

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECÂNICA**

Stefano Orzechowski

**MODELOS BIFÁSICOS E ANÁLISE EXPERIMENTAL NA
CARACTERIZAÇÃO MECÂNICA DO TECIDO
CARTILAGINOSO ARTICULAR**

Florianópolis

2012

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECÂNICA**

Stefano Orzechowski

**MODELOS BIFÁSICOS E ANÁLISE EXPERIMENTAL NA
CARACTERIZAÇÃO MECÂNICA DO TECIDO
CARTILAGINOSO ARTICULAR**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. D.Sc. Eduardo Alberto Fancello

Co-orientador: Prof. Dr. Eng. Jakson Manfredini Vassoler

Florianópolis

2012

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Orzechowski, Stefano

Modelos bifásicos e análise experimental na
caracterização mecânica do tecido cartilaginoso articular
[dissertação] / Stefano Orzechowski ; orientador, Eduardo
Alberto Fancello ; co-orientador, Jakson Manfredini
Vassoler. - Florianópolis, SC, 2012.

126 p. ; 21cm

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia Mecânica. 2. Poroviscoelasticidade. 3.
Biomecânica. 4. Cartilagem articular. I. Fancello, Eduardo
Alberto. II. Vassoler, Jakson Manfredini. III.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.

Stefano Orzechowski

**MODELOS BIFÁSICOS E ANÁLISE EXPERIMENTAL NA
CARACTERIZAÇÃO MECÂNICA DO TECIDO
CARTILAGINOSO ARTICULAR**

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina.
Florianópolis, 21/08/2012.

Prof. Júlio César Passos, Dr. Eng.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Eduardo Alberto Fancello , D.Sc.
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof^ª. Mildred Ballin Hecke, D.Sc.
Universidade Federal do Paraná

Prof. Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Carlos Rodrigo de Mello Roesler, Dr. Eng.
Universidade Federal de Santa Catarina

Alea jacta est

Gaius Julius Caesar

AGRADECIMENTOS

À minha mãe Inaura Orzechowski, pelo carinho, amor, dedicação, educação e apoio incondicional em cada passo da minha vida.

Ao meu orientador Prof^o Eduardo Alberto Fancello, pela orientação, apoio, incentivo, conhecimentos acadêmicos ensinados e pela força e confiança que me foi passada durante toda a realização deste trabalho.

Ao meu co-orientador Prof^o Jakson Manfredini Vassoler, pelas horas de conversa, ensinamentos e pelo importante auxílio ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores Dr. Ari Moré e Carlos Rodrigo de Mello Roesler e ao colega de mestrado Luiz Fernando Vieira pelo suporte nos testes experimentais.

Aos meus primos Eva Cristina Orzechowski Dias e Rafael Damaceno Dias, pelo incentivo na área acadêmica, pelo apoio em todos os sentidos e principalmente por terem me recebido tão bem em sua casa.

Aos amigos do GRANTE, companheiros de muito café e pela troca de experiências. Em especial ao Paulo Bastos, pela grande ajuda nesses dois anos.

Aos ex-colegas de casa Eduardo Burin, Diogo Bebo e André Trentini, grandes amigos e companheiros para qualquer assunto.

RESUMO

A cartilagem articular é a responsável pela qualidade funcional de uma articulação durante toda vida, permitindo o deslizamento suave das superfícies articulares entre si, com baixo atrito, suportando e distribuindo uniformemente as pressões intra-articulares. O dano na cartilagem limita a qualidade de vida das pessoas, causa dor, impede a mobilidade e restringe severamente as atividades diárias. Estudos que visam à reparação da cartilagem, a fim de diminuir e estabilizar os problemas acima citados, têm sido frequentes nas últimas décadas, exigindo conhecimento da estrutura e do comportamento mecânico deste tecido. O presente trabalho teve como objetivo a análise e simulação do comportamento do tecido cartilaginoso articular, através da implementação, via elementos finitos, de modelos bifásicos. Para a validação dos modelos propostos e buscando uma melhor compreensão dos fenômenos envolvidos foram reproduzidos vários exemplos numéricos disponíveis na literatura. A capacidade dos modelos bifásico poroelástico (BPE) e bifásico poroviscoelástico (BPVE) de reproduzir corretamente o comportamento mecânico do tecido foi avaliada em testes de relaxamento de tensões em compressão confinada e não confinada. Testes experimentais de compressão não confinada com cartilagem suína foram feitos para caracterizar a cartilagem e os resultados obtidos utilizados para posterior identificação de parâmetros através de um algoritmo de otimização. Foi possível demonstrar a vantagem do modelo BPVE, em relação ao modelo BPE, por levar em consideração a natureza viscoelástica dos componentes da cartilagem. Além disso, o modelo BPVE conseguiu representar o comportamento real da cartilagem.

Palavras-chave: Poroviscoelasticidade, Biomecânica e Cartilagem Articular.

ABSTRACT

Articular cartilage is responsible for the functional quality of a joint throughout life, allowing smooth sliding between articular surfaces with low friction, supporting and distributing the pressure steadily within the joints. Cartilage damage limits the quality of life, causes pain, prevents mobility and severely restricts everyday activities. Studies attempting to repair the cartilage, in order to reduce and stabilize the mentioned problems, have been frequent in recent decades, requiring knowledge of its structure and its mechanical behavior. Therefore, this work aim to analyze and to simulate the mechanical behavior of an articular cartilage tissue by means of the finite element implementation of biphasic models. In order to validate the proposed models and to better understand the phenomena involved, several numerical examples available in literature are reproduced. The ability of the biphasic poroelastic model (BPE) and biphasic poroviscoelastic model (BPVE) to reproduce correctly the mechanical properties of the articular cartilage is evaluated in stress relaxation tests of confined and unconfined compression. Experimental tests of unconfined compression with porcine cartilage are used to characterize the cartilage and the results used for parameter identification using an optimizing algorithm. In this study it is possible to demonstrate the advantage of BPVE model with regard to the BPE model by taking into account the viscoelastic nature of the cartilage components. Furthermore, the model BPVE could represent the actual behavior of cartilage.

Keywords: Poroviscoelasticity, Biomechanics and Articular Cartilage.

LISTA DE FIGURAS

1.1 Articulação sinovial: normal e sofrendo de osteoartrite. Adaptada de [1].	2
1.2 a) Cartilagem saudável b) Cartilagem sofrendo de osteoartrite	2
2.1 Meio poroso. Adaptada de [1].	5
2.2 Estrutura da cartilagem. Adaptada de [2].	7
2.3 Estrutura das proteoglicanas e fenômeno de DCF. Adaptada de [3].	8
2.4 Formação das fibras de colágeno. Adaptada de [3].	9
2.5 Condrócitos [1].	9
2.6 Zonas da cartilagem articular. Adaptada de [1].	10
2.7 Heterogeneidades da cartilagem em função da espessura. Adaptada de [1].	11
2.8 Típica curva tensão-deformação e resistência à tração das fibras de colágeno [3].	12
2.9 Variação do módulo de resistência à compressão em função da concentração de proteoglicanas [4].	13
2.10 Aplicação de cisalhamento [3].	14
2.11 Vista seccionada de uma câmara confinada para testes de compressão [5].	17
2.12 Teste de fluência [1].	18
2.13 Esquema do teste de compressão não confinada [5].	19
2.14 Teste de relaxamento de tensões [1].	19
2.15 Teste de indentação [1].	20
3.1 Elemento de volume representativo [1].	26
3.2 EVR representando o domínio de um meio poroso à partir de um ponto contínuo [1].	26
3.3 Modelo sólido linear padrão.	29
3.4 Comparação entre as funções de relaxamento do espectro contínuo e discreto [6].	30
4.1 Compressão confinada - condições de contorno	40
4.2 Malha de elementos finitos para o problema confinado	40
4.3 Efeito da variação do incremento de tempo Δt na velocidade relativa do fluido em 4 % de profundidade	42
4.4 Efeito da variação do parâmetro de penalização β na pressão para $t = 300s$	42
4.5 Variação da velocidade relativa do fluido com a profundidade para $t = 200s$	43

4.6	Condições de contorno para o problema não confinado	44
4.7	Malha de elementos finitos para o problema não confinado . . .	44
4.8	Força de reação para o problema de compressão não confinada	45
4.9	Variação da pressão com o tempo a 5% do raio no meio altura da amostra	45
4.10	Variação da tensão normal com o tempo no meio da altura da amostra	46
4.11	Distribuição radial da deformação ϵ_r no meio da altura da amostra para tempos $t = 500s$ e $t = 700s$	47
4.12	Função de relaxamento discreta	48
4.13	Variação temporal da tensão σ_z em $z/h = 0.98$ e $r = 5\%$ durante o relaxamento de tensão	48
4.14	Variação espacial da velocidade relativa do fluido em $t_0 = 10$ s para $r = 5\%$ durante o relaxamento de tensão	49
4.15	Comparação da força de reação entre os modelos BPE e BPVE durante relaxamento de tensão	50
4.16	Distribuição da pressão no tempo $t = 15s$ para os modelos BPE e BPVE	50
4.17	Efeito do parâmetro c no relaxamento de tensões para o caso confinado	51
4.18	Efeito da taxa de compressão no relaxamento de tensões para o caso confinado	52
4.19	Efeito dos parâmetros τ_1 e τ_2 no relaxamento de tensões para o caso confinado	52
4.20	Garra de compressão submersa e componentes do DMA.	54
4.21	Máquina DMA Q800	54
4.22	Curva carga x tempo	55
4.23	Curva força x deslocamento para compressão não confinada - amostra cúbica.	56
4.24	Punção para biópsia dérmica com 4 mm de diâmetro.	56
4.25	Cabeça do fêmur de um suíno e as amostras retiradas.	57
4.26	Curva força x deslocamento para compressão não confinada - amostra cilíndrica	57
4.27	Curva força de reação versus tempo para o relaxamento de tensões em compressão não confinada	59
4.28	Ajuste de curva do modelo BPE no relaxamento de tensões em compressão não confinada.	62
4.29	Ajuste de curva do modelo BPVE no relaxamento de tensões em compressão não confinada.	63

4.30	Ajuste de curva do modelo BPVE para 6 parâmetros.	64
4.31	Análise de sensibilidade dos parâmetros elásticos.	65
4.32	Análise de sensibilidade dos parâmetros viscosos.	65
4.33	Ajuste de curva dos dados experimentais no relaxamento de tensões em compressão não confinada.	67
B.1	Condições de contorno para a coluna poroelástica.	92
B.2	Deslocamento na extremidade da coluna em função do tempo.	93
B.3	Pressão na base da coluna em função do tempo.	94
B.4	Deslocamento na extremidade da coluna em função do tempo.	95
B.5	Pressão na base da coluna em função do tempo.	95

LISTA DE TABELAS

2.1	Composição aproximada dos constituintes da cartilagem articular, menisco, disco intervertebral, tendão e ligamento [1]...	7
4.1	Amostras usados no teste de relaxamento de tensões	58
4.2	Algoritmo da função objetivo	60
4.3	Parâmetros elásticos no ajuste do modelo BPE	61
4.4	Parâmetros viscoelásticos no ajuste do modelo BPVE	62
4.5	Parâmetros no ajuste do modelo BPVE	64
4.6	Valores de referência para a cartilagem encontrados em identificação de parâmetros. Tiradas de [7, 8, 9, 10, 11].....	67
4.7	Ajuste de curva para o modelo BPVE	67
B.1	Propriedades da coluna poroelástica para o caso de material compressível	93
B.2	Propriedades da coluna poroelástica para o caso de material incompressível.....	94

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BPE	Modelo Bifásico Elástico Linear.
BPVE	Modelo Bifásico Poroviscoelástico.
CA	Cartilagem Articular.
DCF	Densidade de Carga Fixa.
DMA	Analisador Dinâmico Mecânico.
EVR	Elemento de Volume Representativo.
GAG	Glicoaminoglicanas.
MEC	Matriz Extracelular.
OA	Osteoartrite.
PAUC	Interface Placa-Amostra Perfeitamente Adesiva.
PLUC	Interface Placa-Amostra Perfeitamente Lubrificada.

LISTA DE SÍMBOLOS

Ω	Domínio do Corpo
Γ	Contorno do Corpo
V^f	Volume de Fluido
V^s	Volume de Sólido
σ^s	Tensor de Cauchy para a Fração Volumétrica Sólida
σ^f	Tensor de Cauchy para a Fração Volumétrica Fluida
Π	Força de Corpo Difusiva
\mathbf{v}^f	Velocidade do Fluido
\mathbf{v}^s	Velocidade do Sólido
\mathbf{v}	Vetor Velocidade
ϕ^f	Porosidade
ϕ^s	Solidez
p	Pressão Hidrostática do Fluido
$\tilde{\sigma}^s$	Tensão Efetiva da Fase Sólida
\mathbf{I}	Tensor Identidade de Segunda Ordem
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensão Total do EVR
k	Permeabilidade Hidráulica
β	Coefficiente de Penalização
$G(t)$	Função de Relaxamento Reduzida
B^s	Módulo Volumétrico
μ^s	Módulo de Cisalhamento
$\boldsymbol{\varepsilon}^s$	Tensor Deformação para a Fase Sólida
c	Magnitude do Espectro de Potência de Relaxamento
τ_1	Tempo de Relaxamento Curto
τ_2	Tempo de Relaxamento Longo
G_i	Módulo Discreto
v_i	Tempo de Relaxamento Discreto
\mathbf{N}	Matriz das Funções de Forma
\mathbf{B}	Matriz de Deformação
\mathbf{m}	Operador Traço
$\boldsymbol{\eta}(t)$	Pseudo Deslocamento Viscoelástico da Fase Sólida
\mathbf{C}	Matriz de Acoplamento Sólido-Fluido
\mathbf{K}	Matriz Rigidez
n_{ip}	Número de pontos de integração
ζ	Variação de Conteúdo Líquido
ε^v	Deformação Volumétrica

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	1
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
2.1 ESTRUTURA E COMPOSIÇÃO DA CARTILAGEM ARTI- CULAR	6
2.1.1 Proteoglicanas	6
2.1.2 Colágeno	8
2.1.3 Condrócitos	8
2.1.4 Fluido Intersticial	9
2.1.5 Divisão da Cartilagem Articular	10
2.2 PROPRIEDADES MECÂNICAS DA CARTILAGEM ARTI- CULAR	11
2.2.1 Resistência à Tração	12
2.2.2 Resistência à Compressão	12
2.2.3 Resistência ao Cisalhamento	13
2.2.4 Viscoelasticidade	14
2.2.5 Inchamento	14
2.2.6 Anisotropia	15
2.3 MÉTODOS EXPERIMENTAIS PARA CARACTERIZAÇÃO DE PROPRIEDADES MECÂNICAS	15
2.3.1 Teste de Tração	16
2.3.2 Compressão Confinada	17
2.3.3 Compressão Não Confinada	18
2.3.4 Testes de Indentação	20
2.4 MODELOS DE COMPORTAMENTO DE MATERIAL	20
3 MODELO BIFÁSICO POROVISCOELÁSTICO	25
3.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	25
3.1.1 Formulação Diferencial de Equilíbrio	25
3.1.2 Modelo Constitutivo	28
3.1.3 Formulação Integral (Variacional)	31
3.2 APROXIMAÇÃO NUMÉRICA	32
3.2.1 Aproximação de Elementos Finitos	32
3.2.2 Integração Temporal	35
4 RESULTADOS NUMÉRICOS E EXPERIMENTAIS	39
4.1 VALIDAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO DOS MODELOS E ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	39
4.1.1 Modelo Bifásico Poroelástico - Ensaio Confinado	39
4.1.2 Modelo Bifásico Poroelástico - Ensaio Não Confinado	43

4.1.3 Modelo Bifásico Poroviscoelástico - Ensaio Confinado	47
4.1.4 Modelo Bifásico Poroviscoelástico - Ensaio Não Confinado	49
4.1.5 Análise de Sensibilidade	51
4.2 TESTES EXPERIMENTAIS	53
4.2.1 Procedimento Experimental	54
4.3 IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS	58
4.3.1 Testes de Validação do Procedimento de Identificação	61
4.3.2 Identificação Usando os Dados Experimentais	66
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	69
5.1 CONCLUSÕES	69
5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	70
Referências	71
Apêndice A – Expressões Matriciais	79
Apêndice B – Modelo Bifásico Poroelástico	81
B.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	81
B.1.1 Equações Constitutivas	82
B.1.2 Resposta Volumétrica	83
B.1.3 Equações Governantes	84
B.1.4 Equações Diferenciais	85
B.2 APROXIMAÇÃO VIA ELEMENTOS FINITOS	89
B.3 DISCUSSÃO E VALIDAÇÃO DO MODELO	92
Apêndice C – Formulação Analítica de Biot para o Problema da Coluna Poroelástica	97

1 INTRODUÇÃO

A busca pelo aumento da qualidade e expectativa de vida, enfatizada nos últimos anos, evidenciou a necessidade de avanços tecnológicos nos campos da medicina e engenharia. Inserida nesse contexto, a biomecânica busca entender como as forças internas e externas atuam sobre os corpos vivos. O estudo e análise do comportamento mecânico desses corpos, são fundamentais para uma melhor compreensão dos fenômenos envolvidos e tem diversas aplicações, como o auxílio em procedimentos cirúrgicos, na melhoria da colocação de próteses e na reparação de tecidos.

A cartilagem articular é uma estrutura que está sujeita a carregamentos constantes. Uma vez que a cartilagem é responsável pela qualidade funcional das articulações, é fundamental compreender como a sua estrutura interna é organizada e como essa responde mecanicamente quando submetida à solicitações devido aos seus movimentos durante o uso cotidiano ou esportivo. Lesões na cartilagem articular não representam uma ameaça à vida, mas podem diminuir consideravelmente a qualidade de vida das pessoas. O dano na cartilagem articular causa dor, inchaço, restringindo a mobilidade e as atividades cotidianas. O aumento de peso, a prática de exercícios físicos com cargas intensas e o próprio envelhecimento, podem levar a danos irreparáveis na estrutura da cartilagem que estão associados a muitos problemas. O principal desses é a osteoartrite (OA) ou artrose. A OA é uma doença que causa destruição parcial ou total da cartilagem que recobre os ossos, nas articulações como pode ser visto nas Figuras (1.1, 1.2). Ela também é conhecida como artrite degenerativa. Devido a essa perda, começa a haver contato entre material ósseo ocorrendo inflamações e irritações na articulação. A OA pode ocorrer em qualquer articulação, porém, é mais comum nos joelhos, nas mãos, no quadril e na coluna. Outros problemas associados a cartilagem articular são a osteocondrite (inflamação conjunta de osso e cartilagem), hérnia de disco (projeção do disco intervertebral para além dos seus limites normais) e nanismo (impedimento do crescimento).

Para estudar e compreender quais os fatores que causam doenças e prejudicam a vida humana e também para compreender quais forças atuam nos tecidos biológicos durante as diversas atividades realizadas diariamente, ensaios experimentais são de suma importância. Existem duas classes de testes em tecidos biológicos: testes *in vivo*, os quais são raros e de difícil execução e os testes experimentais *in vitro*. As duas classes de ensaios são usualmente feitos para caracterizar as propriedades de tecidos vivos. Porém, podem não representar corretamente o comportamento mecânico do tecido

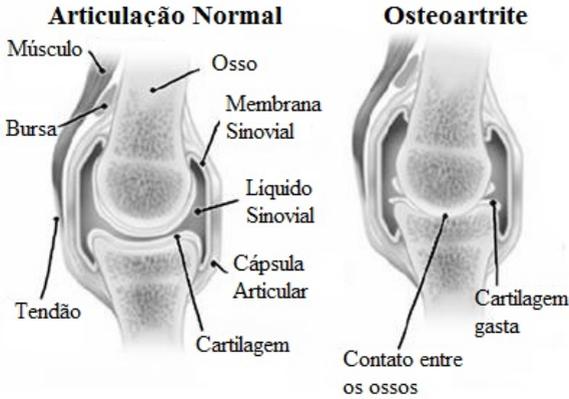


Figura 1.1: Articulação sinovial: normal e sofrendo de osteoartrite. Adaptada de [1].

em si devido a inúmeros fatores que devem ser levados em consideração para reproduzir o ambiente e as condições de carregamento no qual se encontram. Além disso, variações nas propriedades mecânicas podem surgir durante a extração e ensaio da amostra.

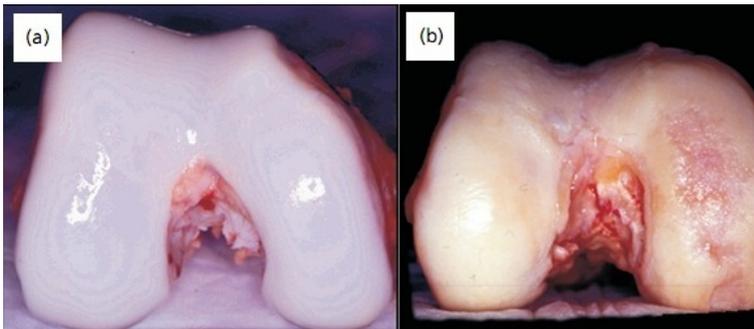


Figura 1.2: a) Cartilagem saudável b) Cartilagem sofrendo de osteoartrite

Vários modelos matemáticos foram desenvolvidos a fim de representar corretamente o comportamento dos tecidos vivos e com o auxílio de ferramentas numéricas, simular problemas reais da maneira mais realista possível. Nesse contexto, o uso de modelos computacionais, auxilia na análise do comportamento mecânico e no estudo das propriedades mecânicas. Modelos de elementos finitos tem sido usados para tentar prever o comportamento mecânico dos tecidos biológicos sob a atuação de vários tipos de carga-

mento. O uso em conjunto de testes experimentais e modelos computacionais é importante, uma vez que os testes experimentais guiam o modelamento e permitem validar os modelos numéricos. Modelos bifásicos poroelásticos foram inicialmente usados para descrever o comportamento mecânico da CA. Porém, sabe-se que a cartilagem apresenta comportamento viscoelástico. Logo, novos modelos foram formulados para introduzir o efeito de viscoelasticidade da matriz sólida na representação constitutiva. Atualmente diversos modelos bifásicos poroviscoelásticos, com diferentes aplicações, têm sido usados para modelar corretamente o comportamento mecânico da cartilagem articular.

O principal objetivo do presente trabalho é o estudo de modelos poroviscoelásticos capazes de simular numericamente o comportamento mecânico de tecidos cartilagosos de articulações. Pretende-se ainda avaliar a sua capacidade de representação mecânica através de testes experimentais e identificação de parâmetros do material. Como objetivos específicos podemos citar:

- Comparar os modelos BPE e BPVE.
- Verificar se o algoritmo de espectro discreto consegue representar o comportamento mecânico da cartilagem articular.
- Analisar a influência dos parâmetros do material através de análise de sensibilidade.
- Realizar ensaio experimental de compressão não confinada com cartilagem articular suína.
- Efetuar identificação de parâmetros do material através de um algoritmo de otimização.

Segue abaixo uma breve descrição da estrutura desta dissertação:

- No **Capítulo 2** apresenta-se uma revisão bibliográfica sobre a cartilagem articular, seus componentes e sua estrutura interna. Este capítulo traz, ainda, uma breve descrição dos ensaios mecânicos mais utilizados na caracterização da cartilagem. Por último, são descritos brevemente os modelos de comportamento de material mais usados nos últimos anos.
- O modelo bifásico poroviscoelástico é apresentado no **Capítulo 3**. É mostrada a formulação matemática que modela o comportamento da

cartilagem, desde as equações constitutivas até as equações expressas na sua forma integral. Depois é apresentada a formulação numérica através da aproximação via elementos finitos.

- No **Capítulo 4**, são mostrados e discutidos os resultados de validação do modelo, baseados em exemplos disponíveis na literatura. Também são apresentados os resultados dos testes experimentais executados e da identificação de parâmetros da cartilagem.
- Por fim, no **Capítulo 5**, são apresentadas as conclusões e as recomendações para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O tecido cartilaginoso, ou cartilagem, pertence ao grupo de tecidos biológicos conjuntivos moles. É um material poroso (Fig. 2.1), bifásico, composto por uma matriz sólida formada por grupos de células denominadas condrócitos que ficam imersos em uma matriz extracelular (MEC), constituída por proteoglicanas, fibras de colágeno e uma fase fluída devido à água. A matriz sólida é porosa e permeável permitindo o escoamento do fluído alojado nos poros durante a aplicação de carregamento. Existem três tipos de cartilagem no corpo humano: elástica, fibrosa e hialina.

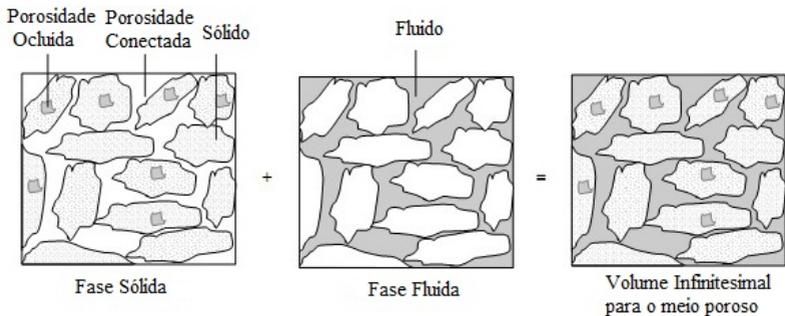


Figura 2.1: Meio poroso. Adaptada de [1].

A cartilagem elástica é encontrada no pavilhão auditivo, no conduto auditivo externo, na tuba auditiva, na epiglote e na cartilagem cuneiforme da laringe. A presença de elastina confere uma coloração amarelada. Também possui pericôndrio (tecido que reveste a cartilagem e que é responsável pela sua nutrição e oxigenação) e está menos sujeita a processos degenerativos.

Já a cartilagem fibrosa está presente nos discos intervertebrais, nos pontos onde alguns ligamentos e tendões se inserem nos ossos e na sínfise púbica. Ela tem dureza intermediária entre o tecido conjuntivo denso e a cartilagem hialina. Essa não possui pericôndrio e está sempre associada ao tecido conjuntivo denso. Sua matriz possui grande quantidade de fibras do colágeno tipo I, que formam feixes, seguindo uma orientação, aparentemente, irregular. Esses feixes lhe conferem grande resistência à tração.

Por último temos a cartilagem hialina ou articular que é a mais freqüente no corpo humano. Essa está presente nos anéis da traquéia e brônquios, septo e paredes das fossas nasais, nos locais de junção das porções anteriores das costelas com o esterno e recobrendo as articulações do tipo poliaxial. Esse tipo de cartilagem possui uma coloração natu-

ral branco-azulada e é translúcida. Possui pericôndrio (responsável pela nutrição, manutenção e crescimento do tecido conjuntivo cartilaginoso) e cresce principalmente por aposição, ou seja, de fora para dentro.

A cartilagem articular (CA) é uma estrutura resistente e elástica que recobre a superfície dos ossos que compõem as articulações e permite uma grande liberdade de movimento aos ossos longos. Essa cobertura ainda diminui o atrito entre as superfícies e, por consequência, permite maior facilidade de movimento. Em articulações humanas, a espessura da camada de cartilagem pode variar de 1 mm nas articulações dos dedos a 6 mm na superfície retropatelar [12]. Suas principais funções estão relacionadas ao deslizamento das superfícies articulares entre si de uma maneira suave e com baixo atrito, ao suporte de pressões pelas articulações e a distribuição uniforme das pressões intra-articulares. Além disso, a cartilagem articular distribui as cargas sobre uma maior área de contato, diminuindo a tensão de contato e dissipando parte da energia que é associada à carga [13]. A MEC em conjunto com o líquido sinovial, são os responsáveis pelo baixo coeficiente de atrito durante o movimento das articulações (cerca de 0.001 [14]).

2.1 ESTRUTURA E COMPOSIÇÃO DA CARTILAGEM ARTICULAR

Sabe-se que a cartilagem articular é um tecido avascular, esparsamente celular, cujas características bioquímicas refletem principalmente a composição da matriz extracelular. Esta é hiperhidratada (conteúdo de água variando de 58 a 78%), com 20-34% de sólidos dos quais, 5-6% são componentes inorgânicos e do restante orgânico, 50-75% é formado por colágeno tipo II e 15-30% por proteoglicanas (responsável pela elasticidade da cartilagem articular). Na Tabela (2.1) tem-se a porcentagem dos principais constituintes da matriz extracelular. A estrutura da cartilagem articular é heterogênea e as propriedades do tecido variam em função de sua espessura. Na Figura (2.2) vemos os principais componentes da cartilagem articular.

2.1.1 Proteoglicanas

As macromoléculas proteoglicanas representam cerca de 15-30% do peso do tecido seco. Elas são proteínas grandes e complexas compostas por um núcleo central carregado negativamente conectado através de ligações covalentes com cadeias de proteínas glicoesaminoglicanas (GAG) conforme visto

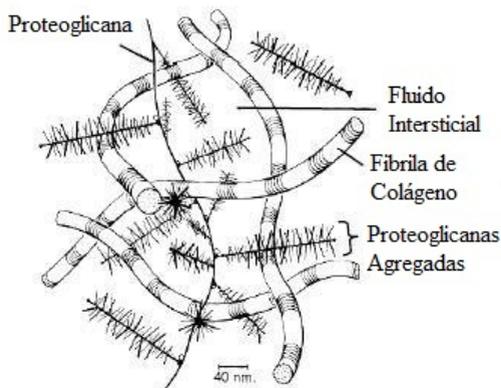


Figura 2.2: Estrutura da cartilagem. Adaptada de [2].

Tabela 2.1: Composição aproximada dos constituintes da cartilagem articular, menisco, disco intervertebral, tendão e ligamento [1]

Tipo de Tecido	Colágeno (% peso seco)	Proteoglicanas (% peso seco)	Água (% peso molhado)
Cartilagem Articular	50-75	15-30	58-78
Menisco	75-80	2-6	≈ 70
Disco Intervertebral (núcleo polpos)	15-25	≈ 50	70-90
Disco Intervertebral (anel fibroso)	50-70	10-20	60-70
Tendão	≈ 23-30	≈ 7	≈ 70
Ligamento	≈ 23	≈ 7	≈ 70

na Figura (2.3). Estes grupos de GAG originam uma alta densidade de carga negativa, denominada como densidade de carga fixa (DCF) [15]. Devido a essa carga negativa presente nas GAG, nuvens de cátions são atraídas, trazendo consigo principalmente sódio (Na^+) juntamente com moléculas de água. A concentração de cátions no interior do tecido é maior do que em torno do líquido sinovial (função de lubrificar as articulações), o que provoca uma diferença de pressão que resulta em inchaço do tecido [16]. Esse fenômeno fez surgir a chamada teoria trifásica, com a adição de uma terceira fase representando cátions e ânions [17]. A capacidade das GAG de atrair cátions e água faz com que as proteoglicanas tenham a função de hidratar a matriz extracelular.

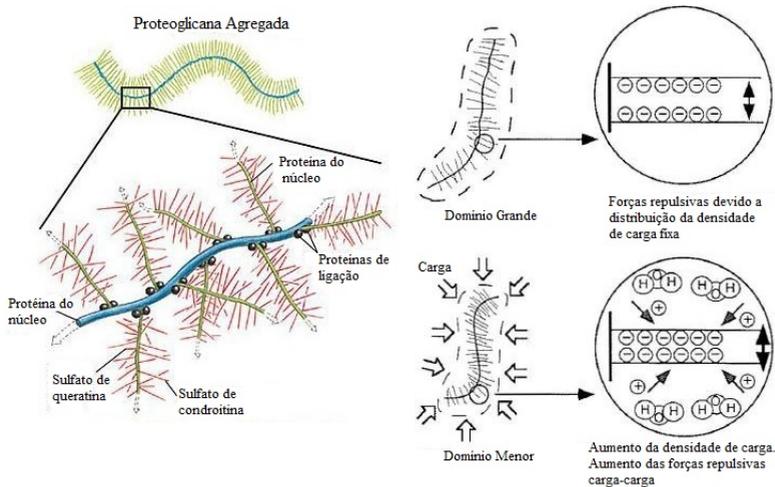


Figura 2.3: Estrutura das proteoglicanas e fenômeno de DCF. Adaptada de [3].

2.1.2 Colágeno

A cartilagem articular contém em sua maioria (80-85%) colágeno tipo II e pequenas quantidades dos tipos V, VI, IX, X e XI [18]. O colágeno é classificado conforme a sua cadeia de ligações peptídicas (ligação que une dois aminoácidos). As formas de colágeno correspondem a 50-75% do peso do tecido seco. As fibras de colágeno não contribuem na resistência do tecido quando estão sob compressão, mas são fortes e rígidas à tração. A rigidez do colágeno está ligada à quantidade de ligações cruzadas existentes. Na Figura (2.4) vemos um esquema do processo de formação das fibras de colágeno. Esse começa quando três cadeias de aminoácidos se entrelaçam em uma estrutura de tripla hélice formando os tropocolágenos. Esses, após um processo de empacotamento darão origem as fibrilas de colágeno que finalmente se unirão formando as fibras de colágeno.

2.1.3 Condrócitos

Condrócitos são as únicas células encontradas na cartilagem. Elas são responsáveis pela síntese, produção e manutenção da matriz extracelular. Essas estão isoladas em pequenas cavidades do tecido, denominadas lacunas (Fig. 2.5) e participam do crescimento da cartilagem.

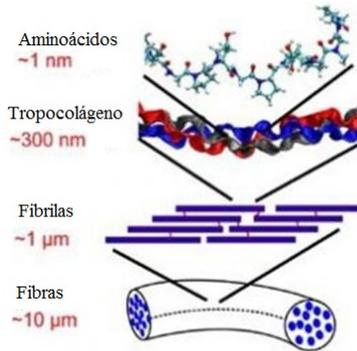


Figura 2.4: Formação das fibras de colágeno. Adaptada de [3].



Figura 2.5: Condrócitos [1].

2.1.4 Fluido Intersticial

O líquido intersticial é composto por água e íons livres (Na^+ , K^+ e Ca^{+2}). A água é o componente mais presente na CA e sua quantidade varia de 58 a 78% do peso molhado, dependendo da camada considerada (na camada superficial da cartilagem a concentração de água é alta (cerca de 78% do peso molhado)). Ela ocupa o espaço entre as fibras na MEC e é livre para escoar durante a aplicação de carregamento. Esse escoamento é importante para assegurar nutrição (uma vez que a cartilagem é avascular), lubrificação das articulações e para suporte de carga [19]. A presença dos íons influencia no comportamento mecânico e físico-químico, uma vez que é um dos responsáveis pelo fenômeno de inchamento do tecido [20].

2.1.5 Divisão da Cartilagem Articular

A cartilagem articular divide-se em quatro zonas conforme mostrado na Figura (2.6): superficial, de transição, profunda e calcificada.

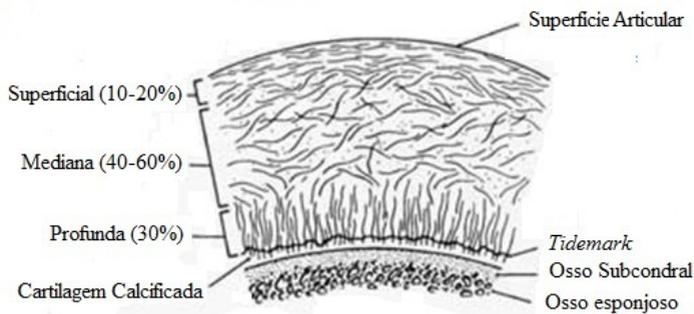


Figura 2.6: Zonas da cartilagem articular. Adaptada de [1].

A zona superficial é a camada mais fina (cerca de 10-20% da espessura total da cartilagem) e forma uma superfície de deslizamento das juntas. Essa zona possui uma grande quantidade de água e fibras de colágeno. As proteoglicanas e o colágeno se ligam fortemente nessa região, conferindo uma alta resistência a cisalhamento devido ao movimento [21].

A zona mediana ou de transição é consideravelmente maior que a superficial (40-60% da espessura total). As fibras de colágeno têm maior diâmetro e se distribuem aleatoriamente. Os condrócitos aparentam serem achatados e são mais ativos que na zona superficial.

Na zona profunda, ou radial, as fibras de colágeno têm seus maiores diâmetros e são orientadas perpendicularmente ao osso subcondral. Esta zona tem uma elevada presença de proteoglicanas e um teor mais baixo de água. Tem cerca de 30% da espessura total da cartilagem. A transição entre a matriz da cartilagem não calcificada e a cartilagem calcificada ocorre através da *tidemark*.

A zona de cartilagem calcificada é a camada de transição entre o osso e a cartilagem. A calcificação ocorre através de cristais de sais de cálcio e apresenta baixa incidência de proteoglicanas. A espessura dessa zona é relativamente constante com aproximadamente 5% da espessura total da cartilagem. Porém, estudos mostram que a sua espessura pode variar entre 3 a 8% da espessura total. Embora menos rígida que o osso, a zona calcificada é de 10-100 vezes mais rígida que as outras zonas da cartilagem [22]. A Figura

(2.7) mostra como a cartilagem é heterogênea e seus componentes variam em forma, orientação e quantidade conforme a espessura.

	Coloração Safranina-O	Orientação Colágeno	Conteúdo de Proteoglicanas	Morfologia dos Condrócitos
(a) Superficial			Baixa	Achata, grande densidade
(b) Mediana			Alta	Redonda
(c) Profunda			Alta	Grande/Em Colunas

Figura 2.7: Heterogeneidades da cartilagem em função da espessura. Adaptada de [1].

2.2 PROPRIEDADES MECÂNICAS DA CARTILAGEM ARTICULAR

As funções primárias da cartilagem articular são tribológicas e mecânicas e consistem em permitir um deslizamento suave entre superfícies e transmitir e distribuir forças sobre a articulação. Devido à variação da composição e da estrutura de uma articulação para outra e devido a mudança da sua rigidez em função da espessura, a obtenção das propriedades mecânicas do material não é uma tarefa fácil. Muitas tentativas vem sendo feitas, usando diferentes técnicas a fim de prever o comportamento mecânico da cartilagem, principalmente sob compressão, tração e cisalhamento. A CA é geralmente modelada como sendo bifásica. A fase sólida inclui a estrutura macromolecular dos colágenos, as proteoglicanas e proteínas não-colagenosas. A fase fluída refere-se à água dos tecidos que compõem 60-85% do peso total. As propriedades biomecânicas da cartilagem dependem da interação entre as duas fases.

A matriz sólida é porosa e permeável, permitindo que a água alojada nos poros escoe através da matriz quando forças são aplicadas. A pressão exercida pelo fluído fornece um maior suporte a força aplicada, diminuindo a tensão suportada pela matriz sólida. Em uma cartilagem saudável, mais de 95% da carga é suportada pelo fluído intersticial em atividades normais [23].

2.2.1 Resistência à Tração

A resistência à tração da CA depende da quantidade e da orientação das fibras de colágeno [24]. As ligações cruzadas entre as fibras de colágeno são os principais responsáveis pela alta resistência trativa da CA, mas pouco influenciam na resistência à compressão. Uma vez que as propriedades das fibras de colágeno variam significativamente conforme a espessura do tecido [5], geralmente, os testes de tração são feitos com finas camadas de tecido cortadas paralelo a superfície. Quando uma camada de cartilagem é tracionada sob uma taxa constante, a curva tensão-deformação apresenta um comportamento não-linear. Na Figura (2.8) vemos a típica curva tensão-deformação para as fibras de colágeno. No início da aplicação do carregamento vemos uma região não-linear denominada *toe region* que aparece devido ao realinhamento das fibras de colágeno, com baixa rigidez (5-10 MPa), porque as fibras ainda não foram alongadas e estiradas. No segundo estágio temos uma região linear onde as fibras já estão alinhadas na direção do carregamento, apresentando alta rigidez (5-100 MPa) e finalmente temos a falha onde ocorre a ruptura do material [2].

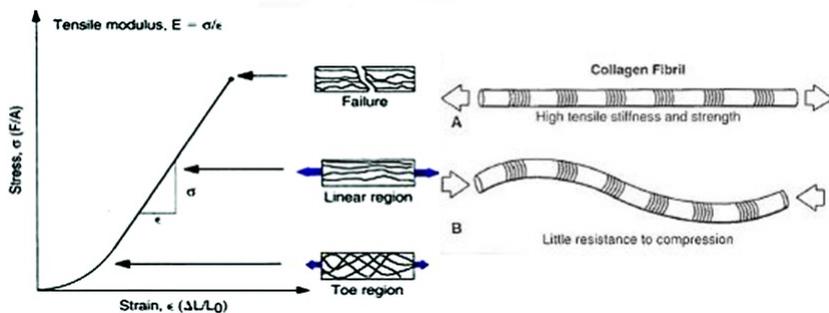


Figura 2.8: Típica curva tensão-deformação e resistência à tração das fibras de colágeno [3].

2.2.2 Resistência à Compressão

A quantidade de água, proteoglicanas e colágeno presentes no tecido são os principais determinantes da resistência à compressão da CA. A variação do conteúdo líquido durante a compressão produz um aumento da

DCF (ver Secção 2.1.1) induzindo o aumento da pressão osmótica e expansão química, resultando no aumento da rigidez efetiva do tecido em compressão. Embora as fibras de colágeno tenham pouca resistência à compressão, elas sofrem flambagem durante carregamento de compressão, evitando o inchamento do tecido. Portanto, na presença de alta pressão de inchamento (ver Secção 2.2.5), a rede de colágeno aumenta a rigidez da CA [2]. Além disso, quanto maior a concentração de proteoglicanas em uma determinada zona da cartilagem, maior será sua resistência à compressão. Na Figura (2.9) vemos o aumento do módulo de resistência à compressão em função do aumento da concentração de proteoglicanas para bovinos fetais e recém-nascidos.

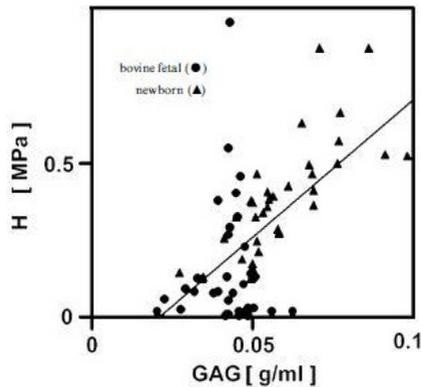


Figura 2.9: Variação do módulo de resistência à compressão em função da concentração de proteoglicanas [4].

2.2.3 Resistência ao Cisalhamento

Suas propriedades cisalhantes ainda não são bem compreendidas e o teste de cisalhamento está associado a inúmeros problemas. Por exemplo, a suavidade da camada de superfície faz com que seja difícil aplicar cargas de cisalhamento sem que ocorra escorregamento. O teste de cisalhamento é importante para identificar a parcela da viscoelasticidade não dependente do escoamento. Na Figura (2.10) vemos o comportamento dos componentes da cartilagem quando submetidos a forças de cisalhamento.

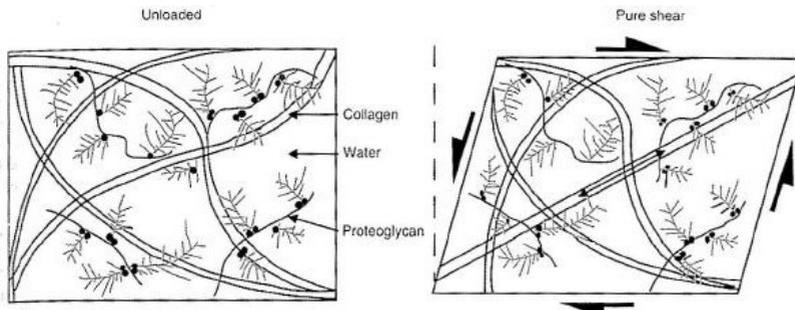


Figura 2.10: Aplicação de cisalhamento [3].

2.2.4 Viscoelasticidade

A CA apresenta comportamento viscoelástico, ou seja, a relação tensão-deformação depende diretamente do tempo. Existem dois mecanismos responsáveis por esse comportamento [25, 26, 6]. O primeiro é devido a força de arrasto causada pelo escoamento do fluido intersticial na matriz sólida porosa (mecanismo dependente do escoamento). O segundo é devido a deformação sofrida pela matriz sólida que depende da velocidade de aplicação da carga (mecanismo independente do escoamento). As fibras de colágeno e as proteoglicanas apresentam ambos comportamentos viscoelásticos independentes do escoamento. A cartilagem articular também demonstra fluência e relaxamento de tensão. Estas propriedades mecânicas resultam essencialmente do fluxo de fluido através da matriz da cartilagem articular, quando esta é comprimida [23]. O comportamento de fluência refere-se a resposta viscoelástica do material que se submetido a uma carga constante, irá primeiramente se deformar rapidamente, seguido por um aumento lento de deformação até atingir o estado de equilíbrio. Relaxamento de tensão ocorre quando o material sob deformação constante apresenta elevada tensão inicial seguida por uma progressiva queda na tensão requerida para manter a deformação.

2.2.5 Inchamento

Inchamento é definido como “a capacidade da CA de ganhar ou perder peso e água quando uma carga osmótica é aplicada no tecido” [27]. Como discutido anteriormente, os grupos presentes nas proteoglicanas são carregados

negativamente e dão origem ao fenômeno de DCF. Para se manter eletricamente neutra, um grande número de cátions (na sua maioria Na^+) deve estar presente no líquido intersticial. Logo, a concentração de íons na CA é muito maior do que nas regiões próximas a cartilagem. Este excesso de íons dentro do tecido cria a chamada pressão osmótica de Donnan fazendo com que fluido escoe para dentro do tecido para manter o equilíbrio osmótico. Outra causa de inchaço na CA ocorre devido a força de repulsão das GAG e é chamada de expansão química.

2.2.6 Anisotropia

Como foi descrito anteriormente, a CA apresenta uma estrutura altamente complexa. Devido a presença das fibras de colágeno, aleatoriamente distribuídas no interior do tecido, este apresenta comportamento anisotrópico. Isto significa que dependendo da direção de aplicação do carregamento, a cartilagem terá diferentes propriedades mecânicas, tanto em compressão como em tração [28]. Dependendo da espessura das proteoglicanas, quantidade de água e colágeno, forma dos condrócitos, orientação das fibras de colágeno, produz uma variação das propriedades mecânicas com a espessura e conseqüentemente uma mudança na rigidez dependendo da espessura. Como a organização das fibras na CA é altamente complexa, a maioria dos modelos mecânicos encontrados em literatura supõem um comportamento isotrópico homogeneizado para fins de estudo.

2.3 MÉTODOS EXPERIMENTAIS PARA CARACTERIZAÇÃO DE PROPRIEDADES MECÂNICAS

A caracterização experimental de um material geralmente é feita através de vários ensaios mecânicos que tem a finalidade de reproduzir diferentes tipos de esforços dependentes e independentes do tempo. Dentre os ensaio para caracterização de materiais pode-se citar os ensaios de tração, compressão, impacto, fadiga, compressibilidade, cisalhamento, cisalhamento puro, equibiaxial, etc..., bem com efeitos combinados destes. A resposta mecânica de cada um destes ensaios é diferente e pode ser usada na identificação de parâmetros de um modelo de material. A combinação de diferentes ensaios na identificação é extremante aconselhada pois permite uma simulação numérica confiável do comportamento mecânico de um material

submetido a um estado complexo de tensão, como encontrado rotineiramente em problemas de engenharia. Infelizmente a realização de vários ensaios é frequentemente cara e eventualmente inviável. Isto geralmente é devido a indisponibilidade de equipamento apropriado ou a capacidade de obtenção de amostra com dimensões e condições adequadas. Assim, procura-se contornar este problema identificando quais são os principais esforços que estão presentes no material de interesse e os respectivos ensaios que permitem caracterizá-los.

Devido às limitações dimensionais para obtenção de amostras e a dificuldade na reprodução experimental do ambiente no qual a CA se encontra, ensaios para caracterização mecânica de CA são considerados de execução laboriosa. Vários métodos experimentais são descritos na literatura para obter o comportamento deste tecido. A escolha do tipo de teste depende do tamanho, forma e quantidade de cartilagem disponível para estudos e também dos objetivos de cada estudo. A seguir serão listados alguns tipos de ensaios.

2.3.1 Teste de Tração

As propriedades da cartilagem quando submetidas a carregamentos trativos são muito importantes para determinar a rigidez compressiva do tecido ([29],[24]). Este é um ensaio pouco usual devido a dimensão disponível para extração de corpos de prova. Quando a cartilagem é tracionada sob deformação constante, a curva tensão-deformação apresenta comportamento não-linear. A orientação da amostra é importante, pois a cartilagem é conhecida anisotrópica (propriedades variam conforme a direção analisada), uma vez que a concentração, quantidade e organização das fibras de colágeno na cartilagem articular variam conforme a profundidade dentro do tecido. Estes testes de tração, quando necessários, são quase sempre conduzidos em finas camadas de tecidos cortados próximos a superfície utilizando um micrótomo (instrumento que faz cortes microscópicos) ou um *vibratome* (similar ao micrótomo, utiliza uma lâmina vibratória para o corte) [24]. Após o corte, as camadas são colocadas em garras que possuem as faces alinhadas com finas lixas (aproximadamente grão 1500). A resposta à tração das amostras é uma curva exponencial, similar a maioria dos outros tecidos biológicos moles. Vale ressaltar que este comportamento a tração é válido apenas para a zona superficial (10-20% da CA) que possui um orientação bem definida das fibras de colágenos alinhadas com a camada de tecido da amostra. Este comportamento não pode ser associado ao restante da CA (80-90%) porque as

fibras possuem uma distribuição e direção completamente diferente daquela região de onde foi retirada a amostra. Assim, seus dados possuem limitada aplicação em um procedimento de identificação de parâmetros de um modelo isotrópico que busque ser representativo do volume completo da cartilagem, mesmo homogeneizado.

2.3.2 Compressão Confinada

As propriedades compressivas da cartilagem são usualmente obtidas através dos teste de fluência e relaxamento de tensões em compressão confinada transversalmente. Normalmente, um *plug* cilíndrico subjacente ao osso subcondral é colocado em uma câmara rígida em formato de cilindro, onde só é permitido deformação na direção de aplicação do carregamento conforme visto na Figura (2.11).

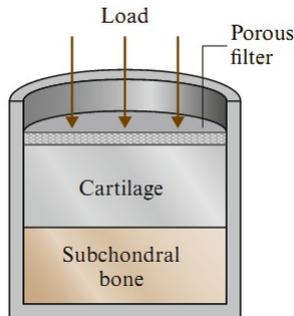


Figura 2.11: Vista seccionada de uma câmara confinada para testes de compressão [5].

Uma força uniaxial é aplicada, comprimindo o tecido e permitindo que o fluido intersticial escape somente pelo topo do tecido por uma placa porosa excitando apenas fenômenos de compressibilidade sólida. No teste de fluência (Fig. 2.12), a tensão no tecido é mantida constante. Analisando a curva tensão-deformação depois do equilíbrio temos condições de calcular o módulo de equilíbrio agregado, para a fase sólida do tecido. Outros parâmetros, como permeabilidade e módulo de Young, são encontrados fazendo um ajuste dos dados nos últimos 30% da curva ou então utilizando a solução analítica para o modelo bifásico poroelástico linear disponível na literatura [23].

Em Mow et al. [23], também está disponível a solução analítica para

Materiais viscoelásticos - fluência

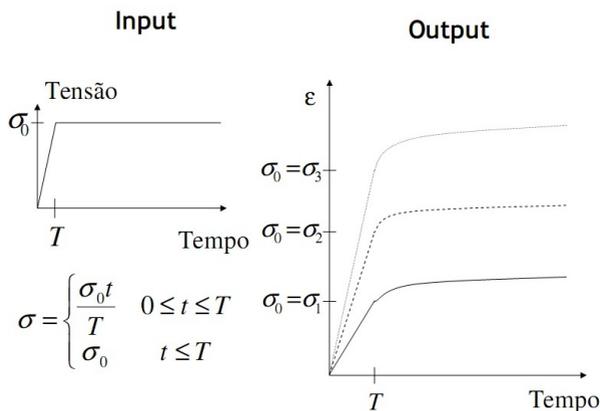


Figura 2.12: Teste de fluência [1].

o teste de relaxamento de tensões quando uma rampa de deslocamento é aplicada no tecido, porém, poucos autores utilizam essa abordagem para o teste confinado. Uma razão para isso pode ser a elevada força de resposta encontrada no teste quando o deslocamento inicial é aplicado rapidamente à amostra. Isto resulta em resultados inadequados para ajuste da curva. Neste ensaio a dimensão transversal da amostra deve ser igual a dimensão da câmara de confinamento, o que é de difícil controle, tanto pelo confeccionamento da câmara confinada como pelo controle dimensional da amostra.

2.3.3 Compressão Não Confinada

Tipicamente, parâmetros de relaxamento são calculados dos resultados obtidos nos testes de compressão não confinada. Nesse teste a cartilagem é removida em forma de disco das regiões subjacentes ao osso subcondral e posicionada entre duas placas altamente polidas (Fig. 2.13).

A placa superior é deslocada em forma controlada até que o espécimen alcance um nível de deformação pré-estabelecido (normalmente menor que 20% da espessura da cartilagem) e mantido constante até o equilíbrio ser alcançado. Este é o ensaio mais usual para caracterização da CA e de simples execução, devido a apresentar os mecanismos de deformação tipicamente encontrados no uso *in vivo*. O ensaio pode ser realizado facilmente apenas com a CA (sem osso subcondral) e é realizado em banho salino.

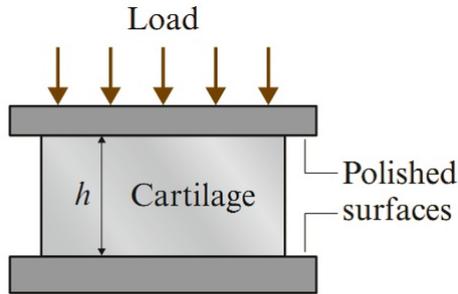


Figura 2.13: Esquema do teste de compressão não confinada [5].

Materiais viscoelásticos - relaxação de tensões

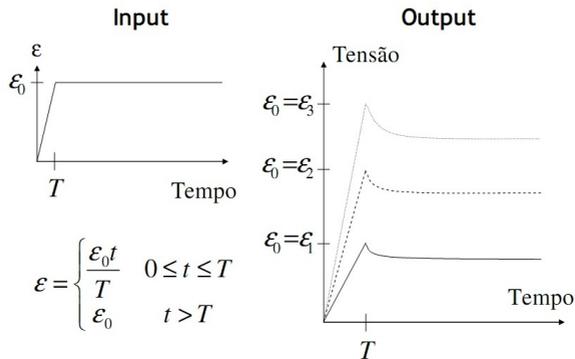


Figura 2.14: Teste de relaxamento de tensões [1].

A solução analítica para o teste de relaxamento de tensões (Fig. 2.14) no caso não-confinado utilizando o modelo bifásico poroelástico linear pode ser encontrada em Mow et al. [30]. Para o caso de fluência, a solução analítica se encontra no trabalho de Haut [24]. Estudos do ensaio não confinado documentaram dificuldades no uso do modelo bifásico linear para ajuste de dados experimentais. A dificuldade parece ser a incapacidade desse modelo em representar corretamente a restrição lateral gerada pelas fibras de colágeno, as quais encontram-se paralelas a superfície do tecido na camada superior. Modelos transversalmente isotrópicos para a matriz sólida foram propostos para simular o efeito de endurecimento no tecido ([2],[24]). Esses estudos levaram a modelos computacionais mais complexos cujas fibras de colágeno apresentam comportamento não-linear sob efeito de tensão e compressão, tor-

nando os resultados mais compatíveis com a realidade. Esses modelos mais recentes representam adequadamente o comportamento da cartilagem articular tanto em fluência como no teste de relaxamento de tensões para o caso não confinado.

2.3.4 Testes de Indentação

Testes de Indentação tem sido usados para caracterizar o comportamento compressivo da cartilagem articular [31]. Normalmente um indentador rígido esférico ou plano é usado para penetrar a superfície da cartilagem até alcançar o osso subcondral conforme a Figura (2.15). Para determinar o módulo cisalhante, o coeficiente de Poisson deve ser estimado ou determinado por outros métodos. Nos estudos seguintes, o coeficiente de Poisson foi determinado, baseado em resultados experimentais, sendo aproximadamente 0,5 no instante de penetração e 0,4 quando atingido o equilíbrio. Conhecer com precisão a profundidade do tecido na região de penetração é essencial para obter as propriedades nesse teste. Alguns métodos de medição incluem sistemas ópticos, penetração de agulha e ultrassom. Sabe-se que o módulo cisalhante obtido nos testes de indentação é ligeiramente maior do que o obtido nos testes confinado e não confinado, provavelmente devido ao tamanho do indentador. Solução analítica para esse problema encontra-se em ([31],[24]).

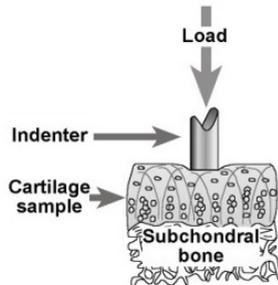


Figura 2.15: Teste de indentação [1].

2.4 MODELOS DE COMPORTAMENTO DE MATERIAL

A base teórica de meios porosos originou-se dos estudos pioneiros de Terzaghi [32] em 1923 na área de Mecânica dos Solos . Ele propôs um

modelo unidimensional para explicar o fenômeno de adensamento dos solos. A parte central dessa teoria se baseia no conceito da tensão efetiva, indicador da porcentagem de carga entre a matriz sólida e da pressão do fluido nos poros. A teoria de Terzaghi de consolidação foi estendida por Biot para considerar a interação do esqueleto do solo e da água nos poros durante a consolidação, formando assim uma teoria de consolidação generalizada que foi cunhada como poroelasticidade [33, 34]. Esta teoria descreve o comportamento mecânico de um meio multifásico elástico poroso que é completamente ou parcialmente preenchido com fluido nos poros. O caso mais simples de sistema multifásico é o caso de um meio poroso saturado, constituído de duas fases apenas, o meio elástico e o fluido preenchendo completamente os poros. No próprio texto do seu trabalho, Biot concluiu que a teoria de adensamento de Terzaghi é um caso particular da sua. Em 1956, Biot incluiu o efeito de carregamento dinâmico e ondas na sua formulação e em 1973 incluiu efeitos não-lineares. Em 1976, Rice et al. [35] re-formularam a teoria de Biot, substituindo as constantes elásticas por constantes mais familiares como módulo de elasticidade e módulo volumétrico, ambas avaliadas nos estados drenado e não drenado.

A utilização do Método dos Elementos Finitos na área de poroelasticidade teve início no trabalho de Sandhu e Wilson [36]. Os autores consideraram o meio poroelástico sujeito a pequenas deformações, mas apenas para as fases tidas como incompressíveis (grãos de solo e água). Gaboussi e Wilson [37] introduziram o conceito de compressibilidade na fase líquida. O estudo onde foram incluídas as deformações finitas foi elaborado por Carter et al. [38], que consideraram a não-linearidade geométrica e a linearidade física, sendo que nesse mesmo trabalho introduziu-se a não-linearidade física. A plasticidade no processo de adensamento foi estudada por Small et al., entre outros [39].

No campo da medicina, mais precisamente no que se refere a cartilagem articular, W. Hunter [40] iniciou em 1743 os estudos sobre a cartilagem, sua estrutura, componentes e doenças relacionadas a ela.

Para modelar corretamente o comportamento mecânico da cartilagem articular é conveniente utilizar a teoria bifásica. O caso mais simples é supor a matriz sólida como sendo elástica e linear. Nessa linha, destaca-se o trabalho de Mow et al. [19] que apresenta soluções analíticas para fluência e relaxamento de tensão para testes confinados de compressão. Nesse trabalho, encontra-se a formulação matemática completa do modelo bifásico elástico linear (BPE). Importantes aspectos são abordados nesse artigo, como o desenvolvimento de procedimentos experimentais para a determinação das pro-

priedades mecânicas da cartilagem, o estudo da influência do escoamento do líquido intersticial sobre o comportamento do tecido e o efeito da permeabilidade quando considerada constante. Os mesmos estudos foram feitos para compressão não confinada do tecido por Armstrong et al. [30]. São apresentadas a formulação matemática e a solução analítica para relaxamento de tensões e fluência.

Spilker et al. [41], aplicaram o método de elementos finitos via penalização no modelo BPE e fizeram testes de compressão confinada e não confinada. Todo o equacionamento é mostrado e é feita uma discussão sobre convergência, efeito do tamanho de elemento, distorção de malha e influência da interface placa-amostra. O modelo bifásico linear vem sendo utilizado para analisar compressão confinada, compressão simples, cargas de impacto e experiências de carga para a cartilagem normal e cartilagens com osteoartrite. O grande problema da teoria bifásica poroelástica é que ela não leva em conta a viscoelasticidade dos constituintes da matriz sólida.

A teoria bifásica poroviscoelástica (BPVE), apresentada por Mak [25], é a mais utilizada para descrever o comportamento mecânico da cartilagem articular. A deformação de tecido é representada como resultado da combinação da intra-fase (dependente do escoamento) e da dissipação mecânica intrínseca (independente do escoamento). A dissipação intrínseca na cartilagem é modelada usando uma lei constitutiva em que a matriz sólida depende da taxa de deformação. A solução analítica para o caso de compressão confinada é apresentada para testes de fluência e relaxamento de tensões assim como uma análise de sensibilidade avaliando os efeitos da variação dos parâmetros viscoelásticos.

Destaca-se também o trabalho de Suh et al. [6] no desenvolvimento do modelo bifásico poroviscoelástico, onde a formulação de elementos finitos para poroelasticidade é expandida para poroviscoelasticidade através de um modelo de espectro discreto baseado em uma combinação de modelos lineares padrão viscoelásticos (Modelo de Zener). É feita uma comparação entre os modelos poroviscoelásticos discreto e contínuo e o modelo poroelástico. Testes confinados de compressão tanto para relaxamento de tensão como para fluência são apresentados e uma comparação de performance computacional é feita para o tempo de processamento e utilização de memória.

Suh et al. [11] utilizaram o modelo BPVE para testes não-confinados de compressão em relaxamento de tensões e realizaram uma identificação de parâmetros, comparando o ajuste de dados dos modelos BPE e BPVE. Fez-se também um estudo comparativo sobre o efeito viscoelástico quando esse somente é considerado na parcela hidroestática da tensão e quando é consi-

derado nas duas parcelas, hidroestática e desviadora.

Na parte experimental se destaca o trabalho de Di Silvestro and Suh [9]. Os autores realizaram testes de compressão confinada e não confinada e testes de indentação com cartilagem bovina extraída da faceta medial da patela. Fizeram ainda, identificação de parâmetros através do modelo BPVE. Boschetti et al. [7] fizeram um estudo sobre a permeabilidade dependente da deformação e sua variação com a espessura do tecido. Korkhonen et al. [8] fizeram uma comparação entre as propriedades mecânicas da cartilagem quando atingido o equilíbrio. Outros pesquisadores também realizaram identificação de parâmetros [42, 43]. Mais recentemente Haider e Stuebner [44, 45], propuseram um novo algoritmo para o modelo de espectro contínuo, resultando em um ganho computacional.

Outros modelos surgiram ao longo dos anos para tentar simular o comportamento da cartilagem, tornando-o mais realista possível, levando em conta aspectos não abordados pela BPVE como a permeabilidade dependente do escoamento, grandes deformações, matriz sólida transversalmente isotrópica ou anisotrópica, inchamento do tecido e mais atualmente a chamada teoria trifásica que inclui a tensão química (devido ao movimento dos íons) na sua formulação [17, 21, 46, 16, 2].

3 MODELO BIFÁSICO POROVISCOELÁSTICO

O modelo BPVE apresentado aqui foi proposto inicialmente por Mak e co-autores [25] que incorporaram o conceito de viscoelasticidade linear através do uso de integral hereditária introduzida por Fung [14] para materiais biosólidos viscoelásticos, dentro do modelo bifásico elástico linear proposto por Mow et al. [19]. Posteriormente se aplicou a formulação de elementos finitos via penalização para o modelo bifásico poroviscoelástico [6]. A grande diferença entre o modelo apresentado aqui e o modelo de Biot [34] apresentado no Apêndice (B) é o tratamento do problema. Na teoria BPVE temos o campo de deslocamentos e velocidades como incógnitas do problema enquanto que no modelo proposto por Biot, o campo de pressões do fluido é desconhecido ao invés da sua velocidade.

No modelo poroviscoelástico, a matriz sólida é formulada como sendo isotrópica, sofrendo pequenas deformações e linearmente viscoelástica tanto em deformação volumétrica quanto na parcela de deformação desviadora. Efeitos de viscosidade são incorporados também através de uma força de corpo resistente difusiva proporcional a velocidade relativa entre o sólido e o fluido. Tecidos cartilagosos *in vivo* estão sempre saturados com líquido sinovial, portanto a condição de tecido totalmente hidratado é suposta assim como no modelo BPE. O líquido intersticial é considerado incompressível e invíscido. Admite-se ainda que a permeabilidade é independente da deformação quando pequenas deformações ocorrem, e que os efeitos inerciais são desprezíveis.

3.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

3.1.1 Formulação Diferencial de Equilíbrio

Admite-se que o elemento de volume representativo (EVR) é grande o suficiente comparado com o tamanho dos maiores poros, por isso pode ser tratado como homogêneo ao mesmo tempo, é pequeno suficiente comparado a escala dos fenômenos macroscópicos que interessam, podendo por isso, ser considerado infinitesimal no tratamento matemático.

Considere um domínio Ω com contorno Γ tendo volume total V sendo o volume de fluido V^f e o volume de sólido V^s . Sejam $(\)^s$ e $(\)^f$ quantidades associadas com as fases sólida e fluida, respectivamente. Neste modelo, as

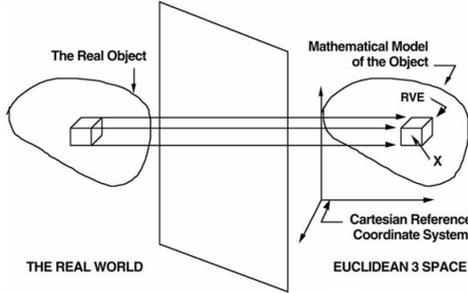


Figura 3.1: Elemento de volume representativo [1].

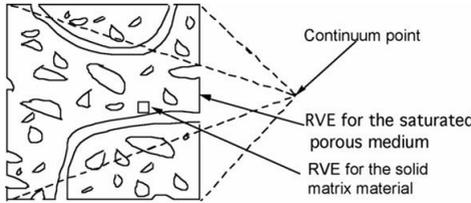


Figura 3.2: EVR representando o domínio de um meio poroso à partir de um ponto contínuo [1].

equações de equilíbrio do EVR são decompostas naquelas correspondentes à fração volumétrica sólida e líquida. Assim, se tem o seguinte conjunto de equações diferenciais a serem satisfeitas em todo ponto do EVR do domínio Ω :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^s + \boldsymbol{\Pi}^s = 0 \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^f + \boldsymbol{\Pi}^f = 0 \quad (3.2)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}^s$ e $\boldsymbol{\sigma}^f$ são os tensores de Cauchy das frações volumétricas sólida e fluida respectivamente, div é o operador divergente e $\boldsymbol{\Pi}$ é a força de corpo difusiva devido a interação sólido-fluido, satisfazendo $\boldsymbol{\Pi}^s + \boldsymbol{\Pi}^f = 0$. A equação da continuidade é definida por:

$$\operatorname{div} (\phi^f \mathbf{v}^f + \phi^s \mathbf{v}^s) = 0 \quad (3.3)$$

onde \mathbf{v} é o vetor velocidade, ϕ^f é a fração volumétrica de fluido, ou porosidade ($\phi^f = \frac{V^f}{V}$) e ϕ^s é a fração volumétrica de sólido, ou solidez ($\phi^s = \frac{V^s}{V}$),

sendo que:

$$\phi^f + \phi^s = 1 \quad (3.4)$$

A tensão de Cauchy da fração sólida possui uma contribuição da deformação da matriz, denominada tensão efetiva σ^s e uma contribuição hidrostática da pressão do fluido p ponderada pela fração volumétrica sólida:

$$\boldsymbol{\sigma}^s = -\phi^s p \mathbf{I} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^s \quad (3.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^f = -\phi^f p \mathbf{I} \quad (3.6)$$

onde \mathbf{I} é o tensor identidade de segunda ordem. Observa-se que a denominada tensão total do EVR é a soma da contribuição sólida e fluida, fornecendo:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^s + \boldsymbol{\sigma}^f = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^s - p \mathbf{I} \quad (3.7)$$

Em outras palavras, a tensão total $\boldsymbol{\sigma}$ do EVR que está em equilíbrio com as cargas externas possui a contribuição da pressão fluida e da tensão efetiva da matriz, essa última oriunda da sua deformação e do seu correspondente comportamento constitutivo. As condições de contorno estão dadas pelas seguintes equações:

$$\mathbf{u}^s = \bar{\mathbf{u}}^s \quad \text{em } \Gamma_{u^s} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{v}^f = \bar{\mathbf{v}}^f \quad \text{em } \Gamma_{v^f}$$

$$\mathbf{t}^s = \bar{\mathbf{t}}^s \quad \text{em } \Gamma_{t^s}$$

$$p = \bar{p} \quad \text{em } \Gamma_{p^f} \quad (3.9)$$

onde \mathbf{u}^s é o vetor de deslocamento do sólido, $\mathbf{t}^s = \boldsymbol{\sigma}^s \cdot \mathbf{n}$ são as forças aplicadas na fase sólida, $(\bar{\cdot})$ indica um valor prescrito de uma determinada quantidade Γ_{u^s} , Γ_{v^f} , Γ_{t^s} e Γ_{p^f} são partições da fronteira, Γ , na qual deslocamentos no sólido, velocidades do fluido, forças de superfície no sólido e pressões no fluido, respectivamente, são prescritas. As condições de deslocamento no sólido e velocidade do fluido são tratadas como condições de contorno essenciais e as forças no sólido e pressões no fluido são tratadas como condições de contorno naturais. Condições iniciais também são necessárias para a resolução do problema e serão descritas nos exemplos.

3.1.2 Modelo Constitutivo

Admite-se que a força de corpo devido a escoamento de fluido satisfaz a seguinte lei de proporcionalidade em relação a diferença de velocidade fluido-sólido:

$$\mathbf{\Pi}^s = -\mathbf{\Pi}^f = K(\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) = \frac{(\phi^f)^2}{k}(\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) \quad (3.10)$$

onde k é a permeabilidade hidráulica. Também se admite uma relação constitutiva entre a pressão e a equação da continuidade, mediante um parâmetro de penalização β de valor suficientemente elevado para satisfazer a equação da continuidade:

$$p = -\beta \operatorname{div}(\phi^f \mathbf{v}^f + \phi^s \mathbf{v}^s) \quad (3.11)$$

Esse parâmetro é pré-definido pelo usuário e deve ser grande o suficiente para garantir que as restrições sejam satisfeitas, mas não tão grande a ponto que as matrizes se tornem mal condicionadas. Foi observado que o método de penalização é sensível à distorção de malha e singularidades. Para maiores detalhes consultar [41].

Finalmente, é preciso definir a relação constitutiva que governa a matriz sólida. Em um modelo elástico (poroelasticidade) essa relação segue a lei de Hooke generalizada:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^s = 2\mu^s \boldsymbol{\epsilon}^s + \left(B^s - \frac{2}{3}\right) \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon}^s \quad (3.12)$$

O tensor de tensão efetivo, para a matriz sólida, $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^s$, pode ser representado por uma função de relaxamento reduzida, $G(t)$, da fase sólida:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^s = \int_{-\infty}^t G(t - \tau) \frac{d}{d\tau} \left(2\mu^s \boldsymbol{\epsilon}^s + \left(B^s - \frac{2}{3}\right) \operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^s) \right) d\tau \quad (3.13)$$

onde B^s e μ^s representam o módulo volumétrico elástico e o módulo de cisalhamento, respectivamente, sendo $\boldsymbol{\epsilon}^s = \frac{(\nabla \mathbf{u}^s + \nabla(\mathbf{u}^s)^T)}{2}$ o tensor deformação da fase sólida. Diferentemente do que é usual em modelos viscoelásticos, onde apenas a parcela desviadora é dependente da velocidade, nesta formulação envolvendo um material poroso, é suposto que tanto o termo volumétrico quanto o desviador são governados pela função de relaxamento [25]. Para te-

cidos moles hidratados com propriedades histeréticas insensíveis à frequência [14], $G(t)$ pode ser escrita em termos de um espectro de relaxamento, $S(\tau)$:

$$G(t) = 1 + \int_0^{\infty} S(\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau \quad (3.14)$$

$$S(\tau) = \begin{cases} \frac{c}{\tau}, & \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2 \\ 0, & \tau < \tau_1 \text{ ou } \tau > \tau_2 \end{cases} \quad (3.15)$$

Nesse modelo, c é a magnitude do espectro de potência de relaxamento e τ_1 e τ_2 são os limites inferior e superior das constantes de tempo de relaxamento.

Uma das dificuldades de se trabalhar com esse tipo de modelo é que o cálculo da tensão em um tempo t exige uma integral temporal do processo sofrido pelo ponto material desde o início do processo até o tempo t considerado. Isso é totalmente evitado em formulações incrementais, onde se espera que a atualização das variáveis do incremento dependam apenas de informações neste contidas. Assim, uma possibilidade consiste em substituir o modelo de espectro contínuo descrito acima por um modelo de espectro discreto baseado na combinação de modelos discretos viscoelásticos padrão de Kelvin [47] mostrados na Figura (3.3). Neste caso, a função de relaxamento pode ser escrita como uma combinação de funções de relaxamento discretas:

$$G(t) = G_{\infty} + \sum_{i=0}^{N_d} G_i e^{-\frac{t}{v_i}} \quad (3.16)$$

Aqui, $G_{\infty} = G(\infty)$, G_i é o módulo discreto i -ésimo e v_i é o i -ésimo tempo de relaxamento. Para que haja equivalência entre o modelo contínuo e discreto, admite-se $G_{\infty} = 1$.

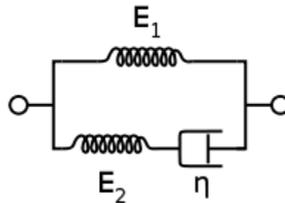


Figura 3.3: Modelo sólido linear padrão.

Entretanto a representação do modelo descrito acima é normalmente não-única para ajuste de modelo [14]. Para garantir a unicidade, duas hipóteses são feitas. Primeiro, admite-se que todos os valores G_i são iguais a

um valor único $G_i = \bar{G}$. Da equação (3.16), \bar{G} pode ser escrito como:

$$\bar{G} = \frac{G_0 - 1}{N_d + 1} \quad (3.17)$$

onde $G_0 = G(0)$. Admite-se também que v_i é igualmente distribuído entre τ_1 e τ_2 em uma escala logarítmica de base decimal. Sendo assim, a equação (3.16) se torna equivalente a equação (3.14) quando:

$$v_i = \tau_i \cdot 10^i \quad \text{e} \quad N_d = \log \frac{\tau_2}{\tau_1} \quad (3.18)$$

O uso de um intervalo logarítmico de base decimal na Equação (3.18) não é a única escolha possível, mas adequada para garantir uma representação única do modelo de espectro discreto.

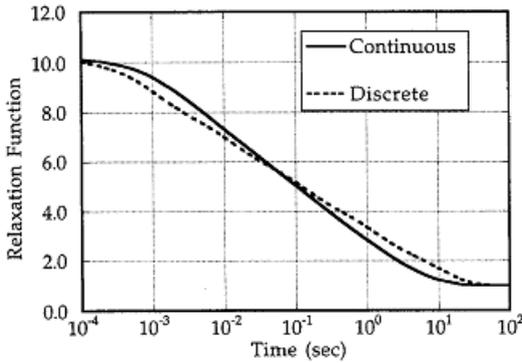


Figura 3.4: Comparação entre as funções de relaxamento do espectro contínuo e discreto [6].

Alguns autores [11, 9] afirmam que o uso de $N_d = 3$ e um intervalo logarítmico uniforme para τ_i , garantem a eficiência do modelo e a sua comparação com o modelo do espectro contínuo. Nesse caso, τ_1 é chamado de τ_s , constante termo curto do tempo de relaxamento, e τ_3 é chamado de τ_l , constante termo longo do tempo de relaxamento, equivalente aos dois parâmetros de relaxamento propostos por Fung no modelo de espectro contínuo [14]. A constante intermediária, τ_2 , pode ser definida como:

$$\log \tau_2 = \frac{(\log \tau_1 + \log \tau_3)}{2} \quad (3.19)$$

3.1.3 Formulação Integral (Variacional)

Considere \mathbf{w}^s função pertencente ao conjunto das variações $V = \{v : v \in H^4(\Omega); v = 0 \text{ em } \Gamma_u^3\}$. Aplicando o método dos resíduos ponderados na equação de equilíbrio da fase sólida, se tem:

$$\int_{\Omega} (\text{div} \boldsymbol{\sigma}^s + \boldsymbol{\Pi}^s) \cdot \mathbf{w}^s d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{w}^s \in V \quad (3.20)$$

Utilizando a regra da cadeia e o teorema da divergência, i.e., $\text{div}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{w}) = (\text{div} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{w} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{w}$, $\int_{\Omega} \text{div}(\boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{w}^s) d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w}^s d\Gamma$, se obtém a expressão clássica do princípio dos trabalhos virtuais:

$$\int_{\Gamma} (\bar{\mathbf{t}}^s \cdot \mathbf{w}^s) d\Gamma + \int_{\Omega} \boldsymbol{\Pi}^s \cdot \mathbf{w}^s d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^s \cdot \nabla \mathbf{w}^s d\Omega \quad \forall \mathbf{w}^s \in V \quad (3.21)$$

Substituindo as equações (3.10 e 3.13) na equação (3.21), resulta em:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (\bar{\mathbf{t}}^s \cdot \mathbf{w}^s) d\Gamma + \int_{\Omega} K(\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) \cdot \mathbf{w}^s d\Omega = \\ & \int_{\Omega} \left(\int_0^t G(t - \tau) \frac{d}{d\tau} \left(2\mu^s \boldsymbol{\epsilon}^s + \left(B^s - \frac{2}{3} \right) \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^s) \right) d\tau - \phi^s p \mathbf{I} \right) \cdot \nabla \mathbf{w}^s d\Omega \end{aligned} \quad (3.22)$$

Como já indicado, a equação da continuidade (Eq. 3.3), é introduzida via penalização (Eq. 3.11), relacionando a pressão com a velocidade do sólido e fluido. Logo:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\int_0^t G(t - \tau) \frac{d}{d\tau} \left(2\mu^s \boldsymbol{\epsilon}^s + \left(B^s - \frac{2}{3} \right) \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^s) \right) d\tau + \phi^s \beta \text{div}(\phi^f \mathbf{v}^f + \phi^s \mathbf{v}^s) \mathbf{I} \right] \cdot \\ & \nabla \mathbf{w}^s d\Omega = \int_{\Gamma} (\bar{\mathbf{t}}^s \cdot \mathbf{w}^s) d\Gamma + \int_{\Omega} K(\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) \cdot \mathbf{w}^s d\Omega \end{aligned} \quad (3.23)$$

Análogo ao que foi feito para a parte sólida, utiliza-se o método dos resíduos ponderados para a equação diferencial da equação de fração volumétrica fluida, Eq. (3.2). Seja $\mathbf{w}^f \in V^f$, $V^f = \left\{ v : v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ em } \Gamma_{uf} \right\}$ função pertencente ao espaço das variações. Operando sobre a equação dife-

rencial acima citada, se tem:

$$\int_{\Omega} (\text{div} \boldsymbol{\sigma}^f + \boldsymbol{\Pi}^f) \cdot \mathbf{w}^f d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{w}^f \in V^f \quad (3.24)$$

Utilizando argumentos similares à fração volumétrica sólida, chega-se à expressão do princípio dos trabalhos virtuais para a fração fluida:

$$\int_{\Gamma_{f,f}} (\bar{p} \cdot \mathbf{w}^f) d\Gamma + \int_{\Omega} \boldsymbol{\Pi}^f \cdot \mathbf{w}^f d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^f \cdot \nabla \mathbf{w}^f d\Omega \quad (3.25)$$

Substituindo as Equações (3.6 e 3.10) em (3.25), resulta:

$$\int_{\Gamma_{f,f}} (\bar{p} \cdot \mathbf{w}^f) d\Gamma + \int_{\Omega} K(\mathbf{v}^s - \mathbf{v}^f) \cdot \mathbf{w}^f d\Omega = - \int_{\Omega} (p\mathbf{I}) \cdot \nabla \mathbf{w}^f d\Omega \quad (3.26)$$

Ainda, substituindo Eq. (3.11),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\phi^f \beta \text{div} (\phi^f \mathbf{v}^f + \phi^s \mathbf{v}^s) \mathbf{I}] \cdot \nabla \mathbf{w}^f d\Omega + \int_{\Omega} K(\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) \cdot \mathbf{w}^f d\Omega \\ - \int_{\Gamma_{f,f}} (\bar{p} \cdot \mathbf{w}^f) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

As equações (3.23) e (3.27) são escritas somente em função dos deslocamentos e velocidades desconhecidas do sólido e fluido.

3.2 APROXIMAÇÃO NUMÉRICA

3.2.1 Aproximação de Elementos Finitos

Os campos de deslocamento e velocidade da fase sólida e fluida são aproximados por elementos finitos de forma usual:

$$\mathbf{u}^s = \mathbf{N}^s \mathbf{d}_n^s \quad \mathbf{v}^f = \mathbf{N}^f \mathbf{v}_n^f \quad (3.28)$$

onde \mathbf{d}_n^s , \mathbf{v}_n^s e \mathbf{v}_n^f são as matrizes contendo deslocamentos e velocidades nodais, \mathbf{N}^s e \mathbf{N}^f são matrizes de funções de forma. Para esse problema utilizam-se as mesmas funções para as fase sólida e fluida. Logo, $\mathbf{N}^s = \mathbf{N}^f = \mathbf{N}$.

Na aproximação de Galerkin, as funções peso são as mesmas funções de interpolação, portanto:

$$\mathbf{w}^s = \mathbf{N}\mathbf{w}_n^s \quad \mathbf{w}^f = \mathbf{N}\mathbf{w}_n^f \quad (3.29)$$

onde \mathbf{w}_n^s e \mathbf{w}_n^f são os correspondentes coeficientes arbitrários destas funções. Aplicando um operador linear de derivação a \mathbf{N} , obtém-se a matriz \mathbf{B} que permite obter as seguintes expressões matriciais das deformações:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}^s &= \mathbf{B}\mathbf{d}_n^s & \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^s) &= \mathbf{m}\mathbf{B}\mathbf{d}_n^s \\ \text{div}(\mathbf{v}^f)\mathbf{I} &= \mathbf{m}\mathbf{B}\mathbf{v}_n^f & \text{div}(\mathbf{v}^s)\mathbf{I} &= \mathbf{m}\mathbf{B}\mathbf{v}_n^s \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde \mathbf{m} é um operador traço em formato matricial. As expressões de \mathbf{B} e \mathbf{m} para o estado plano de deformações e para sólido de revolução se encontram no Apêndice (A).

Agora faremos a aproximação para a parte sólida. Substituindo as Equações (3.28,3.29 e 3.30) em (3.23) temos que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\int_0^t G(t-\tau) \left(2\mu^s \mathbf{B} + \left(B^s - \frac{2}{3} \right) \mathbf{m}\mathbf{B} \right) \frac{d\mathbf{d}_n^s}{d\tau} d\tau + \phi^s \beta (\phi^f \mathbf{m}\mathbf{B}\mathbf{v}_n^f + \phi^s \mathbf{m}\mathbf{B}\mathbf{v}_n^s) \right] \\ \mathbf{B}\mathbf{w}_n^s d\Omega - \int_{\Gamma} (\bar{\mathbf{t}}^s \cdot \mathbf{N}\mathbf{w}_n^s) d\Gamma - \int_{\Omega} K(\mathbf{N}\mathbf{v}^f - \mathbf{N}\mathbf{v}^s) \cdot \mathbf{N}\mathbf{w}_n^s d\Omega = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Pela arbitrariedade de \mathbf{w}_n^s , tem-se que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(2\mu^s \mathbf{B}^T \mathbf{B} + \left(B^s - \frac{2}{3} \right) \mathbf{B}^T \mathbf{m}\mathbf{B} \right) d\Omega \int_0^t G(t-\tau) \frac{d\mathbf{d}_n^s}{d\tau} d\tau \\ + \int_{\Omega} (\phi^s \phi^f \beta \mathbf{B}^T \mathbf{m}\mathbf{B} - \mathbf{N}^T K \mathbf{N}) d\Omega \mathbf{v}_n^f + \int_{\Omega} (\phi^s \beta \mathbf{B}^T \mathbf{m}\mathbf{B} + \mathbf{N}^T K \mathbf{N}) d\Omega \mathbf{v}_n^s \\ - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Para a parte fluida faremos o mesmo processo de substituição. Inserindo as equações (3.28,3.29 e 3.30) em (3.27) temos que:

$$\int_{\Omega} (\phi^s \phi^f \beta \mathbf{B}^T \mathbf{m} \mathbf{B} - \mathbf{N}^T \mathbf{K} \mathbf{N}) d\Omega \mathbf{v}_n^s + \int_{\Omega} (\phi^{f^2} \beta \mathbf{B}^T \mathbf{m} \mathbf{B} + \mathbf{N}^T \mathbf{K} \mathbf{N}) d\Omega \mathbf{v}_n^f - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} d\Gamma = \mathbf{0} \quad (3.33)$$

Agrupando os termos em comum das equações (3.32 e 3.33) em um sistema acoplado onde as incógnitas são os deslocamentos e velocidades (derivada temporal dos deslocamentos) das fases sólida e fluido. Tem-se, em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + [\beta \mathbf{c}^1 \quad \mathbf{c}^2] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n^s \\ \mathbf{v}_n^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^s \\ \mathbf{f}^f \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

onde:

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{d}_n^s d\tau \quad (3.35)$$

e $\boldsymbol{\eta}(t)$ é representa o vetor pseudo-deslocamento viscoelástico e os elementos das matrizes definidos por:

$$\mathbf{k} = \int_{\Omega} \left[\mathbf{B}^T \left(\mathbf{B}^s - \frac{2}{3} \mu^s \right) \mathbf{m} \mathbf{B} \mathbf{I} + \mathbf{B}^T 2\mu^s \mathbf{B} \right] d\Omega \quad (3.36)$$

$$\mathbf{c}^3 = \int_{\Omega_n} \mathbf{B}^T \mathbf{m} \mathbf{B} d\Omega \quad (3.37)$$

$$\mathbf{c}^4 = \int_{\Omega_n} \mathbf{K} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad (3.38)$$

$$\mathbf{f}^s = \int_{\Gamma_n^s} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}}^s d\Gamma \quad (3.39)$$

$$\mathbf{f}^f = \int_{\Gamma_n^f} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} d\Gamma \quad (3.40)$$

$$\mathbf{c}^1 = \begin{bmatrix} (\phi^{s^2}) \mathbf{c}^3 & \phi^f \phi^s \mathbf{c}^3 \\ \phi^f \phi^s \mathbf{c}^3 & (\phi^{f^2}) \mathbf{c}^3 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{c}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^4 & -\mathbf{c}^4 \\ -\mathbf{c}^4 & \mathbf{c}^4 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

O sistema de equações diferenciais global acoplado pode ser resumido

da seguinte forma:

$$\mathbf{C}\mathbf{v}(t) + \mathbf{K}\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (3.43)$$

\mathbf{C} e \mathbf{K} representam a matriz de acoplamento entre a fase sólida e fluida e a matriz rigidez equivalente, respectivamente, $\mathbf{v}(t)$ representa o vetor de velocidades nodais, e $\mathbf{F}(t)$ representa o vetor de forças externas.

3.2.2 Integração Temporal

O Sistema (3.43) é um sistema de equações diferenciais temporais ordinárias que deve ser integrado. Para tal, é necessário fazer algumas considerações acerca do termo que contém a função de relaxamento $G(t)$. Quando é utilizado o espectro discreto (Eq. 3.16) para representar esta função, a equação para o pseudo-deslocamento (Eq. 3.35) pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\eta}(t) = G_\infty \mathbf{d}(t) + \sum_{i=0}^{Nd} G_i \boldsymbol{\eta}_i(t) \quad (3.44)$$

onde:

$$\mathbf{d}(t) = \int_0^t \mathbf{v}(\tau) d\tau \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\eta}_i(t) = \int_0^t \mathbf{v}(\tau) e^{-(t-\tau)/v_i} d\tau \quad (3.45)$$

A equação (3.44) apresenta integrais temporais em $(0, t)$. Para poder calcular essa expressão corretamente em aproximações numéricas como elementos finitos é preciso transformá-la em uma expressão incremental de recorrência onde o processo de integração é reduzido a um intervalo de tempo $[t_n, t_{n+1}]$ que utiliza a informação acumulada em intervalos anteriores mediante as variáveis internas. Expandindo a expressão do pseudo-deslocamento em $(t + \Delta t)$ temos que:

$$\boldsymbol{\eta}(t + \Delta t) = G_\infty \int_0^{t+\Delta t} \mathbf{v}(\tau) d\tau + \sum_{i=0}^{Nd} G_i \int_0^{t+\Delta t} \mathbf{v}(\tau) e^{-(t+\Delta t-\tau)/v_i} d\tau \quad (3.46)$$

Para calcular a equação (3.46) vamos avaliar separadamente as duas parcelas. O primeiro termo será chamado de $\boldsymbol{\eta}^\infty(t + \Delta t)$ e o segundo termo de $\boldsymbol{\eta}_i(t +$

Δt). Calculando o primeiro termo temos que:

$$\boldsymbol{\eta}^\infty(t + \Delta t) = G_\infty \left[\int_0^t \mathbf{v}(\tau) d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{v}(\tau) d\tau \right] \quad (3.47)$$

A primeira integral corresponde por definição ao valor de $\mathbf{d}(t)$. A segunda integral pode ser aproximada usando a regra trapezoidal de integração:

$$\boldsymbol{\eta}^\infty(t + \Delta t) = G_\infty [d(t) + \Delta t ((1 - \zeta) \mathbf{v}(t) + \zeta \mathbf{v}(t + \Delta t))] \quad (3.48)$$

onde ζ é um parâmetro de integração e pode variar entre $0 \leq \zeta \leq 1$. Decompondo $\mathbf{v}(t + \Delta t) = \Delta \mathbf{v} + \mathbf{v}(t)$,

$$\boldsymbol{\eta}^\infty(t + \Delta t) = G_\infty [d(t) + \Delta t ((1 - \zeta) \mathbf{v}(t) + \zeta \Delta \mathbf{v})] \quad (3.49)$$

$$= G_\infty [d(t) + \Delta t \mathbf{v}(t)] + G_\infty \zeta \Delta t \Delta \mathbf{v} \quad (3.50)$$

Calculando o segundo termo da equação (3.46), obtêm-se:

$$\boldsymbol{\eta}_i(t + \Delta t) = G_i \left[\int_0^t \mathbf{v}(\tau) e^{-(t+\Delta t-\tau)/v_i} d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{v}(\tau) e^{-(t+\Delta t-\tau)/v_i} d\tau \right] \quad (3.51)$$

Novamente pode-se separar o cálculo em duas partes. Utiliza-se a propriedade da função exponencial:

$$\exp \left[\frac{t + \Delta t}{a} \right] = \exp \left[\frac{\Delta t}{a} \right] \exp \left[\frac{t}{a} \right] \quad (3.52)$$

Sendo assim, a primeira integral da equação (3.51) pode ser escrita como:

$$\int_0^t \mathbf{v}(\tau) e^{-(t+\Delta t)/v_i} d\tau = \int_0^t \exp \left[\frac{-\Delta t}{v_i} \right] \exp \left[\frac{-(t-\tau)}{v_i} \right] \mathbf{v}(\tau) d\tau \quad (3.53)$$

Mas $\exp \left[\frac{-\Delta t}{v_i} \right]$ é constante no intervalo e $\boldsymbol{\eta}_i(t) = \int_0^t \mathbf{v}(\tau) e^{-(t-\tau)/v_i} d\tau$. Logo:

$$\int_0^t \mathbf{v}(\tau) e^{-(t+\Delta t)/v_i} d\tau = \exp \left[\frac{-\Delta t}{v_i} \right] \boldsymbol{\eta}_i(t) \quad (3.54)$$

O segundo termo da equação (3.51) pode ser calculado substituindo os

integrandos na expressão e utilizando a regra trapezoidal:

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{v}(\tau) e^{-(t+\Delta t-\tau)/v_i} d\tau = \Delta t (1 - \zeta) \mathbf{v}(t) \exp \left[\frac{-(t + \Delta t - t)}{v_i} \right] + \zeta \mathbf{v}(t + \Delta t) \exp \left[\frac{-(t + \Delta t - t - \Delta t)}{v_i} \right] \Delta t \quad (3.55)$$

$$= \Delta t \left((1 - \zeta) \mathbf{v}(t) \exp \left[\frac{-\Delta t}{v_i} \right] + \zeta \Delta \mathbf{v} + \zeta \mathbf{v}(t) \right) \quad (3.56)$$

$$= \Delta t \left((1 - \zeta) \exp \left[\frac{-\Delta t}{v_i} \right] + \zeta \right) \mathbf{v}(t) + \zeta \Delta t \Delta \mathbf{v} \quad (3.57)$$

Juntando os resultados, (3.51) pode ser expressa como:

$$\boldsymbol{\eta}_i(t + \Delta t) = G_i \left[\exp \left[\frac{-\Delta t}{v_i} \right] \boldsymbol{\eta}_i(t) + \Delta t \left((1 - \zeta) \exp \left[\frac{-\Delta t}{v_i} \right] + \zeta \right) \mathbf{v}(t) + \zeta \Delta t \Delta \mathbf{v} \right] \quad (3.58)$$

Agora temos condições de calcular o pseudo-deslocamento no tempo $(t + \Delta t)$. Substituindo (3.50) e (3.58) em (3.46), obtém-se:

$$\boldsymbol{\eta}(t + \Delta t) = G_\infty [d(t) + \Delta t \mathbf{v}(t)] + G_\infty \zeta \Delta t \Delta \mathbf{v} + \sum_{i=0}^{Nd} G_i \left[\exp \left[\frac{-\Delta t}{v_i} \right] \boldsymbol{\eta}_i(t) + \Delta t \left((1 - \zeta) \exp \left[\frac{-\Delta t}{v_i} \right] + \zeta \right) \mathbf{v}(t) + \zeta \Delta t \Delta \mathbf{v} \right] \quad (3.59)$$

Isolando os termos conhecidos no tempo t ,

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\eta}}(t + \Delta t) &= G_\infty [d(t) + \Delta t \mathbf{v}(t)] + \\ &\sum_{i=0}^{Nd} G_i \left[\exp \left[\frac{-\Delta t}{v_i} \right] \boldsymbol{\eta}_i(t) + \Delta t \left((1 - \zeta) \exp \left[\frac{-\Delta t}{v_i} \right] + \zeta \right) \mathbf{v}(t) \right] \\ \boldsymbol{\eta}(t + \Delta t) &= \hat{\boldsymbol{\eta}}(t + \Delta t) + \left(\sum_{i=0}^{Nd} G_i + G_\infty \right) \zeta \Delta t \Delta \mathbf{v} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Uma que vez agora temos todas as variáveis expressas no tempo t

e temos como única incógnita $\Delta \mathbf{v}$, podemos resolver o sistema apresentado anteriormente (equação 3.43) para o tempo $(t + \Delta t)$:

$$\mathbf{C}\mathbf{v}(t + \Delta t) + \mathbf{K}\hat{\boldsymbol{\eta}}(t + \Delta t) = \mathbf{F}(t + \Delta t) \quad (3.61)$$

$$\mathbf{C}[\mathbf{v}(t) + \Delta \mathbf{v}] + \mathbf{K} \left[\hat{\boldsymbol{\eta}}(t + \Delta t) + \left(\sum_{i=0}^{Nd} G_i + G_\infty \right) \right] \zeta \Delta t \Delta \mathbf{v} = \mathbf{F}(t + \Delta t) \quad (3.62)$$

$$[\mathbf{C} + G(0)\zeta\Delta t\mathbf{K}]\Delta \mathbf{v} = \mathbf{F}(t + \Delta t) - \mathbf{C}\mathbf{v}(t) - \mathbf{K}\hat{\boldsymbol{\eta}}(t + \Delta t) \quad (3.63)$$

Essa fórmula permite que a integral hereditária que rege a função de relaxamento possa ser calculada usando valores somente do passo anterior diminuindo o tempo de processamento e a memória utilizada.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS E EXPERIMENTAIS

Neste capítulo são mostrados e discutidos os resultados numéricos, os testes experimentais e de identificação de parâmetros. Os testes experimentais tem um caráter fundamentalmente qualitativo dado que este trabalho visa avaliar os procedimentos necessários para tais testes sem compromisso com um resultado específico. A mesma idéia vale para a identificação de parâmetros onde o maior objetivo é testar a funcionalidade do algoritmo implementado.

4.1 VALIDAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO DOS MODELOS E ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Nesta secção são apresentados vários resultados numéricos obtidos das implementações realizadas no código GNU Octave. O Octave é uma plataforma de desenvolvimento de códigos numéricos similar ao MATLAB® porém de distribuição gratuita. Os diferentes testes buscam validar a implementação numérica através de exemplos disponíveis na literatura e servem como base para a discussão das propriedades da cartilagem articular. Inicia-se com a avaliação do comportamento do modelo bifásico poroelástico (BPE) nos casos confinado e não confinado. Acrescenta-se posteriormente o efeito viscoelástico na matriz sólida para testar o modelo bifásico poroviscoelástico (BPVE). Realiza-se finalmente uma análise de sensibilidade aos parâmetros do modelo, assim como testes de comparação entre os modelos BPE e BPVE.

4.1.1 Modelo Bifásico Poroelástico - Ensaio Confinado

O exemplo a seguir mostra a simulação de um ensaio de compressão confinado (Fig. 4.1). Esta simulação permite validar o código numérico uma vez que a solução analítica está disponível para esse problema [19] assim como mostrar o efeito das variações de alguns parâmetros de solução. Nesse ensaio, a amostra cilíndrica é colocada em uma câmara fechada na qual é permitida a expulsão de fluido pela parte superior, através de uma placa porosa e o carregamento é aplicado uniaxialmente. Devido às características do ensaio, o tecido foi modelado como sendo axissimétrico com 17 elementos de 4 nós como mostrado na Figura (4.2). A carga foi aplicada mediante a imposição de um deslocamento linearmente crescente até atingir uma deformação $\epsilon_0 = 5\%$

em $t_0 = 500s$, mantendo este deslocamento constante por mais 1500 segundos. Os dados geométricos e do material foram retirados de Spilker et al. [41]: $d = 6,35$ mm, $h = 1,78$ mm, $\phi^s = 0,17$, $\kappa = 0,76 \times 10^{-14} m^4/Ns$, $\lambda_s = 0,1$ MPa, $\mu_s = 0,3$ MPa e o parâmetro de penalização $\beta = 10^{14}$. O parâmetro da regra do trapézio no processo de integração temporal foi tomado $\zeta = 0,5$, tornando a regra de integração incondicionalmente estável. Ver [41] para maiores detalhes sobre critérios de convergência e estabilidade.

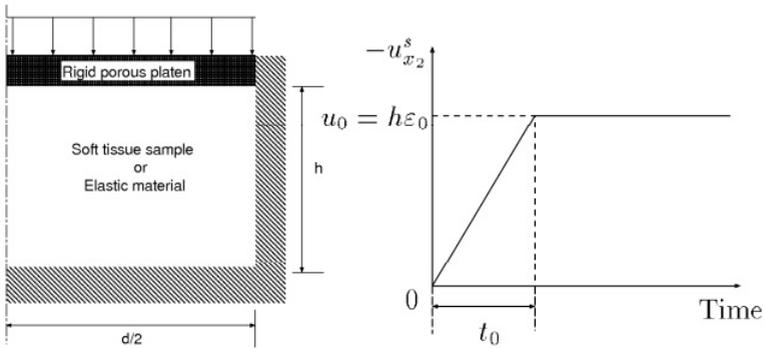


Figura 4.1: Compressão confinada - condições de contorno

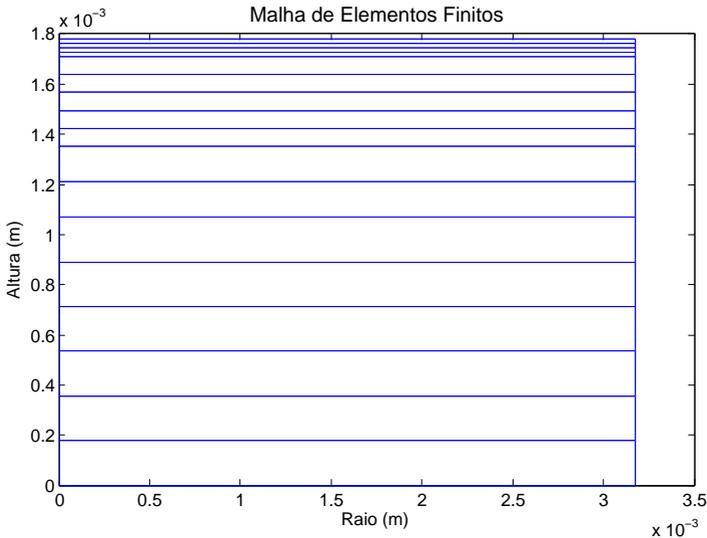


Figura 4.2: Malha de elementos finitos para o problema confinado

A Figura (4.3) mostra o efeito da variação do incremento de tempo Δt na velocidade relativa do fluido para uma profundidade de 4% a partir da superfície carregada. Uma vez que qualquer valor de Δt produzirá uma solução estável (pela escolha da regra de integração), o tamanho do incremento irá influenciar a convergência. Entretanto, descontinuidades na velocidade para $t = 0$ e $t = t_0$ podem causar oscilações na solução, as quais são mais acentuadas para valores maiores de Δt . Nesse caso, a variação do tamanho de Δt foi testada para o instante inicial, onde o corpo é súbitamente carregado. Para $\Delta t = 1s$, a solução numérica convergiu à solução exata. Para valores maiores, as oscilações cessaram após $t = 50$ s e todos os casos convergiram à solução exata. Os resultados mostraram que para casos onde hajam grandes descontinuidades nas condições de contorno, maior precisão será requerida e portanto Δt de menor valor. Diferentes valores para Δt podem ser implementados sem maiores dificuldades.

A sensibilidade dos resultados à variação do parâmetro de penalização β pode ser visto na Figura (4.4). A pressão foi escolhida para comparação porque é o parâmetro mais sensível em relação à penalização. Observa-se nos resultados que quando o valor de β é muito pequeno, a solução da pressão produz erros significativos. A medida que o valor de β cresce, a solução numérica se aproxima da solução exata. Porém, perante valores de penalização excessivamente altos (nesse caso, $\beta = 10^{20}$) a contribuição do termo de penalidade irá mal-condicionar as equações acopladas invalidando a solução numérica. Observa-se que o valor de penalização de $\beta = 10^{14}$ leva, neste exemplo a resultados praticamente coincidentes com a solução analítica.

Na Figura (4.5) podemos ver a variação da velocidade relativa do fluido em relação à profundidade para um tempo de 200 s. Nota-se uma distribuição linear proporcional as coordenadas ao longo da espessura.

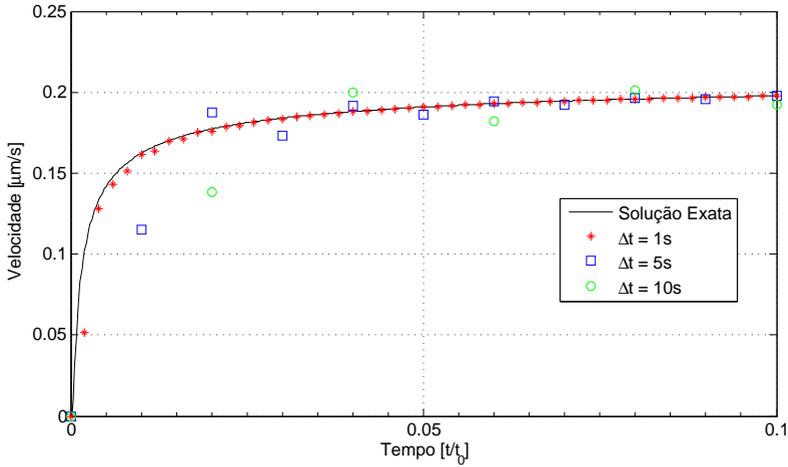


Figura 4.3: Efeito da variação do incremento de tempo Δt na velocidade relativa do fluido em 4 % de profundidade

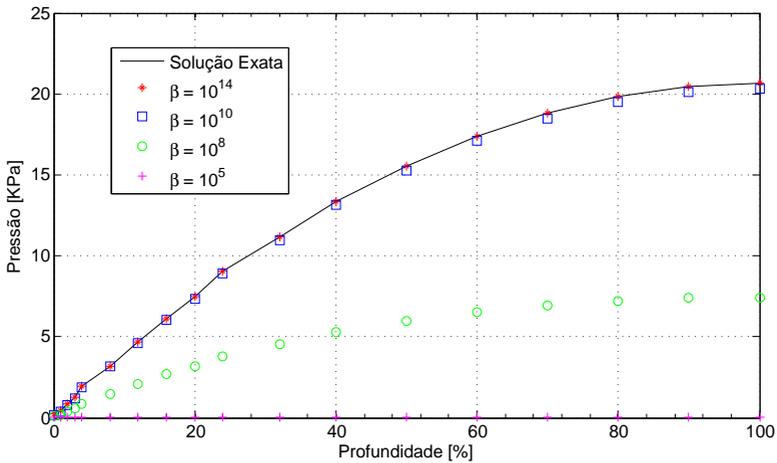


Figura 4.4: Efeito da variação do parâmetro de penalização β na pressão para $t = 300\text{s}$

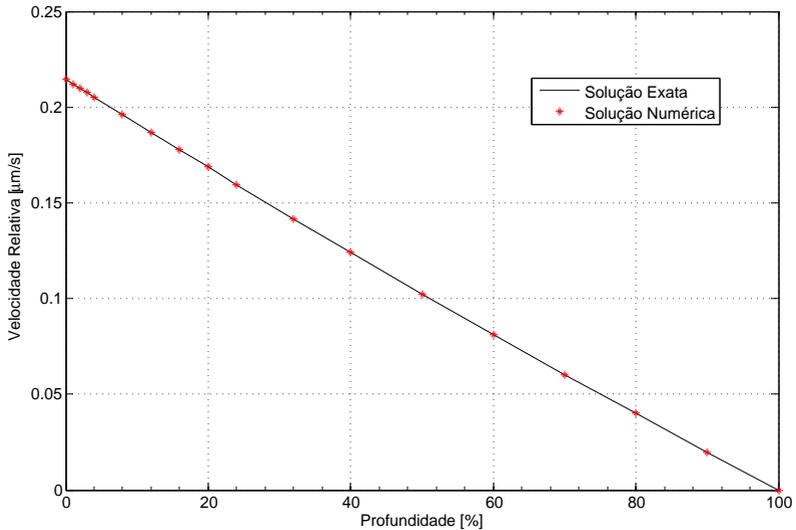


Figura 4.5: Variação da velocidade relativa do fluido com a profundidade para $t = 200s$

4.1.2 Modelo Bifásico Poroelástico - Ensaio Não Confinado

No teste de compressão não-confinada, a amostra (neste caso, cilíndrica) é colocada entre duas placas impermeáveis imersa em fluido. A placa inferior é fixa enquanto que na placa superior é aplicado um deslocamento prescrito (Fig. 4.6). As superfícies laterais são livres para o escoamento do fluido. O comportamento é axialmente simétrico e portanto simulado com um modelo de sólido de revolução. A malha de elementos finitos é mostrada na Figura (4.7), onde podemos ver um refino da malha nas regiões próximas a placa superior e na lateral livre. Foram utilizados 140 elementos axissimétricos de 4 nós, em um total de 165 nós. Os dados do material e a malha de elementos finitos foram retiradas de [41]: $d = 6,35$ mm, $h = 2,5$ mm, $\phi^s = 0,2$, $\kappa = 0,76 \times 10^{-14} m^4/Ns$, $\lambda_s = 0,1$ MPa, $\mu_s = 0,2$ MPa, parâmetro de penalização $\beta = 10^{14}$ e histórico de carregamento idêntico ao problema confinado com $\varepsilon_0 = 5\%$ e $t_0 = 500$ s. Estudos experimentais da compressão não-confinada de tecidos moles [19, 25] sugerem que o efeito da interface placa-amostra interferem diretamente na resposta do tecido. A solução analítica para este problema só existe para a interface placa-

amostra perfeitamente lubrificada. Logo, o modelo de elementos finitos pode ser usado para estudar o efeito da interface considerando dois casos diferentes: interface placa-amostra perfeitamente adesiva (PAUC) e interface placa-amostra perfeitamente lubrificada (PLUC).

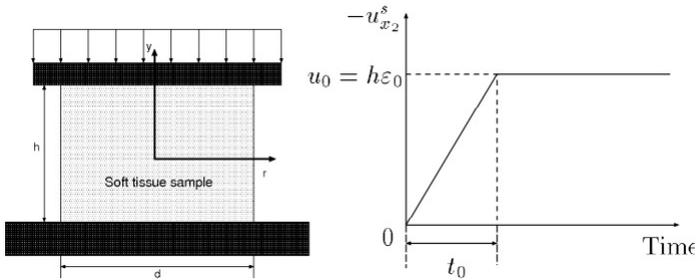


Figura 4.6: Condições de contorno para o problema não confinado

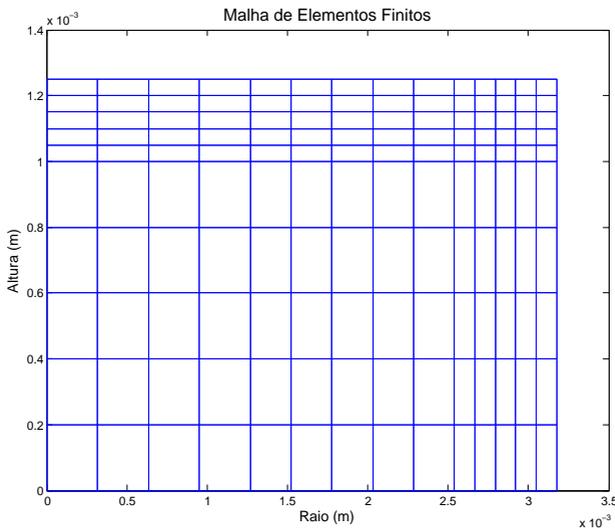


Figura 4.7: Malha de elementos finitos para o problema não confinado

A Figura (4.8) mostra o resultado da força de reação ao longo do tempo. Nota-se que a interface com adesão aumenta o pico da força de reação e diminui o tempo de relaxação. A variação da pressão, p , com o tempo é mostrada na Figura 4.9, no meio da amostra a 5% do raio. Nota-se que novamente na interface adesiva a pressão alcança valores maiores e diminui

mais rapidamente durante o período de relaxação.

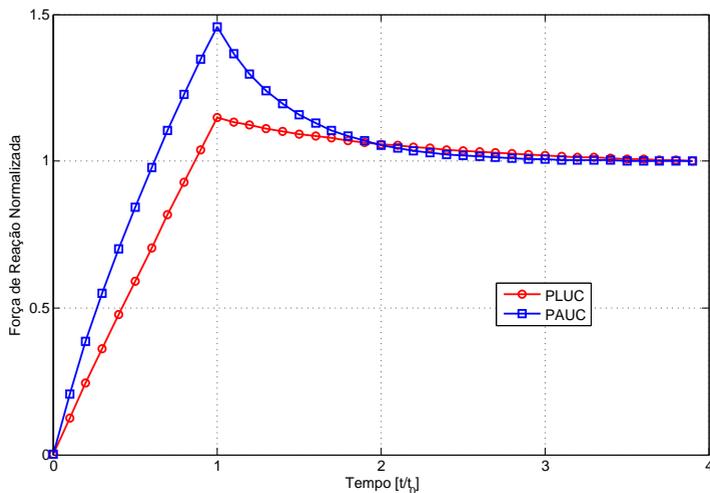


Figura 4.8: Força de reação para o problema de compressão não confinada

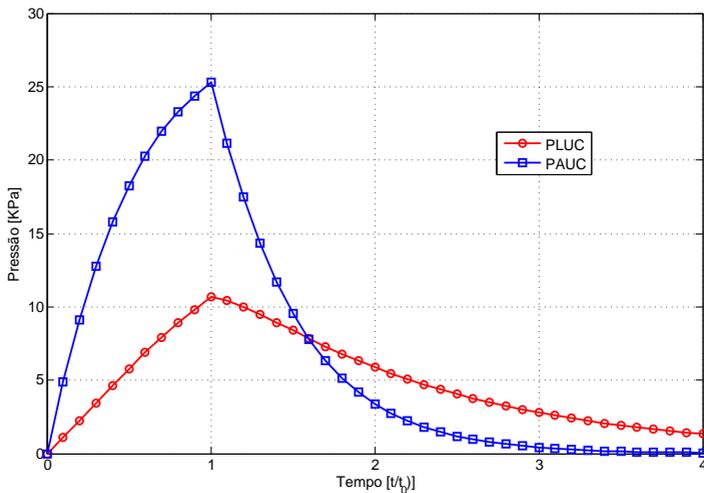


Figura 4.9: Variação da pressão com o tempo a 5% do raio no meio altura da amostra

Na Figura (4.10), a história da tensão, σ_z^s , na posição $y = h/2$ (meia da altura da amostra) mostra uma distribuição uniforme em relação ao raio para a interface lubrificada e uma distribuição não-uniforme para a interface adesiva. Ou seja, para uma interface lubrificada a tensão não varia conforme a variação do raio. A Figura (4.11) apresenta a distribuição radial da deformação, ε_r , na meia altura da amostra mostrando uma variação maior da deformação para o caso de adesão perfeita. Este estudo comparativo entre os dois tipos de condição de contorno mostra grande sensibilidade dos resultados em função desta escolha. Como a condição real no ensaio não corresponde exatamente a nenhum dos casos extremos, sendo guiado por uma condição de atrito lubrificado, a caracterização desta condição de contorno é uma fonte de diferenças entre simulações e resultados experimentais.

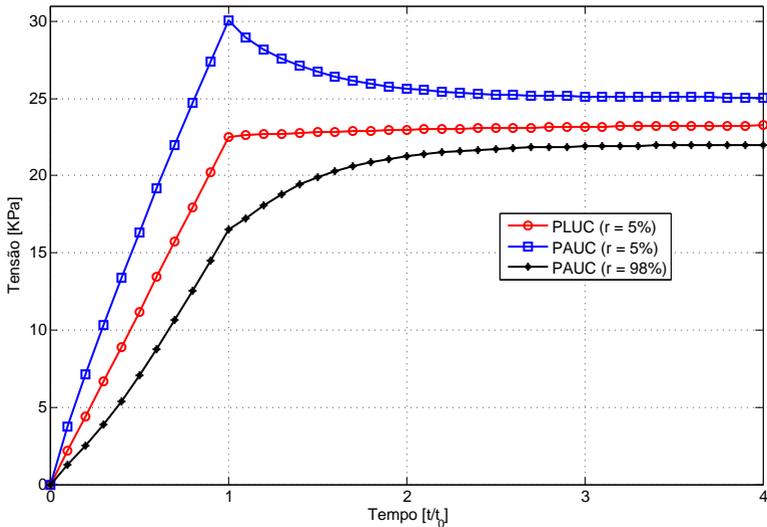


Figura 4.10: Variação da tensão normal com o tempo no meio da altura da amostra

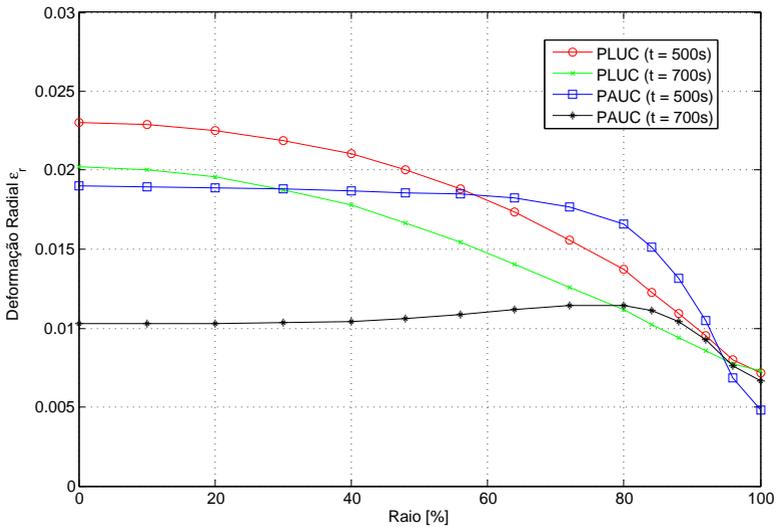


Figura 4.11: Distribuição radial da deformação ε_r no meio da altura da amostra para tempos $t = 500s$ e $t = 700s$

4.1.3 Modelo Bifásico Poroviscoelástico - Ensaio Confinado

O mesmo teste de relaxamento de tensão usado na secção (4.1.1) foi aplicado por Suh et al. para comparar os modelos poroelástico e poroviscoelástico [6]. A grande diferença desses modelos é a incorporação do efeito viscoelástico na matriz sólida, devido a natureza viscosa de seus componentes (fibras de colágeno e proteoglicanas). As seguintes propriedades geométricas e do material foram usadas: $d = 6,35$ mm, $h = 1,78$ mm, $\phi^s = 0,2$, $\kappa = 2 \times 10^{-15} m^4 / Ns$, $\lambda_s = 0,1$ MPa, $\mu_s = 0,3$ MPa, parâmetro de penalização $\beta = 10^{14}$. A história de carregamento segue o mesmo padrão anteriormente descrito. Impõe-se um deslocamento da placa superior linearmente crescente, comprimindo o componente até atingir uma deformação $\varepsilon_0 = 5\%$ em tempo $t_0 = 10$ s, mantendo a deformação constante após esse período. Os parâmetros de viscosidade do material sólido escolhidos foram: $c = 1$, $\tau_1 = 0,001$ s, $\tau_2 = 10$ s e os parâmetros discretos obtidos das equações (3.17, 3.18), $G_0 = 10,21$, $\bar{G} = 1,84$, $N_d = 4$. A Figura (4.12) ilustra a função de relaxamento discreta.

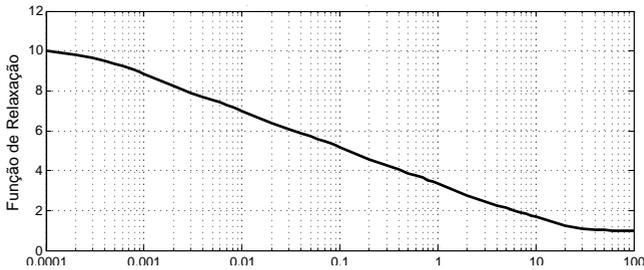


Figura 4.12: Função de relaxamento discreta

A Figura (4.13) mostra a mudança temporal da tensão σ_z em $z/h = 0,98$ e $r = 5\%$ durante o relaxamento de tensão. No relaxamento de tensão, o modelo BPVE produz uma tensão sólida muito maior do que o modelo BPE, devido ao acréscimo do comportamento viscoso na matriz sólida. Entretanto, os dois modelos atingem o mesmo valor de tensão no equilíbrio, tendo o modelo BPVE menor tempo de relaxamento. Na Figura (4.14) vemos a variação espacial da velocidade relativa do fluido em $t_0 = 10$ s durante o relaxamento de tensão. O modelo BPVE apresentou maiores valores de velocidade que o modelo elástico.

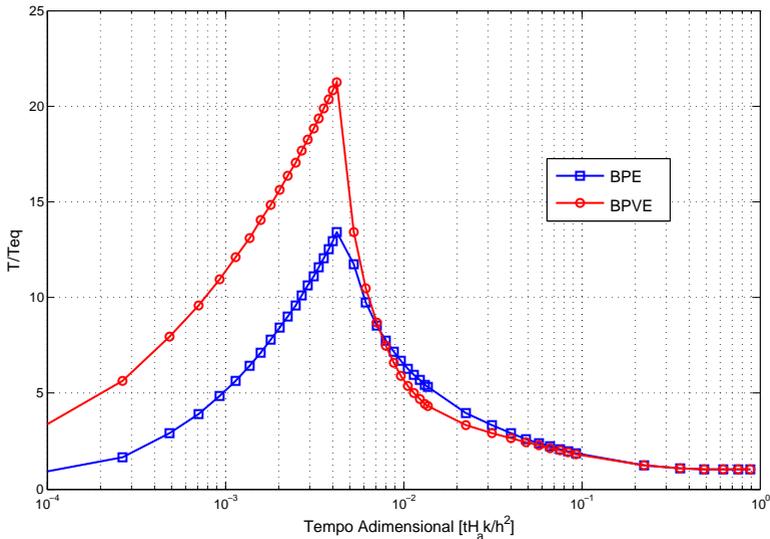


Figura 4.13: Variação temporal da tensão σ_z em $z/h = 0,98$ e $r = 5\%$ durante o relaxamento de tensão

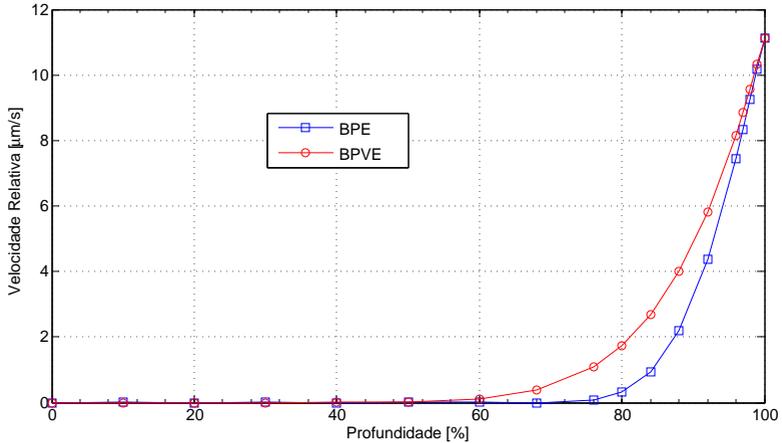


Figura 4.14: Variação espacial da velocidade relativa do fluido em $t_0 = 10$ s para $r = 5\%$ durante o relaxamento de tensão

4.1.4 Modelo Bifásico Poroviscoelástico - Ensaio Não Confinado

Visando comparar os modelos BPE e BPVE, o mesmo autor do teste não confinado visto na Seção (4.1.2) repetiu o teste de relaxamento de tensão [11] através da aplicação de um deslocamento prescrito. O comportamento viscoelástico dos constituintes da matriz sólida foi introduzido afim de reproduzir a viscoelasticidade intrínseca independente do escoamento. Foi usada a mesma malha de elementos finitos que do exemplo (4.1.2) e os seguintes valores geométricos e de material: $d = 3$ mm, $h = 1,22$ mm, $\phi^s = 0,2$, $\kappa = 5 \times 10^{-15} m^4/Ns$, $\lambda_s = 0,01$ MPa, $\mu_s = 0,09$ MPa, parâmetro de penalização $\beta = 10^{14}$ e história de carregamento com $\varepsilon_0 = 10\%$ e $t_0 = 15$ s. Os parâmetros viscosos escolhidos foram: $\tau_1 = 0,02$ s, $\tau_2 = 13$ s e $\bar{G} = 2,8$. O modelo BPE produziu um menor pico da força de reação e um tempo de relaxamento menor, mostrado na Figura (4.15) embora tenha atingido o mesmo valor no equilíbrio ($t = \infty$). Nota-se que o modelo BPE fez uma ótima estimativa para a resposta do longo termo de relaxamento, porém o modelo subestimou o valor máximo da força de reação durante a resposta do termo curto de relaxamento. Observações parecidas foram encontradas em outros trabalhos [11]. A Figura (4.16) mostra a distribuição de pressão no tempo ($t_0 = 15s$) para os modelos BPE e BPVE. O modelo poroviscoelástico produziu um pico maior de pressão (máximo de 122 KPa) que o modelo elástico (máximo de 44 KPa).

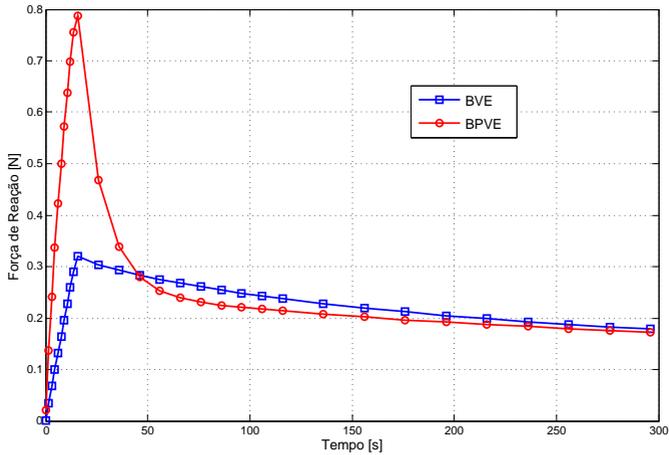


Figura 4.15: Comparação da força de reação entre os modelos BPE e BPVE durante relaxamento de tensão

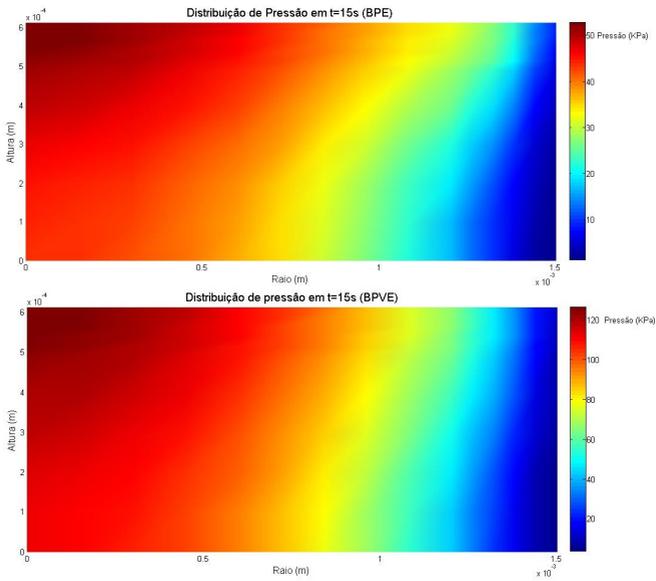


Figura 4.16: Distribuição da pressão no tempo $t = 15s$ para os modelos BPE e BPVE

4.1.5 Análise de Sensibilidade

Para avaliar a influência dos parâmetros viscoelásticos no comportamento do tecido, uma análise de sensibilidade foi feita para o caso confinado com relaxamento de tensões. Condições de contorno idênticas às usadas na Seção (4.1.3) foram utilizadas, assim como os mesmos parâmetros e a mesma malha de elementos finitos. A Figura (4.17) mostra o efeito da variação do parâmetro c , na resposta da tensão sólida normalizada, adimensionalizada pelo fator $h^2/H_a k$. Quanto maior o valor de c , maior o pico de tensão encontrado e menor o tempo de relaxamento, devido ao aumento do efeito viscoelástico na matriz sólida. Nota-se que $c = 0$, corresponde ao modelo BPE. Na Figura (4.18) temos demonstrado o efeito da taxa de compressão. Quanto mais lentamente é aplicado o carregamento, menor o pico de tensão, para um mesmo deslocamento final. Finalmente, a Figura (4.19) mostra o efeitos da variação dos parâmetros de relaxamento τ_1 e τ_2 no valor da tensão. Quanto maior for a distância entre os termos, maior o efeito viscoso e portanto, maior o pico de tensão encontrado.

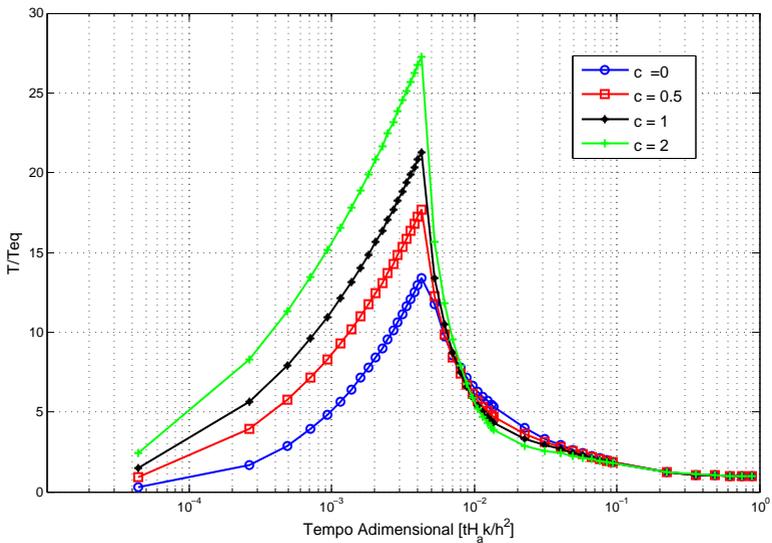


Figura 4.17: Efeito do parâmetro c no relaxamento de tensões para o caso confinado

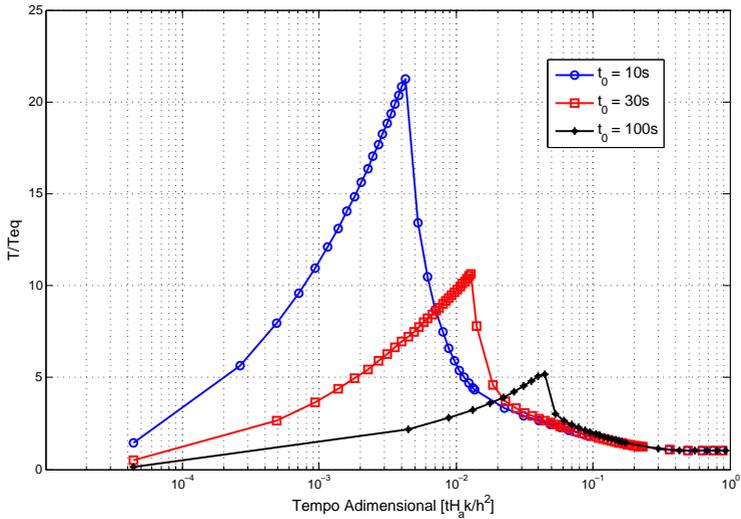


Figura 4.18: Efeito da taxa de compressão no relaxamento de tensões para o caso confinado

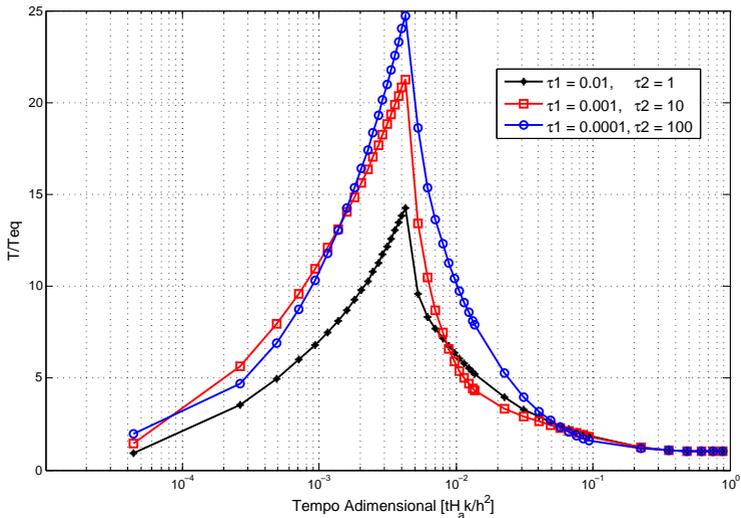


Figura 4.19: Efeito dos parâmetros τ_1 e τ_2 no relaxamento de tensões para o caso confinado

4.2 TESTES EXPERIMENTAIS

Afim de se obter experimentalmente o comportamento mecânico da CA, foram feitos ensaios mecânicos utilizando cartilagem suína. Essa cartilagem foi escolhida pela sua disponibilidade e por ser semelhante a cartilagem humana. Testes de compressão não confinada foram feitos em um analisador dinâmico mecânico (DMA) Q800 da TA *Instruments*.

Análise dinâmica mecânica (também conhecida como espectroscopia dinâmica mecânica) é uma técnica utilizada para estudar e caracterizar materiais. É muito útil para o estudo do comportamento viscoelástico de polímeros. Uma tensão senoidal é aplicada e a deformação no material é medida, permitindo o cálculo do módulo complexo. A temperatura da amostra, ou a frequência da tensão são muitas vezes variadas, conduzindo a variações no módulo complexo. Esta abordagem pode ser utilizada para localizar a temperatura de transição vítrea do material, bem como para identificar as transições correspondentes a outros movimentos moleculares. A instrumentação de um DMA consiste de um sensor de deslocamento tal como um transdutor diferencial linear variável, que mede a alteração na tensão, como resultado da sonda do instrumento que se desloca através de um núcleo magnético, um sistema de controle de temperatura ou de fornalha, um motor de acionamento (um motor linear para o carregamento de carga da sonda que fornece carregamento para a força aplicada), um suporte de eixo de acionamento e sistema de orientação para funcionar como um guia para a força do motor para a amostra, e as garras de amostra a fim de manter a amostra a ser testada. Um esquema geral dos componentes principais de um aparelho de DMA é mostrado na Figura (4.20). Uma garra de compressão submersa (Fig. 4.20) foi utilizada permitindo a amostra ficar imersa em soro fisiológico reproduzindo assim condições de condicionamento similares com as condições reais encontrados no joelho humano. Como não existem normas técnicas para guiar o ensaio, o procedimento experimental foi configurado de acordo com as descrições presentes na literatura [9, 7, 8].

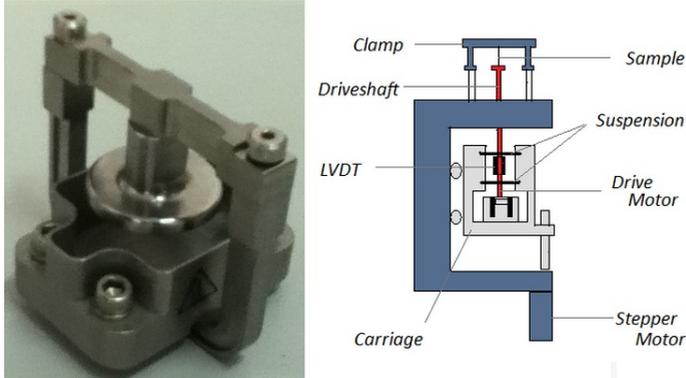


Figura 4.20: Garra de compressão submersa e componentes do DMA.



Figura 4.21: Máquina DMA Q800

4.2.1 Procedimento Experimental

Os primeiros testes experimentais realizados tiveram o objetivo de avaliar se a instrumentação do ensaio permitia excitar e mensurar comportamentos viscoelásticos na cartilagem. Escolheu-se, para isto, um teste com 4 ciclos com controle de força de compressão que cresce linearmente até uma amplitude de 16N, decrescendo também linearmente. Cada ciclo possui uma duração de 120s com carregamentos de carga-descarga de amplitude de 16 N com duração de cada ciclo de 120 segundos. Foi aplicada uma pré-carga no

valor de 0,01 N.

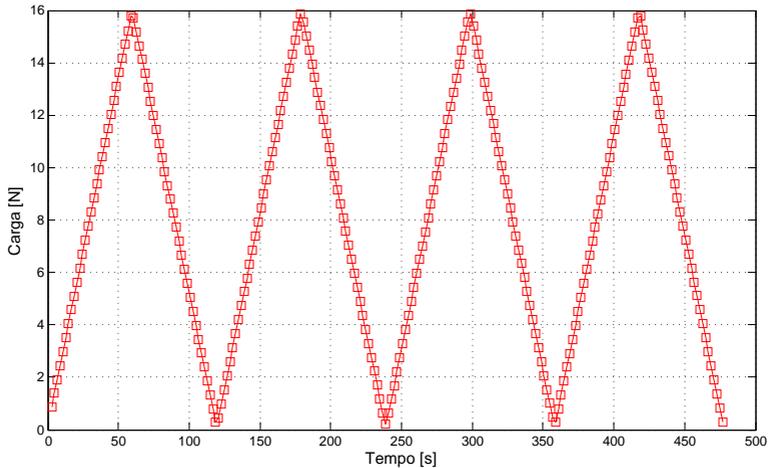


Figura 4.22: Curva carga x tempo

As amostras de cartilagem suína foram retiradas da cabeça do fêmur congelada com o auxílio de um bisturi e recongeladas a -22°C até o dia do ensaio. Duas amostras foram retiradas para os testes, tendo as seguintes dimensões, medidas com o auxílio de um paquímetro: a primeira (Amostra 1) $9,02 \times 8,58$ mm e 2,70 mm de altura e a segunda (Amostra 2) $8,41 \times 10,18$ mm e 1,96 mm de altura. A diferença de altura entre as duas amostras se deve ao fato de que a primeira amostra tem uma porção maior do osso subcondral. Para tentar tornar a face inferior a mais plana possível, lixou-se uma porção do osso subcondral com uma lixa nº 220, até se conseguir uma superfície plana. A Figura (4.23) mostra a curva força x deslocamento do ensaio onde claramente se consegue ver o efeito viscoelástico do material no momento de descarga da força.

Diante da boa resposta encontrada quanto ao efeito viscoelástico, novos testes foram idealizados de forma que esses pudessem ser reproduzidos numericamente. Assim, procurou-se obter um melhor controle sobre a uniformidade e geometria da amostra. Foram retiradas 6 amostras de cartilagem articular da cabeça do fêmur (Fig. 4.25) de um suíno e congeladas a -22°C até o dia do teste. Um punção para biópsia dérmica de 4 mm de diâmetro (Fig. 4.24) foi utilizado para retirar as amostras no formato cilíndrico, condizentes com o modelo de elementos finitos axissimétrico.

O primeiro teste realizado foi um ensaio de carga-descarga, na tenta-

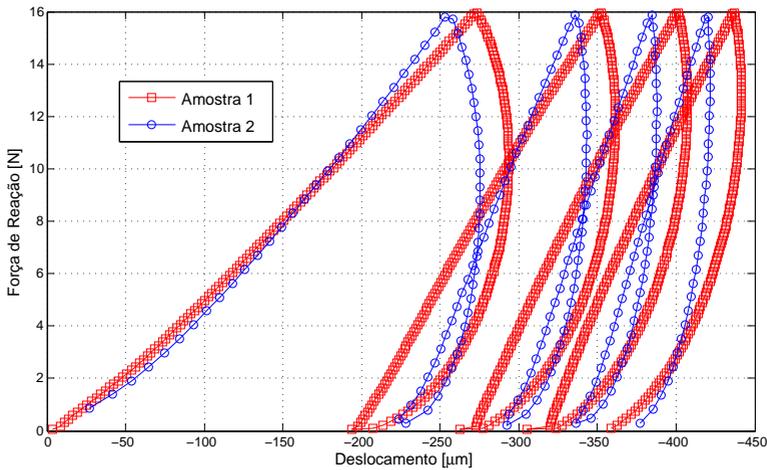


Figura 4.23: Curva força x deslocamento para compressão não confinada - amostra cúbica.



Figura 4.24: Punção para biópsia dérmica com 4 mm de diâmetro.

tiva de se obter uma curva similar com a obtida no primeiro teste, no que diz respeito a resposta viscoelástica. Foram aplicados 4 ciclos de carga-descarga no valor de 16N, com velocidade de aplicação de 16N/min. A amostra tinha 2,75 mm de diâmetro e 1,5 mm de altura. A Figura (4.26) mostra a curva força x deslocamento para os quatro ciclos. Nota-se que ao final do segundo e terceiro descarregamento da amostra 1, quando o valor da força chega próximo a zero, ocorre uma descontinuidade na curva. Interpreta-se que, devido a viscosidade, ocorre descarregamento total antes da placa superior fazer retorno completo a sua posição original. Verificou-se um comportamento semelhante das amostras cúbica e cilíndrica quando submetidas a ciclos de carga e descarga. Como esse tipo de teste não é usualmente utilizado para o processo de identificação de parâmetros, em um primeiro momento, a curva obtida não será utilizada para esse propósito.

Testes de relaxamento de tensões são os mais utilizados para a



Figura 4.25: Cabeça do fêmur de um suíno e as amostras retiradas.

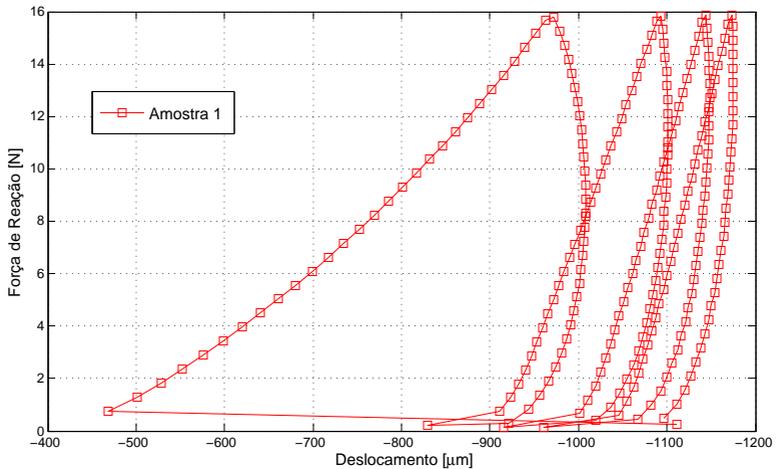


Figura 4.26: Curva força x deslocamento para compressão não confinada - amostra cilíndrica

identificação de parâmetros da cartilagem articular. O objetivo era obter uma curva que possa ser utilizada no processo de identificação dos parâmetros do modelo em estudo, uma vez que a amostra utilizada é cilíndrica e condiz com o modelo axissimétrico implementado. Foram usadas 3 amostras, retiradas da cabeça do fêmur de 3 suínos diferentes, conforme mostrado na Tabela (4.1). As diferenças encontradas nas dimensões das amostras mostra que o método

de retirada das mesmas deve ser aprimorado, para conseguir repetibilidade do teste. Inicialmente, foi utilizada uma pré-carga de 0,01N e deixado 60 segundos em repouso para estabilização da amostra.

Tabela 4.1: Amostras usados no teste de relaxamento de tensões

	Diâmetro [mm]	Altura [mm]
Amostra 1	3.35	1.2
Amostra 2	3.25	1.45
Amostra 3	3.5	1.2

Em seguida, foi aplicada uma rampa de deformação de 5% em 60 segundos (em procedimento idêntico ao explicado anteriormente) e depois manteve-se o tecido com a mesma deformação e monitorou-se a força de reação. A Figura (4.27) mostra a curva força de reação versus tempo para o teste de relaxamento de tensões em compressão não confinada. Todas as amostras apresentaram o comportamento típico de um tecido cartilaginoso articular no teste de relaxamento de tensões. Nota-se, entretanto, que as amostras apresentaram diferentes picos de força e tempo de relaxamento. Isto é totalmente esperado, pois as amostras não foram retiradas do mesmo joelho e nem da mesma região deste, além de não terem as mesmas dimensões. Os presentes resultados devem assim serem analisados como prospectivos, sem o intuito de identificar propriedades específicas de uma população. Este será objeto de trabalhos futuros para o quais deverá ser feito uma análise estatística.

4.3 IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS

O problema de identificação de parâmetros pode ser abordado como um problema de otimização onde o objetivo é achar a mínima diferença entre o comportamento experimental e o comportamento calculado pelo modelo numérico. Para isto, devemos conhecer o histórico de deslocamentos e da carga aplicada, obtidos pela máquina de ensaio. Neste trabalho, o problema numérico é resolvido pelos modelos apresentados, aliado a um algoritmo de otimização onde a função objetivo é definida como a norma da diferença entre a força de reação mensurada experimentalmente e a calculada numericamente

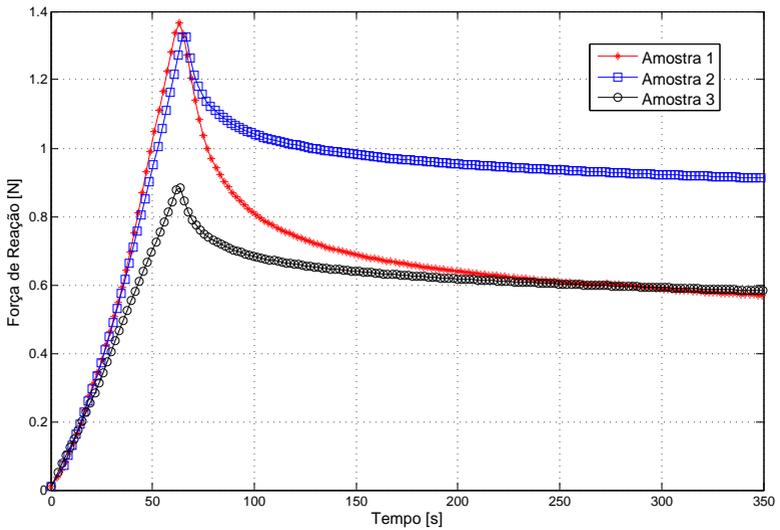


Figura 4.27: Curva força de reação versus tempo para o relaxamento de tensões em compressão não confinada

na interface placa-amostra, como definido abaixo:

$$\Psi = \sum_{t=1}^{t_f} (F^t(X) - R^t)^2 \quad (4.1)$$

onde t_f é o índice do último incremento de carga, F^t é a carga aplicada no instante t calculada numericamente, R^t é a força experimental no mesmo instante t , X é o vetor de parâmetros do material e Ψ é a função objetivo.

A função objetivo foi implementada e acoplada ao modelo poroviscoelástico apresentado na Seção (3.2.2) e é posteriormente minimizada por um algoritmo de otimização. O critério de parada é definido através de um valor mínimo para a variação da função Ψ [48]. É apresentado a seguir um esquema do algoritmo utilizado para o cálculo da função objetivo:

Tabela 4.2: Algoritmo da função objetivo

Definir variáveis de projeto $x_0 = f(\kappa, \lambda, \mu, \bar{G}, \tau_s \text{ e } \tau_l)$

Enquanto $\Delta\Psi \leq \text{TolFun}$

Loop (tempo) $t \in \{t_0, t_1, \dots, t_f\}$

para $t = t_0$ até t_f

Ler **R** e **u**

Loop (elementos) $e \in \{1, 2, \dots, n\}$

para $e = 1$ to n

Loop (pontos de integração) $i \in \{1, 2, \dots, nip\}$

para $i = 1$ to nip

Calcular $\boldsymbol{\eta}$ (Eq. 3.60)

Calcular $\boldsymbol{\varepsilon}^s = \mathbf{B}\boldsymbol{\eta}$ (Eq. 3.30)

Calcular $\boldsymbol{\sigma}^s$ nos respectivos pontos de integração (Eq. 3.5)

final loop (pontos de integração)

Calcular o vetor de forças internas elementar $\mathbf{f}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^s d\Omega$

Salvar \mathbf{f}^e no vetor de forças internas global \mathbf{F}^t

final loop (elementos)

Calcular e salvar $\Psi_t = \left(\sum_{i=1}^n F_i^t - R^t \right)^2$ onde n é o número de nós da
fronteira de aplicação da carga.

final loop (incremento de tempo)

Calcular $\Psi = \sum_t \Psi_t$

Fim **Enquanto**

4.3.1 Testes de Validação do Procedimento de Identificação

Para minimizar a função objetivo anteriormente mostrada foi utilizado um algoritmo de ponto interior, baseado no método do gradiente conjugado com barreiras. É importante ressaltar entretanto, que os mínimos obtidos no processo de identificação foram todos pontos interiores. Para maiores detalhes consultar [48, 49, 50]. Para validar o algoritmo de identificação de parâmetros, o deslocamento e a força de reação obtidos da simulação mostrada na Seção (4.1.4) foram admitidos como "dados experimentais" e inseridos como dados de entrada do problema de otimização. Partindo de parâmetros de material aleatórios, o objetivo é encontrar os mesmos parâmetros usados na simulação. Primeiro, utilizou-se o modelo poroelástico (BPE) com 3 incógnitas a definir: a permeabilidade κ , e as constante de Lamé, λ e μ . Depois utilizou-se dos resultados do modelo BPE e através do modelo poroviscoelástico (BPVE) foi feita a identificação das outras 3 variáveis adicionais além das 3 já citadas: a magnitude do espectro, \bar{G} , e os tempos de relaxamento curto e longo, τ_s e τ_l . Por último, foi feita a identificação com o modelo BPVE das 6 variáveis de forma simultânea. A Figura (4.28) mostra a curva do modelo BPE no teste de compressão não confinada no relaxamento de tensões. Na Tabela 4.3 são mostrados os parâmetros encontrados e o valor do erro em relação ao valor esperado. O valor máximo encontrado para o erro relativo foi de 10% para o módulo volumétrico. Entretanto, o ajuste de curva mostra que esse alto valor do erro não prejudicou o processo de identificação. Foi observado que quanto menor a tolerância usado no critério de parada, mais os resultados se aproximam do esperado, para um tempo de processamento muito maior. Aqui são apresentados os resultados para uma tolerância de 10^{-8} .

Tabela 4.3: Parâmetros elásticos no ajuste do modelo BPE

Parâmetro	Numérico	Ajuste	Erro Relativo (%)
Permeabilidade κ	$5,000 \times 10^{-15}$	$4,500 \times 10^{-15}$	10
Módulo Volumétrico λ	$0,0100 \times 10^6$	$0,0090 \times 10^6$	10
Módulo de Cisalhamento μ	$0,0900 \times 10^6$	$0,0895 \times 10^6$	0,55

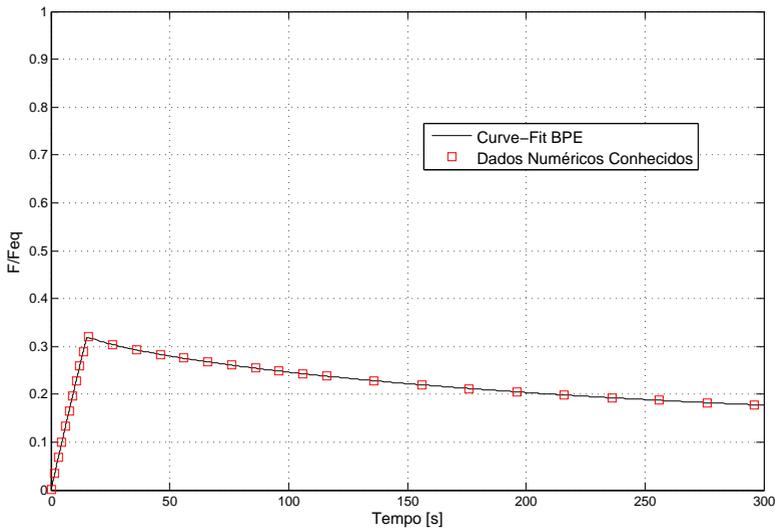


Figura 4.28: Ajuste de curva do modelo BPE no relaxamento de tensões em compressão não confinada.

O próximo passo foi validar o algoritmo de identificação de parâmetros quando o ajuste de dados é feito com o modelo BPVE. A Figura (4.29) mostra o ajuste de curva do modelo BPVE no teste de compressão não confinada no relaxamento de tensões. Foram usados os valores encontrados no ajuste do modelo BPE como dados de entrada. Na Tabela (4.4) são mostrados os parâmetros viscoelásticos encontrados e o valor do erro em relação ao valor esperado. O erro relativo máximo encontrado foi de 25%. Apesar do valor encontrado ser considerado alto, não comprometeu o ajuste da curva.

Tabela 4.4: Parâmetros viscoelásticos no ajuste do modelo BPVE

Parâmetro	Numérico	Ajuste	Erro Relativo (%)
Magnitude do Espectro \vec{G}	2,8000	2,6733	4,5
Tempo de Relaxamento Curto τ_s	0,0200	0,0150	25
Tempo de Relaxamento Longo τ_l	13,0000	14,0543	8,1

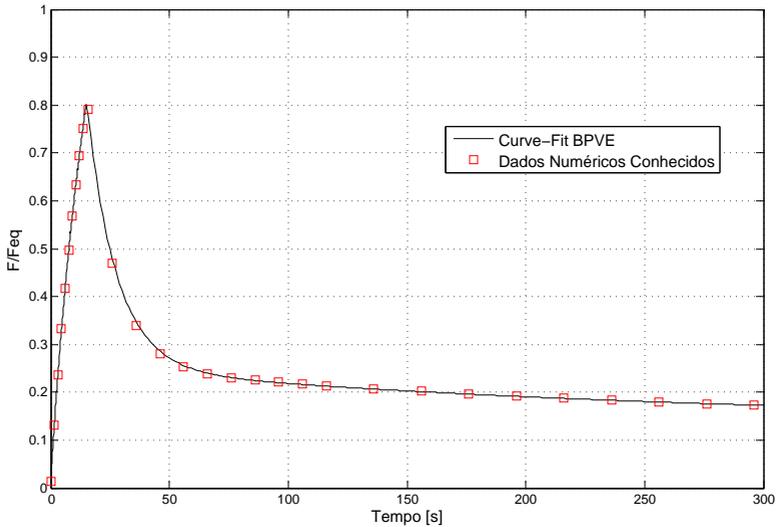


Figura 4.29: Ajuste de curva do modelo BPVE no relaxamento de tensões em compressão não confinada.

Finalmente, tentou-se identificar os 6 parâmetros juntos, através do modelo BPVE. A Figura (4.30) mostra a curva da Força de Reação x Tempo no relaxamento de tensões. Na Tabela (4.5) temos os valores encontrados, bem como seus respectivos erros relativos em relação aos valores de referência. Análogo ao que foi encontrado quando fez-se a identificação dos parâmetros elásticos e viscoelásticos separados, valores altos para o erro relativo foram encontrados, tanto para o módulo volumétrico, quanto para o tempo de relaxamento curto. Entretanto, o ajuste de curva mostrou, que apesar do erro relativo ter apresentado valores altos para alguns parâmetros, que é possível identificar as seis propriedades do material ao mesmo tempo, embora, o tempo de processamento aumente consideravelmente.

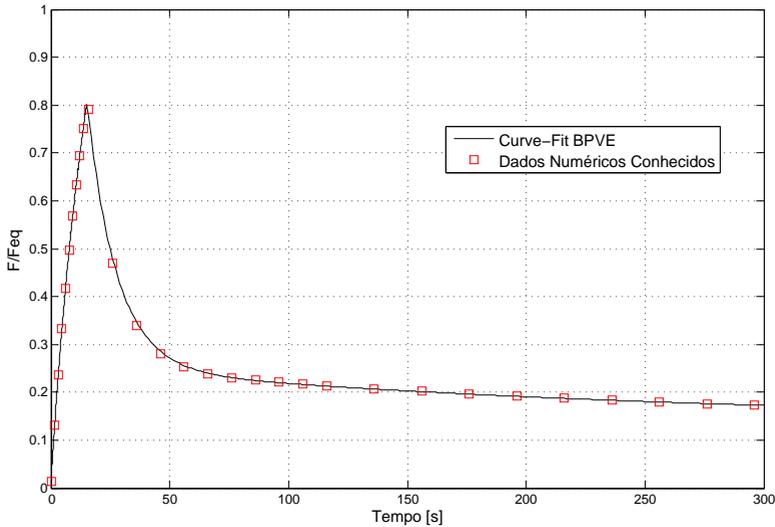


Figura 4.30: Ajuste de curva do modelo BPVE para 6 parâmetros.

Tabela 4.5: Parâmetros no ajuste do modelo BPVE

Parâmetro	Numérico	Ajuste	Erro Relativo (%)
Permeabilidade κ	$5,00 \times 10^{-15}$	$4,33 \times 10^{-15}$	14
Módulo Volumétrico λ	$0,010 \times 10^6$	$0,015 \times 10^6$	57
Módulo de Cisalhamento μ	$0,090 \times 10^6$	$0,088 \times 10^6$	1,5
Magnitude do Espectro \bar{G}	2,800	2,788	0,41
Tempo de Relaxamento Curto τ_s	0,020	0,013	31
Tempo de Relaxamento Longo τ_l	13,000	12,989	0,078

Afim de investigar as possíveis causas para o alto valor do erro relativo encontrado em alguns parâmetros, foi feita uma análise de sensibilidade, onde se variou em $\pm 10\%$ o valor de cada um dos parâmetros separadamente e verificou-se a influência no valor da carga. Foi utilizado um teste idêntico ao usado na validação do algoritmo de identificação. Na Figura (4.31) temos a análise de sensibilidade para os parâmetros elásticos, κ , λ e μ . Vemos que mesmo variando em $\pm 10\%$ o valor de λ , este produz quase nula variação na força, indicando uma baixa sensibilidade desse parâmetro, justificando o alto valor do erro relativo encontrado.

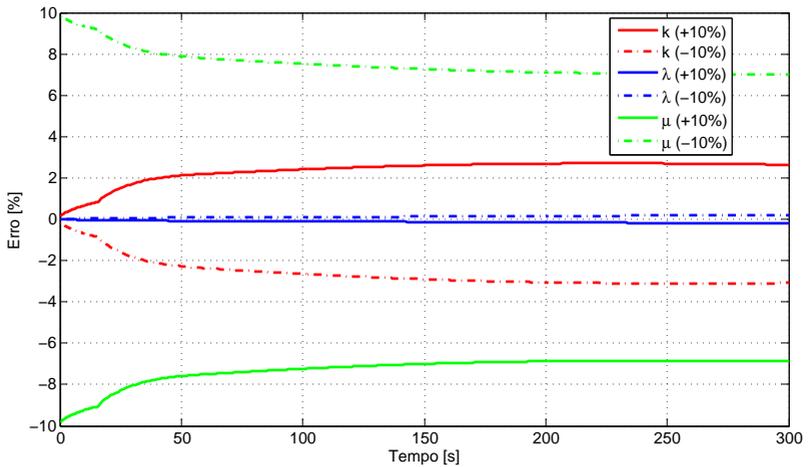


Figura 4.31: Análise de sensibilidade dos parâmetros elásticos.

Na Figura (4.32) encontra-se a análise de sensibilidade para os parâmetros viscosos, \bar{G} , τ_s e τ_l . A variação do termo de relaxamento curto τ_s , produziu quase nenhuma variação no valor da força. Este comportamento comprova que esse parâmetro tem baixa sensibilidade no algoritmo e justifica os erros encontrados na identificação.

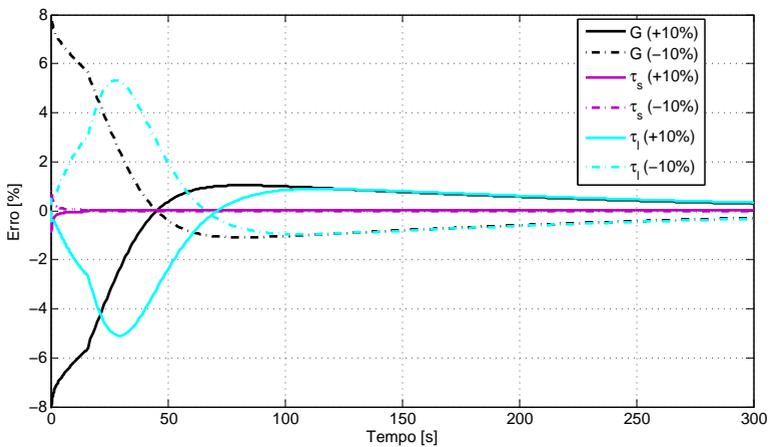


Figura 4.32: Análise de sensibilidade dos parâmetros viscosos.

4.3.2 Identificação Usando os Dados Experimentais

Os dados experimentais apresentados na Secção (4.2.1) foram selecionados para identificação de parâmetros no teste de compressão não confinada em relaxamento de tensões. Foi escolhida aleatoriamente a amostra 3, apesar de que qualquer uma das outras duas amostras poderia ter sido utilizada. Todas elas apresentaram o comportamento esperado durante o relaxamento de tensões, comportamento este descrito em vários trabalhos na literatura [6, 11, 25]. Através do algoritmo de otimização se tentou identificar seis propriedades do material (κ , λ , μ , \bar{G} , τ_s e τ_l).

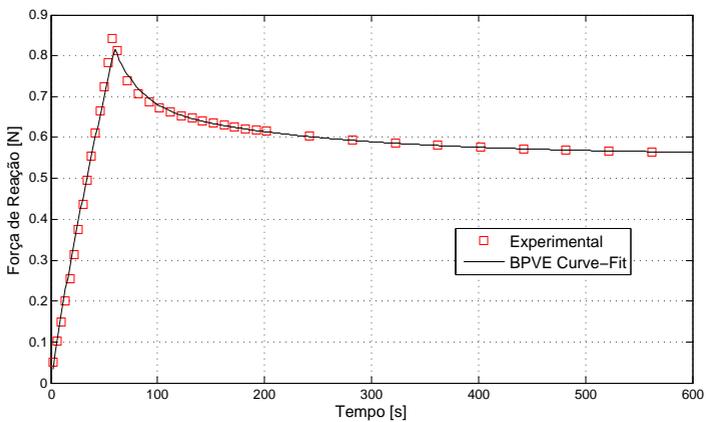
Na tentativa de identificação dos 6 parâmetros ao mesmo tempo, não foi obtido um bom ajuste da curva. Para superar esse problema e no intuito de obter um bom ajuste de curva, adotou-se o procedimento descrito no trabalho de Suh et al. [11], onde foi dado um valor inicial para o coeficiente de Poisson, ν , como sendo 0,05 e o módulo de elasticidade pode ser calculado baseado no valor da força de reação quando atingido o equilíbrio. Quando a amostra atinge o equilíbrio significa que não temos mais forças dissipativas agindo no tecido, valendo portanto a consideração de material elástico e aplicação da Lei de Hooke. Nesse caso, atingiu-se o equilíbrio por volta dos 400 segundos, onde a variação da força de reação é muito pequena e seu valor final é de 0,56N. Conhecendo os valores do módulo de Elasticidade e coeficiente de Poisson é possível determinar os valores das constantes de Lamé, λ e μ . De posse desses valores e usando-os como valor inicial no processo iterativo, obteve-se um bom ajuste de curva para o modelo BPVE, conforme apresentado na Figura (4.33). Na Tabela (4.7), mostram-se os valores das propriedades encontrados no ajuste. Todos as propriedades apresentaram valores dentro de uma faixa encontrada na literatura, sendo que para o \bar{G} e o τ_s , os valores encontrados são um pouco menores do que os geralmente citados em identificação de parâmetros para cartilagem conforme mostrado na Tabela 4.6.

Tabela 4.6: Valores de referência para a cartilagem encontrados em identificação de parâmetros. Tiradas de [7, 8, 9, 10, 11]

Parâmetros	Limite Inferior	Limite Superior
Permeabilidade κ	$0,1 \times 10^{-15}$	$6,9 \times 10^{-15}$
Módulo Volumétrico λ	$0,01 \times 10^6$	$0,6 \times 10^6$
Módulo de Cisalhamento μ	$0,09 \times 10^6$	$0,3 \times 10^6$
Magnitude do Espectro \bar{G}	1,84	7,51
Tempo de Relaxamento Curto τ_s	0,001	1,03
Tempo de Relaxamento Longo τ_l	10,00	174,8

Tabela 4.7: Ajuste de curva para o modelo BPVE

Parâmetros	Ajuste
Permeabilidade κ	$8,020 \times 10^{-15}$
Módulo Volumétrico λ	$0,5643 \times 10^6$
Módulo de Cisalhamento μ	$0,150 \times 10^6$
Magnitude do Espectro \bar{G}	0,250
Tempo de Relaxamento Curto τ_s	0,000015
Tempo de Relaxamento Longo τ_l	174,92

**Figura 4.33:** Ajuste de curva dos dados experimentais no relaxamento de tensões em compressão não confinada.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

5.1 CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi o estudo dos modelos constitutivos capazes de representar o comportamento de tecidos cartilagosos articulares sob a ação de esforços mecânicos. Partindo do modelo poroelástico, considerado o caso mais simples, até o modelo poroviscoelástico, foram feitos uma série de testes numéricos, baseados em exemplos disponíveis na literatura. Através desses testes numéricos, buscou-se um melhor entendimento de como as propriedades da cartilagem influem na resposta do modelo às solicitações mecânicas e até que ponto tais modelos conseguem representar corretamente o comportamento dessa estrutura. Outra ferramenta importante na busca pela compreensão do comportamento do tecido, foram os testes experimentais realizados. De posse dos resultados experimentais, fez-se uma identificação de parâmetros através de um algoritmo de otimização. Assim sendo, as principais conclusões obtidas com este trabalho foram:

- O modelo bifásico poroelástico (BPE) mostrou-se efetivo em alguns casos, como o cálculo de deslocamentos e velocidades. Porém, a não inclusão do efeito viscoelástico na matriz sólida implica em resultados diferentes dos obtidos experimentalmente, principalmente nos valores de tensão e no tempo de relaxamento. Nos testes de relaxamento de tensões, o modelo BPE se mostrou efetivo somente para o termo de relaxamento longo ($t \geq 1000s$).
- O algoritmo do espectro discreto para o modelo BPVE consegue representar o comportamento real da cartilagem. A inclusão dos efeitos viscosos resulta em um aumento da energia dissipada na matriz sólida em adição a dissipação causada pelo movimento relativo entre as fases sólida e fluida. Como resultado, o modelo BPVE consegue prever tensões maiores e um tempo de relaxamento mais rápido do que o modelo BPE.
- O comportamento da cartilagem em compressão confinada e não confinada apresenta-se, como esperado, sensivelmente diferente. Na compressão confinada, quando uma carga é aplicada na superfície articular através de um filtro poroso rígido, não ocorre deformação instantânea. A cartilagem se deforma gradualmente ao longo da espessura e fluido

escoa pela superfície superior. Na compressão não confinada, o tecido se deforma instantaneamente na direção axial e radial, quando a carga é aplicada. Isto gera tensões trativas ao longo do raio na matriz sólida. O escoamento do fluido pelas laterais do tecido permite que fluência e relaxamento de tensões ocorram.

- Conforme demonstrado, a escolha de alguns parâmetros, como o incremento de tempo Δt e o parâmetro de penalização β , influenciam diretamente nos resultados obtidos e na convergência do algoritmo. Assim, é necessário efetuar algumas análises prévias a fim de verificar que os parâmetros escolhidos produzam resultados já dentro da região assintótica (pouca sensibilidade aos parâmetros). No caso não confinado, a escolha do tipo de aderência da interface placa-amostra influencia diretamente na distribuição de tensões dentro do tecido. Quando utilizada a interface perfeitamente lubrificada, a tensão não varia com o raio, sendo constante na amostra. Para a interface perfeitamente adesiva, que admite-se mais se assemelhar aos testes reais, a tensão varia consideravelmente na direção radial.
- O grande número de parâmetros do modelo BPVE (λ^s , μ^s , κ , \bar{G} , τ_s e τ_l) pode causar dificuldades no processo de identificação caso se conte com poucos dados experimentais. Nesse caso, não é raro obter não unicidade de solução, isto é, boa representação das curvas experimentais com diferentes valores de parâmetros. Isso ficou notório no presente trabalho no caso dos parâmetros, tempo de relaxamento curto τ_s e módulo volumétrico λ^s , ambos com pouca sensibilidade para o ensaio realizado. Essa dificuldade pode ser corrigida se realizando diferentes tipos de ensaios, a diferentes velocidades, cada um relevante para um parâmetro do modelo.

5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Devido ao desenvolvimento de modelos cada mais complexos para a representação da cartilagem articular, uma série de melhorias podem ser implementadas, do ponto de vista computacional, para uma continuidade lógica do trabalho. A seguir, são apresentadas algumas destas:

- Considerar não-linearidades como a permeabilidade dependente da deformação, calculada experimentalmente por uma lei empírica e

considerando deformações finitas. Um modelo não-linear é necessário para estudar os carregamentos existentes *in vivo*.

- Tratar a matriz constitutiva do material como sendo transversalmente isotrópica ou anisotrópica, condizendo com o real comportamento dos componentes da matriz sólida.
- Implementar a formulação desenvolvida neste trabalho para elementos volumétricos 3D.
- Realizar ensaios de compressão confinada e indentação. Adotar outras configurações de ensaio, como fluência, buscando repetibilidade para a obtenção de dados confiáveis.
- Implementar o modelo trifásico que leva em conta as tensões químicas existentes na cartilagem.

REFERÊNCIAS

- [1] COWIN, S.; DOTY, S. B. *Tissue Mechanics*. [S.l.]: Springer, 2007. 682 p.
- [2] WILSON, W. *An Explanation for the Onset of Mechanically Induced Cartilage Damage*. Tese (Doutorado) — Technische Universiteit Eindhoven, 2005.
- [3] NORDIN, M.; FRANKEL, V. H. *Basic Biomechanics of the Musculoskeletal System*. [S.l.]: Lippincott Williams & Wilkins, 2001. 496 p.
- [4] KLEIN, T. J. et al. Depth-dependent biomechanical and biochemical properties of fetal, newborn, and tissue-engineered articular cartilage. *Journal of Biomechanics*, v. 40, n. 1, p. 182 – 190, 2007. ISSN 0021-9290.
- [5] JR, W. N. S. *Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics*. 1. ed. [S.l.]: Springer, 2008. 1128 p.
- [6] SUH, J.-K.; BAI, S. Finite element formulation of biphasic poroviscoelastic model for articular cartilage. *Journal of Biomechanical Engineering*, ASME, v. 120, n. 2, p. 195–201, 1998.
- [7] BOSCHETTI, F. et al. Biomechanical properties of human articular cartilage under compressive loads. *Biorheology*, v. 41, n. 3, p. 159–166, jan. 2004.
- [8] KORHONEN, R. K. et al. Comparison of the equilibrium response of articular cartilage in unconfined compression, confined compression and indentation. *Journal of Biomechanics*, v. 35, n. 7, p. 903–909, Jul 2002. ISSN 0021-9290.
- [9] DISILVESTRO, M. R.; SUH, J.-K. F. A cross-validation of the biphasic poroviscoelastic model of articular cartilage in unconfined compression, indentation, and confined compression. *Journal of Biomechanics*, v. 34, n. 4, p. 519–525, abr. 2001. ISSN 0021-9290.
- [10] BURSAC, P. M. et al. *Confined and unconfined stress relaxation of cartilage: appropriateness of a transversely isotropic analysis*. [S.l.]: Elsevier Science, out. 1999. 1125–1130 p.

- [11] SUH, J.-K.; DISILVESTRO, M. R. Biphasic poroviscoelastic behavior of hydrated biological soft tissue. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, v. 66, n. 2, p. 528–535, 1999.
- [12] ATESHIAN, G. A.; SOSLOWSKY, L. J.; MOW, V. C. Quantitation of articular surface topography and cartilage thickness in knee joints using stereophotogrammetry. *Journal of Biomechanics*, v. 24, n. 8, p. 761–776, 1991. ISSN 0021-9290.
- [13] MOW, V. C.; ATESHIAN, G. A.; SPILKER, R. L. Biomechanics of diarthrodial joints: A review of twenty years of progress. *Journal of Biomechanical Engineering*, ASME, v. 115, n. 4B, p. 460–467, 1993.
- [14] FUNG, Y. C. *Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues*. New York: Springer-Verlag, 1994.
- [15] MOW, V. et al. Determination of fixed charge density inside articular cartilage from unconfined compression and validation with chemical assay. *Computacional Methods in Orthopaedic Biomechanics*, 2007.
- [16] URBAN, J. P. et al. Swelling pressures of proteoglycans at the concentrations found in cartilaginous tissues. *Biorheology*, v. 16, n. 6, p. 447–64–, 1979.
- [17] LU, X. L. et al. A linearized formulation of triphasic mixture theory for articular cartilage, and its application to indentation analysis. *Journal of Biomechanics*, v. 43, n. 4, p. 673 – 679, 2010. ISSN 0021-9290.
- [18] CREMER, M. A.; ROSLONIEC, E. F.; KANG, A. H. The cartilage collagens: a review of their structure, organization, and role in the pathogenesis of experimental arthritis in animals and in human rheumatic disease. *Journal of Molecular Medicine*, Springer Berlin / Heidelberg, v. 76, p. 275–288, 1998. ISSN 0946-2716. 10.1007/s001090050217.
- [19] MOW, V. C. et al. Biphasic creep and stress relaxation of articular cartilage in compression: Theory and experiments. *Journal of Biomechanical Engineering*, ASME, v. 102, n. 1, p. 73–84, 1980.
- [20] LAI, W.; HOU, J.; MOW, V. A triphasic theory for the swelling and deformation behaviors of articular cartilage. *Journal of B*, v. 113, n. 3, p. 245–58., 1991.

- [21] MOW, V. C.; GUO, X. E. Mechano-electrochemical properties of articular cartilage: Their inhomogeneities and anisotropies. *Annu. Rev. Biomed. Eng.*, Annual Reviews, v. 4, n. 1, p. 175–209, ago. 2002. ISSN 1523-9829.
- [22] MENTE, P. L.; LEWIS, J. L. Elastic modulus of calcified cartilage is an order of magnitude less than that of subchondral bone. *Journal of Orthopaedic Research*, Wiley Subscription Services, Inc., A Wiley Company, v. 12, n. 5, p. 637–647, 1994. ISSN 1554-527X.
- [23] MOW, V. C.; HOLMES, M. H.; LAI, W. M. Fluid transport and mechanical properties of articular cartilage: A review. *Journal of Biomechanics*, v. 17, n. 5, p. 377 – 394, 1984. ISSN 0021-9290.
- [24] HAUT, T. L.; HAUT, R. C. The state of tissue hydration determines the strain-rate-sensitive stiffness of human patellar tendon. *J Biomech*, Elsevier Science, v. 30, n. 1, p. 79–81, jan. 1997. ISSN 0021-9290.
- [25] MAK, A. F. The apparent viscoelastic behavior of articular cartilage—the contributions from the intrinsic matrix viscoelasticity and interstitial fluid flows. *Journal of Biomechanical Engineering*, v. 108, n. 2, p. 123–130, 1986.
- [26] MAK, A. F. Unconfined compression of hydrated viscoelastic tissues: a biphasic poroviscoelastic analysis. *Biorheology*, v. 23, n. 4, p. 371–383, 1986.
- [27] PICCINELLI, S. *Modeling of articular cartilage behavior in unconfined compression: comparison with experimental tests*. Tese (Doutorado) — Politecnico di Milano, 2010.
- [28] JURVELIN, J. S.; BUSCHMANN, M. D.; HUNZIKER, E. B. Mechanical anisotropy of the human knee articular cartilage in compression. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part H Journal of engineering in medicine*, v. 217, n. 3, p. 215–219, 2003.
- [29] WILSON, W. et al. Stresses in the local collagen network of articular cartilage: a poroviscoelastic fibril-reinforced finite element study. *J Biomech*, Elsevier Science, v. 37, n. 3, p. 357–366, mar. 2004. ISSN 0021-9290.

- [30] ARMSTRONG, C. G.; LAI, W. M.; MOW, V. C. An analysis of the unconfined compression of articular cartilage. *Journal of Biomechanical Engineering*, v. 106, p. 165–73, 1984.
- [31] MAK, A. F.; LAI, W. M.; MOW, V. C. Biphasic indentation of articular cartilage–i. theoretical analysis. *Journal of Biomechanics*, v. 20, n. 7, p. 703–714, 1987. ISSN 0021-9290.
- [32] TERZAGHI, K. Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer grundlage. *Franz Deuticke, Leipzig*, 1925.
- [33] WANG, H. F. *Theory of Linear Poroelasticity with Applications to Geomechanics and Hydrogeology*. [S.l.]: Princeton University Press, 2000. 276 p.
- [34] BIOT, M. A. General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, AIP, v. 12, n. 2, p. 155–164, 1941.
- [35] RICE, J. R.; CLEARY, M. P. Some basic stress diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents. *Rev. Geophys.*, AGU, v. 14, n. 2, p. 227–241, 1976. ISSN 8755-1209.
- [36] SANDHU, R. S.; WILSON, E. L. Finite element analysis of seepage in elastic media. *J. Engr. Mech*, v. 95, p. 641–652, 1969.
- [37] GHABOUSSI, J.; WILSON, E. L. Flow of compressible fluid in porous elastic media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley & Sons, Ltd, v. 5, n. 3, p. 419–442, 1973. ISSN 1097-0207.
- [38] CARTER, J. P.; SMALL, J. C.; BOOKER, J. R. A theory of finite elastic consolidation. *International Journal of Solids and Structures*, v. 13, n. 5, p. 467 – 478, 1977. ISSN 0020-7683.
- [39] SMALL, J. C.; BOOKER, J. R.; DAVIS, E. H. Elasto-plastic consolidation of soil. *International Journal of Solids and Structures*, v. 12, n. 6, p. 431 – 448, 1976. ISSN 0020-7683.
- [40] HUNTER, W. On the structure and diseases of articular cartilage. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, v. 42, p. 514–521, 1743.

- [41] SPILKER, R. L.; SUH, J.-K. Formulation and evaluation of a finite element model for the biphasic model of hydrated soft tissues. *Computers & Structures*, v. 35, n. 4, p. 425 – 439, 1990. ISSN 0045-7949. Special Issue: Frontiers in Computational Mechanics.
- [42] DISILVESTRO, M. R.; SUH, J.-K. F. Biphasic poroviscoelastic characteristics of proteoglycan-depleted articular cartilage: Simulation of degeneration. *Annals of Biomedical Engineering*, Springer Netherlands, v. 30, p. 792–800, 2002. ISSN 0090-6964. 10.1114/1.1496088.
- [43] SETTON, L. A.; ZHU, W.; MOW, V. C. The biphasic poroviscoelastic behavior of articular cartilage: Role of the surface zone in governing the compressive behavior. *Journal of Biomechanics*, v. 26, n. 4-5, p. 581 – 592, 1993. ISSN 0021-9290.
- [44] HAIDER, M. A.; SCHUGART, R. C. A numerical method for the continuous spectrum biphasic poroviscoelastic model of articular cartilage. *Journal of Biomechanics*, v. 39, n. 1, p. 177 – 183, 2006. ISSN 0021-9290.
- [45] STUEBNER, M.; HAIDER, M. A. A fast quadrature-based numerical method for the continuous spectrum biphasic poroviscoelastic model of articular cartilage. *J Biomech*, Elsevier Science, v. 43, n. 9, p. 1835–1839, jun. 2010. ISSN 0021-9290.
- [46] SUN, D. N. et al. A mixed finite element formulation of triphasic mechano-electrochemical theory for charged, hydrated biological soft tissues. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 45, p. 1375–1402, 1999.
- [47] PUSO, M. A.; WEISS, J. A. Finite element implementation of anisotropic quasi-linear viscoelasticity using a discrete spectrum approximation. *Journal of Biomechanical Engineering*, ASME, v. 120, n. 1, p. 62–70, 1998.
- [48] MATHWORKS. *Constrained Nonlinear Optimization Algorithms: Optimization Algorithms and Examples MatLab R2012a Documentation*. [Http://www.mathworks.com/help/toolbox/optim/ug/brnoxzl.htmlbrnpd5f](http://www.mathworks.com/help/toolbox/optim/ug/brnoxzl.htmlbrnpd5f): [s.n.], Maio 2012.

- [49] BYRD, R. H.; HRIBAR, M. E.; NOCEDAL, J. An interior point algorithm for large-scale nonlinear programming. *SIAM Journal on Optimization*, v. 9, n. 4, p. 877–900, 1999.
- [50] BYRD, R. H.; GILBERT, J. C.; NOCEDAL, J. A trust region method based on interior point techniques for nonlinear programming. *Mathematical Programming*, v. 89, p. 149–185, 2000.
- [51] DETOURNAY, E.; CHENG, A. H. D. "Fundamentals of poroelasticity", Chapter 5 in *Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects*. [S.l.]: Pergamon Press, 1993. 113-171 p.
- [52] LI, X.; ZIENKIEWICZ, O. C.; XIE, Y. M. A numerical model for immiscible two-phase fluid flow in a porous medium and its time domain solution. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley & Sons, Ltd, v. 30, n. 6, p. 1195–1212, 1990. ISSN 1097-0207.
- [53] ZIENKIEWICZ, O. C.; PAUL, D. K.; CHAN, A. H. C. Unconditionally stable staggered solution procedure for soil-pore fluid interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley & Sons, Ltd, v. 26, n. 5, p. 1039–1055, 1988. ISSN 1097-0207.
- [54] PARK, K. C. Stabilization of partitioned solution procedure for pore fluid-soil interaction analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley & Sons, Ltd, v. 19, n. 11, p. 1669–1673, 1983. ISSN 1097-0207.
- [55] SIQUEIRA, C. A. M. *Um sistema orientado por objetos para análise numérica da poroelasticidade acoplada pela técnica dos elementos finitos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas., 1995.

APÊNDICE A – EXPRESSÕES MATRICIAIS

Sendo \mathbf{D} , um operador linear de derivação, \mathbf{N} a matriz que contém as funções de forma e \mathbf{m} um operador traço em formato matricial. A aplicação do operador \mathbf{D} em \mathbf{N} resulta na matriz \mathbf{B} , tal que:

$$\mathbf{B} = \mathbf{DN} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Bd}_n \quad tr(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{mBd}_n \quad (\text{A.1})$$

Para o estado plano de deformações, podemos definir as matrizes como sendo:

$$D = \begin{bmatrix} (\cdot),x & 0 \\ 0 & (\cdot),y \\ (\cdot),y & (\cdot),x \end{bmatrix} \quad m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

No caso de um sólido de revolução as equações (A.1) são as mesmas e as novas matrizes são:

$$D = \begin{bmatrix} (\cdot),r & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & (\cdot),z \\ (\cdot),z & (\cdot),r \end{bmatrix} \quad m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

APÊNDICE B – MODELO BIFÁSICO POROELÁSTICO

B.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

O modelo apresentado aqui foi proposto por Biot [34] e é baseado no conceito de uma matriz sólida e fluido que escoam pelos poros, sendo estes totalmente preenchidos com fluido nesse modelo. O modelo de Biot apresenta as seguintes hipóteses:

- Material sólido com comportamento isotrópico;
- Reversibilidade da relação tensão-deformação depois de atingido o equilíbrio;
- Relação Tensão-Deformação linear;
- Pequenas deformações;
- Fluido incompressível nos poros;
- Aplicação de lei de Darcy no escoamento de fluido pelos poros.

Além dessas hipóteses, temos dois casos associados ao efeito da pressão do fluido que são considerados para mensurar as constantes elásticas:

- Drenado (pressão do poro, $p = 0$);
- Não Drenado (Líquido não pode escapar da amostra teste. Os poros que permitem que o fluido saia da amostra devem estar selados. Variação de conteúdo de fluido ($\zeta = 0$).

Surgem então duas grandezas cinemáticas: um vetor de deslocamentos u_i que mapeia o movimento da matriz porosa baseado em uma configuração de referência e um vetor q_i que descreve o movimento do fluido em relação ao sólido. Duas quantidades de deformação são introduzidas para descrever a deformação e a variação do conteúdo de fluido nos poros em relação a um estado inicial: o tensor deformação ε_{ij} e a variação do conteúdo de fluido ζ , definido como a variação de volume fluido por unidade de volume do material poroso. A relação deformação-deslocamento é dada por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{B.1})$$

E o balanço de massa fluido:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -q_{i,i} \quad (\text{B.2})$$

B.1.1 Equações Constitutivas

As equações constitutivas em poroelasticidade não incluem somente a relação tensão-deformação para a matriz sólida, mas também a poro-pressão e a tensão devido ao escoamento do fluido pelos poros. A relação tensão-deformação elástica linear é expressa por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma_{ij} - \left(\frac{1}{6G} - \frac{1}{9K} \right) \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{p}{3H} \delta_{ij} \quad (\text{B.3})$$

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \left(K - \frac{2}{3}G \right) \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \frac{K}{H} p \delta_{ij} \quad (\text{B.4})$$

Introduzindo o módulo volumétrico, $K = \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$, (B.3) e (B.4) podem ser reescritas como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma_{ij} - \left(\frac{\nu}{2G(1+\nu)} \right) \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{p}{3H} \delta_{ij} \quad (\text{B.5})$$

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \left(\frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \right) \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \left(\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \right) \frac{1}{H} p \delta_{ij} \quad (\text{B.6})$$

Onde G é o módulo de cisalhamento, ν é o coeficiente de Poisson, δ é o delta de Kronecker, ε_{ij} são as componentes do tensor deformação ε e σ_{ij} são as componentes do tensor tensão σ . H é uma constante constitutiva que acopla as fases sólido-fluido.

Uma expressão geral relacionando a variação de volume do fluido, tensão e a poro-pressão é dada por:

$$\zeta = \frac{\sigma_{kk}}{3H} + \frac{p}{R} \quad (\text{B.7})$$

onde R foi definido como $R = \frac{\partial p}{\partial \zeta}$, avaliado em $\sigma = 0$. O valor $\frac{1}{R}$ mede a mudança no volume de água para uma dada mudança na pressão dos poros. Já $\frac{1}{H}$ mede a mudança de compressibilidade para uma variação da pressão

dos poros. As equações constitutivas de um material poroelástico isotrópico (B.3) podem ser separadas em uma parcela desviadora:

$$e_{ij} = \frac{1}{2G} s_{ij} \quad (\text{B.8})$$

e uma parcela volumétrica:

$$\varepsilon^v = - \left(\frac{P}{K} - \frac{p}{H} \right) \quad (\text{B.9})$$

$$\zeta = - \left(\frac{P}{H} - \frac{p}{R} \right) \quad (\text{B.10})$$

Onde s_{ij} e e_{ij} representam as componentes da tensão e da deformação desviadora, P a pressão média ou total (tensão hidrostática) e ε^v a deformação volumétrica:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} + P\delta_{ij} \quad (\text{B.11})$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{3} \delta_{ij} \quad (\text{B.12})$$

$$P = - \frac{\sigma_{kk}}{3} \quad (\text{B.13})$$

$$\varepsilon^v = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{kk}}{3} \quad (\text{B.14})$$

B.1.2 Resposta Volumétrica

As equações (B.3) ou (B.4) em conjunto com a equação (B.7) representam o comportamento linear do conjunto sólido-fluido. Existem duas condições limitantes para identificação de constantes elásticas. A condição sem drenagem significa que o fluido não pode se mover para dentro ou para fora de certo volume de controle, ou seja, $\zeta = 0$. A condição de drenagem corresponde a poro-pressão nula. Sob uma carga instantânea, a resposta sem-drenagem representa o caso em que não é permitido movimento do fluido em um pequeno intervalo de tempo enquanto a resposta do caso drenado representa o caso em que o campo de poro-pressões está sob um estado de equilíbrio. Sob a condição drenado em que $p = 0$, a deformação volumétrica

é proporcional à tensão hidrostática do sólido, P :

$$\varepsilon^v = -\frac{P}{K} \quad (\text{B.15})$$

Substituindo (B.15) em (B.10):

$$\zeta = \alpha \varepsilon^v \quad (\text{B.16})$$

onde $\alpha = \frac{K}{H}$ é conhecido como o coeficiente de Biot.

Sob a condição não drenado em que $\zeta = 0$, e de (B.10), fica evidente que a poro-pressão p é proporcional á pressão total P :

$$p = BP \quad (\text{B.17})$$

onde B é conhecido como o coeficiente de Skempton para poro-pressão. $B = \frac{R}{H}$. Substituindo (B.17) em (B.9):

$$\varepsilon = -\frac{P}{K_u} \quad (\text{B.18})$$

onde K_u é o módulo volumétrico para o caso não-drenado e vale:

$$K_u = K \left(1 + \frac{KR}{H^2 - KR} \right) \quad (\text{B.19})$$

Tanto no caso drenado como no não-drenado, o material poroelástico se comporta como um material elástico, sendo no caso não-drenado mais rígido (em sua resposta volumétrica).

B.1.3 Equações Governantes

A lei de Darcy é representada por uma equação obtida empiricamente para escoamentos em meios porosos não deformáveis. O escoamento de um fluido através dos poros é descrito por:

$$q_i = -\kappa(p_{,i} - \rho_f g_i) \quad (\text{B.20})$$

onde ρ_f é a densidade do fluido, g_i é componente da força da gravidade na direção i e $\kappa = \frac{k}{\mu}$ é o coeficiente de permeabilidade. A tensão efetiva, obtida em relação área útil do material, pode ser calculada em termos da tensão total. Aplicando a constante de Lamé $\lambda = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)}$ e a constante poroelástica $\alpha = \frac{K}{H}$,

a equação (B.6) pode ser reescrita como:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \alpha p \delta_{ij} \quad (\text{B.21})$$

De acordo com a teoria da tensão efetiva de Terzaghi, o termo σ_{ij} da equação (B.21) é chamada tensão total. O dois primeiros termos do lado direito da equação referem-se a tensão da parte sólida e são chamados de tensão efetiva, normalmente simbolizada por σ' . Logo:

$$\sigma_{ij} = \sigma' - \alpha p \delta_{ij} \quad (\text{B.22})$$

B.1.4 Equações Diferenciais

Semelhante à equação de elasticidade, a equação de equilíbrio para poroelasticidade é dada por:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (\text{B.23})$$

Entretanto, neste caso, a tensão total tem duas componentes, a tensão efetiva e a poropressão. A Eq. (B.23) também pode ser escrita como:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \quad (\text{B.24})$$

Onde $F_i = \rho g_i$ é a força de corpo por unidade volume do material e $\rho = (1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f$ é densidade volumétrica, sendo ρ_s a densidade do sólido, ρ_f a densidade do fluido e ϕ a porosidade do material. Substituindo (B.1) em (B.21) e depois na equação de equilíbrio (B.23), tem-se que:

$$(\lambda + G)u_{j,ij} + Gu_{i,jj} - \alpha p_{,i} + f_i = 0 \quad (\text{B.25})$$

Podemos encontrar outra forma para a equação diferencial [51]. Saiba-se que $\lambda = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)}$ e $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+G)}$, substituindo em (B.25):

$$\left(\frac{G}{1-2\nu} \right) u_{j,ij} + Gu_{i,jj} - \alpha p_{,i} + f_i = 0 \quad (\text{B.26})$$

Rice [35] propõe uma nova forma para a equação do equilíbrio usando

a relação constitutiva (B.4):

$$\left(K + \frac{G}{3}\right) u_{j,ij} + Gu_{i,jj} - \alpha p_{,i} + f_i = 0 \quad (\text{B.27})$$

A seguir descreve-se a equação diferencial que rege a fase fluida. Considerando o fluido como incompressível este deve satisfazer a lei de conservação de massa. Ou seja, a taxa de variação da quantidade de fluido por unidade de tempo pela superfície do elemento deve ser igual ao volume de líquido adicionado ao elemento por fontes externas:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + q_{i,i} = \psi \quad (\text{B.28})$$

onde ψ é a variação de volume fluido por unidade de volume do sólido poroso. Combinando a lei de Darcy (B.20), a equação da continuidade (B.28) e a equação constitutiva $p = M(\zeta - \alpha \epsilon)$ onde $M = \frac{2G(v_u - v)}{\alpha^2(1-2v_u)(1-2v)}$ têm-se a equação da difusão:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \kappa M \nabla^2 p = -\alpha M \frac{\partial \epsilon_{kk}}{\partial t} + M(\psi - \kappa f_{i,i}) \quad (\text{B.29})$$

As equações (B.25) e (B.29) são as duas equações diferenciais que governam o comportamento mecânico do material poroelástico. O problema poroelástico plano é regido por um sistema de 3 equações diferenciais. Para a solução desse sistema de equações é necessário fixar as condições de contorno e inicial. Temos o seguinte sistema: Somatório de forças nas direções x e y:

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \quad (\text{B.30})$$

e conservação de massa:

$$\nabla^2 p - \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.31})$$

As condições de contorno devem ser fixadas tanto para o problema mecânico como para o problema de fluxo. Para o problema mecânico podemos ter condições de deslocamento e/ou tensões prescritas no contorno. Para o problema de fluxo, as condições de contorno são pressão e/ou vazão prescritas nos contornos:

$$\begin{aligned}
u &= U & \text{em } \Gamma_d \\
\sigma_{x,y,xy} &= \sigma & \text{em } \Gamma_\sigma \\
p &= P & \text{em } \Gamma_p \\
q_{x,y} &= q & \text{em } \Gamma_q
\end{aligned} \tag{B.32}$$

A condição inicial adotada foi a de que o carregamento é feito em condições não drenadas, implicando na não variação do conteúdo de fluido no volume de controle. Nestas condições pode-se escrever a equação de balanço de massa (B.31) como:

$$\zeta = \alpha\varepsilon + \frac{1}{Q}p \tag{B.33}$$

onde $\frac{1}{Q} = \frac{\alpha^2(1-2\nu_u)(1-2\nu)}{2G(\nu_u-\nu)}$ para facilitar a manipulação algébrica. Como na condição inicial $\zeta=0$, a pressão do fluido é função da deformação volumétrica:

$$p = -\alpha Q\varepsilon \tag{B.34}$$

O próximo passo é aplicar o método dos resíduos ponderados à equação do equilíbrio (B.30):

$$\int_{\Omega} (\text{div}\sigma + b)v\partial\Omega = 0 \tag{B.35}$$

onde v é a função peso e Ω o domínio do problema poroelástico.

$$\int_{\Omega} [(\text{div}\sigma) \cdot v + b \cdot v] \partial\Omega = 0 \tag{B.36}$$

Mas $\text{div}(\sigma' \cdot v) = (\text{div}\sigma) \cdot v + \sigma \cdot \nabla v$. Substituindo em (B.36):

$$\int_{\Omega} \text{div}(\sigma \cdot v)\partial\Omega - \int_{\Omega} (\sigma \cdot \nabla v - b \cdot v)\partial\Omega = 0 \tag{B.37}$$

e aplicando o teorema da divergência ($\int_{\Omega} (\text{div}\sigma) \partial\Omega = \int_{\Gamma} \sigma \cdot n \partial\Gamma$), temos que:

$$\int_{\Gamma} (\sigma_n \cdot v) \partial\Gamma + \int_{\Omega} b \cdot v \partial\Omega = \int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) \partial\Omega \tag{B.38}$$

Porém, substituindo σ pela expressão da tensão efetiva $\sigma = \sigma' - m\alpha p$,

onde $m^T = [110]$ e sabendo que $\sigma' = D\varepsilon$, onde D é a matriz elástica, temos que:

$$\int_{\Omega} \mathbf{D} \cdot \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(v) \partial\Omega = \int_{\Gamma} (\sigma_n \cdot v) \partial\Gamma + \int_{\Omega} b \cdot v \partial\Omega + \int_{\Omega} \alpha m p \cdot \varepsilon(v) \partial\Omega \quad (\text{B.39})$$

Para definir a parte fluida, devemos aplicar o método dos resíduos ponderados sobre a equação de conservação da massa (B.31):

$$\int_{\Omega} \left(\text{div} \mathbf{q} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) v \partial\Omega = 0 \quad (\text{B.40})$$

$$\int_{\Omega} \left(\text{div} \mathbf{q} \cdot v + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \cdot v \right) \partial\Omega = 0 \quad (\text{B.41})$$

mas $\text{div}(q \cdot v) = (\text{div} q) \cdot v + q \cdot \nabla v$. Substituindo em (B.41):

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \cdot v \partial\Omega + \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{q} \cdot v) \partial\Omega - \int_{\Omega} q \cdot \nabla v \partial\Omega = 0 \quad (\text{B.42})$$

Aplicando o teorema da divergência ($\int_{\Omega} (\text{div} q) \partial\Omega = \int_{\Gamma} q \cdot n \partial\Gamma$), temos que:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \cdot v \partial\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{q}_n \cdot v \partial\Gamma = \int_{\Omega} q \cdot \varepsilon(v) \partial\Omega \quad (\text{B.43})$$

Substituindo pela lei de Darcy (B.20) e pela equação constitutiva (B.33), tem-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\alpha}{KB} \left[\frac{B}{3} \frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial t} \right] \cdot v \partial\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{q}_n \cdot v \partial\Gamma = \int_{\Omega} \left[-\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot \varepsilon(v) \right] \partial\Omega \quad (\text{B.44})$$

$$\int_{\Omega} \left(\alpha \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} \right) \cdot v \partial\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{q}_n \cdot v \partial\Gamma = \int_{\Omega} \left[-\kappa \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot \varepsilon(v) \right] \partial\Omega \quad (\text{B.45})$$

As equações (B.39, B.45) representam a forma fraca do problema para a fase sólida e fase fluida, respectivamente.

B.2 APROXIMAÇÃO VIA ELEMENTOS FINITOS

O próximo passo é aplicar a técnica de elementos finitos, que utiliza funções de interpolação, também conhecidas como funções de forma, para aproximar a resposta do sistema em subdomínios denominados elementos. As funções de forma escolhidas para aproximar deslocamentos e pressão são:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \sum_{i=1}^n N_i u_i & (B.46) \\ p &= \sum_{i=1}^n N_i p_i \\ \varepsilon(u) &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x_j} u_i = \mathbf{B} u_i \\ \frac{\partial p}{\partial x_j} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x_j} p_i = \mathbf{B} p_i \end{aligned}$$

Pela formulação de Galerkin, a função peso deve ter a mesma forma das funções admissíveis:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^n N_i w_i & (B.47) \\ \frac{\partial w}{\partial x_j} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x_j} w_i \end{aligned}$$

Substituindo (B.46) e (B.47) em (B.39), tem-se:

$$\int_{\Omega} \mathbf{D} \mathbf{B} u_i \mathbf{B} v \partial \Omega - \int_{\Omega} \alpha \mathbf{m} N p \mathbf{B} v \partial \Omega = \int_{\Gamma} N^T \sigma_n v \partial \Gamma + \int_{\Omega} N^T b v \partial \Omega \quad (B.48)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} u_i \partial \Omega - \int_{\Omega} \alpha \mathbf{B}^T \mathbf{m} N p \partial \Omega = \int_{\Gamma} N^T \sigma_n \partial \Gamma + \int_{\Omega} N^T b \partial \Omega \quad (B.49)$$

$$[\mathbf{K}] \mathbf{u} - [\mathbf{Q}] p = f \quad (B.50)$$

onde:

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \partial\Omega \\ \mathbf{Q} &= \int_{\Omega} \alpha \mathbf{B}^T \mathbf{m} N \partial\Omega \\ f &= \int_{\Gamma} N^T \sigma_n \partial\Gamma + \int_{\Omega} N^T b \partial\Omega\end{aligned}\quad (\text{B.51})$$

sendo \mathbf{K} a matriz rigidez para estado plano de deformações, \mathbf{Q} a matriz de acoplamento e f o vetor de carga.

Utilizando a aproximação via elementos finitos (B.46) e (B.47) em (B.45):

$$\int_{\Omega} \alpha \mathbf{m}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{u}} N^p v \partial\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{Q} N \dot{p} N v \partial\Omega + \int_{\Omega} \kappa \mathbf{B} p \mathbf{B} v \partial\Omega = - \int_{\Gamma} \mathbf{q}_n \cdot v \partial\Gamma \quad (\text{B.52})$$

$$\int_{\Omega} \alpha \mathbf{B}^T \mathbf{m}^T N \dot{\mathbf{u}} \partial\Omega + \int_{\Omega} N^T \frac{1}{Q} N \dot{p} \partial\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \kappa \mathbf{B} p \partial\Omega = - \int_{\Gamma} N^T \mathbf{q}_n \partial\Gamma \quad (\text{B.53})$$

$$[\mathbf{S}] \dot{p} + [\mathbf{Q}]^T \dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{H}] p = q \quad (\text{B.54})$$

onde:

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \int_{\Omega} N^T \frac{1}{Q} N \partial\Omega \\ \mathbf{Q}^T &= \int_{\Omega} \alpha \mathbf{B}^T \mathbf{m}^T N \partial\Omega \\ \mathbf{H} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \kappa \mathbf{B} \partial\Omega \\ q &= - \int_{\Gamma} N^T \mathbf{q}_n \partial\Gamma\end{aligned}\quad (\text{B.55})$$

sendo \mathbf{S} a matriz transiente da equação de fluxo, \mathbf{H} a matriz do laplaciano da pressão dos poros e q o vetor de carga.

Acoplando (B.51) e (B.55):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{Q}^T & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ q \end{bmatrix} \quad (\text{B.56})$$

A equação (B.56) apresenta termos que contem derivadas temporais. Esses termos necessitam ser discretizados no tempo. Para isso utiliza-se a técnica das diferenças finitas. A aproximação da derivada temporal é feita por um esquema de diferença finita para trás (*backward difference form*). Matematicamente tem-se:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t} \quad (\text{B.57})$$

Aplicando a técnica de diferenças finitas (B.57) no sistema de equações (B.56), tem-se que:

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}] \mathbf{u}^{n+1} - [\mathbf{Q}] p^{n+1} &= f^{n+1} \\ [\mathbf{Q}]^T \mathbf{u}^{n+1} + ([\mathbf{S}] + \Delta t [\mathbf{H}]) p^{n+1} &= q^{n+1} \Delta t + [\mathbf{Q}]^T \mathbf{u}^n + [\mathbf{S}] p^n \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

onde:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{S} + \mathbf{H} \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^{n+1} \\ q^{n+1} \Delta t + \mathbf{Q}^T \mathbf{u}^n + \mathbf{S} p^n \end{bmatrix} \quad (\text{B.59})$$

As equações desenvolvidas, até o presente momento, referem-se à solução do problema proelástico através do método acoplado ou também denominado direto [52]. Nesse tipo de problema tem-se uma única matriz de rigidez contendo os termos dos problemas mecânico e de fluxo acoplados e as incógnitas do problema são resolvidas diretamente usando um sistema matricial acoplado não-simétrico. Existe também outro método denominado "acoplado numericamente" onde se separa o problema mecânico do problema de fluxo e os termos de acoplamento são somados no vetor de carga de cada um dos problemas [53, 54].

B.3 DISCUSSÃO E VALIDAÇÃO DO MODELO

Para a validação do modelo numérico para poroelasticidade utilizou-se um modelo analítico bem conhecido e utilizado na literatura, o modelo da coluna poroelástica unidimensional [34]. Essa solução analítica encontra-se no Apêndice (C). Apesar do modelo de Biot aplicar-se ao caso unidimensional, o modelo plano pode ser validado efetuando-se mudanças nas condições de contorno a fim de reproduzir o mesmo efeito. O problema consiste em uma coluna submetida a um carregamento de tensão constante no valor de 1 MPa, pressão nula prescrita no topo da coluna e deslocamento lateral nulo. Desta forma, construiu-se um modelo de coluna conforme a Figura (B.1):

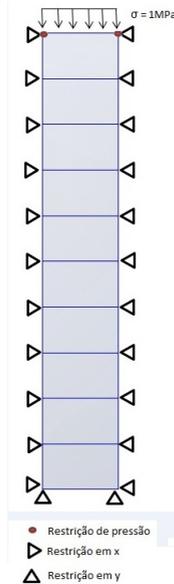


Figura B.1: Condições de contorno para a coluna poroelástica.

O modelo contém 10 elementos, sendo que o elemento selecionado para descrever o deslocamento foi o com 9 nós (aproximação quadrática) e para descrever a pressão usou-se 4 nós (aproximação linear). Neste primeiro teste considerou-se o material como sendo compressível, ou seja, parte do carregamento é suportado pela fase sólida no instante inicial ($t = 0\text{s}$). A coluna de Biot é composta por arenito de Berea e suas propriedades foram retiradas de [51]. Para o cálculo poroelástico deve-se conhecer no mínimo 5 propriedades

do material e na Tabela (B.1) temos os seus valores:

Tabela B.1: Propriedades da coluna poroelástica para o caso de material compressível

Módulo de Elasticidade Transversal	G (Pa)	6×10^9
Coeficiente de Poisson drenado	ν	0.2
Coeficiente de Poisson não-drenado	ν_u	0.33
Coeficiente de Permeabilidade	κ ($\text{m}^2/\text{Pa}\cdot\text{s}$)	2×10^{-5}
Coeficiente de Skempton	B	0.62
Altura da Coluna	h (m)	6
Passo no tempo	Δt (s)	1

A figura (B.2) apresenta as soluções numérica e analítica para o deslocamento no topo da coluna ($h = 6\text{m}$) em função do tempo. Nota-se que a curva representa uma transição entre os estados drenado e não-drenado. No estado não-drenado o carregamento é suportado tanto pela fase sólida como pela fase fluida. No estado drenado, a pressão do fluido foi completamente dissipada, fazendo com que o carregamento seja suportado somente pela fase sólida.

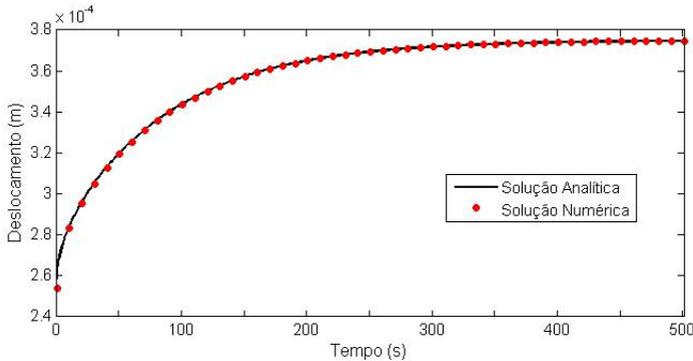


Figura B.2: Deslocamento na extremidade da coluna em função do tempo.

Na Figura(B.3) apresenta-se a variação da pressão no fluido na base da coluna ($h = 0\text{m}$) em função do tempo. Nota-se que com o passar do tempo o valor da pressão decai, reproduzindo o efeito de dissipação da pressão no fluido devido ao carregamento ser suportado pela matriz sólida.

Fez-se outro teste para validação do modelo poroelástico. Usando as mesmas configurações do teste anterior, porém, agora para um meio poroso com características incompressíveis no instante inicial. As constantes do ma-

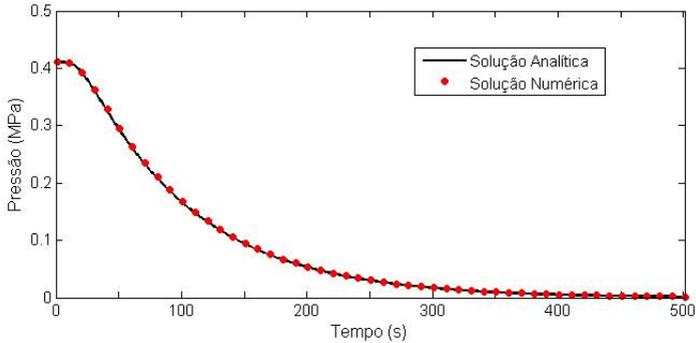


Figura B.3: Pressão na base da coluna em função do tempo.

terial retiradas de [55] estão listadas na Tabela (B.2):

Tabela B.2: Propriedades da coluna poroelástica para o caso de material incompressível

Módulo de Elasticidade Transversal	G (Pa)	6×10^9
Coefficiente de Poisson drenado	ν	0.2
Coefficiente de Poisson não-drenado	ν_u	0.5
Coefficiente de Permeabilidade	κ ($\text{m}^2/\text{Pa}\cdot\text{s}$)	2×10^{-5}
Coefficiente de Skempton	B	1
Altura da Coluna	h (m)	6
Passo no tempo	Δt (s)	1

Nas Figuras (B.4) e (B.5) podemos notar as características do meio poroso incompressível. O deslocamento no topo da coluna no instante inicial será nulo, sendo o carregamento totalmente suportado pelo fluido. Após o instante inicial, a medida que a pressão vai se dissipando, parte do carregamento é absorvido pela matriz sólida, fazendo a coluna ser comprimida. Após algum tempo, a pressão se dissipa totalmente e o carregamento é suportado apenas pela matriz sólida.

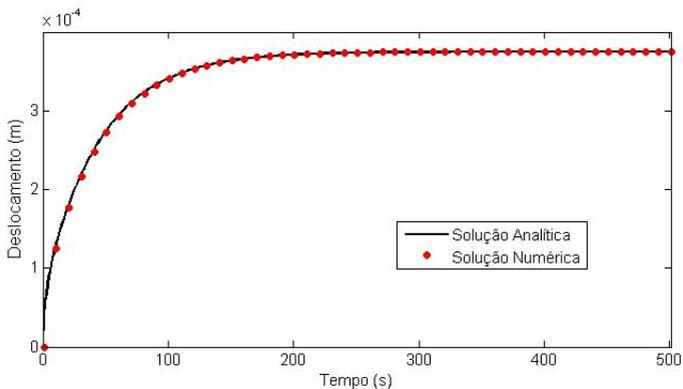


Figura B.4: Deslocamento na extremidade da coluna em função do tempo.

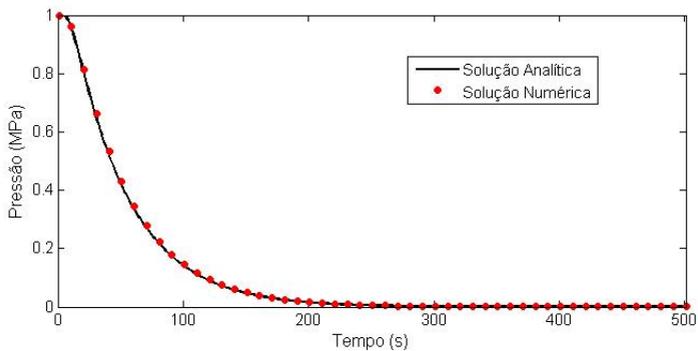


Figura B.5: Pressão na base da coluna em função do tempo.

APÊNDICE C – FORMULAÇÃO ANALÍTICA DE BIOT PARA O PROBLEMA DA COLUNA POROELÁSTICA

O problema da coluna poroelástica corresponde a uma simplificação das equações da Poroelasticidade acoplada, propostas por Biot em 1941 [34]. Considerando as condições apresentadas na Figura (B.1) e partindo das equações diferenciais que regem o problema poroelástico apresentadas no Apêndice (B) para o caso unidimensional temos que:

$$\frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (C.1)$$

$$\alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (C.2)$$

As equações (C.1) e (C.2) devem ser satisfeitas para as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 & \text{em } \Gamma_d \\ \sigma(h) &= -P & \text{em } \Gamma_\sigma \\ p(h) &= 0 & \text{em } \Gamma_p \\ \frac{\partial p}{\partial x}(0) &= 0 & \text{em } \Gamma_q \end{aligned} \quad (C.3)$$

Sabendo que a tensão total σ na coluna é constante e igual a $-P$, substituindo na Equação (B.21), temos que:

$$\alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (C.4)$$

onde:

$$\sigma = -P = 2G \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \alpha p \quad (C.5)$$

Derivando a Equação (C.5) no tempo:

$$\frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \alpha \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (C.6)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \alpha \frac{(1-2\nu)}{2G(1-\nu)} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (C.7)$$

Substituindo (C.7) em (C.2):

$$\alpha^2 \frac{(1-2\nu)}{2G(1-\nu)} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (C.8)$$

Para se obter a solução do campo de pressão ao longo da coluna, deve-se resolver a Equação (C.8). Lembrando que na condição inicial não há variação do conteúdo líquido:

$$\zeta = \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(0) + \frac{1}{Q} p(0) = 0 \quad (C.9)$$

de onde:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0) = -\frac{1}{\alpha Q} p(0) \quad (C.10)$$

Substituindo (C.10) em (C.5) temos o valor da pressão no instante inicial:

$$p(0) = \frac{P}{\frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)\alpha Q} + \alpha} \quad (C.11)$$

Observando-se a Equação (C.8) e a equação de condução de calor unidimensional, conclui-se que a solução desta servirá de solução para o problema poroelástico. Com isso, obtém-se a resposta da pressão em função do tempo e do deslocamento:

$$p(x,t) = \frac{2p(0)}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\beta_n h)}{\beta_n} \exp(-c\beta_n^2 t) \cos[\beta_n(h-x)] \quad (C.12)$$

sendo:

$$c = \frac{\kappa}{\left(\frac{\alpha^2(1-2\nu)}{2G(1-\nu)} + \frac{1}{Q}\right)} \quad (C.13)$$

$$\beta_n = \frac{(2n+1)\pi}{2h} \quad (C.14)$$

Para o cálculo do deslocamento no topo da coluna poroelástica, chegue-se a:

$$u_0 = - \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} \partial x \quad (\text{C.15})$$

Substituindo a Equação (C.10) em (C.15), tem-se que:

$$u_0 = - \int_0^h \frac{(1-2\nu)}{2G(1-\nu)} [\alpha p - P] \partial x \quad (\text{C.16})$$

Substituindo a solução para a pressão obtida em (C.12) em (C.16) e integrando:

$$u_0 = \frac{(1-2\nu)}{2G(1-\nu)} \left[Ph - \alpha \frac{2p(0)}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2(\beta_n h)}{\beta_n^2} \exp(-c\beta_n^2 t) \right] \quad (\text{C.17})$$

Observa-se que o fator $\sin^2(\beta_n h)$ na equação (C.17) sempre apresentará valor unitário, logo:

$$u_0 = \frac{(1-2\nu)}{2G(1-\nu)} \left[Ph - \alpha \frac{2p(0)}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2} \exp(-c\beta_n^2 t) \right] \quad (\text{C.18})$$

A Equação (C.18) serve para o cálculo do deslocamento no topo da coluna para qualquer instante de tempo. Por exemplo, para $t=0$ (instante inicial):

$$u_0 = \frac{(1-2\nu)}{2G(1-\nu)} \left[Ph - \alpha \frac{2p(0)}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2} \right] \quad (\text{C.19})$$

Expandindo a série acima e considerando que ela é convergente, temos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4h^2}{\pi^2(2n+1)^2} = \frac{4h^2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{4h^2}{\pi^2} \frac{\pi^2}{8} = \frac{h^2}{2} \quad (\text{C.20})$$

Utilizando-se o resultado da expansão da série (C.20) na Equação

(C.19), chega-se ao deslocamento inicial no topo da coluna:

$$u_0 = \frac{(1-2\nu)h}{2G(1-\nu)} [P - \alpha p(0)] \quad (\text{C.21})$$