

Louise Reips

*Modelo constitutivo para materiais  
viscoelásticos reforçados por fibras  
adequado à simulação de tecidos conectivos*

Florianópolis

Dezembro de 2008

Louise Reips

*Modelo constitutivo para materiais  
viscoelásticos reforçados por fibras  
adequado à simulação de tecidos conectivos*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, do Centro Tecnológico da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, com Área de Análise e Projeto Mecânico.

Orientador:

Prof. Dr. Eduardo Alberto Fancello

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Florianópolis

Dezembro de 2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**MODELO CONSTITUTIVO PARA MATERIAIS VISCOELÁSTICOS  
REFORÇADOS POR FIBRAS ADEQUADO À SIMULAÇÃO DE  
TECIDOS CONECTIVOS**

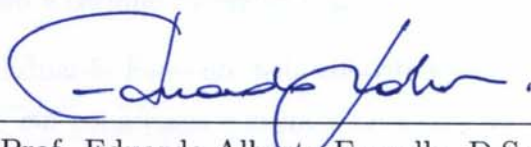
**LOUISE REIPS**

Essa dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

**MESTRE EM ENGENHARIA**

**ESPECIALIDADE EM ENGENHARIA MECÂNICA**

sendo aprovada em sua forma final



Prof. Eduardo Alberto Fancello, D.Sc.  
Orientador

Coordenador do Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

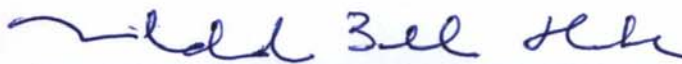
**BANCA EXAMINADORA:**



Prof. Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D.  
Universidade Federal de Santa Catarina



Prof. Paulo de Tarso R. Mendonça, Ph.D.  
Universidade Federal de Santa Catarina



Prof<sup>a</sup>. Mildred Ballin Hecke, D.Sc.  
Universidade Federal do Paraná

# *Agradecimentos*

À minha mãe Loreci Carolina Reips, que foi a pessoa mais importante da minha vida e que me ensinou as mais grandiosas coisas que uma pessoa pode aprender. Pelo carinho, amor, compreensão e pela dedicação de uma vida inteira.

Ao Felipe por todo amor que me proporciona a cada dia que passa, por ter estado presente no desenvolvimento desta dissertação, pela convivência e empenho e, principalmente por todo apoio e carinho nos momentos mais difíceis e conseguir torná-los menos penosos.

À meus irmãos Lisiane e Jonas e meu pai Valdir que, mesmo distantes, estiveram presentes dando-me apoio e carinho incondicional.

Ao meu orientador Eduardo Fancello, pela contribuição acadêmica, paciência e incentivo à participação em congressos e eventos ao longo desta caminhada.

Aos amigos do GRANTE, companheiros de café e de estudos: Diego, Andresa, Pedrão, Dyego, Waldemar, Augusto, Jorge, Maicon, Felipe, Marcio, Françoá, Daniel, Jairo, André, Ronaldo, Juliana.

Aos amigos matemáticos Grasielli, Rodrigo, Ana Paula, Leonardo, Karla, Monique e Juliana Paz que sempre estiveram por perto proporcionando boas conversas, troca de idéias e momentos de descontração.

Às ex-colegas de casa Maura, Luciane e Bruna, grandes amigas e companheiras.

Agradeço o apoio financeiro do CNPq.

# *Sumário*

<b>Lista de Figuras</b>	p. 7
<b>Lista de Tabelas</b>	p. 9
<b>Simbologia</b>	p. 10
<b>Resumo</b>	p. 12
<b>Abstract</b>	p. 13
<b>1 Introdução</b>	p. 14
<b>2 Revisão bibliográfica</b>	p. 17
2.1 Estrutura dos ligamentos e tendões . . . . .	p. 17
2.2 Trabalhos relacionados . . . . .	p. 19
<b>3 Modelos hiperelásticos</b>	p. 25
3.1 Modelos hiperelásticos isotrópicos . . . . .	p. 26
3.2 Hiperelasticidade incompressível . . . . .	p. 28
3.3 Materiais hiperelásticos compressíveis . . . . .	p. 29
3.4 Algumas formas de função Energia de Deformação . . . . .	p. 30
<b>4 Modelos viscoelásticos</b>	p. 32
4.1 Viscoelasticidade linear unidimensional . . . . .	p. 32
4.1.1 Modelo de Maxwell . . . . .	p. 33
4.1.2 Modelo de Kelvin-Voigt . . . . .	p. 33

---

4.1.3	Modelo viscoelástico de três componentes . . . . .	p. 34
4.1.4	Modelo generalizado . . . . .	p. 37
4.2	Viscoelasticidade tridimensional. Pequenas deformações . . . . .	p. 38
4.3	Modelos constitutivos viscoelásticos não-lineares para deformações finitas	p. 42
4.3.1	Viscoelasticidade de Simo . . . . .	p. 42
4.3.2	Viscoelasticidade de Holzapfel . . . . .	p. 43
<b>5</b>	<b>Formulação viscoelástica variacional para deformações finitas</b>	<b>p. 47</b>
5.1	Formulação variacional . . . . .	p. 47
5.2	Modelo viscoelástico isotrópico . . . . .	p. 49
5.3	Modelo viscoelástico reforçado por fibras . . . . .	p. 52
<b>6</b>	<b>Resultados numéricos</b>	<b>p. 58</b>
6.1	Ensaio Uniaxiais . . . . .	p. 58
6.1.1	Comportamento de matriz e fibras: Caso 1 . . . . .	p. 58
6.1.2	Comportamento de matriz e fibras: Caso 2 . . . . .	p. 61
6.1.3	Dependência da orientação das fibras . . . . .	p. 63
6.1.4	Dependência da velocidade de deformação . . . . .	p. 66
6.2	Membrana com pressão interna . . . . .	p. 68
6.2.1	Caso 1. Modelo isotrópico . . . . .	p. 69
6.2.2	Caso 2. Modelo com fibras a $0^\circ$ . . . . .	p. 70
6.2.3	Caso 3. Modelo com fibras a $45^\circ$ . . . . .	p. 73
6.3	Cilindro reforçado . . . . .	p. 76
6.3.1	Caso 1. Modelo com fibras a $0^\circ$ . . . . .	p. 76
6.3.2	Caso 2. Modelo com fibras a $30^\circ$ . . . . .	p. 78
<b>7</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>p. 83</b>

---

<b>Referências</b>	p. 85
<b>Apêndice A – Capítulo 2</b>	p. 88
A.1 Modelo de Ogden: Derivadas de $\varphi$ , $\varphi^e$ e $\psi$ . . . . .	p. 88
A.2 Modelo de Hencky: Derivadas de $\varphi$ , $\varphi^e$ e $\psi$ . . . . .	p. 88
A.3 Derivadas de $\varphi$ , $\varphi^e$ do modelo de fibras . . . . .	p. 89
<b>Apêndice B – Capítulo 3</b>	p. 90
B.1 Elasticidade finita com resposta volumétrica desacoplada . . . . .	p. 90
<b>Apêndice C – Capítulo 4</b>	p. 92
C.1 Minimização de $\Psi$ com relação a $\mathbf{M}_a^v$ . . . . .	p. 92
C.1.1 Minimização de $\Psi$ em relação a $\Delta q_a^v$ . . . . .	p. 93
C.2 Minimização de $\Psi$ em relação a $\lambda_f^v$ . . . . .	p. 94
C.3 Derivadas de $\varphi$ e $\varphi^e$ em relação a $\hat{\mathbf{C}}_{n+1}$ . . . . .	p. 95
C.4 Tensor material . . . . .	p. 96

## *Lista de Figuras*

1	Estrutura hierárquica de uma fibra de colágeno[5] . . . . .	p. 17
2	Arranjo de uma fibra de colágeno [5] . . . . .	p. 18
3	Aparência histológica de um ligamento [9] . . . . .	p. 18
4	Relação tensão deformação [9] . . . . .	p. 19
5	Representação do modelo de Maxwell . . . . .	p. 33
6	Representação do modelo de Kelvin-Voigt . . . . .	p. 34
7	Representação do modelo de três componentes . . . . .	p. 34
8	Representação generalizada . . . . .	p. 37
9	Modelo reológico generalizado . . . . .	p. 49
10	Modelo reológico com a inclusão das fibras . . . . .	p. 53
11	Representação simplificada de um material contendo uma matriz isotrópica reforçada com fibras. [16] . . . . .	p. 53
12	Modelo reológico clássico . . . . .	p. 54
13	Modelo reológico . . . . .	p. 59
14	Tensão versus deformação - parcela isotrópica - Hencky . . . . .	p. 59
15	Tensão versus deformação - parcela isotrópica - potenciais de Neo-Hookean	p. 60
16	Tensão versus deformação - parcela das fibras - potenciais de Holzapfel	p. 61
17	Gráfico tensão versus deformação - tração em Y - potenciais de Holzapfel	p. 62
18	Gráfico tensão versus deformação - tração em X - potenciais de Holzapfel	p. 63
19	Volume com representação das famílias de fibras . . . . .	p. 64
20	Vista frontal do volume com representação de uma família de fibras . .	p. 64



---

21	Gráfico tensão versus deformação - potencias de Holzapfel - fibras alinhadas a $0^\circ$ . . . . .	p. 64
22	Gráfico tensão versus deformação - potencias de Holzapfel - fibras alinhadas a $30^\circ$ . . . . .	p. 65
23	Gráfico tensão versus deformação - potencias de Holzapfel - fibras alinhadas a $45^\circ$ . . . . .	p. 65
24	Gráfico tensão versus deformação - potencias de Holzapfel - fibras alinhadas a $60^\circ$ . . . . .	p. 66
25	Gráfico tensão versus deformação - diferentes velocidades . . . . .	p. 67
26	Gráfico tensão versus deformação - diferentes velocidades (zoom) . . . . .	p. 68
27	Seqüência de deformações da membrana . . . . .	p. 70
28	Orientação das fibras na membrana . . . . .	p. 71
29	Seqüência de deformações da membrana - tensão na direção X . . . . .	p. 72
30	Seqüência de deformações da membrana - tensão na direção Y . . . . .	p. 73
31	Orientação das fibras na membrana . . . . .	p. 74
32	Seqüência de deformações da membrana com reforço de duas famílias de fibras a $45^\circ$ . . . . .	p. 75
33	Seqüência de deformações do cilindro com reforço de uma família de fibras a $0^\circ$ . . . . .	p. 78
34	Orientação das fibras na membrana . . . . .	p. 78
35	Seqüência de deformações do cilindro com reforço de uma família de fibras a $30^\circ$ . . . . .	p. 81

## *Lista de Tabelas*

1	Funções potenciais Hencky . . . . .	p. 59
2	Funções potenciais Neo-Hookean . . . . .	p. 60
3	Funções potenciais Holzapfel . . . . .	p. 60
4	Funções potenciais utilizadas . . . . .	p. 62
5	Parâmetros utilizados . . . . .	p. 69

# *Simbologia*

## **Alfabeto Grego**

$\Psi$	Função Energia de Deformação
$\lambda_i$	Autovalor do tensor de estiramento
$\sigma$	Tensor de Cauchy
$\varepsilon$	Deformação
$\eta$	Parâmetro de viscosidade
$\tau$	Coefficiente de relaxação do tempo
$\alpha_i$	Conjunto de variáveis internas
$\mu_1, \mu_2, \mu_3$	Constantes do modelo de Ogden
$\varphi^e$	Função potencial elástica
$\psi^e$	Função potencial viscosa
$\lambda_f^e$	Elongamento elástico da fibra
$\lambda_f^v$	Elongamento viscoso da fibra
$\varepsilon_n$	Conjunto das variáveis internas e externas
$\Omega_0$	Domínio do corpo no tempo inicial

## **Alfabeto Latino**

<b>P</b>	Tensor de Piola-Kirchhoff
<b>F</b>	Gradiente de Deformação
<b>C</b>	Tensor de Cauchy-Green
<b>a</b> <sub>0</sub>	Vetor de orientação das fibras
<b>A</b> <sub>0</sub>	Tensor estrutural dependente da orientação das fibras
<b>W</b>	Energia livre de deformação
$I_1, I_2, I_3$	Invariantes de Deformação de Green
$I_4$	Invariante que corresponde ao quadrado do alongamento da fibra
$p$	Escalar multiplicador de Lagrange
<b>S</b>	Segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff

$k_1, k_2$	Parâmetros das funções de Holzapfel
$J$	Jacobiano
$\mathbf{b}$	Tensor de Deformação de Cauchy-Green à esquerda
$E, E_\infty$	Constantes da mola
$G(t)$	Função de Relaxação
$\mathbf{E}$	Tensor tensão de Green
$\mathbf{D}^v$	Deformação viscosa
$d_j^v$	Autovalores de $D^v$ - amplitude da parcela viscosa
$d$	Taxa de deformação viscosa da fibra
$\mathbf{M}_j^v$	Autoprojeções de $D_j^v$
$d_i^v$	Autovalores de $\psi$
$k$	Constante volumétrica
$c_a^e$	Autovalores de $\varphi^e$

## Índices

$[ ]_{n+1}$	Próximo incremento
$[ ]_n$	Incremento atual
$[ ]^{pr}$	Preditor
$[ ]^{-1}$	Inversa da matriz
$[ ]^T$	Transposta da matriz
$[ ]^{-T}$	Inversa da transposta da matriz
$[ ]_f$	Relativo à inclusão das fibras

# *Resumo*

O estudo do comportamento mecânico de diferentes sistemas e componentes biológicos submetidos a esforços termomecânicos é uma área de conhecimento abordada pela biomecânica. Diversos modelos mecânicos matemáticos apropriados para sistemas biológicos podem ser resolvidos utilizando ferramentas numéricas, possibilitando a simulação de problemas complexos, com conseqüente aplicação em diversas situações, como por exemplo, no planejamento de procedimentos cirúrgicos. A descrição do comportamento dos diversos materiais frente a ação de esforços mecânicos é realizado mediante os denominados modelos constitutivos.

Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de modelos constitutivos apropriados para tecidos biológicos, em particular, ligamentos e tendões. Os ligamentos e tendões fazem parte do grupo de tecidos biológicos conectivos moles formados por fibras de colágeno envolvidas numa matriz intercelular. São estruturas fortemente solicitadas mecanicamente, tendo como características principais o comportamento viscoelástico anisotrópico quando submetidos a esforços mecânicos.

Propõe-se, assim, uma formulação constitutiva apropriada para a simulação desses tecidos biológicos. Tal formulação baseia-se na existência de uma energia livre de deformação,  $\Psi$ , e no uso de variáveis internas, capaz de prever o comportamento desses materiais quando submetidos a deformações finitas. Considera-se uma lei viscoelástica anisotrópica, orientada devido à incorporação das fibras de colágeno no modelo. A proposta insere-se numa abordagem variacional, fornecendo estrutura matemática adequada para análise e estimativa de erro. Diferentes modelos de comportamento de material podem ser representados dependendo da escolha de funções potenciais adequadas. São apresentados, ainda, testes numéricos via Elementos Finitos como forma de validação do modelo proposto.

Palavras-chave: Biomecânica, anisotropia, viscoelasticidade não-linear.

# *Abstract*

The study of the mechanical behavior by different systems and biological components submitted to thermodynamical efforts is an area of knowledge approached by biomechanics. Several appropriated mathematical mechanical models to biological systems can be solved using numerical tools, enabling the simulation of complex problems, with application in several situations, for example, planning cirurgical procedures. The description of the behavior of the materials against the action of mechanical efforts is realized by means of the denominated constitutive models.

This work has as an objective the development of appropriated constitutive models to biological tissue, in particular, ligaments and tendons. The ligaments and tendons play a hole of the group of soft connective biological tissues made of collagen fibers involved in a intercellular matrix. They are structures strongly mechanically solicited, having the mains features the anisotropic viscoelastic behavior when submitted to mechanical efforts.

Then, one can propose an appropriated constitutive formulation to the simulation of theses biological tissues. Such formulation is based in the existence of a free energy of deformation,  $\Psi$ , and in the use of internal variables, capable of provide the behavior of theses materials when submitted to finite deformations. We consider an anisotropic viscoelastic law, oriented by an incorporation of collagen fibers in the model. The proposal is inserted in a variational approach, providing a proper mathematic structure to the analysis and error estimate. Different models of material behavior can be represented depending of the choice of suitable potential functions. We also present numerical tests via Finite Elements with validation form of the proposal model.

Key-words: Biomechanics, anisotropy, nonlinear viscoelasticity.

# *1 Introdução*

A biomecânica, segundo Woo [31], é a área de conhecimento que utiliza princípios e conceitos da mecânica e da engenharia para permitir a compreensão do comportamento de tecidos vivos ou componentes inertes em atuação com tecidos vivos (sistemas biomecânicos). Um dos objetivos da biomecânica é estudar e prever o comportamento de corpos biológicos mediante o uso de modelos que levam em conta características cinemáticas, dinâmicas, biológicas e do material para representá-los.

O uso do computador torna possível a criação de modelos numéricos baseados nos modelos matemáticos que descrevem de maneira realista o problema em estudo, ampliando o conhecimento sobre o comportamento mecânico desses problemas, propiciando, assim, um maior êxito em prováveis intervenções cirúrgicas.

Um dos aspectos necessários para uma modelagem mecânica satisfatória é a representação correta da resposta do material frente a ação de cargas mecânicas. Esses modelos, denominados modelos constitutivos, exigem o conhecimento de equações constitutivas exatas capazes de considerar grandes deslocamentos e deformações finitas para o caso em que o material é um tecido biológico.

Devido a grande dificuldade para a realização de experimentos com o objetivo de identificar parâmetros adequados para aproximar de maneira realista as simulações computacionais, é visível na literatura o crescimento de trabalhos científicos nessa área, oferecendo diversas alternativas de abordagens e se tornando um amplo campo de pesquisa. Na grande maioria, para a representação do comportamento desses tecidos conectivos, são utilizados modelos constitutivos hiperelásticos e viscoelásticos.

O presente trabalho tem como objetivo o estudo de modelos constitutivos adequados para a representação de tecidos biológicos moles, em particular tecidos conectivos como tendões e ligamentos, incorporando a característica de anisotropia orientada à formulação proposta em [8].

Os ligamentos e tendões são estruturas fortemente solicitadas mecanicamente e, portanto, sujeitas aos mais variados tipos de lesões, entre eles o rompimento dos mesmos levando muitas vezes ao uso de técnicas cirúrgicas para sua reparação. Eles fazem parte do grupo de tecidos biológicos conectivos moles que tem como principal característica um comportamento não-linear anisotrópico. Além disso, eles sustentam grandes deformações, rotações e deslocamentos e são estruturas adaptadas para transmitir as cargas de osso para osso (ligamentos) e do músculo para osso (tendão). Ambos tem a função de transmitir forças de modo que não induzam carregamentos bruscos entre os vários componentes do sistema muscular esquelético.

O Capítulo 2 destina-se a uma breve introdução sobre a constituição biológica dos ligamentos e tendões, bem como o comportamento que os mesmos apresentam quando solicitados mecanicamente. Esse capítulo apresenta, ainda, alguns dos recentes trabalhos da literatura que abordam o estudo em questão. No Capítulo 3 faz-se uma pequena revisão sobre os conceitos fundamentais em que baseia-se a teoria fenomenológica de hiperelasticidade, bem como, apresenta-se os modelos propostos por Simo [25] e Holzapfel [12].

O Capítulo 4 apresenta um estudo do modelo fenomenológico viscoelástico, não entrando no mérito intermolecular dos materiais. Esses modelos são muito utilizados para a representação de ligamentos devido à capacidade de representar as propriedades intermediárias entre materiais elásticos e viscosos.

O Capítulo 5 destina-se à apresentação de uma formulação constitutiva adequada para a simulação de tecidos biológicos moles baseada na formulação variacional apresentada no trabalho de Fanello et al. [8]. Tal formulação constitutiva prevê a incorporação de famílias de fibras de colágeno através da introdução de um potencial de energia de deformação que considera a contribuição de fibras de colágeno no material.



Por fim, no Capítulo 6, através da utilização do modelo constitutivo proposto, apresentam-se alguns exemplos numéricos unidimensionais e tri-dimensionais, simulados via Elementos Finitos, no GNU Octave e no *METAFOR*® como forma de validação da formulação proposta.

## 2 *Revisão bibliográfica*

### 2.1 Estrutura dos ligamentos e tendões

Os ligamentos e tendões são tecidos biológicos moles (ver [29]) formados por fibras onduladas de colágeno (entremeados por células de fibroplastos) envolvidos numa matriz intercelular constituída por proteínas e polissacarídeos, com aproximadamente 70 % de seu volume sendo água. Considerando apenas o material sólido dessa matriz, encontra-se em sua composição Colágeno dos tipos I, III, V além de glicoproteínas e elastina.

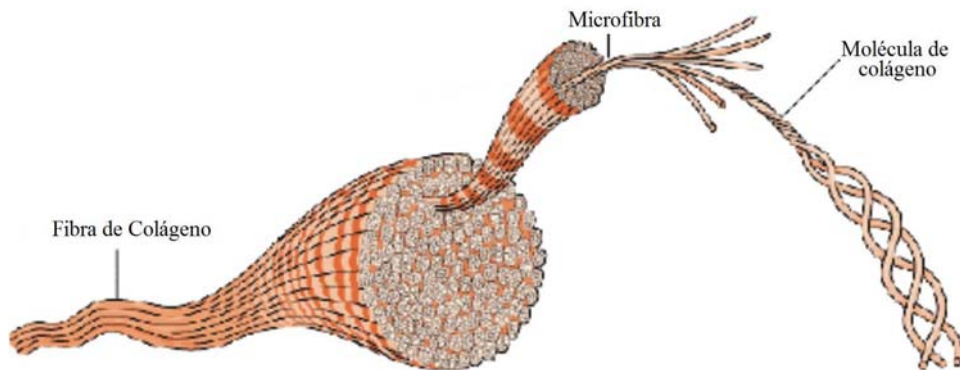


Figura 1: Estrutura hierárquica de uma fibra de colágeno[5]

O colágeno é uma proteína contendo três cadeias de aminoácidos enrolados em uma hélice tripla tendo como principal propriedade física a resistência à aplicação da força de tração [14]. Os aminoácidos encontrados no colágeno são responsáveis por manter as fibras resistentes ao alongamento de forma que, mais resistentes serão as fibras quanto maior for a concentração de aminoácidos presentes. As fibras de colágeno não encontram-se necessariamente em paralelo, formando assim, uma cadeia de fibras entrelaçadas, que dá aos ligamentos a propriedade de anisotropia.

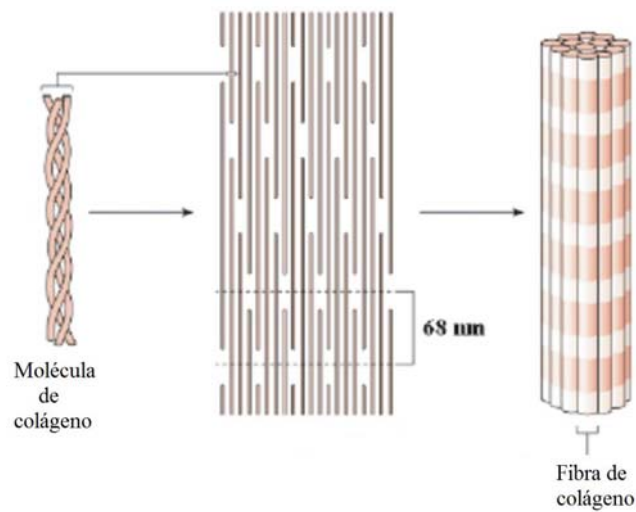


Figura 2: Arranjo de uma fibra de colágeno [5]

Tanto os ligamentos quanto os tendões têm a função de transmitir forças de modo que não induzam carregamentos bruscos entre os vários componentes do sistema muscular esquelético. Os ligamentos são estruturas adaptadas para transmitir cargas de osso para osso e os tendões de músculos para osso.

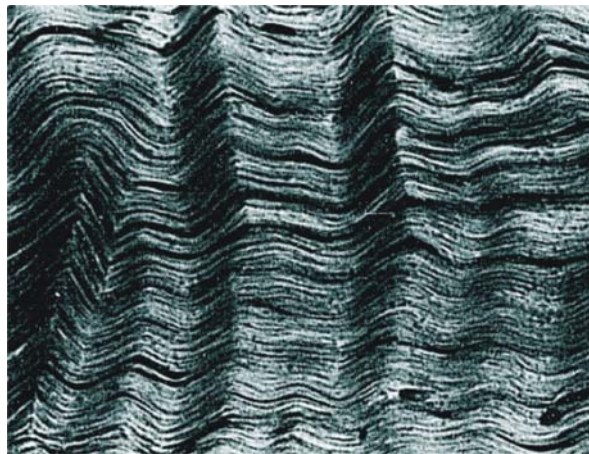


Figura 3: Aparência histológica de um ligamento [9]

Frank et al. [9] relataram que os ligamentos são estruturas anisotrópicas com propriedades viscoelásticas. Eles apresentam um comportamento mecânico não-linear e as fibras, quando solicitadas, aumentam de modo progressivo e irreversível seu comprimento, perdendo o padrão ondulatório. Desde que a força não alcance o limite de resistência mecânica do mesmo, as fibras voltam à situação normal de repouso sem lesionar-se.

A característica principal desses corpos é que são capazes de suportar grandes esforços mecânicos. A relação tensão versus deformação pode ser visualizada na Figura 4 onde o material, inicialmente em repouso, é tracionado até o momento de rompimento das fibras.

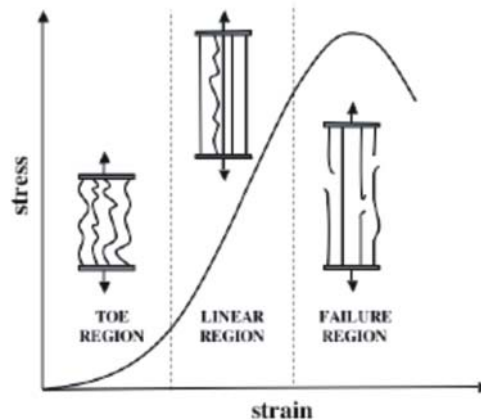


Figura 4: Relação tensão deformação [9]

Diversos trabalhos vêm sendo publicados nessa área e, uma grande variedade de modelos analíticos foi desenvolvida com o objetivo de investigar o comportamento mecânico de ligamentos e tendões quando submetidos à grandes deformações, rotações e deslocamentos.

Os modelos mais utilizados fazem menção à materiais incompressíveis (já que a matriz intercelular é composta 70% de água) dependentes da velocidade com que ocorre a deformação, ou seja, agregando as propriedades viscoelásticas.

## 2.2 Trabalhos relacionados

Geralmente, a maior parte dos modelos hiperelásticos e viscoelásticos que agregam ou não as propriedades de isotropia ou anisotropia trabalham com materiais compostos envolvendo as fibras de colágeno e uma matriz intercelular de proteínas. Neste trabalho, como mencionado anteriormente, foca-se o desenvolvimento de um modelo constitutivo viscoelástico, adequado para representação de tecidos conectivos moles. Porém, faz-se também um breve relato sobre trabalhos que visam as simulações computacionais envolvendo tais modelos.

Entre os pesquisadores que publicaram trabalhos de modelamento de ligamentos pode-se citar Bendjaballah et al. [2] que desenvolveram um modelo de elementos finitos tri-dimensional para investigar detalhes biomecânicos de um ligamento tíbio-femural aplicando forças trativas, com diferentes valores de cargas, a diferentes ângulos de rotações. Nesse caso, a simulação dos ligamentos foi feita utilizando elementos unidimensionais.

Blankevoort et al. [3] apresentam um modelo matemático tri-dimensional da articulação tíbio-femural do joelho. Para o modelamento, os ligamentos foram simulados como elementos unidimensionais com propriedades do material obtidos da literatura. Das quatro amostras de ligamentos, quando comparadas a seus modelos, dois apresentaram excelente desempenho e outros dois mostraram comportamento pobre em relação à rotação quando comparados a resultados experimentais.

Moglo et al. [20] apresentaram um modelo que consiste em duas estruturas ósseas e cartilagens articuladas aplicando uma carga de 100N e ângulos de 0° a 90 graus nos ligamentos. Seu trabalho teve como objetivo investigar os graus de acoplamento entre os ligamentos “cruzado posterior”(PCL) e “cruzado anterior”(ACL) através da análise tri-dimensional simulando os ligamentos através de elementos unidimensionais, tais como Bendjaballah et al. [2].

Como mencionado, os trabalhos citados utilizam modelos unidimensionais para representar as conexões de ligamentos e tendões. Em outras palavras, os modelos de elementos finitos usam elementos tipo barra ou viga para representar um feixe de ligamentos. Porém, quando o foco de observação é o próprio ligamento, é conveniente que esse seja modelado de forma mais precisa, mediante representações tridimensionais (elementos volumétricos) possibilitando uma análise mais realista do modelo quando sujeito a aplicação de torções e outras forças.

Pioletti et al. [23], criaram um modelo geométrico através do software *ABAQUS*<sup>®</sup> (e também *PATRAN*<sup>®</sup>) utilizando uma lei constitutiva isotrópica linear para estudar a influência da geometria do ligamento ACL quando submetido à flexões e distribuição de tensões. Seu principal objetivo era determinar um potencial elástico capaz de descrever o comportamento não-linear do ligamento para situações de grandes deformações e, após,

fazer a implementação em um modelo de elementos finitos tri-dimensional. O potencial utilizado é o mesmo proposto por Veronda [30] e abrange duas parcelas, sendo uma delas uma função exponencial, e, ambas dependentes de 2 parâmetros obtidos através de dados experimentais e dos dois invariantes de deformação ( $I_1$  e  $I_2$ ). Neste caso para as simulações se faz o uso de elementos volumétricos para representar o ligamento.

Song et al. [27] apresentam um modelo tri-dimensional de elementos finitos para determinar a distribuição de força e tensão não uniforme do ligamento ACL do joelho. Os ligamentos foram simulados considerando materiais isotrópicos hiperelásticos e homogêneos incompressíveis onde as forças calculadas foram comparadas com resultados experimentais para validação do problema. Tal como Pioletti et al. [23], a função potencial utilizada para descrever o comportamento dos tecidos biológicos é a mesma proposta por Veronda [30]. A simulação dos ligamentos é feita utilizando elementos volumétricos.

As simulações realizadas para ligamentos em 3-D necessitam, obrigatoriamente de equações constitutivas adequadas para obter resultados satisfatórios. Entre os trabalhos que fazem estudo do desenvolvimento de modelos constitutivos viscoelásticos para tecidos biológicos pode-se citar Pioletti et al. [22] que apresentam um modelo tri-dimensional aplicado à simulação de tecidos moles. Assim, desenvolvem uma estrutura baseada nos potenciais elásticos e viscosos (expressos em termos dos invariantes de deformação) com resultados válidos para grandes deformações que satisfazem os princípios da termodinâmica. O desenvolvimento constitutivo elaborado pode ser usado com respeito a diversos valores de deformação e rotação. O potencial elástico utilizado é o mesmo proposto por Veronda e Westmann [30], baseado numa função exponencial com dois parâmetros elásticos ( $\alpha$  e  $\beta$ ).

Miller [19] trabalhou num modelo constitutivo para tecidos cerebrais e utilizou um software comercial de elementos finitos (*ABAQUS*<sup>®</sup>) para implementar um modelo viscoelástico linear adequado para grandes deformações. Em seu trabalho, o modelo constitutivo proposto é da forma polinomial com coeficientes dependentes do tempo. Seu modelo requer apenas quatro parâmetros materiais (duas a menos que no modelo não-linear) onde compara as soluções numéricas com dados experimentais.

Hirokawa et al. [11] apresentou um modelo constitutivo para o ACL - ligamento cruzado anterior - onde o mesmo foi representado por uma matriz hiperelástica homogênea. A função de energia de deformação foi formulada considerando potenciais referentes à matriz (parcela isotrópica) e às famílias de fibras separadamente. O alongamento das fibras é determinado através do tensor  $C$  de Cauchy-Green e do vetor de orientação das fibras. As características de dependência do tempo (viscosidade) foram desconsideradas já que o ligamento, para esse caso, não sofreu mudanças bruscas de velocidade, trabalhando assim, num regime quase-estático.

Em seu trabalho, Hirokawa et al. [11] usou o modelo de Mooney-Rivlin trabalhando com duas famílias de fibras de colágeno, uma com orientação paralela e outra se estendendo radialmente em oito direções igualmente espaçadas. O modelo, assim, envolve anisotropia, incompressibilidade, não-linearidade e hiperelasticidade. Tal modelo foi simulado com o objetivo de obter a distribuição de tensão ao longo da superfície do ligamento mediante a aplicação de forças e torção.

Limbert et al. [16] abordam a teoria de materiais compostos reforçados com duas famílias de fibras contínuas de colágeno embebidas numa matriz sólida. Apresentam também expressões de tensores de elasticidade nas configurações material e espacial sem excluir restrições cinemáticas (incompressibilidade e inextensibilidade), ressaltando novos termos de acoplamento. Sua formulação baseia-se nos invariantes tensoriais do tensor de deformação de Cauchy-Green à direita e a implementação do modelo é feita através do MEF. Também apresentam casos especiais para a formulação anisotrópica geral: ortotropia e simetrias transversalmente isotrópicas são destacadas.

Limbert et al. [17] propõe uma lei constitutiva visco-hiperelástica transversalmente isotrópica, incluindo efeitos da taxa de tensão com o objetivo de avaliar o comportamento de tecidos biológicos moles. Esta baseou-se na definição da função de energia livre de Helmholtz que depende do tensor de Cauchy-Green à direita. Os potenciais elásticos viscosos que definem a função energia livre foram considerados desacoplados e o modelo foi testado em muitas situações de carregamento multi-axial. O modelo envolve anisotropia, comportamento não-linear e grandes deformações.

A função energia de deformação utilizada que refere-se ao comportamento do ligamento ACL é decomposta no somatório de uma função relativa à matriz intercelular com uma função energia de deformação relativo ao comportamento anisotrópico introduzido pelas fibras de colágeno. A primeira, relativa à matriz, é escolhida como um potencial hiperelástico isotrópico Neo-Hookean. Considerando a incapacidade das fibras de colágeno sustentarem efeitos compressivos foi considerada que a função relativa às fibras é decomposta em uma função potencial caracterizada por uma lei exponencial quando o alongamento da fibra é maior que 1 e sendo zero quando o alongamento da mesma é inferior a 1. Os parâmetros constitutivos utilizados na função de energia deformação são os mesmos obtidos experimentalmente por Pioletti [23]. Para a simulação, o modelo geométrico do ACL foi construído utilizando elementos volumétricos, com o objetivo de medir experimentalmente o desempenho do ligamento sujeito a testes cinemáticos. São apresentadas ainda, curvas hiperelásticas isotrópicas e hiperviscoelásticas transversalmente isotrópicas com variações na velocidade de deformação.

Holzapfel, Gasser [13] apresentaram um modelo constitutivo viscoelástico anisotrópico onde modelos para materiais transversalmente isotrópicos e ortotrópicos são incluídos em casos especiais, também considerando a representação desacoplada da função energia livre de Helmholtz  $\psi$ . Nesses modelos constitutivos anisotrópicos os potenciais elásticos e dissipativos são considerados dependentes não somente da deformação, mas também da orientação das duas famílias de fibras consideradas. O potencial relativo ao material isotrópico é caracterizado pelo modelo material Mooney-Rivlin, já o potencial referente às fibras é uma função exponencial que será apresentada mais detalhadamente no decorrer do trabalho. A partir desse modelo constitutivo são realizados testes de carregamento cíclico para investigar o comportamento anisotrópico viscoelástico de um tubo circular pressurizado reforçado com fibras. A distribuição de tensão ao longo do tubo é analisada para diferentes velocidades de deformação.



---

Guo et al. [10] apresentam um modelo hiperelástico transversalmente isotrópico para tecidos biológicos moles. O tecido é tratado como um material composto com uma família alinhada de fibras. O potencial utilizado, tanto para a matriz quanto para as fibras é o Neo-Hookean e ambos são considerados materiais incompressíveis. O modelo foi simulado, testado numericamente e comparado com dados experimentais retirados da literatura como forma de validação do mesmo.

No capítulo a seguir discute-se sobre modelos constitutivos e, apresenta-se, de maneira resumida as formas clássicas dos modelos hiperelásticos isotrópicos.

### *3 Modelos hiperelásticos*

Os modelos constitutivos são modelos mecânico-matemáticos desenvolvidos para a simulação computacional, que, no contexto da Mecânica do Contínuo, são capazes de representar o comportamento de tensão versus deformação de um material em estudo. Tais modelos devem ser muito bem estruturados matematicamente a fim de não violarem conceitos básicos, como as leis da termodinâmica e, principalmente, serem suficientemente capazes de representar adequadamente o tecido biológico em questão.

Atualmente, os modelos constitutivos mais utilizados e encontrados na literatura para descrever o comportamento mecânico de tecidos biológicos moles são os hiperelásticos e viscoelásticos já que os ligamentos são estruturas anisotrópicas constituídas por fibras e, portanto, apresentam características viscoelásticas não-lineares, como descrito anteriormente. Neste capítulo, apresenta-se um estudo dos modelos fenomenológicos hiperelásticos, não entrando no mérito das interações moleculares do material. Todo o desenvolvimento da teoria hiperelástica, aqui apresentado, se dará considerando as referências [4], [12] e [18].

O comportamento do material é dito elástico se responde a solicitações mecânicas se deformando sem dissipação de energia. Em outras palavras, a energia acumulada na deformação é devolvida integralmente quando descarregado.

Os modelos hiperelásticos baseiam-se na existência de uma função de energia de deformação, também conhecida como função de energia livre de Helmholtz,  $W = W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{C})$  dependente exclusivamente do estado de deformação definido pelo gradiente de deformação  $\mathbf{F}$  ou pelo tensor de Cauchy-Green  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ , e é definida por unidade de volume na configuração de referência. A condição de que a energia livre  $W$  dependa unicamente

da deformação total através de  $\mathbf{C}$  resulta da necessidade que essa energia seja objetiva [12], ou seja, independente do observador. Essa energia livre possui a propriedade de permitir determinar o tensor de tensões Piola-Kirchhoff [12] como uma função do estado de deformação  $C$  mediante a expressão

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{F} \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad (3.1)$$

O formato da energia livre  $W$  depende das características de comportamento do material a ser modelado.

A seguir, são apresentados modelos hiperelásticos com algumas particularidades, como, por exemplo, para materiais isotrópicos e hiperelásticos incompressíveis e compressíveis.

### 3.1 Modelos hiperelásticos isotrópicos

A função energia de deformação pode-se adequar de maneira a respeitar a propriedade de isotropia de um material. Essa propriedade significa que a resposta do material é a mesma em todas as direções de aplicação de carga.

Nestes casos a energia de deformação  $W$  pode ser expressa em termos dos invariantes principais  $I_1, I_2, I_3$  do tensor simétrico de Cauchy-Green ( $\mathbf{C}$  ou  $\mathbf{b}$ , onde  $\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ ), ver [12], [18]:

$$\begin{aligned} W &= W[I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C})] \\ &= W[I_1(\mathbf{b}), I_2(\mathbf{b}), I_3(\mathbf{b})] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Os invariantes são dados por

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{C}) &= \text{tr}(\mathbf{C}), \\ I_2(\mathbf{C}) &= \frac{1}{2} ((\text{tr}(\mathbf{C}))^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)), \\ I_3(\mathbf{C}) &= \det \mathbf{C} = J^2 \end{aligned}$$

dessa maneira, tendo em vista a equação (3.1), pode-se escrever o primeiro tensor tensão

de Piola-Kirchhoff como

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{F} \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \right) \quad (3.3)$$

Uma outra forma de representação é através do uso da decomposição espectral: os autovetores  $\{\tilde{\mathbf{N}}_a\}$  e autovalores  $\{\lambda_a\}$  do tensor de alongamento direito  $\tilde{\mathbf{U}} = \sqrt{\mathbf{C}}$  são definidos de maneira que se verifique  $\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a \tilde{\mathbf{N}}_a \otimes \tilde{\mathbf{N}}_a$ , com  $J = \det \mathbf{U} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$  e, assim,  $\{\tilde{\mathbf{N}}_a\}$  é uma base de  $\mathbf{U}$ . Da mesma maneira, define-se  $\{\mathbf{n}_a\}$  autovetor e  $\{\lambda_a\}$  autovalor do tensor de alongamento esquerdo  $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{b}}$ , com  $\mathbf{V} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a \mathbf{n}_a \otimes \mathbf{n}_a$  evidenciando que  $\{\mathbf{n}_a\}$  é uma base ortonormal de  $\mathbf{V}$ .

Sendo  $W$  invariante em relação a qualquer rotação do material, pode-se expressar essa energia dependente apenas dos autovalores  $\lambda$ , de  $\mathbf{U}$  ou  $\mathbf{v}$

$$W = W(\mathbf{C}) = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (3.4)$$

onde tal energia é uma propriedade de funções isotrópicas de um tensor simétrico. Tendo em vista a equação (3.1), pode-se calcular a derivada da função isotrópica  $W(\mathbf{C})$  em relação ao tensor simétrico  $\mathbf{C}$ . Através da regra da cadeia têm-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} &= \sum_{a=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_a^2} \frac{\partial \lambda_a^2}{\partial \mathbf{C}} \\ &= \sum_{a=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_a^2} \hat{\mathbf{N}}_a \otimes \hat{\mathbf{N}}_a \end{aligned} \quad (3.5)$$

Em (3.5),  $\lambda_a^2$  são os autovalores (quadrados dos alongamentos principais) e  $\hat{\mathbf{N}}_a$  correspondem aos autovetores (direções principais de  $\mathbf{C}$ ). O primeiro tensor de Piola-Kirchhoff é escrito, em decomposição espectral por

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{F} \left( \sum_{a=1}^3 \frac{1}{\lambda_a} \frac{\partial W}{\partial \lambda_a} \hat{\mathbf{N}}_a \otimes \hat{\mathbf{N}}_a \right) \\ &= \sum_{a=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_a} (\mathbf{F} \hat{\mathbf{N}}_a) \otimes \hat{\mathbf{N}}_a \\ &= \sum_{a=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_a} \hat{\mathbf{n}}_a \otimes \hat{\mathbf{N}}_a \end{aligned} \quad (3.6)$$

## 3.2 Hiperelasticidade incompressível

A teoria de hiperelasticidade incompressível é utilizada para descrever materiais que possuem a característica de permanecer com volume constante durante o processo de deformação. Muitos tipos de materiais (entre eles tecidos biológicos) podem sofrer deformações consideráveis sem mudanças de volume apreciáveis. Em geral, o material é sujeito a uma restrição cinemática interna:

$$J = \det \mathbf{F} = 1 \quad (3.7)$$

Para obter uma equação constitutiva geral para materiais hiperelásticos incompressíveis,  $W$  pode ser escrito como

$$W = \bar{W}(\mathbf{F}) - p(J - 1) \quad (3.8)$$

onde o escalar  $p$  é um multiplicador de Lagrange posteriormente determinado por equilíbrio e cuja interpretação física é, claramente, o valor da pressão hidrostática.

Diferenciando a equação (3.8) em relação ao gradiente de deformação  $\mathbf{F}$  (e usando a relação  $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} = J\mathbf{F}^{-T}$ ) pode-se facilmente encontrar a equação constitutiva gerada para o primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{P}$ . Assim, usando o fato que  $J = 1$ , a equação (3.1) toma a forma

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= -p\mathbf{F}^{-T} + \frac{\partial \bar{W}(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \\ &= -p\mathbf{F}^{-T} + 2\mathbf{F} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{C}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

enquanto o tensor de Cauchy é dado por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= -p\mathbf{I} + \frac{\partial \bar{W}(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T \\ &= -p\mathbf{I} + \left( 2\mathbf{F} \frac{\partial \bar{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade. Para o caso de hiperelasticidade isotrópica incompressível a

função energia deformação é dada através de funções da forma

$$\begin{aligned} W &= \overline{W}[I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C})] - \frac{1}{2}p(I_3(\mathbf{C}) - 1) \\ &= \overline{W}[I_1(\mathbf{b}), I_2(\mathbf{b})] - \frac{1}{2}p(I_3(\mathbf{b}) - 1) \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde  $\frac{p}{2}$  é o multiplicador de Lagrange, a priori, indeterminado.

### 3.3 Materiais hiperelásticos compressíveis

Muitos materiais alteram seu volume durante o processo de deformação/tensão. Mesmo os materiais ditos incompressíveis têm quantidades mínimas de variação volumétrica. Nesses casos, é útil realizar a seguinte decomposição multiplicativa de  $\mathbf{F}$

$$\widehat{\mathbf{F}} := \frac{1}{J^{\frac{1}{3}}}\mathbf{F}, \quad J := \det[\mathbf{F}], \quad \widehat{\mathbf{C}} = \widehat{\mathbf{F}}^T \widehat{\mathbf{F}} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{F} = J^{\frac{1}{3}}\widehat{\mathbf{F}}, \quad \det[\widehat{\mathbf{F}}] = 1 \quad (3.13)$$

Nas equações (3.13),  $\widehat{\mathbf{F}}$  e  $J\mathbf{I}$  são chamadas de parcelas desviadora e esférica do gradiente deformação  $\mathbf{F}$ , respectivamente. Os tensores de Cauchy-Green à direita e o tensor Lagrangeano associados a equação (3.12) são dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &:= \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \\ \widehat{\mathbf{C}} &:= \widehat{\mathbf{F}}^T \widehat{\mathbf{F}}, \quad \widehat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\widehat{\mathbf{C}} - \mathbf{I}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Nos modelos viscoelásticos a seguir, supõe-se que a temperatura é constante ( $\theta = \theta_0$ ). Dessa forma, faz-se uso de uma função de energia livre de deformação que define o estado termodinâmico da variável  $\mathbf{F}$  e um conjunto de variáveis internas que representam o mecanismo de dissipação do material.

Para o estudo destes materiais pode-se utilizar uma representação desacoplada da energia de deformação [12]

$$W(\mathbf{C}) = U(J) + \psi_{iso}(\widehat{\mathbf{C}}) \quad (3.15)$$

onde  $U(J)$  descreve a reação elástica volumétrica,  $\psi_{iso}(\widehat{\mathbf{C}})$  a reação elástica isocórica.

Da mesma forma, a energia de deformação pode ser representada também em termos do tensor  $\mathbf{b}$

$$W(\mathbf{b}) = U(J) + \psi_{iso}(\widehat{\mathbf{b}}) \quad (3.16)$$

onde  $\widehat{\mathbf{b}}$  pode ser obtido da relação  $\mathbf{b} = J^{\frac{2}{3}}\widehat{\mathbf{b}}$ , também chamado de tensor de Cauchy-Green à esquerda modificado.

### 3.4 Algumas formas de função Energia de Deformação

Existem diversos modelos representativos de  $W$  conhecidos para elasticidade descrevendo materiais hiperelásticos isotrópicos. Neste trabalho,  $U(J)$  é definido pela expressão  $U(J) = \frac{k}{2}[\ln J]^2$ , com  $k$  conhecido como *módulo volumétrico* e que atua como parâmetro de penalização para modelos quasi-incompressíveis como o caso que aqui nos interessa. Para a parcela isocórica, dois modelos são bastante utilizados na literatura, o modelo de Ogden e o modelo de Hencky.

O modelo de Ogden, para hiperelasticidade incompressível, é escrito em função dos autovalores do tensor  $\mathbf{C}$  e tem a forma

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_a^{\alpha_p} - 1), \quad a = 1, 2, 3 \quad (3.17)$$

Para o caso de hiperelasticidade compressível, a parcela isocórica é escrita não somente em termos de  $\lambda_a$ , mas também tem dependência direta em relação a  $J$ . Já o modelo de Hencky baseia-se na forma quadrática dos tensores de deformação logarítmica, podendo escrever os potenciais da seguinte maneira:

$$W = \mu \sum_{j=1}^3 (\varepsilon_j)^2, \quad (3.18)$$

onde  $\varepsilon_j = \ln(\lambda_j)$ .

Um outro modelo, utilizado posteriormente neste trabalho para a representação das famílias de fibras é uma função exponencial proposta por [13]:

$$W = \frac{k_1}{2k_2} \{e^{[k_2(\bar{I}_4-1)^2]} - 1\} \quad (3.19)$$

onde  $\bar{I}_4 = J^{-\frac{2}{3}}I_4$  e  $I_4(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0) = \mathbf{C} : \mathbf{A}_0$ . O invariante  $I_4$  determina precisamente o quadrado do alongamento da fibra ( $\lambda^2$ ), caracterizado pelo vetor  $\mathbf{a}_0$  que refere-se à orientação das fibras. Maiores detalhes serão apresentados na Capítulo 5.



## 4 Modelos viscoelásticos

O estado termodinâmico atual de um material hiperelástico pode ser determinado completamente a partir do conhecimento do gradiente de deformação  $\mathbf{F}$ , variável de estado que pode ser mensurada e assim, classificada como variável de estado externa. Já estado termodinâmico de materiais que envolvem dissipação de energia depende do valor de um conjunto finito de variáveis de estado frequentemente não mensuráveis ou variáveis internas que contabilizam a história dos processos dissipativos realizados no material.

Muitos modelos viscoelásticos encontrados na literatura baseiam-se na introdução dessas variáveis internas, entre eles, os modelos clássicos de Simo [26] e Holzapfel [12], aqui apresentados mais detalhadamente. Dessa maneira, a função energia se determina a partir de  $\mathbf{C}$  e de certas *variáveis internas de deformação*. A evolução das variáveis internas reproduz indiretamente a história da deformação ou tensão e, assim, elas são também chamadas de *variáveis internas históricas*.

As seções 4.1 e 4.2 estão destinadas ao estudo de modelos viscoelásticos unidimensionais e tridimensionais para pequenas deformações. Ambas contém material extraído de [26] e estão incorporadas aqui para tornar o presente texto auto contido. O leitor já habituado a essa abordagem de viscoelasticidade pode continuar no Capítulo 5.

### 4.1 Viscoelasticidade linear unidimensional

Os modelos viscoelásticos combinam características elásticas e viscosas, sendo representados frequentemente por modelos reológicos (modelos de fluxo) compostos por combinações de molas (parcela elástica) e amortecedores (parcela viscosa).

Existem dois modelos mecânicos frequentemente usados para representar o comportamento viscoelástico; o *Modelo de Maxwell* e o *Modelo de Kelvin-Voigt* aqui apresentados para pequenas deformações.

#### 4.1.1 Modelo de Maxwell

O modelo viscoelástico de Maxwell associa, em série, um modelo elástico (mola) e um viscoso (amortecedor), conforme mostra a figura abaixo: A deformação total é dada pelo

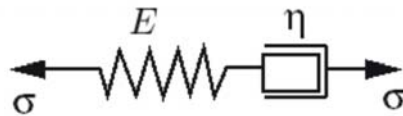


Figura 5: Representação do modelo de Maxwell

somatório das deformações elástica e viscosa. As tensões, elástica e viscosa, são iguais, dadas pelas equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \varepsilon^e(t) + \varepsilon^v(t) \\ \sigma(t) &= \sigma^e(t) = \sigma^v(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

Considerando  $E$  o módulo de elasticidade linear da mola e  $\eta$  a viscosidade no amortecedor, as equações constitutivas de cada contribuição são dadas por

$$\begin{aligned}\sigma^v(t) &= \eta \dot{\varepsilon}^v(t) \\ \sigma^e(t) &= E \varepsilon^e(t)\end{aligned}\tag{4.2}$$

Derivando a equação (4.1-1) obtém-se a equação diferencial que representa o comportamento mecânico do modelo:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta}\tag{4.3}$$

#### 4.1.2 Modelo de Kelvin-Voigt

O modelo de Kelvin-Voigt é resultante da associação de um elemento elástico e outro viscoso em paralelo: Para esse caso, a tensão resultante é dada pelo somatório das tensões

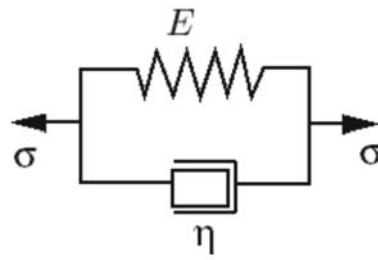


Figura 6: Representação do modelo de Kelvin-Voigt

elástica e viscosa. Já as deformações (elástica e viscosa) são iguais:

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \varepsilon^e(t) = \varepsilon^v(t) \\ \sigma(t) &= \sigma^e(t) + \sigma^v(t)\end{aligned}\tag{4.4}$$

Tendo em vista as equações (4.2) obtemos

$$\dot{\varepsilon}(t) + \frac{E}{\eta}\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{\eta}\tag{4.5}$$

### 4.1.3 Modelo viscoelástico de três componentes

Diversos modelos viscoelásticos foram desenvolvidos com o objetivo de representar melhor o comportamento dos materiais. Considere agora um modelo mecânico unidimensional com duas molas e um amortecedor, conforme a figura abaixo.

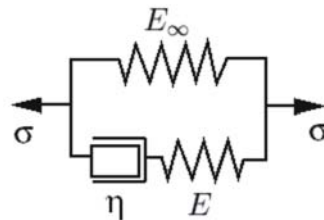


Figura 7: Representação do modelo de três componentes

Considerando a variável interna atuante no amortecedor,  $\alpha : (-\infty, T) \rightarrow \mathbb{R}$  e, supondo a seguinte relação constitutiva linear

$$\sigma^v = \eta \frac{\partial}{\partial t} \alpha(t)\tag{4.6}$$

onde  $\sigma^v$  é a tensão viscosa que atua no amortecedor e  $\frac{\partial}{\partial t}\alpha(t)$  é a taxa de deformação no amortecedor, a tensão total atuante é dada por

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \sigma^e + \sigma^v \\
 &= (E_\infty \varepsilon) + \eta \dot{\alpha} \\
 &= (E_\infty \varepsilon) + E(\varepsilon - \alpha) \\
 &= (E_\infty + E)\varepsilon - E\alpha \\
 &= E_0 \varepsilon - E\alpha
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

onde

$$E_0 := E_\infty + E \tag{4.8}$$

A variável interna  $\alpha$  satisfaz a equação de evolução

$$\begin{aligned}
 \dot{\alpha} &= \frac{E}{\eta}(\varepsilon - \alpha) \\
 \dot{\alpha} + \frac{E}{\eta}\alpha &= \frac{E}{\eta}\varepsilon
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Definindo o coeficiente de relaxação,  $\tau = \frac{\eta}{E}$ , tem-se a seguinte equação diferencial no tempo:

$$\begin{aligned}
 \dot{\alpha} + \frac{1}{\tau}\alpha &= \frac{1}{\tau}\varepsilon \\
 \lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha(t) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Essa equação pode ser escrita também de outra forma, não mais em função das deformações viscosas, mas em função das tensões viscosas. Dessa maneira, substitui-se a variável interna  $\alpha$ , representando as deformações viscosas, por um conjunto de variáveis internas  $q$  representando as tensões viscosas:

$$q := E\alpha \tag{4.11}$$

Tendo em vista a equação (4.7) obtém-se

$$\sigma = E_0 \varepsilon - q \tag{4.12}$$

Define-se  $W^0(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon E_0 \varepsilon$  e  $\gamma = \frac{E}{E_0}$ , assim o modelo constitutivo fica definido pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\partial W_0}{\partial \varepsilon}(\varepsilon) - q \\ \dot{q} + \frac{1}{\tau}q &= \frac{\gamma}{\tau} \frac{\partial W_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} q(t) &= 0\end{aligned}\tag{4.13}$$

multiplicando ambos os lados da equação (4.13)<sub>1</sub> por  $e^{\frac{t}{\tau}}$

$$\begin{aligned}\underbrace{e^{\frac{t}{\tau}} \dot{q} + \frac{e^{\frac{t}{\tau}} q}{\tau}} &= e^{\frac{t}{\tau}} \frac{\gamma}{\tau} \frac{\partial W_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \\ \frac{d}{dt}(e^{\frac{t}{\tau}} q) &= \gamma \frac{e^{\frac{t}{\tau}}}{\tau} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} W_0(\varepsilon)\end{aligned}$$

Integrando essa expressão e usando a equação (4.10)<sub>2</sub> obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{\frac{t}{\tau}} q(t)) &= \frac{\gamma}{\tau} e^{\frac{t}{\tau}} \frac{\partial W_0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \\ \int_{-\infty}^t \frac{d}{dt}(e^{\frac{t}{\tau}} q(t)) ds &= \int_{-\infty}^t \frac{\gamma}{\tau} e^{\frac{s}{\tau}} \frac{\partial W_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon(t)} ds\end{aligned}$$

Analisando somente o lado esquerdo da igualdade e, substituindo a variável de integração para melhor visualização, têm-se

$$\begin{aligned}(e^{\frac{s}{\tau}} q(s)) \Big|_{-\infty}^t &= e^{\frac{t}{\tau}} q(t) - \underbrace{e^{\frac{-\infty}{\tau}} q(-\infty)}_0 \\ &= e^{\frac{t}{\tau}} q(t)\end{aligned}$$

Logo,

$$e^{\frac{t}{\tau}} q(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\gamma}{\tau} e^{\frac{s}{\tau}} \frac{\partial W_0(\varepsilon(s))}{\partial \varepsilon} ds$$

Isolando  $q(t)$  têm-se:

$$\begin{aligned}q(t) &= e^{-\frac{t}{\tau}} \int_{-\infty}^t \frac{1}{\tau} e^{\frac{s}{\tau}} \gamma \frac{\partial W_0(\varepsilon(s))}{\partial \varepsilon} ds \\ &= \int_{-\infty}^t \underbrace{\frac{1}{\tau} e^{-\frac{(t-s)}{\tau}}}_{dv} \gamma \underbrace{\frac{\partial W_0(\varepsilon(s))}{\partial \varepsilon}}_u ds\end{aligned}$$

resolvendo a integral por partes tem-se:

$$v = e^{-\frac{(t-s)}{\tau}}, \quad du = \gamma \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial W_0(\varepsilon(s))}{\partial \varepsilon} \right) ds$$

Logo,

$$\begin{aligned} q(t) &= \gamma e^{-\frac{(t-s)}{\tau}} \frac{\partial W_0(\varepsilon(s))}{\partial \varepsilon} \Big|_{-\infty}^t - \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-s)}{\tau}} \gamma \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial W_0(\varepsilon(s))}{\partial \varepsilon} \right) ds \\ &= \gamma \frac{\partial W_0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} - \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-s)}{\tau}} \gamma \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial W_0(\varepsilon(s))}{\partial \varepsilon} \right) ds \end{aligned} \quad (4.14)$$

substituindo a (4.14) em (4.13)<sub>1</sub> têm-se

$$\sigma(t) = \frac{\partial W_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} - \gamma \frac{\partial W_0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} + \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-s)}{\tau}} \gamma \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial W_0(\varepsilon(s))}{\partial \varepsilon} \right) ds \quad (4.15)$$

Denominando  $\gamma_\infty = 1 - \gamma$

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \frac{\partial W_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} (\gamma_\infty) + \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-s)}{\tau}} \gamma \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial W_0(\varepsilon(s))}{\partial \varepsilon} \right) ds \\ &= \int_{-\infty}^t \left( \gamma_\infty + \gamma e^{-\frac{(t-s)}{\tau}} \right) \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial W_0(\varepsilon(s))}{\partial \varepsilon} \right) ds \end{aligned} \quad (4.16)$$

ou ainda, pode-se escrever

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s) \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial W_0(\varepsilon(s))}{\partial \varepsilon} \right) ds \quad (4.17)$$

onde  $G(t)$  é a função de relaxação dada por  $G(t) := \gamma_\infty + \gamma e^{-\frac{t}{\tau}}$ .

#### 4.1.4 Modelo generalizado

Freqüentemente é preciso incluir mais de um elemento de Maxwell no modelo para que este seja capaz de reproduzir comportamentos específicos do material.

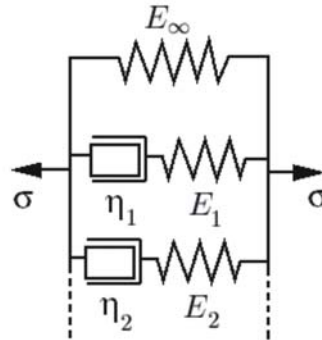


Figura 8: Representação generalizada

Neste caso, a resposta de tensão  $\sigma$  equivalente a (4.13)<sub>1</sub> é dada por:

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) - \sum_{i=1}^N q_i(t) \quad (4.18)$$

Por conveniência, definem-se os fatores de relação entre os modelos de elasticidade

$$\gamma_i := \frac{E_i}{E_0}, \quad \gamma_\infty := \frac{E_\infty}{E_0} \quad i = 1, \dots, N$$

com a propriedade

$$\gamma_\infty + \sum_{i=1}^n \gamma_n = 1$$

Adotando leis de fluxo para as variáveis internas  $q_i : (-\infty, T) \rightarrow \mathbb{R}$  equivalentes a (4.13)

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{q_i}{\tau_i} = \frac{\gamma_i}{\tau_i} \frac{\partial W_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} q_i(t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Seguindo procedimento análogo à seção anterior, pode-se encontrar a função de relaxação da forma

$$G(t) := \gamma_\infty + \sum_{i=1}^N \gamma_i e^{-\frac{t}{\tau_i}}$$

que, substituída em (4.17), fornece  $\sigma(t)$ .

## 4.2 Viscoelasticidade tridimensional. Pequenas deformações

Para estender o modelo visto acima a problemas tridimensionais isotrópicos em pequenas deformações, introduz-se uma decomposição aditiva do tensor  $\varepsilon$  em partes deviatórica e volumétrica, como segue

$$\varepsilon = \mathbf{e} + \frac{1}{3} \theta \mathbf{1} \quad (4.20)$$

onde  $\mathbf{e} := \text{dev}[\varepsilon]$ ,  $\theta := \text{tr}[\varepsilon]$  e  $U^0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  correspondem as deformações deviatórica e volumétrica. Nesse caso, novamente, a resposta de tensão é dada por

$$\sigma(t) = \sigma^0(t) - \sum_{i=1}^N \mathbf{q}_i(t) \quad (4.21)$$

onde,

$$\boldsymbol{\sigma}^0(t) := \partial_\varepsilon W^0(\varepsilon) \equiv \frac{\partial W^0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}, \quad (4.22)$$

Admite-se, então, que a função energia de deformação depende de  $e$  e de  $\Theta$  através da seguinte decomposição aditiva

$$W^0(\varepsilon) = \widehat{W}^0(\mathbf{e}) + U^0(\Theta) \quad (4.23)$$

É possível verificar que, realizando a operação (4.22) em (4.23), mediante a regra da cadeia, obtém-se

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = \text{dev}[\partial_{\mathbf{e}} \widehat{W}^0] + U^{0'}(\Theta) \mathbf{1} \quad (4.24)$$

Logo, substituindo em (4.21)

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \text{dev}[\partial_{\mathbf{e}} \widehat{W}^0] + U^{0'}(\Theta) \mathbf{1} - \sum_{i=1}^N \mathbf{q}_i(t) \quad (4.25)$$

De maneira análoga ao modelo unidimensional, a evolução das variáveis internas pode ser descrita pelas equações

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_i + \frac{\mathbf{q}_i}{\tau_i} &= \frac{\gamma_i}{\tau_i} \text{dev}[\partial_{\mathbf{e}} \widehat{W}_0(\mathbf{e})] \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{q}_i(t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Note que, através desta definição, as variáveis tensoriais  $\mathbf{q}_i$  são deviatóricas. Assim, o presente modelo incorpora a parcela viscosa apenas na parcela deviatórica de  $\boldsymbol{\sigma}(t)$ , permanecendo a parte volumétrica puramente elástica.

Seguindo procedimento idêntico à seção anterior, verifica-se que a solução do sistema (4.26) pode ser

$$\mathbf{q}_i = \frac{\gamma_i}{\tau_i} \int_{-\infty}^t \exp\left[-\frac{(t-s)}{\tau_i}\right] \text{dev}\{\partial_{\mathbf{e}} \widehat{W}_0[\mathbf{e}(s)]\} ds \quad (4.27)$$

Substituindo na equação (4.25), tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \text{dev}[\partial_{\mathbf{e}} \widehat{W}^0] + U^{0'}(\Theta) \mathbf{1} - \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{\tau_i} \int_{-\infty}^t \exp\left[-\frac{(t-s)}{\tau_i}\right] \text{dev}\{\partial_{\mathbf{e}} \widehat{W}_0[\mathbf{e}(s)]\} ds \quad (4.28)$$



Novamente, fazendo a integração por partes, obtém-se:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) = & \operatorname{dev}[\partial_{\mathbf{e}}\widehat{W}^0] + U^{0'}(\Theta)\mathbf{1} - \sum_{i=1}^N \gamma_i \operatorname{dev} \left\{ \frac{\partial \widehat{W}^0}{\partial \mathbf{e}}[\mathbf{e}(s)] \right\} \\ & + \sum_{i=1}^N \gamma_i \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-s)}{\tau_i}} \frac{d}{ds} \left[ \operatorname{dev} \left\{ \frac{\partial \widehat{W}^0}{\partial \mathbf{e}}[\mathbf{e}(s)] \right\} \right] ds \end{aligned} \quad (4.29)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) = & U^{0'}(\Theta)\mathbf{1} + \left( 1 - \sum_{i=1}^N \gamma_i \right) \operatorname{dev}[\partial_{\mathbf{e}}\widehat{W}^0] \\ & + \sum_{i=1}^N \gamma_i \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-s)}{\tau_i}} \frac{d}{ds} \left[ \operatorname{dev} \left\{ \frac{\partial \widehat{W}^0}{\partial \mathbf{e}}[\mathbf{e}(s)] \right\} \right] ds \end{aligned} \quad (4.30)$$

Mas, como  $\gamma_{\infty} = 1 - \sum_{i=1}^N \gamma_i$ ,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) = & U^{0'}(\Theta)\mathbf{1} + (\gamma_{\infty}) \operatorname{dev}[\partial_{\mathbf{e}}\widehat{W}^0] \\ & + \sum_{i=1}^N \gamma_i \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-s)}{\tau_i}} \frac{d}{ds} \left[ \operatorname{dev} \left\{ \frac{\partial \widehat{W}^0}{\partial \mathbf{e}}[\mathbf{e}(s)] \right\} \right] ds \end{aligned} \quad (4.31)$$

ou ainda, pode-se escrever

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = U^{0'}(\Theta)\mathbf{1} + \int_{-\infty}^t G(t-s) \frac{d}{ds} \left[ \operatorname{dev} \left\{ \frac{\partial \widehat{W}^0}{\partial \mathbf{e}}[\mathbf{e}(s)] \right\} \right] ds \quad (4.32)$$

onde  $G(t) := \gamma_{\infty} + \sum_{i=1}^N \gamma_i e^{(-\frac{t}{\tau_i})}$  é a função de relaxação.

Observe que a equação (4.32) envolve uma integral temporal em  $(-\infty, t)$ . Para poder utilizar esta expressão em procedimentos numéricos como Elementos Finitos é preciso transformá-la em uma expressão incremental de recorrência onde o processo de integração é reduzido a um intervalo de tempo  $[t_n, t_{n+1}]$  que utiliza a informação acumulada em intervalos anteriores mediante as variáveis internas.

Considere o intervalo de tempo  $[T_0, T] \subset \mathbb{R}$  de interesse. Tal intervalo pode ser escrito como a união de incrementos de tempo

$$[T_0, T] = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [t_n, t_{n+1}], \quad (4.33)$$

onde  $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$ . Sem perda de generalização, pode-se tomar  $T_0 = -\infty$ . Seja  $\mathbf{q}^{(i)}(t)$  definido por

$$\mathbf{q}^{(i)}(t) := \int_{T_0}^t \exp \left[ \frac{-(t-s)}{\tau_i} \right] \frac{d}{ds} \text{dev} \{ \partial_{\mathbf{e}} \widehat{W}^0[\mathbf{e}(s)] \} ds \quad (4.34)$$

e seja a tensão:

$$\mathbf{s}^0(s) := \text{dev} \{ \partial_{\mathbf{e}} W^0[\mathbf{e}(s)] \} \quad (4.35)$$

Utiliza-se também a propriedade da função exponencial

$$e^{\left[ \frac{t+\Delta t}{a} \right]} = e^{\left( \frac{\Delta t}{a} \right)} e^{\left( \frac{t}{a} \right)} \quad (4.36)$$

para  $\Delta t$  constante e  $a, t \in \mathbb{R}$ .

Avaliando (4.34) em  $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$  tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{(i)}(t_{n+1}) &= \int_{T_0}^{t_n + \Delta t_n} \exp \left[ \frac{-(t_n + \Delta t - s)}{\tau_i} \right] \frac{d}{ds} \mathbf{s}^0(s) ds \\ &= \int_{T_0}^{t_n} \exp \left[ \frac{-(\Delta t_n)}{\tau_i} \right] \exp \left[ \frac{-(t_n - s)}{\tau_i} \right] \frac{d}{ds} \mathbf{s}^0(s) ds \\ &\quad + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp \left[ \frac{-(t_{n+1} - s)}{\tau_i} \right] \frac{d}{ds} \mathbf{s}^0(s) ds \\ &= \exp \left[ \frac{-\Delta t_n}{\tau_i} \right] \mathbf{q}^{(i)}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp \left[ \frac{-(t_{n+1} - s)}{\tau_i} \right] \frac{d}{ds} \mathbf{s}^0(s) ds \end{aligned} \quad (4.37)$$

Assim,  $\mathbf{q}^{(i)}(t_{n+1})$  é obtida a partir de  $\mathbf{q}^{(i)}(t_n)$  por uma integral no intervalo de tempo  $[t_n, t_{n+1}]$ . Usando a regra de integração do ponto médio no segundo termo de (4.37) se tem

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp \left[ \frac{-(t_{n+1} - s)}{\tau_i} \right] \frac{d}{ds} \mathbf{s}^0(s) ds \approx \exp \left[ \frac{-(t_n + \Delta t_n - s)}{\tau_i} \right] \frac{d}{ds} \mathbf{s}^0(s) \Bigg|_{s = \frac{t_n + t_{n+1}}{2}} \Delta t_n \quad (4.38)$$

como  $t_n + \Delta t - \frac{t_{n+1} + t_n}{2} = \frac{t_n}{2} + \Delta t - \frac{t_{n+1}}{2} = \Delta t - \frac{\Delta t}{2} = \frac{\Delta t}{2}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left[\frac{-(t_{n+1} - s)}{\tau_i}\right] \frac{d}{ds} \mathbf{s}^0(s) ds &= \exp\left(\frac{-\Delta t_n}{2\tau_i}\right) \frac{d}{ds} \mathbf{s}^0\left[\frac{t_n + t_{n+1}}{2}\right] \Delta t_n \\ &= \exp\left(\frac{-\Delta t_n}{2\tau_i}\right) [\mathbf{s}^0(t_{n+1}) - \mathbf{s}^0(t_n)] \end{aligned} \quad (4.39)$$

Assim,

$$\mathbf{q}^{(i)}(t_{n+1}) = \exp\left[\frac{-\Delta t_n}{\tau_i}\right] \mathbf{q}^{(i)}(t_n) + \exp\left(\frac{-\Delta t_n}{2\tau_i}\right) [\mathbf{s}^0(t_{n+1}) - \mathbf{s}^0(t_n)] \quad (4.40)$$

e, substituindo em (4.25)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t_{n+1}) &= \text{dev}[\partial_e \widehat{W}^0] + U^{0'}(\Theta) \mathbf{1} \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \left( \exp\left[\frac{-\Delta t_n}{\tau_i}\right] \mathbf{q}^{(i)}(t_n) + \exp\left(\frac{-\Delta t_n}{2\tau_i}\right) [\mathbf{s}^0(t_{n+1}) - \mathbf{s}^0(t_n)] \right) \end{aligned} \quad (4.41)$$

## 4.3 Modelos constitutivos viscoelásticos não-lineares para deformações finitas

### 4.3.1 Viscoelasticidade de Simo

Para o caso de modelos constitutivos viscoelásticos não-lineares, considerando o modelo de Simo, a resposta de tensão (4.21) é dada por

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}^0(t) - J^{-\frac{2}{3}} \text{DEV} \left[ \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}_i(t) \right] \quad (4.42)$$

onde

$$\mathbf{S}^0(t) := 2\partial_{\mathbf{C}} \widehat{W}^0(\mathbf{C}) = JU^{0'}(J)\mathbf{C}^{-1} + J^{-\frac{2}{3}} \text{DEV} \left[ 2\partial_{\mathbf{C}} \widehat{W}^0(\mathbf{C}) \right] \quad (4.43)$$

Nesse caso,  $\mathbf{Q}_i(t)$  representa o conjunto de variáveis internas e  $\mathbf{C}(t)$  é uma função do tempo. As equações de evolução para as variáveis internas  $\mathbf{Q}_i(t)$ , ver [26], são:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}_i(t) + \frac{1}{\tau_i} \mathbf{Q}_i(t) &= \frac{\gamma_i}{\tau_i} \text{DEV} \left\{ 2 \frac{\partial W^0[\mathbf{C}(t)]}{\partial \mathbf{C}} \right\} \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{Q}_i(t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde  $\gamma_i \in [0, 1]$  e  $\tau_i > 0$  estão sujeitos (ver [26])

$$\sum_{i=1}^N \gamma_i = 1 - \gamma_\infty, \quad \gamma_\infty \in [0, 1] \quad (4.45)$$

Assim, como visto anteriormente,

$$\mathbf{Q}^{(i)}(t) := \frac{\gamma_i}{\tau_i} \int_{-\infty}^t \exp\left[-\frac{(t-s)}{\tau_i}\right] \frac{d}{ds} \text{DEV}\{2\partial_{\mathbf{C}}W^0[\mathbf{C}(s)]\} ds \quad (4.46)$$

Substituindo as equações (4.46) em (4.42), e integrando por partes, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) &= JU^{0'}(J)\mathbf{C}^{-1}(t) + \gamma_\infty J^{-\frac{2}{3}} \text{DEV}\{2\partial_{\mathbf{C}}W^0[\mathbf{C}(t)]\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^N J^{-\frac{2}{3}} \gamma_i \int_{-\infty}^t \exp\left[-\frac{(t-s)}{\tau_i}\right] \frac{d}{ds} (\text{DEV}\{2\partial_{\mathbf{C}}W^0(\mathbf{C}(s))\}) ds \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\mathbf{S}(t) = JU^{0'}(J)\mathbf{C}^{-1}(t) + J^{-\frac{2}{3}} \int_{-\infty}^t G(t-s) \frac{d}{ds} [\text{DEV}\{2\partial_{\mathbf{C}}W^0(\mathbf{C})\}] ds \quad (4.48)$$

com  $G(t) := \gamma_\infty + \sum_{i=1}^N \gamma_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right)$  sendo a função de relaxação.

E, ainda, o algoritmo que representa a evolução das variáveis internas é dado pela equação (4.49)

$$\mathbf{H}^i(t_{n+1}) = \exp\left[\frac{-\Delta t_n}{\tau_i}\right] \mathbf{H}^{(i)}(t_n) + \exp\left(\frac{-\Delta t_n}{2\tau_i}\right) [\bar{\mathbf{S}}^0(t_{n+1}) - \bar{\mathbf{S}}^0(t_n)] \quad (4.49)$$

onde  $\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^0 = \text{DEV}[2\partial_{\mathbf{C}}W^0(\mathbf{C}_{n+1})]$  e  $\bar{\mathbf{S}}_n^0 = \text{DEV}[2\partial_{\mathbf{C}}W^0(\mathbf{C}_n)]$

### 4.3.2 Viscoelasticidade de Holzapfel

Para esse modelo viscoelástico o estado termodinâmico também é escrito através do uso de variáveis internas. A diferença entre o modelo de Holzapfel e o de Simo é que a energia de deformação  $W$  é escrita em configuração espacial, enquanto que, no modelo proposto por Simo a mesma é dada na configuração de referência. Neste caso, têm-se uma pequena mudança na notação de  $W^\infty$  na equação (4.13).

$$\begin{aligned} \dot{q} + \frac{1}{\tau} q &= \frac{\gamma}{\tau} \frac{\partial W^\infty(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} q(t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

e a tensão de Cauchy, para esse modelo é dada por

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma^\infty(t) + q(t) \\ &= E_\infty \varepsilon + q(t)\end{aligned}\tag{4.51}$$

Fazendo os respectivos cálculos de forma análoga ao modelo de Simó encontra-se

$$\sigma(t) = \frac{\partial W^\infty(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} + \gamma \frac{\partial W^\infty(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} - \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-s)}{\tau}} \gamma \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon} W^\infty(\varepsilon(s)) \right) ds\tag{4.52}$$

Para o modelo generalizado, dado pela Figura 8, a resposta de tensão (4.18) para este modelo é dada por:

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \sigma^\infty(t) + \sum_{i=1}^N q_i(t) \\ &= E_\infty \varepsilon(t) + \sum_{i=1}^N q_i(t)\end{aligned}\tag{4.53}$$

Considerando o caso do modelo viscoelástico tridimensional, novamente, admitindo a decomposição aditiva (4.20) e a equação anterior (4.53), onde

$$\boldsymbol{\sigma}^\infty(t) := \partial_\varepsilon W^\infty(\varepsilon) \equiv \frac{\partial W^\infty(\varepsilon)}{\partial \varepsilon},\tag{4.54}$$

Admite-se, então que a função energia de deformação é da forma

$$W^\infty(\varepsilon) = W^\infty(\mathbf{e}) + U^\infty(J)\tag{4.55}$$

onde  $\mathbf{e} := \text{dev}[\varepsilon]$ ,  $J := \text{tr}[\varepsilon]$  e  $U^\infty : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  correspondem as deformações deviatórica e volumétrica, obtém-se

$$\boldsymbol{\sigma}^\infty = \text{dev}[\partial_{\mathbf{e}} W^\infty] + U^{\infty'}(J) \mathbf{1}\tag{4.56}$$

logo

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \text{dev}[\partial_{\mathbf{e}} W^\infty] + U^{\infty'}(J) \mathbf{1} + \sum_{i=1}^N \mathbf{q}_i(t)\tag{4.57}$$

da mesma maneira que no modelo unidimensional, as equações de evolução das variáveis internas tem como sua solução expressa em termos de uma integral de convolução:

$$\mathbf{q}_i = \frac{\gamma_i}{\tau_i} \int_{-\infty}^t \exp\left[-\frac{(t-s)}{\tau_i}\right] \text{dev}\{\partial_{\mathbf{e}} W^\infty[\mathbf{e}(s)]\} ds\tag{4.58}$$

Enfim, obtém-se

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) = & U^{\infty'}(J)\mathbf{1} + \left(1 + \sum_{i=1}^N \gamma_i\right) \text{dev}[\partial_{\mathbf{e}}W^{\infty}] \\ & - \sum_{i=1}^N \gamma_i \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-s)}{\tau_i}} \frac{d}{ds} \left[ \text{dev} \left\{ \frac{\partial W^{\infty}}{\partial \mathbf{e}}[\mathbf{e}(s)] \right\} \right] ds \end{aligned} \quad (4.59)$$

Novamente, para poder utilizar esta expressão em procedimentos numéricos, como Elementos Finitos, deve-se transformá-la em uma expressão incremental de recorrência onde o processo de integração, conforme a seção 4.2. Seja  $\mathbf{q}^{(i)}(t)$  definido por

$$\mathbf{q}^{(i)}(t) := \int_{T_0}^t \exp \left[ \frac{-(t-s)}{\tau_i} \right] \frac{d}{ds} \text{dev} \{ \partial_{\mathbf{e}}W^{\infty}[\mathbf{e}(s)] \} ds \quad (4.60)$$

e, definido a tensão

$$\mathbf{s}_n^{\infty} := \text{dev} \{ \partial_{\mathbf{e}}W^{\infty}[\mathbf{e}(t_n)] \} \quad (4.61)$$

e, a equação (4.40) é dada por

$$\mathbf{q}^{(i)}(t_{n+1}) = \exp \left[ \frac{-\Delta t_n}{\tau_i} \right] \mathbf{q}^{(i)}(t_n) + \exp \left( \frac{-\Delta t_n}{2\tau_i} \right) [\mathbf{s}^{\infty}(t_{n+1}) - \mathbf{s}^{\infty}(t_n)] \quad (4.62)$$

Para o caso de modelos constitutivos viscoelásticos não-lineares, a resposta de tensão

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}^{\infty}(t) + J^{-\frac{2}{3}} \text{DEV} \left[ \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}_i(t) \right] \quad (4.63)$$

onde

$$\mathbf{S}^{\infty}(t) := 2\partial_{\mathbf{C}}W^{\infty}(\mathbf{C}) = JU^{\infty'}(J)\mathbf{C}^{-1} + J^{-\frac{2}{3}} \text{DEV} [2\partial_{\mathbf{C}}W^{\infty}(\mathbf{C})] \quad (4.64)$$

Nesse caso,  $\mathbf{Q}_i(t)$  representa o conjunto de variáveis internas e  $\mathbf{C}(t)$  é uma função do tempo. As equações de evolução para as variáveis internas  $\mathbf{Q}_i(t)$  [26] são:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}_i(t) + \frac{1}{\tau_i} \mathbf{Q}_i(t) &= \frac{\gamma_i}{\tau_i} \text{DEV} \left\{ 2 \frac{\partial W^{\infty}[\mathbf{C}(t)]}{\partial \mathbf{C}} \right\} \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{Q}_i(t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.65)$$

Substituindo as equações e integrando por partes, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) = & JU^{\infty'}(J)\mathbf{C}^{-1}(t) + J^{-\frac{2}{3}}\text{DEV}\{2\partial_{\mathbf{C}}W^{\infty}[\mathbf{C}(t)]\} + \gamma_{\infty}J^{-\frac{2}{3}}\text{DEV}\{2\partial_{\mathbf{C}}W^{\infty}[\mathbf{C}(t)]\} \\ & - \sum_{i=1}^N J^{-\frac{2}{3}}\gamma_i \int_{-\infty}^t \exp\left[-\frac{(t-s)}{\tau_i}\right] \frac{d}{ds} (\text{DEV}\{2\partial_{\mathbf{C}}W^{\infty}(\mathbf{C}(s))\}) ds \end{aligned} \quad (4.66)$$

E, ainda, o algoritmo que representa a evolução das variáveis internas é dado pela equação (4.67)

$$\mathbf{H}^i(t_{n+1}) = \exp\left[\frac{-\Delta t_n}{\tau_i}\right] \mathbf{H}^{(i)}(t_n) + \exp\left(\frac{-\Delta t_n}{2\tau_i}\right) [\bar{\mathbf{S}}^{\infty}(t_{n+1}) - \bar{\mathbf{S}}^{\infty}(t_n)] \quad (4.67)$$

onde  $\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{\infty} = \text{DEV}[2\partial_{\mathbf{C}}W^{\infty}(\mathbf{C}_{n+1})]$  e  $\bar{\mathbf{S}}_n^{\infty} = \text{DEV}[2\partial_{\mathbf{C}}W^{\infty}(\mathbf{C}_n)]$

# ***5 Formulação viscoelástica variacional para deformações finitas***

Fancello et al. [8] propõe uma família de modelos viscoelásticos baseados na formulação variacional para materiais dissipativos apresentado em [21]. Essa abordagem apresenta versatilidade de modelos de comportamento em função das características das funções potenciais escolhidas para cada caso específico. Insere-se, por outro lado, dentro de uma estrutura formal matemática baseada em princípios de mínimo/ máximo, abordáveis por técnicas de otimização e facilitam a estimativa de erros entre outras possibilidades. Em [7] e [24] essa formulação é usada para representar o comportamento de tecidos encefálicos.

Neste capítulo apresenta-se uma formulação variacional para o modelo viscoelástico que incorpora a contribuição das fibras de colágeno no modelo isotrópico proposto em [8]. As subseções seguintes apresentam a formulação variacional proposta em [28], uma introdução ao modelo viscoelástico isotrópico proposto em [8] e, enfim, a inclusão das famílias de fibras.

## **5.1 Formulação variacional**

Como visto anteriormente, os modelos hiperelásticos baseiam-se na existência de uma função de energia de deformação  $\psi$ , também conhecida como função de energia livre de Helmholtz, que depende somente do valor da deformação e cuja derivada fornece o estado



de tensão de um ponto material,

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} = 2\mathbf{F} \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad (5.1)$$

O problema de equilíbrio pode ser definido pela minimização da energia potencial

$$\begin{aligned} & \min_{x \in K} \mathcal{H}(x) \\ \mathcal{H}(x) &= \int_{\Omega_0} \Psi(\mathbf{F}(x)) d\Omega_0 - \left[ \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 \cdot x d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0} \mathbf{f}_0 \cdot x d\Gamma_0 \right] \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde  $K$  é o conjunto das deformações admissíveis. Em (5.2) admite-se a priori a satisfação das equações constitutivas e compatibilidade.

No caso de materiais viscoelásticos, não é possível definir uma função potencial de forma que a equação (5.1) seja satisfeita, já que não pode-se obter o estado de tensão (dependente do fenômeno dissipativo), a partir do valor final da deformação. Porém, fazendo uso de variáveis internas, capazes de descrever a história do processo é mostrado em [28], que é possível definir um potencial denominado Potencial Incremental que se comporta de modo análogo ao caso hiperelástico em cada incremento de carga. Em outras palavras, pode-se escrever

$$\mathbf{P}_{n+1} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{F}_{n+1}; \mathcal{E}_n)}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} = 2\mathbf{F}_{n+1} \frac{\partial \Psi(\mathbf{C}_{n+1}; \mathcal{E}_n)}{\partial \mathbf{C}_{n+1}} \quad (5.3)$$

sendo que  $\mathcal{E}_n = \{\mathbf{F}, \mathbf{F}^i, \mathbf{Q}\}$  é o conjunto das variáveis internas e externas.

Em [21] é mostrado que um potencial com estas características pode ter a seguinte forma:

$$\Psi(\mathbf{F}_{n+1}; \mathcal{E}_n) = \min_{\mathbf{F}_{n+1}^i, \mathbf{Q}_{n+1}} \{W(\mathcal{E}_{n+1}) - W(\mathcal{E}_n) + \Delta t \psi(\overset{\circ}{\mathbf{F}}^i, \overset{\circ}{\mathbf{Q}}; \mathcal{E}_n)\} \quad (5.4)$$

$$W(\mathcal{E}) = \varphi(\mathbf{F}) + \varphi^e(\mathbf{F}\mathbf{F}^{i-1}) + \varphi^i(\mathbf{F}^i, \mathbf{Q}) \quad (5.5)$$

Os gradientes de deformação inelástico  $\mathbf{F}^i$  e elástico  $\mathbf{F}^e$  são obtidos a partir da decomposição multiplicativa de  $\mathbf{F}$ , isto é,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^i$  e  $\mathbf{Q}$  contém o resto das variáveis internas do processo, calculadas através de equações de evolução. As variáveis  $\overset{\circ}{\mathbf{F}}(\mathbf{F}_{n+1}, \mathcal{E}_n)$ ,  $\overset{\circ}{\mathbf{F}}^i(\mathbf{F}_{n+1}, \mathcal{E}_n)$  e  $\overset{\circ}{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}_{n+1}, \mathcal{E}_n)$  são aproximações incrementais das variáveis de taxa  $\dot{\mathbf{F}}$ ,  $\dot{\mathbf{F}}^i$  e  $\dot{\mathbf{Q}}$  respectivamente. A diferença entre os diversos modelos de potencial reside nas carac-

terísticas dos potenciais  $\varphi$ ,  $\varphi^e$ ,  $\varphi^i$  e  $\psi$ .

A operação de minimização em (5.4) identifica o estado das variáveis internas no instante  $t_{n+1}$ . O funcional  $\Psi$  avaliado nessas variáveis identificadas tem a propriedade de satisfazer a condição (5.3) que fornece o estado de tensões no incremento.

Na seção seguinte essas funções potenciais serão especificadas para um modelo viscoelástico e permitirá uma maior compreensão do potencial  $\Psi$  para o caso em estudo.

## 5.2 Modelo viscoelástico isotrópico

O modelo viscoelástico isotrópico apresentado a seguir faz uso do potencial incremental definido acima e está baseado no sistema reológico mostrado na Figura 9.

Nesta, o primeiro braço, puramente elástico, é controlado pelo potencial  $\varphi$  que permite a separação da energia elástica em partes isocórica e volumétrica:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{F}) &= \varphi(\widehat{\mathbf{F}}) + \mathbf{U}(J) \\ &= \varphi(\widehat{\mathbf{C}}) + \mathbf{U}(J)\end{aligned}\tag{5.6}$$

onde

$$\widehat{\mathbf{F}} = J^{-\frac{1}{3}}\mathbf{F}, \quad J = \det(\mathbf{F}), \quad \widehat{\mathbf{C}} = \widehat{\mathbf{F}}^T \widehat{\mathbf{F}}\tag{5.7}$$

A parte isocórica é uma função isotrópica de  $\widehat{\mathbf{C}} = \widehat{\mathbf{F}}^T \widehat{\mathbf{F}}$

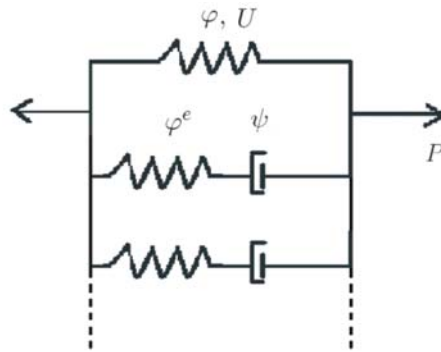


Figura 9: Modelo reológico generalizado

$$\varphi(\widehat{\mathbf{C}}) = \varphi(c_1, c_2, c_3)\tag{5.8}$$

onde  $(c_1, c_2, c_3)$  são os autovalores de  $\widehat{\mathbf{C}}$ . A parte volumétrica é uma função escalar de  $J$ .

$$U(J) = \frac{k}{2} [\ln J]^2 \quad (5.9)$$

No braço de Maxwell admite-se uma decomposição multiplicativa das deformações elástica e viscosa, ambas isocóricas.

$$\widehat{\mathbf{F}} = \widehat{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^v \Rightarrow \widehat{\mathbf{F}}^e = \widehat{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{v-1}, \quad \det \mathbf{F}^v = 1 \quad (5.10)$$

A partir de  $\widehat{\mathbf{F}}^v$ , define-se a taxa de deformação viscosa  $\mathbf{D}^v$  que, por construção, é deviatórica.

$$\mathbf{D}^v = \text{Sym}(\mathbf{L}^v) = \mathbf{L}^v = \dot{\mathbf{F}}^v \mathbf{F}^{v-1} \quad (5.11)$$

$$\dot{\mathbf{F}}^v = \mathbf{D}^v \mathbf{F}^v \quad (5.12)$$

As restrições adicionais de  $\mathbf{D}^v$  definem características específicas da regra de escoamento.

Propõe-se em [8] uma decomposição espectral do tipo:

$$\mathbf{D}^v = \sum_{i=1}^3 d_i^v \mathbf{M}_i^v \quad (5.13)$$

$$d^v \in K_Q = \{p_j \in \mathbb{R} : p_1 + p_2 + p_3 = 0\} \quad (5.14)$$

$$\mathbf{M}_j^v \in K_M = \{N_j \in \text{Sym} : N_j \cdot N_j = 1, N_i \cdot N_j = 0, i \neq j\} \quad (5.15)$$

onde os escalares  $d_j^v$  são os autovalores de  $\mathbf{D}^v$ , que denotam a amplitude da parte viscosa e  $\mathbf{M}_j^v$  são as autoprojeções de  $\mathbf{D}^v$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $\mathbf{M}_j^v = n_j \otimes n_j$  são os autovetores de  $\mathbf{D}^v$ .

Os potenciais elásticos associados à mola e viscosos deste braço são consideradas funções isotrópicas das deformações elásticas e taxas de deformações viscosas e dependem dos correspondentes autovalores:

$$\varphi^e(\widehat{\mathbf{C}}^e) = \varphi^e(c_1^e, c_2^e, c_3^e) \quad (5.16)$$

$$\psi(\mathbf{D}^v) = \psi(d_1^v, d_2^v, d_3^v) \quad (5.17)$$

Em (5.16),  $c_j^e$  e  $E_j^e$  são os autovalores e autoprojeções de  $\widehat{\mathbf{C}}^e = \widehat{\mathbf{F}}^{eT} \widehat{\mathbf{F}}^e = \sum_{j=1}^3 c_j^e E_j^e$ .

A partir destas definições, mostra-se em [8] que o potencial incremental da equação (5.3) toma a forma

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{C}_{n+1}; \mathcal{E}_n) &= \Delta\varphi(\widehat{\mathbf{C}}_{n+1}) + \Delta U(\theta_{n+1}) \\ &+ \min_{\mathbf{M}_j^v, \Delta q_j^v} \left\{ \Delta\varphi^e(\widehat{\mathbf{C}}_{n+1}^e) + \Delta t\psi \left( \frac{\Delta q_j^v}{\Delta t} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde

$$\Delta\varphi(\widehat{\mathbf{C}}_{n+1}) = \varphi(\widehat{\mathbf{C}}_{n+1}) - \varphi(\widehat{\mathbf{C}}_n) \quad (5.19)$$

$$\Delta\varphi^e(\widehat{\mathbf{C}}_{n+1}^e) = \varphi^e(\widehat{\mathbf{C}}_{n+1}^e) - \varphi^e(\widehat{\mathbf{C}}_n^e) \quad (5.20)$$

$$\Delta\mathbf{U}(J_{n+1}) = \mathbf{U}(J_{n+1}) - \mathbf{U}(J_n) \quad (5.21)$$

e a operação de minimização é restrita a

$$\Delta q_j^v \in K_Q = \{p_j \in \mathbb{R}^1 : p_1 + p_2 + p_3 = 0\} \quad (5.22)$$

$$\mathbf{M}_j^v \in K_M = \{N_j \in Sym : N_j \cdot N_j = 1, N_i \cdot N_j = 0, i \neq j\} \quad (5.23)$$

A restrição (5.22) sobre os  $\Delta q_j^v$  impõe que a taxa de deformação viscosa dada por (5.13) seja deviatórica (traço nulo). A restrição (5.23), por outro lado, impõe as condições de ortonormalidade clássicas das autoprojeções de tensores simétricos. Observe que a operação de mínimo busca definir dois tipos de variáveis internas:  $\mathbf{M}_j^v$ , definindo a direção de escoamento viscoso e  $\Delta q_j^v$  a sua amplitude. A minimização em relação a  $\mathbf{M}_j$  permite demonstrar que os tensores  $\widehat{\mathbf{C}}_{n+1}^e$ ,  $\widehat{\mathbf{C}}^{pr}$  e  $\mathbf{D}^v$  são colineares, sendo  $\widehat{\mathbf{C}}^{pr} = \mathbf{F}^{V-T} \widehat{\mathbf{C}} \mathbf{F}^{V-1}$  o tensor de Cauchy preditor (da deformação elástica). Isto significa que estes tensores possuem as mesmas autoprojeções de  $\widehat{\mathbf{C}}^{pr}$  (preditor) e, portanto,  $\mathbf{M}_j = \mathbf{E}_j^{pr} = \mathbf{E}_j^e$ . A minimização em relação a  $\Delta q_j$  define a amplitude de escoamento e é resolvida através das condições necessárias de otimalidade, fornecendo um sistema de três equações não-lineares dadas por:

$$\frac{\partial\varphi^e}{\partial\varepsilon_j^e} - \frac{\partial\psi^e}{\partial d_j^v} + \lambda = 0 \quad (5.24)$$

$$\Delta q_1^v + \Delta q_2^v + \Delta q_3^v = 0 \quad (5.25)$$

onde  $j = 1, 2, 3$ ,  $\lambda$  é o multiplicador de Lagrange e  $\varepsilon_j^e = \frac{1}{2} \ln(c_j^e)$  são os autovalores de  $\varepsilon_{n+1}^e$ .

Em [12] mostra-se que, admitindo a decomposição (5.6), a derivada (5.3) se escreve (ver apêndice)

$$\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \left[ J_{n+1}^{-\frac{2}{3}} 2 \text{DEV} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \widehat{\mathbf{C}}_{n+1}} + \frac{\partial \varphi^e}{\partial \widehat{\mathbf{C}}_{n+1}} \right) + \frac{\partial U}{\partial \theta_{n+1}} J_{n+1} \mathbf{C}_{n+1}^{-1} \right] \quad (5.26)$$

Assim, uma vez que determinados os minimizadores da equação (5.18), a derivada de  $\Psi$  em relação a  $\widehat{\mathbf{C}}_{n+1}$  e  $\theta$  permite obter o tensor de Piola-Kirchhoff da equação (5.3), onde os componentes em parênteses são dadas por [8]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \widehat{\mathbf{C}}_{n+1}} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial c_j} \mathbf{E}_j \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial \varphi^e}{\partial \widehat{\mathbf{C}}_{n+1}} = \mathbf{F}_n^{v-1} \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi^e}{\partial \varepsilon_j^e} \frac{1}{2c_j^{pr}} \mathbf{E}_j^{pr} \right) \mathbf{F}_n^{v-T} \quad (5.28)$$

onde  $\mathbf{C}^{pr} = (\mathbf{F}^{pr})^T \mathbf{F}^{pr}$  (ver Apêndice).

Uma simples extensão deste modelo é obtido considerando um conjunto de  $P$  braços de Maxwell, como visto na Figura 9. Nesse caso, o potencial incremental é dado por

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{C}_{n+1}; \mathcal{E}_n) &= \Delta \varphi(\widehat{\mathbf{C}}_{n+1}) + \Delta U(\theta_{n+1}) \\ &+ \sum_{k=1}^P \min_{\mathbf{M}_j^v, \Delta q_j^v} \left\{ \Delta \varphi_k^e(\widehat{\mathbf{C}}_{k_{n+1}}^e) + \Delta t \psi_k \left( \frac{\Delta q_{jk}^v}{\Delta t} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.29)$$

que significa que a minimização pode ser calculada para cada  $k$ , obtendo o para correspondente  $\Delta q_{jk}^v$  e  $\mathbf{M}_{jk}$ .

### 5.3 Modelo viscoelástico reforçado por fibras

Em contraste com o caso isotrópico, a existência das fibras no material induz propriedades vinculadas às orientações dessas. Admite-se aqui que o material a ser representado consiste numa matriz de propriedade isotrópica na qual estão inseridas fibras de reforço. Nesse caso, a energia de deformação do material como um todo depende da contribuição da parte isotrópica e da parcela das fibras. Isto pode ser feito de forma análoga

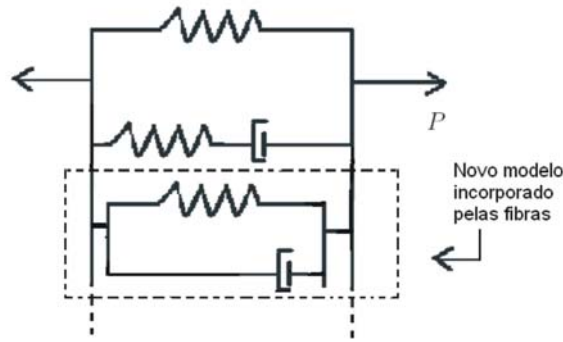


Figura 10: Modelo reológico com a inclusão das fibras

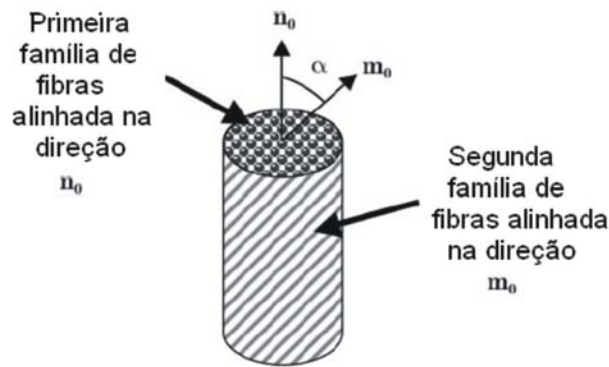


Figura 11: Representação simplificada de um material contendo uma matriz isotrópica reforçada com fibras. [16]

a [12] onde se propõe uma contribuição aditiva das energias de deformação da forma

$$\Psi = \Psi_{isotropico} + \Psi_f \quad (5.30)$$

onde  $\Psi_{isotropico}$  é o modelo descrito na seção 5.2 e  $\Psi_f$  é a contribuição das fibras. Deve-se observar que esta decomposição aditiva, freqüente na literatura, é uma hipótese simplificada forte. Equivale a um modelo de homogeneização de material onde cada componente responde às deformações impostas em forma independente e o resultado é simplesmente somado, sem relações de acoplamento entre eles. Isto contrasta com a realidade do material, onde fibras e matriz se influenciam entre si (acoplamento) na resposta do material.

Enquanto o potencial  $\Psi_{iso}$  depende exclusivamente da deformação e sua história, o potencial  $\Psi_f$  depende fortemente da orientação das fibras no ponto material considerado. Para incorporar essa dependência define-se o tensor estrutural  $\mathbf{A}_f = \mathbf{a}_f \otimes \mathbf{a}_f$  onde  $\mathbf{a}_f$  é o vetor unitário definindo a orientação das fibras na configuração de referência [13]. Da combinação do tensor de Cauchy isocórico  $\hat{\mathbf{C}}$  e do tensor estrutural  $\mathbf{A}_f$  surgem os

seguintes invariantes:

$$\begin{aligned} I_f^1 &= \widehat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{A}_f \\ I_f^2 &= \widehat{\mathbf{C}}^2 \cdot \mathbf{A}_f \end{aligned} \quad (5.31)$$

Outros invariantes podem ser definidos quando da presença de outras fibras orientadas segundo direções diferentes, gerando combinações e acoplamento entre os tensores estruturais. O primeiro invariante, porém, tem uma interpretação física clara, denotando o alongamento quadrático de uma fibra orientada na direção  $\mathbf{a}_f$ :

$$\lambda_f^2 = \widehat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{A}_f = \mathbf{a}_f \cdot \widehat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{a}_f \quad (5.32)$$

Focando apenas o potencial incremental  $\Psi_f$  admite-se, por hipótese, que existe uma dependência apenas no primeiro invariante,  $I_f^1$ , isto é, na medida do alongamento das fibras. Apesar de parecer restritiva, observa-se que nos problemas práticos de literatura somente esses parâmetros são identificados. (Ver [13]). Propõe-se aqui a contribuição teórica deste trabalho. Admite-se que o potencial  $\Psi_f$  responde ao modelo reológico da Figura 12, onde cada fibra incorporada responde como um módulo viscoelástico na direção da fibra.

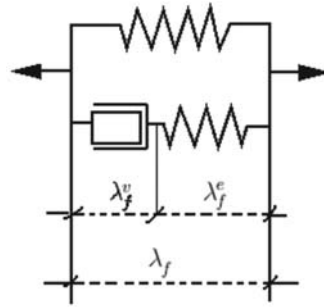


Figura 12: Modelo reológico clássico

Nessa figura identifica-se um braço elástico e um braço de Maxwell. O primeiro comporta um potencial de energia livre totalmente reversível (não dissipativo) dependente da deformação (alongamento) total  $\lambda_f$ :

$$\varphi_f = \varphi_f(\lambda_f) \quad (5.33)$$

O segundo braço (Maxwell) abriga a decomposição multiplicativa.

$$\lambda_f = \lambda_f^e \lambda_f^v \quad (5.34)$$

onde  $\lambda_f^e$  e  $\lambda_f^v$  correspondem aos alongamentos elástico e viscoso respectivamente.

Esta decomposição permite definir um potencial elástico dependente apenas de  $\lambda_f^e$ , isto é,

$$\varphi_f^e = \varphi_f^e(\lambda_f^e) \quad (5.35)$$

Por outro lado, o alongamento viscoso atua através de sua derivada temporal gerando uma resistência ao movimento controlado por um pseudo-potencial dissipativo.

$$\psi_f = \psi_f(d) \quad (5.36)$$

com  $d$  sendo a taxa de deformação viscosa da fibra, definido por

$$d = \dot{\lambda}_f^e \lambda_f^{-1} \quad (5.37)$$

Do ponto de vista incremental, no entanto, deve-se relacionar  $\dot{\lambda}_f^e$  e  $d$  a valores incrementais:  $\lambda_{f_{n+1}}^v$ ,  $\lambda_{f_n}^v$ , assim como  $\lambda_{f_{n+1}}$ ,  $\lambda_{f_n}$ . De forma análoga à parcela isotrópica, é preciso obter uma expressão incremental dos potenciais através da integração temporal numérica. O método de integração exponencial [1] permite escrever

$$\Delta \lambda_f^v = \lambda_{f_{n+1}}^v \lambda_{f_n}^{v-1} = \exp(\Delta t d) \quad (5.38)$$

e, portanto

$$\lambda_{f_{n+1}}^v = \exp(\Delta t d) \lambda_{f_n}^v \quad (5.39)$$

Utilizando logaritmo natural, tem-se

$$\Delta t d = \ln \left( \frac{\lambda_{f_{n+1}}^v}{\lambda_{f_n}^v} \right) \Rightarrow d = \frac{1}{\Delta t} \ln(\Delta \lambda_f^v) \quad (5.40)$$

onde  $\Delta \lambda_f^v = \frac{\lambda_{f_{n+1}}^v}{\lambda_{f_n}^v}$ . Essa expressão permite obter a taxa de deformação viscosa a partir de valores incrementais  $\lambda_{f_{n+1}}^v$  e  $\lambda_{f_n}^v$ .



Com estas definições e seguindo argumentos análogos aos usados em [8], define-se o potencial incremental  $\Psi_f$  associado às fibras com a expressão

$$\Psi_f = \min_{\lambda_{f_{n+1}}^v} \{ \Delta\varphi_f^e(\lambda_{f_{n+1}}^e) + \Delta t \psi(d(\lambda_{f_{n+1}}^v)) \} + \Delta\varphi^f(\lambda_{f_{n+1}}) \quad (5.41)$$

sendo

$$\Delta\varphi_f^e = \varphi_f^e(\lambda_{f_{n+1}}^e) - \varphi_f^e(\lambda_{f_n}^e) \quad (5.42)$$

$$\Delta\varphi_f = \varphi_f(\lambda_{f_{n+1}}) - \varphi_f(\lambda_{f_n}) \quad (5.43)$$

A condição de otimalidade do problema de mínimo apresentado é dada por

$$\frac{\partial \Psi_f}{\partial \lambda_{f_{n+1}}^v} = \frac{\partial \varphi_f^e}{\partial \lambda_{f_{n+1}}^v} + \Delta t \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_{f_{n+1}}^v} = 0 \quad (5.44)$$

tratando-se apenas de uma equação, dado que a variável  $\lambda_{f_{n+1}}^v$  é escalar. A derivação do primeiro termo de 5.44 permite o uso da regra da cadeia:

$$\frac{\partial \varphi_f^e}{\partial \lambda_{f_{n+1}}^v} = - \frac{\partial \varphi_f^e}{\partial \lambda_{f_{n+1}}^e} \frac{\lambda_{f_{n+1}}}{(\lambda_{f_{n+1}}^v)^2} \quad (5.45)$$

Já para a segunda parcela,

$$\frac{\partial \psi_f}{\partial \lambda_{f_{n+1}}^v} = \frac{\partial \psi_f}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial \lambda_{f_{n+1}}^v} = \frac{\partial \psi_f}{\partial d} \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\lambda_{f_{n+1}}^v} \quad (5.46)$$

De (5.45) e (5.46), obtemos

$$\frac{\partial \varphi_f^e}{\partial \lambda_{f_{n+1}}^v} + \Delta t \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_{f_{n+1}}^v} = - \frac{\partial \varphi_f^e}{\partial \lambda_{f_{n+1}}^e} \left( \frac{\lambda_{f_{n+1}}}{\lambda_{f_{n+1}}^v} \right) + \frac{\partial \psi_f}{\partial d} \frac{1}{\lambda_{f_{n+1}}^v} = 0 \quad (5.47)$$

E, abrindo sua dependência em relação à variável principal,

$$- \frac{\partial \varphi_f^e(\lambda_{f_{n+1}}^e(\lambda_{f_{n+1}}^v))}{\partial \lambda_{f_{n+1}}^e} \left( \frac{\lambda_{f_{n+1}}}{\lambda_{f_{n+1}}^v} \right) + \frac{\partial \psi_f(d(\lambda_{f_{n+1}}^v))}{\partial d} = 0 \quad (5.48)$$

Note que se trata de uma única equação não-linear cuja solução fornece o valor de  $\lambda_{f_{n+1}}^v$  que minimiza o funcional incremental. Identificado o valor de  $\lambda_{f_{n+1}}^v$  calcula-se

$$\lambda_{f_{n+1}}^e = \lambda_{f_{n+1}}(\lambda_{f_{n+1}}^v)^{-1} \quad (5.49)$$

Obtidos os valores de  $\lambda_{f_{n+1}}^e$  e  $\lambda_{f_{n+1}}^v$ , pode-se obter a contribuição das tensões de cada parcela do modelo, sendo necessário, para isto, o cálculo de  $\frac{\partial \varphi_f}{\partial \widehat{\mathbf{C}}_{n+1}}$  e  $\frac{\partial \varphi_f^e}{\partial \widehat{\mathbf{C}}_{n+1}}$ . Assim, para parcela correspondente ao braço puramente elástico, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_f}{\partial \widehat{\mathbf{C}}_{n+1}} &= \frac{\partial \varphi_f}{\partial \lambda_{f_{n+1}}} \frac{\partial \lambda_{f_{n+1}}}{\partial I_{f_{n+1}}} \frac{\partial I_{f_{n+1}}}{\partial \widehat{\mathbf{C}}_{n+1}} \\ &= \frac{\partial \varphi_f}{\partial \lambda_{f_{n+1}}} \frac{1}{2\lambda_{f_{n+1}}} \mathbf{A}_f \end{aligned} \quad (5.50)$$

A parcela correspondente ao braço de Maxwell é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_f^e}{\partial \widehat{\mathbf{C}}_{n+1}} &= \frac{\partial \varphi_f^e}{\partial \lambda_{f_{n+1}}^e} \frac{\partial \lambda_{f_{n+1}}^e}{\partial \lambda_{f_{n+1}}} \frac{\partial \lambda_{f_{n+1}}}{\partial I_{f_{n+1}}} \frac{\partial I_{f_{n+1}}}{\partial \widehat{\mathbf{C}}_{n+1}} \\ &= \frac{\partial \varphi_f^e}{\partial \lambda_{f_{n+1}}^e} \frac{1}{\lambda_{f_{n+1}}^v} \frac{1}{2\lambda_{f_{n+1}}} \mathbf{A}_f \end{aligned} \quad (5.51)$$

Assim, torna-se possível o cálculo do tensor de Piola-Kirchhoff dado pela equação (5.3), tendo em vista o potencial definido na equação (5.30).

Estes modelos constitutivos foram codificados em GNU Octave para realizar simulações de testes de tração uniaxial. Posteriormente foram incorporados no código de Elementos Finitos METAFOR [6], desenvolvido no LTAS - Departamento de Engenharia Mecânica e Aeroespacial da Universidade de Liege, Bélgica, destinado a simulação de processos de grandes deslocamentos e deformações. O código é cedido ao GRANTE/EMC em função de convênio de colaboração entre ambos laboratórios. A codificação foi realizada em C++ e Python. O Capítulo a seguir é destinado a apresentar resultados de desempenho do modelo proposto.

## 6 *Resultados numéricos*

Neste capítulo é apresentado um conjunto de exemplos numéricos obtidos como resultados das implementações realizadas no GNU Octave e posteriormente no código acadêmico Metafor. Os diferentes testes buscam evidenciar as características e a aplicabilidade do modelo proposto a problemas numéricos baseados na técnica de Elementos Finitos. Alguns testes foram rodados com propriedades genéricas de material enquanto outros utilizaram valores obtidos de [15] representando comportamento de materiais biológicos, objetivo tecnológico final deste estudo. Cabe assim enfatizar que o intuito deste capítulo é testar qualitativamente o comportamento do modelo. Os valores obtidos não dizem respeito a um material específico nem são o resultado de um processo de identificação, procedimento que corresponde a desenvolvimentos futuros.

### 6.1 **Ensaio Uniaxiais**

#### 6.1.1 **Comportamento de matriz e fibras: Caso 1**

Este teste tem o objetivo de analisar separadamente o comportamento da matriz isotrópica e da parcela das fibras quando submetidas a um ciclo de solicitação axial. Os cálculos são realizados utilizando um corpo de prova unitário com deslocamentos do seu extremo seguindo a função senoidal dada por  $u(t) = 0,5 \sin(\omega t)$ ,  $w = 0,31/s$ ,  $f = w/2\pi = 0,0477Hz$ . O corpo de prova é reforçado com fibras orientadas na direção da deformação. Os modelos e parâmetros dos potenciais da matriz isotrópica e do reforço das fibras se encontra na Tabela 1. Observe-se que, ao se ter uma deformação imposta no corpo de prova, a contribuição de cada modelo nas tensões é independente.

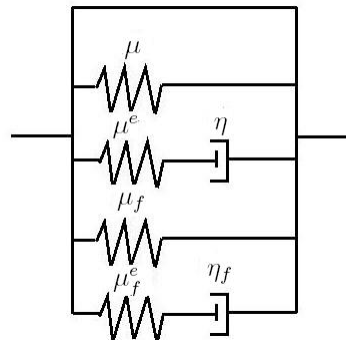


Figura 13: Modelo reológico

Os gráficos que seguem representam as curvas tensão(Cauchy)-deformação(logarítmica) para os modelos Neo-Hookean, Hencky e Holzapfel separadamente.

- Modelo isotrópico. Potencial de Hencky

Tabela 1: Funções potenciais Hencky

Potencial	Modelo	Parâmetros
$\varphi$	Hencky	$\mu = 100(\text{MPa})$
$\varphi^e$	Hencky	$\mu^e = 80(\text{MPa})$
$\psi$	Hencky	$\eta = 100(\text{MPa/s})$

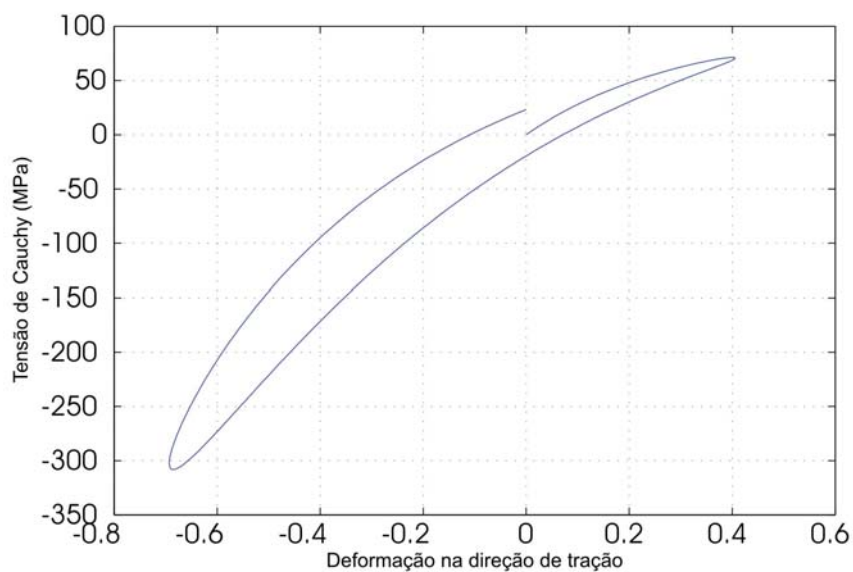


Figura 14: Tensão versus deformação - parcela isotrópica - Hencky

- Modelo isotrópico. Potencial Neo-Hookean

Tabela 2: Funções potenciais Neo-Hookean

Potencial	Modelo	Parâmetros
$\varphi$	Neo-Hookean	$\alpha = 85(\text{MPa}), \beta = 2(\text{MPa})$
$\varphi^e$	Neo-Hookean	$\alpha = 85(\text{MPa}), \beta = 2(\text{MPa})$
$\psi$	Hencky	$\eta = 30(\text{MPa/s})$

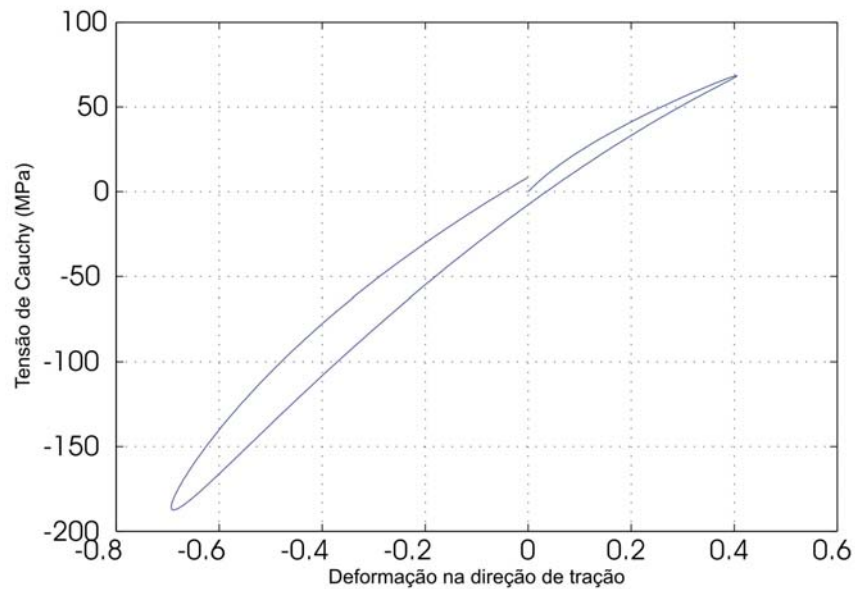


Figura 15: Tensão versus deformação - parcela isotrópica - potenciais de Neo-Hookean

- Modelo de reforço. Potencial de Holzapfel

Tabela 3: Funções potenciais Holzapfel

Potencial	Modelo	Parâmetros
$\varphi_f$	Holzapfel	$k_1 = 1,0(\text{MPa}), k_2 = 10(\text{MPa})$
$\varphi_f^e$	Holzapfel	$k_1 = 1,0(\text{MPa}), k_2 = 10(\text{MPa})$
$\psi_f$	Hencky	$\eta = 15,0087(\text{MPa/s})$

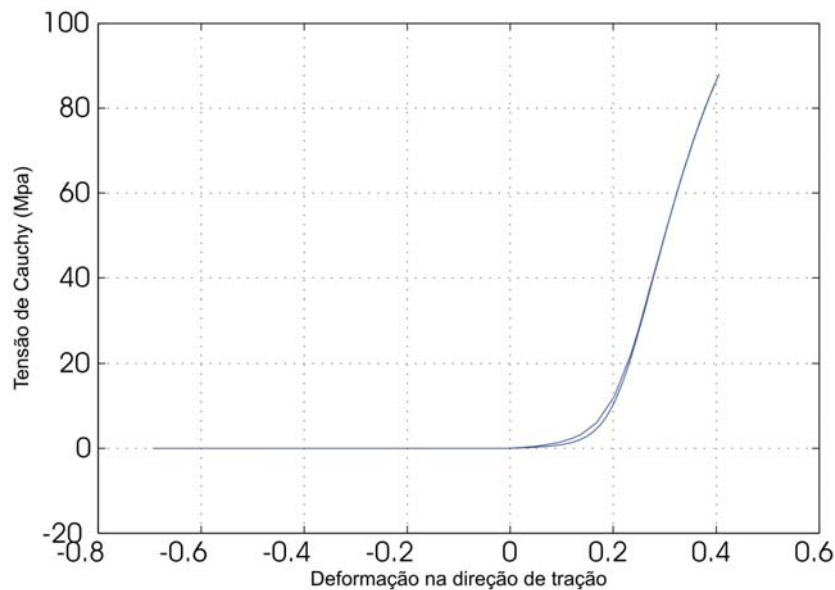


Figura 16: Tensão versus deformação - parcela das fibras - potenciais de Holzapfel

Nas figuras 14 e 15 (modelo isotrópico), observa-se, como esperado, comportamentos histeréticos para a resposta das tensões. O ciclo possui um formato de elipse deformada, com acentuação nas tensões compressivas em decorrência da alta taxa de compressão, atingindo um valor de deformação logarítmica menor que -0,6. O formato destes ciclos, porém, varia em função das diferentes características do modelo (Hencky - Neo Hookean).

Resultado totalmente diferente, e assim desejado, é obtido com o modelo de fibras de Holzapfel. Neste é imposta a condição que não são permitidas tensões compressivas. É importante notar que o modelo de viscoelasticidade proposto respeita esta condição para todo o ciclo. Em outras palavras, a adição das tensões elásticas mais as tensões viscosas comportam uma soma sempre positiva ao longo de todo o ciclo.

### 6.1.2 Comportamento de matriz e fibras: Caso 2

O mesmo corpo de prova do Caso 1 é utilizado neste exemplo, submetido ao mesmo regime de deformação tanto na direção do reforço das fibras (direção Y) como na direção perpendicular a esta (direção X). Para a matriz isotrópica foi utilizado o potencial Neo-Hookean enquanto o reforço das fibras é representado pelo potencial de Holzapfel. O potencial Neo-Hookean é uma particularidade dos potenciais de Ogden, já apresentados

na seção 3.3, para maiores detalhes ver [12]. Neste caso foram utilizados valores de material compatíveis com materiais biológicos, obtidos em [15] e constam na Tabela 4.

Tabela 4: Funções potenciais utilizadas

Potencial	Modelo	Parâmetros
$\varphi$	Neo-Hookean	$\alpha = 2(\text{MPa}), \beta = 2(\text{MPa})$
$\varphi^e$	Neo-Hookean	$\alpha = 2(\text{MPa}), \beta = 2(\text{MPa})$
$\psi$	Hencky	$\eta = 15,0087(\text{MPa/s})$
$\varphi_f$	Holzapfel	$k_1 = 1,7939(\text{MPa}), k_2 = 11,2055(\text{MPa})$
$\varphi_f^e$	Holzapfel	$k_1 = 1,7939(\text{MPa}), k_2 = 11,2055(\text{MPa})$
$\psi_f$	Hencky	$\eta = 15,0087(\text{MPa/s})$

- Deformação axial em Y

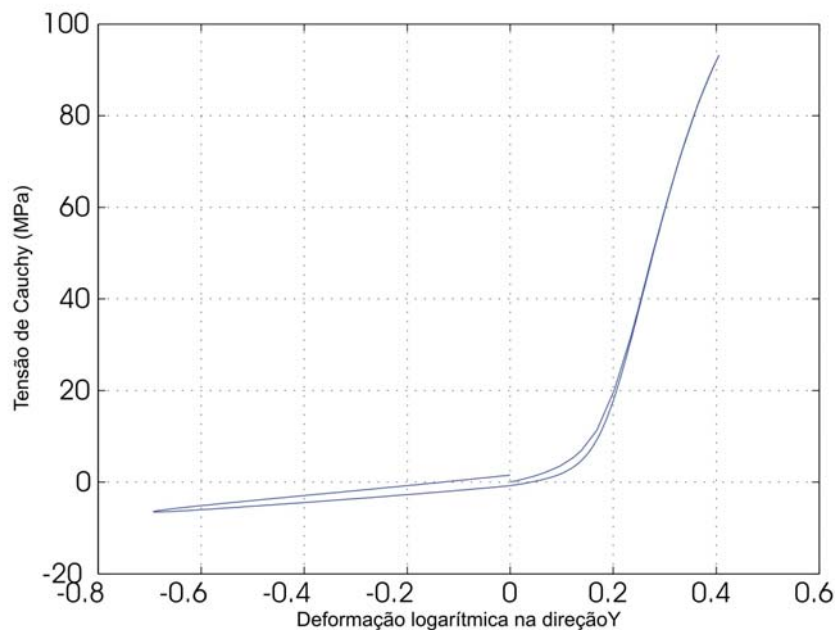


Figura 17: Gráfico tensão versus deformação - tração em Y - potenciais de Holzapfel

Para esse caso, a tensão negativa encontrada refere-se à parcela isotrópica, já que, a mesma está definida com potencial de Hencky, permitindo assim, valores negativos no caso de compressão do material. A parcela das fibras, no entanto, como é definida pelo potencial de Holzapfel retorna valor nulo no caso de compressão do material.

- Deformação axial em X

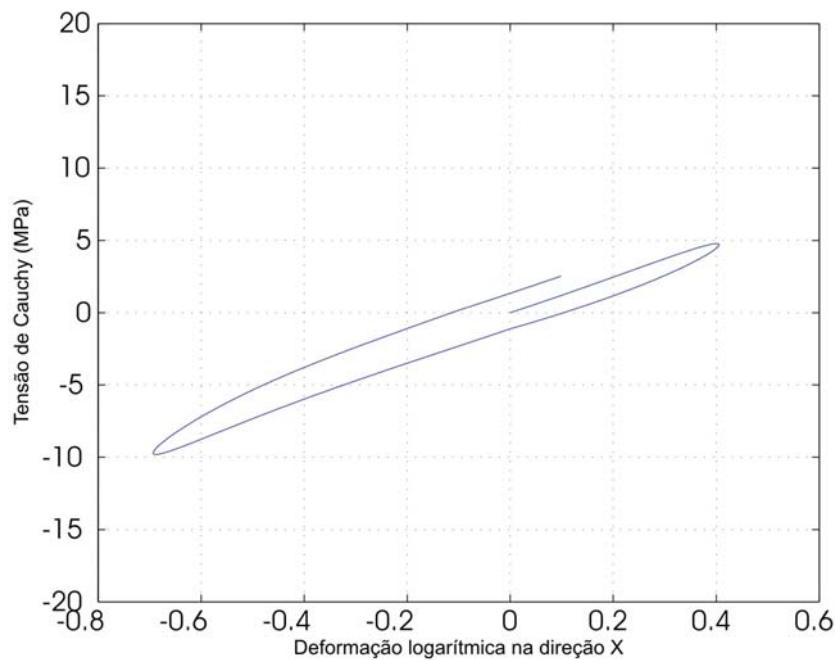


Figura 18: Gráfico tensão versus deformação - tração em X - potenciais de Holzapfel

Comparando os gráficos das Figuras 17 e 18, percebe-se uma tensão consideravelmente maior na direção do reforço das fibras do que em relação à matriz isotrópica. De fato, quando tracionado na direção perpendicular às fibras, (Figura 18) estas ficam submetidas a compressão, não contribuindo no valor da tensão na direção axial do ensaio.

### 6.1.3 Dependência da orientação das fibras

Neste exemplo avalia-se a variação da resposta perante variações na orientação das fibras em relação ao eixo de tração. O teste é realizado utilizando um corpo de prova de comprimento unitário submetido ao mesmo ciclo de sollicitação axial dos exemplos anteriores. O material incorpora 4 famílias de fibras contidas nos planos XY e YZ. Os ângulos testados são :  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ . Os modelos e parâmetros utilizados para a matriz isotrópica e fibras de reforço foram obtidos de [15] e se encontram-se na Tabela 4 (seção anterior).



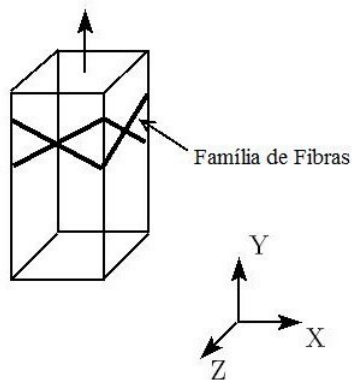


Figura 19: Volume com representação das famílias de fibras

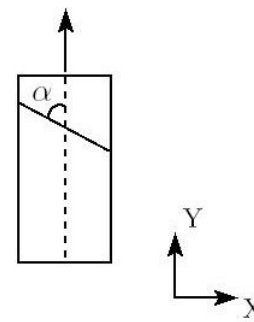


Figura 20: Vista frontal do volume com representação de uma família de fibras

A seguir apresentam-se os resultados das tensoes de Cauchy na direção de tração para cada ângulo de reforço.

- Reforço a  $0^\circ$

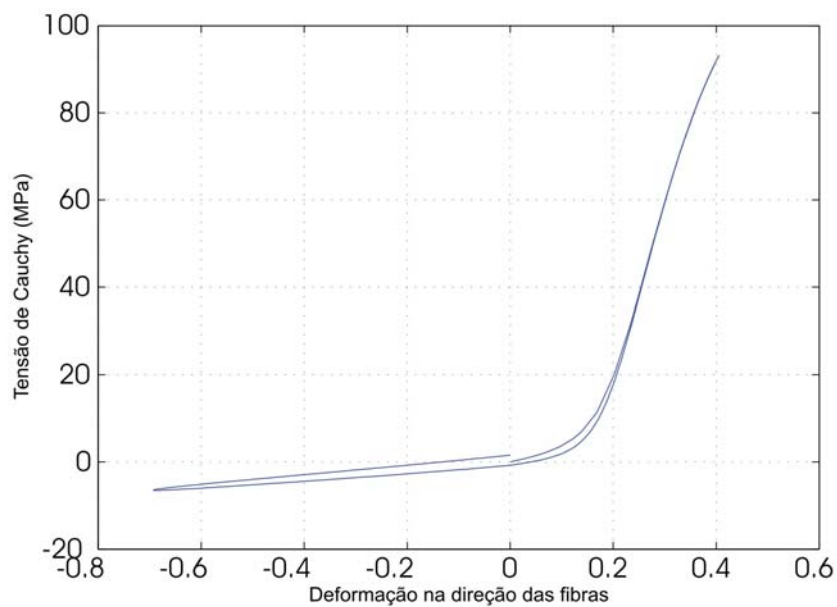


Figura 21: Gráfico tensão versus deformação - potencias de Holzapfel - fibras alinhadas a  $0^\circ$

- Reforço a 30°

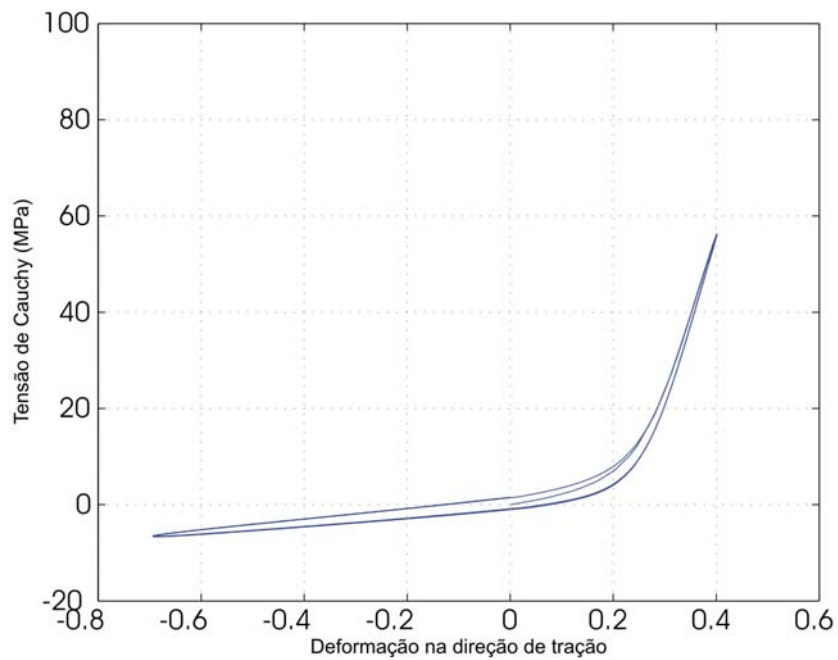


Figura 22: Gráfico tensão versus deformação - potencias de Holzapfel - fibras alinhadas a 30°

- Reforço a 45°

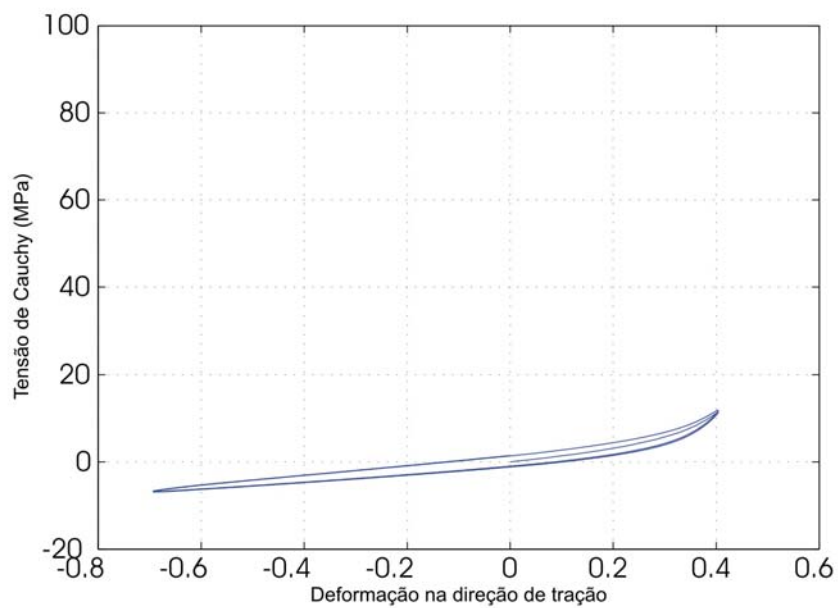


Figura 23: Gráfico tensão versus deformação - potencias de Holzapfel - fibras alinhadas a 45°

- Reforço a  $60^\circ$

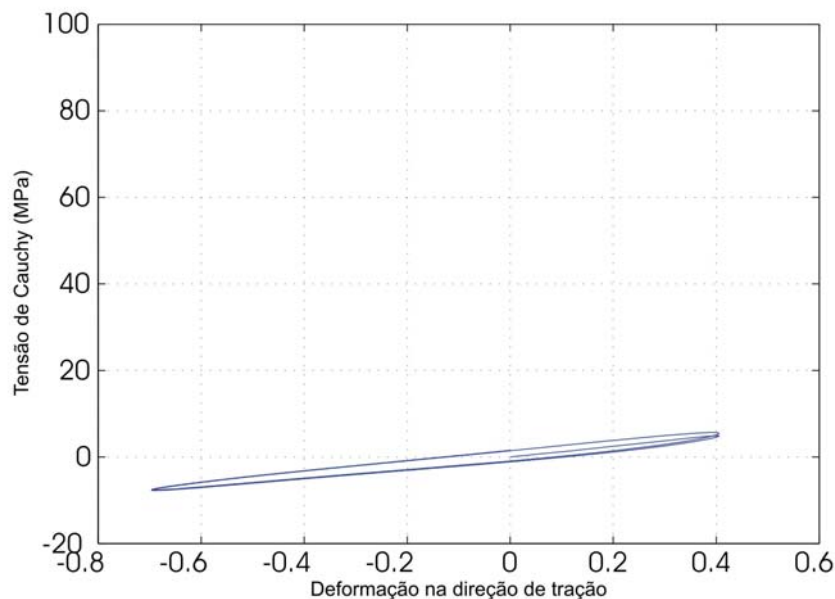


Figura 24: Gráfico tensão versus deformação - potenciais de Holzapfel - fibras alinhadas a  $60^\circ$

Nos gráficos das Figuras 21 a 24 observa-se que, a medida que a direção das fibras se afasta da direção de alongamento do corpo de prova, a tensão de tração encontrada diminui, sendo que o mesmo ocorre quando utilizamos potenciais de Hencky para a representação da parcela das fibras. De fato, isso ocorre porque, a rigidez ao alongamento oferecida pelas fibras diminui quando se aumenta a angulação entre as famílias de fibras.

Da mesma maneira que para os potenciais de Hencky, nota-se um aumento considerável na Tensão de Cauchy na direção das fibras. Neste exemplo, devido aos parâmetros utilizados, nota-se uma acentuada diferença entre a contribuição das fibras e do meio isotrópico. Isto representa o comportamento esperado dos tecidos conectivos, onde a maior rigidez provém da contribuição das fibras, se mostrando muito flexíveis em outras direções.

#### 6.1.4 Dependência da velocidade de deformação

Novamente o teste é realizado utilizando um corpo de prova de comprimento unitário submetido a um deslocamento imposto num dos extremos com variação senoidal no tempo.

Neste teste, porém, é variada a frequência com que o ciclo é realizado. Foram testadas três velocidades angulares diferentes:  $\omega_1 = 0,3\frac{1}{s}$  ( $f_1 = 0,0477 Hz$ , curva verde);  $\omega_2 = 2,512\frac{1}{s}$  ( $f_2 = 0,4 Hz$ , curva azul); e finalmente  $\omega_3 = 25,12\frac{1}{s}$  ( $f_1 = 4 Hz$ , curva vermelha). Os modelos e parâmetros de material utilizados são os mesmos que os do exemplo anterior (ver Tabela 4). O gráfico 25, representa a tensão de Cauchy versus a deformação na direção de tração, alinhada com as fibras de reforço. Pode-se observar claramente o aumento da tensão com a velocidade de deformação. No momento de máximo alongamento, porém, a velocidade de deformação torna-se nula e todos os resultados convergem ao mesmo ponto, dependendo apenas do nível de deformação total.

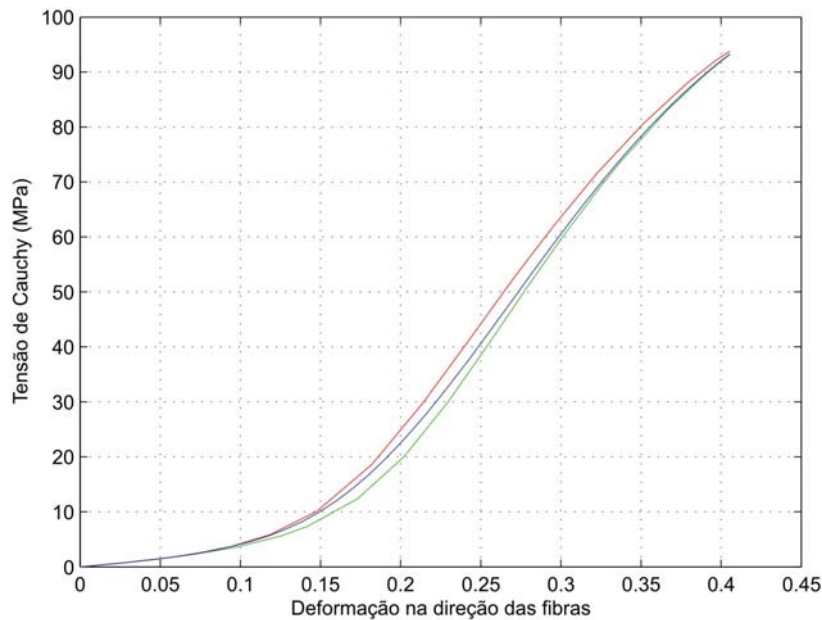


Figura 25: Gráfico tensão versus deformação - diferentes velocidades

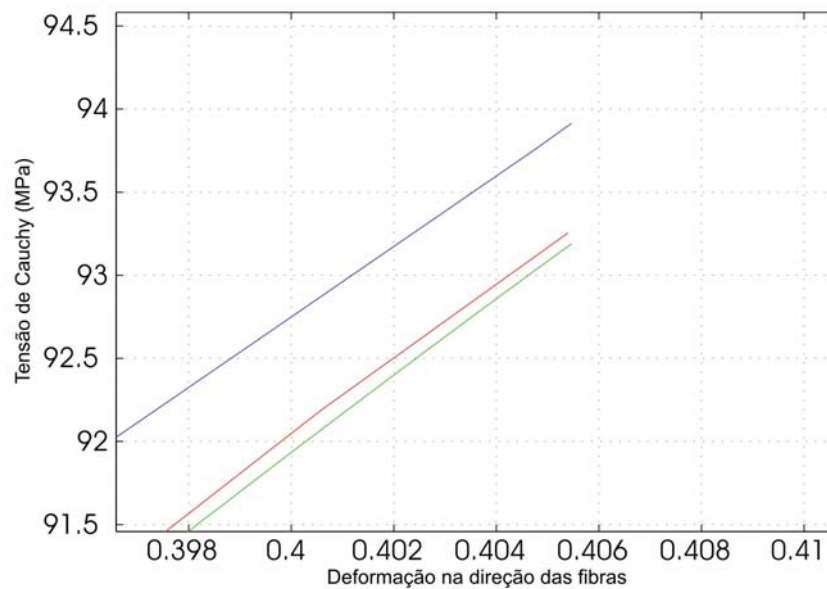


Figura 26: Gráfico tensão versus deformação - diferentes velocidades (zoom)

Percebe-se dos resultados que os parâmetros utilizados para este exemplo, obtidos de [15] não se mostram muito sensíveis à taxa de deformação, pelo menos não para os valores de velocidade/deformação aqui utilizados.

## 6.2 Membrana com pressão interna

Apresenta-se aqui uma membrana sujeita à pressão por um fluido com valor linearmente crescente de zero a  $1N/mm^2$  em  $t = 5s$  com condição de engaste nas bordas. O teste é realizado utilizando elementos sólidos hexaédricos com 8 nós. Somente um quarto do modelo foi simulado, devido à simetria do problema. A malha utiliza elementos regulares com uma discretização de  $16 \times 16 \times 4$  elementos. O modelo reológico escolhido para os exemplos é o apresentado na Figura 10. Para a parcela referente à matriz isotrópica utiliza-se o potencial Neo-Hookean e para representar a parcela das fibras utiliza-se o potencial de Holzapfel, ver equação (3.19).

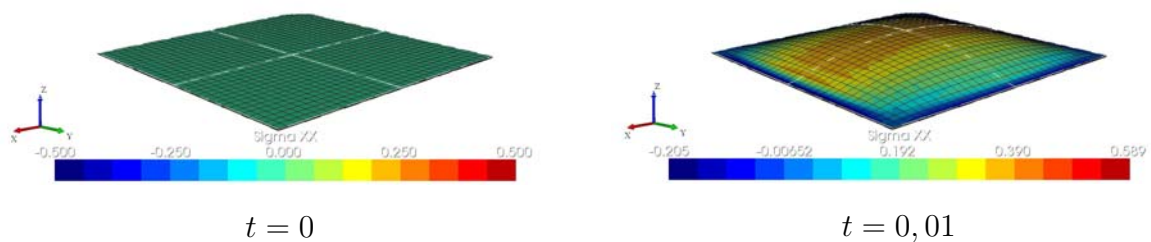
Os parâmetros materiais correspondentes estão representados na Tabela 5 e foram retirados de [15]:

Tabela 5: Parâmetros utilizados

Potencial	Modelo	Parâmetros
$\varphi$	Neo-Hookean	$\alpha = 2(\text{MPa}), \beta = 2(\text{MPa})$
$\varphi^e$	Neo-Hookean	$\alpha = 2(\text{MPa}), \beta = 2(\text{MPa})$
$\psi$	Hencky	$\eta = 15,0087(\text{MPa/s})$
$\varphi_f$	Holzapfel	$k_1 = 1,7939(\text{MPa}), k_2 = 11,2055(\text{MPa})$
$\varphi_f^e$	Holzapfel	$k_1 = 1,7939(\text{MPa}), k_2 = 11,2055(\text{MPa})$
$\psi_f$	Hencky	$\eta = 15,0087(\text{MPa/s})$

São apresentados, abaixo, três casos para a membrana: o primeiro utiliza material isotrópico sem contribuição das fibras; em seguida, o material da matriz é reforçado com uma família de fibras na direção  $X$ . Por fim, testa-se o material considerando o reforço de duas famílias de fibras alinhadas a 45 graus no plano da membrana (ver figura 30).

### 6.2.1 Caso 1. Modelo isotrópico



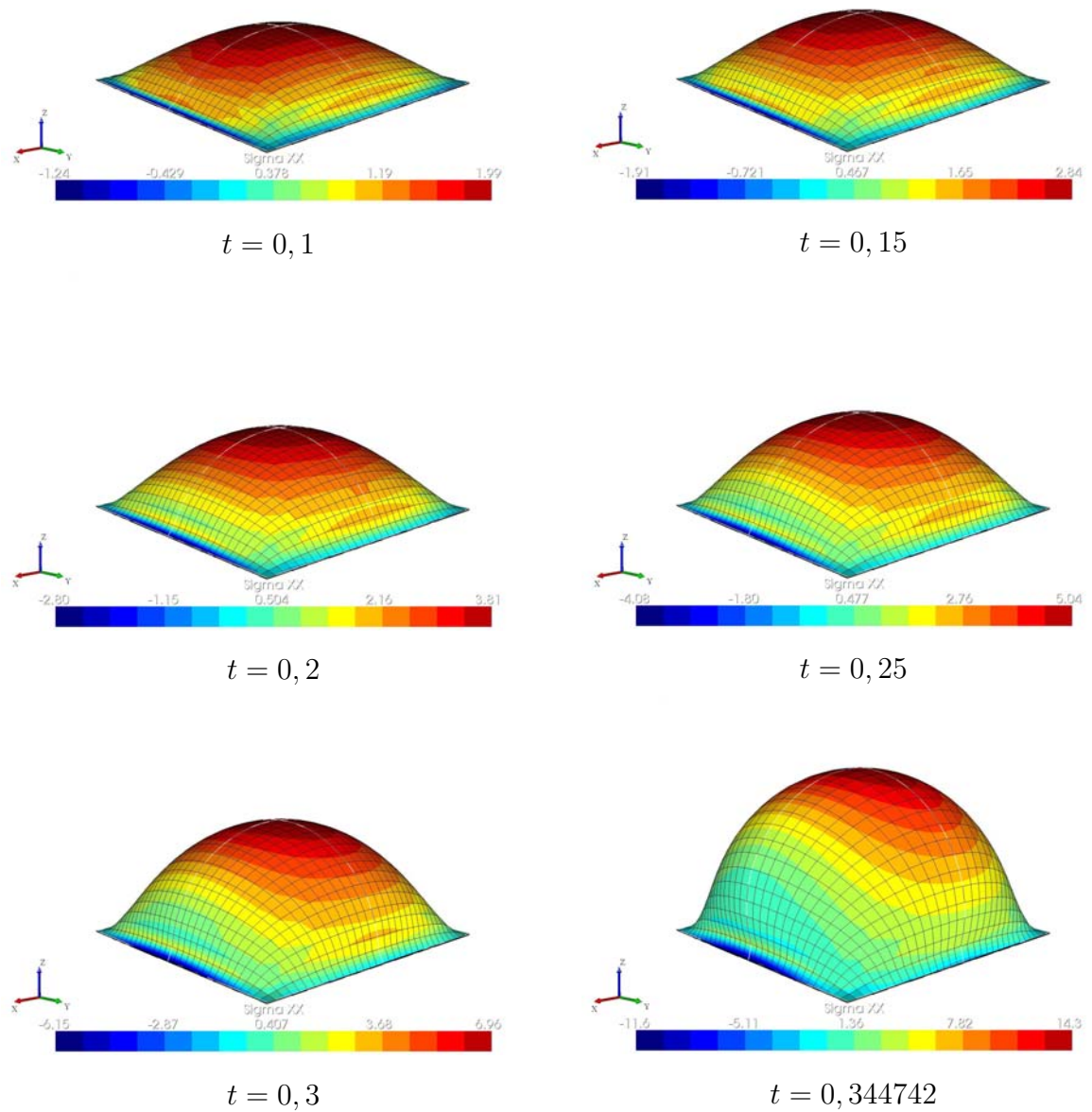


Figura 27: Sequência de deformações da membrana

### 6.2.2 Caso 2. Modelo com fibras a $0^\circ$

Para esse caso, a orientação das fibras é dado de acordo com a Figura 28

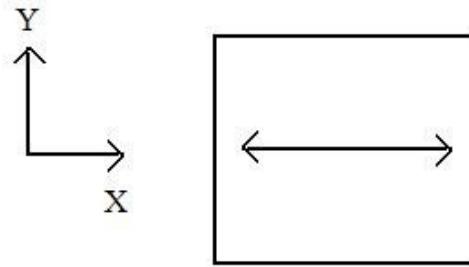
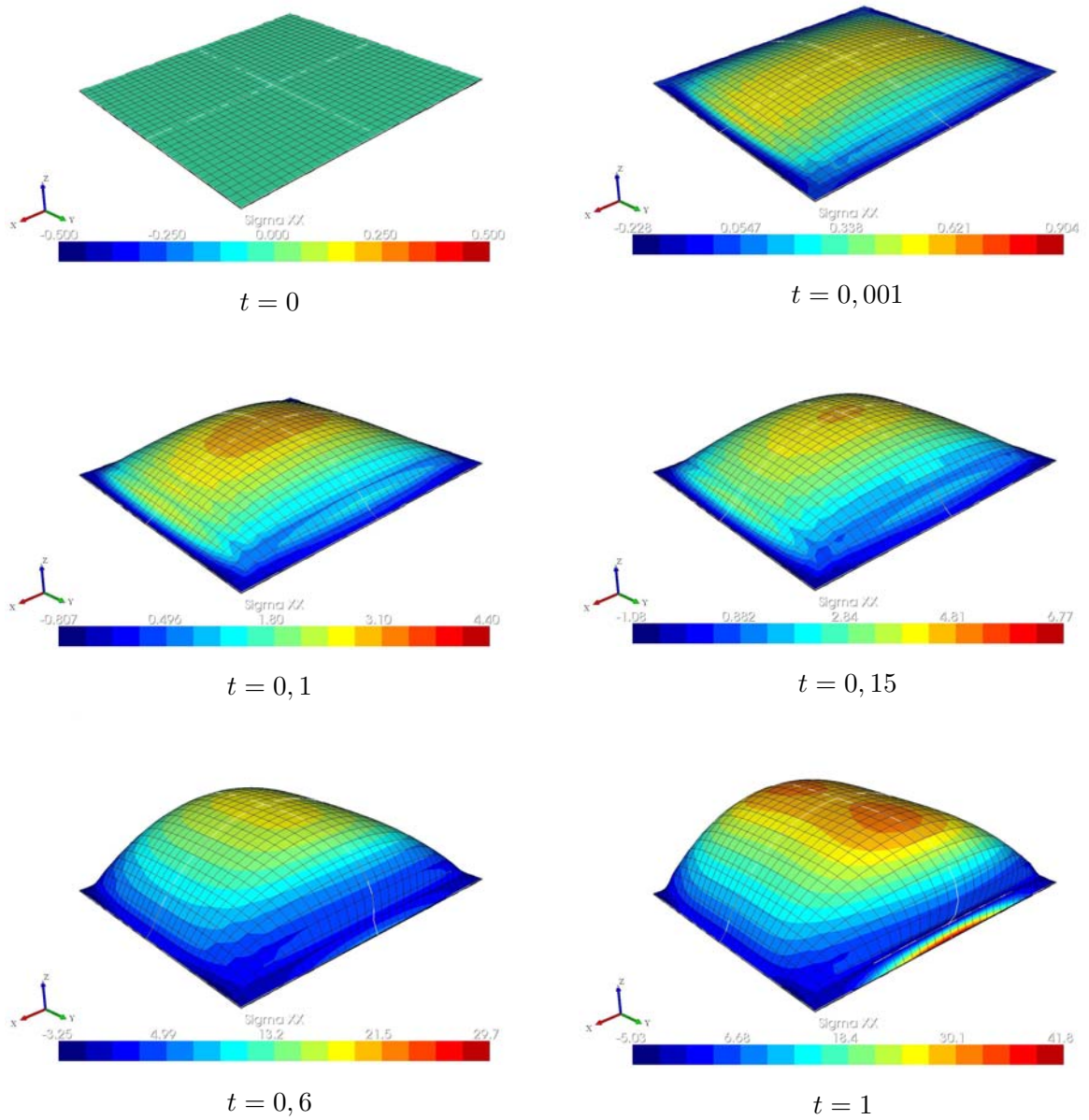


Figura 28: Orientação das fibras na membrana





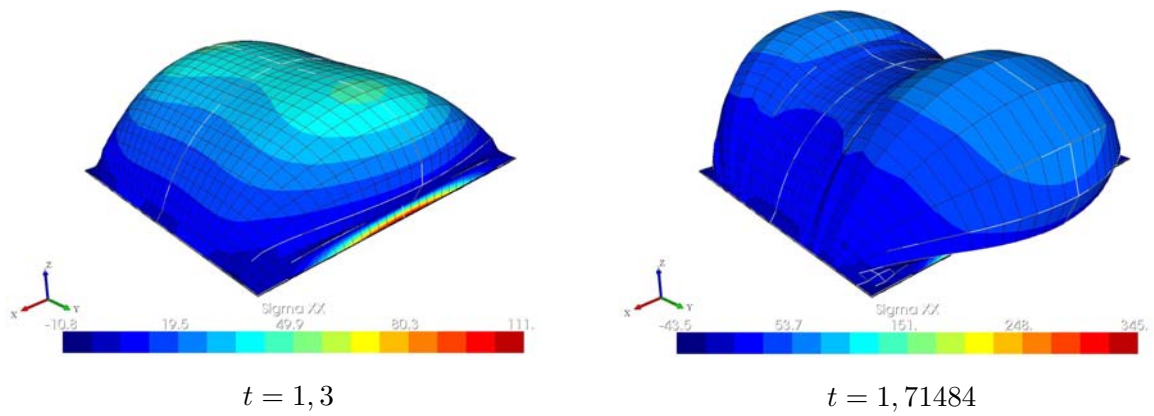
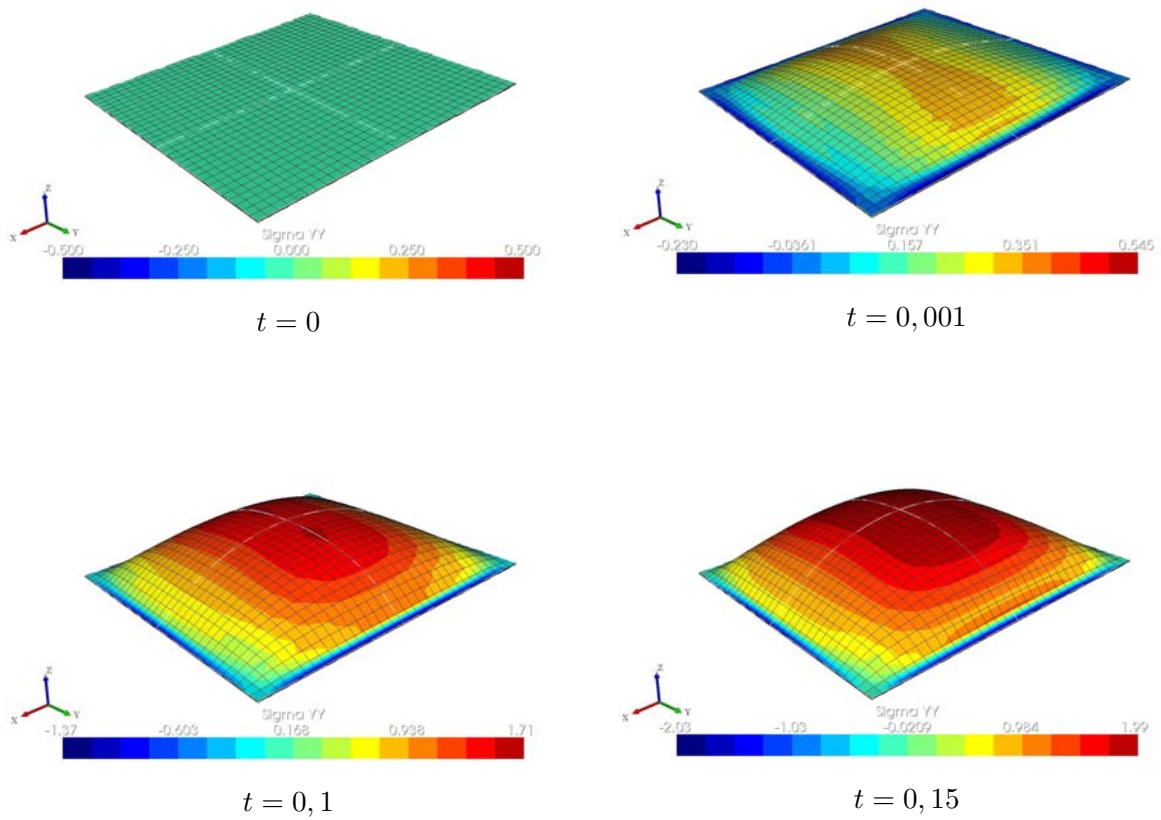


Figura 29: Sequência de deformações da membrana - tensão na direção X



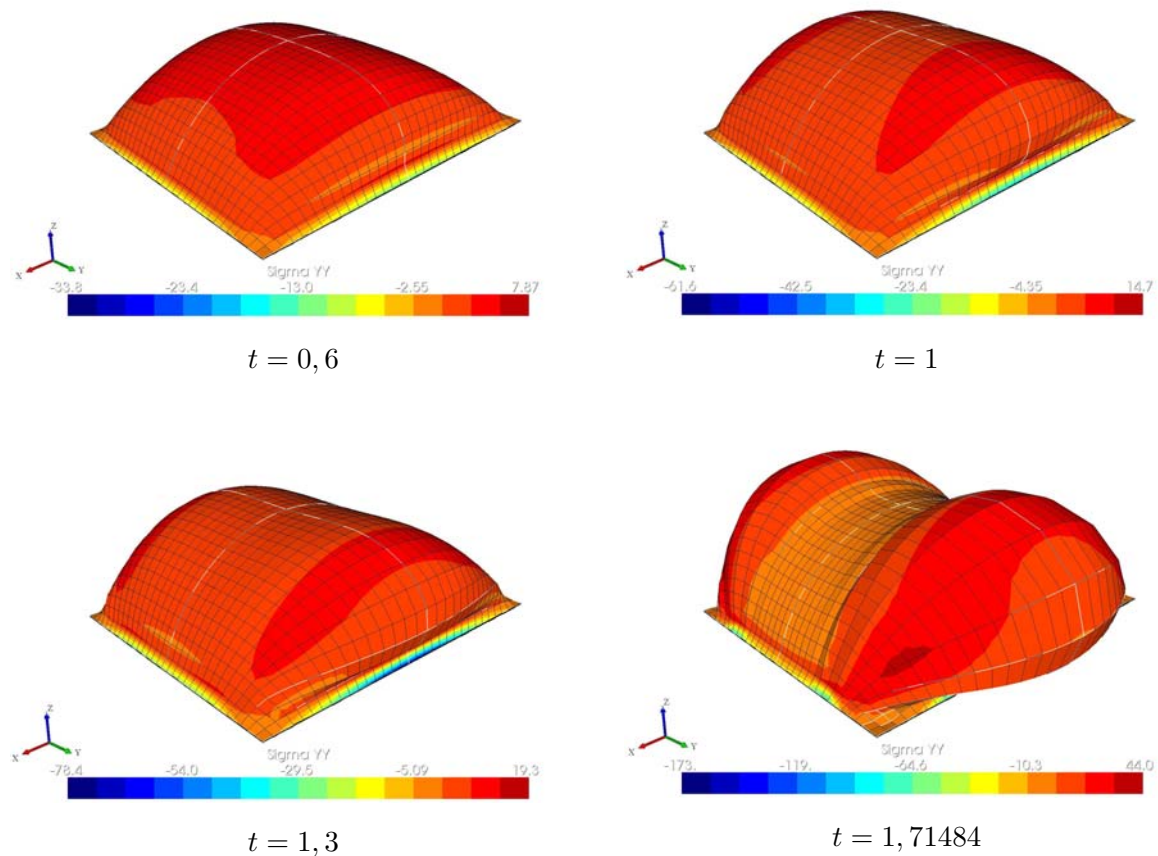


Figura 30: Sequência de deformações da membrana - tensão na direção Y

Percebe-se nitidamente, através das Figuras 27, 29 e 30, que a rigidez à deformação no corpo de prova reforçado com fibras é muito maior do que no material isotrópico. Foi preciso aumentar a pressão até o instante  $t = 1,7$  no caso reforçado por fibras para obter uma configuração com níveis de deformação comparáveis ao caso isotrópico. Observa-se também claramente o comportamento simétrico do caso isotrópico assim como o evidente efeito das fibras na direção  $X$  impedindo alongamentos excessivos nesta direção, no caso reforçado.

### 6.2.3 Caso 3. Modelo com fibras a $45^\circ$

Para esse caso, a orientação das fibras é dada pela Figura 31:

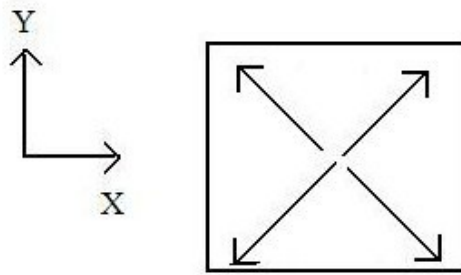
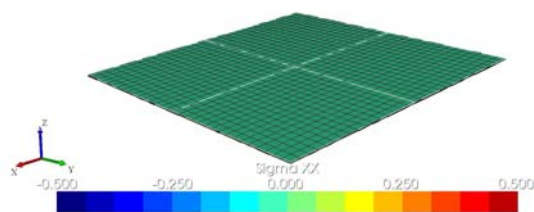
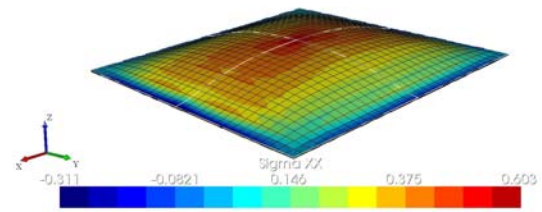
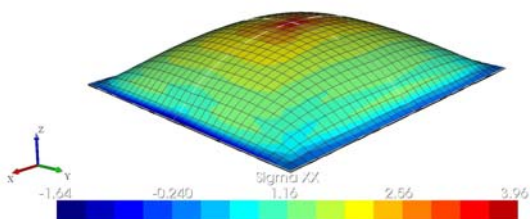
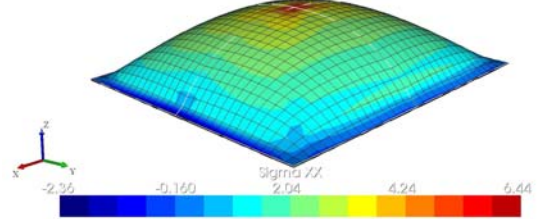
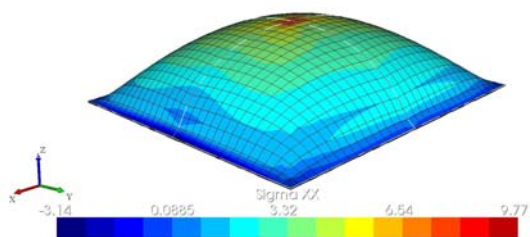
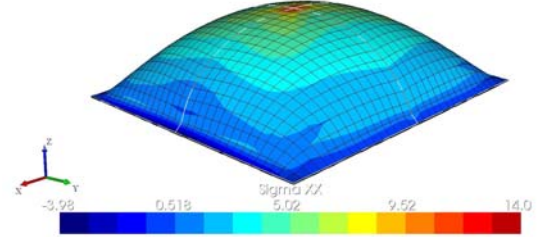


Figura 31: Orientação das fibras na membrana

 $t = 0$  $t = 0,01$  $t = 0,1$  $t = 0,15$  $t = 0,2$  $t = 0,25$

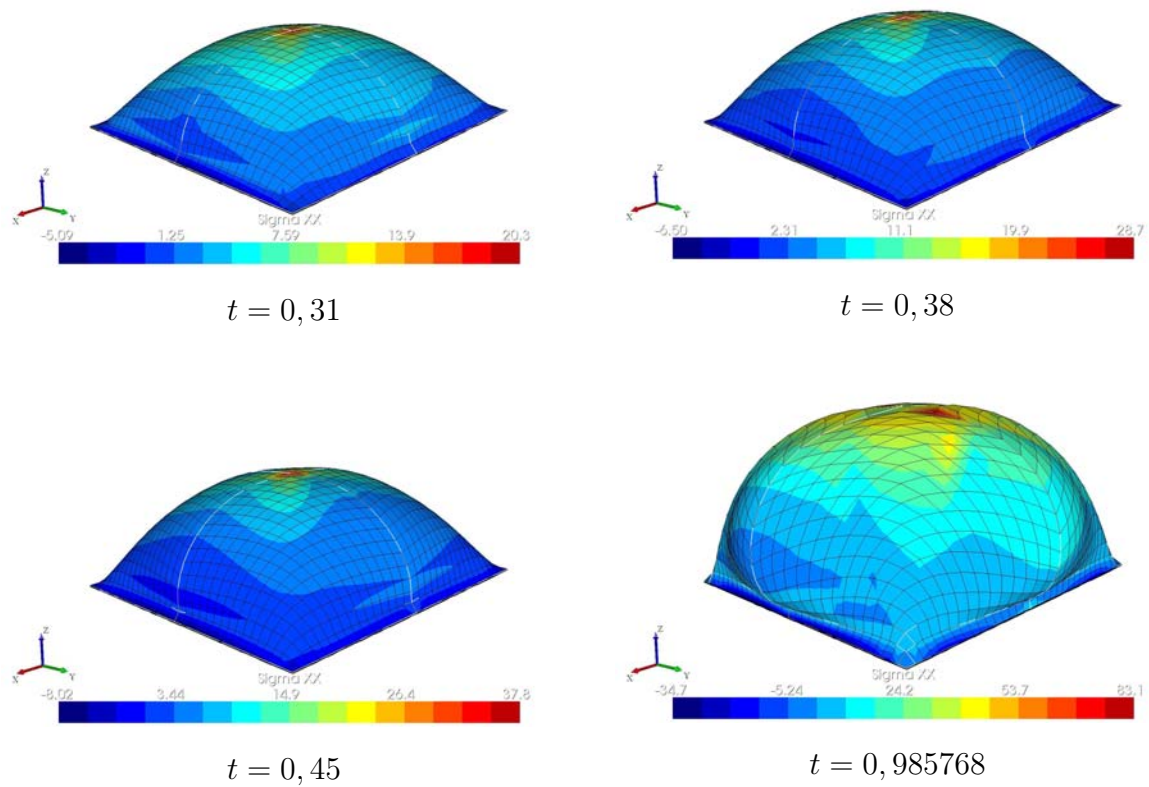


Figura 32: Sequência de deformações da membrana com reforço de duas famílias de fibras a  $45^\circ$

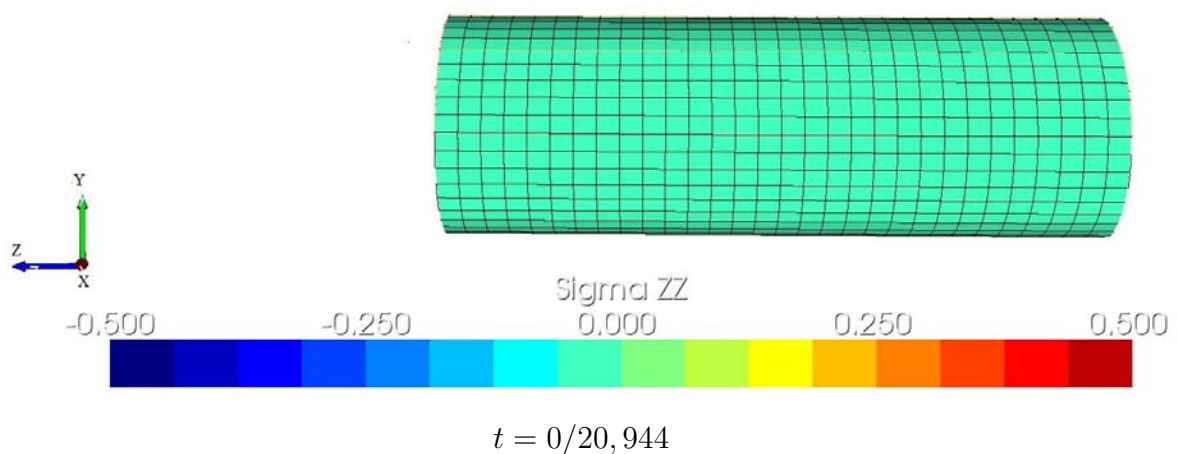
Como pode-se ver nas deformadas da Figura 32, foi preciso chegar cerca do instante de carregamento  $t = 1,0$  para obter níveis de deformação similares (mas ainda assim inferiores) ao caso não reforçado. Observa-se também das figuras que os alongamentos nas direções  $X$  e  $Y$  são maiores que os obtidos nas direções a 45 graus, direção de atuação das fibras de reforço.

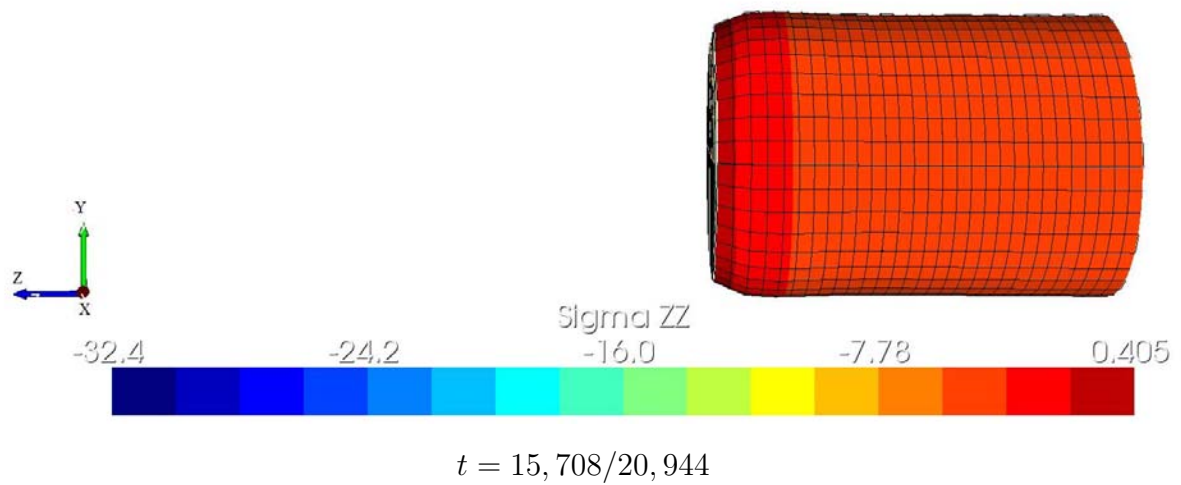
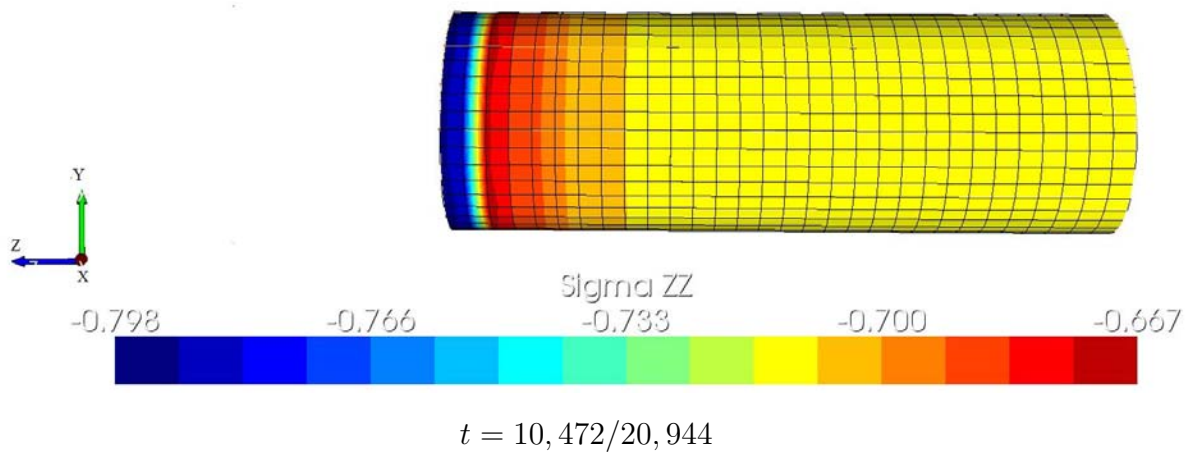
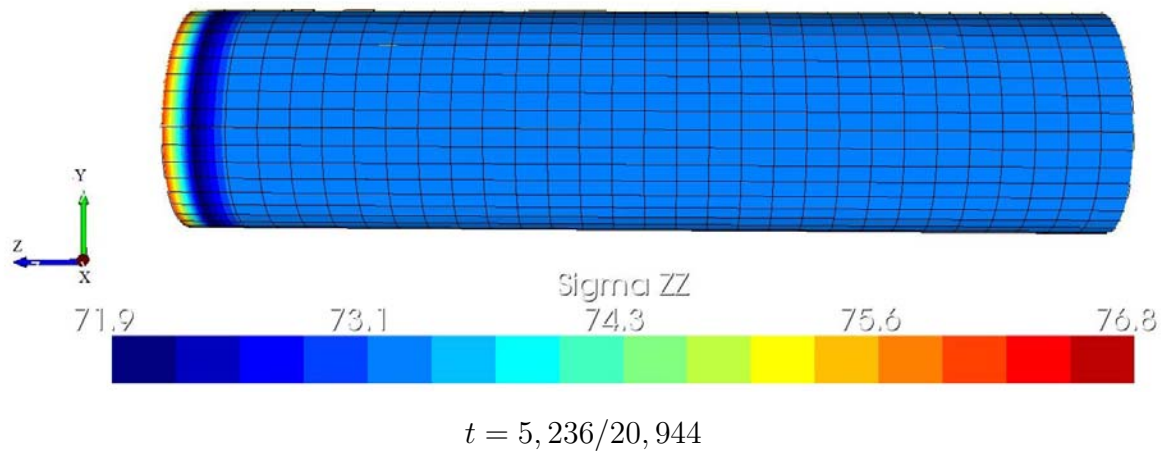
## 6.3 Cilindro reforçado

O próximo exemplo refere-se a um corpo de prova em forma de um cilindro com comprimento  $L = 30mm$  e raio  $R = 5mm$ , submetido a um ciclo trativo e compressivo. Os potenciais utilizados e os dados do material empregado são os mesmos que os do exemplo da membrana. O deslocamento de um dos extremos (o outro é fixo) é dado através da função senoidal  $f(t) = 0,4 L \sin(0,3 t)$

### 6.3.1 Caso 1. Modelo com fibras a 0°

No primeiro exemplo, o corpo de prova possui uma família de fibras paralelas ao eixo de tração  $Z$ . A malha utiliza elementos volumétricos com uma discretização de  $5 \times 5 \times 30$ . As figuras apresentam o comportamento do corpo de prova no momento inicial, no ponto máximo de tração, ao retornar à condição inicial, no ponto mínimo de compressão e novamente, no retorno do corpo de prova à situação inicial.





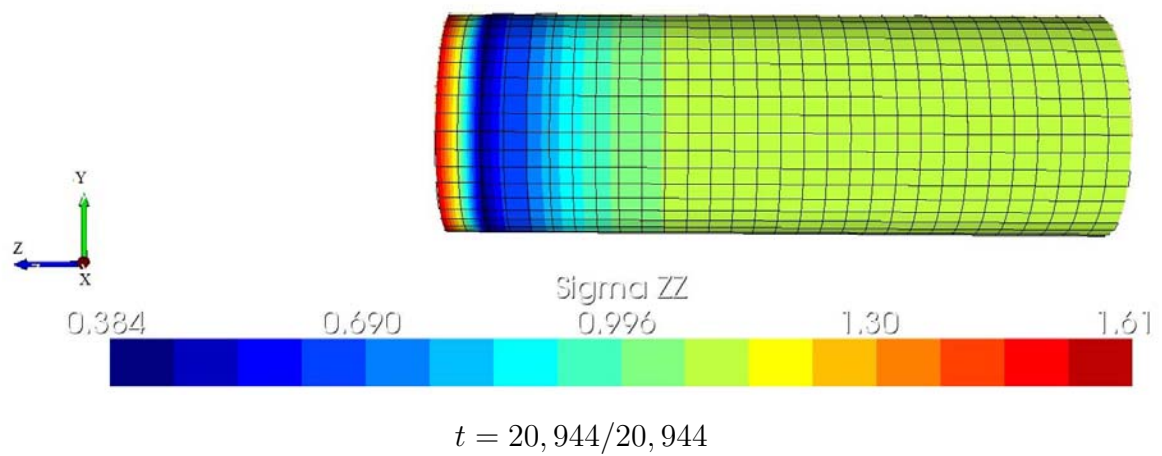


Figura 33: Sequência de deformações do cilindro com reforço de uma família de fibras a  $0^\circ$

### 6.3.2 Caso 2. Modelo com fibras a $30^\circ$

Neste exemplo, considera-se o mesmo corpo de prova do caso anterior, considerando agora, apenas uma família de fibras orientadas a  $30^\circ$  em relação ao eixo de tração, estando as mesmas no plano  $YZ$ . Devido ao fato de o corpo de prova não ser simétrico, não foi simulado apenas um quarto do corpo de prova, mas sim, todo ele. O modelo reológico, os parâmetros, a discretização da malha e as funções potenciais utilizadas tanto para a matriz quanto para as fibras são os mesmos do caso anterior. Além disso, o deslocamento também respeita a função senoidal apresentada anteriormente. A orientação das fibras, nesse caso, pode ser visualizada na Figura 34:

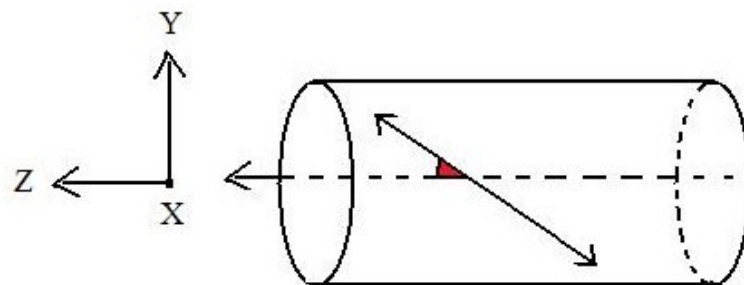
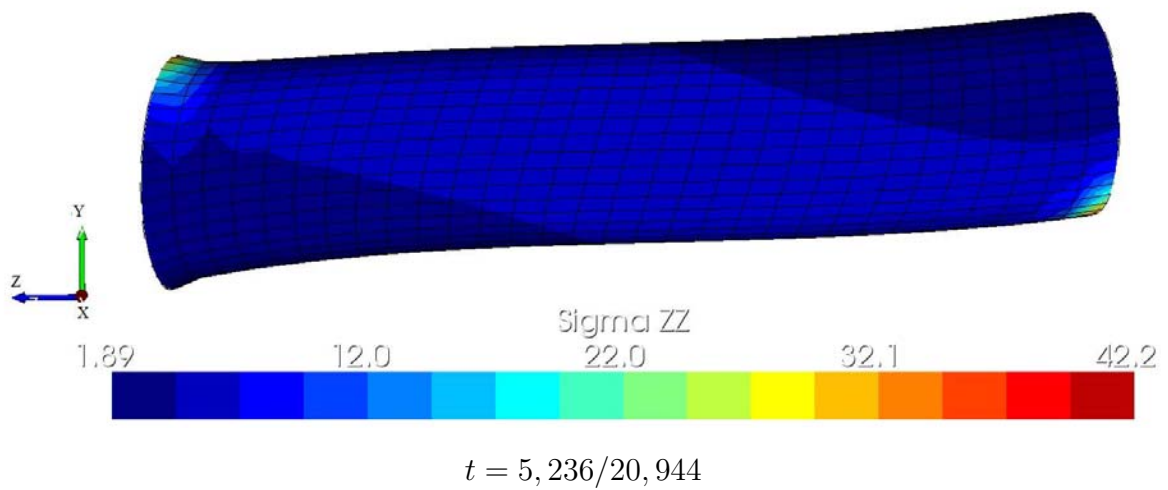
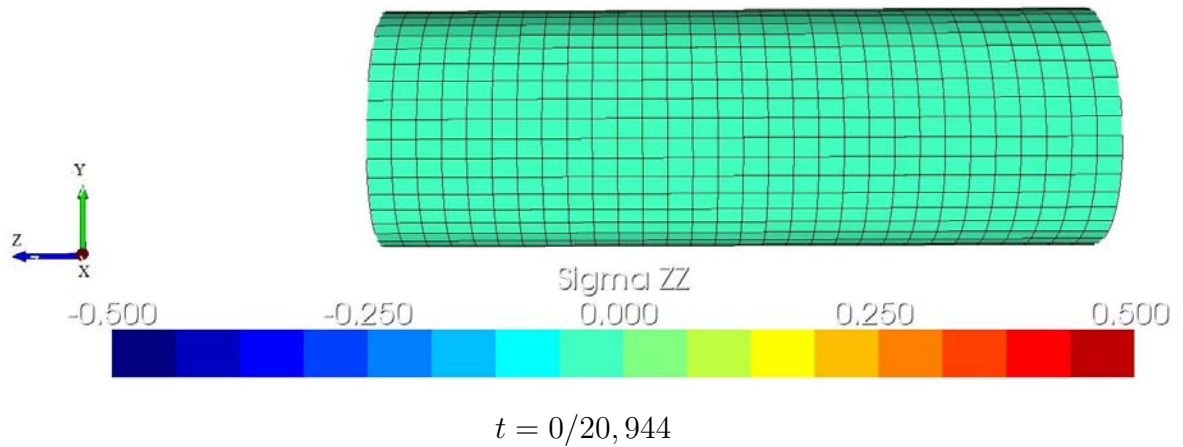
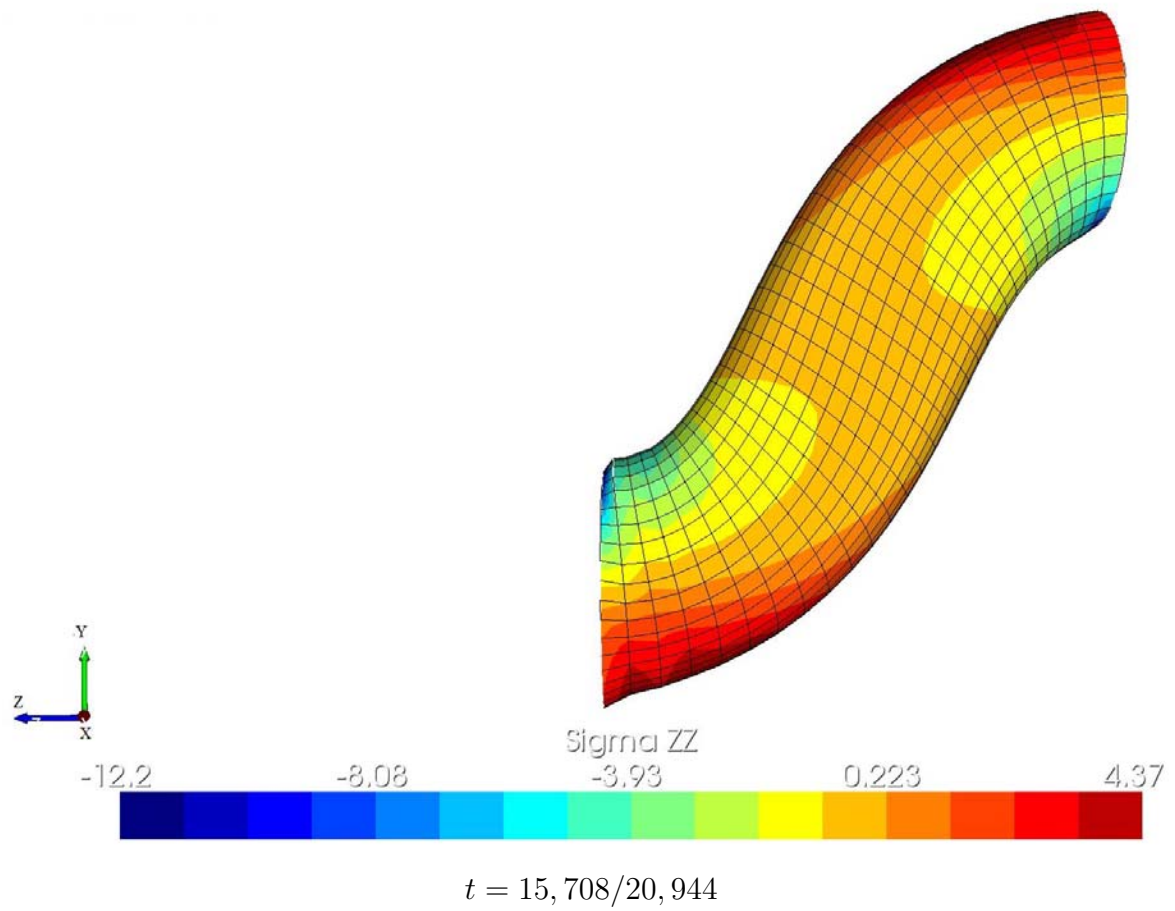
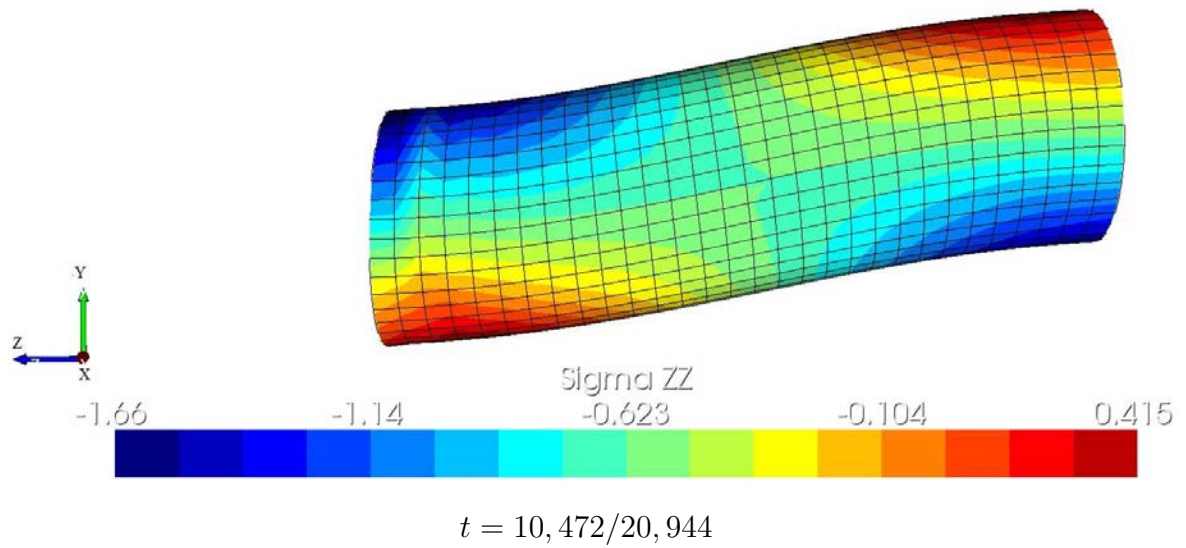


Figura 34: Orientação das fibras na membrana

Abaixo, são apresentadas as figuras nos mesmos tempos do exemplo que considera fibras paralelas.







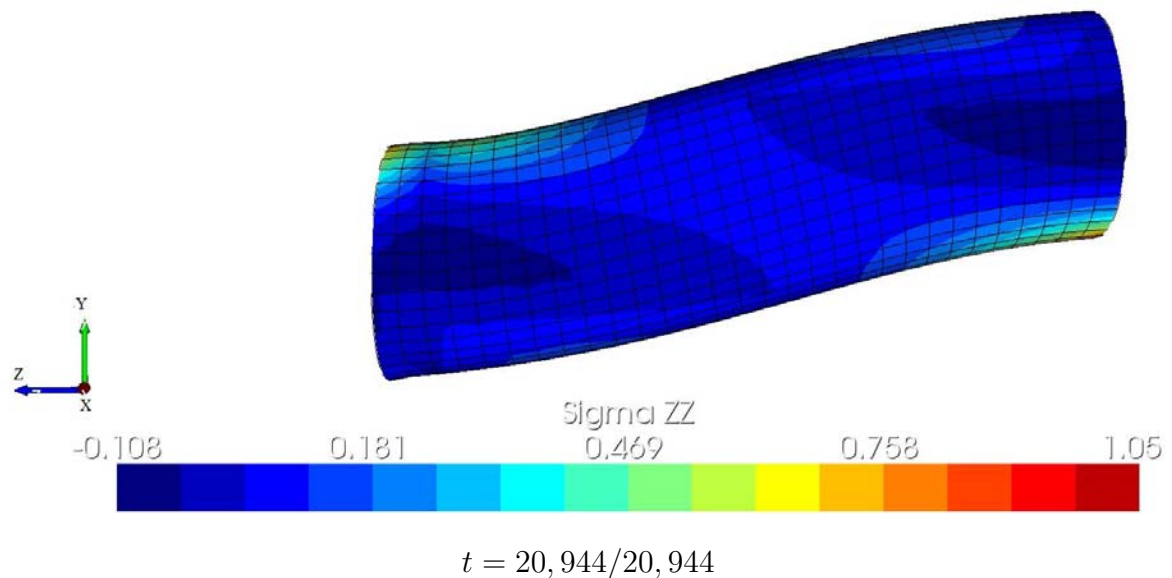


Figura 35: Seqüência de deformações do cilindro com reforço de uma família de fibras a  $30^\circ$

Como era de se esperar, a tensão final encontrada no caso de fibras alinhadas a  $30^\circ$  graus é menor que a tensão final quando as fibras estão paralelas a direção de tração do corpo de prova. Isso acontece porque a rigidez ao alongamento oferecida pelas fibras diminui com o aumento do ângulo. Além disso, a tensão resultante no corpo de prova (com uma família de fibras) não é uniforme, sendo que a mesma é maior nas bordas de inclinação onde encontram-se a família de fibras. Dessa maneira, a deformação do material em questão demonstra visivelmente a atuação das fibras no corpo, resultando na menor deformação na direção das mesmas.

A deformada do corpo de prova no momento em que o mesmo é submetido ao valor máximo de tração é semelhante ao encontrado nos trabalhos de [13], apesar de o mesmo utilizar duas famílias de fibras em uma direção arbitrária em relação ao eixo de tração, mas que formam  $90^\circ$  entre si.

No momento em que o corpo de prova é comprimido o mesmo apresenta uma deformação diferenciada devido a inclinação da família de fibras. De fato já era de se esperar tal comportamento já que o mesmo corresponde ao deslizamento das fibras entre si próprias que, organizam-se de modo a respeitar a restrição do volume do corpo de prova.

Finalmente, cabe observar a contribuição da parcela viscosa no desempenho do teste. Na Figura 35<sub>3</sub> observa-se que, embora os extremos do corpo de prova tenham retornado a posição inicial, tanto a sua configuração como o estado de tensões não corresponde ao do tempo  $t = 0$ , evidenciando a existência de tensões residuais advindas do comportamento viscoso do material.

## *7 Considerações finais*

A biomecânica abrange em sua área de competência o estudo das leis da mecânica e das aplicações de engenharia para compreender e atuar no comportamento de sistemas biológicos sob a ação de solicitações mecânicas. Mediante este estudo é possível a criação de modelos matemáticos capazes de representar de maneira aproximada o comportamento destes sistemas e, em particular o comportamento mecânico de materiais biológicos.

Neste trabalho propôs-se um modelo constitutivo para corpos biológicos moles que leva em consideração a anisotropia devido a inclusão de famílias de fibras de colágeno presentes nos ligamentos.

O modelo proposto é uma continuação de trabalhos anteriores na área de simulação de materiais viscoelásticos, e pertence a uma família de modelos variacionais, no sentido que permite formular o problema constitutivo como um problema de mínimo. Adicionalmente, o modelo deve ser classificado com um modelo viscoelástico não linear, com a característica de ser definido por um conjunto de funções potenciais escolhidas pelo usuário no momento da simulação para melhor atender a um problema específico.

Diferentes testes avaliando o modelo foram apresentados, buscando evidenciar características de comportamento que sejam adequadas para a representação de tecidos conectivos moles, em particular ligamentos e tendões. Tais testes foram realizados tanto no nível das equações constitutivas (foco deste trabalho) utilizando deformações impostas quanto no nível de sua incorporação em um programa de elementos finitos apto para deformações finitas.

A incorporação das fibras permitiu ter um comportamento vinculado à direção dessas. Os exemplos permitiram observar que o modelo visco-hiperelástico utilizado representa qualitativamente a contribuição das tensões elásticas e viscosas mantendo ambas em valores sempre positivos, respeitando a restrição de tensões compressivas nulas para as fibras.

No caso de propriedades de material em que as fibras apresentam mais rigidez que a matriz isotrópica, a dependência da orientação dessas em relação a direção de deformação torna-se evidente e em concordância com o comportamento esperado.

O procedimento desenvolvido não é restrito à tecidos conectivos, podendo ser aplicado a uma ampla categoria de problemas mecânicos, dentre os quais pode-se mencionar os componentes constituídos por elastômeros reforçados por fibras.

O próximo passo a ser dado, mas que não cabe no escopo do presente estudo, é a identificação dos parâmetros de material do modelo proposto com curvas experimentais destes materiais, momento onde se testa em última instância a capacidade dos modelos representar o comportamento do material. Esta tarefa configura um novo trabalho a ser desenvolvido, envolvendo aspectos experimentais e numéricos.

## *Referências*

- [1] **Anand, L.; Weber, G.**, *Finite deformations constitutive equations and a time integration procedure for isotropic hyperelastic-viscoplastic solids*, Computer Methods in Applied and Engineering **79** (1990), 173–202.
- [2] **Bendjaballah, M. Z.; Shirazi-Adl, A.; Zukor, D. J.**, *Biomechanical response of the passive human knee joint under anterior-posterior forces*, Clinical Biomechanics **13** (1998), no. 8, 625–633.
- [3] **Blankevoort, L.; Huiskes, R.**, *Validation of a three-dimensional model of the knee*, Journal of Biomechanics **29** (1996), 955–961.
- [4] **Bonet, J.; Wood, R. D.**, *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [5] **De Vita, R.**, *Structural Constitutive Models for Knee Ligaments*, Tese (Doutorado) - University of Pittsburgh - School of Engineering, 2005.
- [6] **Dépt. AéroSpatiale, Mécanique et Matériaux (ASMA/LTAS-MC&T), Université de Liège, Belgium.**, *Metafor - software for thermo-mechanical analysis of structures in large strain regime*, [http://garfield.ltas.ulg.ac.be/oo\\_meta/](http://garfield.ltas.ulg.ac.be/oo_meta/).
- [7] **Fancello E. A.; Vigneron L.; Ponthot J.; Stainier L.**, *A viscoelastic formulation for finite strains: Application to brain soft tissue.*, XXVII CILAMCE - Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Belém **1**.
- [8] **Fancello, E.; Ponthot, J-P.; Stainier, L.**, *A variational formulation of constitutive models and updates in nonlinear finite viscoelasticity*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **65** (2006), 1831–1864.
- [9] **Frank, E.; Amiel, D.; Woo, S. L-Y.; Akeson, W.**, *Normal ligament properties and ligament healing*, Clin. Orthop. **196** (1985), 15–25.
- [10] **Guo, Z. Y.; Peng, X.Q.; Moran, B.**, *A composites-based hyperelastic constitutive model for soft tissue with application to the human annulus fibrosus*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids **54** (2005), 1952–1971.
- [11] **Hirokawa, S.; Tsuruno, S.**, *Three-dimensional deformation and stress distribution in an analytical/computational model of the anterior cruciate ligament*, Journal of Biomechanics **33** (2000), no. 9, 1069–1077.
- [12] **Holzapfel, G.A.**, *Nonlinear Solid Mechanics*, Wiley, Chichester, England, 2000.
- [13] **Holzapfel, G.A.; Gasser, T. C.**, *A viscoelastic model for fiber-reinforced composites at finite strains: Continuum basis, computational aspects and applications*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **190** (2001), 4379–4403.

- [14] **Junqueira, L. C.; Carneiro, J.**, *Histologia Básica*, Guanabara Koogan, Rio de Janeiro, 1999.
- [15] **Limbert, G.; Middleton, J.**, *A transversely isotropic viscohyperelastic material: Application to the modeling of biological soft connective tissues*, *International Journal of Solids and Structures* **41** (2002), no. 15, 2343–2358.
- [16] **Limbert, G.; Taylor, M.**, *On the constitutive modeling of biological soft connective tissues: A general theoretical framework and explicit forms of the tensors of elasticity for strongly anisotropic continuum fiber-reinforced composites at finite strain*, *International Journal of Solids and Structures* **39** (2002), no. 8, 2343–2358.
- [17] **Limbert, G.; Taylor, M.; Middleton, J.**, *Three-dimensional finite element modelling of the human acl: simulation of passive knee flexion with a stressed and stress-free acl*, *Journal of Biomechanics* **37** (2004), no. 11, 1723–1731.
- [18] **Malvern, L. E.**, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, 1969.
- [19] **Miller, K.**, *Constitutive model of brain suitable for finite element analysis of surgical procedures*, *Journal of Biomechanics* **32** (1999), 531–537.
- [20] **Moglo, K. E.; Shirazi-Adl, A.**, *On the coupling between anterior and posterior cruciate ligaments, and knee joint response under anterior femoral drawer in flexion: a finite element study*, *Clinical Biomechanics* **18**, no. 8.
- [21] **Ortiz, M.; Stainier, L.**, *The variational formulation of viscoplastic constitutive updates*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **171** (1999), 419–444.
- [22] **Pioletti, D. P. ; Rakotomanana, L.**, *Viscoelastic constitutive law in large deformations: application to human knee ligaments and tendons*, *Journal of Biomechanics* **31** (1998), no. 8, 753–757.
- [23] **Pioletti, D. P.; Rakotomanana, L.; Benvenuti, J. F.; Leyvraz, P.**, *Finite element model of the human anterior cruciate ligament*, (1997).
- [24] **Sayed, T. E. ; Motaa, A.; Fraternali, F.; Ortiz, M.**, *A variational constitutive model for soft biological tissues*, *Journal of Biomechanics* **41** (2008), 1458–1466.
- [25] **Simo, J.C.**, *On a fully three dimensional finite-strain viscoelastic damage model: formulation and computational aspects*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **60** (1987), 153–173.
- [26] **Simo J.C.; Hughes T.J.R.**, *Computational Inelasticity*, Springer, New York, 1998.
- [27] **Song, Y.; Debski, R. E.; Musahl, V.; Thomas, M.; Woo, S. L-Y.**, *A three-dimensional finite element model of the human anterior cruciate ligament: a computational analysis with experimental validation*, *Journal of Biomechanics* **37** (2004), no. 3, 383–390.
- [28] **Souza Neto, E. A. de; Peric, D.; Owen, D. R. J.**, *Computational methods for plasticity*, to be published.

- 
- [29] **Spencer, A. P.**, Anatomia Humana Básica, Manole, São Paulo, 1991.
- [30] **Veronda D. R.; Westmann R.**, *Mechanical characterization of skin-finite deformations*, Journal of Biomechanics **3**.
- [31] **Woo, S. L-Y.; Abramowitch, S. D.; Kilger, R.; Liang, R.**, *Biomechanics of knee ligaments: injury, healing, and repair*, Journal of Biomechanics **39** (2006), no. 3, 1–20.



# APÊNDICE A – Capítulo 2

## A.1 Modelo de Ogden: Derivadas de $\varphi$ , $\varphi^e$ e $\psi$

Derivando os potenciais de Ogden em relação a  $\epsilon_j$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_j} = \sum_{p=1}^N \mu_p [\exp(\epsilon_j)]^{\alpha_p}, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial \varphi^e}{\partial \epsilon_j^e} = \sum_{p=1}^N \mu_p^e [\exp(\epsilon_j^e)]^{\alpha_p}, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial d_j^p} = \sum_{p=1}^N \eta_p^v [\exp(d_j^v)]^{\alpha_p}, \quad (\text{A.3})$$

e

$$\frac{\partial^2 \varphi}{(\partial \epsilon_j)^2} = \sum_{p=1}^N \mu_p \alpha_p [\exp(\epsilon_j)]^{\alpha_p}, \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^e}{(\partial \epsilon_j^e)^2} = \sum_{p=1}^N \mu_p^e \alpha_p [\exp(\epsilon_j^e)]^{\alpha_p}, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{(\partial d_j^p)^2} = \sum_{p=1}^N \eta_p^v \alpha_p [\exp(d_j^v)]^{\alpha_p}, \quad (\text{A.6})$$

## A.2 Modelo de Hencky: Derivadas de $\varphi$ , $\varphi^e$ e $\psi$

Derivando os potenciais de Hencky em relação a  $\epsilon_j$  obtemos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_j} = 2\mu \epsilon_j, \quad \frac{\partial \varphi^e}{\partial \epsilon_j^e} = 2\mu^e \epsilon_j^e, \quad \frac{\partial \psi}{\partial d_j^v} = 2\mu^v d_j^v, \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{(\partial \epsilon_j)^2} = 2\mu, \quad \frac{\partial^2 \varphi^e}{(\partial \epsilon_j^e)^2} = 2\mu^e, \quad \frac{\partial^2 \psi}{(\partial d_j^v)^2} = 2\mu^v, \quad (\text{A.8})$$

### A.3 Derivadas de $\varphi$ , $\varphi^e$ do modelo de fibras

$$\begin{aligned}\varphi^e &= \frac{k_1}{2k_2} \{ \exp[k_2(J^{-\frac{2}{3}}(\lambda_f^e) - 1)^2] - 1 \} \\ &= \frac{k_1}{2k_2} \exp[(k_2 J^{-\frac{4}{3}}(\lambda_f^e)^4 - 2k_2 J^{-\frac{2}{3}}(\lambda_f^e)^2 + k_2)] - \frac{k_1}{2k_2}\end{aligned}\tag{A.9}$$

Derivando em relação a  $\lambda^e$  obtemos

$$\frac{\partial \varphi^e}{\partial \lambda_f^e} = \frac{k_1}{2k_2} \exp[(k_2 J^{-\frac{4}{3}}(\lambda_f^e)^4 - 2k_2 J^{-\frac{2}{3}}(\lambda_f^e)^2 + k_2)] (4k_2 J^{-\frac{4}{3}}(\lambda_f^e)^3 - 4k_2 J^{-\frac{2}{3}}(\lambda_f^e))\tag{A.10}$$

para o cálculo da segunda derivada temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial^2 \lambda_f^e} &= \frac{k_1}{2k_2} \exp[(k_2 J^{-\frac{4}{3}}(\lambda_f^e)^4 - 2k_2 J^{-\frac{2}{3}}(\lambda_f^e)^2 + k_2)] (4k_2 J^{-\frac{4}{3}}(\lambda_f^e)^3 - 4k_2 J^{-\frac{2}{3}}(\lambda_f^e))^2 \\ &+ \frac{k_1}{2k_2} \exp[(k_2 J^{-\frac{4}{3}}(\lambda_f^e)^4 - 2k_2 J^{-\frac{2}{3}}(\lambda_f^e)^2 + k_2)] (12k_2 J^{-\frac{4}{3}}(\lambda_f^e)^2 - 4k_2 J^{-\frac{2}{3}})\end{aligned}\tag{A.11}$$

## APÊNDICE B – Capítulo 3

### B.1 Elasticidade finita com resposta volumétrica desacoplada

Da mesma forma que na equação (4.23), pode-se escrever a função energia de deformação como

$$W(\mathbf{C}) = W^0(\mathbf{C}) + U^0(\theta) \quad (\text{B.1})$$

Sendo o tensor de Piola-Kirchhoff dado por (para fins de não sobrecarregar as notações, considere-se todas as variáveis no tempo  $n + 1$ )

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{F} \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= 2\mathbf{F} \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} + 2\mathbf{F}U'(J) \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \\ &= 2\mathbf{F}U'(J) \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} + 2\mathbf{F} \frac{\partial W(\hat{\mathbf{C}})}{\partial \hat{\mathbf{C}}} : \frac{\partial \hat{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

E, ainda, (ver [26]) tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{F}J \frac{\partial U}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} + 2\mathbf{F}J^{-\frac{2}{3}} \left\{ \frac{\partial W(\hat{\mathbf{C}})}{\partial \hat{\mathbf{C}}} - \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{\partial W(\hat{\mathbf{C}})}{\partial \hat{\mathbf{C}}} \right) : \mathbf{C} \right] \mathbf{C}^{-1} \right\} \\ &= \mathbf{F} \left[ J^{-\frac{2}{3}} \text{DEV} \left( 2 \frac{\partial W(\hat{\mathbf{C}})}{\partial \hat{\mathbf{C}}} \right) + \frac{\partial U}{\partial \theta_{n+1}} J \mathbf{C}^{-1} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

A equação acima é igual à equação incremental (5.3) apresentada na formulação constitutiva variacional do capítulo 5.

Considerando a descrição material, o segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}^0$  dado por (ver [26])

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^0 &:= 2 \frac{\partial W^0(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = 2U^{0'}(J) \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial W^0(\hat{\mathbf{C}})}{\partial \hat{\mathbf{C}}} : \frac{\partial \hat{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} \\ &= JU^{0'}(J) \mathbf{C}^{-1} + 2J^{-\frac{2}{3}} \left\{ \frac{\partial W^0(\hat{\mathbf{C}})}{\partial \hat{\mathbf{C}}} - \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{\partial W^0(\hat{\mathbf{C}})}{\partial \hat{\mathbf{C}}} \right) : \mathbf{C} \right] \mathbf{C}^{-1} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Para simplificar as expressões, defina

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{S}}^0 &:= J^{-\frac{2}{3}} \left\{ 2\partial_{\widehat{\mathbf{C}}} W^0(\widehat{\mathbf{C}}) - \frac{1}{3} [2\partial_{\widehat{\mathbf{C}}} W^0(\widehat{\mathbf{C}}) : \mathbf{C}] \mathbf{C}^{-1} \right\} \\ &= J^{-\frac{2}{3}} \text{DEV} \left[ 2 \frac{\partial W^0(\widehat{\mathbf{C}})}{\partial \widehat{\mathbf{C}}} \right]\end{aligned}\tag{B.6}$$

Logo,

$$\mathbf{S}^0 := 2 \frac{\partial W^0(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = J U^{0'}(J) \mathbf{C}^{-1} + \widehat{\mathbf{S}}^0\tag{B.7}$$

## APÊNDICE C – Capítulo 4

### C.1 Minimização de $\Psi$ com relação a $\mathbf{M}_a^v$

Considerando o problema de minimização apresentado em (5.18), a condição de otimalidade em relação a direção  $\mathbf{M}_a$  é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{M}_a^v} [\delta \mathbf{M}] &= \left( \frac{\partial \Delta \varphi^e}{\partial \mathbf{M}_a^v} + \Delta t \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \mathbf{M}_a^v} \right) [\delta \mathbf{M}] + 2\lambda_1 (\mathbf{M}_a^v \cdot \delta \mathbf{M}) + \lambda_2 (\mathbf{M}_b^v \cdot \delta \mathbf{M}) + \lambda_3 (\mathbf{M}_c^v \cdot \delta \mathbf{M}) \\ &+ \lambda \left( \frac{\partial d_a^v}{\partial \mathbf{D}^v} \frac{\partial \mathbf{D}^v}{\partial \mathbf{M}_a^v} \right) [\delta \mathbf{M}] = 0 \quad \forall \delta \mathbf{M} \in Sym, \end{aligned}$$

sendo que

$$\frac{\partial \Delta \varphi^e}{\partial \mathbf{M}_a^v} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Delta \varphi^e}{\partial \epsilon_j^e} \frac{\partial \epsilon_j^e}{\partial \epsilon^e} \frac{\partial \epsilon^e}{\partial \mathbf{M}_a^v} = - \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Delta \varphi^e}{\partial \epsilon_j^e} \mathbf{E}_j^e \right) \Delta q_a^v, \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial \mathbf{M}_a^v} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Delta \psi}{\partial d_j^v} \frac{\partial d_j^v}{\partial \mathbf{D}^v} \frac{\partial \mathbf{D}^v}{\partial \mathbf{M}_a^v} = \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Delta \psi}{\partial d_j^v} \mathbf{M}_j^v \right) \frac{\Delta q_a^v}{\Delta t}, \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial d_a^v}{\partial \mathbf{D}^v} \frac{\partial \mathbf{D}^v}{\partial \mathbf{M}_a^v} = d_a^v \mathbf{M}_a^v. \quad (\text{C.3})$$

$$\left( \frac{\partial \Delta \varphi^e}{\partial \mathbf{M}_a^v} + \Delta t \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \mathbf{M}_a^v} \right) = \Delta q_a^v \underbrace{\left[ \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Delta \psi}{\partial d_j^v} \mathbf{M}_j^v \right) - \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Delta \varphi^e}{\partial \epsilon_j^e} \mathbf{E}_j^e \right) \right]}_{\mathbf{A}} = \Delta q_a^v \mathbf{A}. \quad (\text{C.4})$$

Fazendo as respectivas substituições e, igualando  $\delta \mathbf{M}$  a  $\mathbf{M}_a^v, \mathbf{M}_b^v, \mathbf{M}_c^v$  temos

$$2\lambda_1 + \lambda d_a^v = -\Delta q_a^v \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_a^v, \quad (\text{C.5})$$

$$\lambda_2 = -\Delta q_a^v \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_b^v, \quad (\text{C.6})$$

$$\lambda_3 = -\Delta q_a^v \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_c^v. \quad (\text{C.7})$$

Substituído em (C.1), obtem-se

$$\begin{aligned} \Delta q_a^v [\mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{M} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_a^v) (\mathbf{M}_a^v \cdot \delta \mathbf{M}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_b^v) (\mathbf{M}_b^v \cdot \delta \mathbf{M}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_c^v) (\mathbf{M}_c^v \cdot \delta \mathbf{M})] &= 0 \\ \forall \delta \mathbf{M} \in Sym & \\ (\text{C.8}) & \end{aligned}$$

ou equivalentemente (C.9).

$$\overbrace{[\mathbb{I} - (\mathbf{M}_a^v \otimes \mathbf{M}_a^v) - (\mathbf{M}_b^v \otimes \mathbf{M}_b^v) - (\mathbf{M}_c^v \otimes \mathbf{M}_c^v)]}_{\mathbb{B}} \mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (\text{C.9})$$

Substituindo o tensor  $\mathbf{A}$  na equação acima pode-se verificar que:

$$\mathbb{B} \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Delta \psi}{\partial d_j^v} \mathbf{M}_j^v \right) = \mathbf{0}, \quad (\text{C.10})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{B} \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Delta \varphi^e}{\partial \epsilon_j^e} \mathbf{E}_j^e \right) &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Delta \varphi^e}{\partial \epsilon_j^e} \mathbf{E}_j^e - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Delta \varphi^e}{\partial \epsilon_j^e} (\mathbf{E}_j^e \cdot \mathbf{M}_a^v) \mathbf{M}_a^v \\ &\quad - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Delta \varphi^e}{\partial \epsilon_j^e} (\mathbf{E}_j^e \cdot \mathbf{M}_b^v) \mathbf{M}_b^v - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Delta \varphi^e}{\partial \epsilon_j^e} (\mathbf{E}_j^e \cdot \mathbf{M}_c^v) \mathbf{M}_c^v. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Assim, assumindo  $\mathbf{E}_j^e = \mathbf{M}_j^v$  verifica-se que a equação (C.11) é igual a zero.

### C.1.1 Minimização de $\Psi$ em relação a $\Delta q_a^v$

O próximo passo a ser realizado é a minimização de  $\Psi$  em relação a  $\Delta q_i^v$ , já que são conhecidas as direções  $\mathbf{M}_i^v$ . Tendo em vista a restrição adicional  $\epsilon_1^e + \epsilon_2^e + \epsilon_3^e = d_1^v + d_2^v + d_3^v = 0$  e fazendo  $\epsilon_i^e = \epsilon_i^{pr} - \Delta q_i^v$ , obtemos as seguintes condições de otimalidade

$$\begin{aligned} r_i &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Delta q_i^v} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon_j^e} \frac{\partial \epsilon_j^e}{\partial \Delta q_i^v} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon_i^e} = \frac{\partial \varphi^e}{\partial \epsilon_i^e} + \Delta t \frac{\partial \psi}{\partial d_i^v} \frac{\partial d_i^v}{\partial \epsilon_i^e} + \lambda, \\ &= \frac{\partial \varphi^e}{\partial \epsilon_i^e} - \frac{\partial \psi}{\partial d_i^v} + \lambda = 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

$$r_4 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = d_1^v + d_2^v + d_3^v = \epsilon_1^e + \epsilon_2^e + \epsilon_3^e = \Delta q_1^v + \Delta q_2^v + \Delta q_3^v = 0. \quad (\text{C.13})$$

Usando o método de Newton para encontrar as raízes  $\mathbf{x} = \{\epsilon_1^e, \epsilon_2^e, \epsilon_3^e, \lambda\}$ , temos a fórmula recursiva

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \mathbf{K}^{k-1} \mathbf{r}^k. \quad (\text{C.14})$$

ou

$$\mathbf{K}^k \Delta \mathbf{x} = -\mathbf{r}^k, \quad \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}. \quad (\text{C.15})$$

Para simplificações supõe-se que:

$$\varphi^e(\epsilon_i^e) = \sum_{i=1}^3 w^e(\epsilon_i^e), \quad \psi(d_i^v) = \sum_{i=1}^3 w^v(d_i^v), \quad (\text{C.16})$$

Dessa forma,  $\mathbf{K}$  é definido por (C.17).

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial \epsilon_1^e} & \frac{\partial r_1}{\partial \epsilon_2^e} & \frac{\partial r_1}{\partial \epsilon_3^e} & \frac{\partial r_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial r_2}{\partial \epsilon_1^e} & \frac{\partial r_2}{\partial \epsilon_2^e} & \frac{\partial r_2}{\partial \epsilon_3^e} & \frac{\partial r_2}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial r_3}{\partial \epsilon_1^e} & \frac{\partial r_3}{\partial \epsilon_2^e} & \frac{\partial r_3}{\partial \epsilon_3^e} & \frac{\partial r_3}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial r_4}{\partial \epsilon_1^e} & \frac{\partial r_4}{\partial \epsilon_2^e} & \frac{\partial r_4}{\partial \epsilon_3^e} & \frac{\partial r_4}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & K_{22} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & K_{33} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.17})$$

$$K_{ii} = \frac{\partial r_i}{\partial \epsilon_i^e} = \frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial \epsilon_i^e \partial \epsilon_i^e} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \psi}{\partial d_i^v \partial d_i^v}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{C.18})$$

Para o processo de atualização de Newton pode-se obter, ainda,

$$\Delta \epsilon_i^e = - (r_i + \Delta \lambda) / K_{ii}, \quad (\text{C.19})$$

$$\Delta \lambda = \left( r_4 - \sum_{j=1}^3 \frac{r_j}{K_{jj}} \right) \left( \sum_{s=1}^3 \frac{1}{K_{ss}} \right)^{-1}. \quad (\text{C.20})$$

## C.2 Minimização de $\Psi$ em relação a $\lambda_f^v$

Conforme na equação(5.41), temos o seguinte problema de minimização

$$\Psi_f = \min_{\lambda_{f_{n+1}}^v} \{ \Delta \varphi_f^e(\lambda_{f_{n+1}}^e) + \Delta t \psi(d(\lambda_{f_{n+1}}^v)) \} + \Delta \varphi_f^f(\lambda_{f_{n+1}}) \quad (\text{C.21})$$

Assim, a partir da condição de otimalidade

$$\begin{aligned} r &= \frac{\partial \Psi_f}{\partial \lambda_{f_{n+1}}^v} = \frac{\partial \varphi_f^e}{\partial \lambda_{f_{n+1}}^v} + \Delta t \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_{f_{n+1}}^v} \\ &= \frac{\partial \varphi^e}{\partial \lambda_{f_{n+1}}^e} \left( -\frac{\lambda_{f_{n+1}}}{\lambda_{f_{n+1}}^v} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial d} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Utilizando o método de Newton para encontrar as raízes através da fórmula recursiva, como feito anteriormente,

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \mathbf{K}^{k-1} \mathbf{r}^k$$

ou

$$\mathbf{K}^k \Delta \mathbf{x} = -\mathbf{r}^k, \quad \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}$$

Assim, temos

$$\mathbf{K} = \left( \frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial^2 \lambda_{f_{n+1}}^e} \left( \frac{\lambda_{f_{n+1}}}{(\lambda_{f_{n+1}}^v)^2} \right) + \frac{\partial \varphi^e}{\partial \lambda_{f_{n+1}}^e} \frac{1}{(\lambda_{f_{n+1}}^v)} \right) \left( \frac{\lambda_{f_{n+1}}}{\lambda_{f_{n+1}}^v} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 d} \frac{1}{\Delta t \lambda^v} \quad (\text{C.23})$$

### C.3 Derivadas de $\varphi$ e $\varphi^e$ em relação a $\hat{\mathbf{C}}_{n+1}$

Para o cálculo do tensor tensão de Piola-Kirchhoff torna-se necessário o cálculo das derivadas de  $\varphi$  e  $\varphi^e$  em relação a  $\hat{\mathbf{C}}_{n+1}$ , uma vez que a minimização já foi realizada. A derivada de  $\varphi$  é dada por

$$\hat{\mathbf{C}}_{n+1} = \sum_{j=1}^3 c_j \mathbf{E}_j, \quad (\text{C.24})$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{\mathbf{C}}_{n+1}} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial \hat{\mathbf{C}}_{n+1}} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial c_j} \mathbf{E}_j. \quad (\text{C.25})$$

Já para o cálculo a derivada de  $\varphi^e$  utiliza-se as seguintes relações:

$$\hat{\mathbf{C}}_{n+1}^e = \hat{\mathbf{F}}_{n+1}^{eT} \hat{\mathbf{F}}_{n+1}^e = \mathbf{F}_{n+1}^{v-T} \hat{\mathbf{C}}_{n+1} \mathbf{F}_{n+1}^{v-1}, \quad (\text{C.26})$$

$$\hat{\mathbf{C}}^{pr} = \hat{\mathbf{F}}^{prT} \hat{\mathbf{F}}^{pr} = \mathbf{F}_n^{v-T} \hat{\mathbf{C}}_{n+1} \mathbf{F}_n^{v-1}, \quad (\text{C.27})$$

e obtém-se

$$\frac{\partial \varphi^e}{\partial \hat{\mathbf{C}}_{n+1}} = \mathbf{F}_{n+1}^{v-1} \frac{\partial \varphi^e}{\partial \hat{\mathbf{C}}_{n+1}^e} \mathbf{F}_{n+1}^{v-T}, \quad (\text{C.28})$$

$$= \mathbf{F}_n^{v-1} \frac{\partial \varphi^e}{\partial \hat{\mathbf{C}}^{pr}} \mathbf{F}_n^{v-T}, \quad (\text{C.29})$$

onde:

$$\frac{\partial \varphi^e}{\partial \hat{\mathbf{C}}_{n+1}^e} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi^e}{\partial c_j^e} \frac{\partial c_j^e}{\partial \hat{\mathbf{C}}_{n+1}^e} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi^e}{\partial c_j^e} \mathbf{E}_j^e, \quad (\text{C.30})$$

$$\frac{\partial \varphi^e}{\partial \hat{\mathbf{C}}^{pr}} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi^e}{\partial c_j^{pr}} \frac{\partial c_j^{pr}}{\partial \hat{\mathbf{C}}_{n+1}^e} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi^e}{\partial c_j^{pr}} \mathbf{E}_j^{pr}. \quad (\text{C.31})$$

Dessa maneira, a parte deviatórica é dada por:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{\mathbf{C}}_{n+1}} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial \hat{\mathbf{C}}_{n+1}} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial c_j} \mathbf{E}_j, \quad (\text{C.32})$$

$$\frac{\partial \varphi^e}{\partial \hat{\mathbf{C}}_{n+1}} = \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi^e}{\partial c_j^e} \frac{\partial c_j^e}{\partial \hat{\mathbf{C}}_{n+1}^e} \right) \frac{\partial \hat{\mathbf{C}}_{n+1}^e}{\partial \hat{\mathbf{C}}_{n+1}} = \mathbf{F}_{n+1}^{v-1} \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi^e}{\partial c_j^e} \frac{1}{2c_j^e} \mathbf{E}_j^e \right) \mathbf{F}_{n+1}^{v-T}, \quad (\text{C.33})$$

$$= \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi^e}{\partial c_j^{pr}} \frac{\partial c_j^{pr}}{\partial \hat{\mathbf{C}}^{pr}} \right) \frac{\partial \hat{\mathbf{C}}^{pr}}{\partial \hat{\mathbf{C}}_{n+1}} = \mathbf{F}_n^{v-1} \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi^e}{\partial c_j^{pr}} \frac{1}{2c_j^{pr}} \mathbf{E}_j^{pr} \right) \mathbf{F}_n^{v-T}. \quad (\text{C.34})$$

A escolha entre as expressões (C.33) e (C.34) é feita por conveniência de implementação.



## C.4 Tensor material

Para a utilização do método de Newton torna-se necessária a determinação da matriz tangente. Dessa forma, tensor material  $\mathcal{C}$  é dado por

$$\mathcal{C} = \frac{d}{d\hat{\mathbf{C}}_{n+1}} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\mathbf{C}}_{n+1}} \right) = \frac{d}{d\hat{\mathbf{C}}_{n+1}} \left( \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \hat{\mathbf{C}}_{n+1}} + \frac{\partial \Psi_f}{\partial \hat{\mathbf{C}}_{n+1}} \right) = \mathcal{C}^{\varphi_{iso}} + \mathcal{C}^{\varphi_{iso}^e} + \mathcal{C}^{\varphi_f} + \mathcal{C}^{\varphi_f^e} \quad (\text{C.35})$$

$$(\text{C.36})$$

onde  $\frac{d(\cdot)}{d\hat{\mathbf{C}}_{n+1}}$  corresponde a derivada total em relação a  $\hat{\mathbf{C}}_{n+1}$ . Considerando apenas a parte isotrópica, temos

$$\mathcal{C}_{iso} = \frac{d^2 \varphi_{iso}}{(d\hat{\mathbf{C}}_{n+1})^2} + \frac{d}{d\hat{\mathbf{C}}_{n+1}} \left( \frac{\partial \varphi_{iso}^e}{\partial \hat{\mathbf{C}}_{n+1}} \right) \quad (\text{C.37})$$

Utilizando o sistema de coordenadas espectrais apresentado em [28] percebe-se que a primeira parcela de (C.37) pode ser calculada utilizando as propriedades de uma função isotrópica de um tensor de segunda ordem. Para o cálculo da segunda parcela torna-se necessário a realização de um passo intermediário via regra da cadeia que considere as deformações predictoras. Considerando  $\hat{\mathbf{C}}^{\text{pr}} = \hat{\mathbf{F}}_n^{\text{v}-T} \hat{\mathbf{C}}_{n+1} \hat{\mathbf{F}}_n^{\text{v}-1}$  e, sendo  $\mathbf{f}^{\text{vn}} = \hat{\mathbf{F}}_n^{\text{v}-1}$  é possível verificar que (ver Apêndice em [8])

$$\mathcal{C}_{ijkl}^{\varphi^e} = \frac{d}{d\hat{\mathbf{C}}_{kl}} \left( \frac{\partial \varphi^e}{\partial \hat{\mathbf{C}}_{ij}} \right) = \sum_{m,t,p,q=1}^3 \mathbf{f}_{im}^{\text{vn}} \mathbf{f}_{jt}^{\text{vn}} \frac{d}{d\hat{\mathbf{C}}_{pq}^{\text{pr}}} \left( \frac{\partial \varphi^e}{\partial \hat{\mathbf{C}}_{mt}^{\text{pr}}} \right) \mathbf{f}_{kp}^{\text{vn}} \mathbf{f}_{lq}^{\text{vn}} = \mathcal{C}_{klij}^{\varphi^e} = \mathcal{C}_{jikl}^{\varphi^e}. \quad (\text{C.38})$$

note que o índice  $n+1$  está implícito nas expressões. Para o cálculo da derivada de  $\varphi^e$  em relação a  $\hat{\mathbf{C}}^{\text{pr}} = c_j^{\text{pr}} \mathbf{E}_j^{\text{pr}}$  em coordenadas espectrais, precisamos primeiramente, calcular as seguintes funções

$$y_i = \frac{\partial \varphi^e}{\partial c_i^{\text{pr}}} = \frac{\partial \varphi^e}{\partial \epsilon_i^e} \frac{1}{2c_i^{\text{pr}}}, \quad (\text{C.39})$$

$$y_{i,j} = \frac{d}{dc_j^{\text{pr}}} \left( \frac{\partial \varphi^e}{\partial \epsilon_i^e} \frac{1}{2c_i^{\text{pr}}} \right) = \frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial \epsilon_i^e \partial \epsilon_i^e} \frac{d\epsilon_i^e}{dc_j^{\text{pr}}} \frac{1}{4c_i^{\text{pr}} c_j^{\text{pr}}} - \frac{\partial \varphi^e}{\partial \epsilon_i^e} \frac{1}{2(c_i^{\text{pr}})^2}. \quad (\text{C.40})$$

Os termos  $\frac{\partial \varphi^e}{\partial \epsilon_i^e}$  e  $\frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial \epsilon_i^e \partial \epsilon_i^e}$  são claros. De outro lado, a relação  $\epsilon_i^e(\epsilon_1^{pr}, \epsilon_2^{pr}, \epsilon_3^{pr})$  é definida por (ver [8]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_i}{\partial \epsilon_j^{pr}} &= \frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial \epsilon_i^e \partial \epsilon_i^e} \frac{d\epsilon_i^e}{d\epsilon_j^{pr}} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial d_i^v \partial d_i^v} \frac{d(d_i^v)}{d\epsilon_j^{pr}} + \frac{d\lambda}{d\epsilon_j^{pr}} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \text{ (no index sum)} \\ &= \varphi_{,ii}^e \frac{d\epsilon_i^e}{d\epsilon_j^{pr}} - \psi_{,ii} \left( \frac{\delta_{ij}}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta t} \frac{d\epsilon_i^e}{d\epsilon_j^{pr}} \right) + \frac{d\lambda}{d\epsilon_j^{pr}} = 0, \\ &= \left( \varphi_{,ii}^e + \frac{\psi_{,ii}}{\Delta t} \right) \frac{d\epsilon_i^e}{d\epsilon_j^{pr}} - \left( \psi_{,ii} \frac{\delta_{ij}}{\Delta t} - \frac{d\lambda}{d\epsilon_j^{pr}} \right) = 0, \\ &= K_{ii} \frac{d\epsilon_i^e}{d\epsilon_j^{pr}} - \left( \psi_{,ii} \frac{\delta_{ij}}{\Delta t} - \frac{d\lambda}{d\epsilon_j^{pr}} \right) = 0, \end{aligned} \quad (C.41)$$

$$\frac{\partial r_4}{\partial \epsilon_j^{pr}} = \frac{d\epsilon_1^e}{d\epsilon_j^{pr}} + \frac{d\epsilon_2^e}{d\epsilon_j^{pr}} + \frac{d\epsilon_3^e}{d\epsilon_j^{pr}} = 0. \quad (C.42)$$

Usando a notação:

$$\psi_{,i} = \frac{\partial \psi}{\partial d_i^v}, \quad \varphi_{,i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_i^e}, \quad K_{ii} = \varphi_{,ii} + \frac{1}{\Delta t} \psi_{,ii}. \quad (C.43)$$

Isolando  $\frac{d\epsilon_i^e}{d\epsilon_j^{pr}}$  de (C.41) e substituindo em (C.42),

$$\frac{\partial \epsilon_i^e}{\partial \epsilon_j^{pr}} = \left( \psi_{,ii} \frac{\delta_{ij}}{\Delta t} - \frac{d\lambda}{d\epsilon_j^{pr}} \right) \frac{1}{K_{ii}}, \quad (C.44)$$

$$\sum_{i=1}^3 \psi_{,ii} \frac{\delta_{ij}}{\Delta t} K_{ii} - \sum_{i=1}^3 \frac{d\lambda}{d\epsilon_j^{pr}} \frac{1}{K_{ii}} = 0,$$

$$\frac{\psi_{,jj}}{\Delta t K_{jj}} = \frac{d\lambda}{d\epsilon_j^{pr}} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{K_{ii}} = 0,$$

$$\frac{d\lambda}{d\epsilon_j^{pr}} = \frac{\psi_{,jj}}{\Delta t K_{jj}} \left( \sum_{s=1}^3 \frac{1}{K_{ss}} \right)^{-1} \quad (C.45)$$

Então, substituindo (C.45) em (C.44), obtemos (C.46).

$$\frac{d\epsilon_i^e}{d\epsilon_j^{pr}} = \frac{\psi_{,ii}}{\Delta t K_{ii}} \delta_{ij} - \frac{\psi_{,jj}}{\Delta t K_{jj} K_{ii}} \left( \sum_{s=1}^3 \frac{1}{K_{ss}} \right)^{-1}. \quad (C.46)$$

Para o cálculo referente à parcela das fibras, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_f &= \frac{d}{d\hat{\mathbf{C}}_{n+1}} \left( \frac{\partial \Psi_f}{\partial \hat{\mathbf{C}}_{n+1}} \right) = \underbrace{\frac{d^2 \varphi_f}{(d\hat{\mathbf{C}}_{n+1})^2}}_{\text{parte1}} + \overbrace{\frac{d}{d\hat{\mathbf{C}}_{n+1}} \left( \frac{\partial \varphi_f^e}{\partial \hat{\mathbf{C}}_{n+1}} \right)}^{\text{parte2}} \\ &= \mathcal{C}^{\varphi_f} + \mathcal{C}^{\varphi_f^e} \end{aligned} \quad (C.47)$$

Desenvolvendo a parte 1 e, considerando implícito o índice  $n + 1$ , temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\varphi}{(d\hat{\mathbf{C}})^2} &= \frac{d}{d\hat{\mathbf{C}}_{kl}} \left( \frac{\partial\varphi_f}{\partial\hat{\mathbf{C}}_{ij}} \right) = \frac{d}{d\hat{\mathbf{C}}_{kl}} \left( \frac{\partial\varphi_f}{\partial\lambda_f} \frac{1}{2\lambda_f} \mathbf{A}_{ij} \right) \\
&= \frac{d}{d\hat{\mathbf{C}}_{kl}} \left( \frac{\partial\varphi_f}{\partial\lambda_f} \right) \frac{1}{2\lambda_f} \mathbf{A}_{fij} + \frac{\partial\varphi_f}{\partial\lambda_f} \frac{d}{d\hat{\mathbf{C}}_{kl}} \left( \frac{1}{2\lambda_f} \right) \mathbf{A}_{fij} \\
&= \frac{\partial^2\varphi_f}{(\partial\lambda_f)^2} \left( \frac{1}{4\lambda_f^2} \right) \mathbf{A}_{fijkl} + \frac{\partial\varphi_f}{\partial\lambda_f} \left( -\frac{1}{4\lambda_f^3} \right) \mathbf{A}_{fijkl} \\
&= \left[ \frac{\partial^2\varphi_f}{(\partial\lambda_f)^2} \frac{1}{4\lambda_f^2} - \frac{\partial\varphi_f}{\partial\lambda_f} \frac{1}{4\lambda_f^3} \right] \mathbf{A}_{fijkl}
\end{aligned} \tag{C.48}$$

Já para a segunda parcela (parte 2) temos:

$$\frac{d}{d\hat{\mathbf{C}}_{kl}} \left[ \frac{\partial\varphi^e}{\partial\hat{\mathbf{C}}_{ij}} \right] = \frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{\partial\varphi^e}{\partial\hat{\mathbf{C}}_{ij}} \right] \frac{d\lambda}{d\hat{\mathbf{C}}} = \frac{d}{d\lambda} \underbrace{\left[ \frac{\partial\varphi^e}{\partial\hat{\mathbf{C}}_{ij}} \right]}_A \frac{1}{2\lambda} \mathbf{A}_{kl} \tag{C.49}$$

Considerando apenas  $A$  e fazendo as devidas substituições, temos:

$$\frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{\partial\varphi^e}{\partial\lambda^e} \lambda^e \frac{1}{2\lambda^2} \right] \mathbf{A}_{ij} = \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial\varphi^e}{\partial\lambda^e} \right) \frac{1}{\lambda^v} \frac{1}{2\lambda} \mathbf{A}_{ij} + \frac{\partial\varphi^e}{\partial\lambda^e} \frac{\partial\lambda^e}{\partial\lambda} \frac{1}{2\lambda^2} \mathbf{A}_{ij} - \frac{\partial\varphi^e}{\lambda^e} \lambda^e \frac{1}{\lambda^3} \mathbf{A}_{ij} \tag{C.50}$$

Tomando parte da primeira parcela, temos:

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial\varphi^e}{\partial\lambda^e} \right) \mathbf{A}_{ij} = \frac{d}{d\lambda^e} \left( \frac{\partial\varphi^e}{\partial\lambda^e} \right) \frac{\partial\lambda^e}{\partial\lambda} \mathbf{A}_{ij} = \frac{\partial^2\varphi^e}{\partial\lambda^e} \frac{\partial\lambda^e}{\partial\lambda} \mathbf{A}_{ij} \tag{C.51}$$

Para calcular tal derivada, torna-se necessário encontrar  $\frac{\partial\lambda^e}{\partial\lambda}$ . Tal derivada pode ser calculada através do resíduo:

$$r = -\frac{\partial\varphi^e}{\partial\lambda^e} \lambda^e + \frac{\partial\psi}{\partial d} \tag{C.52}$$

Derivando  $r$  em relação a  $\lambda$  obtém-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial\lambda} &= -\frac{\partial^2\varphi^e}{(\partial\lambda^e)^2} \lambda^e \frac{\partial\lambda^e}{\partial\lambda} - \frac{\partial\varphi^e}{\partial\lambda^e} \frac{\partial\lambda^e}{\partial\lambda} + \frac{\partial^2\psi}{\partial d^2} \frac{\partial d}{\partial\lambda} = 0 \\
&= -\left( \frac{\partial^2\varphi^e}{(\partial\lambda^e)^2} \lambda^e + \frac{\partial\varphi^e}{\partial\lambda^e} \right) \frac{\partial\lambda^e}{\partial\lambda} + \frac{\partial^2\psi}{\partial d^2} \left( \frac{\partial d}{\partial\lambda^v} \frac{\partial\lambda^v}{\partial\lambda} \right) \\
&= -\left( \frac{\partial^2\varphi^e}{(\partial\lambda^e)^2} \lambda^e + \frac{\partial\varphi^e}{\partial\lambda^e} \right) \frac{\partial\lambda^e}{\partial\lambda} + \frac{\partial^2\psi}{\partial d^2} \left( \frac{1}{\Delta t \lambda^v} \frac{\partial}{\partial\lambda} \left( \frac{\lambda}{\lambda^e} \right) \right) \\
&= -\left( \frac{\partial^2\varphi^e}{(\partial\lambda^e)^2} \lambda^e + \frac{\partial\varphi^e}{\partial\lambda^e} \right) \frac{\partial\lambda^e}{\partial\lambda} + \frac{\partial^2\psi}{\partial d^2} \frac{1}{\Delta t \lambda^v} \left( \frac{1}{\lambda^e} - \frac{\lambda}{(\lambda^e)^2} \left( \frac{\partial\lambda^e}{\partial\lambda} \right) \right) \\
&= -\left( \frac{\partial^2\varphi^e}{(\partial\lambda^e)^2} \lambda^e + \frac{\partial\varphi^e}{\partial\lambda^e} + \frac{\partial^2\psi}{\partial d^2} \frac{1}{\Delta t \lambda^v} \frac{\lambda}{(\lambda^e)^2} \right) \frac{\partial\lambda^e}{\partial\lambda} + \frac{\partial^2\psi}{\partial d^2} \frac{1}{\Delta t \lambda} = 0
\end{aligned} \tag{C.53}$$

Assim,

$$\left( \frac{\partial^2 \varphi^e}{(\partial \lambda^e)^2} \lambda^e + \frac{\partial \varphi^e}{\partial \lambda^e} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial d^2} \frac{1}{\Delta t \lambda^e} \right) \frac{\partial \lambda^e}{\partial \lambda} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial d^2} \frac{1}{\Delta t \lambda} \quad (\text{C.54})$$

Logo, substituindo (C.23) em (C.54),

$$\left[ \mathbf{K} \frac{\lambda^v}{\lambda^e} \right] \frac{\partial \lambda^e}{\partial \lambda} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial d^2} \frac{1}{\Delta t \lambda} \quad (\text{C.55})$$

Portanto,

$$\frac{\partial \lambda^e}{\partial \lambda} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial d^2} \frac{1}{\Delta t \lambda} \left( \frac{\lambda^e}{\mathbf{K} \cdot \lambda^v} \right) \quad (\text{C.56})$$

Substituindo (C.56) em (C.49)

$$\frac{d}{d\widehat{\mathbf{C}}_{kl}} \left[ \frac{\partial \varphi^e}{\partial \widehat{\mathbf{C}}_{ij}} \right] = \left[ \frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial \lambda^e} \frac{\partial^2 \psi}{\partial d^2} \frac{1}{\Delta t \lambda} \left( \frac{\lambda^e}{\mathbf{K} \cdot \lambda^v} \right) \frac{1}{\lambda^v} \frac{1}{2\lambda} + \frac{\partial \varphi^e}{\partial \lambda^e} \frac{\partial^2 \psi}{\partial d^2} \frac{1}{\Delta t \lambda} \left( \frac{\lambda^e}{\mathbf{K} \cdot \lambda^v} \right) \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\partial \varphi^e}{\lambda^e} \lambda^e \frac{1}{\lambda^3} \right] \frac{1}{2\lambda} \mathbf{A}_{ijkl} \quad (\text{C.57})$$