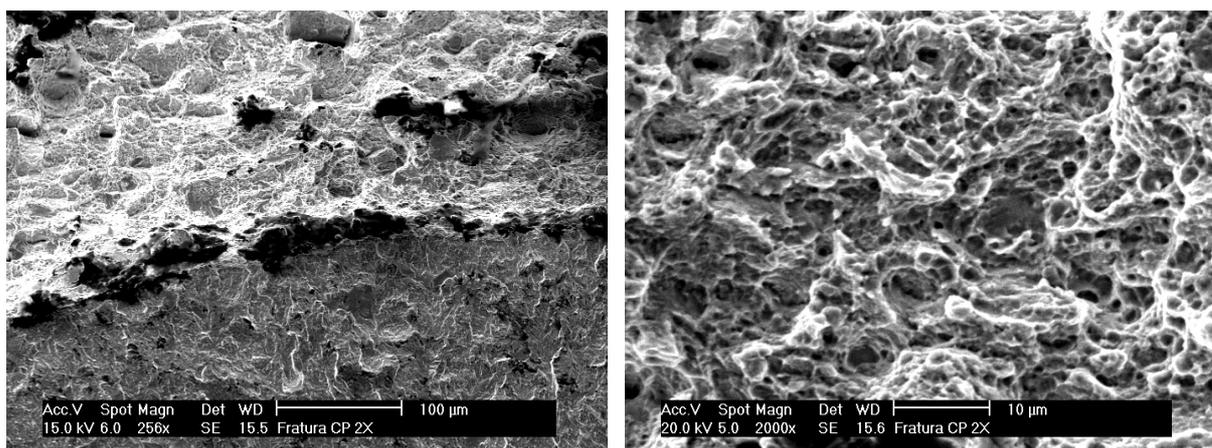


Figura 7-110 – Detalhe da união da região de propagação e deformação plástica da frente da trinca com a região de ruptura dúctil 256X. Ampliação de 2000X dos *dimples* formados da fratura dúctil.

7.10 Discussão dos resultados

7.10.1 Aspectos estatísticos da Fadiga

Seguindo uma abordagem de projeto para vida infinita, não somente a durabilidade do componente a se projetar é importante, mas sim, o quão seguro este se apresenta para as condições de trabalho. Desta forma, o coeficiente de segurança de determinado componente se traduz em um projeto ótimo em termos de custos e desempenho, e não somente super-dimensionar determinado projeto para garantir sua durabilidade. Desta forma, os projetos se apresentam cada vez mais no limite de sua segurança.

Para um completo levantamento dos fatores de segurança, bem como dos fatores amplificadores ou redutores de vida, torna-se necessária uma avaliação estatística dos aspectos envolvidos no projeto por fadiga. Abaixo, alguns aspectos estatísticos que influenciam na performance a fadiga de um componente, [STEPHENS, 2001], [HARRIS, 1961], e também a variabilidade de diversos fatores de carregamento e resistência, Tabela 17.

- Variabilidade intrínseca das propriedades do material;
- Variabilidade no tratamento e acabamento superficial;
- Variabilidade no tratamento térmico;
- Variabilidade na manufatura (dureza, encruamento);
- Incertezas e tolerâncias geométricas;
- Variabilidade do espectro da solitação;
- Variabilidade nas condições dos testes;
- Fontes de incerteza na medição;
- Critérios de correção de tensões médias;
- Critérios de acúmulo do dano, etc.

Uma pesquisa de artigos publicados sobre estudos em fadiga e fratura pode ser observada em [TANAKA, 1987].

Tabela 17 – Variabilidade de diversos fatores aplicáveis à fadiga e análise estrutural

| Propriedade | SD/Média % |
|--|------------|
| Materiais Metálicos, escoamento | 15 |
| Compósitos de fibra de carbono, ruptura | 17 |
| Casas Metálicas, resistência a flambagem | 14 |
| União parafusadas, rebitadas, escoamento | 8 |
| Inserto colado, carga axial | 12 |
| Material Honeycomb, tensão | 16 |
| Honeycomb, cisalhamento, compressão | 10 |
| Honeycomb, força de dobramento | 8 |
| Lançamento de foguete, impulso | 5 |
| Carregamentos Transientes | 50 |
| Carregamentos Térmicos | 7,5 |
| Cargas de impacto | 10 |
| Carregamento acústico | 40 |
| Solicitação de vibração | 20 |

Fonte: Klein, Schueller et.al. Probabilistic Approach to Structural Factors of Safety in Aerospace. Proc. CNES Spacecraft Structures and Mechanical Testing Conf., Paris 1994

7.10.2 Resposta em frequência de Sistemas não lineares.

O estudo da resposta em frequência de sistemas lineares é uma abordagem mais amplamente utilizada em função das características lineares das equações que governam o movimento oscilatório do sistema dinâmico. No entanto, é observado na prática que alguns sistemas não seguem esta característica de linearidade e apresentam suas constantes características, como m , c ou k não constantes, e sim, dependentes do tempo ou do deslocamento.

Neste caso, a equação de governo de um sistema dinâmico em função do tempo pode tomar, por exemplo, a seguinte forma:

$$\frac{dm}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dc}{dx^2} \frac{dx}{dt} + \frac{dk}{dx} x = f(t) \quad (7-13)$$

Ou, simplificada, supondo que apenas o termo de rigidez seja dependente do deslocamento ou amplitude da vibração, tem-se:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + \frac{dk}{dx} x = f(t) \quad (7-14)$$

Supondo uma vibração livre, em que a massa seja constante e que não haja amortecimento, observando-se a equação (7-14), nota-se que ela somente será linear se dk/dx for linear. Neste caso, a amplitude de vibração e a forma da função resposta em

frequência é constante e independente da amplitude da vibração. Algumas formas de variações da força, (ou rigidez) em função do deslocamento esta na Figura 7-111.

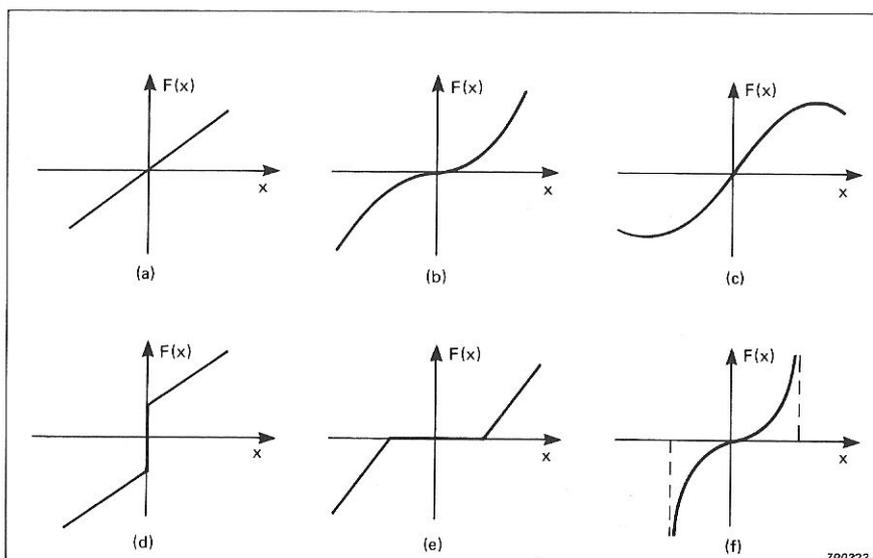


Figura 7-111 – Força versus deslocamento para alguns sistemas simétricos do tipo massa-mola: a) Linear; b) cúbica (Duffing); c) Senóide (pêndulo); d) Mola pré-tensionada; e) Montagem com folga; f) Elástica assintótica.

Desta forma, caso a rigidez varie com o deslocamento, no caso não linear, tanto as amplitudes, quanto a forma da FRF variam com a amplitude da vibração.

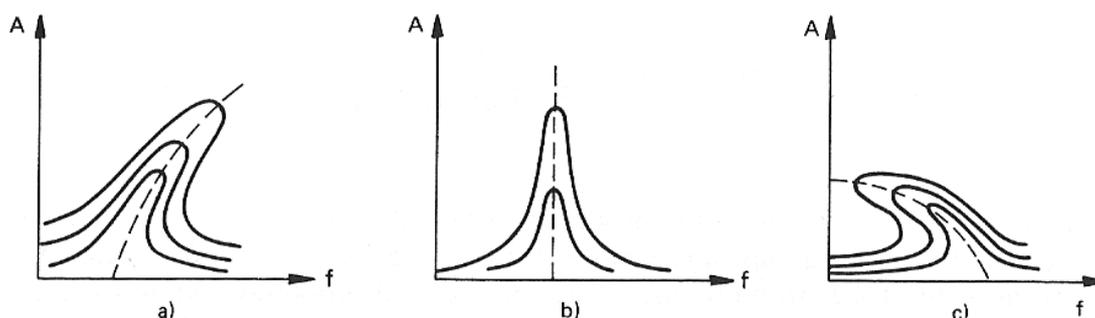


Figura 7-112 – Curvas de respostas típicas para sistemas não-lineares variando-se a amplitude de excitação. a) sistema ressonante *hardening*, b) sistema ressonante linear, c) sistema ressonante *softening*.

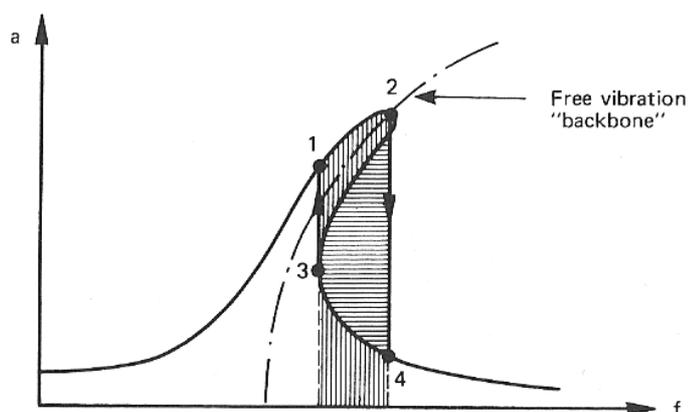


Figura 7-113 – Resposta teórica de um sistema ressonante do tipo *hardening*. A área hachurada indica a região de instabilidade.

Uma das propriedades do sistema ressonante não-linear é a de distorção da curva FRF. Isto é, mesmo sob uma solicitação puramente senoidal, a resposta em frequência não será única quando analisado seu espectro. Normalmente, a FRF será composta de várias componentes da frequência básica, denominadas de sub-harmônicas e super-harmônicas. [BROCH, 1980]

As super-harmônicas estão presentes na maioria dos sistemas não lineares. Podendo ocorrer, inclusive, a presença de harmônicas na resposta do sistema, que eventualmente nem estejam sendo solicitadas pela frequência excitante. Para maiores informações, vide [BROCH, 1980, pág 52].

7.10.3 Erros intrínsecos ao processo aleatório espectral

Erro aleatório da estimativa da PSD

Segundo [BENDAT e PIERSOL, 1980] e [ARIDURU, 2004] a variância do erro aleatório associado à estimativa da PSD média calculado através das “n” medições no tempo para a estimativa média de $G_m(f)$, é:

$$Var(G_m(f)) \approx \frac{G^2(f)}{B_e T_{total}} \quad (7-15)$$

sendo:

T_{total} = tempo total de aquisição dos dados, o qual se compõem das n_d aquisições estatisticamente independentes cada qual com o tempo T .

$$T_{total} = n_d T \quad (7-16)$$

B_e = largura efetiva de banda

$$B_e = \Delta f = \frac{1}{T} \quad (7-17)$$

Assim, a equação (7-15) transforma-se em:

$$Var(G_m(f)) \approx \frac{G^2(f)}{n_d} \quad (7-18)$$

E a equação do erro normalizado fica:

$$\varepsilon(G_m(f)) = \frac{1}{\sqrt{n_d}} \quad (7-19)$$

No caso dos experimentos realizados onde a PSD fora obtida a partir da média de n dados de aquisições, fora utilizado $n_d=10$, assim, para as tais estimativas espectrais, tem-se:

$$\varepsilon_a(G_m(f)) = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0,316 \quad (7-20)$$

o que resulta em um erro aleatório de **31,6%** na estimativa da PSD de tensão.

Nota-se que para a estimativa da PSD utilizando-se $n=1$ somente, sem média, o erro aleatório é de 100%.

Erro de Tendência

Segundo [ARIDURU, 2004] o erro de tendência da $G_m(f)$ pode ser estimado por:

$$b(G_m(f)) \approx \frac{B_e^2}{24} \frac{d^2}{df^2} G_m(f) \quad (7-21)$$

Normalizando tem-se

$$\varepsilon_b(G_m(f)) \approx \frac{B_e^2}{24} \left(\frac{\frac{d^2}{df^2} G_m(f)}{G_m(f)} \right) \quad (7-22)$$

A $G_m(f)$ esta deduzida na equação (3-25), o qual derivando-se duas vezes em f , e supondo $\zeta^2 \ll 1$, obtém-se a banda de meia-potência B_r , em torno de f_r , dado por:

$$B_r \approx 2 \cdot \zeta \cdot f_r \quad (7-23)$$

$$\frac{\frac{d^2}{df^2} G_m(f_r)}{G_m(f_r)} \approx \frac{-8}{B_r^2} \quad (7-24)$$

Na equação (7-24), tem-se o erro de tendência, ε_b igual a:

$$\varepsilon_b(G_m(f)) \approx -\frac{1}{3} \left(\frac{B_e}{B_r} \right)^2 \quad (7-25)$$

Para o caso do experimento, tem-se:

$$B_r \approx 2 \cdot 0,01 \cdot 10 \approx 0,2$$

$$B_e = \frac{1}{T} = \frac{1}{10} = 0,1$$

E o erro de tendência calculado é:

$$\varepsilon_b(G_m(f)) \approx -\frac{1}{3} \left(\frac{0,1}{0,2} \right)^2 \approx -0,083 \quad (7-26)$$

Resultando em um erro de tendência de aproximadamente **8,3%**.

7.10.4 Análise harmônica Linear versus Não-linear

[RIZZI, 2003] em seu trabalho comparou a resposta harmônica de uma estrutura do tipo viga bi-engastada, em alumínio, quando submetido a um carregamento distribuído. Utilizou um método de linearização equivalente através da avaliação da matriz de rigidez e força (EL-FORCE) e também pelo método de avaliação do erro da energia de deformação (EL-STRAIN). Os resultados encontram-se nas Figura 7-114 e Figura 7-115.

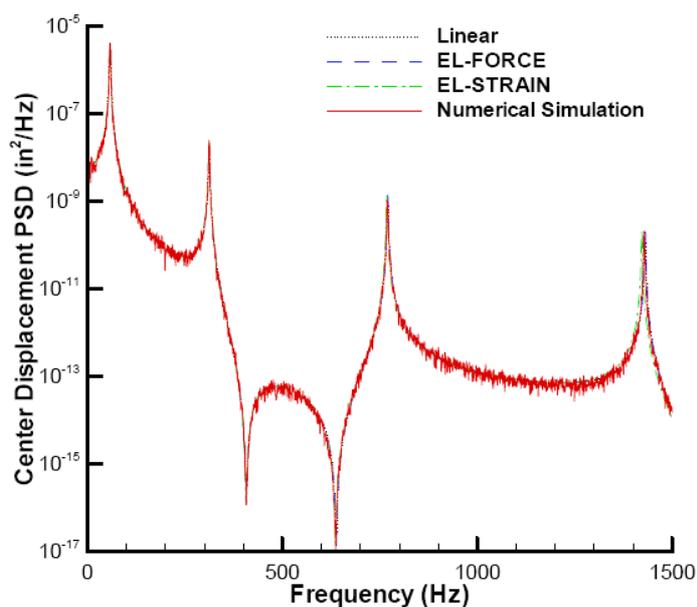


Figura 7-114 – Resposta em Frequência do deslocamento no centro da viga. Respostas por análise linear e não linear

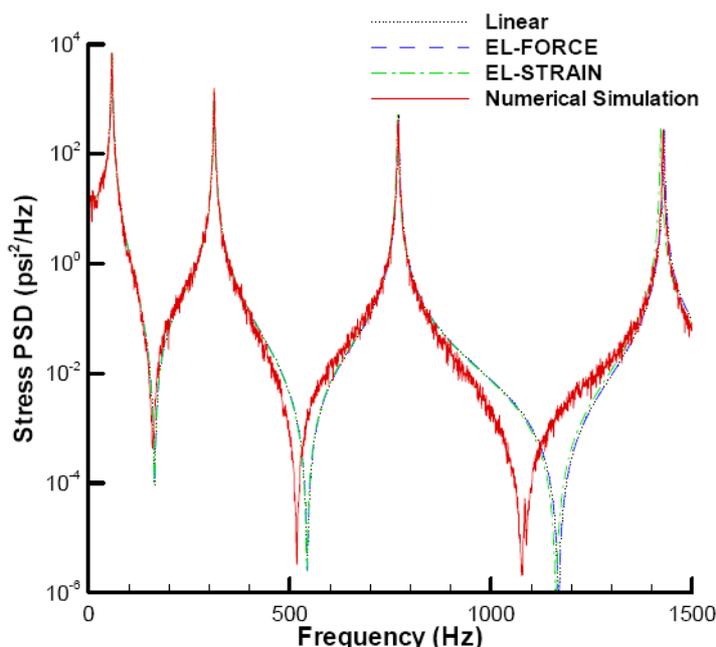


Figura 7-115 – Resposta em frequência da tensão no engaste para uma análise linear e não-linear.

7.11 Síntese do Capítulo

Os resultados de tensão e acelerações obtidos na estrutura, a partir dos ensaios experimentais, foram aplicados em uma análise de fadiga no domínio do tempo, através da contagem de ciclos por *Rainflow*, e no domínio da frequência, através da aplicação de diversos modelos de estimativa de vida em fadiga. A vida estimada através destes modelos, bem como a partir da contagem de ciclos pode, então, ser comparado com o observado experimentalmente, e uma conclusão da acurácia e da limitação de cada método pode ser avaliado.

A aplicação da análise de fadiga por elementos finitos, MEF, permite o estudo da performance e durabilidade de uma estrutura em fases iniciais do projeto, sem a necessidade da confecção de protótipos físicos e ensaios de fadiga em laboratório. A aplicação da função transferência também foi estudada, e seu potencial de aplicação no domínio da frequência, para estudar PSD alternativas ou transferência para pontos críticos da estrutura é de grande aplicação, nos casos onde o acesso a estes pontos ou a instalação de extensômetros é inviável.

Tendo-se avaliado desta forma, os modelos de estimativa de vida, parâmetros espectrais e variáveis da análise digital de sinais, a mesma metodologia pode ser aplicado agora a um componente real de um sistema mecânico, como por exemplo, um compressor submetido a um teste de transporte em mesa vibratória. Assim, no próximo capítulo, o procedimento de análise de fadiga por solicitações aleatórias, desenvolvido no presente trabalho é aplicado no levantamento da PSD de tensão para um componente do compressor.

8 Estudo de Caso: Aplicação em Componente do Compressor

Visando apenas uma demonstração da aplicabilidade e do potencial da ferramenta de análise de fadiga por solicitação aleatória no domínio da frequência, realizou-se a aquisição de tensões em um componente de um compressor utilizado em refrigeração quando submetido a um transporte rodoviário.

Como já mencionado no Capítulo 1 do presente trabalho, um dispositivo ou sistema mecânico também está sujeito aos esforços aleatórios quando submetido ao transporte em um meio como o rodoviário, por exemplo, sendo que o dano causado pelo mesmo deve ser estudado e calculado objetivando-se avaliar e projetar os componentes de forma otimizada e segura.

Desta forma, uma PSD segundo norma e critério independente daquela cuja qual fora aplicado até então no presente trabalho, fora imposta a um excitador servo-hidráulico Figura 8-1, e os resultados das tensões no tempo e na frequência em um componente do compressor pode ser visto nas figuras Figura 8-3 a Figura 8-6.

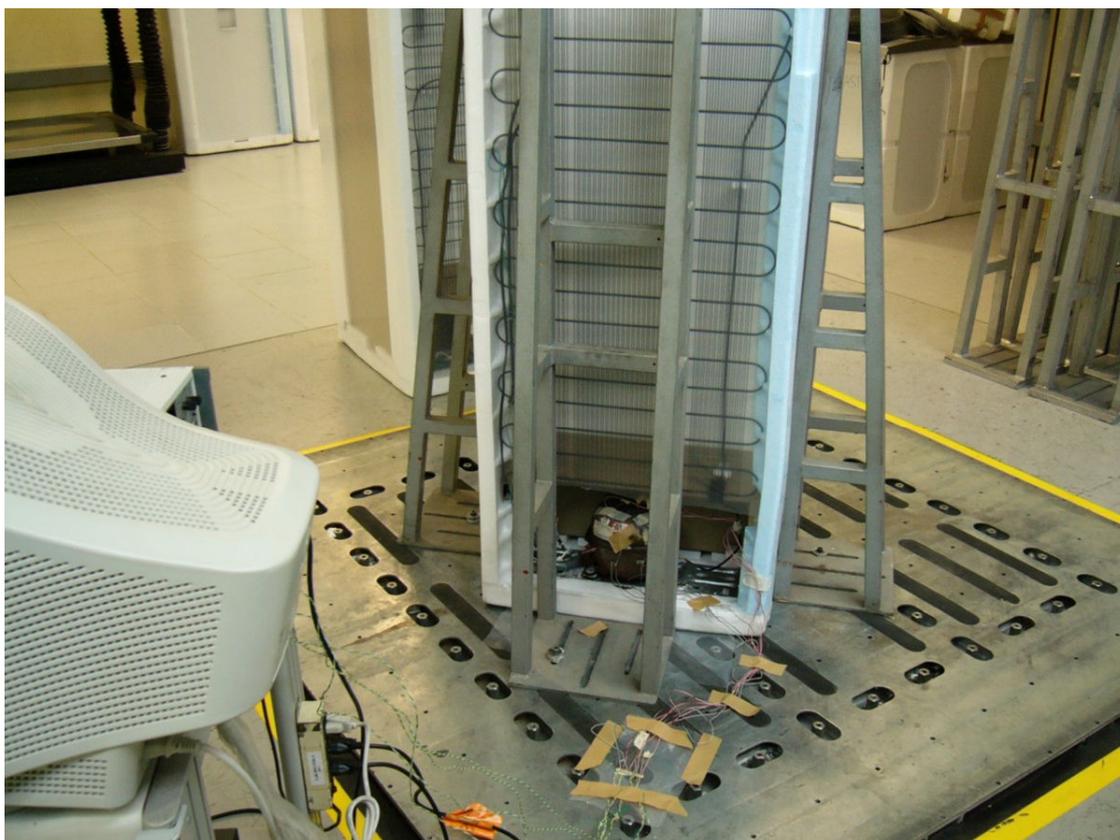


Figura 8-1 – Sistema de refrigeração com compressor montado sob mesa vibratória.

A montagem dos extensômetros foi realizada em um componente do compressor que está ligado aos tubos de refrigeração do sistema – passador, em dois pontos próximos ao engaste, defasados em 90 graus objetivando-se a obtenção de tensões em duas direções distintas, conforme pode ser observado na Figura 8-2.



Figura 8-2 – Detalhe da instrumentação dos extensômetros montados nos passadores. Montagem em dois pontos próximos ao engaste.

Os resultados de tensão no tempo para um período de 60s de aquisição estão representados nas Figura 8-3 e Figura 8-4.

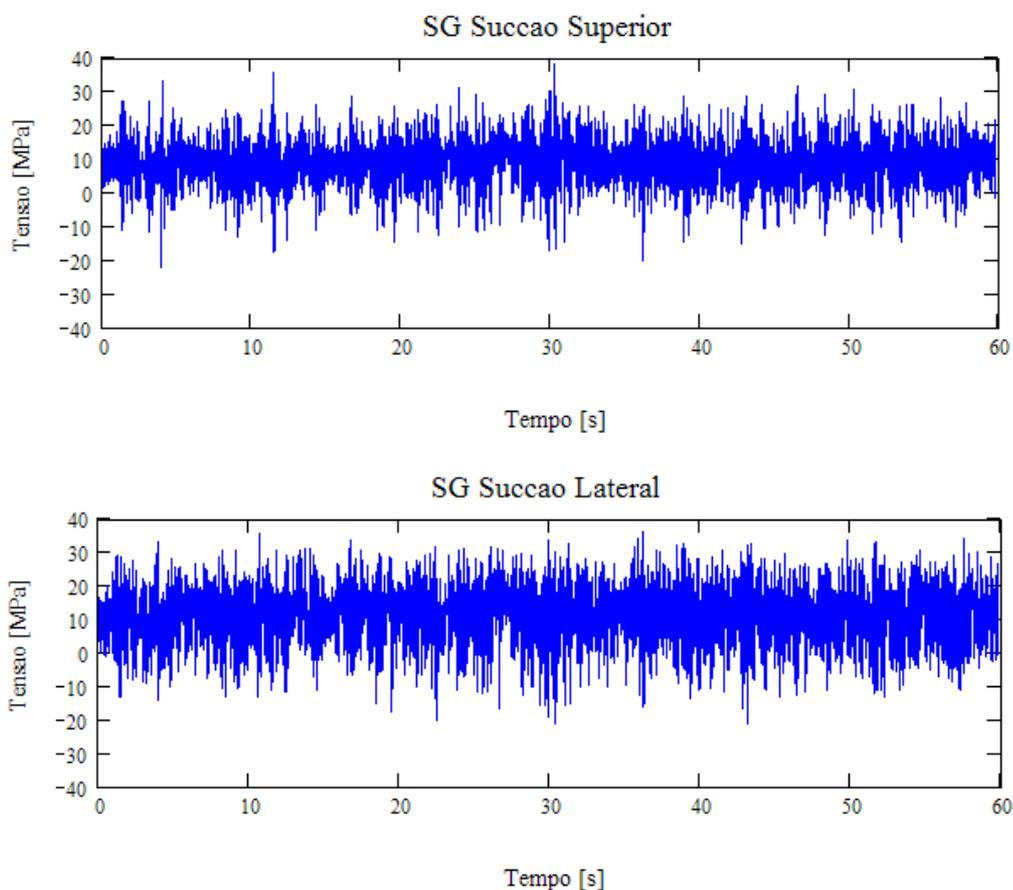


Figura 8-3 – Tensão no passador de sucção para um período de aquisição de 60s.

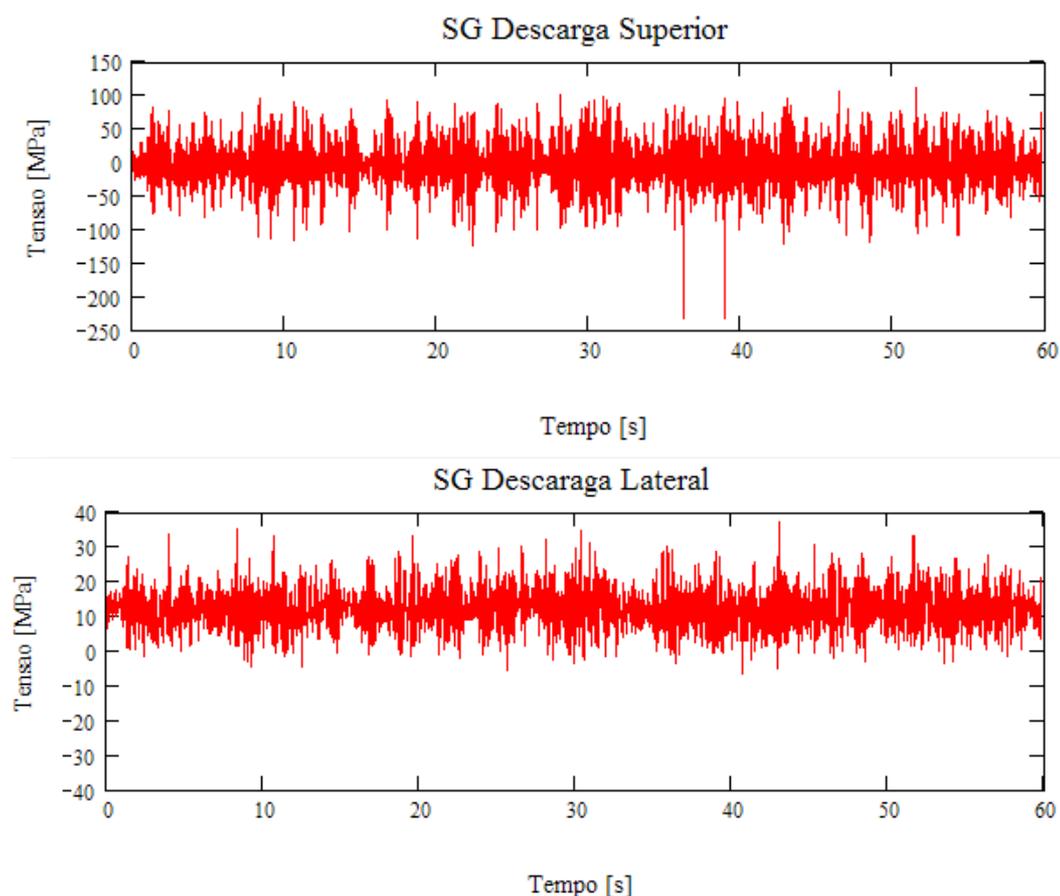


Figura 8-4 – Tensão no passador de sucção para um período de aquisição de 60s.

As PSD's de tensão calculadas com base no sinal de tensão no tempo das Figura 8-3 e Figura 8-4 podem ser observadas na Figura 8-5 e Figura 8-6.

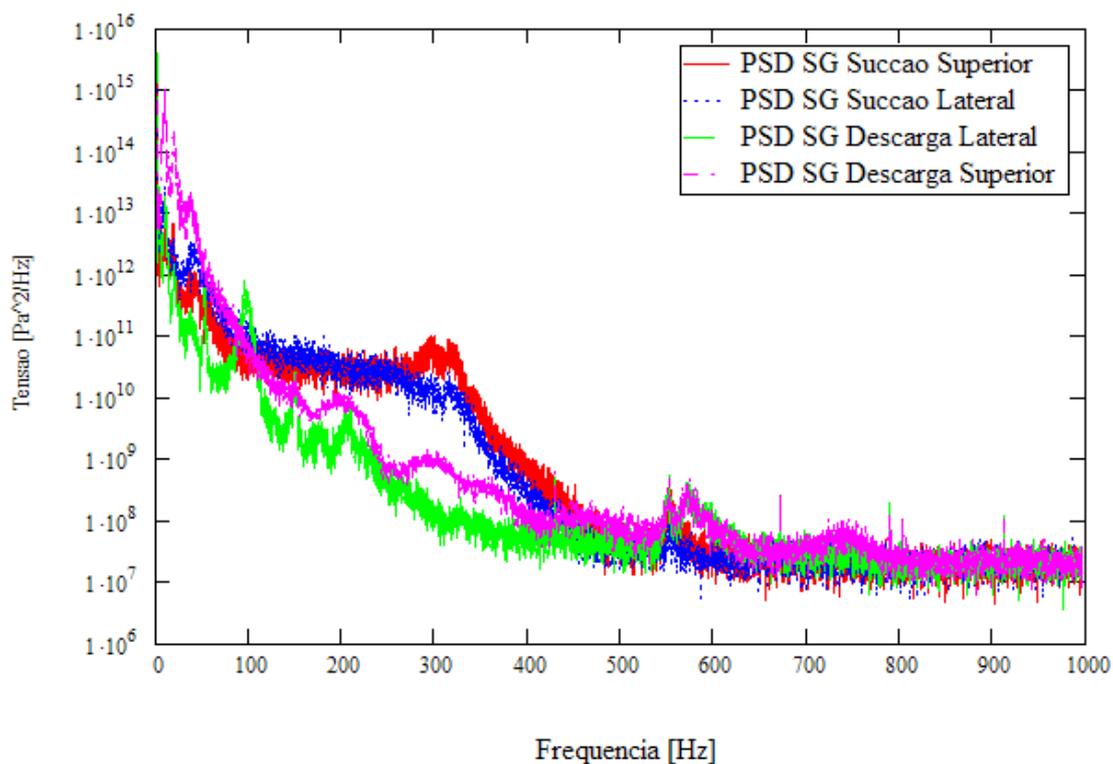


Figura 8-5 – PSD de tensão para dois passadores, sucção e descarga localizados em dois pontos distintos.

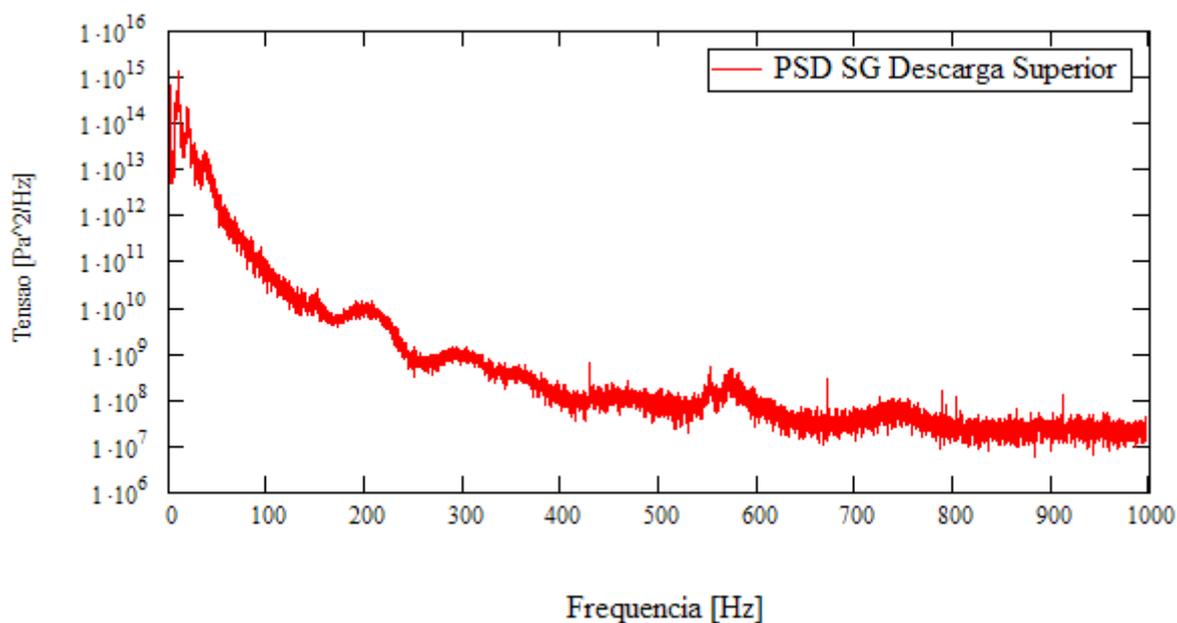


Figura 8-6 – Representação somente da PSD crítica, isto é, de maior valor RMS ou m_0 .

Tendo-se desta forma, obtido a solicitação de tensão espectral na forma da PSD no ponto mais crítico da estrutura, neste caso o passador do compressor, segue-se o procedimento de estimativa de dano e vida em fadiga aleatória conforme descrito no presente trabalho.

O dano e por consequência, a vida de fadiga, pode então ser estimada com base no sinal medido no domínio do tempo, ou a partir dos momentos espectrais extraídos da PSD, aplicando-se os vários modelos de estimativa de vida sob solicitação aleatória do capítulo 5.3.

9 Conclusão e Recomendações para trabalhos futuros

O presente trabalho estudou a análise de fadiga de um sistema mecânico estrutural quando submetido a esforços de uma vibração forçada imposto à base em um processo aleatório, estacionário e ergódico.

Convém salientar a importância deste estudo uma vez que este tipo de esforço está presente em muitas situações na Engenharia, como solicitações de terremotos, turbulência em aviação, efeitos de esforços de ventos em estruturas mecânicas e da construção civil. No caso do presente trabalho, solicitações de transporte rodoviário, ferroviário, marítimo ou mesmo aéreo, quando não somente a própria estrutura do transportador está sujeito a esforços aleatórios, mas também o conteúdo do transporte, como um sistema mecânico, ou um equipamento. Neste estudo de fadiga causado por solicitações aleatórias, o simples conceito de número de ciclos atuantes até a falha por fadiga não pode simplesmente ser extrapolado daquela visão de abordagem para um esforço cíclico senoidal. Como visto no desenvolvimento deste, há muito mais parâmetros e variáveis a considerar do que um simples esforço e curva do material.

Visando uma conclusão sistêmica e mais detalhada de todos os aspectos até então desenvolvidos e estudados, optou-se pela subdivisão da mesma em assuntos e métodos conforme se segue:

Estudo de Normas

Algumas normas relacionadas à análise de fadiga sob solicitações aleatórias, tanto no domínio do tempo, quanto da frequência, foram utilizadas como referência e tem importância na validação, credibilidade e coerência das metodologias e critérios.

Por exemplo, a norma ASTM – *Standard Practices for Cycle Counting in Fatigue Analysis*, que estabelece o algoritmo a ser aplicado para a contagem de ciclos no domínio do tempo, como por exemplo, o aplicado no presente trabalho, *Rainflow*, entre outros métodos. O atendimento à norma garante confiabilidade e coerência dos resultados quando da aplicação destes métodos.

Para um projeto de componentes sujeitos a cargas de transporte, por exemplo, quando o projetista não tem disponível a característica de solicitação real atuante em seu sistema, no caso a PSD, pode-se fazer uma estimativa através da consulta a normas de transporte como a ASTM Practice D4169 e a ISO 13355. Ambas as normas prevêem PSD de solicitação para vários tipos de transporte bem como o nível de exigência de cada uma.

Análise Digital de Sinais

Este ponto é tão importante e influente para os resultados de fadiga quanto o cálculo e critério de estimativa de vida de fadiga em si. A análise digital de sinais e extensometria são o ponto de partida para uma análise de fadiga tanto no domínio do tempo quanto na

frequência. De maior importância para o primeiro caso quando o sinal experimental é mandatório para o cálculo.

Como analisado ao longo do presente trabalho experimental, alguns parâmetros e ferramentas aplicadas para a aquisição dos sinais tem influência na estimativa da vida e nos resultados qualitativos, como filtros analógicos e digital aplicados, metodologia de estimativa da PSD, janelamento aplicado ao sinal proveniente da aquisição para o cálculo da FFT ou PSD, a taxa de aquisição de sinal do extensômetro, bem como o tempo de amostragem e médias de sinal para a estimativa da PSD.

Como visto na tabela de estimativa de vida para diversos casos de amostragem de tensão, para um mesmo sinal de tensão, dependendo do algoritmo de estimativa da PSD adotado, os resultados podem variar em torno de uma ordem de grandeza. Outros aspectos estudados e analisados no que se refere ao cálculo de fadiga, foram a frequência de amostragem do sinal, o tempo de amostragem, a frequência de Nyquist, erros de Aliasing, janelamento, aplicação de médias para estimativa da PSD, entre outros.

Porém, um dos aspectos que merecem destaque é o da aplicação de filtros passa baixa ou outro filtro dependente de cada caso. O filtro passa baixa, por exemplo, elimina o ruído de alta frequência presente no sinal e que influencia no cálculo no número de picos por segundo, ou $E[P]$. Como este parâmetro entra na divisão da estimativa de ciclos de vida pelo número de picos por segundo para o cálculo, então, da vida, ele interfere diretamente no cálculo e estimativa da vida. Assim, é fundamental, em modelos de estimativa de vida no domínio da frequência, a aplicação de filtros Passa Baixa no sinal antes da estimativa da PSD. No domínio do tempo, por outro lado, este ruído de alta frequência aparecerá na contagem de ciclos como um grande número de ciclos em tensões médias diferentes de zero, mas com amplitudes de tensão alternante abaixo do limite de fadiga, não interferindo no cálculo do dano e vida.

Diante destes aspectos colocados, no caso de disponibilidade do sinal de tensão, é importante a análise do mesmo e o estudo de estimativas de PSD variando-se filtros, janelas e algoritmos na estimativa da PSD a partir do sinal de tensão no tempo de modo a um entendimento e domínio de cada caso em particular.

Power Spectrum Density - PSD

O cálculo ou estimativa da PSD é o ponto central do estudo da fadiga por solicitações aleatórias no domínio da frequência. Ela se define a partir do conceito da função de correlação, ou neste caso, autocorrelação. É a partir de sua análise que se estabelece o comportamento dinâmico da estrutura àquela solicitação atuante, a presença de frequências dominantes no sinal de resposta, bem como dos níveis de potência (tensão) atuantes. Ao contrário da visualização do sinal no tempo, a PSD fornece uma visão mais sistêmica e intuitiva da resposta da tensão na faixa de frequência possibilitando futuras modificações

estruturais em termos de resposta dinâmica (aumento da frequência natural da estrutura, por exemplo).

Momentos e propriedades da PSD

Os momentos espectrais calculados a partir da PSD fornecem uma avaliação estatística do processo aleatório aplicado bem como uma idéia do comportamento dinâmico da estrutura. A análise de momentos também proporciona uma interpretação indireta de aspectos da solicitação no tempo, como por exemplo, a expectativa de cruzamentos de zero positivo $E[0^+]$ e o número de picos $E[P]$, que estabelecem o fator de irregularidade do sinal. Estas características definem se o sinal ao qual a PSD corresponde é de banda larga ou banda estreita, mesmo sem a visão direta do sinal no tempo. A frequência central média da resposta também é extraído a partir da análise dos momentos.

Através dos momentos também, é possível o cálculo de propriedades estatísticas do sinal, como o desvio padrão e variância, e pode-se estabelecer relações de funções de distribuição da probabilidade do sinal diretamente a partir da PSD.

Pela análise das diversas PSD de um modelo, calculadas a partir de simulações por FEA é possível uma visão global de todos os pontos do modelo sujeitos à solicitação aleatória e não somente aquele ponto no qual foi realizada a medição com extensômetro. Desta forma, uma resposta ponto a ponto das regiões críticas podem ser avaliadas em termos de coeficiente de segurança e dano.

Através da integral da PSD em termos de primeiro momento, por exemplo, é possível verificar quais são os modos representativos no cálculo do dano em fadiga. Como no presente estudo, apenas o primeiro modo, em 10Hz, é representativo haja visto que o valor da integral da frequência pela tensão (m_0) é constante a partir de 10Hz.

Resposta dinâmica de sistemas lineares e Não-lineares

Embora toda a metodologia empregada para análise dinâmica do sistema do presente trabalho seja considerada para um sistema linear, uma análise da resposta para sistemas não-lineares, de forma geral, foi realizada. O presente sistema apresenta condições de contorno não-lineares como o contato além de grandes deslocamentos e não linearidades-geométricas. Mesmo assim, quanto a grandes deslocamentos, uma simulação de deformação de 3σ de deformação mostrou-se um comportamento linear para a tensão o que sugere uma simplificação aceitável para a hipótese de sistema linear.

Quanto a resposta dinâmica, convém um estudo do efeito de não-linearidade da matriz de rigidez do sistema pelo efeito *Duffing* de enrijecimento. Este aspecto, todavia, pode estar presente no sistema em estudo e seu fenômeno ter influenciado as propriedades dos espectros calculados. Por outro lado, como estudado por [RIZZI, 2003] em sua análise

harmônica de sistemas lineares e não-lineares, sugere que este efeito tenha maior influência em alta frequência nos modos secundários de vibração.

Amortecimento e seu efeito

Um importante aspecto dinâmico da estrutura foi estudado e sua influência no espectro de solitação foi analisado: o amortecimento estrutural. Como foi analisado por meio de simulações e comparações com o experimento, o valor do amortecimento tem uma influência sobre os picos de solitação da tensão e influencia o cálculo dos parâmetros espectrais e, conseqüentemente, no cálculo da vida. Desta forma, é importante a medição e o estudo desta propriedade do material e do sistema quando realizado uma análise por PSD de modo a garantir ou, ao menos, verificar seu comportamento em relação aos parâmetro espectrais.

Função de Transferência - $H(f)$

Para a aplicação da abordagem de estimativa de vida para solitações aleatórias no domínio do tempo, é necessário o registro da tensão ou deformação ou esforço atuante na estrutura. Muitas vezes, este registro torna-se impraticável ou pouco prático em casos onde o acesso à instrumentação não é viável ou, então, em estágios iniciais do projeto, pois não há sistema físico para realizar o experimento. Além do mais, torna-se necessária uma grande quantidade de registros a fim de formular uma estatística confiável em torno da distribuição de ciclos *Rainflow*, do dano em fadiga e da vida do sistema, o que torna o processo custoso e moroso.

Para o caso da inviabilidade de medição experimental de tensão por questões de acesso, por exemplo, onde o SG não tem acesso físico ao ponto de máxima tensão, a $H(f)$ pode ser aplicada para transformar as tensões no ponto de medição e “transladá-la” ao ponto de interesse da estrutura.

Como aplicação direta da $H(f)$, suponha que a experimentação e aquisição de tensões tenha sido feita em uma determinada estrutura com uma determinada solitação. O cálculo no domínio do tempo se limitaria somente a este caso em particular. Se qualquer modificação tivesse sido feita na estrutura ou, então, se desejasse saber o dano em fadiga que uma outra solitação aleatório causaria a mesma, todo o processo deve ser feito novamente em uma análise no tempo.

Por outro lado, através da característica de invariabilidade da função transferência, esta pode ser aplicada para analisar uma outra condição de solitação à estrutura. Assim, a $H(f)$ poderia ser aplicado em uma nova PSD de solitação, bastando multiplicá-la pela $H(f)$ da estrutura. Ou também, desejando-se fazer uma nova análise em função de uma eventual modificação na estrutura, basta calcular essa nova $H(f)$ modificada, e multiplicá-la pela PSD de entrada para obter a PSD de tensão de resposta.

Extensometria e Acelerometria

Neste ponto, o cuidado na aplicação de extensometria, bem como de sua calibração é fundamental para a credibilidade e coerência dos resultados experimentais. É importante observar aspectos de erros e variações com a temperatura do SG, uma vez que se trata de uma medição dinâmica onde a taxa de deformação pode influenciar a medição do nível de tensão e *offset* do zero do SG. O ideal é a aplicação de SG em meia ponte ou ponte completa visando o equilíbrio da ponte e minimização do erro e amplificação do sinal de tensão melhorando a resolução.

Assim como o SG, o acelerômetro corrobora com a validação do modelo numérico e experimental através da aquisição de acelerações em pontos determinado na estrutura, os quais podem ser comparados através de resultados numérico.

Curva σ -N para solicitações aleatórias e efeito das tensões médias

Como estudado por Johannesson et al., a curva de fadiga σ -N do material é influenciada pelas características da solicitação atuante no sistema, diferenciando-se daquela curva resultante de um carregamento senoidal como normalmente os testes são realizados. Eles levantaram a curva do material para solicitações de banda estreita e de banda larga e concluíram que tem efeito sobre a curva. Desta forma, este deveria ser adotado como um coeficiente de modificação da curva σ -N e deveria ser considerado no cálculo da vida e dano.

Um outro aspecto também que tem efeito sobre a estimativa de vida é o efeito sobre as tensões médias. Embora o algoritmo de *Rainflow* aplicado no presente trabalho já extrai os ciclos alternantes bem como o valor médio, o seu efeito não foi considerado no cálculo da vida. Isto em função de que a média das solicitações atuantes no sistema é próxima a zero e os maiores ciclos de solicitação alternada ocorrem sob média igual a zero, conforme observado experimentalmente.

Para a análise no domínio da frequência, por outro lado, a implementação não é tão simples como no domínio do tempo e não pode ser aplicada em modelo “fechado” de estimativa de vida. Para trabalhos futuros, implementar a correção das tensões médias conforme sugerido e aplicado por [BLEVIS, 2002].

$$N_f = K \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_y} \right)^{-\mu} \left[\int_0^{\sigma_{\max}} S^b p_{S_p}(S) ds \right]^{-1}$$

$$N_f = K \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_y} \right)^{-\mu} \frac{S_{rms}^{\mu} 2^{-\mu/2}}{\Gamma\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)}$$

Critérios de Acúmulo do Dano

De um artigo escrito por Bishop, Dirlik e Sherratt, para a Engineering Integrity Society, uma conclusão dos autores torna-se conveniente e justifica alguns resultados obtidos no presente trabalho.

“O critério de Miner para contagem de ciclos por *Rainflow* tem demonstrado resultados válidos em importantes situações de projeto, porém, tem-se observado também testes com previsões de vida não conservativos”.

Embora o critério de acúmulo de dano linear de Palmgren-Miner seja o mais utilizado por questões de facilidade de aplicação e implementação do mesmo em cálculos analíticos, a prática demonstra que para solicitações aleatórias ela não reproduz a realidade.

Segundo [MADAYAG, 1969] tem sido mostrada em testes sob solicitações senoidais de múltiplos níveis, que a teoria linear de Palmgren-Miner tem previsto vidas de fadiga mais longa que a realidade, isto é, um maior número de ciclos até atingir a falha, para muitos materiais metálicos.

Também segundo [MADAYAG, 1969] torna-se mais conveniente utilizar a equação de acúmulo de dano de Palmgren-Miner:

$$\sum_{q=1}^h \frac{n_{qF}}{N_q} = K \quad \text{com } K \neq 1.$$

Segundo [MAINS, 1958] para aplicações conservativas, o valor $K=0,3$ pode ser utilizado na equação acima. Segundo [OSGOOG, 1982] mesmo os testes de Miner para cargas variadas em alumínio, obtiveram valores para o dano acumulado em fadiga de 0,61 a 1,49.

Para trabalhos futuros, um critério de acúmulo do dano não linear pode ser implementado em um modelo que considere inclusive, efeitos de sequência de ciclos de amplitude variável (Figura 5-14), ou então que se modifique conforme o tipo de espectro em frequência, do tipo Banda Larga ou Estreita. Outros critérios que foram estudados e podem ser implementados em futuros trabalhos são os critérios de Marco-Starkey, Corten-Dolan, Shanley, Freudenthal-Helelr, entre outros não-lineares.

Modelos de Estimativa de vida em frequência

Vários modelos de estimativa de vida no Domínio da frequência foram analisados e aplicados para o presente trabalho. Alguns são desenvolvidos especificamente para casos como banda estreita e outros para banda larga. Alguns se dizem aplicáveis independente da largura da banda de frequência presente no sistema.

Dentre os métodos, pode-se caracterizá-los como aqueles dependentes de dois ou mais parâmetros espectrais ou momentos espectrais além da $E[P]$, como Dirlik e Petrucci & Zuccarello, aqueles baseados no cálculo de uma tensão equivalente, como Hancock,

Chaudhury & Dover, Steinberg e Bishop. E aqueles modelados a partir da definição de Banda estreita, com ou sem modificações, como Wirsching, Hong Su e Sweitzer.

Os modelos baseados em dois ou mais parâmetros demonstram predição mais próxima de vida quando comparados aos resultados experimentais que os demais. A partir dos resultados obtidos para os vários casos, variando-se metodologias e parâmetros de estimativa da PSD, filtros, etc., chega-se às seguintes conclusões que podem ser observadas na Tabela 18.

Tabela 18 – Conclusão dos modelos de estimativa de vida no domínio da frequência

| Modelos de Análise | Acertividade § | Pontos Positivos | Pontos Negativos |
|-----------------------|--------------------------------------|--|--|
| Petrucci & Zuccarello | Próxima dos resultados experimentais | - Facilidade de implementação por calcular a vida diretamente a partir dos momentos espectrais - Estimativa próximo ao experimental a partir da análise FEM | Tende ao conservadorismo |
| Hancock | Conservador | - Em nenhum caso estimou uma vida maior do que o experimental - Estimativa próximo ao experimental a partir da análise FEM | Tende ao conservadorismo |
| Chaudhury & Dover | Conservador | - Em nenhum caso estimou uma vida maior do que o experimental - Estimativa próximo ao experimental a partir da análise FEM | Tende ao conservadorismo |
| Steinberg | Muito Conservador | - Em nenhum caso estimou uma vida maior do que o experimental - Estimativa próximo ao experimental a partir da análise FEM | Estimativas muito inferiores ao experimental |
| Dirlik | Próxima dos resultados experimentais | - Como a vida é calculada a partir da PDF, a tensão limite de fadiga é diretamente aplicada. | - Sinais de curta duração tendem ao conservadorismo - Necessário calcular primeiramente a PDF para então estimar a vida - Estimativa acima do experimental a partir da análise FEM |
| NB (Hong Su) | Conservador | - Facilidade de implementação | - Não pode ser aplicado para sinais de baixa duração - Estimativa acima do experimental a partir da análise FEM - Apresentam dispersão dependente da PSD |
| NB (Sweitzer) | Conservador | - Facilidade de implementação | - Não pode ser aplicado para sinais de baixa duração - Estimativa acima do experimental a partir da análise FEM - Apresentam dispersão dependente da PSD |
| Bishop | Conservador | - Facilidade de implementação | - Não pode ser aplicado para sinais de baixa duração - Estimativa acima do |

| | | | |
|-----------|--------------------------------------|-------------------------------|---|
| | | | experimental a partir da análise FEM - Apresentam dispersão dependente da PSD |
| Wirsching | Próxima dos resultados experimentais | - Facilidade de implementação | - Sinais de curta duração tendem ao conservadorismo - Estimativa acima do experimental a partir da análise FEM - Apresentam dispersão dependente da PSD |

§ Aqui denota-se a acurácia àquela estimativa do modelo quando comparado com os resultados de vida experimentais

Como um trabalho futuro, é conveniente implementar a distribuição de vida de Birnbaum-Saunders para a PDF de vida, ao invés da distribuição de Reyleigh como a maioria dos modelos sugerem. Implementar também o modelo de Jiao para solicitação aleatória Gaussiana com solicitação também por impacto, que é o que pode ocorrer no transporte rodoviário quando o caminhão passa sob uma irregularidade na pista, por exemplo.

Estudo da fadiga no Domínio do Tempo e Domínio da Frequência

Convém aqui reescrever as vantagens e desvantagens das aplicações destas duas metodologias para estimativa e estudo de fadiga sob solicitações aleatórias. As citações e conclusões abaixo são decorrentes do presente trabalho desenvolvido mas extrapola-se para demais aplicações sob solicitação estocástica, estacionária e ergódica de distribuição das tensões presentes na estrutura Gaussiana ou normal.

- **Domínio no Tempo**

Vantagens:

1. Os níveis de tensão máxima e mínima não são estimados indiretamente, mas sim a partir da observação direta do fenômeno;
2. O número de ciclos a uma determinada tensão não é determinada através da probabilidade, mas sim por meio da observação e contagem do fenômeno;
3. Mais preciso do que o método probabilístico por não ser tratado probabilisticamente.

Desvantagens:

1. A obtenção da tensão em locais críticos pode ser inviável pela não possibilidade de instrumentação ou devido às grandes deformações localizadas;
2. É necessária a medição em peças físicas reais e não através de protótipos virtuais;
3. Computacionalmente mais caro;
4. Ruídos de alta frequência podem estar presentes no sinal;

5. Exige uma maior quantidade de informações a serem tratadas e armazenadas durante o teste;
6. Não pode ser extrapolado ou interpolado para outros níveis de carregamento;
7. O sinal se aplica somente ao ponto para o qual foi medido o sinal de tensão, não podendo ser transferido diretamente para outros pontos de interesse na estrutura.

- **Domínio na Frequência**

Vantagens:

1. A resposta de um sistema mecânico pode ser completamente analisada ao longo da frequência;
2. Menor quantidade de dados a serem arquivados e manipulados;
3. Melhor entendimento do comportamento dinâmico da estrutura;
4. Capacidade em se estudar o completo comportamento ao longo da frequência ao invés de análises simplificadas e/ou superestimadas;
5. Maior eficiência computacional para uma análise de fadiga.

Desvantagens:

1. A estimativa da resposta em frequência, PSD, é sensível à aplicação de filtros e janelamentos;
2. A determinação da resposta espectral, PSD, depende da metodologia de estimativa da mesma;
3. Alguns modelos de estimativa de vida são particularizados para cada caso de regime de solicitação.

No entanto, o grande empecilho na aplicação de métodos espectrais é de que ainda não existe uma solução exata e generalizada para o caso de resposta em frequência do tipo banda larga mesmo para um processo gaussiano. Desta forma a correlação entre a contagem de ciclos *Rainflow* e a sua estimativa através de parâmetros espectrais ainda não é de total equivalência e predição [BENASCIUTTI e TOVO, 2005].

Apêndices

Apêndice I – Exemplo de cálculo de vida com σ -N

[STEPHENS, 2001]

Cálculo de vida através da metodologia σ -N, para o seguinte componente sujeito a flexão rotativa com os seguintes dados:

Material: Aço 4340 temperado e revenido

$S_u = 1240$ MPa

$S_y = 1170$ MPa tensão de escoamento monotônico

$S_{y'} = 1000$ MPa tensão de escoamento cíclico

$S_m = 200$ MPa

Carga

$S_m = 200$ MPa

Estimar, S_a , S_{max} , S_{min} , e R para 50K ciclos e sem escoar.

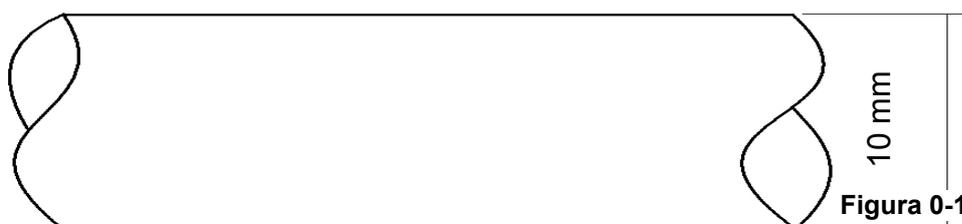


Figura 0-1

Solução:

- Goodman $\frac{S_a}{S_{NF}} + \frac{S_m}{S_u} = 1$
- Basquin $S_{NF} = A \cdot N_F^B$
- Escoamento $\frac{S_a}{S_{y'}} + \frac{S_m}{S_y} = 1$

Assumindo que a linha de Basquin passe por S_u para um ciclo e S_f para 1×10^6 ciclos:

$$S_f = S_u \cdot 1 \times 10^{6B} \quad \rightarrow \quad B = \frac{1}{6} \log \frac{S_f}{S_u}$$

- Para aço polido, de pequena dimensão

$$S_f \approx 0,5S_u \quad \text{se } S_u \leq 1400 \text{ MPa}$$

Assim: $S_f \approx 620$ MPa

- Fator de correção para polimento comercial

Para $S_u = 1240 \rightarrow K=0,87$

Assim: $S_f = 0,87 \times 620$
 $S_f = 540 \text{ MPa}$

$$\rightarrow B = \frac{1}{6} \log \frac{540}{1240}$$

$$B = -0,06$$

- Basquin fica então:

$$S_{NF} = 1240 \cdot N_F^{-0,06}$$

$$S_{NF} = 648 \text{ MPa}$$

- Goodman:

$$\frac{S_a}{648} + \frac{200}{1240} = 1$$

$$S_a = 543 \text{ MPa}$$

- Escoamento:

$$\frac{543}{1000} + \frac{200}{1170} = 0,714$$

Sem escoamento!

Apêndice II – Análise digital de sinais

- Janelamento

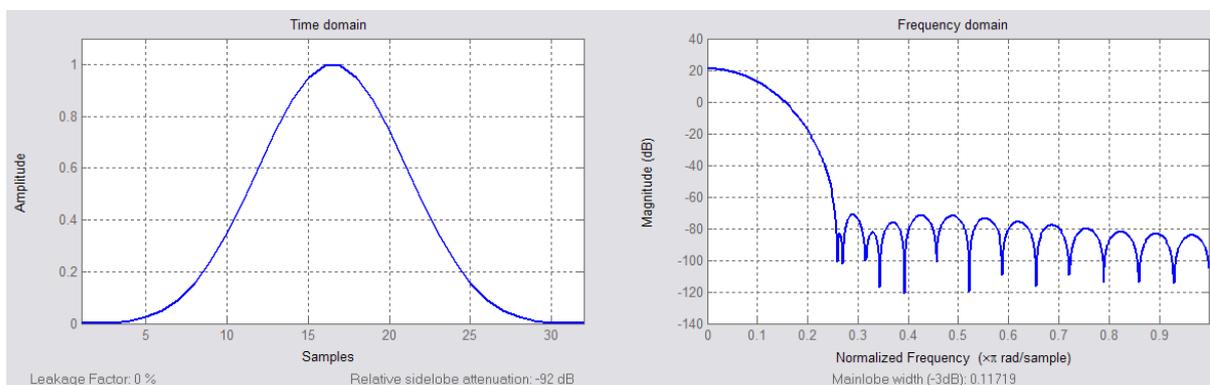


Figura 0-2 – Janela do tipo Blackman-Harris, tamanho 32. Domínio do tempo e Domínio da frequência

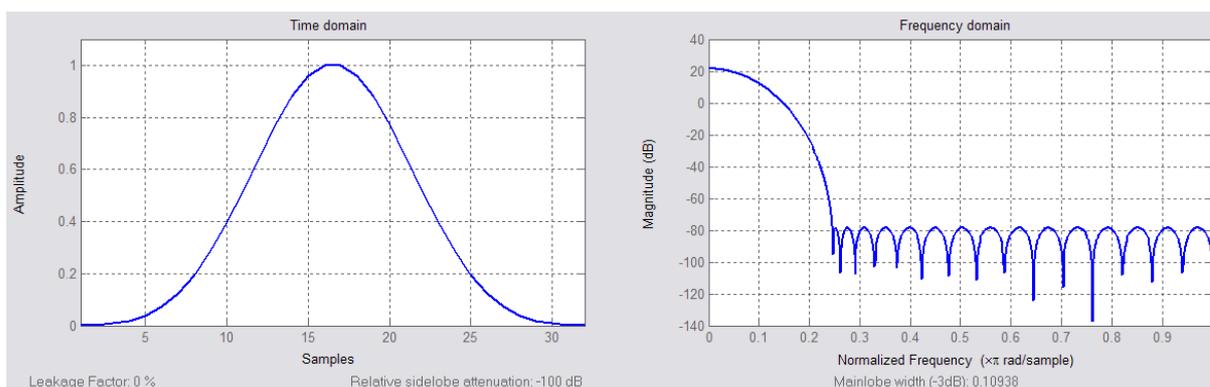


Figura 0-3 – Janela do tipo Chebyshev, tamanho 32. Domínio do tempo e Domínio da frequência

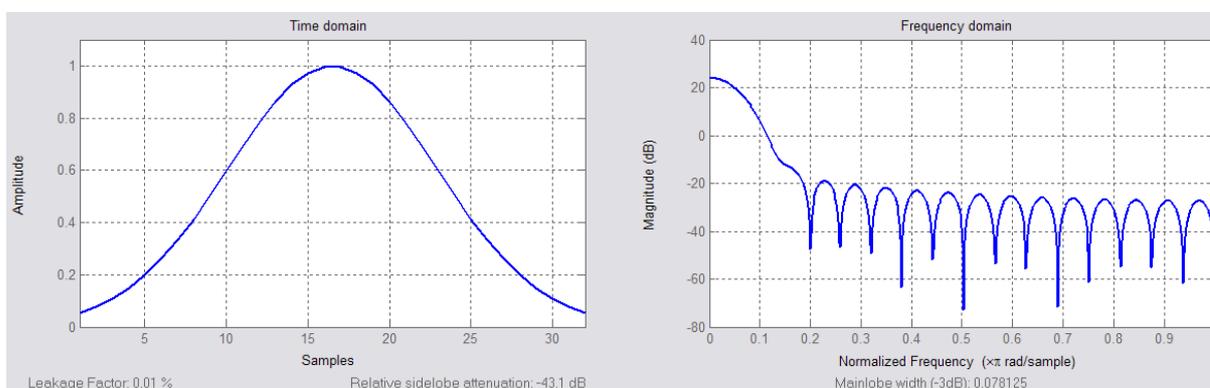


Figura 0-4 – Janela do tipo Gaussiana, tamanho 32. Domínio do tempo e Domínio da frequência

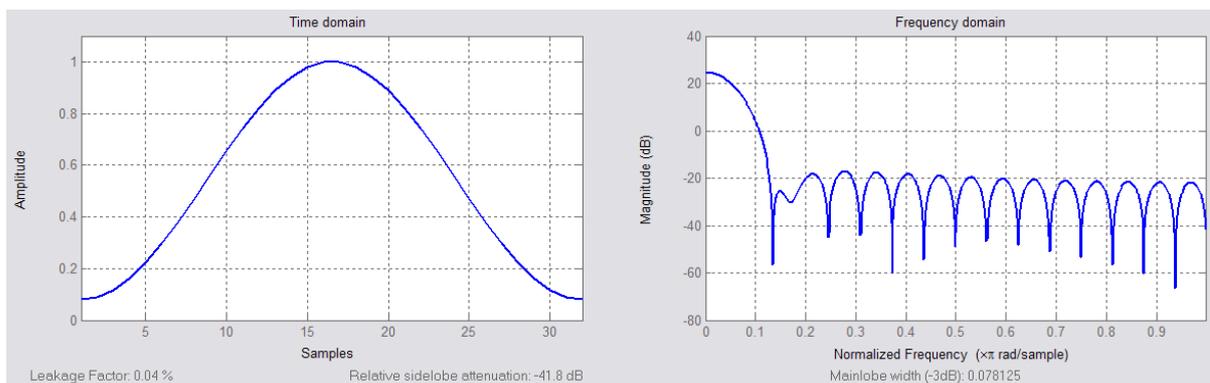


Figura 0-5 – Janela do tipo Hamming, tamanho 32. Domínio do tempo e Domínio da frequência

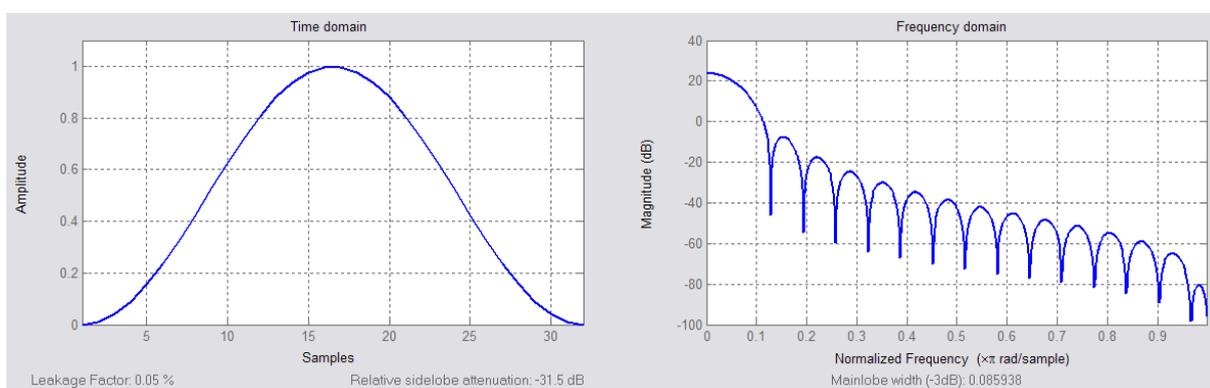


Figura 0-6 – Janela do tipo Hanning, tamanho 32. Domínio do tempo e Domínio da frequência

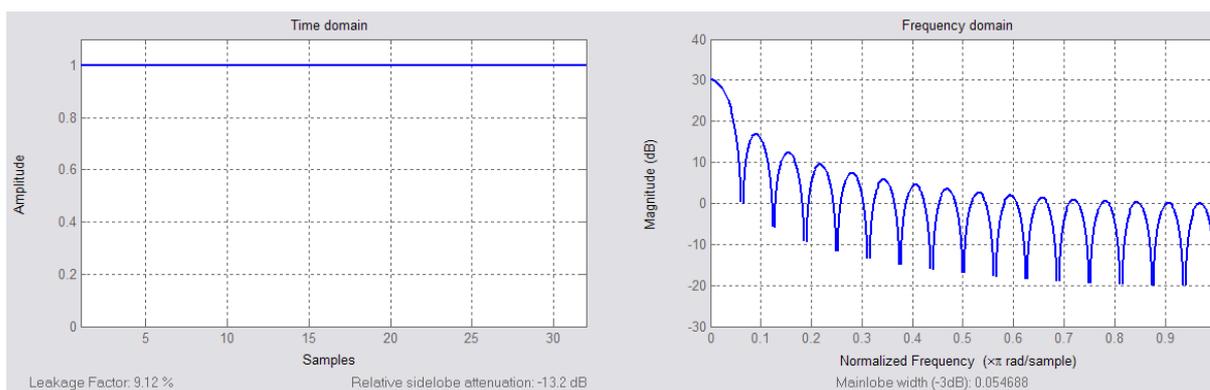


Figura 0-7 – Janela do tipo Retangular, tamanho 32. Domínio do tempo e Domínio da frequência

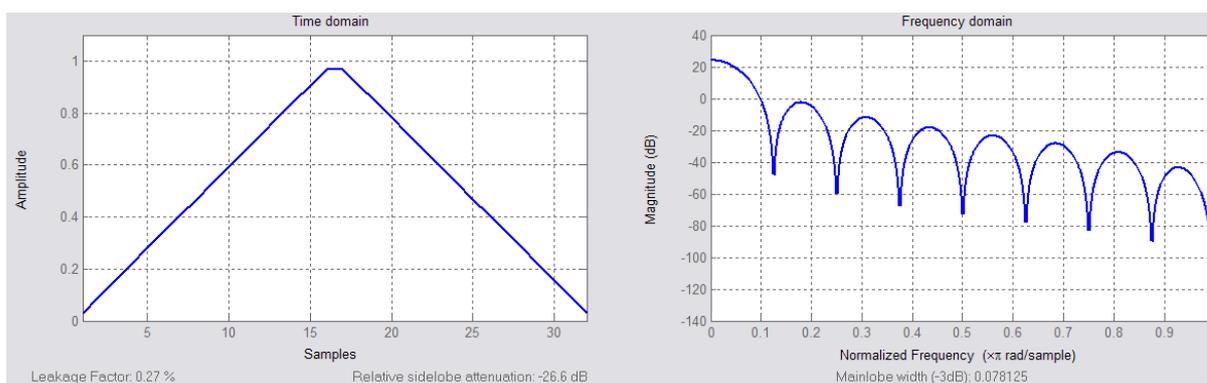


Figura 0-8 – Janela do tipo Triangular, tamanho 32. Domínio do tempo e Domínio da frequência

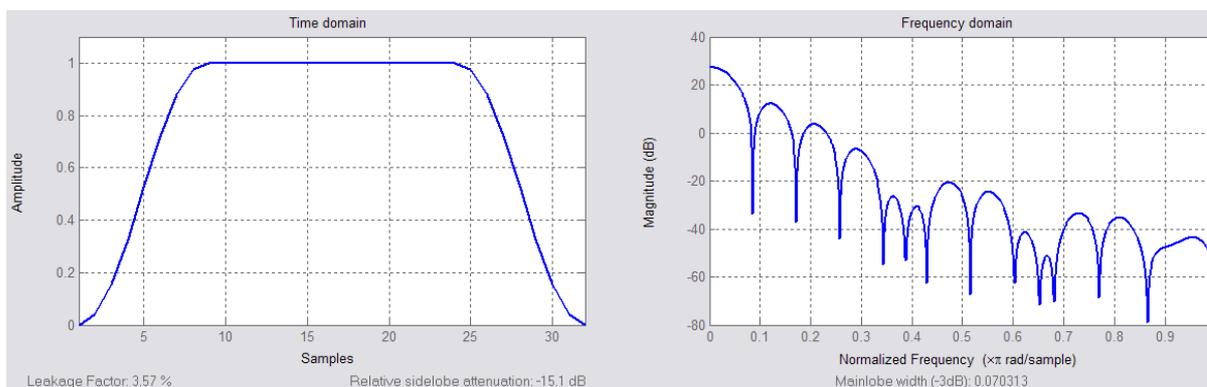
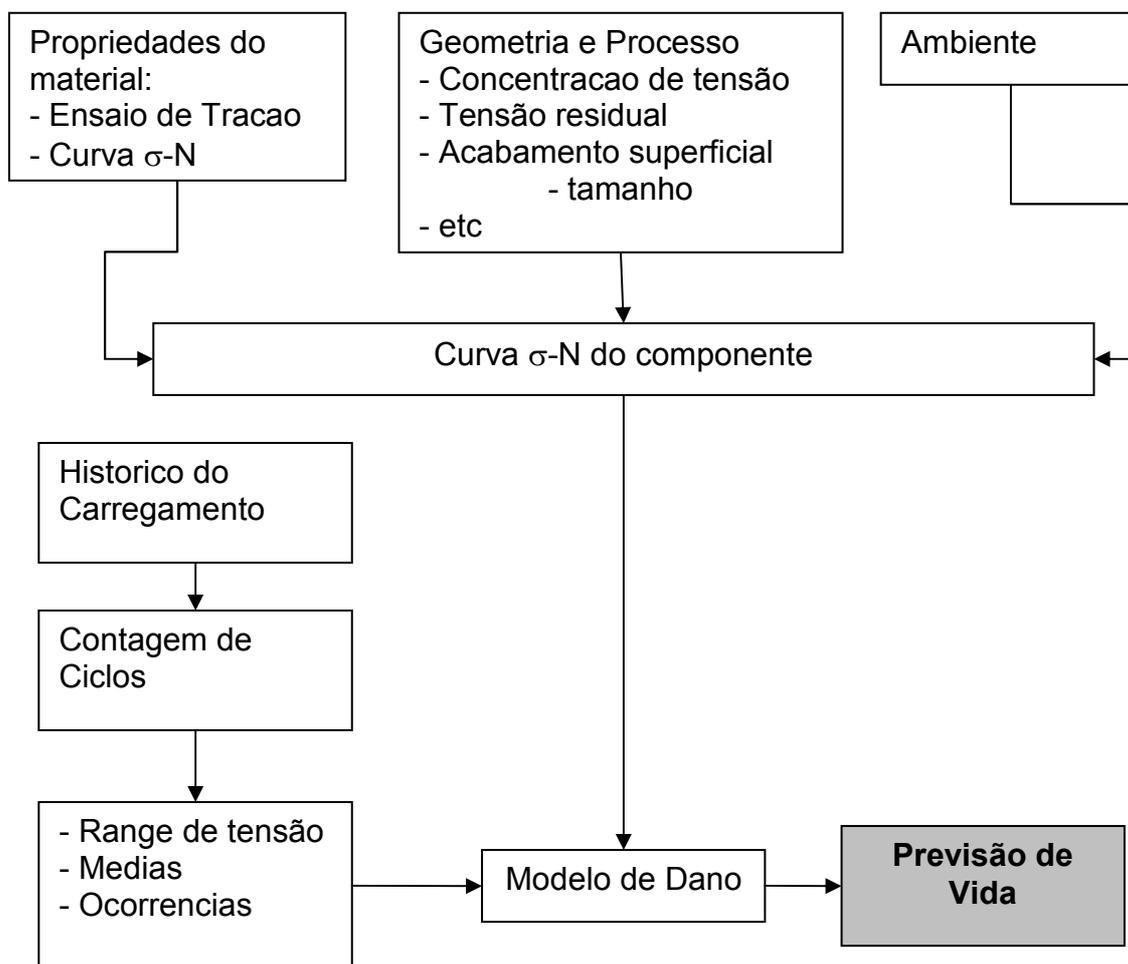


Figura 0-9 – Janela do tipo Tukey, tamanho 32. Domínio do tempo e Domínio da frequência

Apêndice III – Fluxograma para Estimativa de vida utilizando-se a abordagem de tensão-vida para e contagem de ciclos.



Fonte: [STEPHENS, 2001]

Apêndice IV – PSD segundo normas

Dados de resposta em frequência (espectro PSD) típicos para transporte para diversos meios e condições.

Tabela 19 – Dados para a PSD de diversos meios de transporte – Fonte Norma ASTM Practice D4169 Assurance Level II

| Truck | | Rail | | Air | |
|---------------------------|-------------------|-----------------|-------------------|-----------------|-------------------|
| Frequency Hz | Level g^2/Hz | Frequency Hz | Level g^2/Hz | Frequency Hz | Level g^2/Hz |
| 1 | 0.00005 | 1 | 0.00001 | 2 | 0.0002 |
| 4 | 0.01 | 2 | 0.001 | 12 | 0.01 |
| 16 | 0.01 | 50 | 0.001 | 100 | 0.01 |
| 40 | 0.001 | 90 | 0.0004 | 300 | 0.00001 |
| 80 | 0.001 | 200 | 0.00001 | | |
| 200 | 0.00001 | | | | |
| Overall Level, g rms | 0.52 | | 0.29 | | 1.05 |

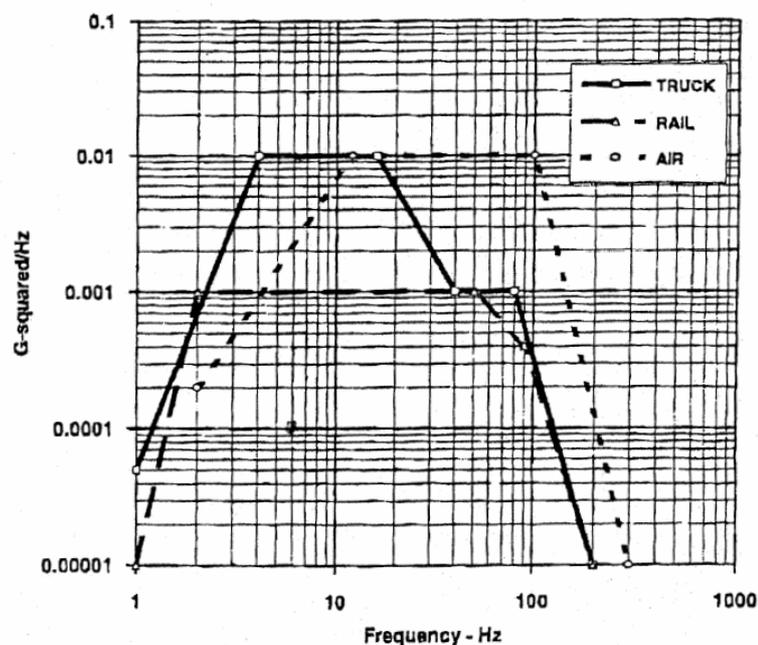


Figura 0-10 - Dados de PSD conforme o tipo de meio de transporte utilizado. Dados referentes ao transporte em rodovia Americana, interestadual a 55 mph.

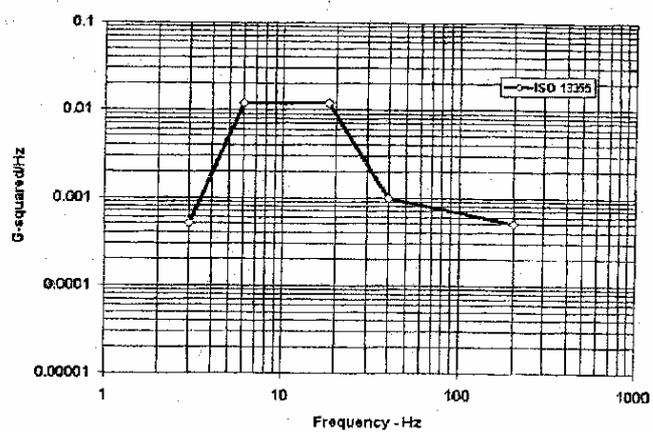


Figura 0-11 – Curva PSD para o teste de transporte ISO 13355

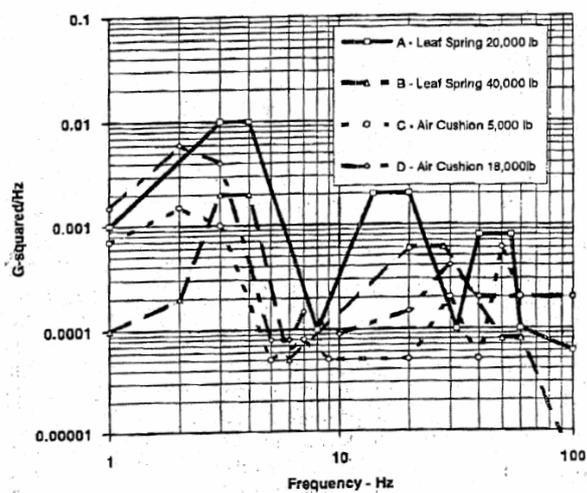


Figura 0-12 – Representação das diferentes respostas PSD conforme o tipo de suspensão e carregamento

Apêndice V – Problemas encontrados

i. Modelo numérico simétrico.

Como a excitação pela base é dada de forma simétrica exato no modelo numérico em relação à linha central do modelo, ao realizar a operação de fator de participação modal, o software numérico desconsidera àqueles modos que não participam, ou que participam relativamente pouco segundo a excitação. Desta forma o 3º modo de vibração do sistema massa-mola, o modo de torção, é desconsiderado para as etapas de resposta espectral. Portanto, ou o modelo deve conter alguma assimetria em relação à excitação, ou a excitação deve ser aplicada em algum ponto deslocado daquele do plano simétrico à estrutura.

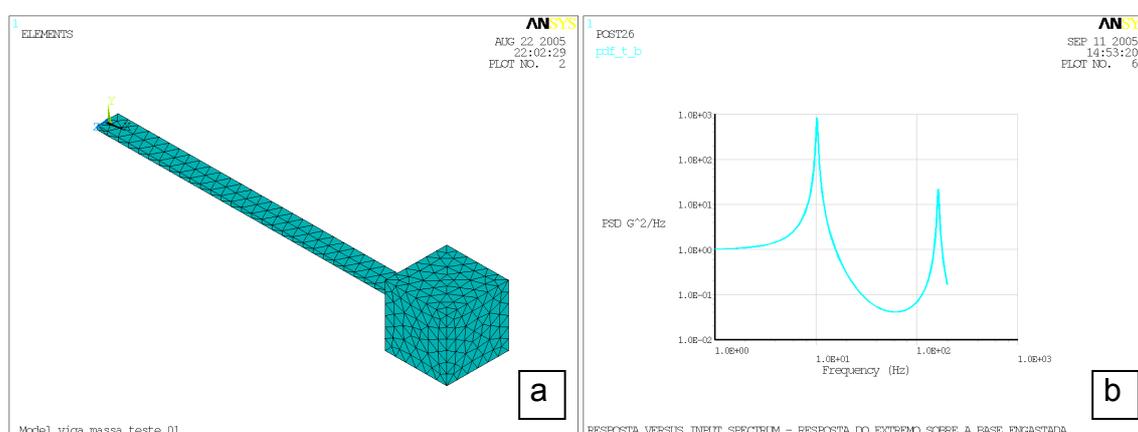


Figura 0-13 – Resultado de resposta espectral (b) para o modelo simétrico (a)

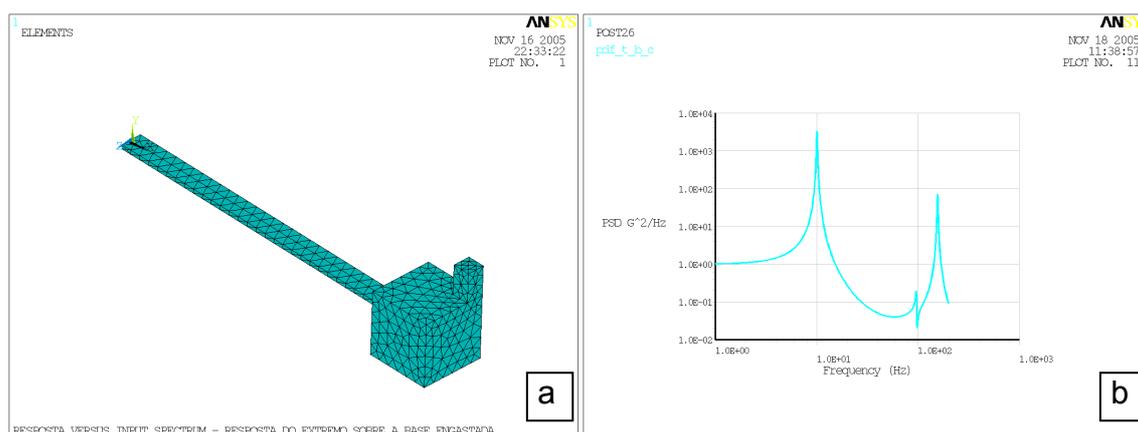
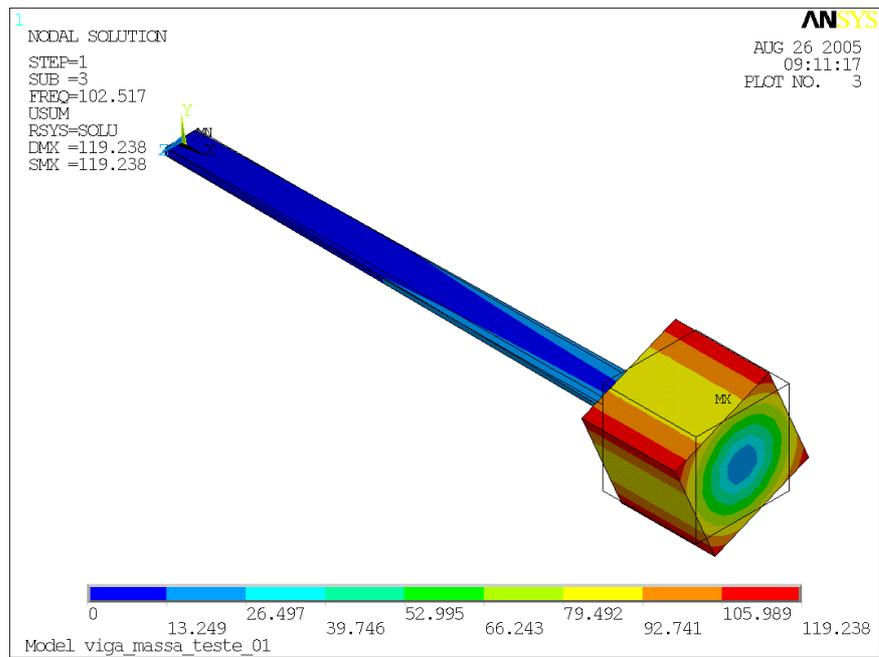


Figura 0-14 – Resultado de resposta espectral (b) para o modelo assimétrico com a adição de uma massa representando o extensômetro (a). Observa-se o aparecimento de pico de resposta equivalente ao terceiro modo



SET,LIST Command

File

***** INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE *****

| SET | TIME/FREQ | LOAD STEP | SUBSTEP | CUMULATIVE |
|-----|-----------|-----------|---------|------------|
| 1 | 10.234 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 50.987 | 1 | 2 | 2 |
| 3 | 102.52 | 1 | 3 | 3 |
| 4 | 162.94 | 1 | 4 | 4 |
| 5 | 530.41 | 1 | 5 | 5 |
| 6 | 802.17 | 1 | 6 | 6 |
| 7 | 1320.7 | 1 | 7 | 7 |
| 8 | 1749.4 | 1 | 8 | 8 |
| 9 | 2537.5 | 1 | 9 | 9 |
| 10 | 2542.6 | 1 | 10 | 10 |
| 11 | 4089.7 | 1 | 11 | 11 |
| 12 | 4181.3 | 1 | 12 | 12 |
| 13 | 6103.7 | 1 | 13 | 13 |
| 14 | 6236.6 | 1 | 14 | 14 |
| 15 | 8215.9 | 1 | 15 | 15 |
| 16 | 8705.0 | 1 | 16 | 16 |
| 17 | 11264. | 1 | 17 | 17 |
| 18 | 11592. | 1 | 18 | 18 |
| 19 | 12420. | 1 | 19 | 19 |
| 20 | 14888. | 1 | 20 | 20 |
| 21 | 0.0000 | 2 | 1 | 21 |
| 22 | 0.0000 | 3 | 1 | 22 |
| 23 | 0.0000 | 4 | 1 | 23 |
| 24 | 0.0000 | 5 | 1 | 24 |

- Ruído de alta frequência no sinal e consequente matriz *Rainflow*

Sinal sem filtro Passa Baixa

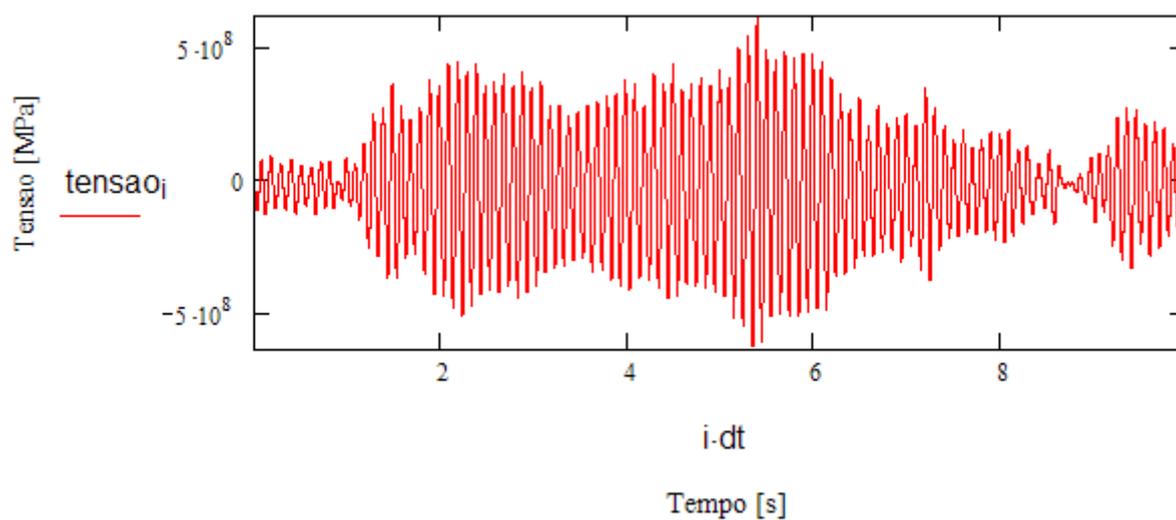


Figura 0-15 – Sinal de tensão no engaste, pra uma taxa de aquisição de 0,0004s. Duração do sinal, 10s.

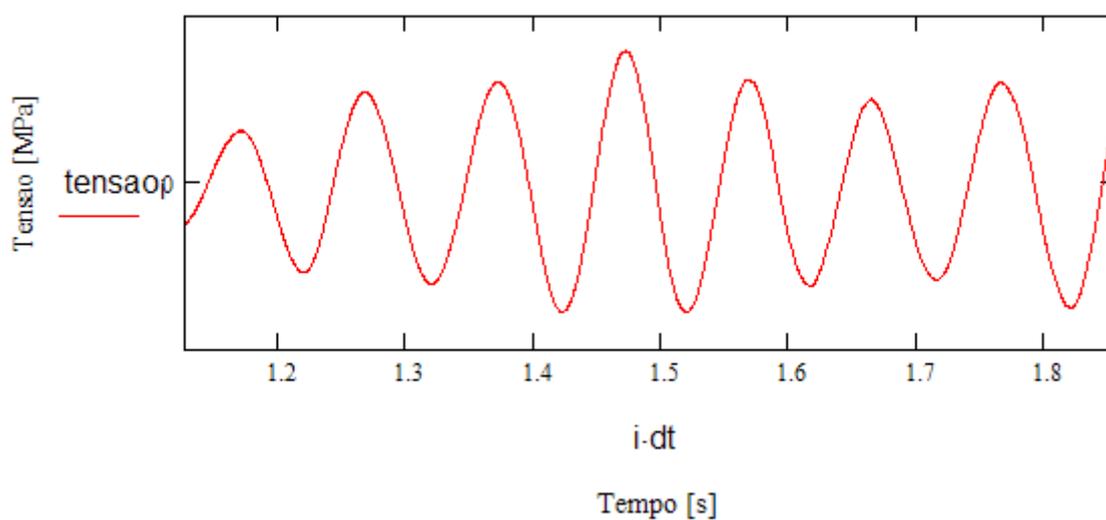


Figura 0-16 – Sinal de tensão no engaste, pra uma taxa de aquisição de 0,0004s. Amplificação para um período de tempo de 0,7 segundos.

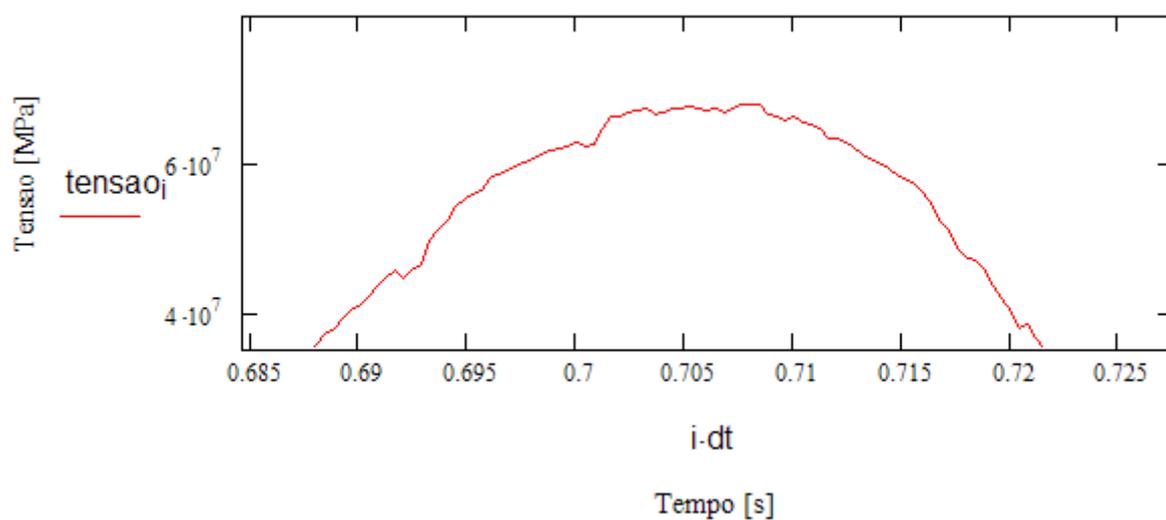


Figura 0-17 – Sinal de tensão no engaste, pra uma taxa de aquisição de 0,0004s. Amplificação para um período de tempo de 0,04 segundos. O sinal de alta frequência torna-se visível, principalmente em níveis de tensão baixa.

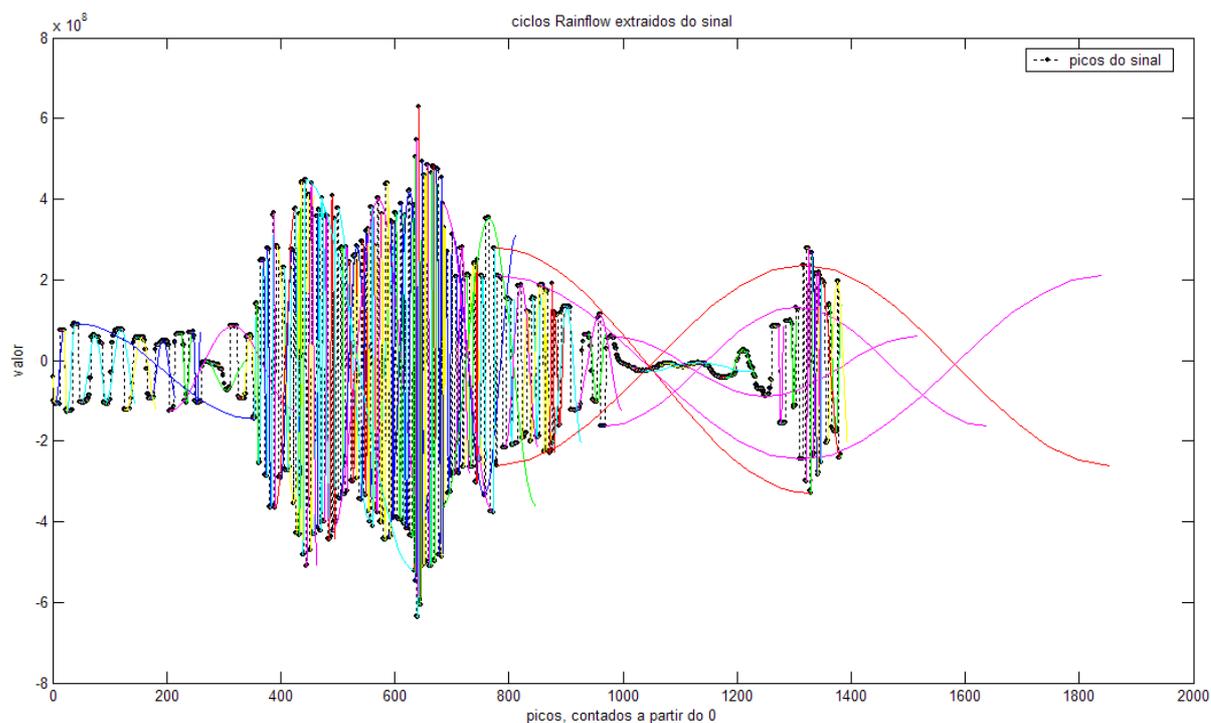


Figura 0-18 – Aplicação do algoritmo de contagem de ciclos *Rainflow* para um sinal de tensão de 10s a uma taxa de aquisição de 0,0004. Os ciclos estão representados pelas senóides: **691 ciclos encontrados**

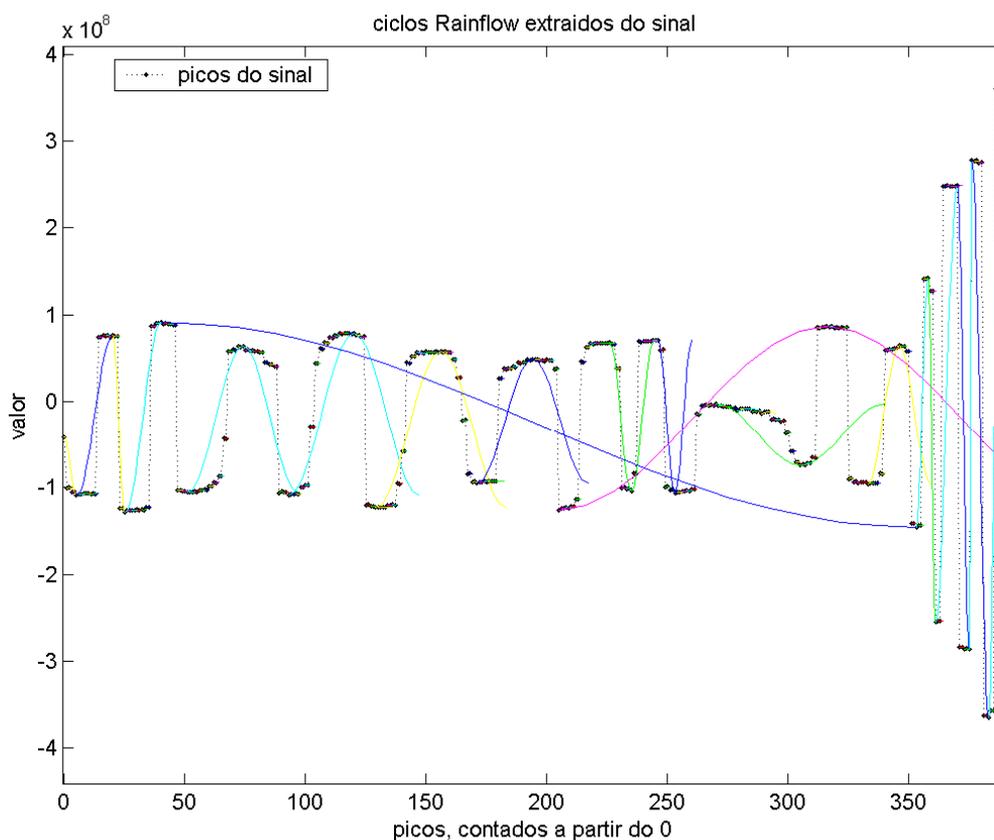


Figura 0-21 – Detalhe da contagem do ciclo e representação da senoide para ciclos ocorrendo à baixa tensão. O sinal de ruído de alta frequência aparece e é contabilizado como ciclo do *Rainflow*.

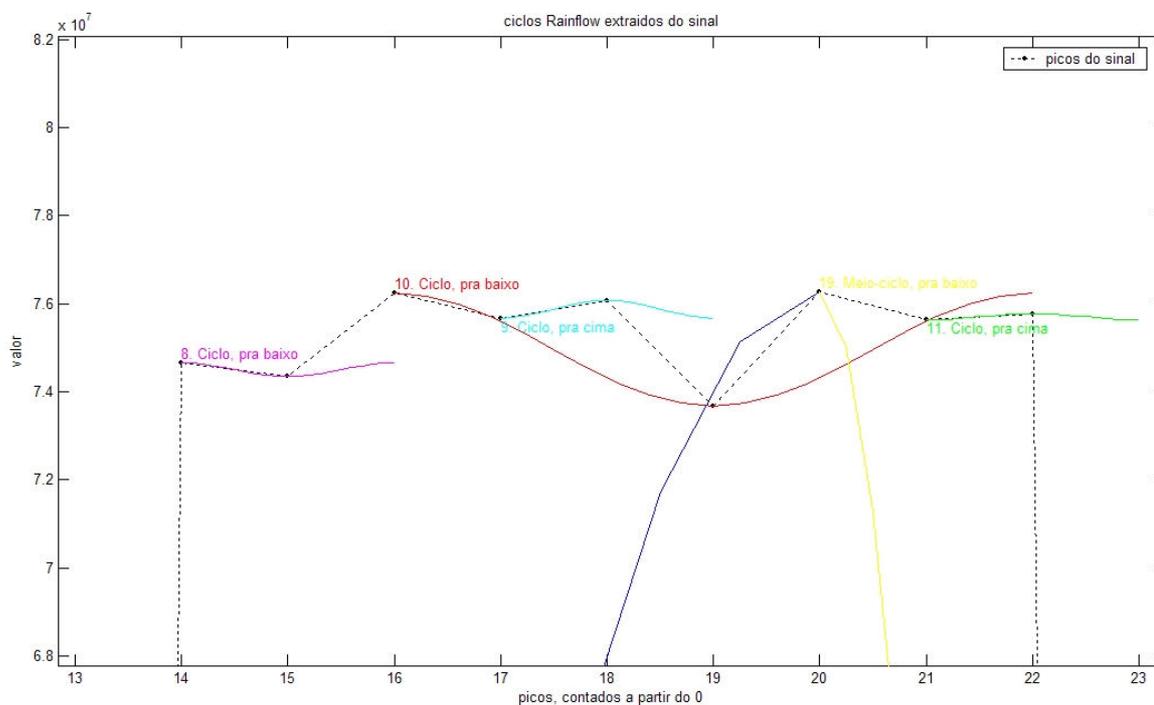


Figura 0-22 – Detalhe do topo de um ciclo de baixa tensão. Deveria ser contabilizado apenas o ciclo principal da tensão, mas 5 ciclos de alta frequência, e baixa amplitude foram contabilizados.

Sinal filtrado em 200Hz

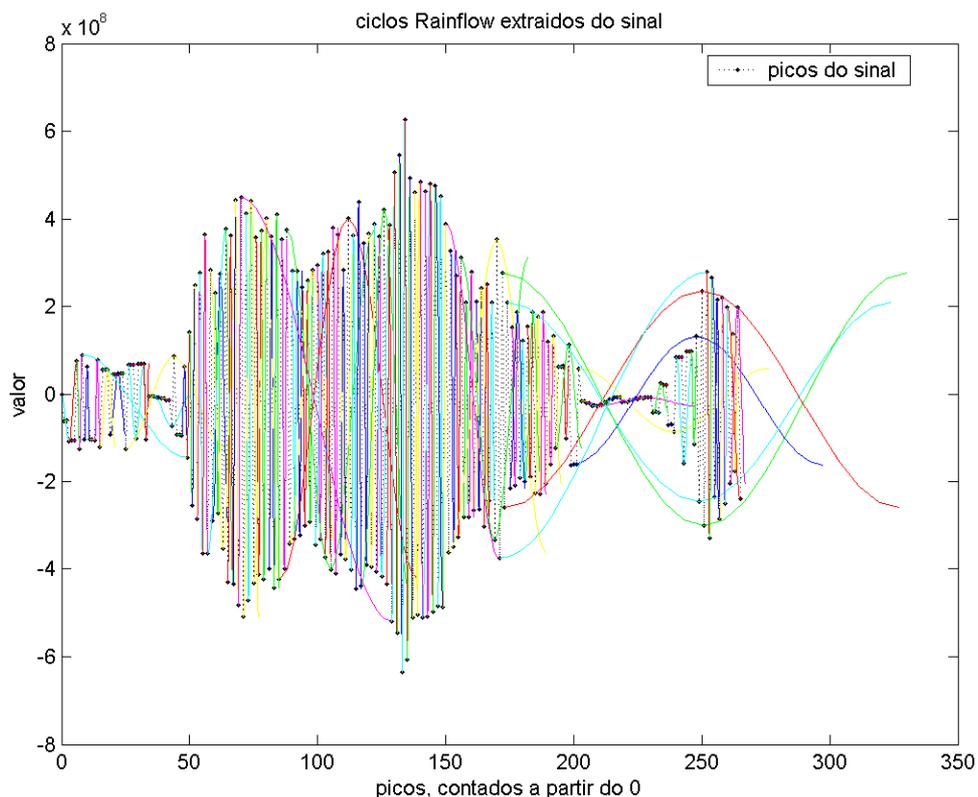


Figura 0-23 - Aplicação do algoritmo de contagem de ciclos *Rainflow* para um sinal de tensão de 10s a uma taxa de aquisição de 0,0004. Os ciclos estão representados pelas senóides: 132 ciclos encontrados

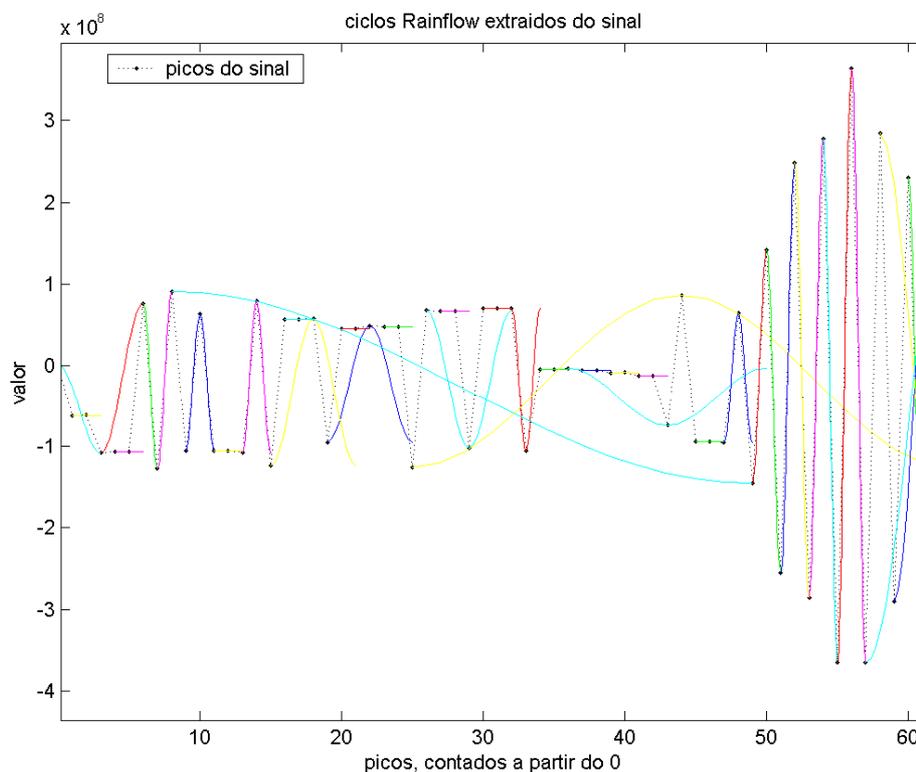


Figura 0-24 – Detalhe da contagem do ciclo e representação da senoide para ciclos ocorrendo à baixa tensão. O sinal de ruído de alta frequência não aparece mais nem é contabilizado como ciclo do *Rainflow*. Filtro de passa baixa de 200 Hz.

Apêndice VI - Verificação do programa Matlab® para cálculo de momentos da PSD.

PSD e valores de referencia conforme BISHOP no domínio da frequência [10,16].

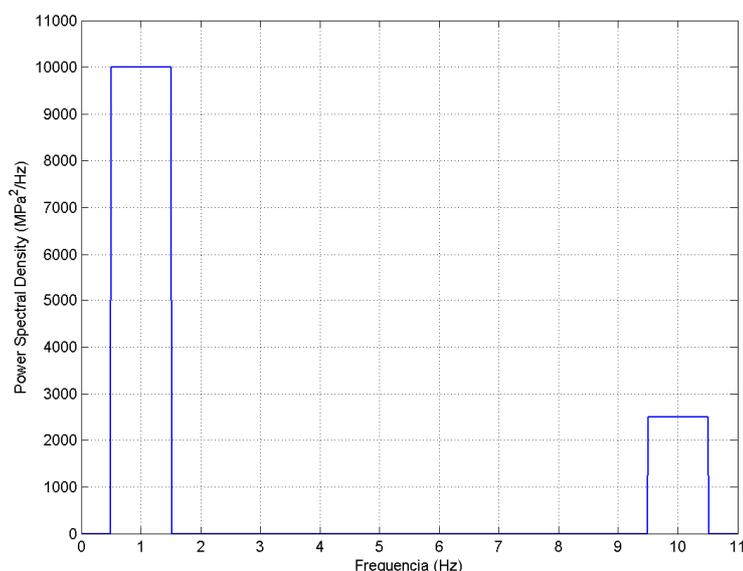


Figura 0-25 – Reprodução da PSD do Bishop com taxa de aquisição de 100Hz. (resultando em df de 0,01)

Para o cálculo dos momentos espectrais a partir da PSD, calculam-se os momentos espectrais:

$$m_0 = 1^0 \cdot 10000 \cdot 1 + 10^0 \cdot 2500 \cdot 1$$

$$m_0 = 12500$$

$$m_2 = 1^2 \cdot 10000 \cdot 1 + 10^2 \cdot 2500 \cdot 1$$

$$m_2 = 260000$$

$$m_1 = 1^1 \cdot 10000 \cdot 1 + 10^1 \cdot 2500 \cdot 1$$

$$m_1 = 35000$$

$$m_4 = 1^4 \cdot 10000 \cdot 1 + 10^4 \cdot 2500 \cdot 1$$

$$m_4 = 25010000$$

Com os quais se calculam $E[0]$ e $E[p]$:

$$E[0] = 4.6$$

$$E[p] = 9.8$$

$$\alpha_x = 0.465$$

$$\sigma = \sqrt{m_0} = 111,8 \text{ MPa}$$

Através do programa em MatLab®, esses valores tomam os seguintes:

| Valores dos momentos | Teórico | MatLab | Erro |
|----------------------|------------|------------|------|
| m_0 | 12.500 | 12.614 | |
| m_1 | 35.000 | 35.412 | |
| m_2 | 260.000 | 263.660 | |
| m_4 | 25.010.000 | 25.381.000 | |

| | | | |
|------|-----|-------|--|
| E[0] | 4.6 | 4.572 | |
| E[p] | 9.8 | 9.811 | |

PSD e valores de referencia conforme BISHOP no domínio do tempo

Através da transformada da PSD da frequência em um sinal no tempo, conforme as equações abaixo:

Supondo dois senoides sobrepostos

| | | |
|---------------|------------------------|------------------------|
| de frequencia | $f_0 := 1$ | $f_1 := 10$ |
| de periodos | $T_0 := \frac{1}{f_0}$ | $T_1 := \frac{1}{f_1}$ |
| de amplitudes | $A_0 := \frac{282}{2}$ | $A_1 := \frac{141}{2}$ |

$$f(x) := A_0 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{T_0}\right) + A_1 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{T_1}\right)$$

Criar uma amostra no tempo de tamanho 2^m

:

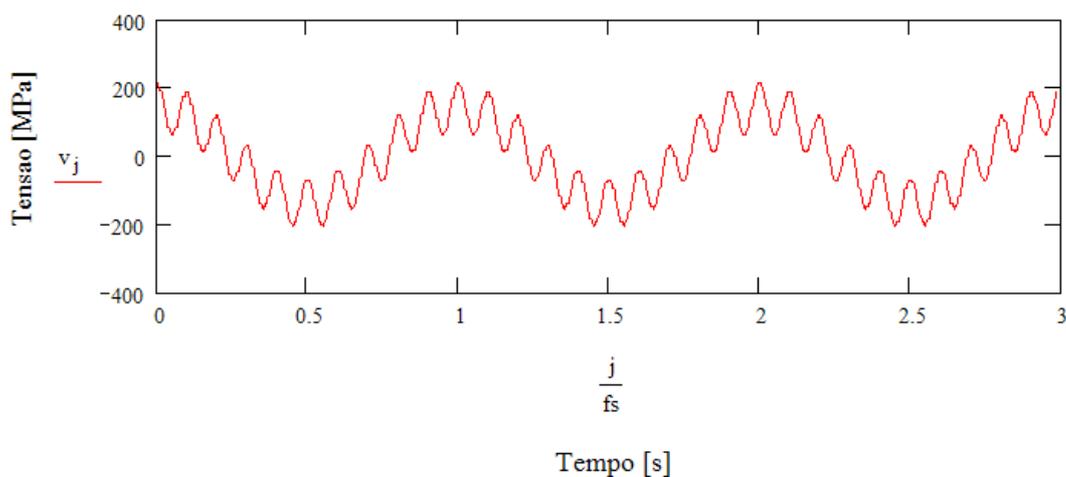
$$N_0 := 2^{15} \quad f_s := 500$$

$$k := 0..N_0 - 1 \quad n_k := \frac{k}{f_s}$$

Sendo f_s a taxa de aquisicao por segundo.

Vetor data:

$$v_k := f(n_k) \quad t_i := 0, 0.005.. 10$$



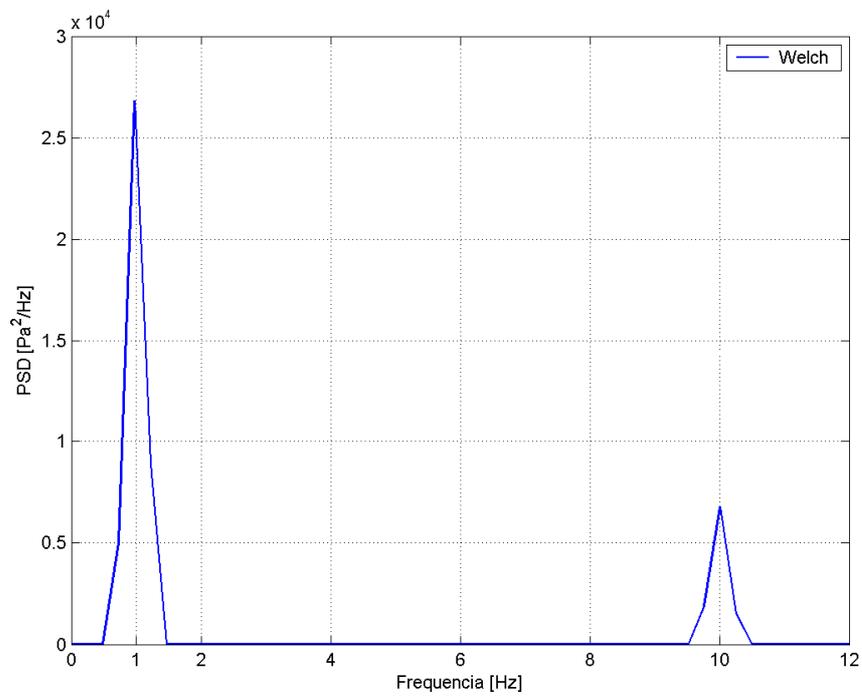
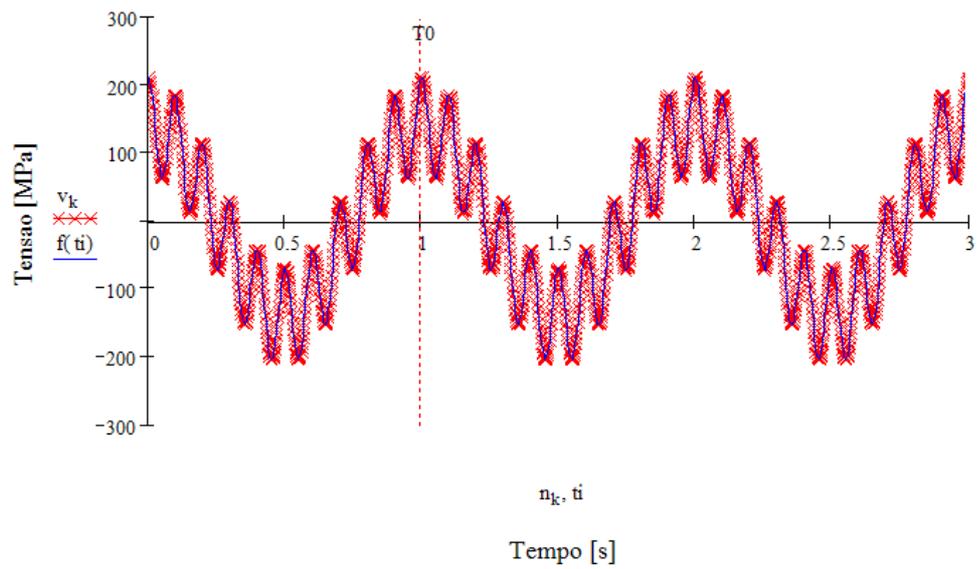


Figura 0-26 – PSD calculada através do método de Welch com janelamento hanning com 2048 pontos

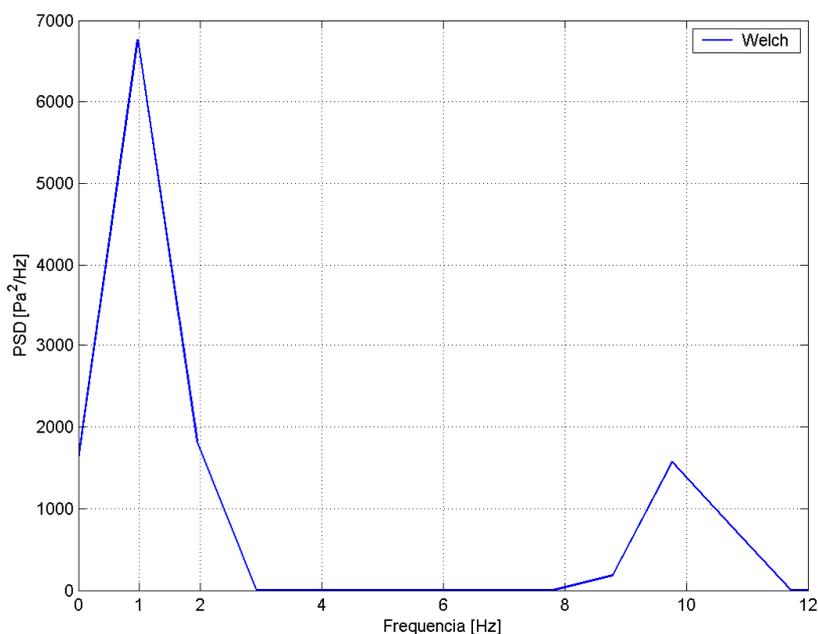


Figura 0-27 - PSD calculada através do método de Welch com janelamento hanning com 512 pontos

| Valores dos momentos | Teórico | MatLab 2048 | Matlab 512 | Erro |
|----------------------|------------|-------------|------------|------|
| m_0 | 12.500 | 12.413 | 12.400 | |
| m_1 | 35.000 | 37.752 | 46.584 | |
| m_2 | 260.000 | 275.620 | 338.260 | |
| m_4 | 25.010.000 | 27.292.000 | 36.166.000 | |
| $E[0]$ | 4.6 | 4.712 | 5.22 | |
| $E[p]$ | 9.8 | 9.95 | 10.34 | |

| Valores dos momentos | Teórico | MatLab 2048 | Matlab 2048 com $K_t=1,25$ | Amplificação | Amplificação |
|----------------------|----------|-------------|----------------------------|--------------|-------------------|
| m_0 | 12500 | 12413 | 19396 | 1,562 | 1,25 ² |
| m_1 | 35000 | 37752 | 58987 | 1,562 | |
| m_2 | 260000 | 275620 | 430660 | 1,562 | |
| m_4 | 25010000 | 27292000 | 42643000 | 1,562 | |
| $E[0]$ | 4,6 | 4,712 | 4,712 | 0 | |
| $E[p]$ | 9,8 | 9,95 | 9,95 | 0 | |

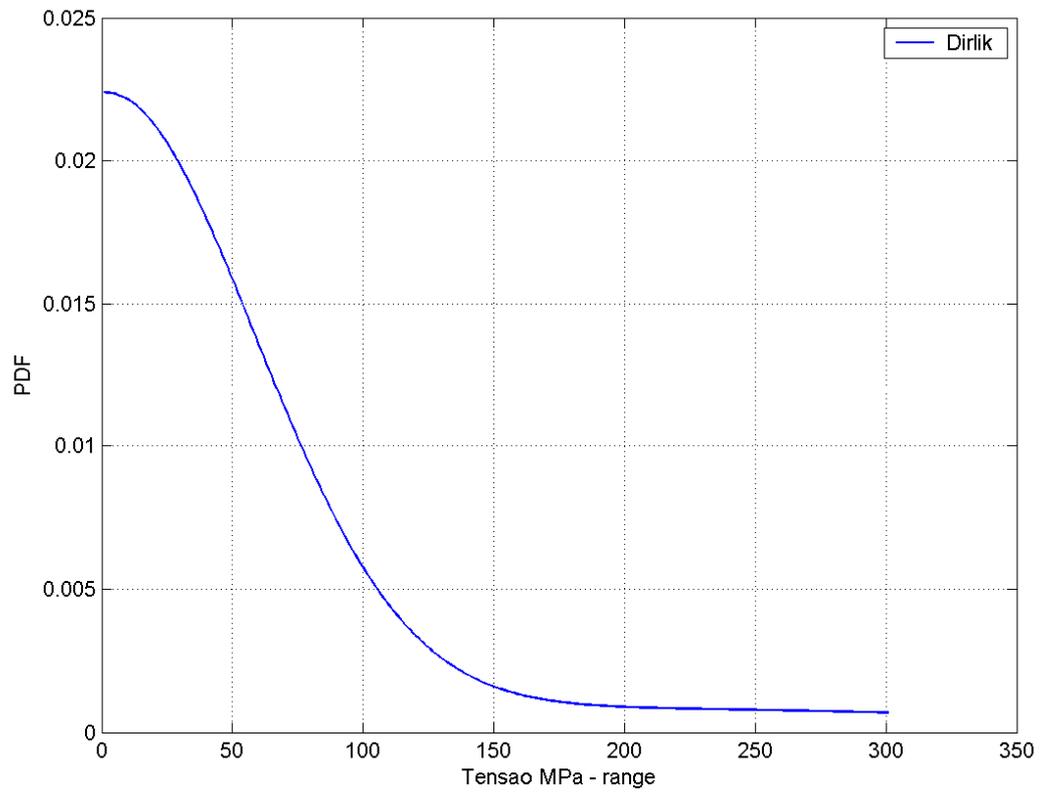
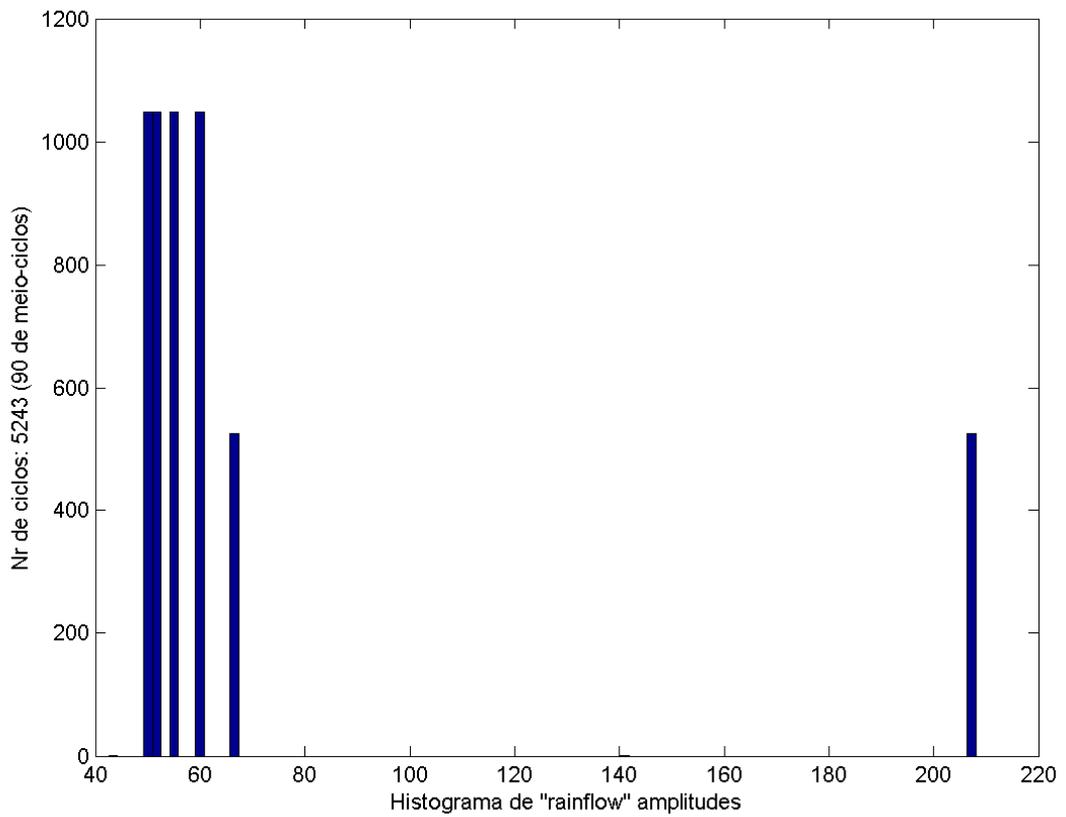
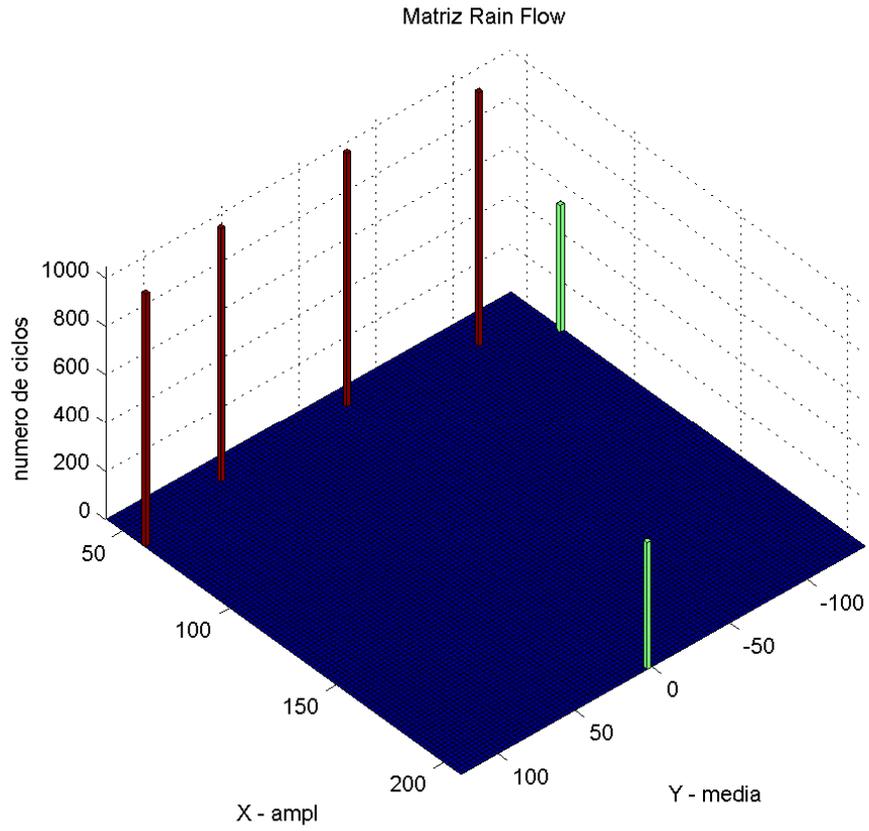


Figura 0-28 – PDF segundo Dirlik



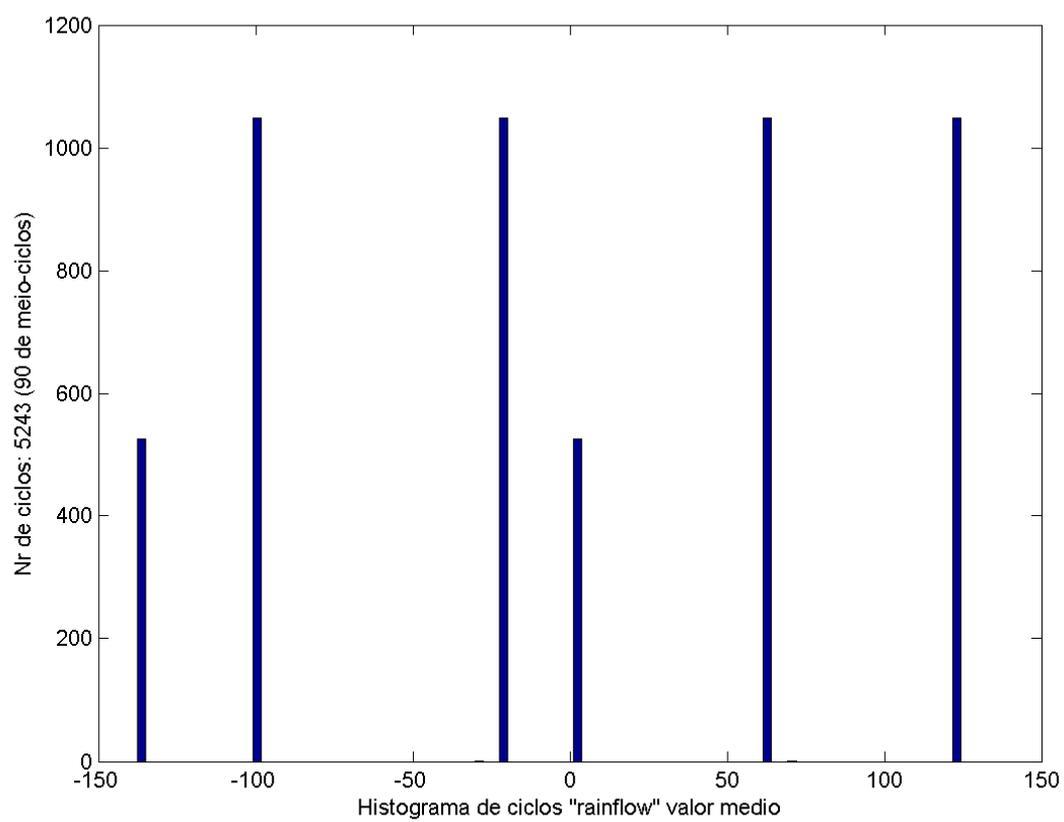
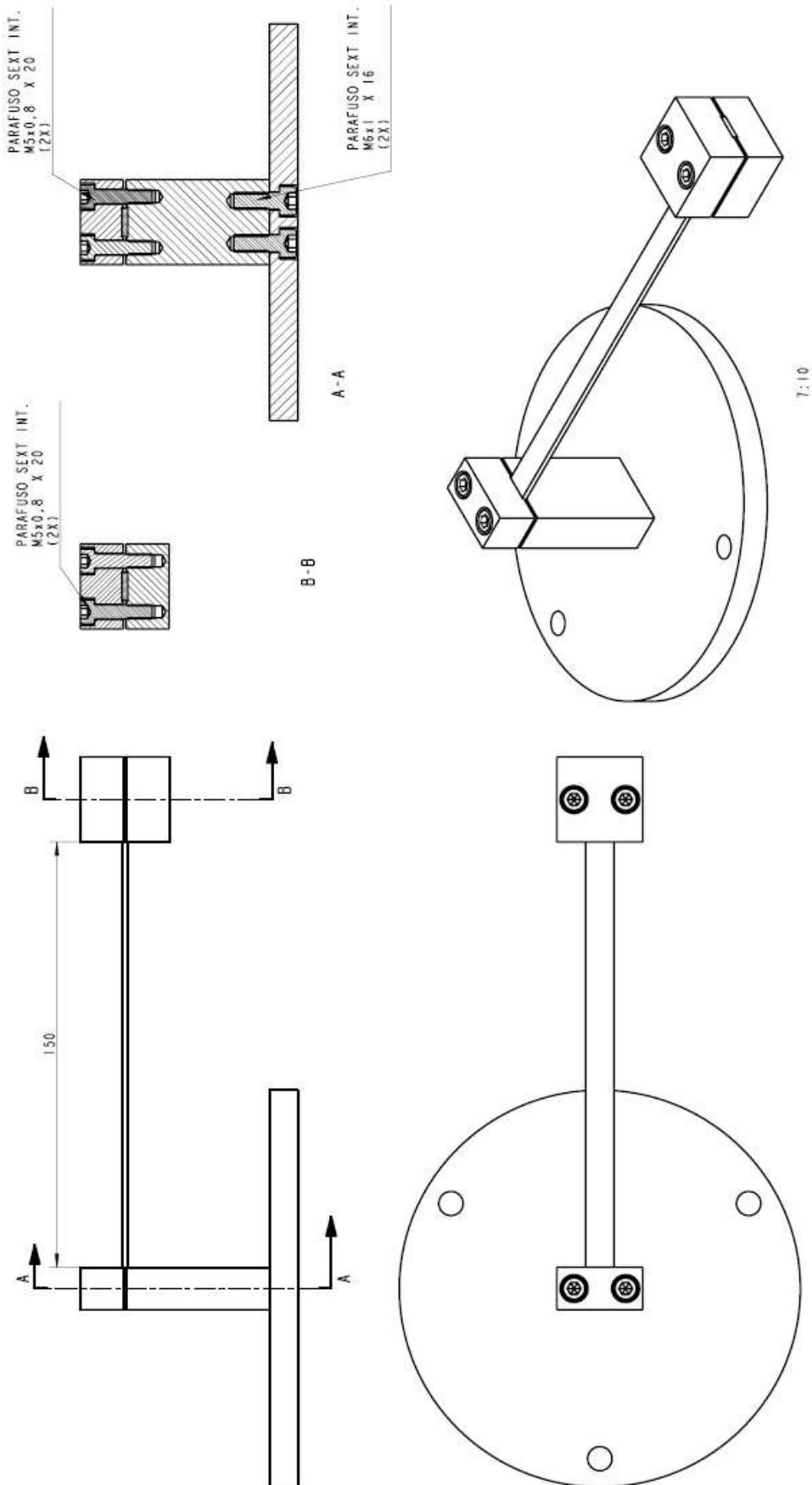


Figura 0-29

Apêndice VII - Desenho dos componentes



Apêndice VIII - Análise dos filtros utilizados e estimativas das PSD

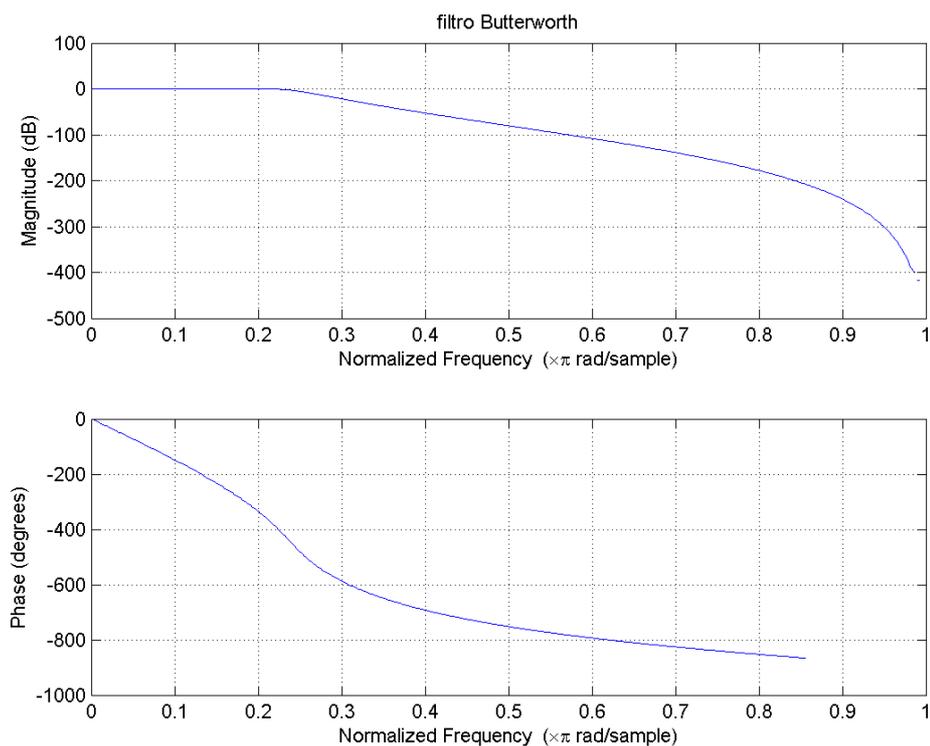


Figura 0-30

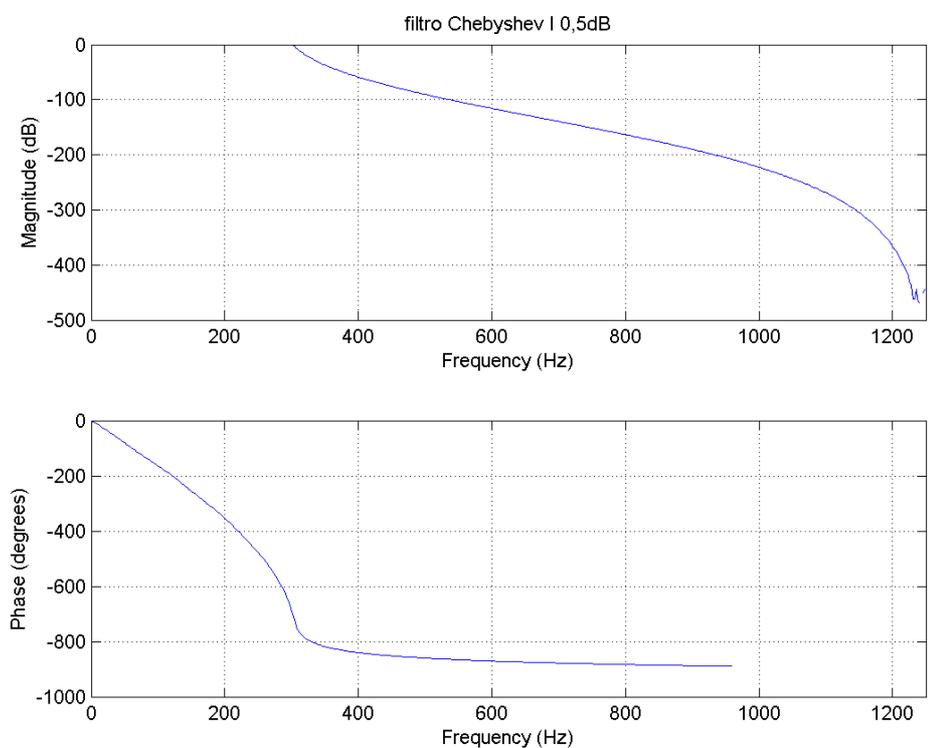


Figura 0-31

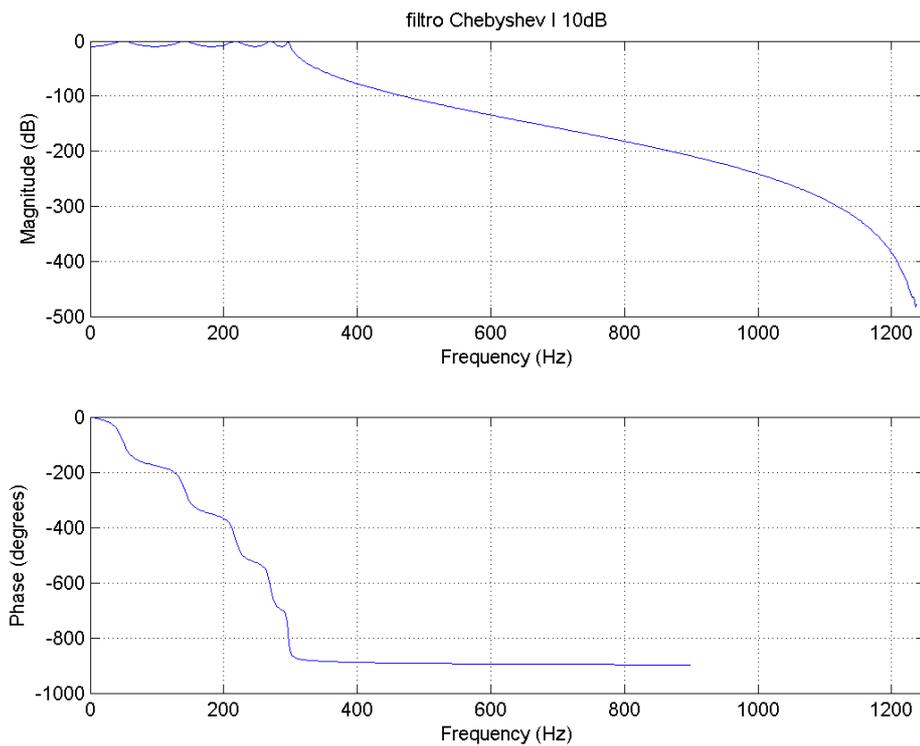


Figura 0-32

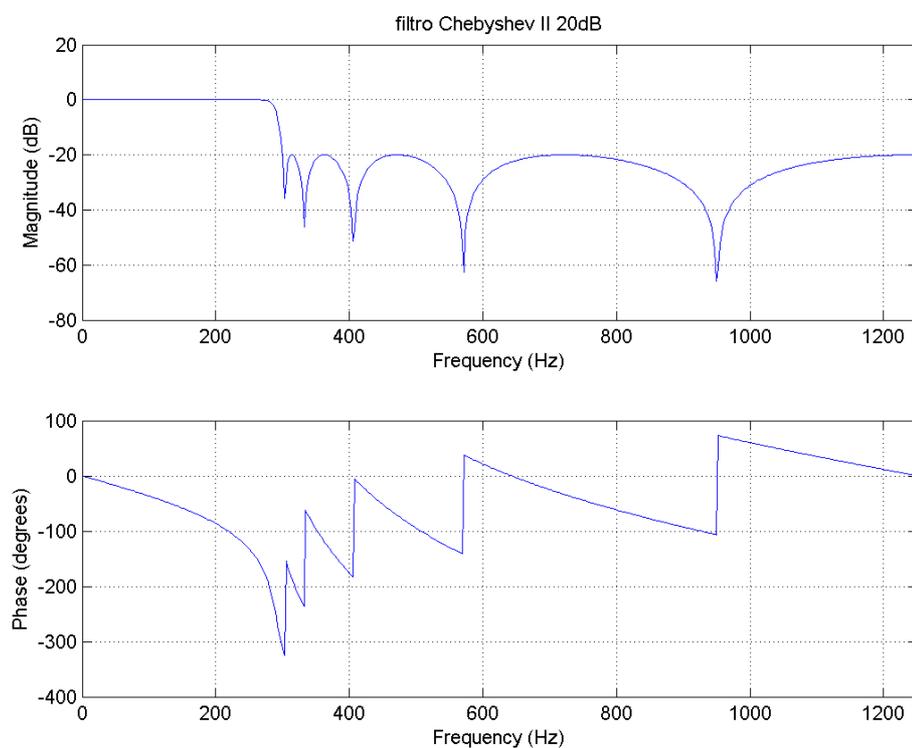


Figura 0-33

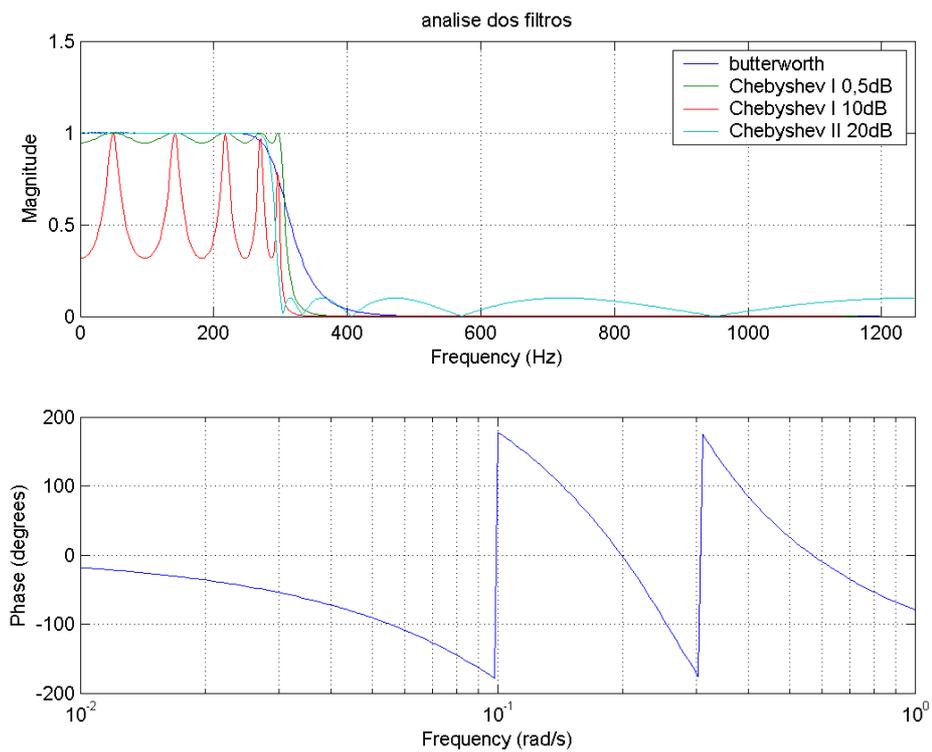


Figura 0-34

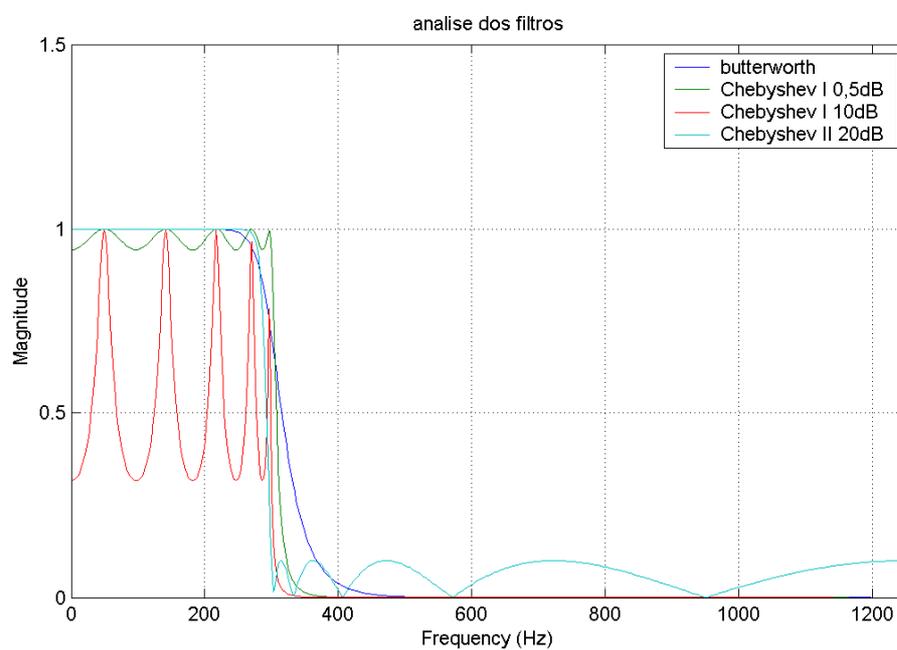


Figura 0-35

- Sinal de 10s de duração, com $dt=2500^{-1}$

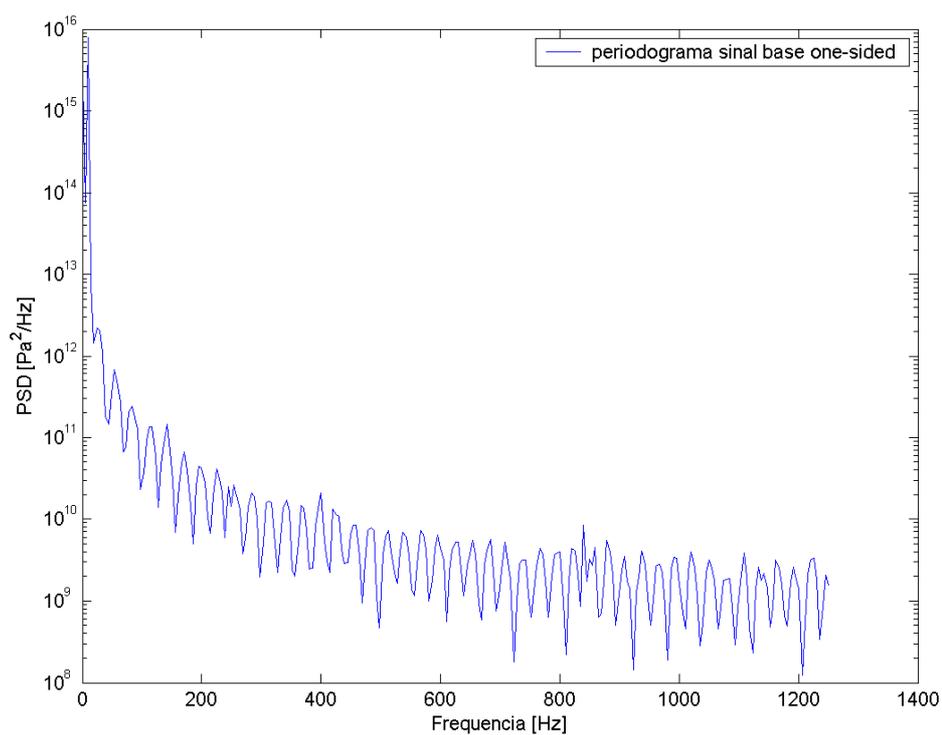


Figura 0-36 – Valor da Potencia média RMS pela aproximação da integral = $5.8966E16$. Valor mínimo = $1.24E8$, valor máximo = $7.807E15$, STD = $5.527E14$

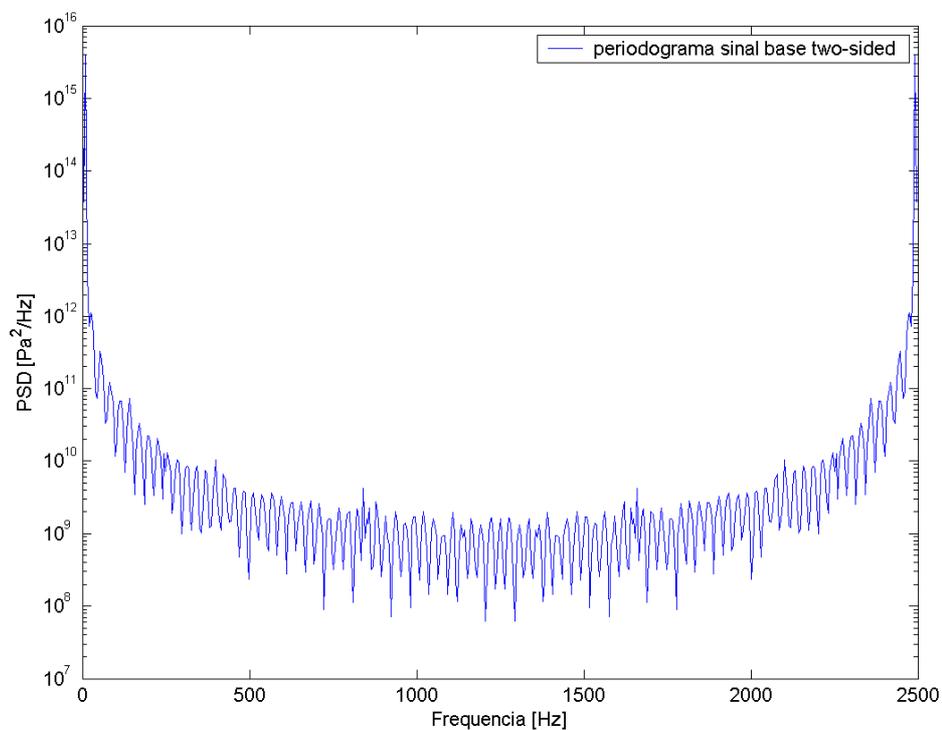


Figura 0-37 – Valor da Potencia média RMS pela aproximação da integral = $5.9196E16$. Valor mínimo = $6.119E7$, valor máximo = $4.221E15$, STD = $3.065E14$

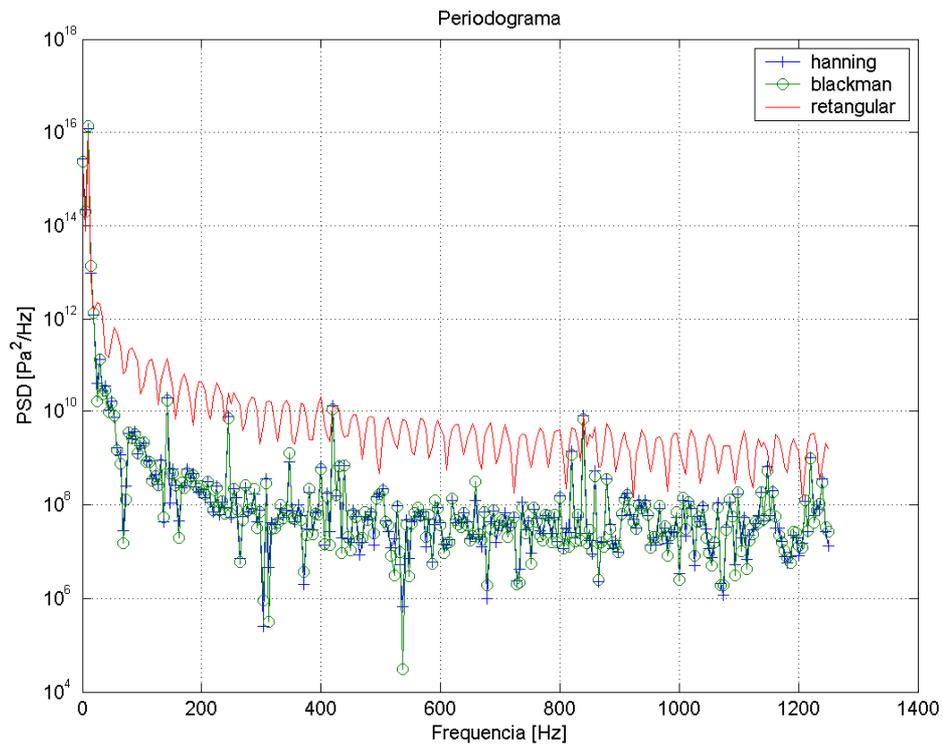


Figura 0-38

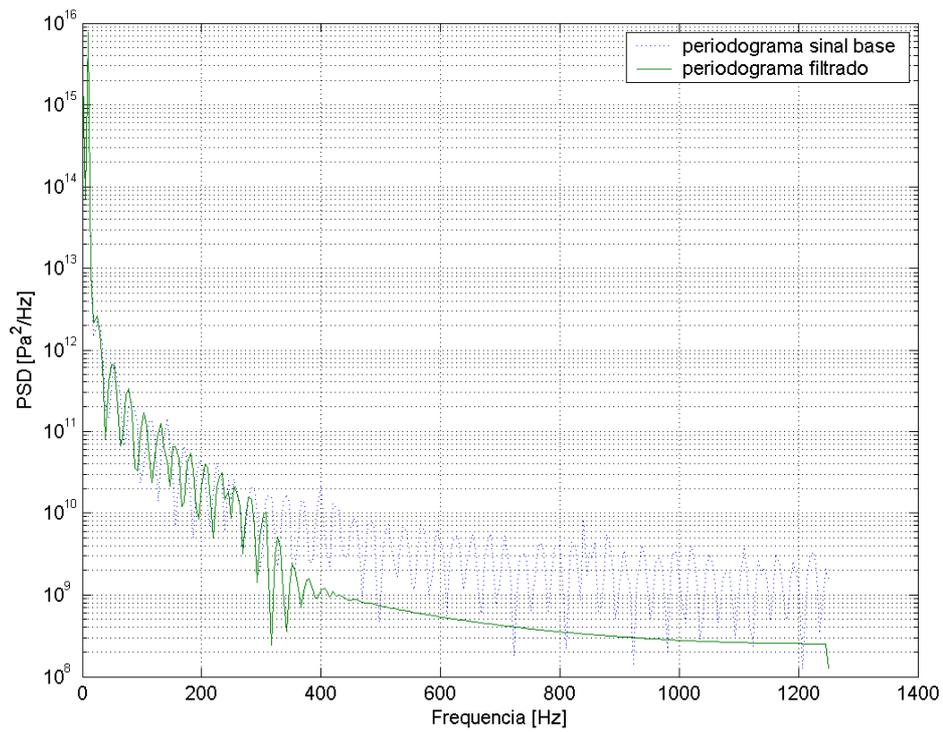


Figura 0-39

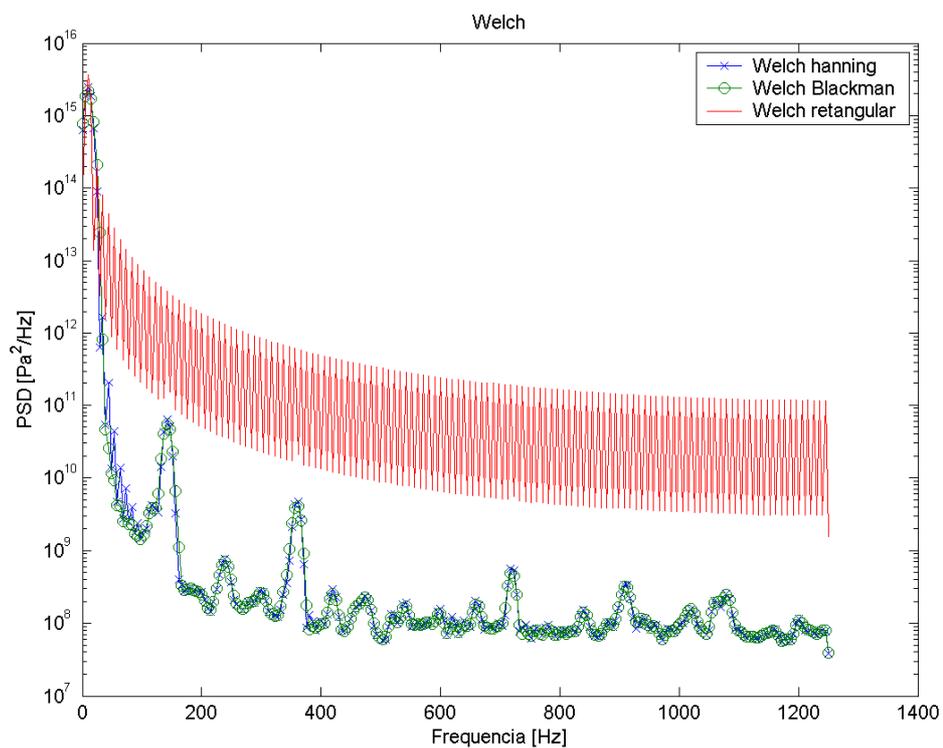


Figura 0-40

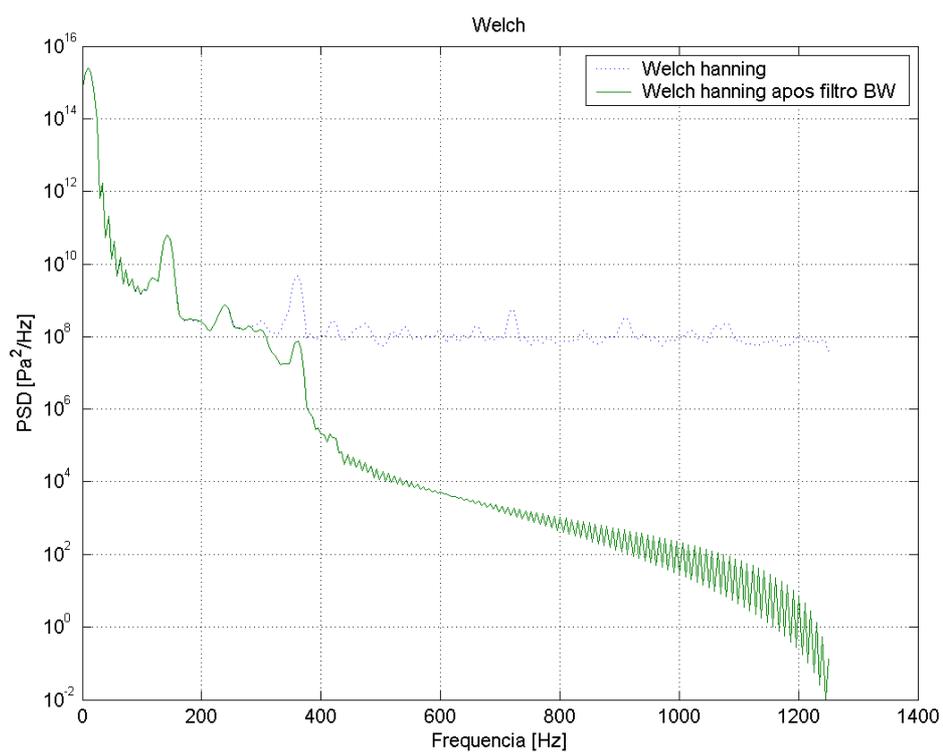


Figura 0-41

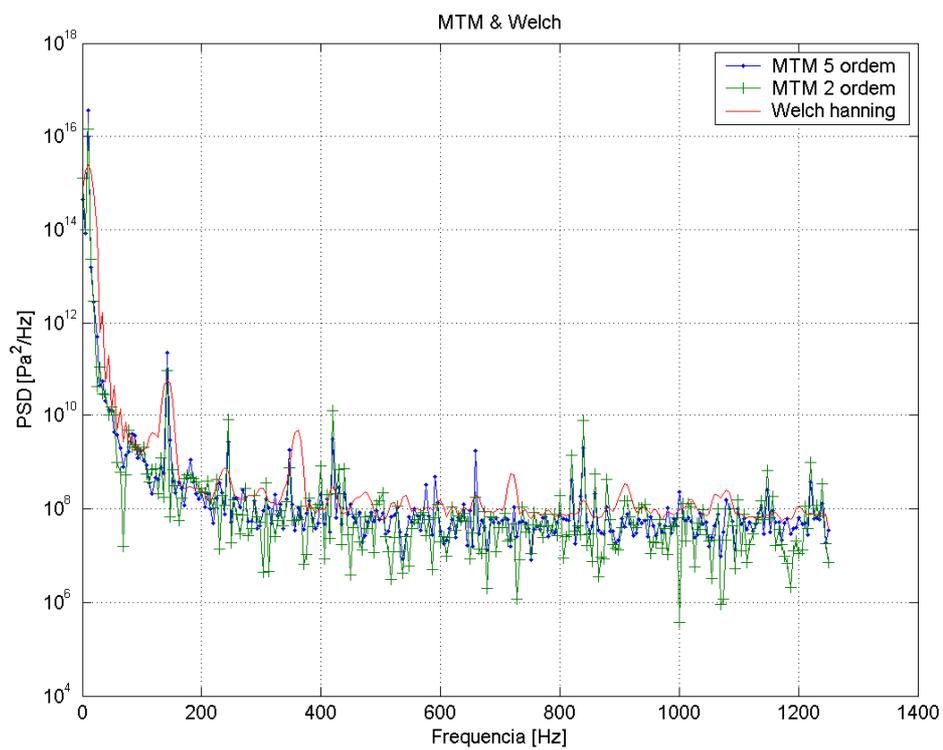


Figura 0-42

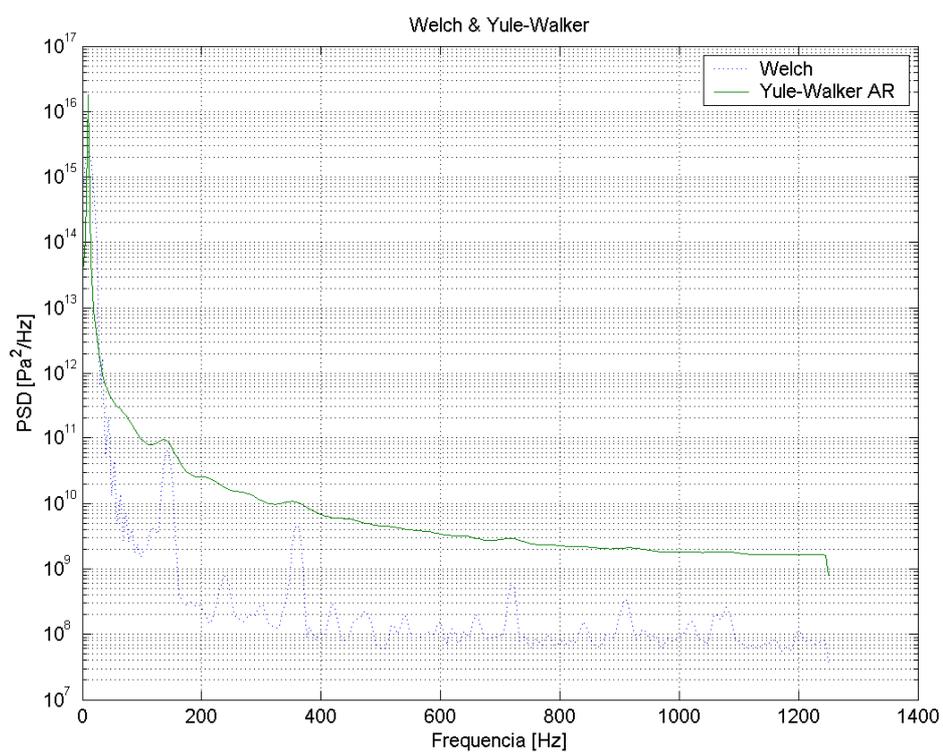


Figura 0-43

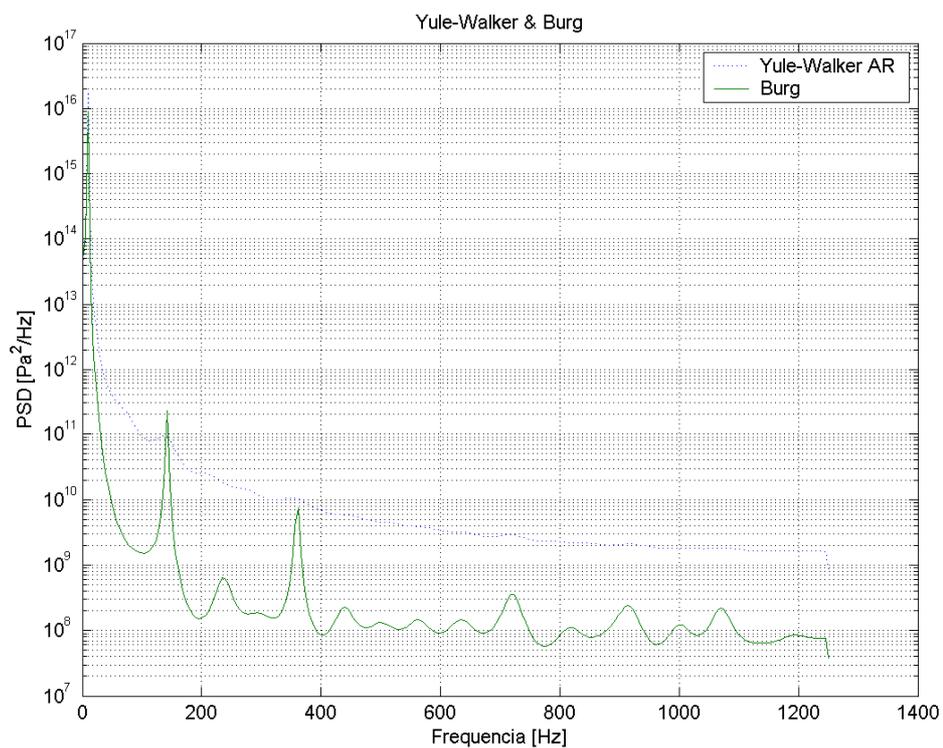


Figura 0-44

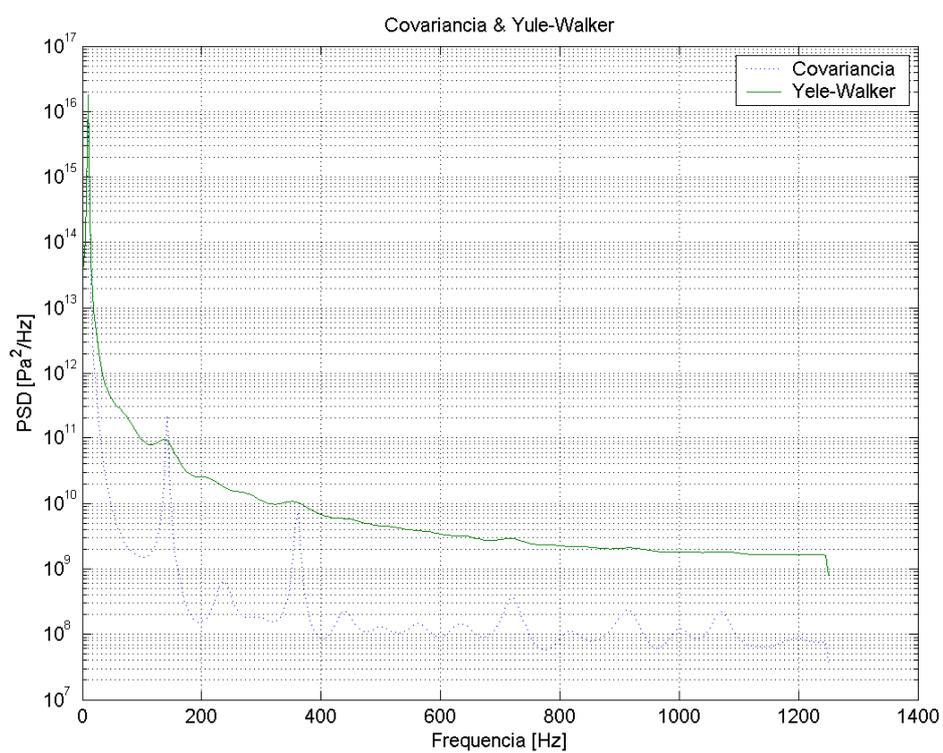


Figura 0-45

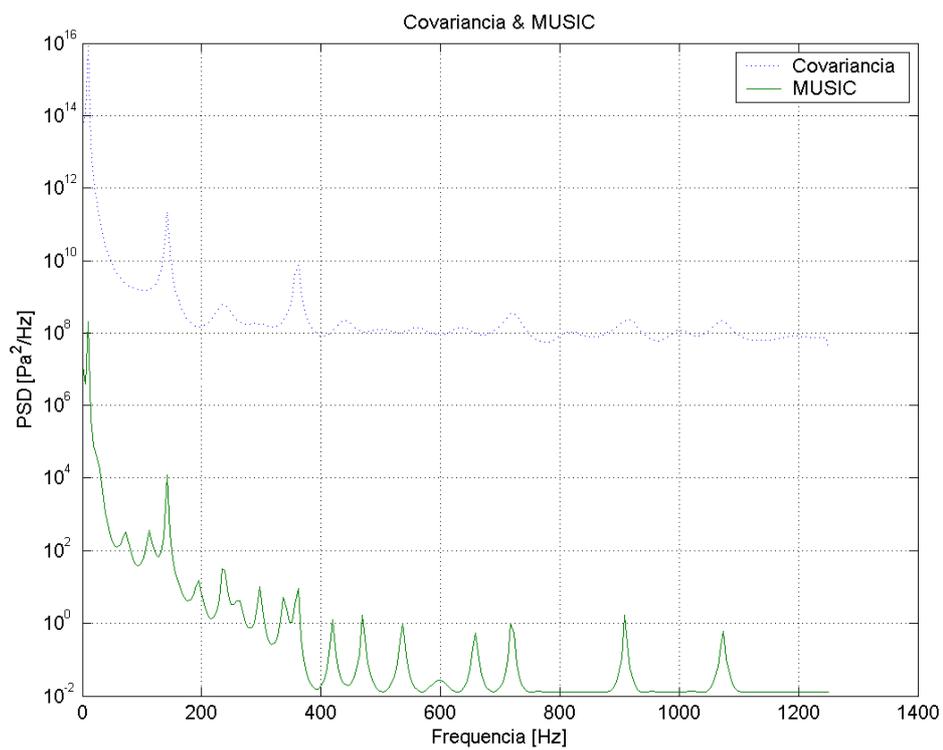


Figura 0-46

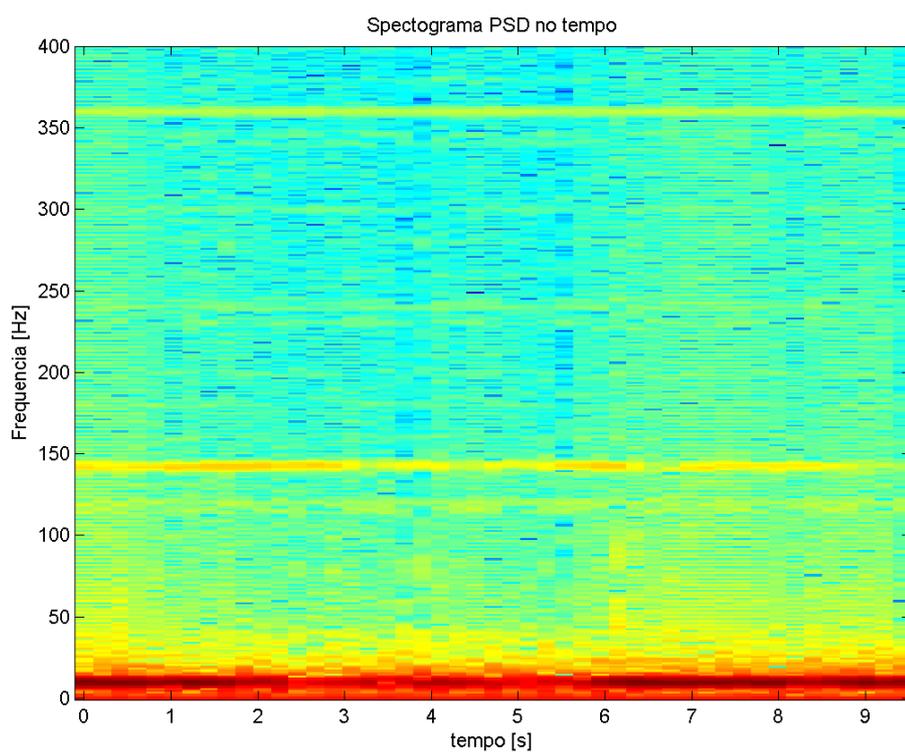


Figura 0-47

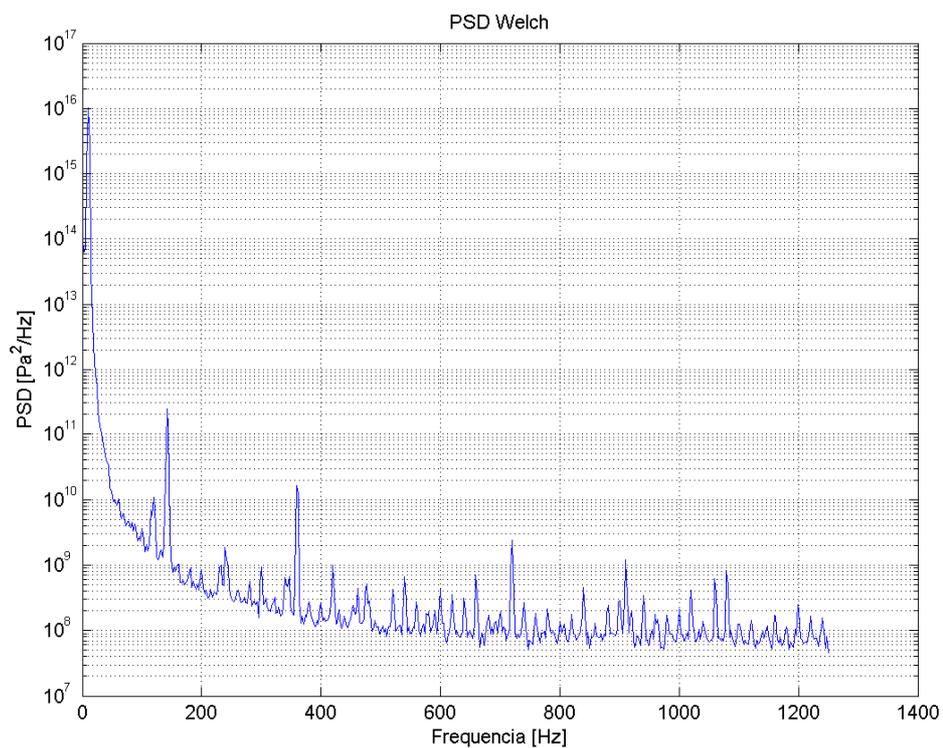


Figura 0-48

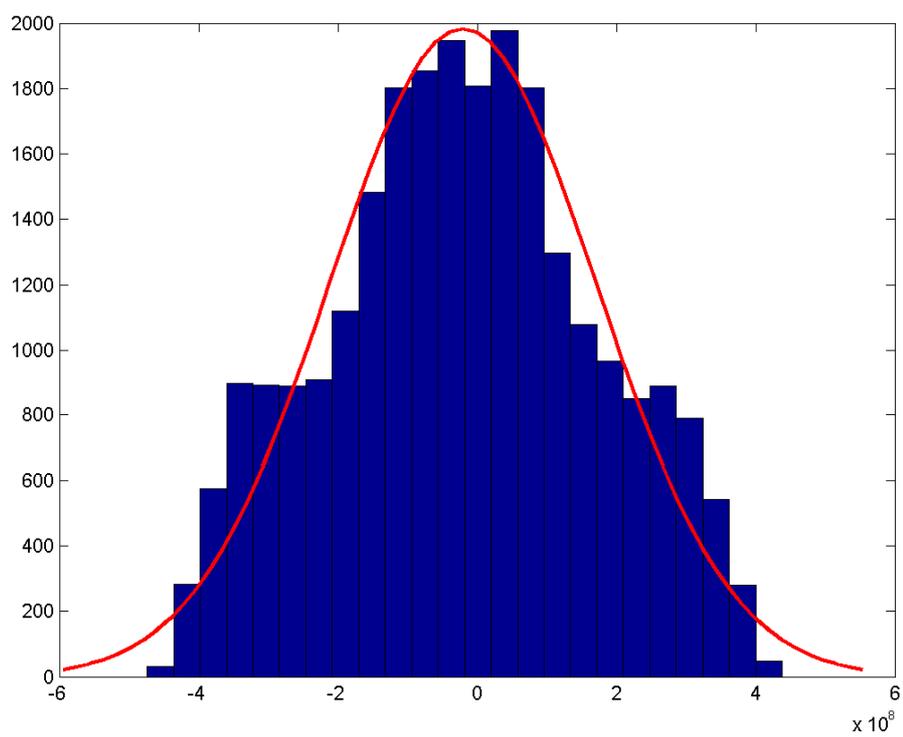


Figura 0-49

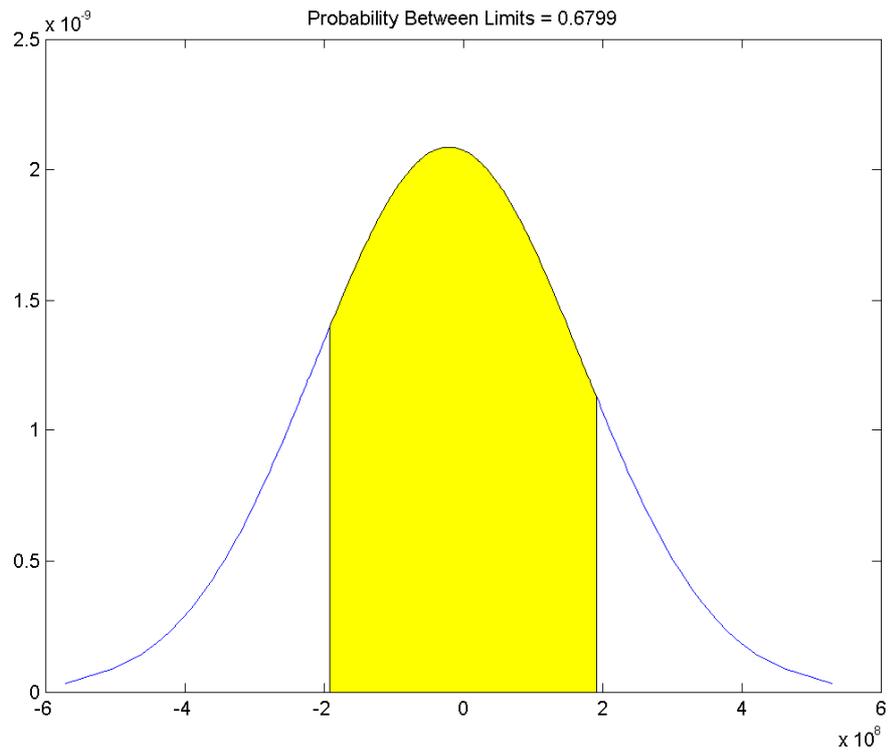


Figura 0-50

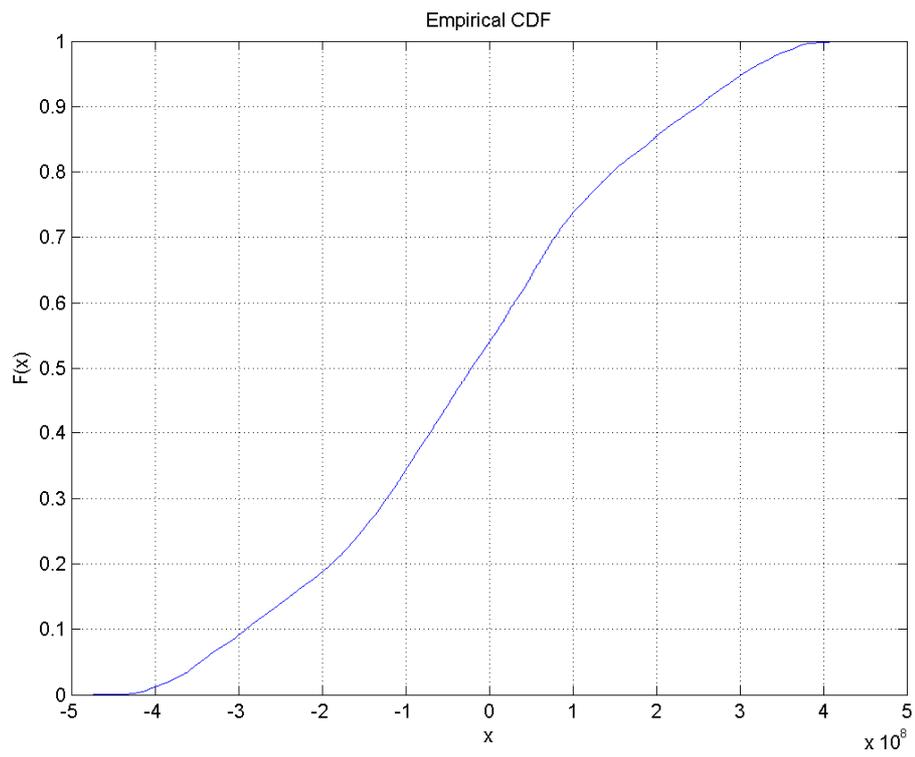


Figura 0-51

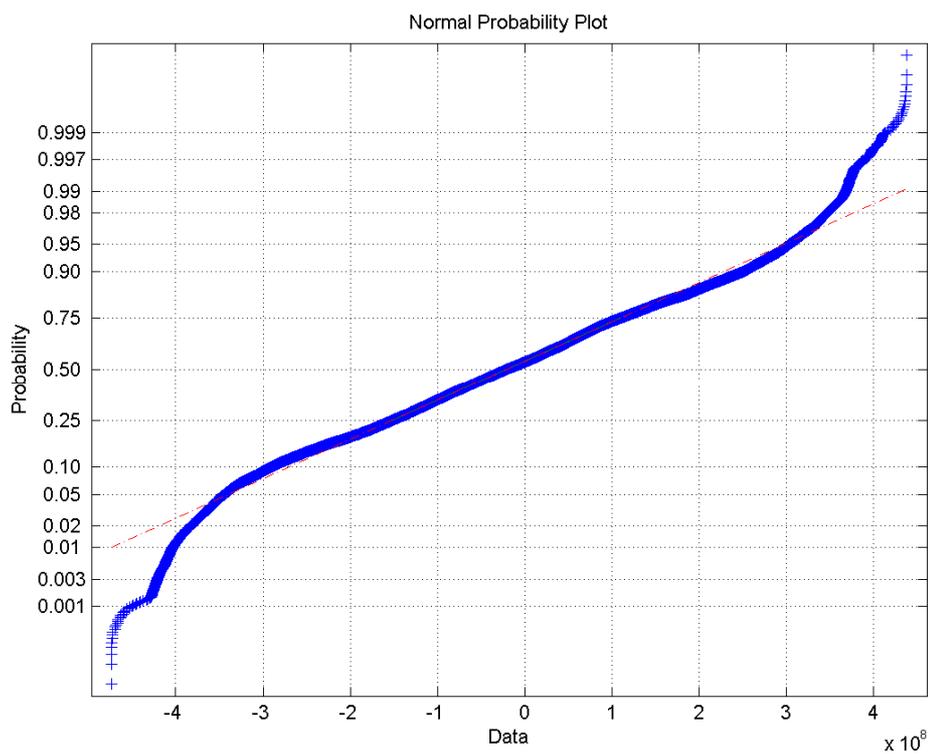


Figura 0-52

- Sinal de 1 minuto de duração, com $dt=2500^{-1}$

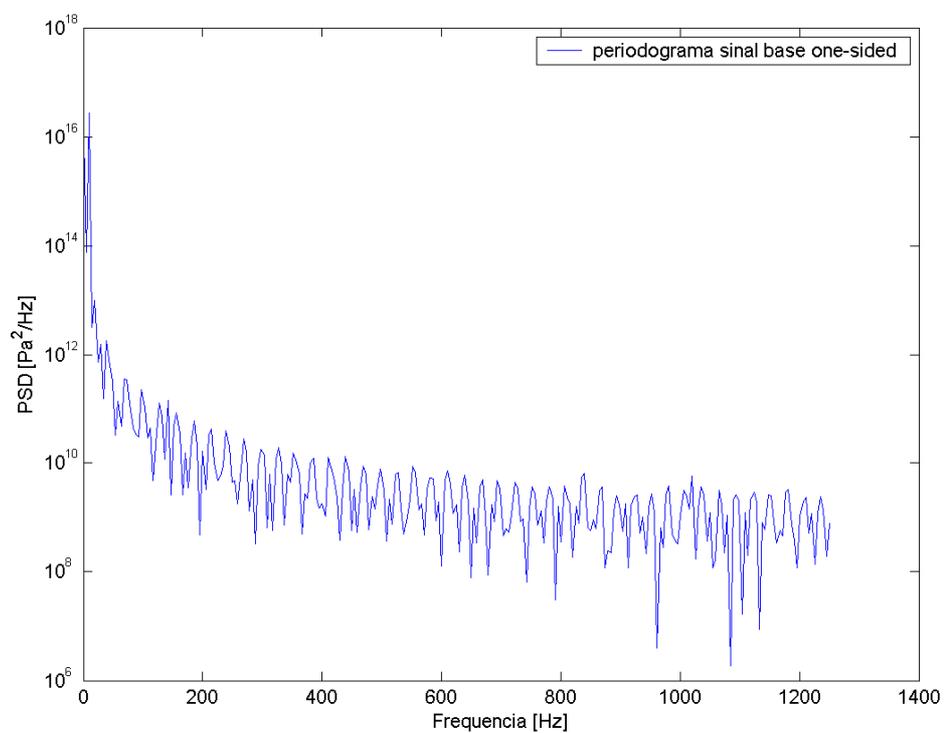


Figura 0-53 – PSD estimado por periodograma one-sided. Tempo de aquisição 1minuto. Valor da Potencia média RMS pela aproximação da integral = $2.392\text{E}17$. Valor mínimo = $1.879\text{E}6$, valor máximo = $2.705\text{E}16$, STD = $2.172\text{E}15$

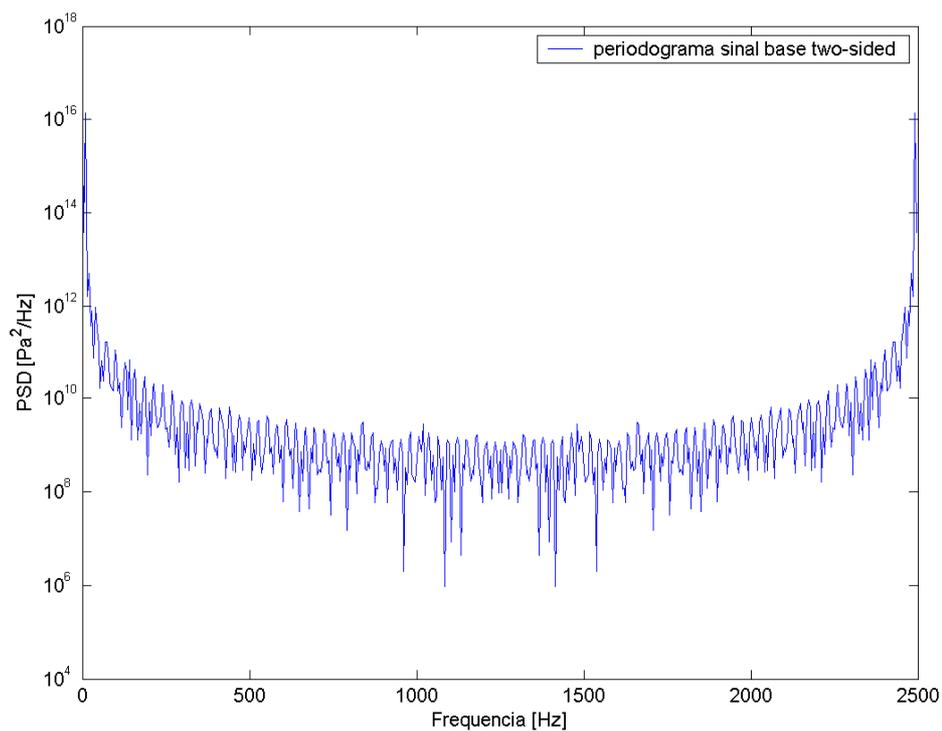


Figura 0-54 – PSD estimado por periodograma two-sided. Tempo de aquisição 1minuto. Valor da Potencia média RMS pela aproximação da integral = 2.401E17. Valor mínimo = 9.395E5, valor máximo = 2.204E16, STD = 1.287E15

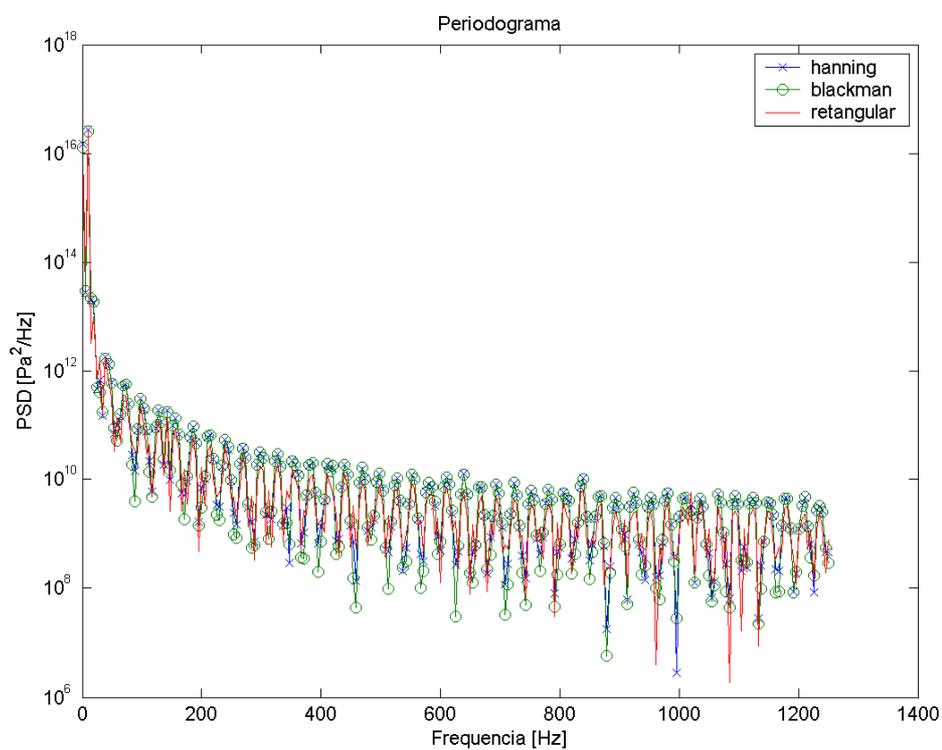


Figura 0-55

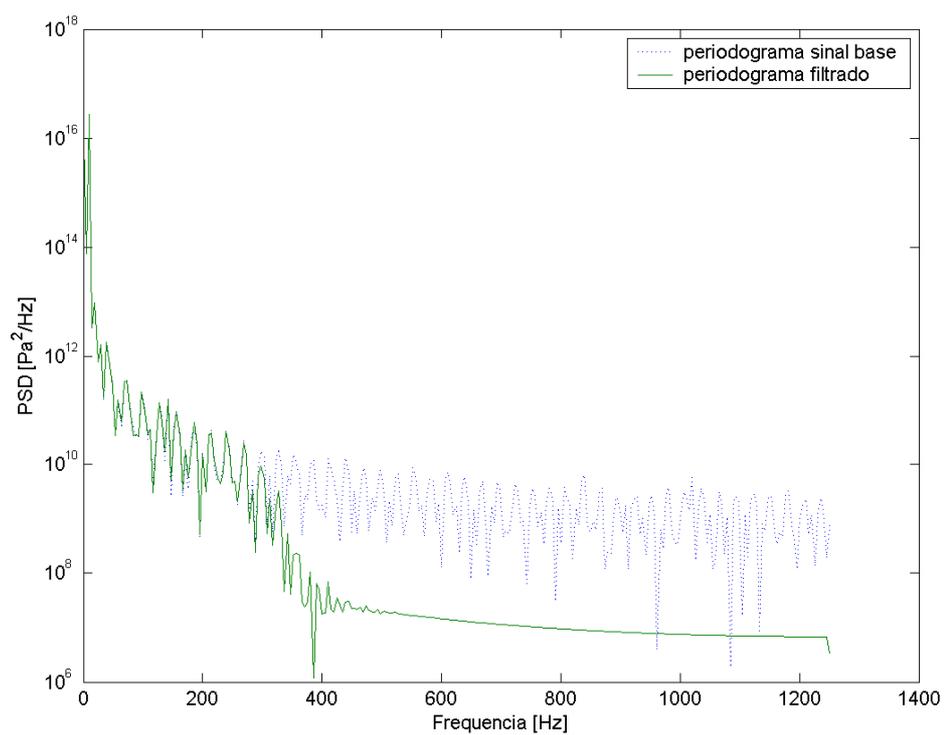


Figura 0-56

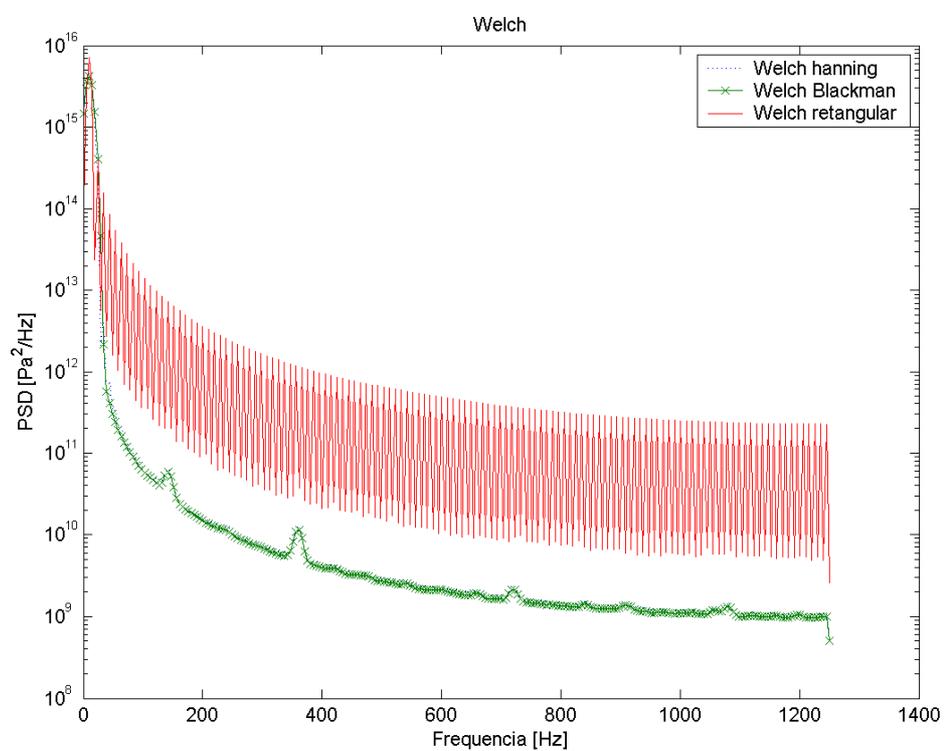


Figura 0-57

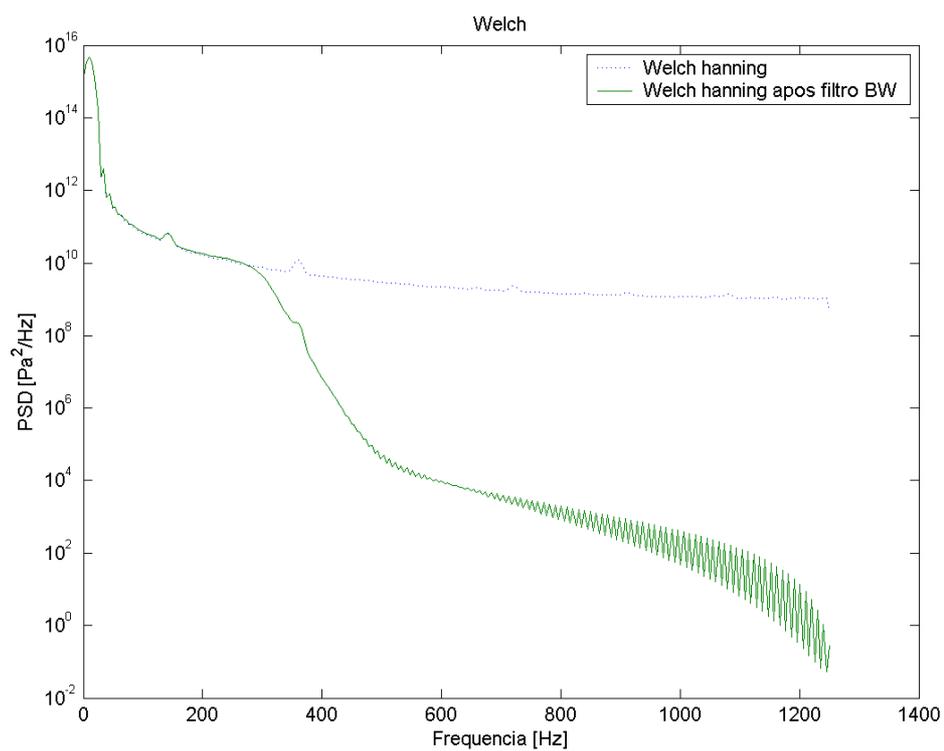


Figura 0-58

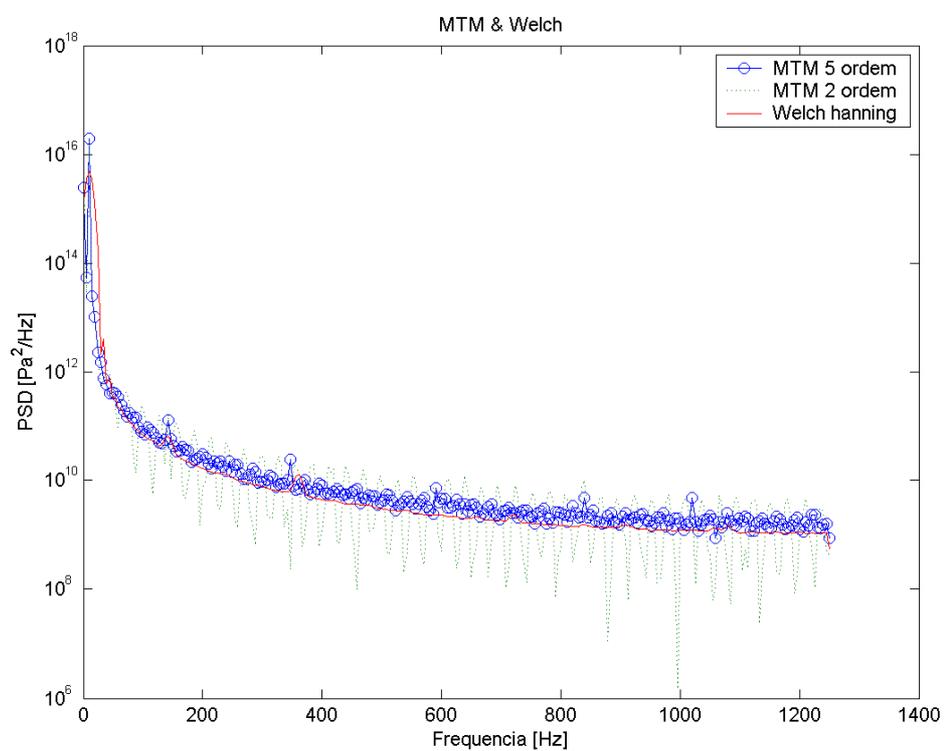


Figura 0-59

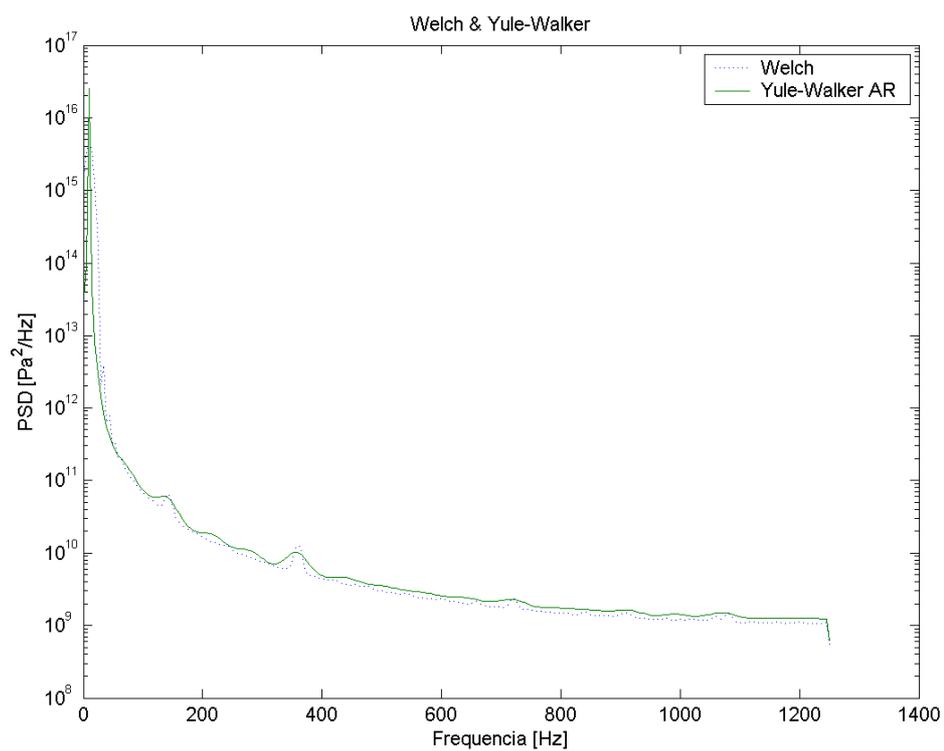


Figura 0-60

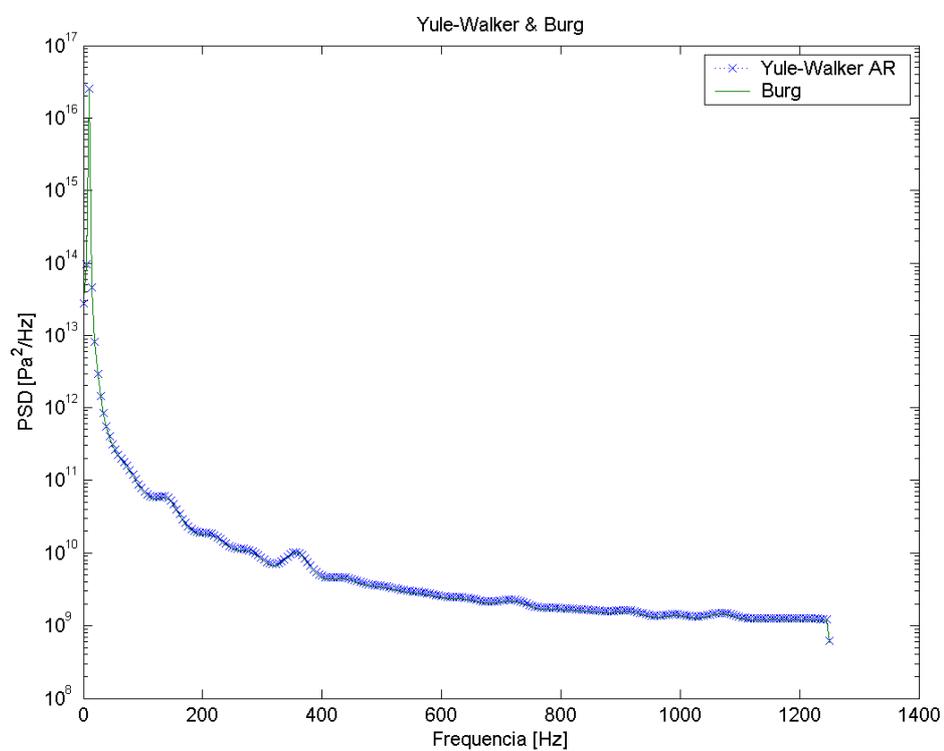


Figura 0-61

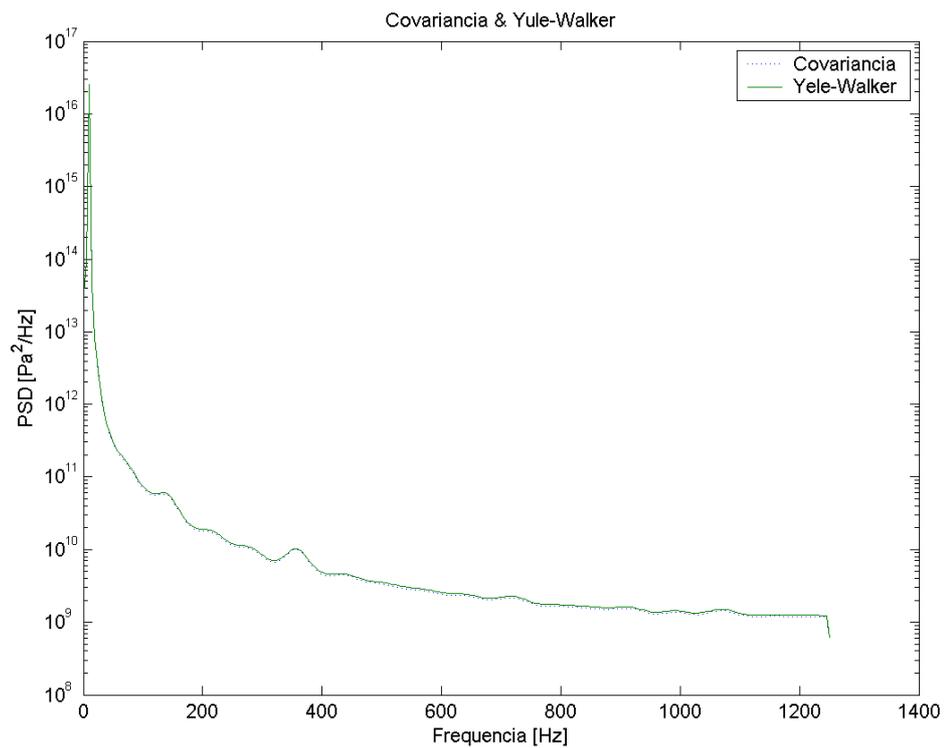


Figura 0-62

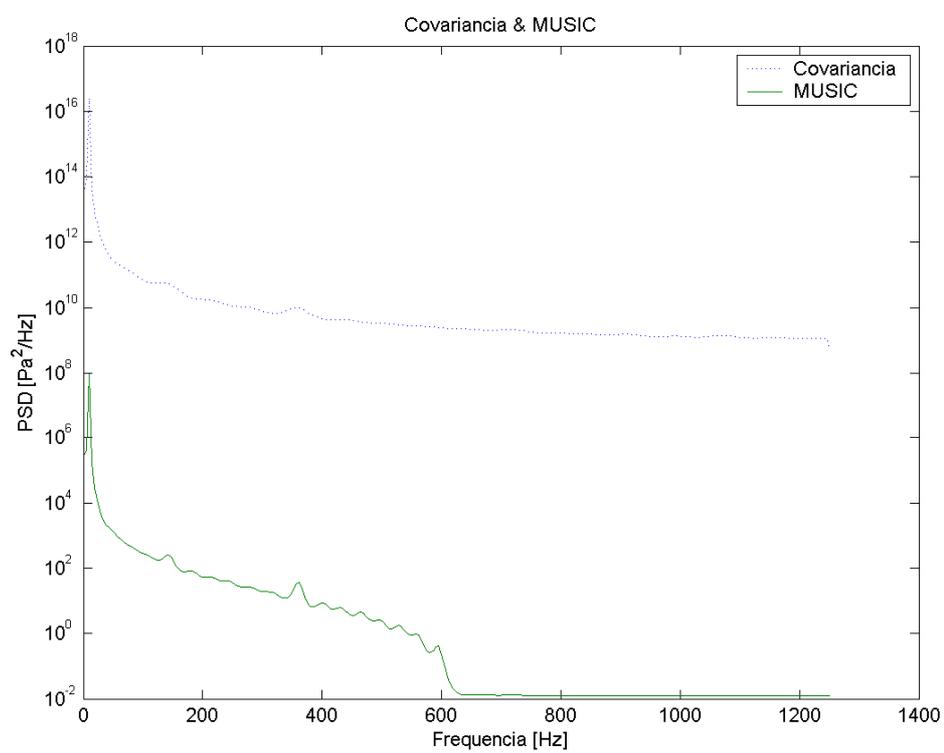


Figura 0-63

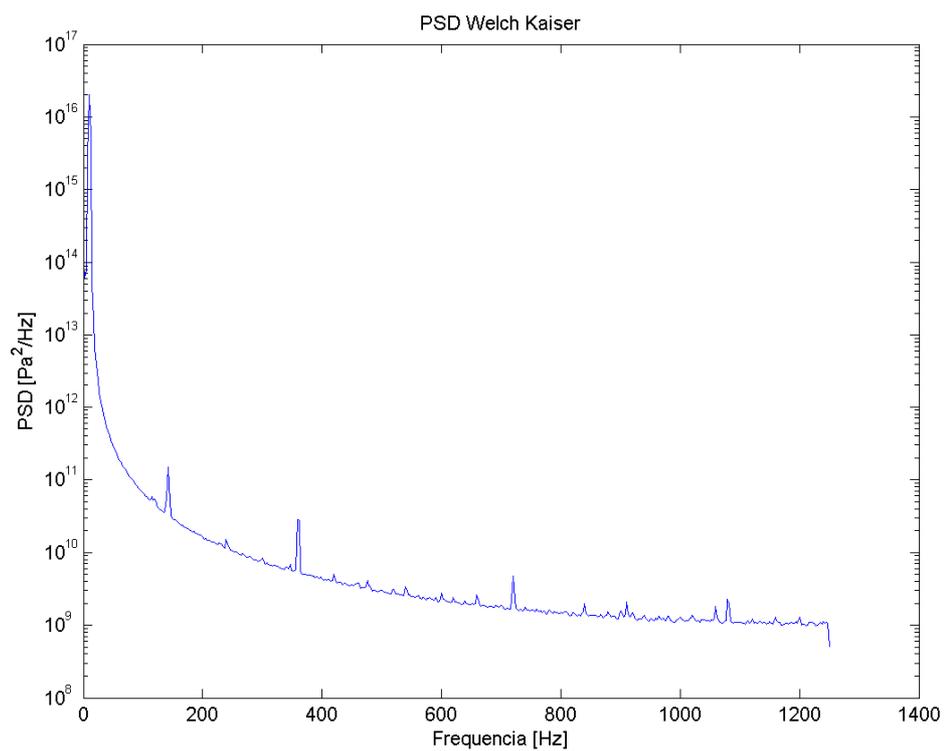


Figura 0-64

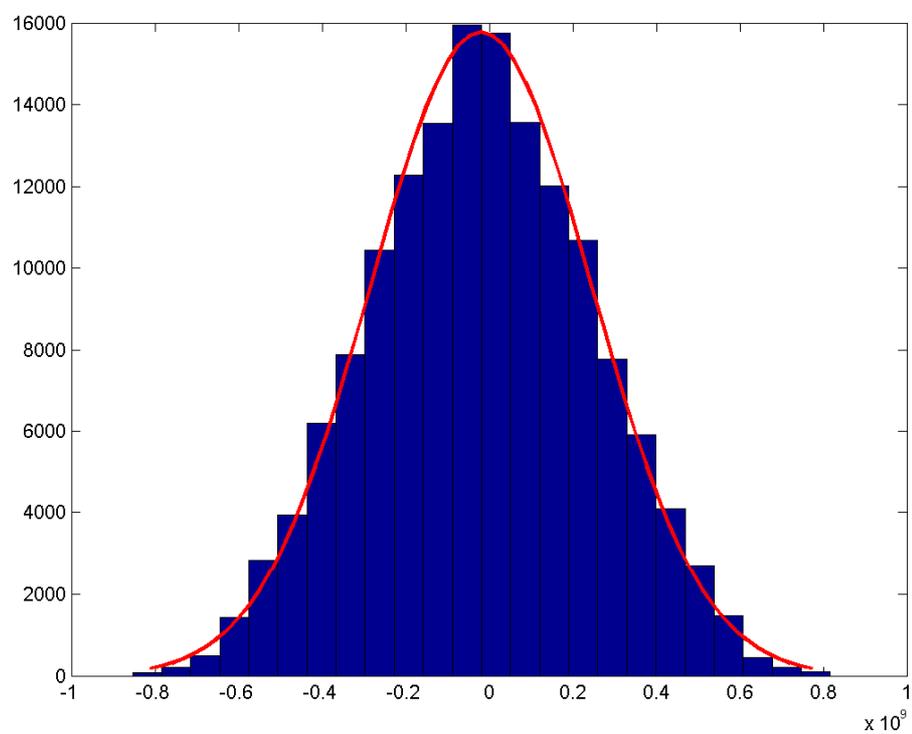


Figura 0-65

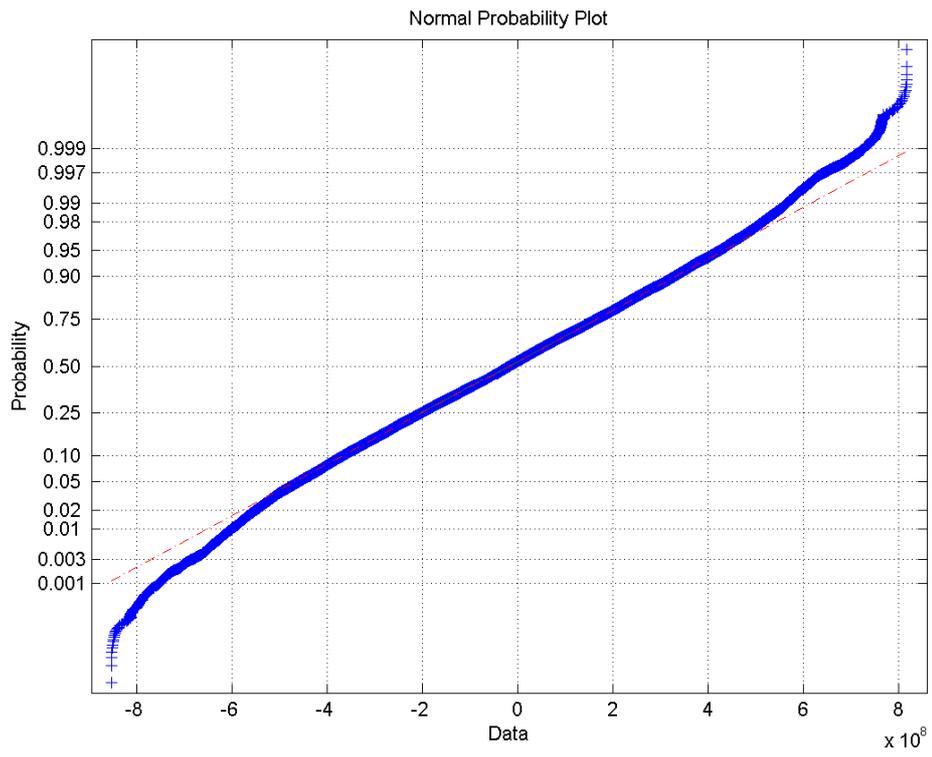


Figura 0-66

Apêndice IX – Dano por Dirlik

| | | | |
|--|----------------|-----|----------|
| | Não causa Dano | C= | 5.90E+36 |
| | Causa Dano | m= | -3.598 |
| | | Sf= | 535 |
| | | Kt= | 1.13 |

Arquivo tempo2500_1min_01 - após filtro

| AMPLITUDE S | Amplitude*Kt | N até a falha | | Dano |
|----------------|--------------|---------------|----------|------|
| 0.00E+00 | 0.00E+00 | 222 | 0 | 0 |
| 9.00E+06 | 1.02E+07 | 4 | 3.62E+11 | 0 |
| 1.80E+07 | 2.03E+07 | 2 | 2.99E+10 | 0 |
| 2.70E+07 | 3.05E+07 | 4 | 6.95E+09 | 0 |
| 3.60E+07 | 4.07E+07 | 1 | 2.47E+09 | 0 |
| 4.50E+07 | 5.09E+07 | 4 | 1.11E+09 | 0 |
| 5.40E+07 | 6.10E+07 | 9 | 5.74E+08 | 0 |
| 6.30E+07 | 7.12E+07 | 4.5 | 3.29E+08 | 0 |
| 7.20E+07 | 8.14E+07 | 5 | 2.04E+08 | 0 |
| 8.10E+07 | 9.15E+07 | 5 | 1.33E+08 | 0 |
| 9.00E+07 | 1.02E+08 | 6 | 9.13E+07 | 0 |
| 9.90E+07 | 1.12E+08 | 6 | 6.48E+07 | 0 |
| 1.08E+08 | 1.22E+08 | 9 | 4.74E+07 | 0 |
| 1.17E+08 | 1.32E+08 | 6 | 3.55E+07 | 0 |
| 1.26E+08 | 1.42E+08 | 5 | 2.72E+07 | 0 |
| 1.35E+08 | 1.53E+08 | 7.5 | 2.12E+07 | 0 |
| 1.44E+08 | 1.63E+08 | 5 | 1.68E+07 | 0 |
| 1.53E+08 | 1.73E+08 | 11 | 1.35E+07 | 0 |
| 1.62E+08 | 1.83E+08 | 6 | 1.10E+07 | 0 |
| 1.71E+08 | 1.93E+08 | 4 | 9.07E+06 | 0 |
| 1.80E+08 | 2.03E+08 | 13 | 7.54E+06 | 0 |
| 1.89E+08 | 2.14E+08 | 10 | 6.33E+06 | 0 |
| 1.98E+08 | 2.24E+08 | 10 | 5.35E+06 | 0 |
| 2.07E+08 | 2.34E+08 | 8 | 4.56E+06 | 0 |
| 2.16E+08 | 2.44E+08 | 8 | 3.91E+06 | 0 |
| 2.25E+08 | 2.54E+08 | 9 | 3.38E+06 | 0 |
| 2.34E+08 | 2.64E+08 | 7.5 | 2.93E+06 | 0 |
| 2.43E+08 | 2.75E+08 | 11 | 2.56E+06 | 0 |
| 2.52E+08 | 2.85E+08 | 12 | 2.25E+06 | 0 |
| | | 11. | | |
| 2.61E+08 | 2.95E+08 | 5 | 1.98E+06 | 0 |
| 2.70E+08 | 3.05E+08 | 13 | 1.75E+06 | 0 |
| 2.79E+08 | 3.15E+08 | 17 | 1.56E+06 | 0 |
| | | 13. | | |
| 2.88E+08 | 3.25E+08 | 5 | 1.39E+06 | 0 |
| 2.97E+08 | 3.36E+08 | 12 | 1.24E+06 | 0 |
| 3.06E+08 | 3.46E+08 | 9.5 | 1.12E+06 | 0 |
| 3.15E+08 | 3.56E+08 | 9 | 1.01E+06 | 0 |
| 3.24E+08 | 3.66E+08 | 9.5 | 9.10E+05 | 0 |
| 3.33E+08 | 3.76E+08 | 9 | 8.24E+05 | 0 |
| 3.42E+08 | 3.86E+08 | 9.5 | 7.49E+05 | 0 |
| 3.51E+08 | 3.97E+08 | 9.5 | 6.82E+05 | 0 |
| 3.60E+08 | 4.07E+08 | 9 | 6.23E+05 | 0 |
| 3.69E+08 | 4.17E+08 | 9.5 | 5.70E+05 | 0 |
| | | 11. | | |
| 3.78E+08 | 4.27E+08 | 5 | 5.22E+05 | 0 |
| 3.87E+08 | 4.37E+08 | 14. | 4.80E+05 | 0 |

| | | | | | |
|----------|----------|-----|----------|----------|--|
| | | 5 | | | |
| 3.96E+08 | 4.47E+08 | 9.5 | 4.42E+05 | 0 | |
| 4.05E+08 | 4.58E+08 | 8 | 4.08E+05 | 0 | |
| | | 17. | | | |
| 4.14E+08 | 4.68E+08 | 5 | 3.77E+05 | 0 | |
| | | 12. | | | |
| 4.23E+08 | 4.78E+08 | 5 | 3.49E+05 | 0 | |
| 4.32E+08 | 4.88E+08 | 10 | 3.23E+05 | 0 | |
| 4.41E+08 | 4.98E+08 | 6 | 3.00E+05 | 0 | |
| 4.50E+08 | 5.09E+08 | 6 | 2.79E+05 | 0 | |
| 4.59E+08 | 5.19E+08 | 7 | 2.60E+05 | 0 | |
| 4.68E+08 | 5.29E+08 | 9.5 | 2.42E+05 | 0 | |
| 4.77E+08 | 5.39E+08 | 9 | 2.26E+05 | 3.98E-05 | |
| 4.86E+08 | 5.49E+08 | 6 | 2.12E+05 | 2.84E-05 | |
| 4.95E+08 | 5.59E+08 | 10 | 1.98E+05 | 5.05E-05 | |
| 5.04E+08 | 5.70E+08 | 6.5 | 1.86E+05 | 3.50E-05 | |
| 5.13E+08 | 5.80E+08 | 7 | 1.74E+05 | 4.02E-05 | |
| 5.22E+08 | 5.90E+08 | 3.5 | 1.64E+05 | 2.14E-05 | |
| 5.31E+08 | 6.00E+08 | 6 | 1.54E+05 | 3.90E-05 | |
| 5.40E+08 | 6.10E+08 | 9 | 1.45E+05 | 6.22E-05 | |
| | | 13. | | | |
| 5.49E+08 | 6.20E+08 | 5 | 1.36E+05 | 9.90E-05 | |
| 5.58E+08 | 6.31E+08 | 1.5 | 1.29E+05 | 1.17E-05 | |
| 5.67E+08 | 6.41E+08 | 8.5 | 1.21E+05 | 7.00E-05 | |
| 5.76E+08 | 6.51E+08 | 6.5 | 1.15E+05 | 5.66E-05 | |
| 5.85E+08 | 6.61E+08 | 4.5 | 1.09E+05 | 4.15E-05 | |
| 5.94E+08 | 6.71E+08 | 4 | 1.03E+05 | 3.89E-05 | |
| 6.03E+08 | 6.81E+08 | 6 | 9.73E+04 | 6.16E-05 | |
| 6.12E+08 | 6.92E+08 | 8 | 9.23E+04 | 8.67E-05 | |
| 6.21E+08 | 7.02E+08 | 3 | 8.76E+04 | 3.43E-05 | |
| 6.30E+08 | 7.12E+08 | 7.5 | 8.31E+04 | 9.02E-05 | |
| 6.39E+08 | 7.22E+08 | 5 | 7.90E+04 | 6.33E-05 | |
| 6.48E+08 | 7.32E+08 | 4.5 | 7.51E+04 | 5.99E-05 | |
| 6.57E+08 | 7.42E+08 | 2 | 7.15E+04 | 2.80E-05 | |
| 6.66E+08 | 7.53E+08 | 5.5 | 6.81E+04 | 8.08E-05 | |
| 6.75E+08 | 7.63E+08 | 0 | 6.49E+04 | 0.00E+00 | |
| 6.84E+08 | 7.73E+08 | 4.5 | 6.19E+04 | 7.28E-05 | |
| 6.93E+08 | 7.83E+08 | 2 | 5.90E+04 | 3.39E-05 | |
| 7.02E+08 | 7.93E+08 | 4 | 5.63E+04 | 7.10E-05 | |
| 7.11E+08 | 8.03E+08 | 0.5 | 5.38E+04 | 9.29E-06 | |
| 7.20E+08 | 8.14E+08 | 0 | 5.14E+04 | 0.00E+00 | |
| 7.29E+08 | 8.24E+08 | 1 | 4.92E+04 | 2.03E-05 | |
| 7.38E+08 | 8.34E+08 | 1 | 4.71E+04 | 2.13E-05 | |
| 7.47E+08 | 8.44E+08 | 1 | 4.50E+04 | 2.22E-05 | |
| 7.56E+08 | 8.54E+08 | 0.5 | 4.31E+04 | 1.16E-05 | |
| 7.65E+08 | 8.64E+08 | 0 | 4.13E+04 | 0.00E+00 | |
| 7.74E+08 | 8.75E+08 | 1.5 | 3.96E+04 | 3.78E-05 | |
| 7.83E+08 | 8.85E+08 | 0 | 3.80E+04 | 0.00E+00 | |
| 7.92E+08 | 8.95E+08 | 0 | 3.65E+04 | 0.00E+00 | |
| 8.01E+08 | 9.05E+08 | 1 | 3.50E+04 | 2.85E-05 | |
| 8.10E+08 | 9.15E+08 | 2 | 3.37E+04 | 5.94E-05 | |
| 8.19E+08 | 9.25E+08 | 0 | 3.24E+04 | 0.00E+00 | |
| 8.28E+08 | 9.36E+08 | 0 | 3.11E+04 | 0.00E+00 | |
| 8.37E+08 | 9.46E+08 | 2.5 | 2.99E+04 | 8.36E-05 | |
| 8.46E+08 | 9.56E+08 | 0 | 2.88E+04 | 0.00E+00 | |
| 8.55E+08 | 9.66E+08 | 0 | 2.77E+04 | 0.00E+00 | |
| 8.64E+08 | 9.76E+08 | 0 | 2.67E+04 | 0.00E+00 | |

| | | | | |
|----------|----------|-----|----------|----------|
| 8.73E+08 | 9.86E+08 | 1 | 2.57E+04 | 3.89E-05 |
| 8.82E+08 | 9.97E+08 | 0 | 2.48E+04 | 0.00E+00 |
| 8.91E+08 | 1.01E+09 | 0.5 | 2.39E+04 | 2.09E-05 |

Dano Total **1.67E-03**

Dano até a falha **1**

Número de Blocos até a falha **5.99E+02**

Tempo do Bloco de Amostragem em segundos 60

Tempo de Vida em segundos 35922.50

Em horas **9.97847103**
1

Apêndice X - Telas do Software Virtual Lab

LMS Test.Lab Random Vibration Control - Viga2 - Section1

File Edit View Data Tools Window Help

Channel Setup Channel Setup Use Database Bridge Settings Use Geometry Print Screen

Status: Verification Ok

| PhysicalChannelID | On/Off | ChannelGroupID | Point | Direction | InputMode | Measured Quantity | Electrical Unit | Actual Sensitivity | Actual Sensitivity... | Trans... | Tran... | Serial n... | Due for ca... | Range EU | Range |
|-------------------|-------------------------------------|----------------|-----------|-----------|-------------|-------------------|-----------------|--------------------|------------------------|----------|---------|-------------|---------------|----------------------|-------|
| 1 | <input checked="" type="checkbox"/> | Control | Accl_Base | None | Voltage AC | Acceleration | mV | 100 | mV/(m/s ²) | | | | | 100 m/s ² | 10 |
| 2 | <input checked="" type="checkbox"/> | Measure | Massa | None | ICP | Acceleration | mV | 1 | mV/(m/s ²) | | | | | 500 m/s ² | 0.5 |
| 3 | <input type="checkbox"/> | Measure | Str_base | None | Half bridge | MicroStrain | mV | 0.002 | mV/μE | | | | | 500000 μE | 1 |
| 4 | <input type="checkbox"/> | Measure | Str_massa | None | Half bridge | MicroStrain | mV | 0.002 | mV/μE | | | | | 500000 μE | 1 |

Documentation Channel Setup Random Setup SelfCheck Random Control BatchPrinting Navigator

LMS Test.Lab

NUM

PT 18:50

LMS Test.Lab Random Vibration Control - Viga2 - Section1

File Edit View Data Tools Window Help

Random Setup TiraVib Print Screen

Channel Parameters

| Physical ChannelID | Channel GroupID | Point | Serial number | RMS limiting | RMS limiting value | RMS limiting unit | Limiting | Edit Limit profile |
|--------------------|-----------------|---------|---------------|--------------------------|--------------------|-------------------|--------------------------|--------------------|
| 1 | Input1 | Control | Accl_Base | <input type="checkbox"/> | 100 | g | <input type="checkbox"/> | Edit Limit profile |
| 2 | Input2 | Measure | Massa | <input type="checkbox"/> | 50.9858 | g | <input type="checkbox"/> | Edit Limit profile |

Control

Frequency resolution: 1.0000 Hz
 Min. frequency: 1.00 Hz
 Max. frequency: 200.00 Hz
 Degrees of freedom: 90.00
 Blocksize: 1024
 Bandwidth: 400.00 Hz
 Spectral lines: 256
 Multipoint control strategy: Average

Safety

RMS Abort: 3.000 dB
 Max. alarm / abort lines: 5 3
 Max. rep. aborts: 5
 Shutdown time: 2.00

Schedule

Use advanced TimeLevelTable
 Startup level: -9.00 dB
 Number of steps: 3
 Equalization time: 00:00:10
 Full level time: 00:01:30

Automatic Measurements

Measurements:
 Initial offset: 00:00:10
 Period: 00:00:15
 Averages: 10
 Measure FRF: Input1 : Accl_Br

Reference Profile

Parameters

Profile name:
 RMS level: 0.518 g
 Max. acceleration: 2.59 g
 Max. velocity: 0.424 (m/s)
 Max. displacement: 0.0157 m

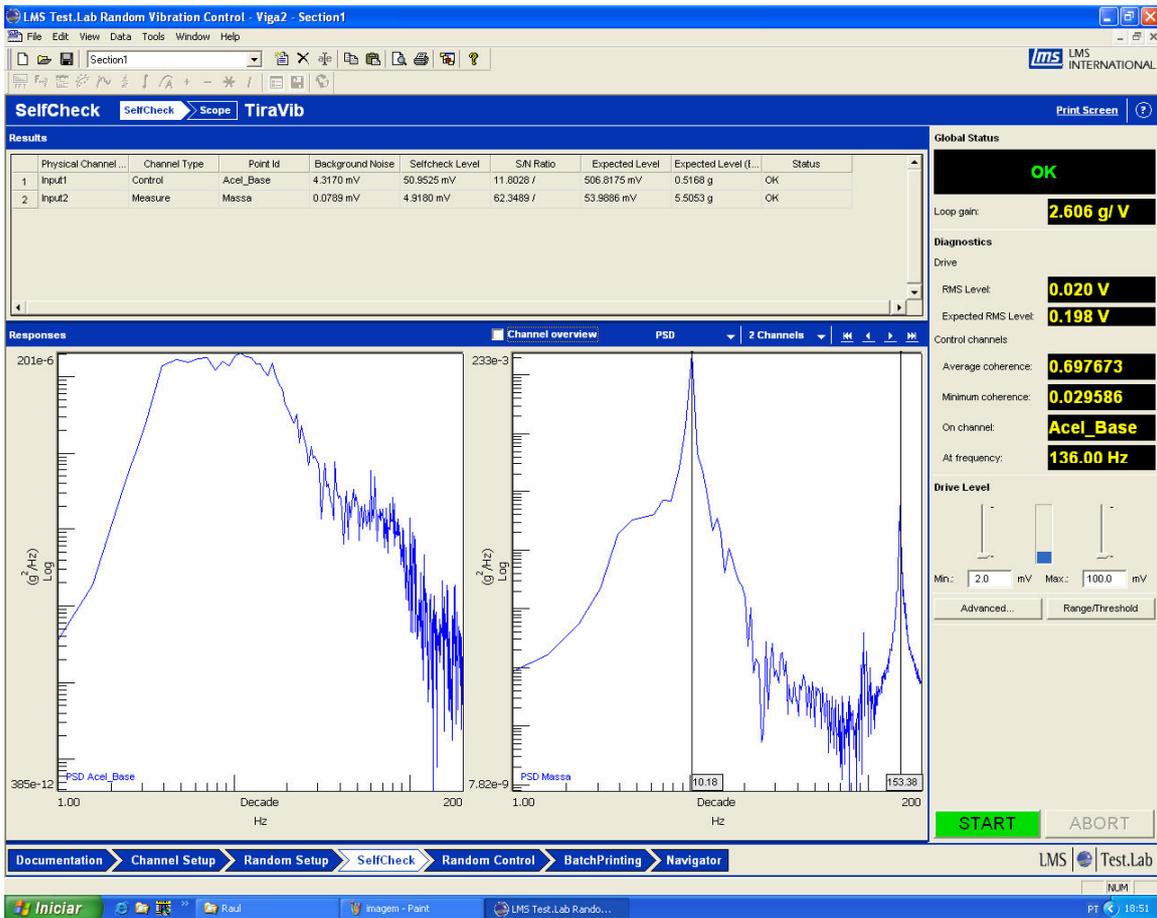
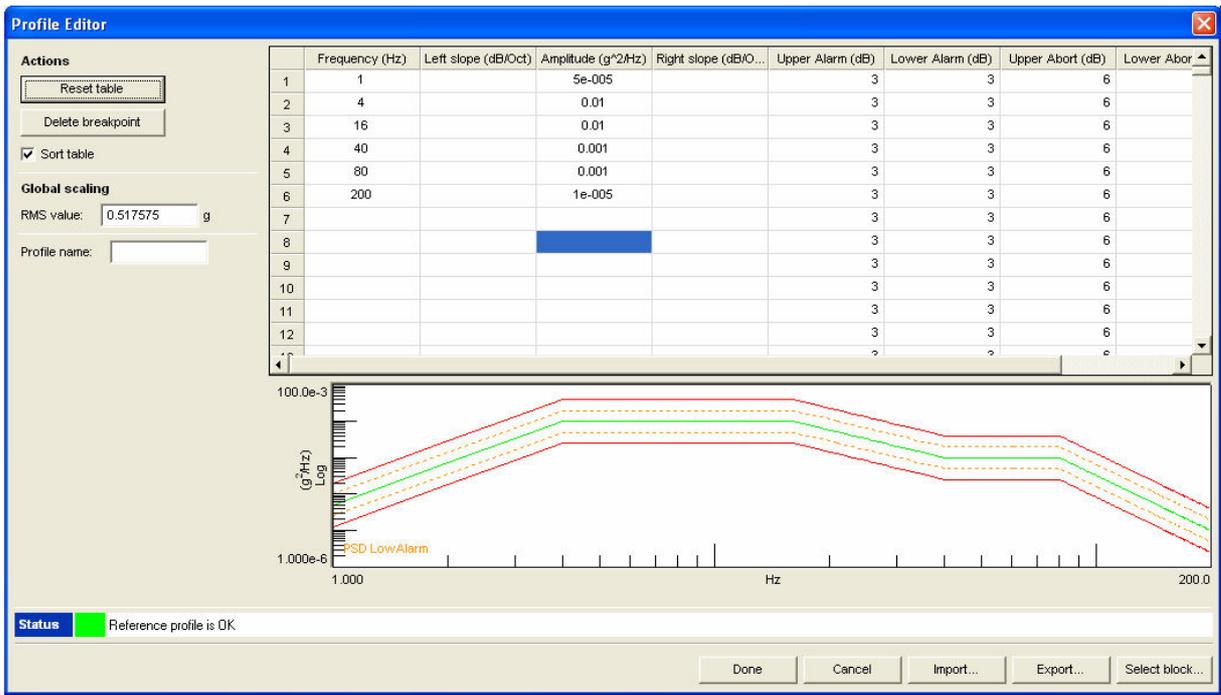
Status: Verification Ok

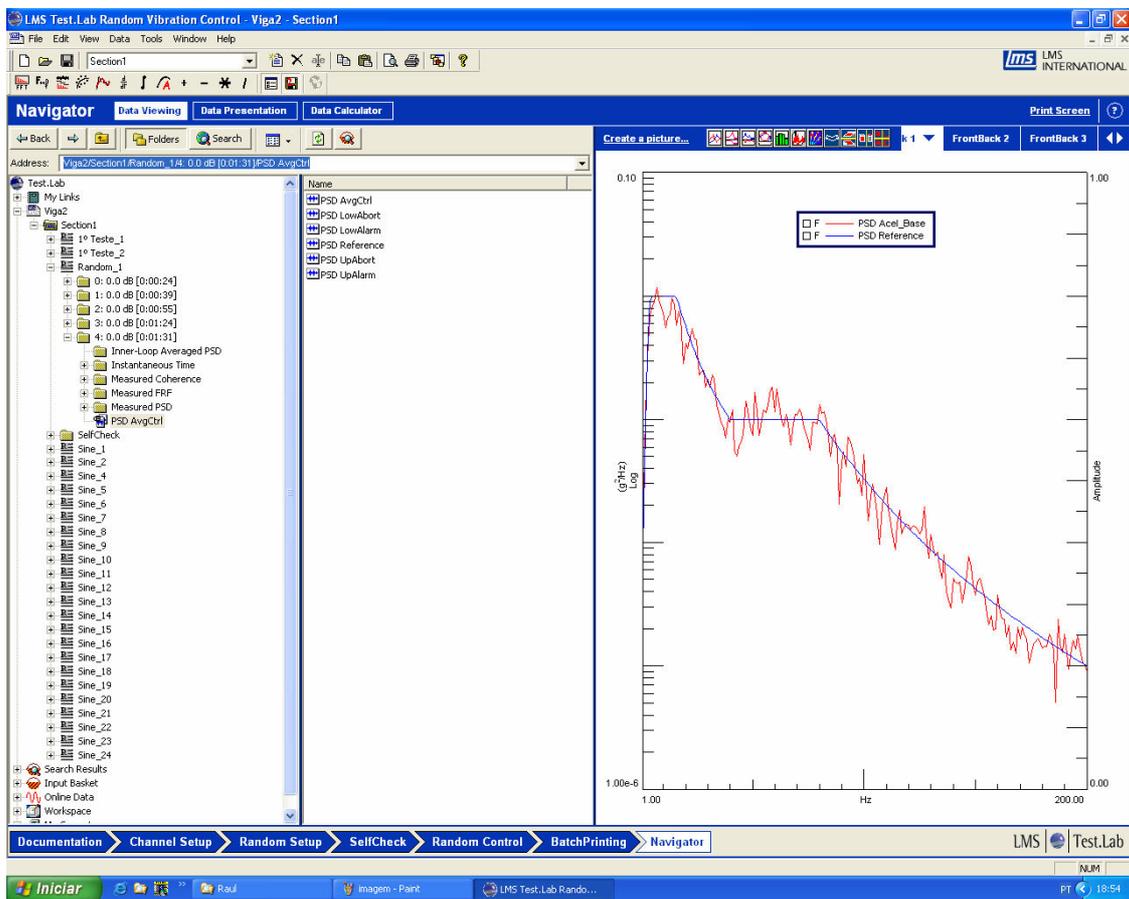
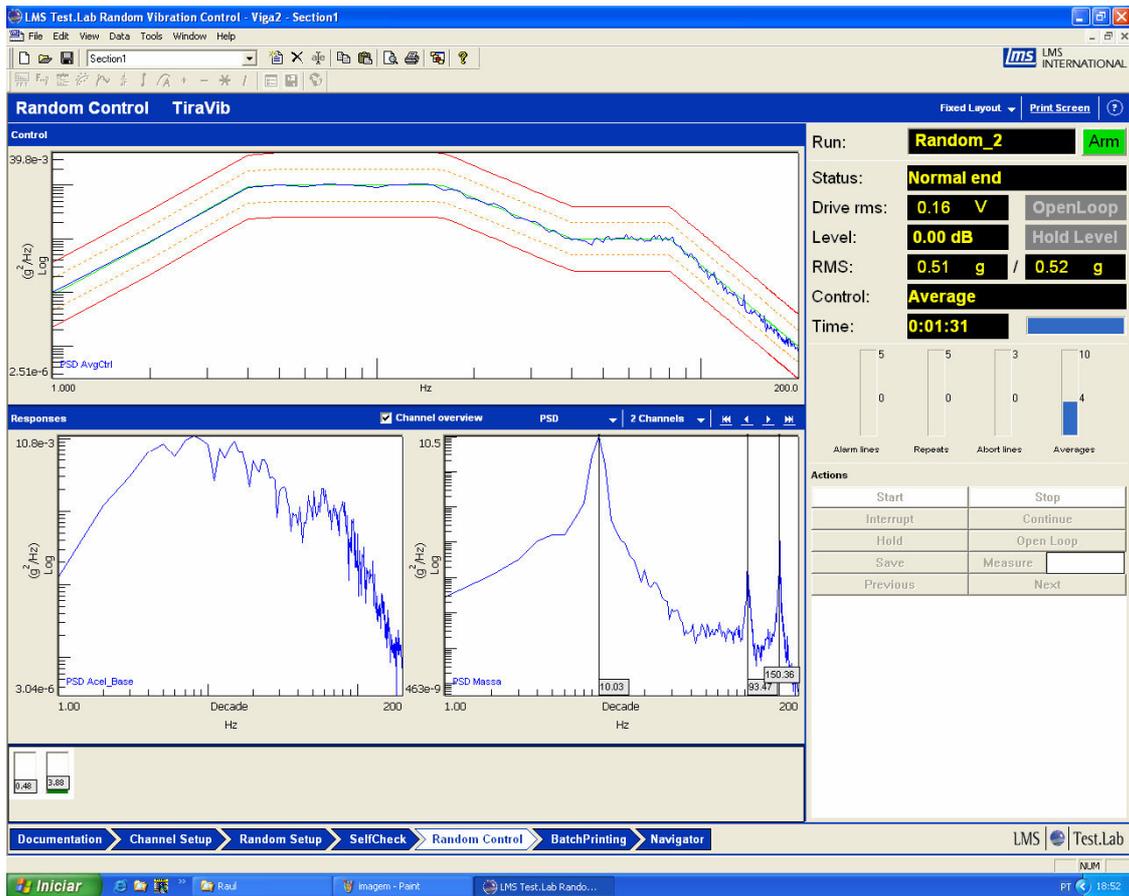
Documentation Channel Setup Random Setup SelfCheck Random Control BatchPrinting Navigator

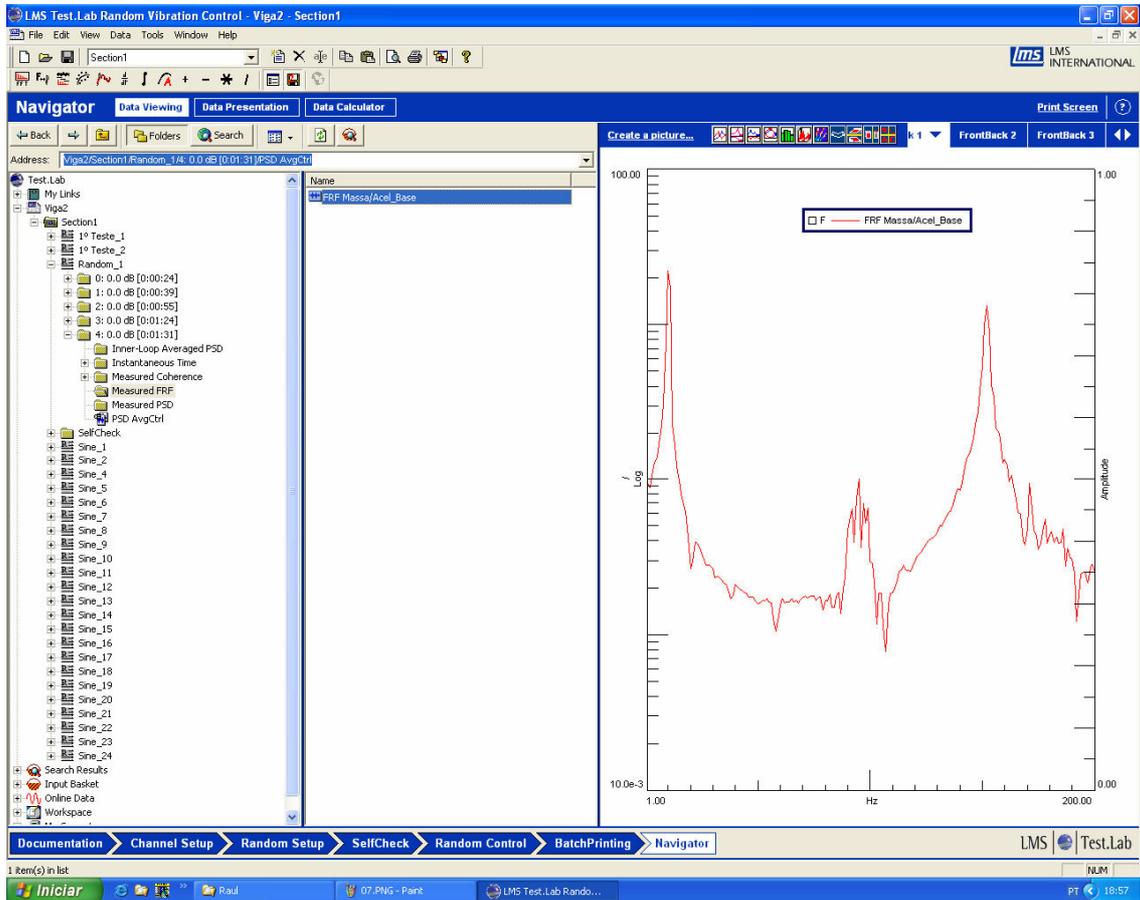
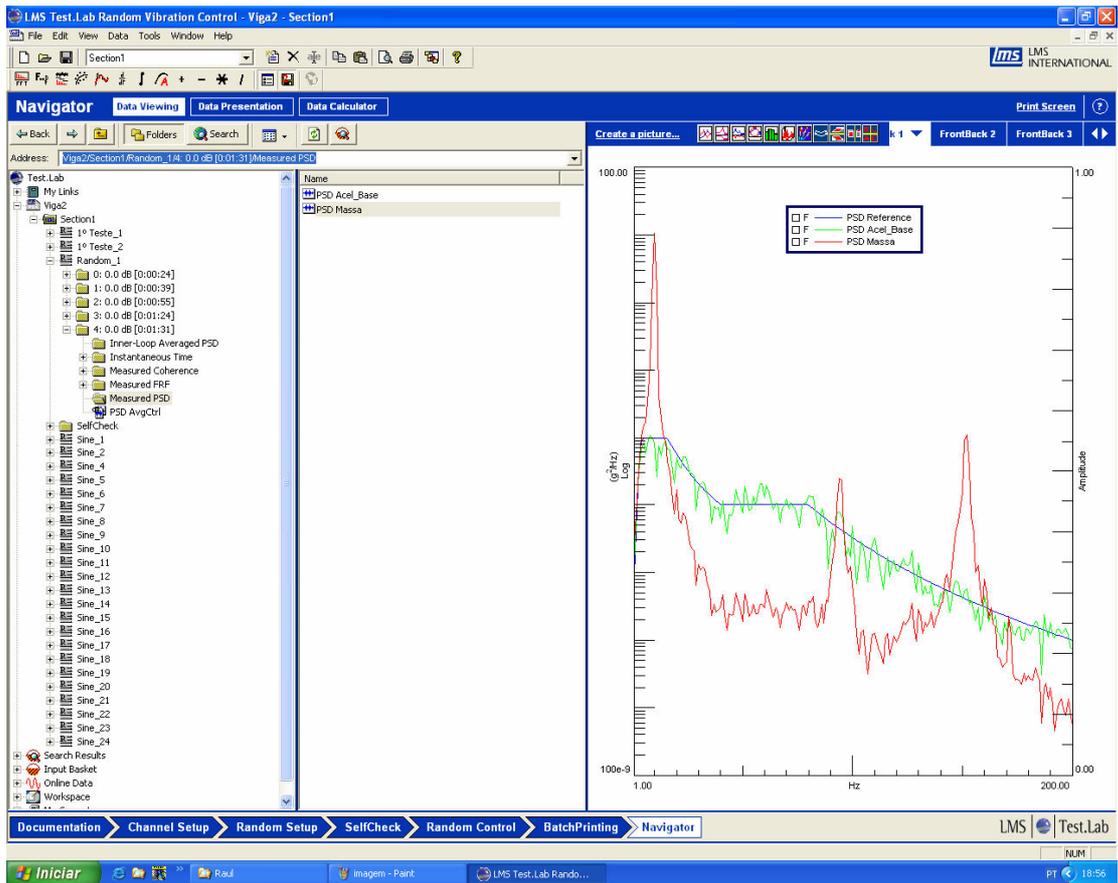
LMS Test.Lab

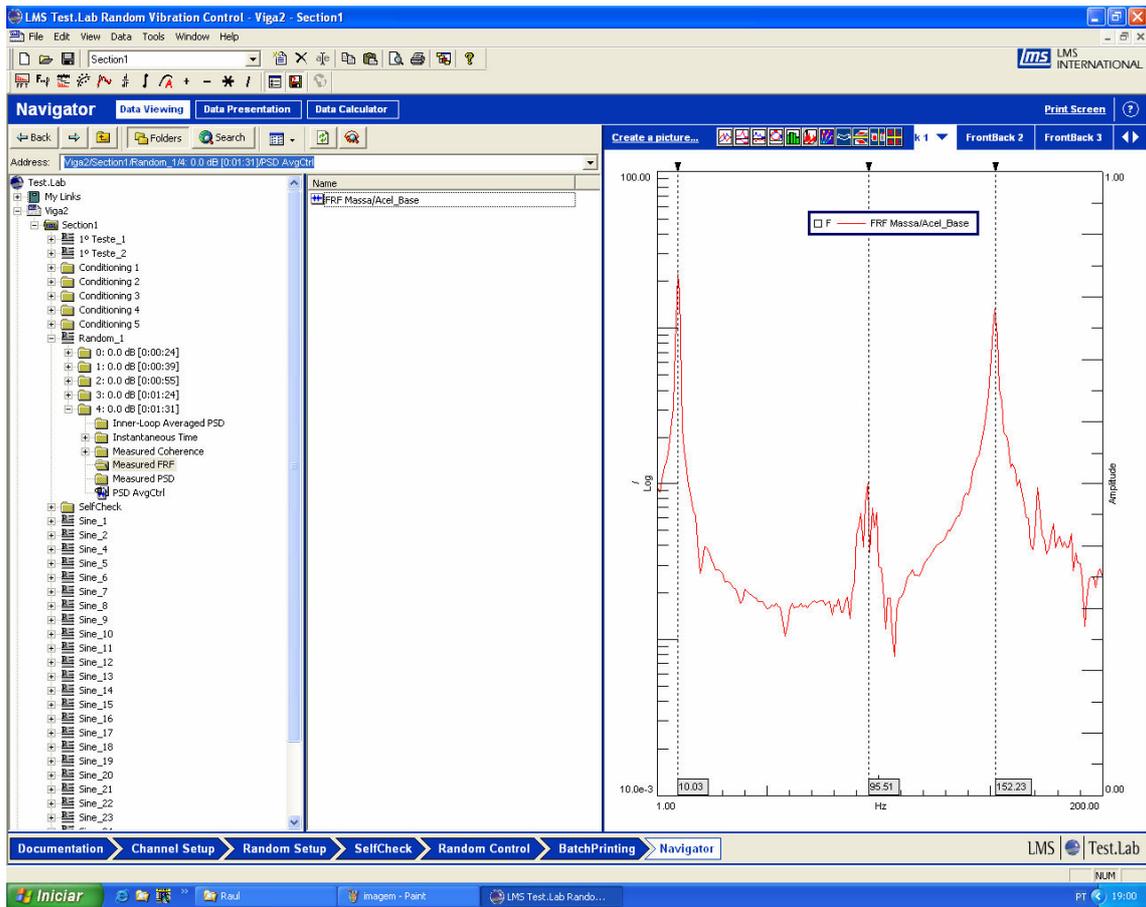
NUM

PT 18:51









Apêndice XI - Verificação da Estacionalidade do sinal de excitação

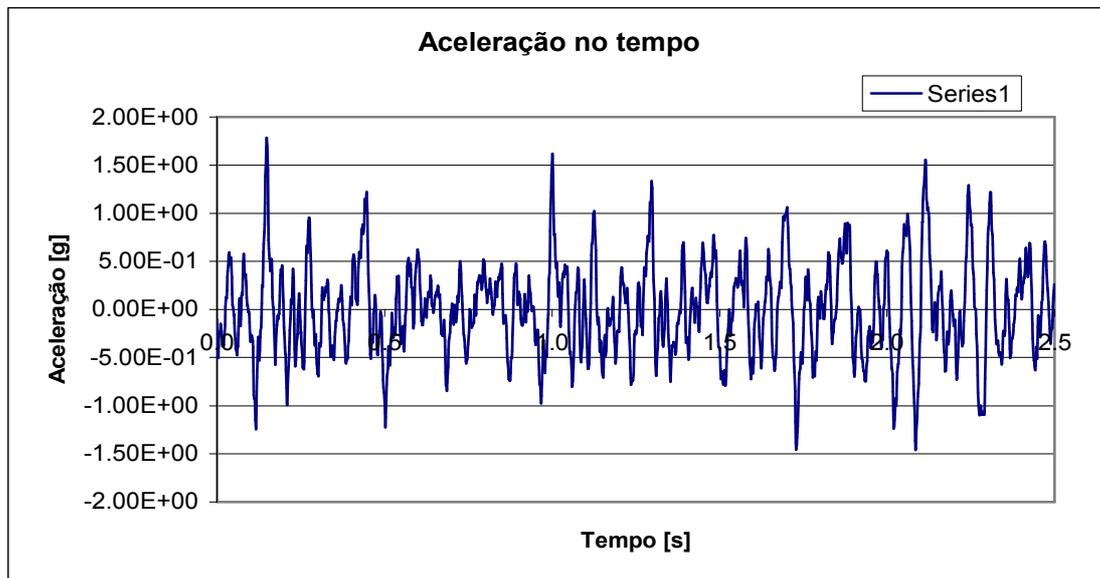


Figura 0-67

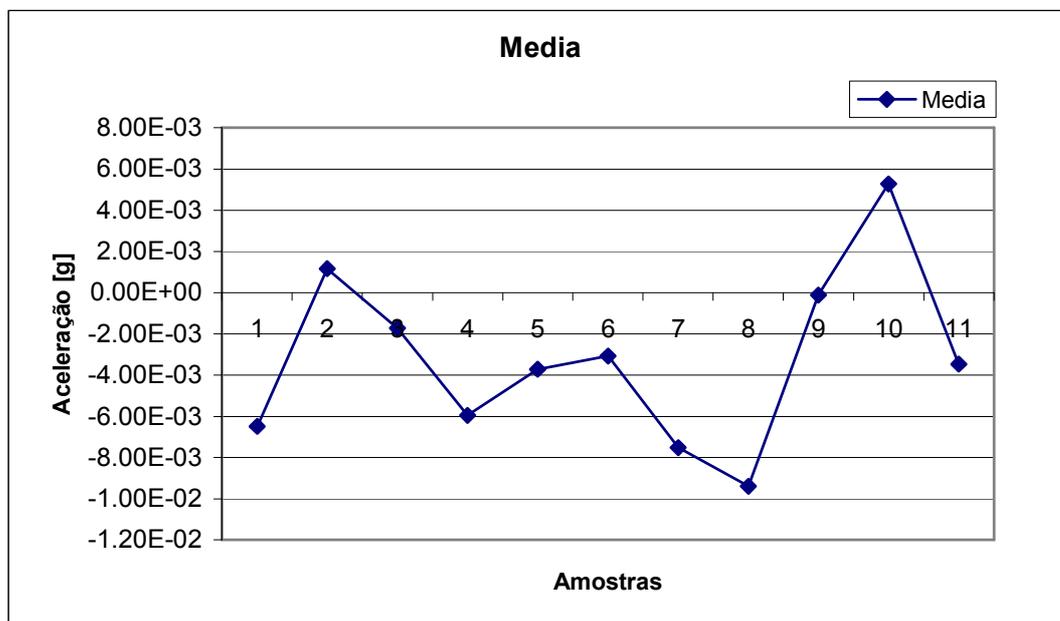


Figura 0-68

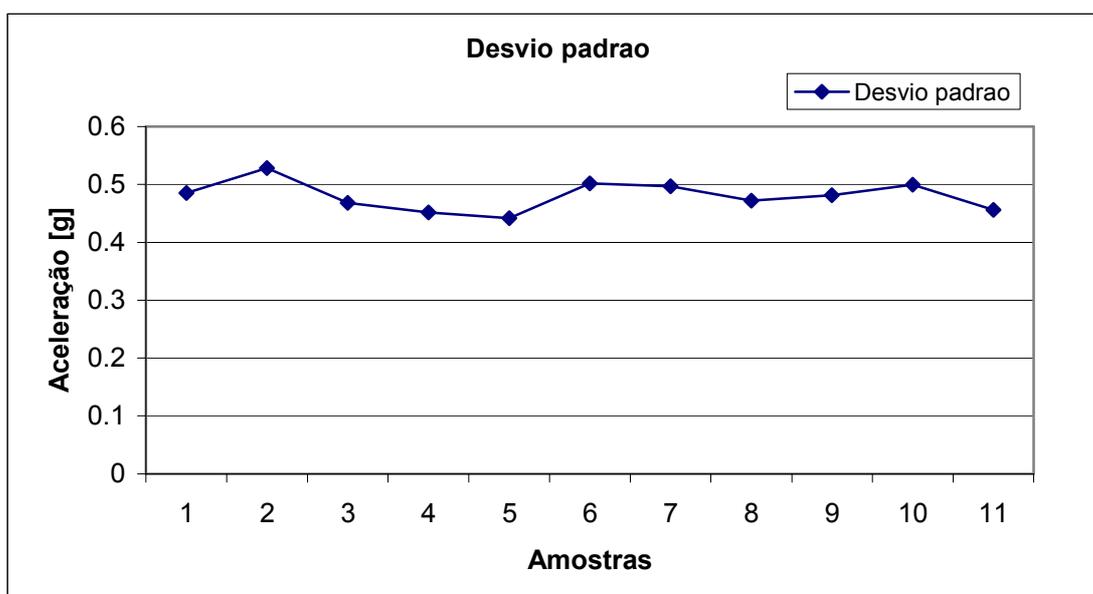


Figura 0-69

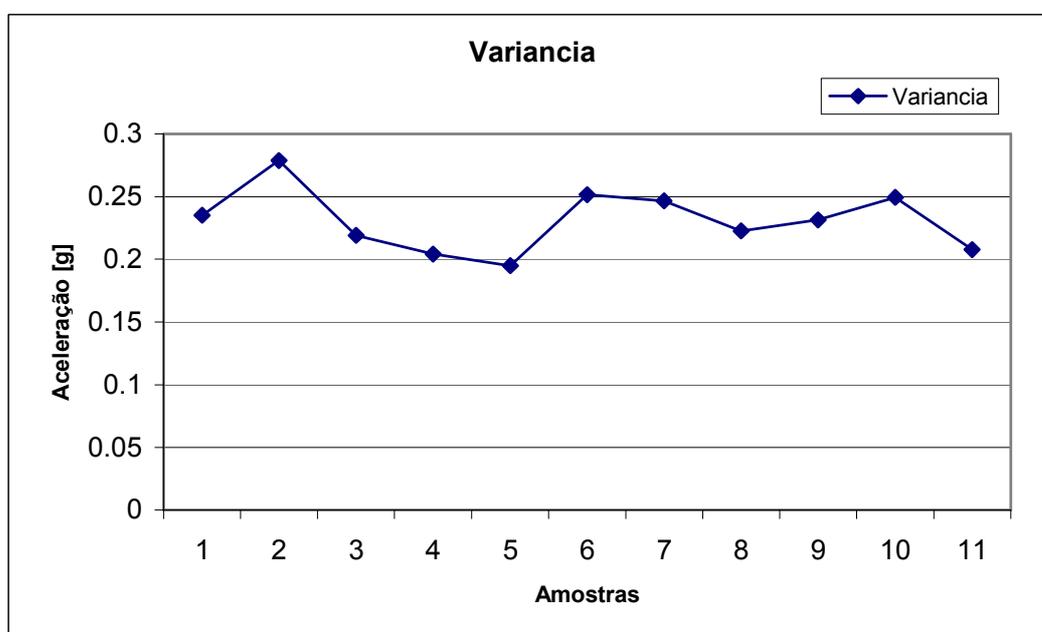


Figura 0-70

Apêndice XII – Código ASTM para Métodos de Contagem de Ciclos

De acordo com o código ASTM, *Standard Practices for Cycle Counting in Fatigue Analysis*, [8] a contagem de ciclos através do método de *Rainflow* deve seguir um procedimento descrito na norma. Nas figuras abaixo se ilustram alguns exemplos de contagem de ciclos para um sinal aleatório.

Outros métodos de contagem de ciclos a partir de um sinal aleatório também estão ilustrados, como o *Level-crossing*, *Peak-counting*, *Simples-Range Counting* e o *Range-Pair*.

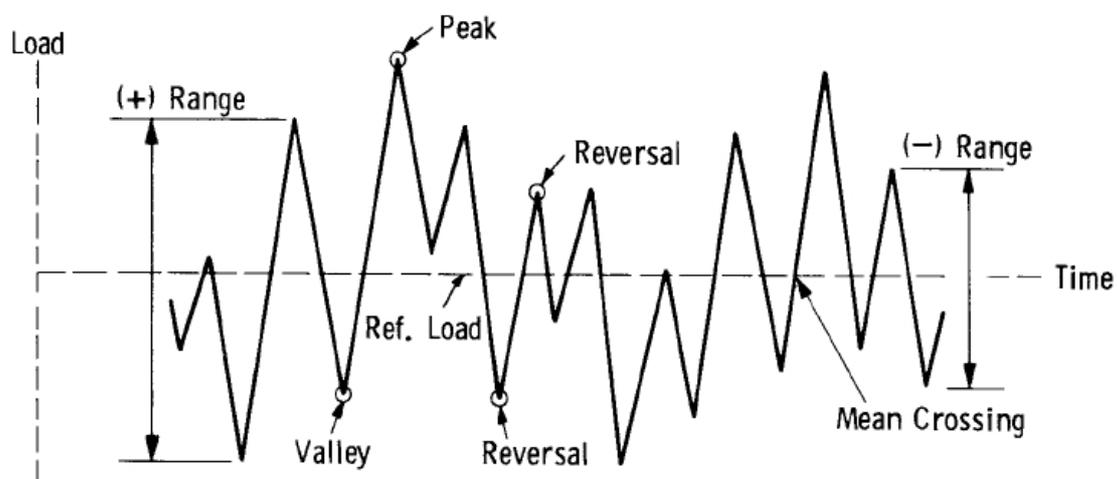
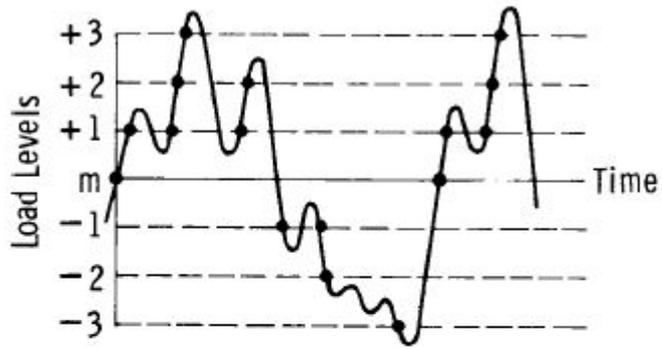
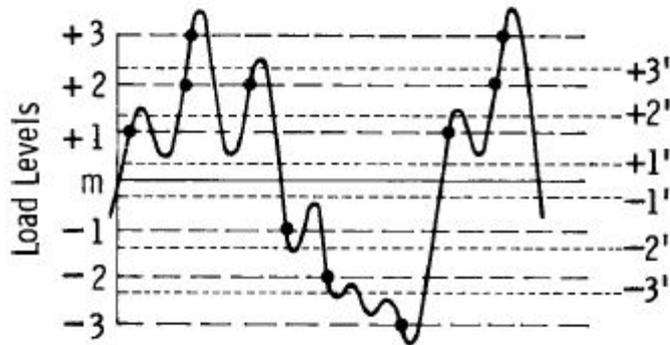


Figura 0-71 – Descrição e nomenclatura dos parâmetros de contagem de ciclos pra fadiga



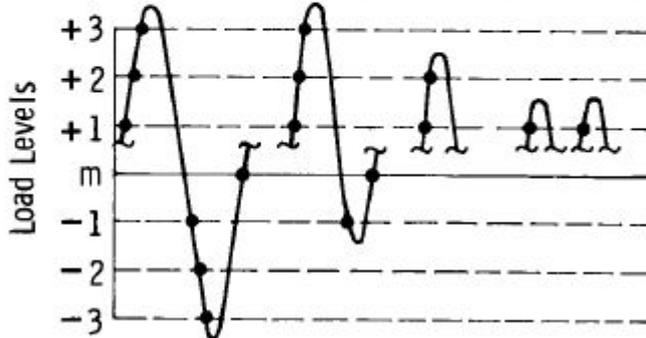
| Level | Counts |
|-------|--------|
| +3 | 2 |
| +2 | 3 |
| +1 | 5 |
| 0 | 2 |
| -1 | 2 |
| -2 | 1 |
| -3 | 1 |

(a)—Level Crossing Counting



| Level | Counts |
|-------|--------|
| +3 | 2 |
| +2 | 3 |
| +1 | 2 |
| 0 | 0 |
| -1 | 1 |
| -2 | 1 |
| -3 | 1 |

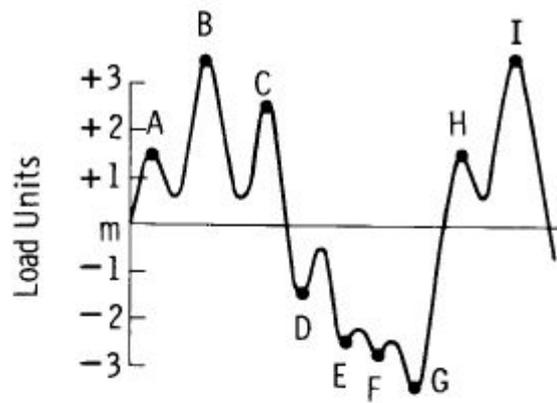
(b)—Restricted Level Crossing Counting



| Range (levels) | Cycle Counts |
|----------------|--------------|
| 7 | 1 |
| 6 | 0 |
| 5 | 1 |
| 4 | 0 |
| 3 | 0 |
| 2 | 1 |
| 1 | 2 |

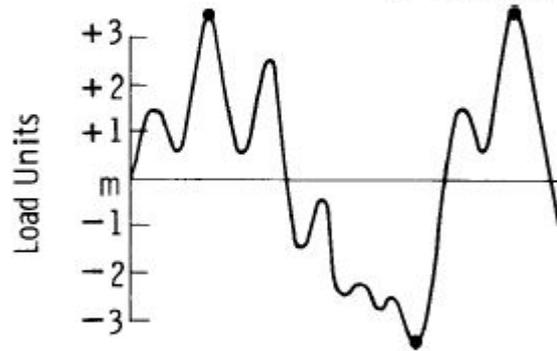
(c)—Cycles Derived from Level Crossing Count of (a)

Figura 0-72 – Exemplo do método de contagem de ciclos Level-Crossing



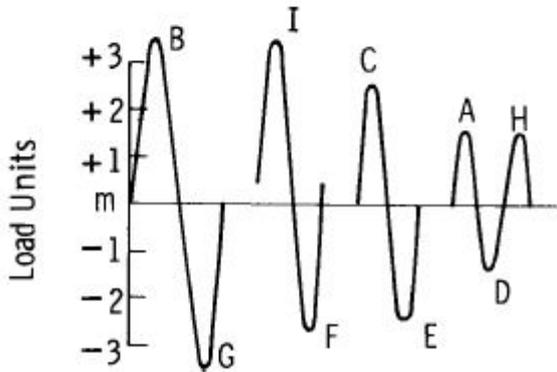
| Peak | Counts |
|------|--------|
| +3.5 | 2 |
| +2.5 | 1 |
| +1.5 | 2 |
| -1.5 | 1 |
| -2.5 | 1 |
| -2.7 | 1 |
| -3.5 | 1 |

(a)—Peak Counting



| Peak | Counts |
|------|--------|
| +3.5 | 2 |
| -3.5 | 1 |

(b)—Mean Crossing Peak Counting



| Range (units) | Cycle Counts |
|---------------|--------------|
| 7 | 1 |
| 6.2 | 1 |
| 5 | 1 |
| 3 | 1.5 |

(c)—Cycles Derived from Peak Count of (a)

Figura 0-73 - Exemplo do método de contagem de ciclos Peak Counting

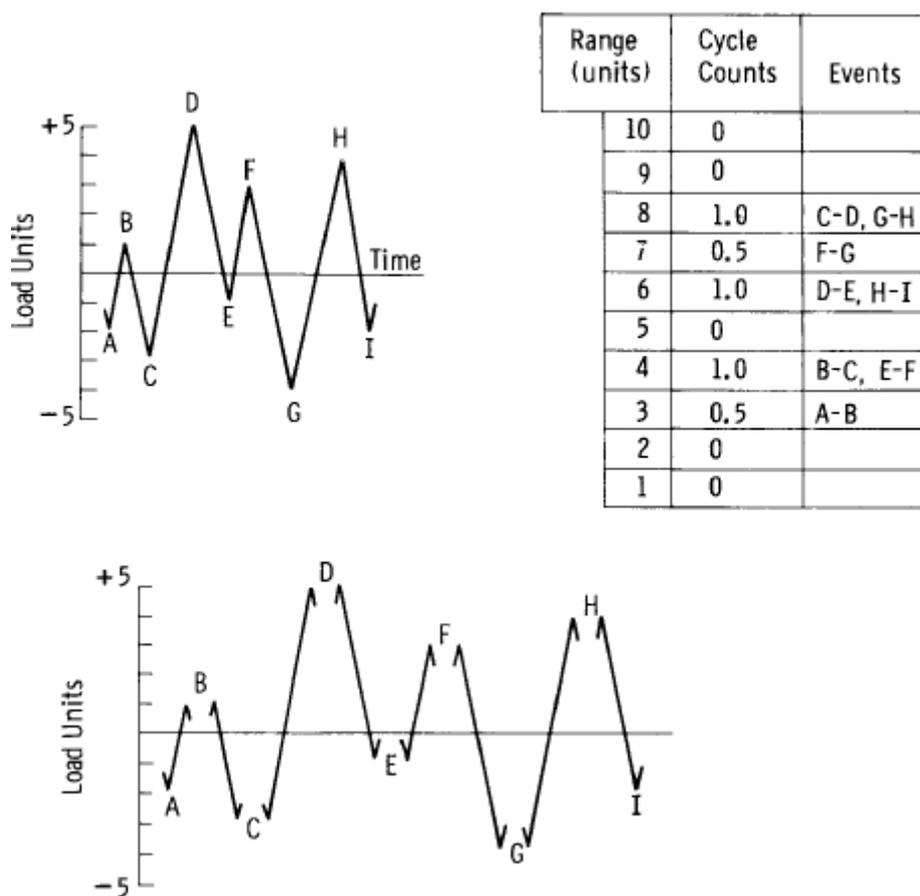


Figura 0-74 – Exemplo do método de contagem de ciclos Simple Range Counting – Ambos os “Range” positivos e negativos são contados.

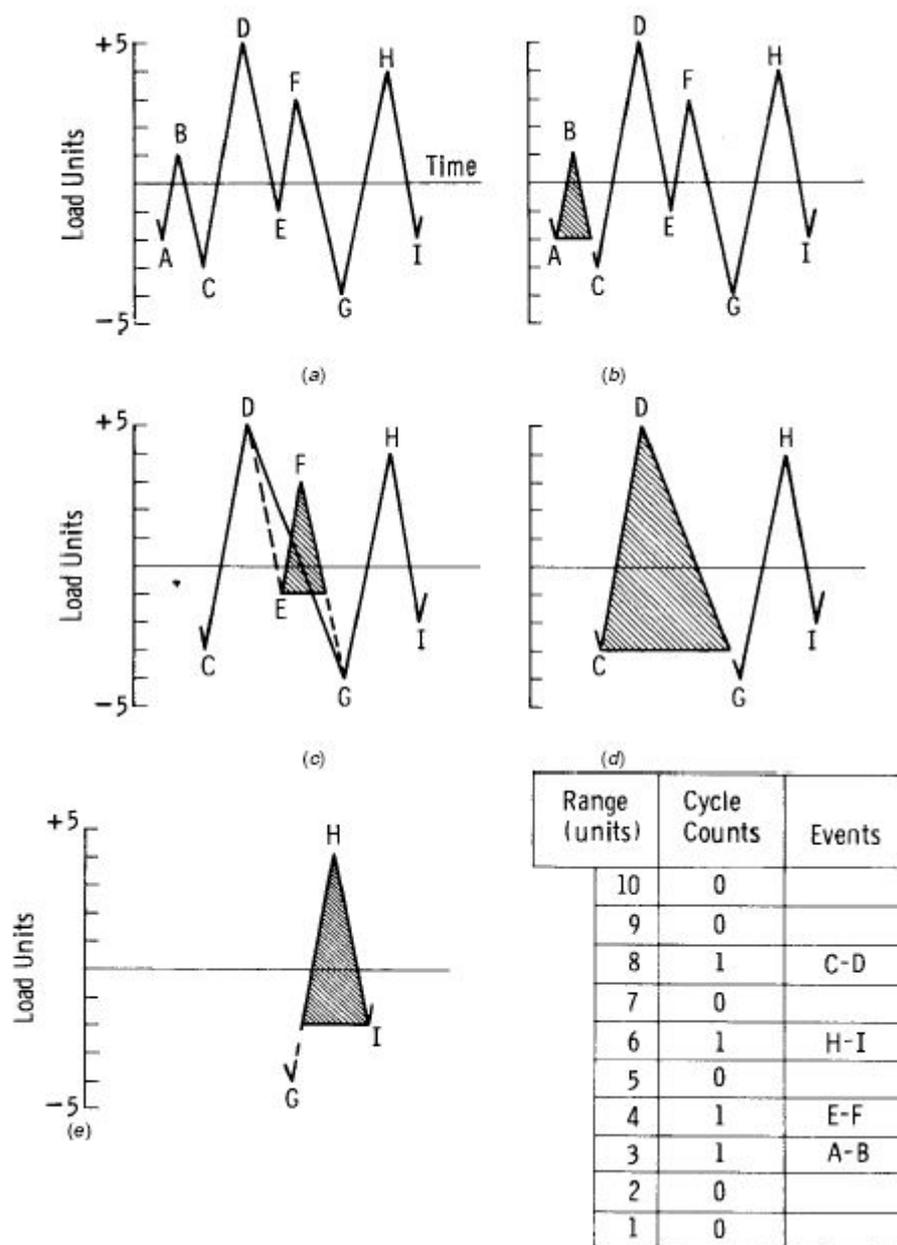


Figura 0-75 – Exemplo do método de contagem de ciclos Range-Pair

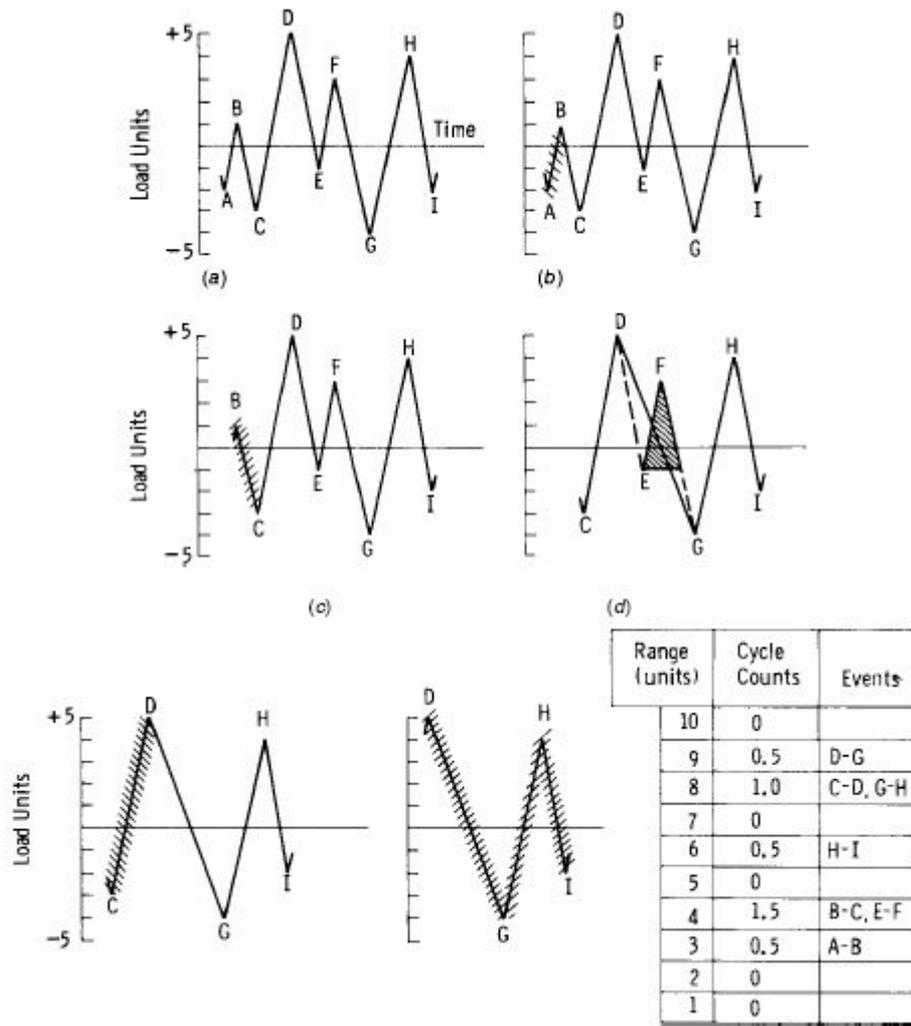


Figura 0-76 – Exemplo do método de contagem de ciclos *Rainflow*

Referências Bibliográficas

- [1] – OSGOOD, Carl C. *Fatigue Design* – 2nd Edition, International series on the strength and fracture of materials – Pergamon International Library, 1982;
- [2] – BENDAT, Julius S. & PIERSOL, Allan G. – *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, Wiley-Interscience, 1971;
- [3] – PETRUCCI e ZUCARELLO – *Fatigue life prediction under wide band random loading*, Dipartimento di Meccanica, Università degli Studi di Palermo, Viale delle Scienze, Palermo, Italy, 2004
- [4] – VANMARK, H – *Properties of Spectral moments with applications to random vibrations*, *Journal Eng. Mech. Div. ASCE*, 1998;
- [5] – SOBCZYK, K and SPENCER, B.F. (1992) – *Random Fatigue*. Academic Press, San Diego, 1992;
- [6] – WIRSCHING, P.H.; PAEZ, T.L. and ORTIZ, K *Random Vibrations*, John Wiley and Sons, New York, 1995;
- [7] – MADSEN, H.O., KRENK, S. and LIND, N.C. – *Methods of Structural Safety*. Prentice Hall, Englewood, OH, 1986;
- [8] – ASTM Designation 1049-85: *Standard Practices for Cycle Counting in Fatigue Analysis*. Vol.03.01 of Metal Test Methods and Analytical Procedure. Philadelphia, PA. ASTM, 1985. 836-848;
- [9] – SHIGLEY, J – *Mechanical Engineering Design*, McGraw-Hill, New York – 1977;
- [10] – BISHOP, Neil; WAY, Lyon; FRIMLEY and CASERO, Alan – *Vibration Fatigue Analysis in The Finite Element Environment* – Paper of the XVI Encuentro del Grupo Español de Fractura, Spain, 1999
- [11] – SOCIE, Darrell F – *Frequency Based Fatigue*, University of Illinois at Urbana-Champaign, Class Presentation, 2001;
- [12] – TIMOSHENKO, S.; YOUNK, D.H. and WEAVER W. Jr., *Vibration Problems in Engineering* - 4th Ed., John Wilwy, New York, 1974.
- [13] – RICE, SO, *Mathematical Analysis of Random Noise*, Selected papers on noise and stochastic processes, Dover, New York (1954)
- [14] – JOHANNESSON, Pär; SVENSSON, Thomas e MARÉ, Jacques de, *Fatigue Life Prediction Based on Variable Amplitude Tests – Methodology*, Fraunhofer-Chalmers Centre, Sweden;
- [15] – BENASCIUTTI, D; TOVO, R., *Spectral Methods for Lifetime Prediction Under Wide-band Stationary Random Processes*, Department of Engineering, University of Ferrara, Italy, *Int. Journal of Fatigue*, 2004;

- [16] – BISHOP, N.W.M, SHERRATT, F, A Theoretical solution for the estimation of *Rainflow* Ranges from Power Spectral Density Data, *Fat. Fract. Eng. Mater. Struc.* 13,311-326 , 1990;
- [17] – CEBON, D; FU, T.T., *Predicting Fatigue Lives for bi-modal Stress Spectral Densities*, International Journal of Fatigue, Cambridge University, UK, 1999;
- [18] – SAKAI, S.; OKAMURA, H., *On the Distribution of Rainflow range for Gaussian Random Process with Bimodal PSD*. JSME International Journal, Series A 1995;
- [19] – NEWLAND , D.E., *An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis*, New York, Longman, 1984;
- [20] – BENASCIUTTI, D; TOVO, R., *Spectral Methods for Lifetime Prediction Under wide-band Stationary Random Processes*, Department of Engineering, University of Ferrara, Ferrara, Italy, International Journal of Fatigue, 2004;
- [21] – WIRSCHING, P.H., LIGHT, C.L., *Fatigue Under Wide Band Random Stresses*, ASCE, Journal of Structures Div. 1980; 106(7):1593-607;
- [22] – MADSEN H.O., KRENK, S., LIND, N.C., *Methods pf Structural Safety*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1986;
- [23] – SU, Hong, Ph.D., *Automotive CAE Durability Analysis Using Random Vibration Approach*, CAE tools and Methods Group, Advanced Technology Office, Visteon Corporation; 2005
- [24] – STEPHENS, R. I. et al. , *Metal Fatigue in Engineering*, 2 edicao, Wiley-Interscience publication, Wiley & Sons, EUA, 2001.
- [25] – ROSA, Edison da; *Análise de Resistência Mecânica*, Apostila da disciplina de Mecânica da Fratura e Fadiga, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, GRANTE, 2002;
- [26] – HALFPENNY, Andrew, *A practical Discussion on Fatigue*, nCode software datasheet. nCode International Ltd.
- [27] – MADAYAG, Angel F., *Metal Fatigue: Theory and Design*, University of Southern California, Los Angeles, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1969
- [28] – JIAO, Guoyang, *A theoretical model for the prediction of Fatigue under combined Gaussian and Impact loads*. International Journal of Fatigue, Vol. 17, N. 3, pag, 215-219, 1995.
- [29] – Norma ASTM Practice D4169
- [30] – PUFF, Rinaldo – Dissertação de Mestrado – Influencia do processo de corte e acabamento superficial na fadiga de aço para molas planas – UDESC – 2002
- [31] – HARRIS, W.J. – *Metallic Fatigue*, Londres, Pergamon Press Ltd., 1961
- [32] – TANAKA, Tsuneshichi, etc. – *Statistical Research on Fatigue and Fracture*, Current Japanese Materials Research, Vol. II, Elsevier Applied Science, Inglaterra, 1987

- [33] – ARIDURU, Seçil – Fatigue Life Calculation by *Rainflow* Cycle Counting Method. Tese submetida à: The Graduate School of Natural and Applied Sciences of Middle East Technical University, Dezembro 2004.
- [34] – Manual software ANSYS, Inc – Theory Reference, Cap. 17.7 – Spectrum Analysis
- [35] – BENDAT, Julius S. e PIERSOL, Allan G. – Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis, John Wiley & Son, Inc, 1980
- [36] – ANNIS, Charles, P.E. – Statistical Engineering. www.statisticalengineering.com, Novembro, 2006
- [37] – CHEN, M.T e ALI, A – An Efficient and Robust Integration Technique for Applied Random Vibration Analysis, Computers and Structures, Vol. 66 N° 6, 1998
- [38] – HARICHANDRAN, R.S. – Random Vibration Under Propagating Excitation: Closed-Form Solutions, Journal of Engineering Mechanics (ASCE), Vol. 118, N° 3 (1992)
- [39] – JOHANNESSON, Pär – *Rainflow* Analysis of Switching Markov Loads, Tese de Doutorado submetido a *Lund Institute of Technology*, 1999
- [40] – RIZZI, Stephen A., On the Use of Equivalent Linearization for High-Cycle Fatigue Analysis of Geometrically Nonlinear Structures, VII International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics, UK, 2003.
- [41] – WEITZER, K. A., e Ferguson, N. S., Mean Stress Effects on Random Fatigue Of Nonlinear Structures, Twelfth International Congress on Sound and Vibration, Lisboa, Portugal 2005.
- [42] – DIRLIK, T., Application of Computers in Fatigue Analysis, Tese Ph. D, Universidade de Warwick, 1985
- [42] – IMAOKA, Sheldon, Sheldon's ANSYS Tips and Tricks: PSD Postprocessing, internal Memo n°STI:04/04 – ANSYS Inc, Junho, 2004
- [43] – *NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods*, <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/>, Novembro 2006.
- [44] – JOHNSON, Kotz, and Balakrishnan, (1994), Continuous Univariate Distributions, Volumes I and II, 2nd. Ed., John Wiley and Sons.
- [45] – EVANS, Hastings, and Peacock (2000), Statistical Distributions, 3rd. Ed., John Wiley and Sons.
- [46] – Brüel & Kjaer Web Site: <http://www.bkhome.com>, Novembro, 2006
- [47] – SINCLAIR, G. M. e DOLAN, T. J. – Effect of Stress Amplitude on Statistical Variability in Fatigue Life of 75S-T6 Aluminum Alloy, ASME, Vol. 75, 1953, p.867.
- [48] – DOOB, J. L. "The Development of Rigor in Mathematical Probability (1900-1950)." Amer. Math. Monthly 103, 586-595, 1996
- [49] – PAPOULIS, A. "The Concept of a Random Variable." Ch. 4 in Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, pp. 83-115, 1984.

- [50] – MAINS, R. M., Mechanical Design for Random Loading, Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1958
- [51] – POULARICAS, A. D., The Handbook of Formulas and Tables for Signal Processing. Department of Electrical and Computer Engineering of The University of Alabama in Huntsville, USA, 1999
- [52] – SHABANA, A.A., Vibration of Discrete and continuous system, 2^a edition, Mechanical Engineer Series, ed. Springer, 1997
- [53] – RAO, S. S. , Mechanical Vibrations, University of Purdue, Addison-Wesley Publishing Company, EUA, 1986.
- [54] – MEIROVITCH, L., Elements of Vibration Analysis, Virginia polytechnic Institute and State University, McGraw-Hill, 1977.
- [55] – BLEVINS, R.D., Formulas for Frequency and Mode Shape, Van Nostrand, 1979
- [56] – ESMAILZADEH, E e JALILI, N., Parametric Response of Cantilever Timoshenko Beams with Tip Mass Under Harmonic Support Motion, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 33, No. 5, pp.765-781, 1998
- [56] – ESMAILZADEH, E e Nakhaie-Jazar, G., Periodic Behavior of a Cantilever Beam with end Mass Subjected to Harmonic Base Excitation, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 33, No. 4, pp.567-577, 1998
- [57] – BEARDS, C.F., Structural Vibration: Analysis and Damping, Imperial College of Science, Technology and Medicine, University of London, John Wiley & Sons Inc, New York, 1996
- [58] – BROCH, J.T., Mechanical Vibration and Shock Measurements, Bruel & Kjaer series of books on the fundamentals of physical measurement and analysis, 1980.
- [59] – FATEMI, A. e YANG, L., Cumulative fatigue damage and life prediction theories: a survey of the state of the art for homogeneous materials, Int. Journal of Fatigue, Vol. 20, No. 1, 1998
- [60] – MINER, M. A., Cumulative Damage in Fatigue, Journal Applied Mechanical, 1945
- [61] – PALMGREN, A., Die Lebensdauer von Kugellagern, Z. Vereines Deutscher Ingenieure, 68, 1924
- [62] – SOCIE, D. F., Fatigue Made Easy, Historical Introduction, University of Illinois at Urbana-Champaign, Fatigue Seminar, 2002
- [63] – MATSUSHI M. e ENDO, T., Fatigue of Metals Subject to Varying Stress, artigo publicado ao Japan Society of Mechanical Engineers, Fukuota, Japao, 1968
- [64] – BENASCIUTTI, D. e TOVO, R., Comparison of Spectral Methods for Fatigue Analysis of Broad-band Gaussian Random Processes, Probabilistic Engineering Mechanics 21, 287-299, 2005
- [65] – SINES, G e Waisman, J. L., Metal Fatigue, McGraw-Hill, New York, 1959

- [66] – VISHAY Micro-Measurements, Errors Due to Wheatstone Bridge nonlinearity, Tech. Note. TN-507-1
- [67] – WEISSTEIN, E. W., "Gamma Function." From MathWorld - A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html>, Novembro, 2006
- [68] – HUGHES, A. e GRAWOING, D. , Statistics: A foundation for Analysis. Georgia State University, Addison-Wesley Publishing Company, 1971
- [69] – BIRNBAUM, Z. W. e SAUNDERS, S.C., A Probabilistic Interpretation of Miner's Rule. SIAM Journal of Applied Math., 16, 637-652, 1968
- [70] – BIRNBAUM, Z. W. e SAUNDERS, S.C., A New Family of Life Distribution, Journal of Applied Probabilistic, 6, 637-652, 1969
- [71] – WEISSTEIN, E. W., "Moment." From MathWorld - A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Moment.html>, Dezembro, 2006
- [72] – BLEVINS, R. D., Non-Gaussian Narrow-Band Random Fatigue, Journal of Applied Mechanics, Maio 2002, Vol 69,317-324
- [73] – DALLY, J. W. , RILEY, W. F., Experimental Stress Analysis, McGraw-Hill, 3^a edicao, New York, 1991
- [74] – NASHIF, A. D. et. al., Vibration Damping, John Wiley & Sons, Inc. 1985
- [75] – Manual do software Matlab ® , Versão 6.5 Release 13, The MathWorks, Inc., Signal Processing Toolbox.
- [76] – NIES'ONY, Adams, Programa para cálculo de *Rainflow* , 2003

Análise PDF, PSD considerando efeitos não-lineares

- [a] – Rizzi, S.A. and Muravyov, A.A., Improved Equivalent Linearization Implementations Using Nonlinear Stiffness Evaluation, NASA/TM-2001-210838, March 2001.
- [b] – Lambert, R.G., Criteria for Accelerated Random Vibration Tests With Nonlinear Damping, In The Shock and Vibration Bulletin No 53, Naval Research Laboratory, Washington, DC, May 1983.
- [c] – Lambert, R.G., Fatigue and Time-Compression Methodologies for Power-Law Non-Linear Systems, Proceedings . Institute of Environmental Sciences Annual Technical Meeting, Anaheim, CA, May 1995
- [d] – Sweitzer, K.A., Fatigue Life Estimation For Non-Linear Response Statistics, internal TAE report September 2002.
- [e] – Sweitzer, K.A., Veltri, M., Kerr, S.C., Bishop, N.W.M., Application of the PDF transfer Function to Fatigue Calculations for nonlinear systems, 2003