

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

**Aproximação Inversa e Otimização Topológica
Aplicados à Determinação de Leiaute de *Tailored
Blanks***

Márcio Eduardo Silveira

Florianópolis - SC, Março de 2007

**Aproximação Inversa e Otimização Topológica
Aplicados à Determinação de Leiaute de *Tailored
Blanks*.**

Márcio Eduardo Silveira

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de

Doutor em Engenharia

Especialidade em Engenharia Mecânica, área de concentração Análise e Projeto Mecânico, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Eduardo Alberto Fancello, D.Sc. (Orientador / Presidente)

Fernando Cabral, Ph.D. (Coordenador do Curso)

Banca Examinadora

Jun Sérgio Ono Fonseca, Ph.D. (UFRGS / Relator)

Marco Lúcio Bittencourt, Dr. Eng. (UNICAMP)

Carlos Augusto Silva de Oliveira, D. Sc. (UFSC)

Clóvis Sperb de Barcellos, Ph.D. (UFSC)

Dedicatória

*Aos meus pais,
Eduardo Henrique da Silveira e
Maria de Lourdes Nascimento Silveira,
aos meus irmãos,
Carlos Henrique da Silveira e
Elaine Heloísa Silveira Silva,
e à minha esposa e companheira
Bruna Marcela Bacellar Drabowski*

Agradecimentos

Ao professor e orientador Eduardo Alberto Fancello pela eficiente orientação, compreensão e amizade comigo compartilhado no decorrer da tese. Ao CNPQ e ao POSMEC pela bolsa concedida e pela confiança neste trabalho.

Aos demais professores do GRANTE, do EMC em geral e da banca examinadora pela disponibilidade, presença e colaboração sempre que foi necessária.

Aos colegas de convívio diário durante o decorrer do doutorado, Sérgio Rocha, Marco Picanço, Rodrigo Roesler, Daniela Bento, Lobão, André, Gabriel, Jean, Yuji, Gilson, Marco Destro, Fernando Furst e demais colegas do Grante.

À Bruna Marcela B. Drabowski pelo incentivo, compreensão e paciência comigo durante toda esta jornada.

Ao meu irmão Carlos Henrique e minha família em geral pelo apoio sempre constante.

À Ford Motor Company Brasil e em especial aos meus amigos de trabalho Carlos Valentin, Alysson Vieira, Marcelo Magalhães, Bruno Pockszevencki, Roger Eger, Geraldo Kato, Luiz Morgado, João Filho, Alice, Gustavo Andrade, Antônio, Dudu, Fernando, entre outros pela amizade e apoio.

À Aethra Componentes Automotivos e aos colegas de trabalho Marcos Carvalho, Fabiano, Francis e Fernando pela amizade e colaboração.

À Dra. Sônia Rocha pela amizade, disponibilidade e atenção sempre que necessário.

Enfim, a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

Sumário

Simbologia	iii
Resumo	vi
Abstract	vii
1 - INTRODUÇÃO	1
2 - CONFORMAÇÃO MECÂNICA - <i>TAILORED BLANK</i> E CLC	5
2.1 - Aspectos Gerais	5
2.2 - <i>Tailored Blanks</i>	5
2.3 - Curvas Limites de Conformação	11
2.3.1 - Determinação das Curvas Limite de Conformação	11
2.3.2 - Método M-K	14
3 - SIMULAÇÃO NUMÉRICA EM PLASTICIDADE - MÉTODO POR APROXIMAÇÃO INVERSA	17
3.1 - Aspectos Gerais	17
3.2 - Definições Básicas. Princípios de Conservação e Balanço	18
3.3 - Modelo de Aproximação Inversa. Formulação	23
3.3.1 - Introdução	23
3.3.2 - Formulação	26
3.3.2.1 - Relações Cinemáticas	26
3.3.2.2 - Lei Constitutiva para Materiais com Anisotropia Planar	30
3.3.2.3 - Forças Externas	34
3.3.2.4 - Princípio dos Trabalhos Virtuais	36
3.3.2.5 - Resolução do Algoritmo (Newton - Raphson)	44
3.3.2.6 - Matriz Tangente Consistente	48

4 - OTIMIZAÇÃO	53
4.1 - Aspectos Gerais	53
4.2 - Otimização Estrutural em Conformação de Chapas	56
4.3 - Otimização Aplicada à <i>Tailored Blank</i>	58
4.3.1 - Formulações em Otimização de <i>Tailored Blank</i>	59
4.3.1.1 - Funções de Desempenho	60
5 - PROPOSTA DE TRABALHO	63
5.1 - Introdução	63
5.2 - Formulação do Problema	63
5.2.1 - Critério de Falha Material	66
5.2.2 - Regularização de <i>Checkerboard</i>	70
5.2.3 - Solução pelo Método do Lagrangeano Aumentado	71
5.3 - Análise de Sensibilidade	73
6 - RESULTADOS	77
6.1 - Introdução	77
6.2 - Aferição do Problema de Aproximação Inversa	77
6.3 - Resultados da Otimização Topológica	83
6.3.1 - Exemplo I - Tira Metálica	83
6.3.2 - Exemplo II - Casca Metálica	88
6.3.3 - Exemplo III - Reforço Estrutural	98
6.3.4 - Exemplo IV - Reforço Estrutural B	105
7 - CONCLUSÃO	109
8 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	112
APÊNDICE - A	119

Simbologia

$[\varepsilon]$	tensor de deformações logarítmica;
$[\sigma]$	tensor de tensão de Cauchy;
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	alongamentos nas direções principais;
φ	direções principais Eulerianas de deformação;
ϕ	função de escoamento de Hill;
$\{\dot{\varepsilon}^p\}$	vetor da taxa de deformação plástica;
\bar{r}	coeficiente de anisotropia médio;
$\bar{\sigma}$	tensão de Cauchy equivalente;
$\bar{\varepsilon}^p$	deformação plástica equivalente;
$\bar{\varepsilon}$	deformação total equivalente;
μ	coeficiente de atrito;
δW	trabalho virtual total;
δW_{int}	trabalho virtual interno;
δW_{ext}	trabalho virtual externo;
$\{\delta u\}$	vetor de deslocamento virtuais;
$\{F_{\text{int}}^e\}$	vetor de forças internas do elemento;
$\{F_{\text{ext}}^e\}$	vetor de forças externas do elemento;
FC	função de suavização do atrito;
$[K^{\text{Tang}}]$	matriz tangente;
$[K_{\text{int}}^{\text{Tang}}]$	matriz tangente devido às forças internas;
$[K_{\text{ext}}^{\text{Tang}}]$	matriz tangente devido às forças externas;
$[K_{\text{PC}}^{\text{Tang}}]$	matriz tangente devido às forças externas do prensa-chapas;
$[K_{\text{P}}^{\text{Tang}}]$	matriz tangente devido às forças externas do punção;

$[I]$	matriz unitária;
F_{conf}	função de falha no processo de conformação;
ρ	densidade nodal do material;
$f(\rho)$	densidade média do elemento triangular de membrana;
σ_e	tensão de escoamento do material;
ε_1 e ε_2	deformações principais no estado plano de tensão;
$\beta(\rho)$	função que garante continuidade C^0 e C^1 entre F_1 e P , e entre P e F_2 na F_{conf} ;
$f_\rho(\rho)$	função de penalização para minimizar o efeito de <i>checkerboard</i> ;
$f_m(\rho)$	função de penalização explícita das densidades intermediárias;
$\{U_a\}$	solução do problema adjunto;
$L(\rho; \lambda; r)$	funcional de lagrangeano;
$\lambda(\mathbf{x})$	função multiplicador de Lagrange;
$[\Phi]$	matriz das funções de forma do elemento triangular de membrana;
$[B]$	tensor de Cauchy-Green a esquerda;
$[F]$	gradiente de deformação;
$[M]$	matriz de transformação das direções principais;
$[P]$	matriz de anisotropia;
$[T]$	matriz de transformação do sistema de coordenadas global para o local;
$[V]$	tensor de alongamento a esquerda;
$\{n\}$	vetor normal;
$\{n^f\}$	vetor da direção da força externa (punção e prensa-chapas);
$\{R\}$	vetor residual global;
$\{t\}$	vetor tangente;
$\{u\}, \{U\}$	vetor de deslocamento na coordenada local e global;
$\{U_0\}$	vetor de deslocamento global inicial;

$\{u_t\}$	vetor de deslocamento local na direção tangente;
A^e	área do elemento na configuração final deformada;
CLC	curva limite de conformação;
CLC_0	altura da curva limite de conformação que define o menor valor de ε_1 .
E_S	módulo secante do material;
F1	CLC para $\rho = 0$;
F2	CLC para $\rho = 1$;
h	espessura final da chapa deformada;
h^0	espessura inicial da chapa indeformada;
h_1 e h_2	espessuras limites mínima e máxima do <i>tailored blank</i> ;
J	jacobiano;
n	coeficiente de encruamento do material;
q_n	pressão normal do prensa-chapas;
r	parâmetro de penalização do lagrangeano aumentado;
r_p e r_m	constantes positivas associadas aos funcionais de penalização do lagrangeano;
TB	<i>tailored blank</i> ;

Resumo

Os *blanks* soldados ou *tailored blanks* consistem de peças de aços de diferentes espessuras, classes de resistência ou revestimentos, unidos por meio de algum processo de soldagem de alta qualidade, de forma a resultar em um único *blank* que, após a conformação, dá origem à peça final. A produção de peças conformadas de alta qualidade, em curto espaço de tempo e a baixo custo é um dos principais objetivos nas indústrias de conformação mecânica. Para evitar o alto custo de procedimentos de "tentativa e erro", o uso de simulação numérica em processos de conformação mecânica está em constante progresso na indústria de estampagem. As principais ferramentas de análise numérica disponíveis atualmente são baseadas no método dos elementos finitos (MEF), utilizando formulações incrementais no tempo a partir de técnicas de integração temporal explícitas e implícitas, que se caracterizam por consumir um razoável tempo de processamento, devido às propriedades não-lineares do modelo. No entanto, em estágios iniciais do projeto, é de interesse ter uma ferramenta numérica rápida a fim de se ter uma estimativa da variação da espessura, distribuição das deformações e tensões, assim como o leiaute inicial da chapa. Alguns métodos simplificados têm sido desenvolvidos nos últimos anos com este propósito. A idéia básica destes métodos, conhecidos como Aproximação Inversa (*Inverse Approach* ou *One-Step Approach*), é realizar uma análise não-linear para determinar as posições dos nós no *blank* inicial, as deformações e a espessura da peça final, sem considerar os processos incrementais de plasticidade e contato.

Este trabalho consistiu em utilizar técnicas de otimização topológica e análise de conformação de chapas via Aproximação Inversa, para estimar o leiaute inicial de um *tailored blank* considerando apenas o aspecto de falha do material no processo de fabricação. O problema de otimização foi modelado através do método do Lagrangeano Aumentado, via minimização da massa e tendo como restrições as Curvas Limite de Conformação. Por se tratar de um problema de deslocamento prescrito, a técnica utilizada pela formulação SIMP deixa de ter efeito na penalização das regiões intermediárias de material. Para contornar esta dificuldade foi proposta uma alteração da superfície de falha, cuja geometria reforça a eliminação do material intermediário. Os resultados obtidos foram satisfatórios neste quesito, sendo um importante passo para um contexto mais amplo, onde a busca de um leiaute ótimo está vinculada tanto a objetivos de desempenho da peça em uso (já estampada), quanto à restrição de falha no processo de manufatura.

Abstract

The tailored blanks consists of sheet metal with different thickness, strength or coverings, joined by a process of high quality welding, in order to form an only blank, that after the forming process, result in a final piece. The production of high quality sheet metal forming at the low time and cost, is one of the main objectives of the stamping industries. To prevent the high cost of the try-out procedures, the use of numerical simulation in sheet metal forming is in constant progress. The main numerical analysis tools available are based on the Finite Elements Method (FEM), which uses incremental formulations on the time by explicit or implicit techniques of integration. These simulations are characterized by high cost of processing, due to the highly nonlinear properties of the model.

However, in initials phases of designs, it is interesting to have a fast numerical tool in order to obtain an estimate of the thickness and strains variations, as well as the initial layout of the blank. Some simplified methods have been developed in the last years with this intention. The basic idea of these methods, known as Inverse Approach (or One-Step), is to carry through a nonlinear analysis to determine the nodes positions in initial blank, the strain and the thickness of the final piece, without considering the incremental processes of plasticity and contact.

In this work it was used topological optimization techniques and sheet metal forming analysis by Approach Inverse, to design the initial layout of a tailored blank, considering only the manufacture process as failed criteria. The optimization problem was modeled by Augmented Lagrangean Method where the Forming Limited Curves (FLC) were utilized as constraint of the problem of mass minimization. As the problem is characterized by the prescribed strain, the technique used by SIMP formulation did not have effect on the penalization of the intermediary density. In order to resolve this difficulty, it was proposed a change on the failed surface, where the geometry impose the decreasing of the intermediary material. The results obtained were satisfactory in the target, being a important step for a general context, where the searches for the optimum layout is tied the both performance of piece in use and manufacture process.

1 Introdução

Os *blanks* soldados ou *tailored blanks* consistem de peças de aços de diferentes espessuras, classes de resistência ou revestimentos, unidos por meio de algum processo de soldagem de alta qualidade (atualmente, soldagem a laser), de forma a resultar em um único *blank* que, após a conformação, dá origem à peça final. Estes surgiram como uma necessidade de manter o aço como matéria prima competitiva na indústria automobilística frente à introdução neste setor de materiais mais leves e com boas características mecânicas (ex.: ligas de alumínio e materiais compostos).

Para isto, foram organizados consórcios a nível mundial tais como o ULSAB - *Ultra Light Steel Auto Body* e o ULSAC - *Ultra Light Steel Auto Closures*, com a intenção de projetar carrocerias e painéis automotivos mais leves e mais rígidos que a média dos carros atuais, utilizando somente aço como matéria prima sem, contudo, penalizar a segurança e o desempenho estrutural, mantendo um custo compatível. Menor peso proporciona melhor economia de combustível e, conseqüentemente, menos poluição (estima-se que uma redução de 1% no peso do carro pode reduzir o consumo de combustível de 0.6% a 1%, [Dry, 2001]). Resultados excelentes foram alcançados nestes consórcios através do uso de aços de alta e ultra resistência e aços sanduíche, combinados com tecnologias como *tailored blanks* e hidroconformação. Em sua fase inicial, o programa projetou portas, capôs e tampas traseiras que são até 32% mais leves que a média das peças avaliadas. Somam-se a isto, um elevado aumento da segurança dados pelos coeficientes de rigidez em torção (80%) e flexão (52%), assim como do conforto (aumento do primeiro modo de vibração em 58%), [Andrade *et al.*, 2001], [Pereira *et al.*, 1999]. Nesta iniciativa de reduzir custos de fabricação, aumentar a produtividade e melhoria da qualidade dos veículos, os *tailored blanks* tem sido intensivamente usados nestes programas.

Tradicionalmente, a configuração geométrica e o material de um *blank* simples eram determinados em função da região mais crítica da peça. Hoje, o uso de *tailored blank* permite otimizar o projeto da peça, dividindo o *blank* em partes menores, cada uma com características e exigências específicas, e uní-las por meio de solda, formando um *blank* único que será conformado inteiramente. Entre as principais vantagens, pode-se citar [Picinini Filho *et al.*, 1999]:

- Permite reduzir peso dos veículos, através do uso de espessuras mais finas em partes da peça sem função estrutural.
- Permite que o desenho da peça seja otimizado, pois é possível unir um aço de alta conformabilidade, para regiões de estampagem profunda e complexa, com outro de maior resistência mecânica para regiões de maior sollicitação, que garantirá desempenho estrutural do componente estampado.
- Reduz o número de peças de reforço.
- Diminuição da quantidade de sucata.
- Reduz o número de operações de estampagem em prensa, conformando uma só peça em lugar de duas ou mais peças.

Desta forma, consegue-se reduzir o consumo de energia, otimizando a utilização das linhas de produção, diminuindo o tempo de produção em prensa e montagem no carro, reduzindo o estoque intermediário (estoca um lote apenas, em lugar de ter estoques de várias partes não unidas).

Apesar disto, há algumas desvantagens no que se refere ao processo de conformação dos *tailored blanks*. A zona termicamente afetada pelo cordão de solda e a diferença entre as propriedades geométricas e materiais dos aços que o compõem podem diminuir a conformabilidade da peça, além de provocar distorções não desejadas na linha de solda, [Kusuda *et al.*, 1997], [Dry 2001]. Além disso, existe um aumento de custo na fabricação do *blank* (corte preciso das chapas e posterior soldagem a laser).

Diante deste retrospecto de benefícios e restrições oferecidos pelo uso de *tailored blank*, alguns trabalhos começam a surgir aplicando técnicas de simulação numérica e otimização na estampagem e projetos de leiaute de *tailored blank*. Em Vogel *et al.* [2001] e Shin *et al.* [2002], foram utilizadas técnicas de otimização topológica, de forma e dimensional para estimar o leiaute de uma porta de automóvel, conformada a partir de *tailored blanks*, tendo como restrições as tensões em uso da porta (rigidez em flexão e torção).

Em ambos os trabalhos, não se levou em consideração as restrições em conformação para determinar o *blank* ótimo. Dry [2001] tem mostrado que dependendo da posição do cordão de solda e das diferenças de espessuras dos *blanks*, poderão surgir falhas dependendo da região da peça a ser conformada. Porém, a otimização em conformação ainda é pouco utilizada devido ao alto custo computacional para análise da sensibilidade do problema não linear, geralmente feita de forma incremental.

Contudo, em alguns trabalhos relativamente recentes tem-se utilizado métodos de aproximação inversa (conhecidos também como *One-Step*) aplicados à otimização de processos de estampagens, [Guo *et al.*, 1990], [Lee *et al.*, 1998], [Guo *et al.*, 2000], [Naceur

et al., 2001], [Delamézière *et al.*, 2002]. A aproximação inversa, por ser um método não incremental, é relativamente rápida, o que torna viável seu uso em problemas de otimização de conformação. Porém, possui algumas limitações quanto ao seu uso devido às hipóteses simplificativas adotadas. Por exemplo, o carregamento durante todo o processo de conformação deve ser proporcional e não há como calcular diretamente as tensões residuais ou a evolução do campo de tensões e deformações. Contudo é um método bastante prático quando se quer estimar as tensões e deformações no estágio final da peça conformada.

A proposta para este trabalho é utilizar técnicas de otimização topológica e análise de conformação de chapas via aproximação inversa, para estimar o leiaute final de um *tailored blank*. O objetivo é minimizar a massa de uma peça, com restrições, a princípio no processo de conformação. A abordagem da otimização topológica utiliza o conceito de propriedades intermediárias entre dois materiais. O parâmetro de controle é a densidade relativa $0 \leq \rho(x) \leq 1$ da propriedade. Se $\rho(x) = 0$, significa que o ponto material pertence à chapa de propriedade tipo 1. Se $\rho(x) = 1$, o ponto material pertence a uma região com chapa de propriedade tipo 2. A restrição em conformação foi feita através da inclusão da Curva Limite de Conformação, CLC, [Graf *et al.*, 1990], [Narasimhan *et al.*, 1991], [Stoughton 2000], [Delamézière *et al.*, 2002]. A escolha do método de aproximação inversa se deve ao fato de que este modelo é de execução rápida (se comparado aos métodos incrementais) e por permitir que a análise de sensibilidade seja determinada de forma analítica. Na discretização em elementos finitos, foram utilizados inicialmente elementos de membrana, que permitem num próximo trabalho a adição de efeitos de flexão.

Outra proposta viável corresponde a trabalhar com otimização de forma (controle das fronteiras de definição do domínio). Neste caso, o controle se efetua mediante o posicionamento dos nós de definição das curvas que compõem tanto as fronteiras externas do *blank*, quanto às fronteiras internas (linhas de solda). Dentre as vantagens de se trabalhar com este método pode-se citar o controle fino das geometrias, o uso de poucas variáveis de projeto, a possibilidade de se utilizar mais de dois tipos de chapas diferentes no *blank*, e a possibilidade de incorporar propriedades materiais e geométricas do cordão de solda no modelo. A principal desvantagem deste método é que ele necessita de uma definição a priori do leiaute do *tailored blank* e oferece pouca flexibilidade de mudanças geométricas. Este problema foi parcialmente tratado por Shin *et al.* [2002], que utilizou a otimização topológica para estimar um leiaute inicial e, posteriormente, a otimização de forma para o refino das fronteiras internas. No entanto, este trabalho utilizou o desempenho da peça estampada como guia de definição de leiaute, não havendo qualquer restrição de fabricação (conformação).

Embora, do ponto de vista tecnológico a caracterização do leiaute seja fundamentalmente definida pelo desempenho da peça já conformada, o presente trabalho busca focar o desempenho da peça em relação à sua fabricação, aspecto menos estudado em termos de otimização estrutural.

O tratamento do problema integrado, relacionando desempenho em serviço e restrição de falha em fabricação corresponde a uma segunda etapa de investigação a ser realizada, como se depreende das conclusões do presente trabalho.

No Capítulo 2, é apresentada uma revisão bibliográfica dos dois principais itens de conformação mecânica a ser abordado neste trabalho: *tailored blank* e CLC. Sobre a CLC, são apresentados também os principais métodos para a sua determinação experimental bem como analítica.

No Capítulo 3 é feita uma breve revisão sobre a simulação numérica em processos envolvendo plasticidade, bem como uma descrição mais detalhada da formulação do método de aproximação inversa que será usado na simulação do processo de estampagem.

No Capítulo 4, é feita uma revisão sobre a aplicação de técnicas de otimização estrutural em problemas de estampagem. Uma breve discussão das formulações possíveis para trabalhar com otimização em *tailored blank* também é apresentada.

Baseado nestas revisões, o Capítulo 5 apresenta o detalhamento matemático da proposta de tese deste trabalho.

No Capítulo 6, mostram-se os resultados obtidos da aferição da aproximação inversa e os resultados obtidos na solução do problema de otimização topológica com restrição em conformação.

Comentários finais e conclusões obtidas neste trabalho são apresentados no Capítulo 7. Finalmente, no Apêndice A é apresentado uma descrição sucinta da análise de sensibilidade em problemas não-lineares.

2 Conformação Mecânica -

Tailored Blank e CLC

2.1 - ASPECTOS GERAIS

Dentre os processos que ocasionam mudança de forma de um material metálico, a conformação de chapas é a que teve um dos maiores desenvolvimentos a partir da metade do século XX. A crescente demanda da indústria automobilística no sentido de requisitar materiais mais funcionais e que proporcionem uma melhor estética aos seus produtos foi a principal força motriz deste desenvolvimento. A conformação de chapas consiste em obter peças de forma permanente a partir de chapas finas, necessitando da otimização de uma série de parâmetros relacionados ao material, ao modelo da peça, às características das ferramentas, da prensa e das condições de operação. A dificuldade encontrada no domínio da influência destes parâmetros, fez com que seu emprego permanecesse empírico durante um longo tempo, sendo considerado como um fator de "arte". Porém, recentemente, o processo de conformação de chapas tem sido foco de intensas pesquisas, agregando assim, um considerável avanço tecnológico.

2.2 - TAILORED BLANKS

Em 1994, como resultado de estudos estatísticos sobre o decréscimo do uso do aço e o avanço de outros materiais na fabricação de veículos, a indústria do aço (composta originalmente por 35 produtores de aço de 18 países) organizou um consórcio denominado de projeto ULSAB (*Ultra Light Steel Auto Body*), [Pereira *et al.*, 1999]. Este consórcio comissionou a Porsche Engineering Services (PES) para conduzir um estudo com a intenção de determinar se uma carroceria substancialmente leve, feita somente de aço, poderia ser projetada. O aço, dentre seus principais atributos, pode-se destacar o baixo preço no mercado, alta resistência mecânica, abundância de matéria prima, facilmente conformável em formas complexas e grande capacidade de absorver energia em caso de colisões.

Na primeira fase do projeto, utilizaram-se ferramentas de CAE (*Computer Aided Engineering*) para auxiliar a obter uma carroceria mais leve e mais rígida que a média das utilizadas nos veículos até então, utilizando somente aço como matéria prima. Menor peso proporciona melhor economia de combustível e, conseqüentemente, menor poluição. Pesquisas têm mostrado que a redução de 1% no peso do veículo pode resultar na redução de 0,6 a 1% do consumo de combustível, [Pallet *et al.*, 2001]. Além disso, uma estrutura mais rígida proporciona melhorias na dirigibilidade e conforto do veículo. Baseado em dados de *benchmarking*, as metas de desempenho estrutural do veículo foram estabelecidas, Tabela 2.1. Foram investigadas todas as principais técnicas de fabricação utilizadas no setor automobilístico e usado o melhor de cada uma para desenvolver uma estrutura bastante leve, sem sacrificar o desempenho. O resultado desses estudos revelou as seguintes possibilidades [Pereira *et al.*, 1999], [Dry, 2001]:

- redução do peso da carroceria em 25%;
- aumento na rigidez a torção e flexão em aproximadamente 80% e 25% respectivamente;
- aumento da primeira frequência natural em 58%;
- redução de custos em até 14%.

Com o sucesso desta primeira fase, foi implementada a segunda fase que consistiu na construção de protótipos e na avaliação da carroceria em vários testes de simulação de impacto utilizando ferramentas de CAE. Em 1998, o consórcio apresentou à indústria do mundo automotivo, uma carroceria feita totalmente sob os conceitos pré-definidos dentro do ULSAB.

Tabela 2.1 - Valores de *benchmarking*, metas e resultados do projeto ULSAB, [Pereira *et al.*, 1999].

Fator de Desempenho	Valores de Benchmarking	Metas	Resultados (medidos)
Massa (kg)	271	< 200	203
Rigidez em Torção (Nm/mm)	11.531	> 13.000	20.800
Rigidez em Flexão (N/mm)	11.902	> 12.200	18.100
1º Frequência Natural (Hz)	38	> 40	60,1

O consórcio continuou nos anos seguintes, porém incluindo novos projetos além do ULSAB, para os demais componentes do automóvel. Para o projeto de novas portas com baixo peso utilizando somente aço como matéria prima, foi criado o ULSAC - *Ultralight Steel*

Auto Closure. Para os sistemas de suspensão, foi criado o ULSAS - *Ultralight Steel Auto Suspension*, e o mais recente, o projeto ULSAB-AVC (*Advanced Vehicle Concepts*), visando o projeto de veículos ainda mais otimizados, a partir de 2004.

Os excelentes resultados do projeto se sustentam, principalmente, pelo uso maciço de *tailored blanks*, processos de hidroconformação (*hidroforming*), aços de alta resistência e aços sanduíches, Figura 2.1.

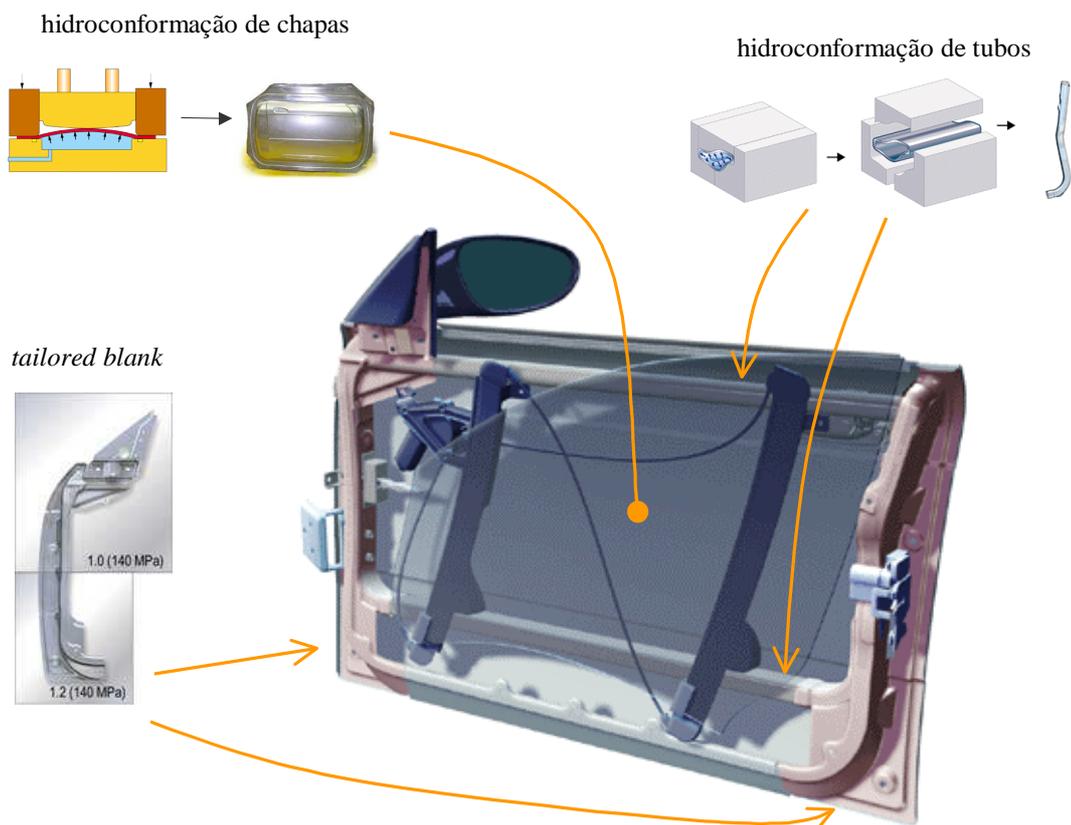


Figura 2.1 - Exemplo de um projeto de uma porta automotiva segundo os critérios da ULSAC. (Fonte: <http://www.ulsac.org>)

Um *tailored blank* consiste de aços de diferentes espessuras, classes de resistência e tipos de revestimentos, soldados de forma a produzir um único *blank* que após ser conformado dará origem à peça final. Pelo uso deste processo, é possível produzir uma peça com diferentes espessuras e materiais, levando a um componente otimizado. A título de exemplificação, a Figura 2.2 apresenta um *tailored blank* usado para fazer o painel externo de um veículo. Este *tailored blank* reúne dois graus de resistência mecânica diferentes, além, de quatro espessuras distintas.

Diferentes tipos de processos de soldagem podem ser usados, mas a solda laser é atualmente o que tem mostrado melhores resultados tanto em termos de estética quanto em desempenho. Acredita-se que a primeira aplicação de um *tailored blank* ocorreu no início da

década de 80 quando a empresa Thyssen usou esta tecnologia para a produção de assoalhos de um veículo da Audi, [Pallet *et al.*, 2001]. O grande incentivo que impulsionou o desenvolvimento desta tecnologia foi a necessidade de manter o aço no mercado automobilístico tendo em vista o aumento do uso do alumínio neste setor. Os *tailored blanks* se apresentaram como uma ótima oportunidade para fabricação de componentes de aço, com uma quantidade mínima de material. Em um processo de conformação convencional, a área mais solicitada da peça ditava a espessura ou o material que o *blank* deveria ter antes do processo de conformação. Com o uso dos *tailored blank* é possível, por exemplo, colocar um aço mais espesso (ou mais resistente) numa região mais solicitada (como dobradiças e pontos de apoio), colocar um aço mais fino (e/ou menos resistente) nas regiões que não têm função estrutural e colocar um aço com um revestimento contra corrosão nas regiões sujeitas às intempéries. A possibilidade de poder utilizar diferentes tipos de aços antes da conformação evita a necessidade de adicionar reforços e componentes na peça acabada, diminuindo o tempo de fabricação e reduzindo os custos.

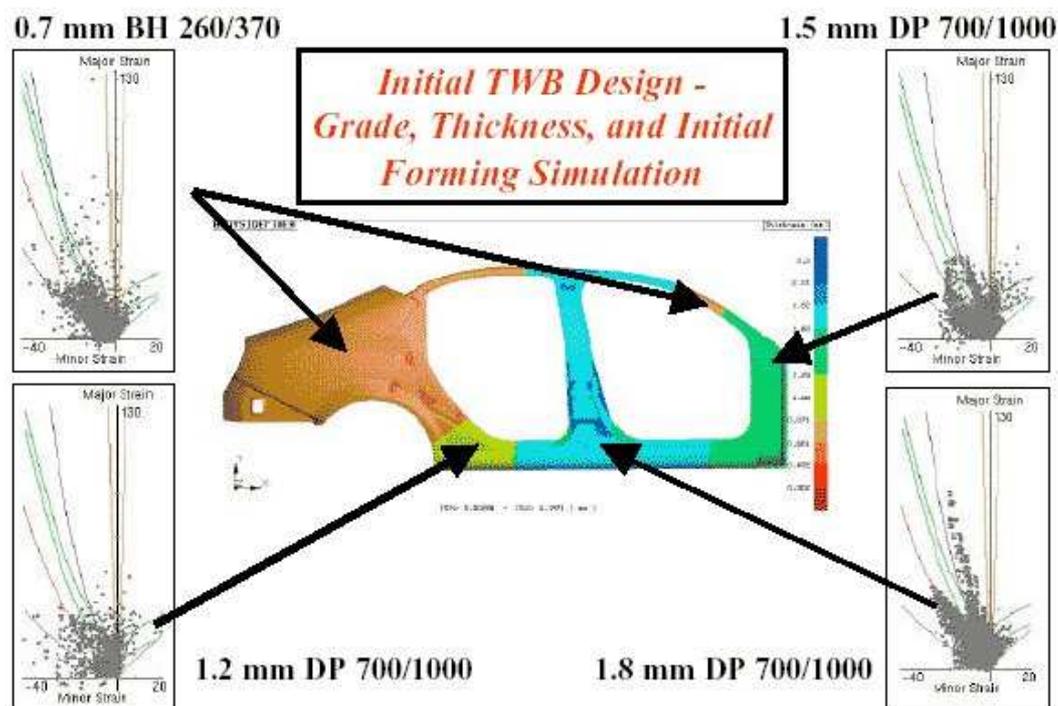


Figura 2.2 - Painel lateral externo do projeto ULSAB-AVC. (fonte: <http://www.ulsab-avc.org>)

O *tailored blank* (TB) já começa a cobiçar outros setores da indústria, além da automotiva. É o que aponta Palett *et al.* [2001], citando como exemplos portas de garagem, painéis estruturais, e máquinas de lavar (com um TB constituído por um aço de maior resistência à corrosão para as partes em contato com a água, e um aço de menor valor e maior conformabilidade para as partes externas e quinas sujeitas à dobramentos). Atualmente, o

fator limitante para este avanço do uso dos TB continua sendo financeiro (alto custo da solda laser) e tecnológico (precisão dos cortes das chapas).

No entanto, os TB tem sido foco de várias pesquisas nos últimos anos. A simulação numérica, baseada em técnicas de elementos finitos, tem sido empregada em grande parte destas pesquisas. Em Meinders *et al.* [2000] foi avaliado o deslocamento da linha de solda de um TB durante conformação, utilizando um modelo de membrana. O cordão de solda em si não foi modelado, sendo os aços de diferentes propriedades e espessuras, simplesmente unidos. Em Zhao *et al.* [2001], vários modelos de elementos (sólido 3D e de casca, com e sem incluir um modelo para o cordão de solda) foram usados para analisar a conformabilidade dos TB. Resultados experimentais e numéricos mostraram que a inclusão de um modelo para a linha de solda pode melhorar sensivelmente o resultado, e que um elemento de casca é suficiente para obter bons resultados. Técnicas de simulação numérica também foram utilizadas em Zimniak *et al.* [2000] para modelar tanto o processo termomecânico da soldagem a laser, como também o processo de estampagem. O deslocamento do cordão de solda foi avaliado tanto numérica quanto experimentalmente. A distorção do cordão de solda e a conformabilidade também foram estudadas em Heo *et al.* [2001], e a utilização de *quebra-rugas* foi proposto como um meio para atenuar este efeito durante a conformação de TB.

Em Ahn *et al.* [2000], tanto as características do *quebra-rugas*, como o posicionamento do cordão de solda foram avaliados numericamente e experimentalmente na busca de parâmetros ótimos para a fabricação de um painel externo de um veículo segundo os conceitos da ULSAB. Algumas soluções têm sido propostas para evitar este excessivo movimento do cordão de solda, como por exemplo, a utilização de fixadores do cordão de solda durante o processo de estampagem, [Kinsey *et al.*, 1999], [Kinsey *et al.*, 2000], [Cao *et al.*, 2001]. Resultados de simulação numérica mostraram que esta técnica ajuda a evitar a ruptura no material mais fraco (ou menos espesso), aumentando a conformabilidade dos TBs.

A solda e a zona termicamente afetada também podem influenciar negativamente na conformabilidade do *blank* devido ao desenvolvimento de estruturas martensíticas, [Meinders *et al.*, 2000]. Em Araújo *et al.* [2001], observou-se através de ensaios Erichsen que esta fragilização na região da solda pode reduzir a altura de embutimento em até 25%, comparando com a altura de embutimento do metal base. Kusuda *et al.* [1997] mostrou que a redução da altura de embutimento pode variar de acordo com a relação entre a direção de deformação principal e a direção da linha de solda, sendo que, quando a direção de deformação principal é paralela à linha de solda, a altura de embutimento é reduzida em aproximadamente 30%. E quando a direção principal é perpendicular a linha de solda, a altura de embutimento decresce cerca de 10%.

A conformabilidade de TB depende também das espessuras e das propriedades mecânicas de cada aço que compõem o *blank* soldado. Araújo *et al.* [2001] verificou que *blanks* formados com mesmo material e geometria exibem ruptura transversal ao cordão, sendo esta ditada pela ductilidade do cordão de solda. No caso de *blanks* formados com aços de diferentes espessuras e/ou materiais, a fratura tende a ocorrer fora da região da solda e disposta paralelamente ao cordão, no lado do aço de menor espessura ou de propriedades mecânicas inferiores. Neste caso, frequentemente ocorre um deslocamento do cordão de solda em direção ao aço de maior espessura, em virtude da maior deformação a que o aço de menor espessura é submetido. Dry [2001] mostra que a conformabilidade das juntas soldadas a laser cai com o aumento da diferença entre as partes a serem unidas.

A posição do cordão de solda no *blank* também é um fator importante na conformabilidade da peça, pois estudos têm mostrado que regiões de estiramento biaxial são mais suscetíveis a falhas que regiões de embutimento e estiramento uniaxial, [Dry 2001].

Na fabricação dos TBs, a junção entre os *blanks* é geralmente retilínea devido à limitações tecnológicas com relação ao processo de soldagem na época de sua idealização, ou seja, a solda era feita seguindo um traçado linear. Devido aos avanços na tecnologia de soldagem para fabricação dos TB, soldas a laser com traçado não linear já são possíveis, [Vogel *et al.*, 2001]. Com soldas seguindo um traçado não linear é possível realizar projetos mais complexos, com grandes vantagens sobre a solda com traçado linear, tais como: redução do peso, melhores condições de conformação, aumento nas frequências naturais e facilidade na montagem final do produto. Evidentemente, a solda em traçado não linear é consideravelmente mais complexa que a solda em traçado linear, pois necessita de uma alta precisão nos cortes dos *blanks* entre outros fatores. Porém, os benefícios podem ser consideráveis, pois já foi alcançada uma redução de 10% no peso de uma porta projetada levando em consideração traçados não lineares entre os *blanks*, com relação a uma porta projetada com linhas de soldas retilíneas (fonte: <http://www.autosteel.org/booming.php3>).

Alguns trabalhos recentes têm empregado técnicas de otimização numérica à projetos de leiaute de TB. Em Vogel *et al.* [2001], utilizou-se um módulo de otimização topológica para estimar o leiaute de uma porta de automóvel, conformada a partir de *tailored blanks*. Em seguida, outro módulo de otimização foi utilizado para determinar as espessuras de cada parte do *blank*, tendo como objetivo minimizar o peso sob restrições de rigidez em flexão e torção. Um trabalho semelhante foi feito em Shin *et al.* [2002], onde a otimização topológica foi utilizada para determinar as posições ótimas das linhas de solda em um TB de uma porta automotiva, utilizando em seguida, otimização paramétrica para determinar as espessuras que garantissem o mínimo peso, tendo como restrições as tensões em uso da porta. Porém, em

nenhum destes casos levou-se em consideração a conformabilidade da peça, pois ao mudar a espessura ou propriedade material de uma parte do *blank*, altera-se também o limite máximo de deformação que a peça pode suportar. A principal ferramenta disponível hoje na literatura para determinar este limite é a Curva Limite de Conformação, como é descrita a seguir.

2.3 CURVAS LIMITES DE CONFORMAÇÃO

A curva limite de conformação (*Forming Limit Curve*), ou CLC, indica as deformações máximas que uma determinada chapa metálica pode sofrer antes de ocorrer uma falha. Na década de 60, pesquisas iniciais sobre as CLCs foram conduzidas tanto por parte dos fornecedores quanto por parte dos consumidores de chapas para conformação. Estas pesquisas em laboratórios tinham por objetivo definir a forma básica e valores da CLC para aços de baixo carbono, o que levou a crer que a estricção local em processo de estampagem poderia ser previsto.

Durante os anos 70, o avanço das pesquisas em aço expandiu a aplicação das CLCs para aços de alta resistência e para uma grande variedade de espessuras de chapas. Evoluções na medida da espessura por ultra-som no início dos anos 80 aumentaram o uso das CLCs no monitoramento das deformações das chapas de metais no controle da produção, o que consequentemente levou a criação de CLCs baseadas na deformação da espessura.

O enorme crescimento da simulação computacional de processos de conformação de chapas metálicas no início dos anos 90 revelou novas aplicações para as CLCs, que é o método primário para determinar quando uma chapa de metal irá falhar num processo de simulação virtual.

2.3.1 - Determinação das Curvas Limite de Conformação

O conceito das CLCs foi inicialmente idealizado por Keeler (1963) e Goodwin (1968) citados em [Banabic, 1999], e sua determinação era obtida apenas por procedimentos experimentais. Sua construção é baseada na obtenção das deformações principais (ϵ_1 , ϵ_2) de pontos do corpo de prova que estejam próximo à estricção, ou ruptura, ou outros tipos de falha, variando de acordo com o critério escolhido.

Até hoje, sua determinação experimental é muito utilizada, tanto no meio acadêmico quanto nas indústrias. Para obtenção experimental da CLC, imprime-se uma grade de círculos (ou quadrados) em uma chapa para análise. Esta é deformada por um punção (cuja forma pode variar de acordo com o método utilizado) até a formação de uma estricção localizada.

Em seguida, medem-se as deformações próximas a esta estrição através da mudança de geometria dos círculos (ou quadrados), obtendo assim as deformações principais (ϵ_1 , ϵ_2). Este procedimento é feito para várias chapas de diferentes larguras (Figura 2.3), de modo a obter pontos que representem os diversos estados de deformação, variando de embutimento puro, ao estiramento biaxial. Com posse destes pontos, pode-se traçar a CLC, Figura 2.4.

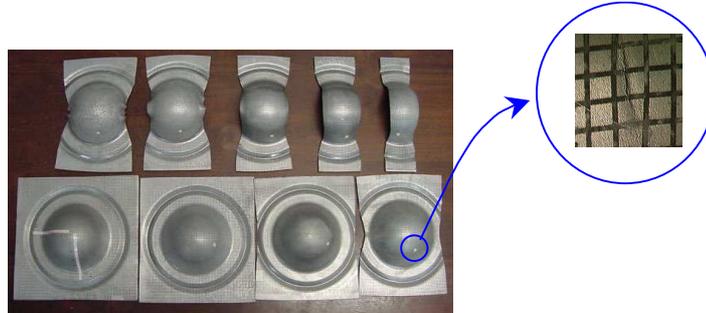


Figura 2.3 - Ensaio experimental para a determinação da CLC, [Lobão, 2003].

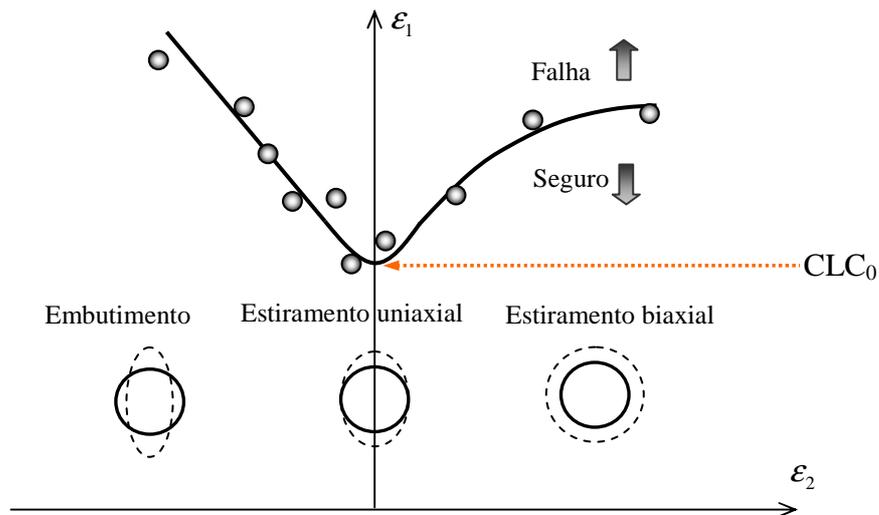


Figura 2.4 - Esquema de uma curva limite de conformação determinada experimentalmente.

A altura da curva é definida por CLC_0 (mostrado na Figura 2.4), que pode ser determinada através de uma equação empírica em função da espessura da chapa e do expoente de encruamento n do aço da chapa a ser conformada, dado como [Keeler, 2002^a]:

- ◆ $CLC_0 = (23,3 + 14,2t)n/0,21$ \implies se a espessura t está em mm.
- ◆ $CLC_0 = (23,3 + 360t)n/0,21$ \implies se a espessura t está em in.

Devido ao expressivo esforço e tempo gastos para a determinação experimental das curvas limites de conformação, começaram a surgir nas últimas décadas os primeiros modelos teóricos das CLCs. Marciniak and Kuczynski [1967] foram quem propuseram o primeiro

método analítico para a determinação do limite de deformação através da perda de estabilidade em uma chapa metálica. Neste trabalho, uma imperfeição localizada foi introduzida ao longo da direção de extensão zero, e sua evolução acompanhada ao longo de um processo incremental. O critério de escoamento utilizado foi o Critério de Hill de 1948 (*Hill's 1948 yield criterion*). Desde então, muitos trabalhos surgiram baseados neste método, chamado de M-K (nome dos autores: Marciniak e Kuczynski). As principais evoluções aconteceram no critério de escoamento adotado, visto que este pode influenciar fortemente a localização da CLC em estado de deformações biaxiais [Banabic *et al.*, 2001]. Graf *et al.* [1990] propuseram o seguinte critério de escoamento para o caso de anisotropia normal (isotropia no plano da chapa) e estado plano de tensão:

$$|\sigma_1|^a + |\sigma_2|^a + r|\sigma_1 - \sigma_2|^a = (r+1)\bar{\sigma}^a \quad (2.1)$$

onde a é um expoente maior do que 2. Nota-se que se $a = 2$, a equação reduz ao critério de Hill de 1948. Graf¹ mostrou que a forma da CLC independe do valor do coeficiente de anisotropia r para altos valores de a (maior que 6), porém o mesmo não acontece para baixos valores de a (por exemplo, $a = 2$), mostrando uma CLC altamente dependente do valor de r . Contudo, a forma da CLC mostrou-se bastante sensível ao expoente do critério de escoamento, a , mostrando que, para $a = 6$ e 8 os resultados se aproximam mais com o verificado experimentalmente do que se utilizado $a = 2$ (critério de Hill de 1948). Resultados semelhantes também foram obtidos por Zhao *et al.* [2001], onde as CLCs também foram determinadas usando como critério de escoamento, tanto o de Hill de 1948, como o utilizado por Graf *et al.* [1990], e os resultados comparados com os obtidos por procedimento experimental. Zhao ainda determinou os diagramas de tensão limite de conformação, FLSD (*Forming Limit Stress Diagram*) mostrando que estes diagramas não são influenciados pelo caminho da deformação (*straining path*), ao contrário do que acontece com as CLCs².

Em Xu *et al.* [1998], as CLCs foram simuladas através do método M-K utilizando o critério de escoamento proposto por Hill em 1993 (*Hill's 1993 yield criterion*). Neste critério, há 5 parâmetros materiais independentes, podendo assim, oferecer uma maior flexibilidade na

¹ As simulações foram feitas somente para o lado direito da curva (primeiro quadrante, com estiramento biaxial), visto que os resultados obtidos para o lado esquerdo (embutimento) independem do critério de escoamento e do coeficiente de anisotropia. Isto foi comprovado com análises feitas por outros autores, [Chan *et al.*, 1984] e [Lian *et al.*, 1987] citados em Graf *et al.* [1990], tendo chegado a resultados satisfatórios.

² Embora a maioria dos métodos para a determinação teórica da CLC demonstrar ser uma ferramenta útil para a análise limite de conformação, eles são válidos apenas para os casos de carregamento proporcional, onde a razão entre as tensões principais permanecem constante durante o processo de conformação. Esta questão não pode ser ignorada na análise de processos de conformação baseadas em multi-estágios ou onde haja material pré-deformado, [Stoughton, 2000].

representação da curva de escoamento. Comparações entre as CLCs obtidas teoricamente por este modelo e experimentalmente mostraram uma pequena discrepância, que segundo o autor, se deve provavelmente ao fato das CLCs não considerarem a história da deformação. Em Banabic [1999], o critério de Hill de 1993 também foi utilizado na determinação teórica das CLCs, porém Banabic utilizou a condição de instabilidade de Swift para estrição difusa, ao invés do método M-K. Em Banabic *et al.* [2001], uma comparação entre estes dois métodos foi feita, mostrando que o método M-K pode super-estimar os resultados no domínio das deformações bi-axiais e sub-estimar no domínio de embutimento. E em Banabic *et al.* [2002], um novo critério de escoamento é apresentado, o BBC2000, podendo ter até 7 parâmetros materiais independentes. Este critério foi utilizado em conjunto com o método M-K para determinação de CLCs, mostrando boa concordância com resultados experimentais.

A seguir, será descrito mais detalhadamente o método M-K junto com o critério de escoamento proposto por Graf *et al.* [1990] descrito na eq. (2.1).

2.3.2 - Método M-K

Em suas investigações, Marciniak e Kuczynski [1967] consideraram uma chapa de metal sujeita a um carregamento biaxial no plano. Todavia, eles supuseram que o material continha imperfeições que poderiam surgir através de uma geometria não uniforme, ou por micro trincas, inclusões, falhas, etc. Eles modelaram esta imperfeição como um "rebaixo" ou "depressão" que tem uma espessura levemente menor que a da chapa. Este rebaixo está alinhado de forma perpendicular à maior tensão principal, como mostra a Figura 2.5. Pode-se representar esta imperfeição pela razão entre as espessuras iniciais da região b e a :

$$f = \frac{t_{b0}}{t_{a0}} \quad (2.2)$$

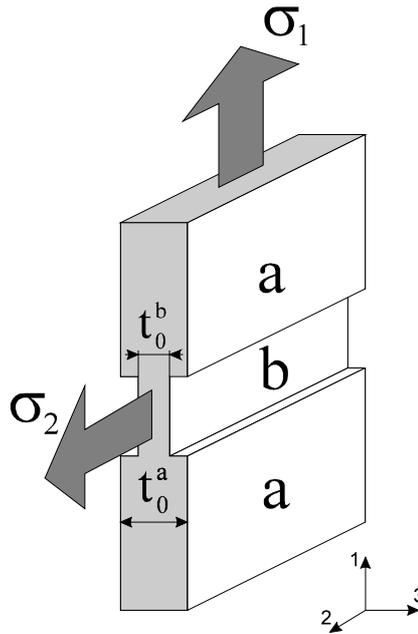


Figura 2.5 - Esquema do modelo M-K mostrando a imperfeição b em uma região a da chapa.

Outra consideração é que o processo de estirções não afete as condições de contorno externas, exigindo-se uma compatibilidade dos deslocamentos paralelos à imperfeição:

$$\epsilon_{2a} = \epsilon_{2b} \quad (2.3)$$

onde o primeiro subíndice refere-se à direção da deformação, e o segundo à região da chapa. Considerando-se um processo de conformação proporcional para a região A, tem-se:

$$\alpha_a = \frac{\sigma_{2a}}{\sigma_{1a}} \quad (2.4)$$

Esta razão é constante durante todo o processo, assim como também deve ser sempre satisfeito o equilíbrio de forças na direção principal I:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 \\ \sigma_{1a} t_a &= \sigma_{1b} t_b \\ \sigma_{1a} t_{a0} \exp(\epsilon_{3a}) &= \sigma_{1b} t_{b0} \exp(\epsilon_{3b}) \\ \frac{\sigma_{1a}}{\sigma_{1b}} &= f \cdot \exp(\epsilon_{3b} - \epsilon_{3a}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde

$$\varepsilon_{3a} = \ln\left(\frac{t_a}{t_{a0}}\right); \quad \varepsilon_{3b} = \ln\left(\frac{t_b}{t_{b0}}\right);$$

Durante o processo de cálculo, um incremento de deformação $\Delta\varepsilon_{1b}$ é imposto no rebaixo, e os valores correspondentes de $\Delta\varepsilon_{1a}$ e $\Delta\varepsilon_{2a}$ são calculados a partir das equações acima e do critério de escoamento, eq. (2.1). O algoritmo e o detalhamento deste procedimento podem ser encontrados no apêndice de Graf *et al.* [1990]. Isto é repetido com novos incrementos de $\Delta\varepsilon_{1b}$ até que $\Delta\varepsilon_{1a}$ alcance um valor razoavelmente pequeno se comparado a $\Delta\varepsilon_{1b}$, ou seja, $\Delta\varepsilon_{1a}/\Delta\varepsilon_{1b} \leq \text{valor}$ ³. Este procedimento é feito para várias relações de tensões α_a obtendo assim vários pontos da CLC.

Há ainda alguns trabalhos em que a CLC é simulada numericamente através do método dos elementos finitos, [Narasimhan *et al.*, 1991]. Neste caso, o modelo de M-K (Figura 2.5) é discretizado em elementos sólidos ou de casca, e as condições de compatibilidade e contorno são definidas a priori no software, assim como o critério de encruamento e a equação constitutiva. Um procedimento incremental semelhante ao M-K analítico é realizado até que o critério de parada seja alcançado.

Neste capítulo, foi apresentada resumidamente a importância e o conceito básico dos *tailored blanks* bem como a definição e as possíveis formas de obtenção das curvas limites de conformação (CLC). Como será visto nos próximos capítulos, o conceito de *tailored blank* foi a principal motivação para o uso da otimização topológica com restrição na conformação, neste caso, através das CLCs.

³ Embora esta definição pareça arbitrária, a CLC é um tanto insensível a valores muito pequenos para o critério de parada. Em Graf *et al.* [1990], o limite de falha é estipulado sendo de 0,1, e em Xu *et al.* [1998] de 0,15.

3 Simulação Numérica em Plasticidade -

Método por Aproximação Inversa

3.1 - ASPECTOS GERAIS

As simulações numéricas de processos de conformação mecânica se caracterizam por consumir muito tempo de processamento devido às propriedades não-lineares do modelo. Devem ser considerados o comportamento não-linear do material, grandes deformações, contato entre a ferramenta e chapa, dentre outros.

Durante os últimos anos, diferentes tipos de formulações baseadas nos Método dos Elementos Finitos, MEF, para simulação de processos de conformação mecânica tem sido apresentados através do desenvolvimento de vários aspectos, tais como tipos de elementos, relações cinemáticas, relações constitutivas e metodologias de solução. A base para a análise em elementos finitos de problemas envolvendo grandes deformações não estava bem estabelecida até meados dos anos 70, quando começam a surgir os primeiros modelos para simulação em conformação mecânica, [Mattiasson, 2000].

Para o caso de conformação de chapas, o problema é usualmente descrito utilizando a formulação Lagrangeana. Com relação aos métodos de solução, podem-se citar três métodos principais: quasi-estático implícito, dinâmico explícito e aproximação inversa [Tekkaya, 2000].

Nos métodos quasi-estático implícitos, que foram os primeiros métodos usados na simulação de processos de conformação, o equilíbrio é satisfeito ao final do incremento de tempo. Este método possibilita uma solução estática do problema de deformação e com controle da convergência, podendo ser incondicionalmente estável. O tempo computacional aumenta em forma quase quadrática com o aumento do número de elementos e, devido à necessidade de inversão de matriz tangente a cada passo e à condição de convergência do problema, exige-se uma grande capacidade de memória e processamento. Outra desvantagem do método implícito está associado as dificuldades de convergência de equilíbrio (em cada passo), devido principalmente ao tratamento das condições de contato em geometrias complexas [Sala, 2001]. Apesar destas desvantagens, a característica de poderem ser

incondicionalmente estáveis permite a utilização de incrementos de carga somente limitados por aspectos de precisão. Assim, havendo convergência, a análise de um processo pode ser mais rápida que no caso dos métodos explícitos, cujo tamanho do incremento de carga é fortemente limitado pelas condições de instabilidade. Finalmente, a exigência de satisfação de equilíbrio a cada incremento torna as soluções mais confiáveis que no caso dos métodos explícitos.

No caso dos métodos dinâmicos explícitos, a principal vantagem é a sua robustez. Devido ao fato de não existir nenhuma verificação do controle de convergência durante todo o processo de solução, o método sempre oferece um resultado final, ao contrário do que acontece nos métodos implícitos. Em geral requerem menos memória e são mais simples de programar que os implícitos. Por outro lado, há várias desvantagens. Dentre estas, podem ser citadas a necessidade de incrementos de tempo muito pequenos para satisfazer condições de estabilidade e a ausência de um controle de convergência que pode levar a resultados oscilatórios e insatisfatórios.

Nos métodos por Aproximação Inversa (também conhecidos por Métodos *One-Step*) com o auxílio de hipóteses simplificadoras, é possível simular o problema de estampagem de chapas partindo da configuração final para a inicial em apenas um passo, e em um curto espaço de tempo. A dependência da história do material é desconsiderada e as complexas relações de contato/atrito são simplificadas. O aspecto principal que define o método e a possibilidade de adotar hipóteses simplificadas é o conhecimento a priori da geometria final da peça deformada, que depende da forma das ferramentas (punção, matriz). A principal vantagem deste método é obviamente o baixo tempo computacional. Apesar das consideráveis simplificações introduzidas nestes métodos, eles têm demonstrado ser uma ferramenta bastante útil em processos de estampagem, principalmente em fases preliminares de projeto, onde há a necessidade de um método rápido que forneça um esboço da distribuição de tensão e deformação da peça conformada.

Nas seções seguintes, será visto com mais detalhe a formulação do método por Aproximação Inversa. Porém, com o objetivo de tornar o texto minimamente auto-contido, serão descritos brevemente os fundamentos básicos necessários para a compreensão das teorias constitutivas do material e, em particular, da adotada neste caso.

3.2 – DEFINIÇÕES BÁSICAS. PRINCÍPIOS DE CONSERVAÇÃO E BALANÇO

Pode-se descrever cinco Princípios de Conservação e Balanço ou, como são conhecidos na Mecânica do Contínuo, Leis Fundamentais da Termodinâmica dos Meios Contínuos, [Khan *et al.*, 1995]:

1. Conservação da massa.
2. Conservação da quantidade de movimento linear.
3. Conservação da quantidade de movimento angular.
4. Primeira lei da termodinâmica (conservação de energia).
5. Segunda lei da termodinâmica (que em combinação com a primeira lei da termodinâmica, permite a obtenção da Desigualdade de Clausius-Duhem).

Os três primeiros princípios de conservação permitem estabelecer as equações de movimento e equilíbrio do corpo, tanto nas suas expressões diferenciais (fortes) como nas suas formas variacionais (formulação fraca - Princípio dos Trabalhos Virtuais). A primeira e a segunda lei da termodinâmica oferecem um marco para a construção das equações constitutivas que caracterizam o comportamento do material sob a ação de solicitações mecânicas, relacionando as tensões/taxa de tensões às deformações/taxa de deformações.

A equação que define a propriedade de conservação local da massa é dada por:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_x \cdot \{\dot{u}\} = 0 \quad (3.1)$$

onde ρ é a densidade do material, $\{\dot{u}\}$ o vetor da taxa de deslocamento, e $\nabla_x \cdot \{\dot{u}\}$ é o divergente da taxa de deslocamento. Esta equação também é conhecida como Equação da Continuidade, [Malvern, 1969]. Se o material é incompressível de tal forma que a densidade de massa ρ permanece constante enquanto o material se deforma, tem-se $\dot{\rho} = 0$ e a eq. (3.1) torna-se:

$$\nabla_x \cdot \{\dot{u}\} = \text{tr}([D]) = 0 \quad (3.2)$$

onde $[D]$ é o tensor taxa de deformação. Esta condição também pode ser apresentada na configuração de referência a partir da densidade ρ_0 de um ponto material antes da deformação,

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \det([F]) \quad (3.3)$$

onde $[F]$ é o gradiente de deformação. Para materiais incompressíveis, tem-se que $\rho_0 = \rho = \text{constante}$ e, portanto $\det([F]) = 1$.

O princípio da conservação da quantidade de movimento linear é uma generalização da segunda Lei de Newton postulando que a taxa de variação da quantidade de movimento linear de um volume material é igual à resultante das forças que atuam neste volume material. Este é o princípio fundamental da dinâmica dos meios deformáveis, que pode ser expresso matematicamente como:

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \{ \dot{u} \} dv = \int_{v(t)} \rho \{ b \} dv + \int_{\partial v(t)} \{ t_n \} \partial v(t) \quad (3.4)$$

onde $v(t)$ é o volume ocupado por uma parcela arbitrária do corpo e $\partial v(t)$ sua superfície, ambos na configuração para o tempo t . O vetor $\{b\}$ é a força de corpo por unidade de volume e $\{t_n\}$ é a tração sobre a superfície ∂v na direção normal $\{n\}$. Aplicando o Teorema da Divergência [Malvern, 1969], e a condição que o equilíbrio deve ser satisfeito para qualquer parte do corpo $v(t)$, pode-se chegar à Equação Local de Movimento de Cauchy, que pode ser expressa na configuração atual através do tensor de Cauchy $[\sigma]$ ou na configuração de referência, através do primeiro tensor de Piola-Kerchhoff $[P]$:

$$\begin{aligned} \nabla_x \cdot [\sigma] + \rho \{ b \} &= \rho \{ \ddot{u} \} \\ \nabla_x \cdot [P] + \rho_0 \{ b_0 \} &= \rho_0 \{ \ddot{u} \} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Nestas expressões, ∇_x define o operador gradiente em relação à coordenada atual $\{x\}$, e ∇_x em relação à coordenada de referência $\{X\}$. $\{b_0\}$ e ρ_0 são a força de corpo por unidade de volume e densidade respectivamente, ambos na configuração referência $\{X\}$. Estas expressões podem ser escritas no seu formato variacional através de resíduos ponderados, dando origem ao Princípio dos Trabalhos Virtuais. Na configuração atual (que será usada neste trabalho), a equação de movimento em forma variacional é dada por:

$$\delta W = \int_v [\sigma] \cdot \nabla_x \{ \delta u \} dv - \int_{\partial v} \{ t_n \} \cdot \{ \delta u \} d\Gamma - \rho \int_v \{ b \} \cdot \{ \delta u \} dv + \rho \int_v \{ \ddot{u} \} \cdot \{ \delta u \} dv = 0 \quad (3.6)$$

O princípio da quantidade de movimento angular também é uma generalização da segunda lei de Newton, postulando que a taxa de variação da quantidade de movimento angular de um volume material é igual à soma vetorial dos momentos que atuam neste volume material:

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} (\{r\} \times \rho \{\dot{u}\}) dv = \int_{v(t)} (\{r\} \times \rho \{b\}) dv + \int_{\partial v(t)} (\{r\} \times \{t_n\}) d\partial v \quad (3.7)$$

Desta condição, resulta a simetria do tensor de Cauchy, isto é, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, [Khan *et al.*, 1995].

A primeira lei da termodinâmica postula que para um determinado sistema fechado, a taxa total de trabalho feito sobre o sistema pelos agentes externos deve ser igual à taxa de variação da energia total do sistema. A expressão local deste princípio é dada por:

$$\rho \dot{e} = [\sigma] : [D] + \rho r - \nabla_x \cdot \{q\} \quad (3.8)$$

onde e é a energia interna por unidade de massa, r é a taxa de geração de calor por unidade de massa e $\{q\}$ é o vetor fluxo de calor do ponto considerado.

A segunda lei da termodinâmica postula a irreversibilidade da produção de entropia, ou seja, limita a direção da transformação de energia. Ela pode ser expressa através da seguinte desigualdade:

$$\rho \dot{s} + \nabla_x \cdot \frac{\{q\}}{\theta} - \frac{\rho r}{\theta} \geq 0 \quad (3.9)$$

onde s é a entropia específica e θ a temperatura. Pela combinação da primeira lei da termodinâmica, eq. (3.8), com a segunda lei, eq. (3.9), obtém-se a seguinte equação:

$$\rho \dot{s} + \nabla_x \cdot \frac{\{q\}}{\theta} - \frac{1}{\theta} (\rho \dot{e} - [\sigma] : [D] + \nabla_x \cdot \{q\}) \geq 0 \quad (3.10)$$

Introduzindo o termo de energia livre específica ψ (ou energia livre de Helmholtz), como sendo $\psi = e - \theta s$, a eq. (3.10) torna-se:

$$[\sigma] : [D] - \rho (\dot{\psi} + s \dot{\theta}) - \frac{1}{\theta} \{q\} \cdot \nabla_x \theta \geq 0 \quad (3.11)$$

que é conhecida como a desigualdade de Clausius-Duhem. Esta desigualdade, junto aos postulados da teoria termodinâmica dos meios contínuos, baseada na existência de variáveis internas, fornece uma referência para a descrição de modelos constitutivos.

O ponto inicial da denominada "termodinâmica baseada em variáveis internas" é a hipótese de que a qualquer instante de um processo termodinâmico, o estado termodinâmico (definido por $[\sigma]$, ψ , s e $\{q\}$) em um dado ponto $\{p\}$ pode ser completamente determinado pelo conhecimento de um número finito de *variáveis de estado*. Os estados termodinâmicos dependem somente do valor instantâneo das variáveis de estado e não de sua história ou variação no tempo. Embora diferentes escolhas possam ser feitas na determinação das variáveis de estado, admite-se aqui que o estado termodinâmico de um ponto material, para qualquer instante t , é determinado pelas seguintes variáveis de estado $\{[F], \theta, \{g\}, \{\alpha\}\}$. Neste conjunto, $\{g\} = \nabla_x \theta$ é o valor instantâneo do gradiente de temperatura, $[F]$ é o gradiente de deformação e θ a temperatura. A variável $\{\alpha\} = \{\alpha_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, é um conjunto de n variáveis, denominadas de variáveis internas, que podem ser de natureza tensorial, vetorial ou escalar. Em geral, estas variáveis estão associadas à mecanismos de dissipação.

Se os efeitos térmicos são ignorados, o formato geral de uma equação constitutiva puramente mecânica é dado por:

$$\begin{cases} \psi = \psi([F], \{\alpha\}) \\ [P] = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial [F]} \\ \{\dot{\alpha}\} = f([F], \{\alpha\}) \end{cases} \quad (3.12)$$

No caso de modelo não-dissipativos, onde as variáveis internas são nulas ($\{\alpha\} = 0$), tem-se:

$$\begin{cases} \psi = \psi([F]) \\ [P([F])] = \rho_0 \frac{\partial \psi([F])}{\partial [F]} \end{cases} \Rightarrow [\sigma([F])] = \frac{\rho_0}{J} \frac{\partial \psi([F])}{\partial [F]} [F]^T \quad (3.13)$$

As tensões $[\sigma]$ dependem somente do gradiente de deformação atual e não são afetadas pela história da deformação. Na modelagem de fenômenos de hiper-elasticidade, por exemplo, a equação constitutiva é desenvolvida a partir deste modelo.

O modelo que será proposto a seguir (Método por Aproximação Inversa) para a simulação de estampagem de chapas finas, apesar de se tratar de um fenômeno elasto-plástico (ou perfeitamente-plástico, quando a parte elástica é desconsiderada), é obtido de forma similar, pois dentre as principais hipóteses simplificativas adotadas está a não dependência da história da deformação, baseado da hipótese de que o carregamento efetuado é monotônico.

3.3 – MODELO DE APROXIMAÇÃO INVERSA. FORMULAÇÃO

3.3.1 - Introdução

A produção de peças conformadas de alta qualidade em curto espaço de tempo e a baixo custo é um dos principais objetivos nas indústrias de conformação mecânica. Para evitar o alto custo de procedimentos de "tentativa e erro", o uso de simulação numérica em processos de conformação mecânica está em constante progresso na indústria de estampagem, a fim de avaliar melhor as deformações, tensões e defeitos oriundos do processo em si, tais como fraturas, flambagem local (enrugamentos), espessura demasiadamente fina, etc. Como foi visto no início deste capítulo, as principais ferramentas de análise numéricas hoje disponíveis são baseadas no método dos elementos finitos (MEF), com as seguintes características:

- Utilizam formulações incrementais no tempo a partir de técnicas de integração temporal explícitas e implícitas.
- Os modelos de elemento podem ser membranas, cascas ou sólidos.
- Os modelos cinemáticos devem considerar grandes deslocamentos e grandes deformações.
- Os modelos constitutivos são, em geral, elasto-plásticos ou rígido-plásticos, devendo levar em conta a história do carregamento.
- As condições de contorno precisam simular o contato e atrito entre a prensa (punção, matriz, prensa-chapas) e a chapa.

Estas ferramentas buscam representar com maior precisão possível todo o processo de conformação. Lamentavelmente, são ainda onerosas em termos de tempo computacional, e necessitam quase sempre de mão de obra bem treinada e especializada para usá-las. No entanto, em estágios iniciais do projeto, é de interesse ter uma ferramenta numérica rápida a fim de se ter uma estimativa da variação da espessura, distribuição das deformações e tensões,

leiaute inicial da chapa, assim como uma avaliação da influência de diferentes fatores relacionados com a qualidade do produto. Assim, alguns métodos simplificados foram desenvolvidos nos últimos anos, baseados na principal característica que no caso de estampagem de chapas, parte da configuração final da peça conformada é conhecida *a priori*. A idéia básica destes métodos, conhecidos como Aproximação Inversa (*Inverse Approach* ou *One-step Approach*), é realizar uma análise não-linear para determinar as posições dos nós no *blank* inicial, as deformações e a espessura da peça final, sem considerar os processos incrementais de plasticidade e contato. Devido às simplificações adotadas, os resultados obtidos não oferecem níveis de precisão equivalentes aos procedimentos incrementais, mas são suficientemente bons para se ter uma estimativa rápida dos parâmetros desejados.

Em Guo *et al.* [1990], a aproximação inversa foi usada para avaliar as deformações plásticas em chapas metálicas obtidas por embutimento, sendo a discretização feita em elementos de membranas triangulares. O código permitiu avaliar as influências dos parâmetros materiais (tensão de escoamento, parâmetros de encruamento, coeficientes de anisotropia), das condições de carregamento (atrito, pressão no prensa-chapas, etc.) e definir o contorno inicial da peça. Comparando os resultados com os obtidos por métodos incrementais, verificou-se que a aproximação inversa pode ser muito eficiente e atrativa em etapas preliminares de projeto.

Em outros trabalhos a aproximação inversa com elementos de membrana também foi utilizada para estimar a distribuição de deformações na peça conformada e prever a geometria inicial do *blank*, [Lee *et al.*, 1998]), sendo que em Yang *et al.* [1998], o pré e o pós processamento foram feitos através de um software comercial (MSC PATRAN).

Em alguns tipos de análise, tais como na predição de enrugamento (*wrinkling*) e retorno elástico (*springback*), a consideração do efeito de flexão no modelo se torna importante. Em Batoz *et al.*[1995] e Batoz *et al.* [1999] os efeitos de flexão foram incluídos na aproximação inversa através de um elemento triangular DKT12 (*Discrete Kirchhoff Triangular*), Figura 3.1. Os resultados obtidos com o elemento DKT12 foram comparados com os obtidos com elementos de membrana e resultados experimentais, mostrando que para a predição da estrição (*necking*), a inclusão dos efeitos de flexão pode aumentar a confiabilidade dos resultados em determinadas regiões da peça. Porém, aumenta também o tempo computacional. Em Shi *et al.*[2001], foi utilizado um elemento triangular DKT15 (ver Figura 3.1) e os resultados comparados com os obtidos com o elemento de membrana e resultados experimentais. Verificou-se que, quando usado o elemento DKT, a espessura nas regiões de raio pequeno é menor que a verificada quando são utilizados elementos de membrana. Isto se deve ao fato dos efeitos de flexão serem distintos nessas regiões. Em Lee *et*

al.[2001], foi utilizado um elemento de casca axissimétrico para uma análise de aproximação inversa em multi-passos (*multi-step inverse analysis*) para avaliação da forma inicial do *blank*, distribuição de deformação e formas intermediárias, e os resultados comparados com os obtidos por uma formulação de aproximação inversa com elementos de membrana e com os obtidos por um software comercial que utiliza formulações incrementais (ABAQUS) com elementos de casca e sólido. Os resultados, para o embutimento de chapas metálica mostraram que a utilização de elementos de cascas axissimétricos e análise inversa multi-passos podem prover resultados mais precisos que os obtidos com elementos de membrana e análise inversa um-passo (*one-step*). Porém, aumenta o custo computacional como indicado na Tabela 3.1. A análise inversa multi-passos com elementos de membrana também foi utilizada em Kim *et al.* [2001] para determinar a distribuição da espessura em cada passo intermediário, e desta forma, sugerir novas matrizes e punções que poderiam ser utilizados em um processo intermediário de embutimento, de forma a conseguir uma melhor distribuição da espessura na peça final.

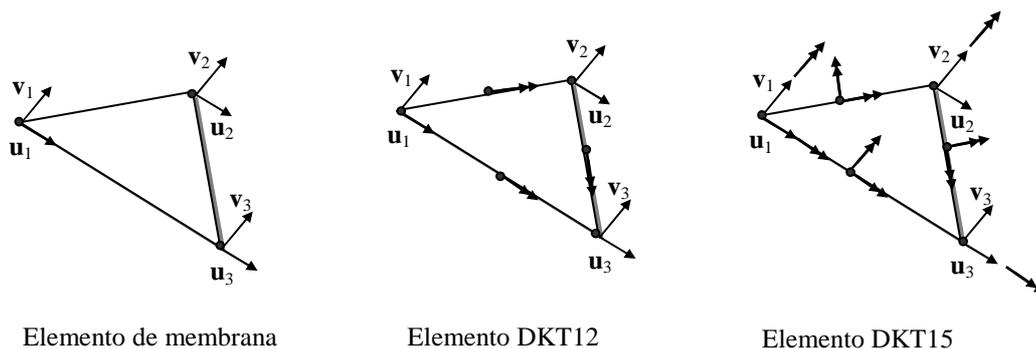


Figura 3.1 - Elementos triangulares utilizados em aproximação inversa.

Tabela 3.1 - Resultados comparativos de uma simulação de um embutimento de uma chapa metálica relativamente espessa. Fonte: Lee *et al.* [2001].

Tempo de CPU (máquina - workstation HP C180)				
	1 Passo	2 passos	5 passos	10 passos
<i>Multi-Step</i> (Membrana)	0,9 s	7,8 s	27,3 s	80,9 s
<i>Multi-Step</i> (Casca)	2,9 s	19,5 s	116,8 s	401,2 s
ABAQUS - sólido = 1430,0 s				

Apesar da aproximação inversa feita em um passo ser menos precisa que a feita em multi-passos, ela oferece um quesito importante quando aplicada a problemas de otimização, que é o baixo tempo computacional. Alguns autores têm utilizado a aproximação inversa em problemas de otimização como uma ferramenta importante na determinação inicial de leiaute

de chapas, matrizes, quebra-rugas e definição de parâmetros ótimos, [Lee *et al.*, 1998], [Guo *et al.*, 2000], [Naceur *et al.*, 2001]. Estes aspectos serão discutidos no próximo capítulo.

Na próxima seção, será vista de forma detalhada, a formulação do método de aproximação inversa na sua forma mais simples, feito em um passo e com elementos de membrana.

3.3.2 - Formulação

A aproximação inversa para análise de conformação de chapas metálicas tem sido apresentada em detalhes por alguns autores tais como Guo *et al.* [1990], Guo *et al.*[2000] e Naceur *et al.*[2001]. Este método necessita do conhecimento prévio da peça conformada já discretizada em uma malha de elementos finitos. Parte da deformação é definida como o mapeamento que transporta o *blank* plano para sua posição final. Assim, embora conhecida a geometria final da peça, desconhece-se a posição inicial da chapa no plano, apesar de sua espessura inicial ser conhecida. Uma simples projeção dos nós no plano horizontal pode ser uma boa estimativa inicial para o processo iterativo de determinação do *blank* inicial. Um algoritmo de Newton-Raphson é usado para modificar a posição dos nós no *blank* plano até atingir o equilíbrio. As duas principais suposições são: (1) o carregamento é proporcional, o que permite utilizar a teoria simplificada de plasticidade de Hencky; (2) o uso simplificado de forças de atrito e pressão, ao invés de condições de contato entre as ferramentas e o chapa metálica. Estas hipóteses permitem formular o problema como sendo não linear (material e geometria), mas independente da história da deformação, [Naceur *et al.*, 2001].

3.3.2.1 - Relações Cinemáticas

Em aproximação inversa, apenas duas configurações são consideradas: o *blank* plano inicial C^0 e a peça final C (Tabela 3.2).

Tabela 3.2 - Variáveis conhecidas e desconhecidas em um típico problema de análise inversa.

	Conhecido	Desconhecido
Configuração inicial - C⁰	- espessura h^0 ; - $[\varepsilon^0] = 0$ e $[\sigma^0] = 0$;	- posição de um ponto P ⁰ correspondente a um ponto P em C; - forma S ⁰ do contorno;
Configuração final - C	- posição de um ponto P(X,Y,W); - direção de carga $\{n\}$; - forma S do contorno;	- espessura h ; - $[\varepsilon]$ e $[\sigma]$; - intensidade das cargas;

Usando uma suposição de Kirchhoff generalizada, o vetor posição de um ponto material q^0 pode ser expresso em relação a um ponto p sobre a superfície de referência de C (Figura 3.2) como:

$$\{x_q^0\} = \{x_p^0\} + z^0 \{n^0\} = \{x_p\} - \{u_p\} + z^0 \{n^0\} \quad (3.14)$$

onde $\{u_p\}$ é o vetor deslocamento do ponto p , $\{n^0\}$ e $\{n\}$ são as normais à superfície de referência em p^0 e p . E z^0 e z são as coordenadas ao longo na espessura das configurações iniciais e finais respectivamente.

Sobre cada elemento de C, é definido um sistema local de coordenada cartesiano $\{x\} = \langle x y z \rangle$. Desta forma, o tensor de transformação de um ponto q^0 para um ponto p é dado por:

$$\{dx_q^0\} = [F]^{-1} \{dx\}, \quad \text{onde} \quad [F]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_q^0}{\partial x} & \frac{\partial x_q^0}{\partial y} & \frac{\partial x_q^0}{\partial z} \\ \frac{\partial y_q^0}{\partial x} & \frac{\partial y_q^0}{\partial y} & \frac{\partial y_q^0}{\partial z} \\ \frac{\partial z_q^0}{\partial x} & \frac{\partial z_q^0}{\partial y} & \frac{\partial z_q^0}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

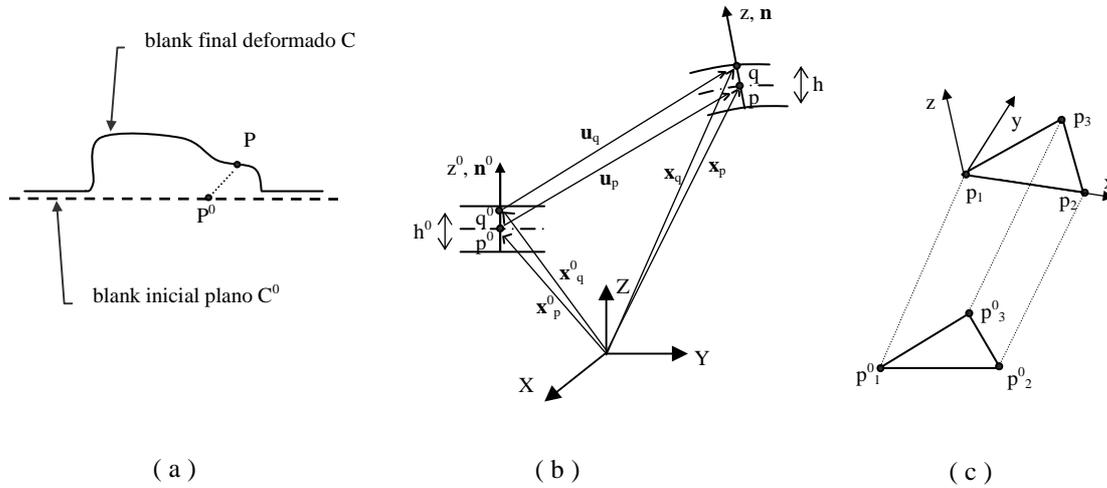


Figura 3.2 - Detalhamento do problema: (a) configuração inicial C^0 e final C ; (b) relações cinemáticas baseadas nas suposições de Kirchhoff; (c) movimento do elemento triangular de P^0 para P , com o sistema de coordenadas local (x, y, z) em P .

Considerando que o alongamento $\lambda_3 = z/z_0 = h/h_0$ na direção da espessura é constante ao longo desta, substitui-se este valor nas eqs. (3.14) e (3.15). Assim, o inverso do gradiente de deformação $[F]$ torna-se:

$$[F]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - u_{,x} & -u_{,y} & n_x^0/\lambda_3 \\ -v_{,x} & 1 - v_{,y} & n_y^0/\lambda_3 \\ -w_{,x} & -w_{,y} & n_z^0/\lambda_3 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

onde u , v e w são as componentes de $\{u_p\}$ nas coordenadas locais. Sendo a configuração final C dada, as rotações e os alongamentos principais nas direções Eulerianas podem ser descritos através dos autovalores e autovetores do tensor de Cauchy-Green a esquerda $[B]$ (*left Cauchy-Green tensor*), sendo este determinado da seguinte forma, Malvern [1969]:

$$[B]^{-1} = [F]^{-T} [F]^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-2} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

onde

$$\begin{aligned}
a &= (1 - u_{,x})^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2 \\
b &= -u_{,y}(1 - u_{,x}) - v_{,x}(1 - v_{,y}) + w_{,x}w_{,y} \\
c &= u_{,y}^2 + (1 - v_{,y})^2 + w_{,y}^2
\end{aligned}$$

Os alongamentos principais são obtidos através dos autovalores de $[B]^{-1}$:

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} = \left[\frac{1}{2}(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2} \right]^{-1/2} \quad (3.18)$$

Admitindo que a deformação elástica seja suficientemente pequena, a deformação é considerada totalmente plástica. Assim, λ_3 é determinado pela hipótese de incompressibilidade, $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$. As direções principais Eulerianas de deformação são obtidas através da expressão:

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \frac{-2b}{a-c} \quad (3.19)$$

podendo assim, obter a matriz de transformação $[M]$ formada pelos auto-vetores de $[B]^{-1}$:

$$[M] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Esta matriz transforma componentes na base local em componentes nas direções principais de deformação.

Uma importante família de tensores de deformação eulerianos é definida como, [Souza Neto, 2002]:

$$[\varepsilon]_{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{m}([V] - [I]) & m \neq 0 \\ \ln[V] = \frac{1}{2} \ln[B] & m = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

onde m é um número real e $[V]$ é o tensor de alongamento a esquerda (*left stretch tensor*), obtido a partir da decomposição polar do gradiente de deformação $[F]$. O tensor de

deformações logarítmicas Euleriano, $[\varepsilon]_{(0)}$, é um caso particular desta família (com $m = 0$), que será usado na formulação de aproximação inversa deste trabalho. Assim, o tensor de deformação logarítmicas da eq. (3.21) pode também ser escrito da forma:

$$[\varepsilon] = \ln[V] = [M] \begin{bmatrix} \ln \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ln \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ln \lambda_3 \end{bmatrix} [M]^T \quad (3.22)$$

Assim, o termo $[\varepsilon]$ está descrito na base local sob a configuração deformada. Sob condições de estado plano de tensões, as suas componentes são dadas por:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ln \lambda_1 \cos^2 \varphi + \ln \lambda_2 \sin^2 \varphi \\ \ln \lambda_1 \sin^2 \varphi + \ln \lambda_2 \cos^2 \varphi \\ (\ln \lambda_2 - \ln \lambda_1) \sin \varphi \cos \varphi \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

É importante notar que esta medida de deformação é adequada para descrições de grandes deslocamentos e deformações e claramente não linear em relação aos deslocamentos.

3.3.2.2 - Lei Constitutiva para Materiais com Anisotropia Planar

A grande maioria das chapas utilizadas em estampagens apresenta propriedades de anisotropia (no caso, ortotropia) consideráveis, devido ao processo de fabricação. Nestes casos, o critério de escoamento mais usado é o de Hill. Esta lei de escoamento é baseado nas seguintes suposições, Khan *et al.* [1995]:

- O material é ortotrópico.
- Tensões hidrostáticas não afetam o escoamento.
- Não há efeito Bauschinger.

Considerando estado plano de tensões ($\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$), o critério de escoamento de Hill fica da forma:

$$\phi(\sigma_{ij}) = F(\sigma_x - \sigma_y)^2 + G\sigma_y^2 + H\sigma_x^2 + 2L\sigma_{xy}^2 - 1 = 0 \quad (3.24)$$

com

$$F + H = \frac{1}{Y_x^2}; \quad F + G = \frac{1}{Y_y^2}; \quad G + H = \frac{1}{Y_z^2}; \quad L = \frac{1}{2Y_{xy}^2} \quad (3.25)$$

onde Y_x, Y_y, Y_z e Y_{xy} são tensões de escoamento. Substituindo função de escoamento ϕ na lei de evolução [Guo *et al.*, 1990]:

$$\{\dot{\epsilon}^p\} = \dot{\gamma} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\} \quad (3.26)$$

pode-se determinar as taxas de deformação plástica como sendo:

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_x^p = 2\dot{\gamma} [F(\sigma_x - \sigma_y) + H\sigma_x] \\ \dot{\epsilon}_y^p = 2\dot{\gamma} [F(\sigma_y - \sigma_x) + H\sigma_y] \\ 2\dot{\epsilon}_{xy}^p = 4\dot{\gamma}L\sigma_{xy} \end{cases} \quad (3.27)$$

Considerando a incompressibilidade do material (eq. (3.2)), tem-se ainda:

$$\dot{\epsilon}_x^p + \dot{\epsilon}_y^p + \dot{\epsilon}_z^p = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\epsilon}_z^p = -(\dot{\epsilon}_x^p + \dot{\epsilon}_y^p) = -2\dot{\gamma}(H\sigma_x + G\sigma_y) \quad (3.28)$$

Os coeficientes de anisotropia do material são definidos como:

$$r_0 = \frac{\dot{\epsilon}_{90}^p}{\dot{\epsilon}_z^p}; \quad r_{45} = \frac{\dot{\epsilon}_{135}^p}{\dot{\epsilon}_z^p}; \quad r_{90} = \frac{\dot{\epsilon}_0^p}{\dot{\epsilon}_z^p} \quad (3.29)$$

Porém é frequente a utilização de um modelo de comportamento isotrópico no plano da chapa. O coeficiente de anisotropia médio é dado por $\bar{r} = \frac{1}{4}(r_0 + 2r_{45} + r_{90})$. Assim, utilizando as equações (3.24) (3.25) (3.27) (3.28) e (3.29), o critério de Hill pode ser reescrito como [Guo *et al.*, 1990]:

$$\phi = (\langle \sigma \rangle [P] \{ \sigma \})^{1/2} - Y(\bar{\epsilon}^p) = \bar{\sigma} - Y(\bar{\epsilon}^p) \quad (3.30)$$

onde $\bar{\sigma}$ é a tensão equivalente e $\bar{\epsilon}^p$ é a deformação plástica equivalente. A matriz $[P]$ é dada por:

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\bar{r}}{1+\bar{r}} & 0 \\ -\frac{\bar{r}}{1+\bar{r}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2(1+2\bar{r})}{1+\bar{r}} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

A taxa de deformação plástica equivalente é determinada da seguinte forma:

$$\{\dot{\epsilon}^p\} = \dot{\lambda} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \right\} = \frac{\dot{\lambda} [P] \{\sigma\}}{\underbrace{(\langle \sigma \rangle [P] \{\sigma\})^{1/2}}_{\bar{\sigma}}} \Rightarrow \{\sigma\} = \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\lambda}} [P]^{-1} \{\dot{\epsilon}^p\} \quad (3.32)$$

Substituindo em $\bar{\sigma}$,

$$\bar{\sigma} = \left(\frac{\bar{\sigma}}{\dot{\lambda}} \left([P]^{-1} \{\dot{\epsilon}^p\} \right)^T [P] [P]^{-1} \{\dot{\epsilon}^p\} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\lambda}} \right)^{1/2} = \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\lambda}} \left(\{\dot{\epsilon}^p\}^T [P]^{-1} \{\dot{\epsilon}^p\} \right)^{1/2} \quad (3.33)$$

e assim,

$$\dot{\lambda} = \left(\langle \dot{\epsilon}^p \rangle [P]^{-1} \{\dot{\epsilon}^p\} \right)^{1/2} = \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (3.34)$$

A eq. (3.32) torna-se:

$$\{\dot{\epsilon}^p\} = \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}} [P] \{\sigma\} \quad (3.35)$$

Em plasticidade, devido ao caráter dissipativo do processo, a deformação atual depende da história do carregamento. Isto traz como consequência a característica incremental da lei de fluxo que requer integração para cada passo de carga. Porém, há várias teorias de plasticidade que estabelecem relações diretas entre as tensões e deformações totais. Estas teorias são chamadas de Teoria da Deformação da Plasticidade (*Plasticity Strain Theory*). A

primeira teoria da deformação foi proposta por Hencky (1924) e mais tarde desenvolvida por Ilyushin (1943, 1947), [Khan *et al.*, 1995]. A principal hipótese desta teoria simplificada admite que o carregamento seja proporcional, isto é, a integração depende somente de um escalar e pode ser feita de uma única vez, [Lemaitre *et al.*, 1990]. O carregamento é dito proporcional se para qualquer ponto M do sólido, o tensor de tensão $\sigma(M, t)$ é proporcional a um tensor $S(M)$, que é independente do tempo, sendo o fator de proporcionalidade uma função monotônica $\alpha(t)$, tal que $\alpha(0) = 0$. Assim, tem-se:

$$\sigma(M, t) = \alpha(t) S(M)$$

Na análise inversa, a teoria de deformação de Hencky é adotada e a integração da eq. (3.35) fica da forma:

$$\{\varepsilon^p\} = \frac{\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} [P] \{\sigma\} \quad (3.36)$$

Em problemas de conformação, as deformações elásticas são consideradas muito menores que as deformações plásticas, de tal forma que $\varepsilon \cong \varepsilon^p$, assim:

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{E_s} [P] \{\sigma\} \quad \Rightarrow \quad \{\sigma\} = E_s [P]^{-1} \{\varepsilon\} \quad (3.37)$$

onde $E_s = \bar{\sigma} / \bar{\varepsilon}$ é o módulo secante da curva de tensão-deformação uniaxial do material. Assim, nesta relação constitutiva simplificada, o estado final de deformação $\{\varepsilon\}$ define o estado de tensão $\{\sigma\}$. A não linearidade desta equação está dada pela curva de encruamento do material. Dado o nível de deformação $\{\varepsilon\}$, é possível calcular a deformação equivalente $\bar{\varepsilon} = \left(\{\varepsilon\}^T [P]^{-1} \{\varepsilon\} \right)^{1/2}$ e determinar o módulo secante E_s . Com isto, pode-se calcular as tensões pela eq (3.37).

3.3.2.3 - Forças Externas

Neste modelo de aproximação inversa, as condições de contato entre as chapas e as ferramentas são simplificadas, sendo substituídas por forças de atrito e calculadas a partir dos deslocamentos.

No caso do contato entre a chapa e o punção, a chapa está sujeita a uma força normal $\{F_n\}$ e uma força de atrito $\{F_t\}$. A força resultante $\{F\}$ (Figura 3.3) pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\{F\} = \{F_n\} + \{F_t\} \Rightarrow F\{n^f\} = F_n\{n\} + F_t\{-t\} \quad (3.38)$$

A força tangente está relacionada com a normal mediante o modelo de atrito de Coulomb. Definindo o coeficiente de atrito μ , é possível obter a força total em função da força normal F_n :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_t}{F_n} = \mu \quad (3.39)$$

$$F^2 = F_n^2 + F_t^2 \Rightarrow F = \sqrt{F_n^2 + \mu^2 F_n^2} = F_n \sqrt{1 + \mu^2} \quad (3.40)$$

Substituindo a eq. (3.40) na eq. (3.38), obtém-se a direção de aplicação da força $\{n^f\}$ a partir das direções $\{n\}$ e $\{t\}$:

$$\{n^f\} = \frac{\{n\} - \mu\{t\}}{\sqrt{1 + \mu^2}}, \quad \{t\} = \frac{\{u_t\}}{\|\{u_t\}\|} \quad (3.41)$$

sendo que,

$$\{u_t\} = \{u_h\} - (\{u_h\} \cdot \{n\})\{n\}; \quad \{u_h\} = \{u\} - \bar{W}\{k\} \quad (3.42)$$

onde $\{u_h\}$ é a componente horizontal do vetor de deslocamento $\{u\}$, e \bar{W} a componente da coordenada Z no sistema global.

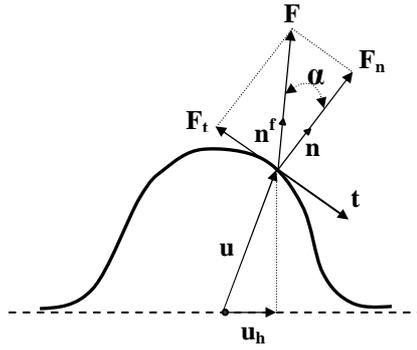


Figura 3.3 - Diagrama de forças devido ao atrito entre o punção e a chapa.

Finalmente, pode-se definir a força exercida pelo punção como:

$$\{F_p\} = F\{n^f\} \quad (3.43)$$

sendo que a direção $\{n^f\}$ é dada pela eq. (3.41) e F é uma incógnita a ser determinada pelo problema, como será visto mais adiante.

Para o caso do contato entre o prensa-chapas e a chapa, somente as forças de atrito $\{f\}$ são consideradas como forças externas, visto que as forças devido à pressão normal $\{q_n\}$ sobre as duas superfícies da chapa estão em equilíbrio (Figura 3.4). O valor da força $\{f\}$ é calculado como:

$$\{f\} = -2\mu q_n \{t\} \quad (3.44)$$

onde $\{t\}$ é dado pela eq. (3.41) sendo que agora, o deslocamento tangencial $\{u_t\}$ é da forma:

$$\{u_t\} = \{u_h\} - (\{u_h\} \cdot \{n\})\{n\} \quad (3.45)$$

A pressão normal q_n pode ser obtida considerando o equilíbrio sobre uma superfície infinitesimal ΔS do prensa-chapas superior (Figura 3.4):

$$-q\{k\}\Delta S(\{n\} \cdot \{k\}) + q_n\{n\}\Delta S + \mu q_n\{t\}\Delta S = 0 \quad (3.46)$$

$$q_n = \frac{q(\{n\} \cdot \{k\})}{(\{n\} \cdot \{k\}) + \mu(\{t\} \cdot \{k\})} \quad (3.47)$$

onde q é a pressão por unidade de superfície.

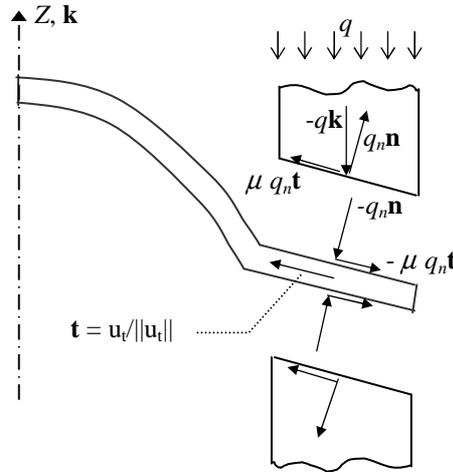


Figura 3.4 - Esquema das forças de atritos devido ao prensa-chapas sob uma superfície infinitesimal ΔS .

Os valores das forças externas calculadas em (3.38) e (3.44) são utilizadas na condição de equilíbrio do sistema, visto na seção a seguir.

3.3.2.4 - Princípio dos Trabalhos Virtuais

O princípio dos trabalhos virtuais é expresso sobre a configuração deformada. Desta forma, denominando δW como sendo o trabalho virtual das forças internas δW_{int} menos o trabalho virtual das forças externas δW_{ext} , tem-se:

$$\delta W = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} = \int_v (\nabla_x \cdot [\sigma] + \rho \{b\} - \rho \{\ddot{u}\}) \cdot \{\delta u\} dv = 0 \quad \forall \delta u \in \overset{\circ}{E} \quad (3.48)$$

onde $\overset{\circ}{E}$ é o espaço dos deslocamentos virtuais:

$$\overset{\circ}{E} = \{ \{ \delta u \} \mid \{ \delta u \} \text{ e' suficientemente regular, } \{ \delta u \} = 0 \text{ em } \Gamma_u \}$$

Utilizando o teorema da divergência e a regra da cadeia, se obtém:

$$\delta W = \int_v [\sigma] \cdot \nabla_x \{ \delta u \} dv - \int_{\Gamma} \{ f_n \} \cdot \{ \delta u \} d\Gamma - \rho \int_v \{ b \} \cdot \{ \delta u \} dv + \rho \int_v \{ \ddot{u} \} \cdot \{ \delta u \} dv = 0 \quad (3.49)$$

Considera-se que no processo de conformação de chapas, as velocidades e acelerações são suficientemente pequenas, de forma que os termos da equação acima referentes às forças mássicas e de corpo, podem ser desprezados. Desta forma, a equação acima fica:

$$\delta W = \int_v [\sigma] \cdot \nabla_x \{\delta u\} dv - \int_{\Gamma} \{f_n\} \cdot \{\delta u\} d\Gamma = 0 \quad (3.50)$$

ou

$$\delta W = \sum_e \delta W_{\text{int}}^e - \sum_e \delta W_{\text{ext}}^e = \sum_e \left(\int_{v^e} [\sigma] \cdot \nabla_x \{\delta u\} dv - \int_{\Gamma^e} \{f_n\} \cdot \{\delta u\} d\Gamma \right) = 0 \quad (3.51)$$

de onde pode-se definir para cada elemento, o trabalho virtual interno δW_{int}^e e o trabalho virtual externo δW_{ext}^e :

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}}^e &= \int_{v^e} [\sigma] \cdot \nabla_x \{\delta u\} dv \\ \delta W_{\text{ext}}^e &= \int_{\Gamma^e} \{f_n\} \cdot \{\delta u\} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.52)$$

Nas seções a seguir serão descritos os procedimentos para o cálculo dos termos δW_{int}^e e δW_{ext}^e já incorporando a aproximação por elementos finitos.

Vetor de Forças Internas

Considerando que, devido à simetria de $[\sigma]$ se tem que $[\sigma] \cdot \nabla_x \{\delta u\} = \{\sigma\} \cdot \{\delta \mathcal{E}\}$, a equação do trabalho virtual interno do elemento, para o caso específico de estado plano de tensões, pode ser escrita de forma matricial como:

$$\delta W_{\text{int}}^e = \int_{v^e} \langle \delta \mathcal{E} \rangle \{\sigma\} dv = \int_{v^e} \langle \delta \mathcal{E}_x \quad \delta \mathcal{E}_y \quad \delta \gamma_{xy} \rangle \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dv \quad (3.53)$$

onde $\langle \delta \varepsilon \rangle$ é a matriz de componentes de deformações virtuais e $\{\sigma\}$ é o vetor de componentes do tensor de Cauchy.

Fazendo uma discretização em elementos finitos do vetor de deslocamento $\{u\}$, e do vetor de deslocamentos virtuais $\{\delta u\}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \{u\} &= \sum_{I=1}^3 N_I(\{x\}) \{u_I^*\} \\ \{\delta u\} &= \sum_{I=1}^3 N_I(\{x\}) \{\delta u_I^*\} \end{aligned} \quad (3.54)$$

onde N_I são as funções de forma do elemento. Caso se utilize elementos de membrana triangulares, estas são definidas por:

$$N_1 = 1 - \xi - \eta; \quad N_2 = \xi; \quad N_3 = \eta \quad (3.55)$$

onde ξ e η são as coordenadas intrínsecas do elemento, [Dhatt *et al.*, 1984]. Neste caso, o vetor $\{\delta \varepsilon\}$ pode ser determinado como:

$$\begin{aligned} \{\delta \varepsilon\} &= [\Phi] \{\delta u^*\} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_1^* \\ \delta v_1^* \\ \delta w_1^* \\ \delta u_2^* \\ \delta v_2^* \\ \delta w_2^* \\ \delta u_3^* \\ \delta v_3^* \\ \delta w_3^* \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Como as funções de forma da eq. (3.55) são lineares, a matriz $[\Phi]$ permanece constante no elemento, sendo dependente apenas das coordenadas locais.

O determinante do jacobiano ($\det J$) é igual a duas vezes a área do elemento ($\det J = 2A^e$). Substituindo a eq. (3.56) na eq. (3.53), obtém-se a expressão relativa ao trabalho interno do elemento:

$$\delta W_{\text{int}}^e = \int_{V^e} \langle \delta u^* \rangle [\Phi]^T \{\sigma\} dv \quad (3.57)$$

Com o objetivo de calcular o somatório dos elementos em (3.51), é conveniente expressar os deslocamentos nodais $\{u^*\}$ e $\{\delta u^*\}$ em função das coordenadas globais (X,Y e Z):

$$\begin{aligned} \{\delta u^*\} &= [T] \{\delta U^*\} \\ \{u^*\} &= [T] \{U^*\} \end{aligned} \quad (3.58)$$

sendo que o deslocamento em Z nas coordenadas globais U_3^* é conhecido da configuração deformada, e portanto, $\delta U_3^* = 0$. Para o elemento triangular proposto, a matriz de transformação [T] do sistema de coordenadas global para o local é dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} [t] & 0 & 0 \\ 0 & [t] & 0 \\ 0 & 0 & [t] \end{bmatrix}, \quad [t] = \begin{bmatrix} t_{1X} & t_{1Y} & t_{1Z} \\ t_{2X} & t_{2Y} & t_{2Z} \\ n_X & n_Y & n_Z \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

O vetor de forças internas do elemento nas coordenadas globais é obtido substituindo os termos dos deslocamentos virtuais da eq. (3.58) na eq. (3.57). Assim,

$$\delta W_{\text{int}}^e = \langle \delta U^* \rangle \{F_{\text{int}}^e\} \quad (3.60)$$

onde,

$$\{F_{\text{int}}^e\} = \int_{V^e} [T]^T [\Phi]^T \{\sigma\} dz dA^e \quad (3.61)$$

Considerando que as deformações e as tensões são constantes em cada elemento, a espessura final da chapa (dependente do deslocamento) é também constante. Assim,

$$\{F_{\text{int}}^e\} = \int_{A^e} [T]^T [\Phi]^T \{\sigma\} h dA^e \quad (3.62)$$

e portanto,

$$\{F_{\text{int}}^e\} = [T]^T [\Phi]^T \{\sigma\} A^e h \quad (3.63)$$

onde, A^e é a área do elemento na configuração final deformada. Nesta expressão final, somente σ e h variam a cada iteração no processo de resolução do problema não-linear. Sendo $\lambda_3 = h/h_0$, a equação acima pode então ser colocada na forma:

$$\{F_{\text{int}}^e\} = [T]^T [\Phi]^T \{\sigma\} \lambda_3 h_0 A^e \quad (3.64)$$

Pela relação constitutiva dada na eq. (3.37), o tensor de tensões $\{\sigma\}$ está dado em função do tensor de deformações $\{\varepsilon\}$ que, por sua vez, depende dos termos do tensor $[F]^{-1}$ (ver o desenvolvimento da eq. (3.15) a eq. (3.23)). Na expressão do tensor $[F]^{-1}$, observa-se a sua dependência em relação às incógnitas u e v . Suas derivadas podem ser obtidas utilizando a discretização proposta na eq. (3.54), a partir da relação:

$$\{u_{,x}\} = [D]_{(6,x9)} \{u^*\} \quad (3.65)$$

onde $[D]$ é uma matriz resultante da derivada da eq. (3.54) e $\{u_{,x}\}$ dado em termos de:

$$\{u_{,x}\} = \langle u_{,x} \ u_{,y} \ v_{,x} \ v_{,y} \ w_{,x} \ w_{,y} \rangle \quad (3.66)$$

Transformando a matriz de deslocamento nodal local $\{u^*\}$ para o sistema global através da equação de transformação eq. (3.58), a eq. (3.65) fica da seguinte maneira:

$$\{u_{,x}\} = [D][T]\{U^*\} \quad (3.67)$$

Vetor de Forças Externas

O cálculo do vetor de forças externas é feito separadamente de acordo com o tipo carga: forças de atrito devido ao prensa-chapas e ao punção e/ou matriz. Poderá também haver na peça regiões livre de forças externas, ou ainda, com outros tipos de força tais como as

provocadas pelo quebra-rugas. Esta última não será tratada no momento e seu detalhamento em problemas de aproximação inversa pode ser encontrada em Guo *et al.* [2000].

- Forças no Prensa-Chapas

De acordo com a eq. (3.52), o trabalho virtual externo do elemento devido ao prensa-chapas pode ser escrito nas coordenadas locais como:

$$\delta W_{\text{ext}}^e = \int_{\Gamma^e} \{f_n\} \cdot \{\delta u\} d\Gamma = -2\mu q_n \int_{A^e} \{\delta u\} \cdot \frac{\{u_t\}}{\|\{u_t\}\|} dA^e \quad (3.68)$$

onde $\{f_n\}$ é dado pela eq. (3.44). A cada iteração, um novo valor de $\{u\}$ é conhecido, atualizando assim, o valor de $\{u_t\}$. Utilizando a discretização por elementos finitos, eq. (3.54), e expressando os deslocamentos no sistema de coordenadas global, a equação acima fica da seguinte forma:

$$\{F_{\text{ext}}^e\} = -\frac{2\mu q_n A^e}{\sqrt{u_t^2 - v_t^2}} [T]^T [N]^T \begin{Bmatrix} u_t \\ v_t \end{Bmatrix} \quad (3.69)$$

onde u_t e v_t são as componentes do vetor $\{u_t\}$ nas coordenadas locais e $[N]$ é da forma:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

sendo que N_1 , N_2 e N_3 são as mesmas funções de interpolação da eq. (3.54).

- Forças no Punção

No caso das forças externas causadas pelo punção (ou pela matriz), eq. (3.43), estas são determinadas por nó, através condição de equilíbrio (eq. (3.50)):

$$\{F_{\text{int}}^k\} - \{F_{\text{ext}}^k\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}_{\text{int}}^k - \begin{Bmatrix} F^k \cdot n_x^f \\ F^k \cdot n_y^f \\ F^k \cdot n_z^f \end{Bmatrix}_{\text{ext}}^k = 0 \quad (3.71)$$

Nota-se que há 3 incógnitas e 3 equações em cada nó k : dois deslocamentos horizontais, U^* , V^* (pois o deslocamento vertical W é conhecido) e a intensidade da força do punção F^k , eq. (3.43). Uma solução possível seria determinar F^* através da terceira equação ($F^k = F_z/n_z^f$), mas alguns problemas numéricos podem surgir devido a valores muito pequenos de n_z^f para os casos de peças com paredes verticais ou quase verticais, [Naceur *et al.*, 2001]. A fim de evitar problemas numéricos deste tipo e melhorar a convergência, pode-se fazer a seguinte operação:

$$\{F_{\text{int}}^k\} \cdot \{n^f\} - \{F_{\text{ext}}^k\} \cdot \{n^f\} = 0 \quad (3.72)$$

o que implica em:

$$\{F_{\text{int}}^k\} \cdot \{n^f\}^k = F^k \quad \Rightarrow \quad F^k = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}_{\text{int}}^k \cdot \begin{Bmatrix} n_x^f \\ n_y^f \\ n_z^f \end{Bmatrix}^k \quad (3.73)$$

Tendo determinado F , pode-se escrever a equação de equilíbrio na forma:

$$\{F_{\text{int}}^k\} - \{F_{\text{ext}}^k\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}_{\text{int}}^k - \begin{Bmatrix} F^k \cdot n_x^f \\ F^k \cdot n_y^f \end{Bmatrix}_{\text{ext}}^k = 0 \quad (3.74)$$

Suavização do Atrito

Como foi visto anteriormente, o modelo de atrito utilizado neste trabalho é o de Coulomb, onde a força de atrito é dada como:

$$\begin{aligned} \{F_{at}\} &= -F_{at} \{t\} \\ &= -\mu F_n \{t\} \end{aligned} \quad (3.75)$$

onde $\{t\}$ é dado na eq. (3.41), Figura 3.3, e μ o coeficiente de atrito. Para uma dada força normal, a força de atrito pode ter um comportamento descontínuo dependendo do valor do incremento de deslocamento tangencial δu_t , como mostra o esquema da Figura 3.4.

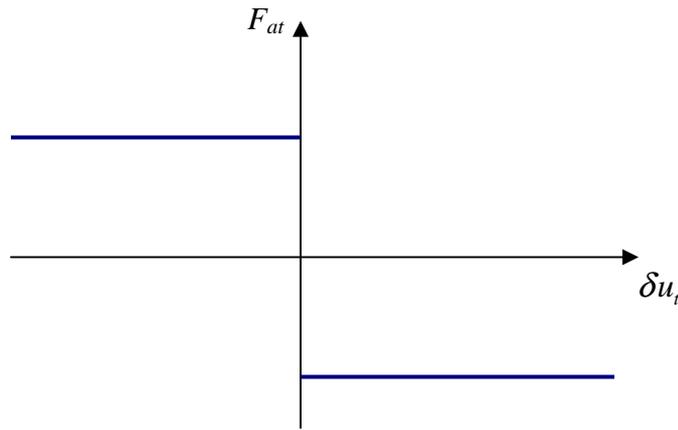


Figura 3.4 - Força de atrito descontínua.

Esta descontinuidade no valor do atrito pode causar dificuldades de convergência numérica no problema. Desde então, diferentes modelos de funções de atrito têm sido implementados para evitar esta descontinuidade [Wriggers, 2002], sendo o arco-tangente o escolhido para este trabalho. Ele baseia-se numa função continuamente diferenciável em termos do deslocamento tangencial relativo, dado por FC na eq. (3.77). Assim, tem-se o atrito dado em função vetor de deslocamento $\{u\}$ como:

$$\mu(\{u\}) = FC(\{u\})\mu \quad (3.76)$$

onde

$$FC(\{u\}) = \frac{\pi}{2} \arctan\left(\frac{\|\{u_t\}\|}{C}\right) \quad (3.77)$$

e C é uma constante. A Figura 3.5 mostra o gráfico de $FC(\{u\})$ em função do deslocamento tangencial para vários valores de C . Um valor muito alto para C pode resultar na redução do valor do atrito, assim como um valor muito pequeno poderá resultar em problemas de convergência. Uma vez que o atrito $\mu(\{u\})$ depende dos deslocamentos, será necessário introduzir a derivada da eq. (3.77) no cálculo analítico da matriz tangente.

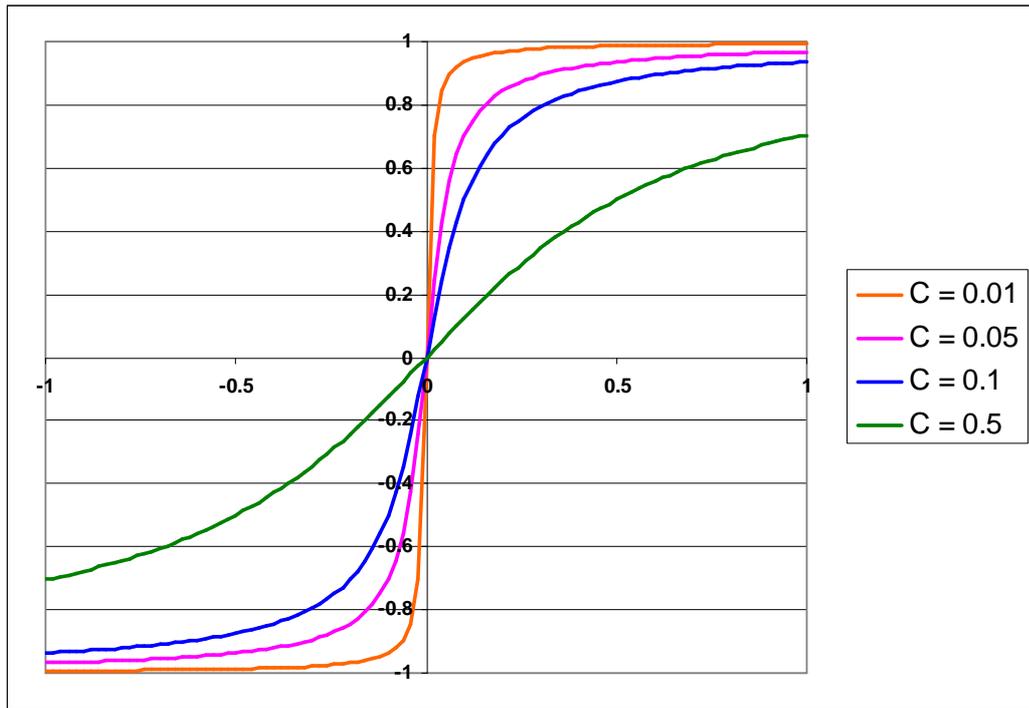


Figura 3.5 - Função do atrito FC para diversos valores da constante C .

3.3.2.5 - Resolução do Algoritmo (Newton - Raphson)

A montagem dos vetores globais de forças internas e externas leva ao vetor residual global da seguinte forma:

$$\delta W_G = \sum_e \delta W_{int}^e - \sum_e \delta W_{ext}^e = \sum_e \langle \delta U^* \rangle (\{F_{int}^e\} - \{F_{ext}^e\}) = \langle \delta U^* \rangle \{R\} \quad (3.78)$$

onde W_G é o trabalho virtual total global e $\{R\}$ é o vetor residual global (ou simplesmente resíduo, com será chamado ao longo do texto) dado em função das componentes U^* e V^* e da intensidade da força do punção F :

$$\{R(U^*, V^*, F)\} = \{F_{int}(U^*, V^*)\} - \{F_{ext}(U^*, V^*, F)\} \quad (3.79)$$

Porém, como foi visto na eq. (3.73), F pode ser determinado separadamente e ter o resíduo em função apenas de duas incógnitas (U^* e V^*) por cada nó.

A aproximação inversa gera um sistema de equações altamente não linear devido às grandes deformações e deslocamentos, e ao comportamento elasto-plástico do material. Diferentes métodos de solução têm sido desenvolvidos e testados, [Guo *et al.*, 2000]:

- Método Newton-Raphson.

- Método explícito estático.
- Método de Levenberg-Marquardt.
- Método explícito dinâmico.
- Método da relaxação dinâmica, etc.

Diante dessa variedade de métodos, o Newton-Raphson é o mais atrativo (pela eficiência, simplicidade, verificação de equilíbrio) e o mais utilizado. Porém, este método requer uma boa solução inicial e uma matriz tangente bem-condicionada. Com relação à solução inicial, alguns autores têm apresentados algumas propostas para o desempenho, [Lee *et al.*, 1998], [Guo *et al.*, 2000]. A solução mais simples seria pela simples projeção vertical dos nós, ou seja, $\{U\} = \{V\} = \{0\}$, porém esta solução pode levar a deformações e tensões excessivas nos elementos situados ao longo de paredes quase verticais da peça. O método utilizado aqui é o proposto por Lee *et al.* [1998], que baseia-se num mapeamento linear da superfície deformada da configuração final para uma superfície plana da configuração inicial. Para obter este mapeamento aproximado, são necessários dois tipos de transformações entre a configuração inicial e final, descrito no procedimento abaixo:

1. projeta a malha 3D no plano XY global;
2. para cada elemento, faz-se uma rotação para o plano XY global;
3. calcula a deformação inicial $\{\varepsilon_0^e\} = [\Phi] \{U^e\}$, onde $\{U^e\}$ é a diferença das coordenadas entre os passos 1 e 2 (Figura 3.6);
4. monta-se um problema linear elástico utilizando a malha projetada em 1 e resolve-se o seguinte problema:

$$\underbrace{\sum_{e=1}^E \int_{\Omega} [\Phi]^T [C] [\Phi] d\Omega}_{[K]\{U_0\}} \{U_0\} = \underbrace{\sum_{e=1}^E \int_{\Omega} [\Phi]^T [C] d\Omega}_{\{F_0\}} \{\varepsilon_0\} \quad (3.80)$$

onde $\{U_0\}$ é a solução inicial a ser determinada.

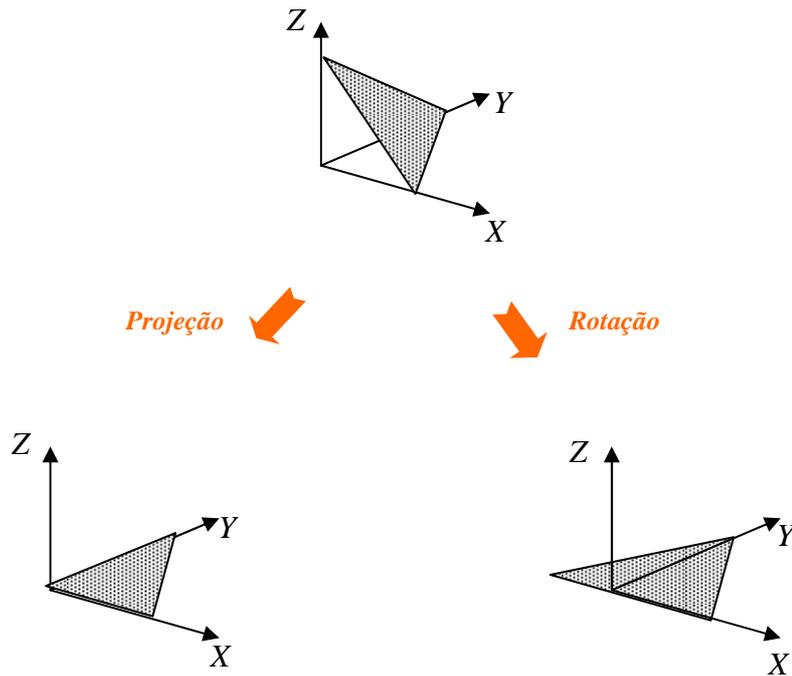


Figura 3.6 - Esquema da transformação de elementos do estado final para o inicial, a fim de obter U^e .

A obtenção do método de Newton provem da expansão do resíduo $\{R\}$ usando série de Taylor em $\{U^*\}^{(i-1)}$. Omitindo os termos de alta ordem, obtém-se:

$$\{R(U^{*(i-1)})\} + \left[\frac{\partial R}{\partial U} \right]_{\{U\}^{(i-1)}} \cdot (\{U^*\} - \{U^*\}^{(i-1)}) = 0 \quad (3.81)$$

$$\left[\frac{\partial R}{\partial U^*} \right]_{\{U^*\}^{(i-1)}} \cdot \{\Delta U^*\}^{(i)} + \{F_{\text{int}}\}^{(i-1)} - \{F_{\text{ext}}\}^{(i-1)} = 0 \quad (3.82)$$

onde

$$\{\Delta U^*\}^{(i)} = \{U^*\} - \{U^*\}^{(i-1)} \quad (3.83)$$

Definindo a matriz tangente $[K^{Tang}]$ como:

$$\left[K^{Tang} \right]^{(i-1)} = \left[\frac{\partial R}{\partial U^*} \right]_{\{U^*\}^{(i-1)}} \quad (3.84)$$

pode-se propor um esquema do algoritmo Newton-Raphson da seguinte forma:

$$\left[K^{Tang} \right]^{(i-1)} \{ \Delta U^* \}^{(i)} = \{ F_{ext} \}^{(i-1)} - \{ F_{int} \}^{(i-1)} \quad (3.85)$$

$$\{ U^* \}^{(i)} = \{ U^* \}^{(i-1)} + \{ \Delta U^* \}^{(i)} \quad (3.86)$$

A convergência do problema não-linear é atingida quando a razão entre as normas do resíduo da iteração corrente e do Resíduo com o deslocamento inicial $\{ U_0 \}$ for menor que um determinado valor de convergência, ou seja:

$$\frac{\| \{ R \} \|}{\| \{ R_{U_0} \} \|} \leq \text{valor de convergência} \quad (3.87)$$

Caso o problema de aproximação inversa não atinja a convergência, optou-se pela estratégia de multi-passos (*multi-step*). Porém, ao invés de re-dividir a altura de estampagem como é usual [Kim *et al*, 2001], optou-se por aumentar o coeficiente de encruamento n da curva tensão - deformação de forma a aproximá-la de uma curva linear, em seguida ir diminuindo paulatinamente o seu valor até o valor real, sendo a solução do incremento anterior um "chute inicial" para a próxima iteração. Resumindo, o algoritmo pode ser colocado da seguinte forma:

- 1 - se não converge, volta ao U_0 (estimativa inicial);
- 2 - aumenta o valor do coeficiente de encruamento (por exemplo, $n = 2*n$) da curva tensão deformação $\sigma = K \epsilon^n$;
- 3 - com o novo valor da curva de encruamento, a curva tensão - deformação tende a diminuir sua não linearidade, facilitando assim a convergência do problema (Figura 3.7).
- 4 - diminui o valor de n seguindo uma determinada progressão (por exemplo, $n_{i+1} = n_i - n_i/5$), e utiliza o valor o resultado da iteração anterior como U_0 da próxima iteração;
- 5 - este procedimento segue até atingir o valor real de n .

Nas simulações prévias, esta estratégia baseada na alteração do valor do encruamento se mostrou mais eficaz que a técnica de re-dividir a altura de estampagem

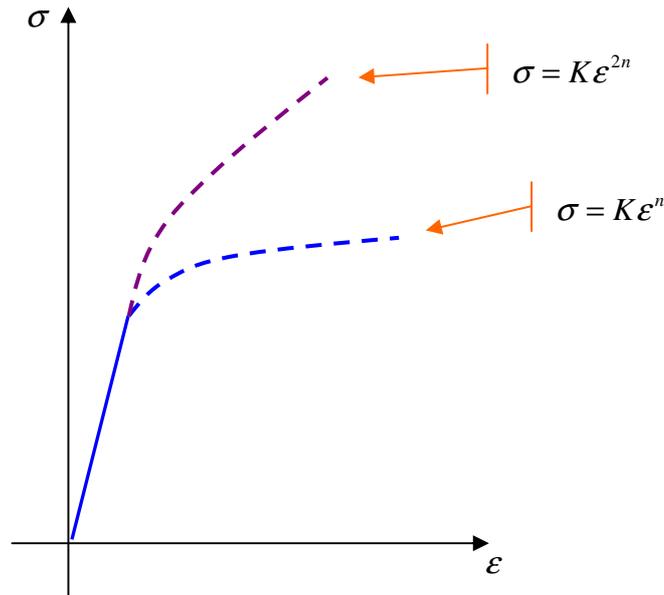


Figura 3.7 - Esquema da curva tensão - deformação para diferentes valores de n .

3.3.2.6 - Matriz Tangente Consistente

O método de Newton visto anteriormente consiste basicamente na linearização do resíduo, eq. (3.81), onde torna-se necessária a determinação da matriz tangente $[K^{Tang}]$. Esta matriz pode ser determinada tanto de forma implícita (utilizando técnicas de diferenças finitas, por exemplo), quanto de forma explícita (analítica). Em problemas de análise inversa, ambas as formas de determinação são encontradas na literatura [Guo *et al.*, 1990], [Lee *et al.*, 1998], [Guo *et al.*, 2000] e [Shi *et al.*, 2001]. No entanto, a matriz tangente analítica tem um custo computacional consideravelmente menor, o que a torna mais atraente para ser utilizada neste trabalho.

Da eq. (3.84), tem-se que a matriz tangente é definida como:

$$[K^{Tang}] = \left[\frac{\partial R(U^*)}{\partial U^*} \right] = \left[\frac{\partial F_{int}(U^*)}{\partial U^*} \right] - \left[\frac{\partial F_{ext}(U^*)}{\partial U^*} \right] \quad (3.88)$$

onde se obtém a separação da matriz tangente em duas parcelas; uma devido às forças internas, denominada aqui de $[K_{int}^{Tang}]$, e outra devido às forças externas $[K_{ext}^{Tang}]$. A seguir, será mostrada resumidamente a determinação analítica dessas parcelas da matriz tangente.

Matriz tangente devido às forças internas

A parcela da matriz tangente devido às forças internas é calculada a partir da Eq. (3.64). Apenas $\{\sigma\}$ e λ_3 variam com $\{U\}$:

$$\left[\frac{\partial F_{\text{int}}^e}{\partial U} \right] = [T]^T [\Phi]^T h_0 A^e \left(\left[\frac{\partial \sigma}{\partial U} \right] \lambda_3 + \{\sigma\} \left\{ \frac{\partial \lambda_3}{\partial U} \right\} \right) \quad (3.89)$$

Da equação constitutiva, Eq. (3.37), tem-se:

$$\left[\frac{\partial \sigma}{\partial U} \right] = [P]^{-1} \left(\{\varepsilon\} \left\{ \frac{\partial E_s}{\partial U} \right\}^T + E_s \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial U} \right] \right) \quad (3.90)$$

Sendo o módulo secante dado em função das tensões e deformações efetivas, $E_s = \bar{\sigma} / \bar{\varepsilon}$, e a curva tensão deformação do material como uma relação exponencial do tipo $\bar{\sigma} = K \bar{\varepsilon}^n$, onde K é uma constante de proporcionalidade e n o expoente de encruamento do material, a derivada do módulo secante da Eq. (3.90) pode ser calculada como:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial E_s}{\partial U} \right\} &= \frac{\partial E_s}{\partial \bar{\varepsilon}} \left\{ \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} \right\} \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial U} \right]; \\ E_s &= \frac{K \bar{\varepsilon}^n}{\bar{\varepsilon}}; \\ \frac{\partial E_s}{\partial \bar{\varepsilon}} &= (n-1) K \bar{\varepsilon}^{(n-2)}; \\ \left\{ \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} \right\} &= \frac{1}{\bar{\varepsilon}} [P]^{-1} \{\varepsilon\}; \end{aligned} \quad (3.91)$$

O cálculo de $\{\partial \varepsilon / \partial U\}$ é feito a partir da derivada da Eq. (3.23):

$$\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial U} \right] = \left\{ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda_i} \right\} \left\{ \frac{\partial \lambda_i}{\partial U} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} \right\} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial U} \right\}^T \quad (3.92)$$

onde $\{\partial \varepsilon / \partial \lambda_i\}$ e $\{\partial \varepsilon / \partial \varphi\}$ vem da derivada explícita da eq. (3.23), e $\{\partial \lambda_i / \partial U\}$ e $\{\partial \varphi / \partial U\}$ podem ser obtidos também através da derivada explícita das eqs. (3.18) e (3.19) respectivamente. E da relação de incompressibilidade do material, onde $\lambda_3 = 1 / (\lambda_1 \lambda_2)$, tem-se:

$$\left\{ \frac{\partial \lambda_3}{\partial U} \right\} = \frac{\partial \lambda_3}{\partial \lambda_1} \left\{ \frac{\partial \lambda_1}{\partial U} \right\} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial \lambda_2} \left\{ \frac{\partial \lambda_2}{\partial U} \right\} \quad (3.93)$$

Matriz tangente devido às forças externas

Conforme foi visto, o vetor de forças externas é dividido em dois grupos: um devido ao prensa-chapas e outro devido ao punção. A mesma separação acontece na determinação da matriz tangente devido às forças externas $[K_{ext}^{Tang}] = [K_{PC}^{Tang}] + [K_P^{Tang}]$, onde a primeira parcela é devida ao prensa-chapas e a segunda devido ao punção.

- Determinação de $[K_{PC}^{Tang}]$

No caso em que o prensa-chapas se encontra no mesmo plano da chapa indeformada (caso mais comum), se tem que $\{u\} = \{u_t\}$, e a eq. (3.69) fica da forma:

$$\{F_{ext}^{PC}\} = -2A^e \mu q_n [T]^T [N]^T \frac{\{u\}}{\|\{u\}\|} \quad (3.94)$$

A derivada direcional desta força numa direção qualquer $\{d\}$ é dada por:

$$\begin{aligned} D\{F_{ext}^{PC}(u)\}\{d\} &= -2A^e \mu q_n [T]^T [N]^T \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\{u\} + t\{d\}}{[(\{u\} + t\{d\}) \cdot (\{u\} + t\{d\})]^{1/2}} \right) \right]_{t=0} \\ &= -2A^e \mu q_n \{T\}^T \{N\}^T \left[\frac{\{d\}}{\|\{u\}\|} - \frac{\{u\}}{\|\{u\}\|^3} \{d\} \cdot \{u\} \right] \\ &= -2A^e \mu q_n [T]^T [N]^T \left[\frac{[I]}{\|\{u\}\|} - \frac{\{u\}\{u\}^T}{\|\{u\}\|^3} \right] \{d\} \end{aligned} \quad (3.95)$$

Discretizando em elementos finitos e expressando a derivada em termos das coordenadas globais do sistema, tem-se:

$$D\{F_{ext}^{PC}(u)\}\{d\} = \underbrace{-2A^e \mu q_n [T]^T [N]^T \left[\frac{[I]}{\|\{u\}\|} - \frac{\{u\}\{u\}^T}{\|\{u\}\|^3} \right]}_{[K_{PC}^{Tang}]} [N][T]\{D^*\} \quad (3.96)$$

onde $[K_{PC}^{Tang}]$ é uma matriz simétrica.

- Determinação de $[K_p^{Tang}]$

A força externa devido ao punção $\{F_{ext}^P\}$ é determinada por nó e pode ser colocada como:

$$\{F_{ext}^P\} = \int F \{n^f\} = (\{F_{int}\} \cdot \{n^f\}) \{n^f\} = \{n^f\} \{n^f\}^T \{F_{int}\} \quad (3.97)$$

onde $\{n^f\}$ é dado na eq. (3.41). Assim, a derivada direcional da $\{F_{ext}^P(u)\}$ numa direção qualquer $\{d\}$ é:

$$\begin{aligned} D\{F_{ext}^P(u)\}\{d\} &= (D\{n^f\}\{d\})\{n^f\}^T \{F_{int}\} + \{n^f\} (D\{n^f\}\{d\})^T \{F_{int}\} + \\ &+ \{n^f\} \{n^f\}^T (D\{F_{int}\}\{d\}) \end{aligned} \quad (3.98)$$

onde $D\{n^f\}\{d\}$ fica da forma:

$$\begin{aligned} D\{n^f(u)\}\{d\} &= - \underbrace{\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \left(\frac{[I]}{\|\{u_i\}\|} - \frac{\{u_i\}\{u_i\}^T}{\|\{u_i\}\|^3} \right)}_{K_{nf}} \left([I] - \{n\}\{n\}^T \right) \{d\} \\ &= [K_{nf}] \{d\} \end{aligned} \quad (3.99)$$

A derivada da força interna na eq. (3.98) já foi determinada no cálculo da matriz tangente devido às forças internas. No entanto, sendo o cálculo da matriz tangente devido à força externa do punção feito sobre um determinado nó k , a matriz tangente devido à forças internas aqui utilizadas só constarão as linhas e colunas referentes aos elementos vinculados a este nó k . Assim, defini-se que:

$$D\{F_{int}(u)\}\{d\}\Big|_k = [K_{int}^{Tang}]_k \{d\} \quad (3.100)$$

Desta forma, pode-se finalmente reescrever a eq. (3.98) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
D\{F_{ext}^P(u)\}\{d\} &= \left([K_{nf}] \{d\} \right) \{n^f\}^T \{F_{int}\} + \{n^f\} \left([K_{nf}] \{d\} \right)^T \{F_{int}\} + \\
&\quad + \{n^f\} \{n^f\}^T \left([K_{int}^{Tang}]_k \{d\} \right) \\
&= \left(\{n^f\}^T \{F_{int}\} [K_{nf}] \right) \{d\} + \left(\{n^f\} \{F_{int}\}^T [K_{nf}] \right) \{d\} + \\
&\quad + \left(\{n^f\} \{n^f\}^T [K_{int}^{Tang}]_k \right) \{d\}
\end{aligned} \tag{3.101}$$

onde a matriz tangente resultante acima é não-simétrica.

Em análises prévias de simulação de estampagem foi feita a aferição da matriz tangente analítica, seguindo o procedimento citado neste capítulo, com a matriz tangente numérica, calculada pelo método das diferenças finitas central, obtendo uma boa correlação nos valores da matriz.

4 Otimização

4.1 - ASPECTOS GERAIS

Otimização estrutural pode ser definida como uma forma racional de projeto estrutural onde se busca o melhor projeto (no sentido de um determinado desempenho) dentre um conjunto de possíveis projetos que satisfazem restrições de comportamentos e/ou geometrias. A otimização estrutural combina conceitos matemáticos e mecânicos com engenharia e tem um campo multidisciplinar muito vasto para aplicações, tais como engenharia mecânica, civil, nuclear, aeronáutica e espacial. A consideração de recursos materiais e energéticos limitados, baixo tempo de produção, forte competição tecnológica e problemas ambientais foi o que motivou o aumento considerável do número de pesquisa em otimização estrutural, [Olhoff *et al.*, 1983]. Tomando o critério de projeto como sendo o custo ou peso mínimo de uma estrutura para um dado desempenho, ou o critério de máximo desempenho para um limite sobre o custo (ou seja, máxima economia de material), a relevância da otimização estrutural é óbvia.

A otimização estrutural pode ser dividida basicamente em quatro níveis: a) otimização topológica (*topology optimization*), b) otimização de forma (*shape optimization*), c) otimização dimensional (*size optimization*), d) otimização material (*material optimization*), Figura 4.1.

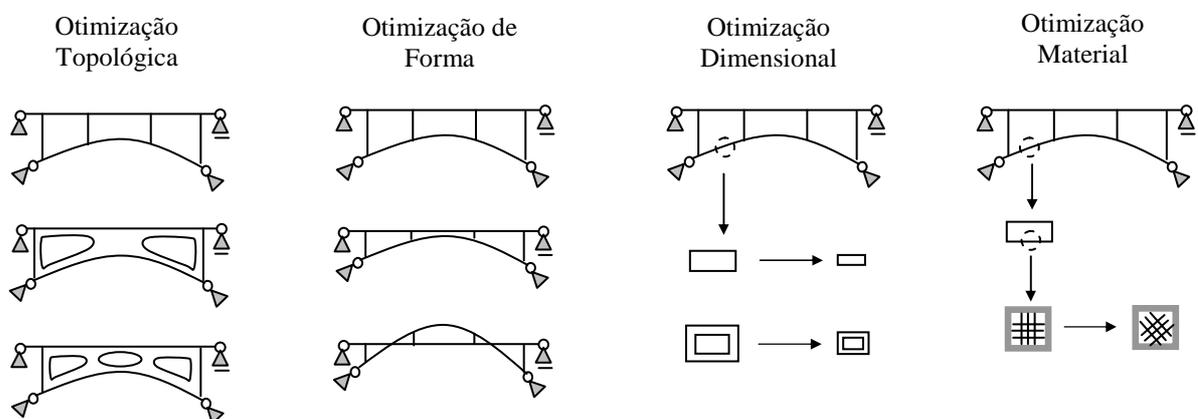


Figura 4.1 - Exemplos dos principais tipos de otimização estrutural.

Dentre as formas de otimização estrutural, a otimização dimensional foi a que surgiu primeiro. Neste tipo de problema, a função desempenho geralmente está relacionada com as propriedades de rigidez tais como a área de uma seção transversal de uma barra ou a espessura de uma placa. A otimização material é mais comum em estruturas de materiais compostos laminados. Nessas estruturas, as variáveis de projeto são, por exemplo, espessura do laminado, ângulo das fibras, número de lâminas, etc. A otimização de forma visa alcançar um projeto ótimo de um determinado componente estrutural através de variáveis que controlam a forma do contorno (ou parte dele).

A otimização topológica é frequentemente referenciada na literatura como otimização de layout (ou ainda otimização de forma generalizada), [Eschenauer *et al.*, 2001]. A importância deste tipo de otimização encontra-se no fato de que, a escolha de uma topologia apropriada de uma estrutura na fase conceitual é, geralmente, um dos fatores mais decisivos para a eficiência de um novo produto. A otimização de forma e dimensional em geral não podem mudar a topologia estrutural durante o processo de solução. A otimização topológica é portanto mais valiosa como uma ferramenta de "pré-processamento" para uma posterior otimização de forma e/ou dimensional.

Dependendo do tipo de estrutura, são distinguidos dois tipos de otimização topológica: discreta ou contínua. Para estruturas discretas, como treliças, a variação de conectividade significa não só gerar ou eliminar membros estruturais entre as juntas já existentes, mas também definir novas juntas ou remover as juntas existentes. Analogamente, para estruturas contínuas, a variação da conectividade pode significar tanto separar ou juntar os domínios estruturais, como também gerar ou excluir estes domínios. Para estruturas contínuas, a otimização topológica pode ainda ser feita de duas formas: pela aproximação macro estrutural (ou geométrica) e pela aproximação micro estrutural (ou material), [Eschenauer *et al.*, 2001]. Com a aproximação macro estrutural, a topologia do corpo sólido pode ser mudada pelo crescimento ou degeneração de material, através da inserção de "vazios" (orifícios). Em cada iteração, pode haver um novo remalhamento, e os "vazios" e as variáveis de contorno do corpo contínuo podem ser simultaneamente submetidas a uma otimização de forma. Na aproximação micro estrutural, a malha de elementos finitos é mantida constante durante todo o processo de otimização, enquanto as mudanças ocorrem nas propriedades constitutivas do material. O problema discreto, controlado por um parâmetro ρ que indica a existência de material ($\rho = 1$) ou não existência de material ($\rho = 0$), não é bem posto matematicamente, isto é, ele não garante a existência de mínimo. Assim, a abordagem micro estrutural admite a existência de "material intermediário" com propriedades constitutivas que variam

continuamente entre material sólido e vazio. Este comportamento pode ser simulado através da definição de um material com microestruturas ou "poroso" cujas, propriedades macroscópicas aparentes são obtidas através de técnicas de homogeneização, [Bendsoe, 1995], [Hassani *et al.*, 1999]. Uma técnica bastante utilizada por sua simplicidade é admitir que o comportamento do material seja controlado por uma única variável $\rho = [0, 1]$, frequentemente chamada de "densidade" do material. Nesta formulação, denominada SIMP (*Solid Isotropic Microstructure with Penalty*), o tensor de elasticidade E_{ijkl} e a massa M são dados como:

$$E_{ijkl}(x) = \rho(x)^p E_{ijkl}^0, \quad p > 1, \quad M = \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \quad (4.1)$$

onde E_{ijkl}^0 é o tensor de elasticidade do material de referência. A função de densidade $\rho(x)$ entra na relação das rigidezes numa potência $p > 1$ que tem um efeito de penalização sobre as densidades intermediárias $0 < \rho < 1$, fazendo com que a rigidez dada por E tenha um comportamento não linear com a densidade (isto é, menor que a relação de proporcionalidade). Ou seja, o uso do modelo SIMP para $p > 1$ força a topologia a caminhar para valores limites das densidades, $\rho = 0$ (vazio) e $\rho = 1$ (sólido). Porém, a solução para este tipo de problemas frequentemente tende a um campo oscilatório, apresentando uma indesejável distribuição de densidade num padrão periódico na forma de tabuleiro (*checkerboard*), Figura 4.2.



Figura 4.2 - Exemplo de um projeto ótimo alcançado via otimização topológica: (a) presença do fenômeno de *checkerboard* na solução; (b) problema regularizado, sem o *checkerboard*.

Várias alternativas para amenizar este fenômeno estão disponíveis na literatura. Algumas delas impõem diretamente um limite local sobre as componentes do gradiente, calculados a partir da diferença de densidades entre os elementos adjacentes, divididos pela

distância entre eles, [Bendsoe, 1995], [Petersson *et al.*, 1998]. Outras são baseadas na filtragem do campo de densidades (o que gera limites sobre o gradiente ao longo de uma sub-região), [Bourdin, 2001]. Algumas têm como base a imposição de um limite para o perímetro total da solução [Haber *et al.*, 1995]. Em Borrvall *et al.* [2001], uma aproximação microestrutural é usada e o volume de material intermediário é penalizado por um funcional. E em Pereira [2001], uma solução bastante eficiente para este problema foi a introdução de um limite para a norma do gradiente através de uma penalização. Um maior detalhamento a respeito da otimização topológica será visto no Capítulo 5, junto com a proposta deste trabalho.

4.2 - OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL EM CONFORMAÇÃO DE CHAPAS

Recentemente, houve um esforço concentrado para reduzir o peso das partes metálicas usadas na indústria automobilística. Uma das soluções possíveis estaria nas partes dos automóveis constituídas de chapas metálicas conformadas, onde se poderiam utilizar aços de alta resistência. No entanto, estes aços têm geralmente baixa conformabilidade. Além disso, poderia ser inviável projetar uma matriz capaz de conformar um aço de alta resistência. Para isto, seria necessário todo um reprojeto do processo de conformação que se adaptasse aos novos materiais.

Atualmente, grande parte dos projetos de peças conformadas baseia-se na experiência adquirida e na metodologia de "tentativa e erro". Os critérios típicos usados durante o projeto de peça conformada são basicamente a ausência de enrugamentos (instabilidade local), rugosidades (conhecido como "casca de laranja") e de fraturas (e/ou estrição) durante o processo de conformação. Já sobre o produto final conformado, os principais critérios utilizados estão nas tensões e deformações assim como a vida em fadiga do produto final em uso. Estes critérios, aliados as outras funções de desempenho tais como mínimo peso/custo e máxima rigidez, são ideais para a utilização de uma técnica de otimização numérica.

A utilização de técnicas de otimização aliadas à simulação numérica em problemas de conformação tem sido foco de interesse de muitos pesquisadores. Em Park *et al.* [1999], a forma inicial ideal de um *blank* foi alcançada através do método da iteração do caminho de deformação (*deformation path iteration method*), utilizando técnicas de elementos finitos. O procedimento de otimização é feito através da minimização de uma função erro, determinada pela diferença entre *blank* calculado e o desejado. Em Moreno [2000], foi implementada uma metodologia de otimização (baseada em um método geométrico) para determinar o perfil do *blank*. Considerou-se o *blank* ideal aquele em que a peça obtida a partir da conformação

possuísse um flange constante, de modo a minimizar ou eliminar a operação de rebarbação. Usou-se, neste caso, um pacote comercial (ANSYS/LS-Dyna 3D) para fazer as simulações do processo de conformação.

Em Kok *et al.* [1999], buscou-se a forma ótima da matriz de pré-conformação de uma porta de um veículo automotivo. A forma da matriz é baseada sobre uma interpolação de *splines* cúbicas e o objetivo foi minimizar o peso do blank, sujeito a restrição de espessura. A metodologia utilizada foi a RSM (*response surface methodology*). A otimização do *blank* inicial também foi tema do trabalho de Kim *et al.* [2001], onde o objetivo foi conseguir uma distribuição uniforme da espessura da peça conformada, através da modificação da espessura inicial. Trabalhos semelhantes foram feitos em Ohata *et al.* [1996] e Kleinermann [2000], onde os autores apresentaram metodologias de otimização para se chegar a uma espessura uniforme na peça conformada. Kleinerman implementou e testou vários métodos de otimização tanto no problema geométrico (espessura final uniforme), quanto em problemas de identificação paramétrica (parâmetros materiais da equação constitutiva que otimizam o processo de conformação).

Em processos de conformação que envolve dobramento e flexão de chapas, quando as forças são removidas, o metal tende a retornar a sua forma original, o que resulta no fenômeno conhecido como efeito mola ou retorno elástico (*springback*). O efeito mola é função tanto das propriedades do material conformado (resistência e módulo de elasticidade), como também de propriedades geométricas (tais como, raio das dobras e distância entre a matriz e o punção). Para minimizar este efeito indesejado, técnicas de otimização aliadas à simulação numérica do processo de estampagem, tem sido utilizadas por alguns autores, alcançando resultados satisfatórios e comprovados na prática, [Shu *et al.*, 1996] , [Chou *et al.*, 1999].

A necessidade do uso de técnicas de otimização em processos de conformação mecânica é evidente. Porém, há poucos trabalhos publicados para lidar com estes problemas devido a algumas dificuldades. A principal delas se deve ao fato de que no procedimento de otimização é necessário um grande número de simulações do processo de conformação, sendo que cada um deles consomem um considerável tempo computacional. Outro fator surge do cálculo da análise de sensibilidade (especialmente devido ao tratamento das condições de contato durante o procedimento incremental). Diante deste panorama, alguns trabalhos têm surgido recentemente, aplicando simulações numéricas de estampagem de chapas baseadas em técnicas de aproximação inversa, com algoritmos de otimização. Um dos mais expressivos grupos de trabalho neste tema é o representado pela equipe de trabalho liderada pelo professor Batoz, da *Université de Technologie de Compiègne* (França). Batoz *et al.* têm combinado

técnicas de aproximação inversa com o método de otimização SQP (*Sequential Quadratic Programming*) para otimizar a forma inicial do *blank* [Guo *et al.*, 2000] e as forças dos quebra-rugas [Naceur *et al.*, 2001]. Além do método de aproximação inversa fornecer soluções rápidas com baixo tempo computacional, a análise de sensibilidade do problema de otimização é totalmente analítica e é calculada diretamente baseada somente no conhecimento do estado inicial e final da peça conformada, usando o método da variável adjunta. Já em Delamézière *et al.* [2002], a aproximação inversa foi utilizada em um problema de otimização material, onde as propriedades materiais n (coeficiente de encruamento) e r (coeficiente de anisotropia) são as variáveis de projeto. O objetivo foi maximizar a capacidade de embutimento de uma chapa sob restrição de estricção local, que foi representado pela curva limite de conformação do material calculada analiticamente pelo método proposto por Graf *et al.* [1990].

4.3 - OTIMIZAÇÃO APLICADA À *TAILORED BLANK*

Conforme foi visto anteriormente, as principais vantagens do uso de *tailored blanks* estão na redução do custo, redução do peso, aumento da resistência do produto final e economia de material. Porém no processo de conformação de um *tailored blank* é mais complicado que de um *blank* normal, e podem surgir problemas devidos principalmente à: baixa conformabilidade da região da solda, distorções excessivas do cordão de solda e projeto da matriz/punção (devido às diferenças entre as espessuras da chapa). Dada as suas vantagens e limitações, é providencial o uso de técnicas de otimização aliadas às ferramentas de simulação numérica de maneira a obter um processo/produto ótimo.

Em Lee *et al.* [1998]^a, utilizou-se a aproximação inversa para determinar a posição ótima da linha de solda no *blank* inicial. O posicionamento ótimo da linha de solda de um *tailored blank* também foi objeto de estudo de Kim *et al.* [2000], onde foi utilizado o método *roll-back* (método baseado no remalhamento da peça deformada) junto com um software de simulação baseado em técnicas de integração explícita no tempo para chegar à forma ótima da peça.

Um trabalho bastante interessante foi feito em Vogel *et al.* [2001], onde foram empregadas técnicas de otimização topológica e dimensional para obter uma porta de um automóvel, conformada a partir de um *tailored blank* com o mínimo de peso e máxima rigidez (baseado nos conceitos da ULSAB). Primeiro, o leiaute da distribuição de espessura do *tailored blank* foi determinado utilizando conceitos de otimização topológica com formulação "0-1" (no caso, espessura mínima e espessura máxima), máxima rigidez com volume restrito.

A partir deste resultado e da consideração de outros requisitos funcionais, tais como segurança, conformabilidade, viabilidade de fabricação, etc., o autor estabeleceu onde seriam posicionadas as linhas de solda do *tailored blank*. Tendo definido o leiaute do *tailored blank*, foi empregada uma técnica de otimização dimensional para minimizar o peso da peça, sujeita a restrições em rigidez (a torção e flexão), onde as variáveis de projeto foram as espessuras de cada parte do *tailored blank*.

De forma semelhante, porém mais completa, foi feita em Shin *et al.* [2002] na otimização de uma porta de um automóvel. Além do emprego da otimização topológica para definir o número de partes do *tailored blank* e o posicionamento das linhas de solda, e da otimização dimensional para definir as espessuras ótimas de cada parte, foi empregado ainda uma otimização de forma nas fronteiras internas das partes soldadas, de maneira a achar um novo reposicionamento ótimo das linhas de solda.

É interessante notar que em ambos os trabalhos (Vogel e Shin), a otimização foi aplicada sobre a peça conformada e as funções de desempenho baseadas inteiramente na sua aplicabilidade (condições de uso). Ou seja, não foram levados em conta restrições de conformabilidade da peça durante o processo de otimização. Ao mudar o leiaute da peça, regiões que antes eram mais espessas e suportavam um determinado limite de deformação, podem, depois do processo de otimização, estar com uma espessura inviável, o que poderá ocasionar uma falha/estricção durante o processo de conformação. Ao se trabalhar com otimização de *tailored blank*, nota-se a necessidade de se considerar não só as restrições da peça em uso, como também, as restrições do processo de conformação.

4.3.1 - Formulações em Otimização de *Tailored Blank*

No projeto de uma peça a ser estampada com *tailored blanks*, devem ser definido um conjunto de variáveis que determinam as características do *blank* a ser usado. Assim, dentro de um problema de otimização, podem-se ter as seguintes variáveis de projeto:

- Número de chapas.
- Espessuras.
- Geometria das uniões (fronteiras entre as chapas).
- Geometria do contorno do *blank*.
- Orientação de laminação das chapas a serem unidas.
- Propriedades materiais, tais como: coeficiente de encruamento, coeficiente de anisotropia, etc.
- Disposição dos prensa-chapas e dos quebra-rugas.

- Propriedades do cordão de solda, etc.

Em termos gerais, o processo de conformação deve brindar um produto com boas características de desempenho em uso e boas características de estampabilidade, na sua fabricação. Estas características podem atuar como objetivos a serem atingidos ou como restrições do projeto. Nas seções seguintes, estes objetivos e/ou restrições serão vistos na forma de funções de desempenhos.

4.3.1.1 - Funções de Desempenho

Para o problema de otimização topológica, podem ser feitas as seguintes abordagens:

- Controle através do conceito de densidades relativas intermediárias de propriedades. O parâmetro de controle será a densidade relativa $0 \leq \rho(x) \leq 1$. Se $\rho(x) = 0$, significa que o ponto material pertence à chapa de propriedade do tipo 1. Se $\rho(x) = 1$, o ponto material pertence uma região da chapa com propriedade tipo 2. Numa primeira abordagem, em se tratando de *tailored blanks*, é intuitivo considerar como propriedade a espessura da chapa. Mas outras propriedades que influenciam na estampabilidade da chapa podem ser consideradas.
- Uso de formulação tipo SIMP admitindo que, mesmo sendo um sólido anisotrópico, a variação das propriedades de material com o controle de densidade acontece isotropicamente (isotropia planar).
- O controle da função densidade relativa é feita pelo espaço usual de elementos finitos, com parâmetros nodais ρ_i .

Assim, as funções desempenho podem ser do tipo:

$$f = f(u(\rho), \rho)$$

sendo que, para

$$\rho = 0 \rightarrow \text{Geometria ou material tipo "1"}$$

$$\rho = 1 \rightarrow \text{Geometria ou material tipo "2"}$$

A seguir lista-se um conjunto de formulações possíveis para abordar o problema de definição geométrica do *tailored blank* segundo a técnica de otimização topológica.

a) Energia de Deformação.

Neste caso, a formulação é a clássica de *compliance* da peça em uso:

$$f_1 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u(\rho, x), \rho) : \varepsilon(u(\rho, x), \rho) d\Omega \quad (4.2)$$

b) Massa Total.

A função desempenho para a massa total (poderia também ser apresentado a formulação para o volume total) é da forma:

$$f_2 = \int_{\Omega} \rho d\Omega \quad (4.3)$$

c) Massa de Material 2

Neste caso, a função desempenho pode ser colocada como a quantidade do *blank* de material mais nobre (de maior estampabilidade, por exemplo) ou de maior espessura.

$$f_3 = \int_{\Omega} \rho_2 d\Omega \quad (4.4)$$

onde ρ_2 representa o material com propriedades mais nobres ou de maior espessura.

d) Critério de Falha da Peça em Uso

A função desempenho neste caso é colocada na forma de uma função que represente um determinado critério de falha para uma peça sob um carregamento em condições de uso. O critério pode ser baseado em: tensão de escoamento, rigidez a torção e a flexão, flambagem, frequências naturais, etc.

$$f_4 = f_{\sigma}(\sigma(u(x, \rho)), \rho) \quad \begin{cases} > 0, & \text{falha} \\ < 0, & \text{seguro} \end{cases} \quad (4.5)$$

e) Critério de Falha Durante o Processo de Conformação da Peça

Há a necessidade também de um critério para avaliar se a peça poderá falhar ou não durante o processo de conformação. Neste caso, a função desempenho é semelhante à da eq. (4.5), porém as tensões são aquelas geradas durante o processo de conformação. Este critério de falha pode ser modelado através uma curva limite de conformação (conforme visto no Capítulo 2).

$$f_5 = f_c(\varepsilon_c(u_c(x, \rho), \rho)) \begin{cases} > 0, & \text{falha} \\ < 0, & \text{seguro} \end{cases} \quad (4.6)$$

onde u_c refere-se aos deslocamentos durante o processo de conformação.

Neste capítulo foi apresentada uma abordagem sucinta sobre a otimização estrutural e topológica, e suas possibilidades de aplicação na definição do leiaute de *tailored blanks*. No próximo capítulo, será apresentado o detalhamento matemático da proposta deste trabalho.

5 Proposta do Trabalho

5.1 - INTRODUÇÃO

Este trabalho teve como proposta utilizar a otimização topológica como uma ferramenta de definição de leiaute de *tailored blanks*. O objetivo principal a ser atingido foi resolver o problema de mínima massa com restrição de falha durante o processo de conformação. Esta restrição foi representada pela curva limite de conformação que pode ser determinada por alguns dos métodos mostrados no Capítulo 2. O processo de conformação foi simulado através do método por Aproximação Inversa, conforme visto no Capítulo 3.

A seguir, será mostrada a formulação que foi utilizada para resolver o problema de otimização topológica com restrição em conformação, que é a motivação e principal inovação inserida neste trabalho.

5.2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere-se um *blank* composto por duas chapas de propriedades diferentes denominadas ρ_1 e ρ_2 , podendo estas representarem espessuras, propriedades de rigidez, de estampagem, etc. Conforme visto no Capítulo 4, neste problema $\rho \in [0, 1]$ é uma variável que representa um estado artificial intermediário entre material 1 ($\rho = 0$) e material 2 ($\rho = 1$). Seja $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ um domínio aberto com contorno $\partial\Omega$. O domínio Ω_1 está ocupado pelo material 1 ($\rho = 0$), enquanto o domínio Ω_2 é ocupado pelo material 2 ($\rho = 1$), Figura 5.1.

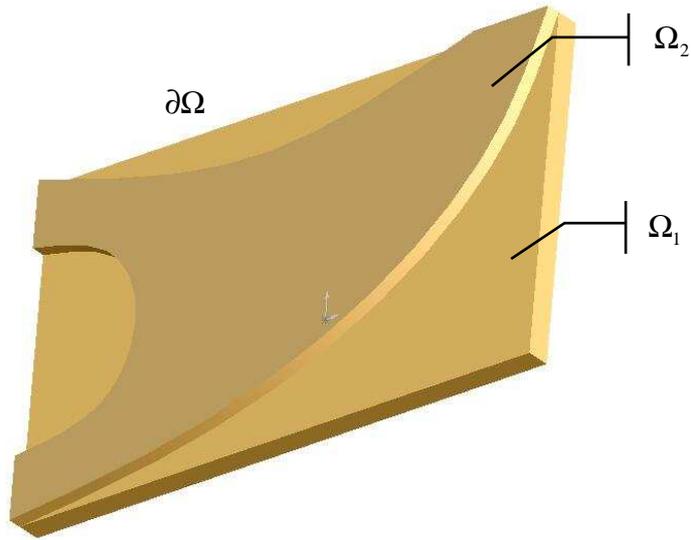


Figura 5.1 - Definição geométrica sobre Ω .

O problema de minimização de massa, considerando restrições de falha devido à conformação, pode ser colocado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\rho \in H^1(\Omega; (0,1))} \quad & m(\rho) = \int_{\Omega} \bar{\rho}(\rho) d\Omega \\ \text{Sujeito a:} \quad & F_{conf}(\varepsilon(x), \rho) \leq 0 \quad \text{em } \Omega \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde $\bar{\rho}$ é a densidade do material intermediário e ρ é o parâmetro de controle. F_{conf} é a função falha, definindo uma restrição local do nível de deformação. Conforme visto no Capítulo 4, outras funções de desempenho poderiam ter sido utilizadas como função objetivo.

De forma semelhante à apresentada para elasticidade linear, é necessário dispor de uma equação constitutiva para o problema de conformação que seja dependente da densidade relativa. Considerando somente o comportamento de membrana, a espessura de cada elemento foi colocada em função da densidade média:

$$h(\rho) = h_1(1 - f(\rho)) + h_2 f(\rho), \quad (5.2)$$

onde h_1 e h_2 são as espessuras limites (mínima e máxima respectivamente) do *tailored blank*, e $f(\rho)$ é a densidade média do elemento triangular dada como:

$$f(\rho) = (\rho_{nó1} + \rho_{nó2} + \rho_{nó3})/3 \quad (5.3)$$

Desta forma, quando $f(\rho)$ é igual a zero, a espessura é igual ao valor mínimo h_1 , e quando $f(\rho)$ for igual a 1, a espessura é igual ao valor máximo h_2 .

Resultados preliminares mostraram que o problema de otimização tem melhor desempenho quando a equação constitutiva apresenta uma relação não linear com o parâmetro ρ . Isto poderia ser representado na prática como sendo uma diferença entre os materiais da chapa 1 e 2, Figura 5.3. Assim, optou-se por colocar a tensão de escoamento σ_e em função de ρ , como mostra a equação a seguir:

$$\sigma_e = \sigma_{e1}(1 - g(\rho)) + \sigma_{e2}g(\rho) \quad (5.4)$$

onde σ_{e1} e σ_{e2} são os valores da tensão de escoamento para o material 1 e 2 respectivamente, e $g(\rho)$ é uma função não-linear de ρ , podendo ser expressa da seguinte forma:

$$g(\rho) = (f(\rho))^q \quad (5.5)$$

onde q é um parâmetro penalizador a ser definido para cada exemplo. De forma semelhante à espessura, o valor da tensão de escoamento pode variar entre os valores limites σ_{e1} e σ_{e2} . Assim, quando $\rho = 0$, tem-se um material com a tensão de escoamento mais baixa, e quando $\rho = 1$, tem-se um material com a tensão de escoamento mais alta, conforme mostra o esboço da curva tensão-deformação da Figura 5.2

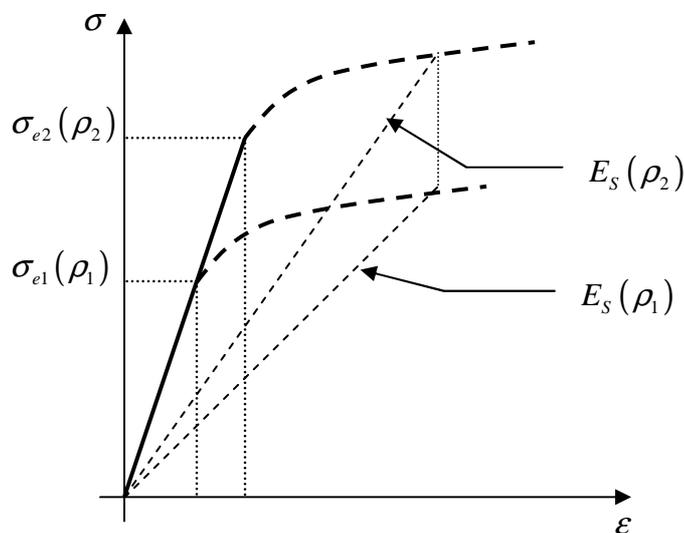


Figura 5.2 - Curva tensão-deformação para $\rho = 0$ e 1.

A equação constitutiva (3.47), agora em função de ρ , passa a ser da seguinte forma:

$$\{\sigma(\rho)\} = E_s(\rho)[P]^{-1}\{\varepsilon\} \quad (5.6)$$

na qual o módulo secante E_s das curvas tensão -deformação passa a ser função de ρ , Figura 5.2. Assim, para um dado ponto material x com valor de controle $\rho(x)$ e deformação $\{\varepsilon(x)\}$, pode-se determinar a deformação efetiva $\bar{\varepsilon}(x)$ e assim, obter a tensão $\{\sigma(x, \rho)\}$ através da eq. (5.6). No caso do elemento linear adotado, o vetor de forças internas do elemento, eq. (3.75), fica da forma:

$$\begin{aligned} \{F_{\text{int}}^e(\rho, u)\} &= [T]^T [\Phi]^T A^e \{\sigma(u, \rho)\} \lambda_3 h(\rho) \\ &= [T]^T [\Phi]^T A^e \{\sigma(u, \rho)\} \lambda_3 (h_1(1-f(\rho)) + h_2 f(\rho)) \end{aligned} \quad (5.7)$$

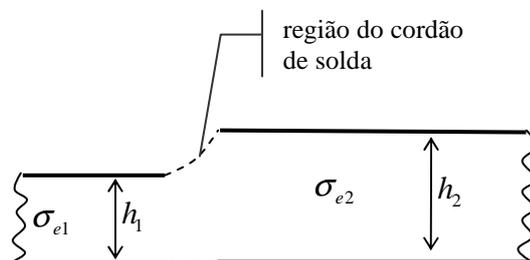


Figura 5.3 - Desenho exemplificando o *tailored blank* composto por duas chapas de espessuras e materiais diferentes.

5.2.1 - Critério de Falha Material

A falha em processo de estampagem está diretamente associada à estrição do material ou iniciação de uma trinca. Neste contexto, o critério de falha material é definido como sendo uma função capaz de identificar se o nível de deformação do material, submetido a um processo de estampagem leva este, ou não, à falha. O critério mais usado para medir as deformações máximas que uma chapa pode sofrer é o critério das Curvas Limite de Conformação, CLC, conforme foi visto no Capítulo 2. A CLC é frequentemente descrita em função das deformações principais:

$$F_{conf}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0 \quad (5.8)$$

Assim, um corpo se diz satisfazer o critério de falha, se em todo ponto deste, a função $F_{conf}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \leq 0$ é satisfeita. Para o problema de otimização, é conveniente que o critério de falha seja representado por uma função suave e diferenciável em todo o seu domínio. Como foram mostradas no Capítulo 2, as CLCs podem ser obtidas de três formas: experimental, analítica ou numérica (via elementos finitos). Através dos pontos do diagrama, obtidos por qualquer um destes métodos, é possível gerar uma curva suave por meio de uma interpolação. Na Figura 5.4, tem-se o esboço de uma curva suave gerada a partir de uma CLC que poderia ser obtida por um método experimental, por exemplo. A curva no caso é um polinômio do segundo grau, diferenciável em relação à ε_1 e ε_2 em todo o seu domínio. Para melhor interpolar os pontos da CLC, polinômios de ordem superior também poderiam ser utilizados.

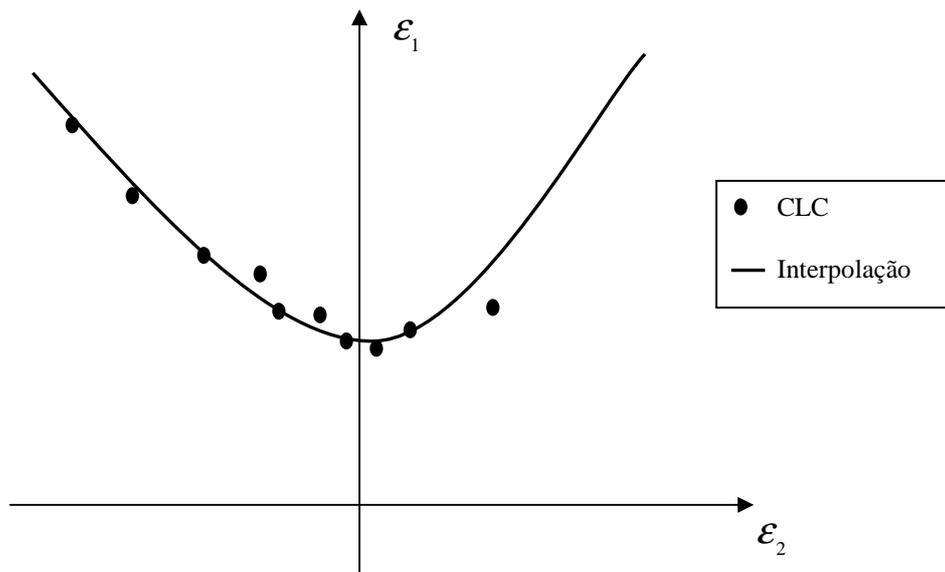


Figura 5.4 - Exemplos de interpolação para uma CLC por um polinômio do segundo grau.

Porém, admitindo-se que se trabalhará em um material fictício intermediário, torna-se necessário a inclusão do parâmetro de controle ρ no critério de falha, de forma que:

$$F_{conf}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho) \leq 0 \quad (5.9)$$

Tendo uma curva CLC para a chapa 1 ($\rho = 0$), e uma outra para a chapa 2 ($\rho = 1$), é possível gerar uma função do tipo da eq. (5.9) através de uma expressão do tipo:

$$F_{conf} = F_{conf}^1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) f(\rho) + F_{conf}^2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)(1 - f(\rho)) \leq 0 \quad (5.10)$$

É preciso lembrar que o material fictício intermediário deverá ser evitado do leiaute final, fazendo com que a chapa tenha predominantemente material 1 ($\rho = 0$) ou material 2 ($\rho = 1$). Um motivo físico que poderia ser associado a esta "minimização" das densidades intermediárias, é que estas estariam representando a região de solda entre as chapas (Figura 5.7). Uma forma de conduzir o processo numérico à eliminação das densidades intermediárias é através da escolha adequada da função $f(\rho)$ na eq. (5.10). A região de solda pode ser associada à região intermediária, com propriedades de estampabilidade inferiores à pior das duas chapas, a exemplo da Figura 5.5b.

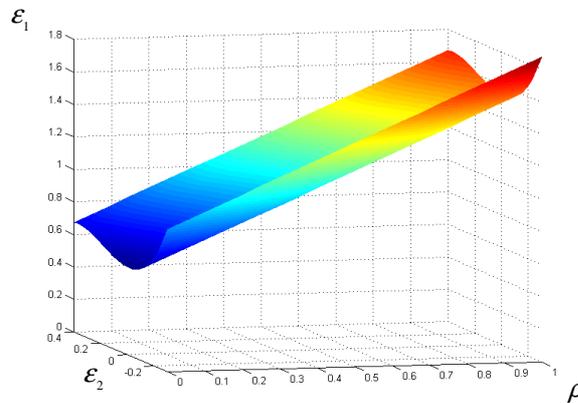


Figura 5.5a - Exemplo de uma CLC linear.

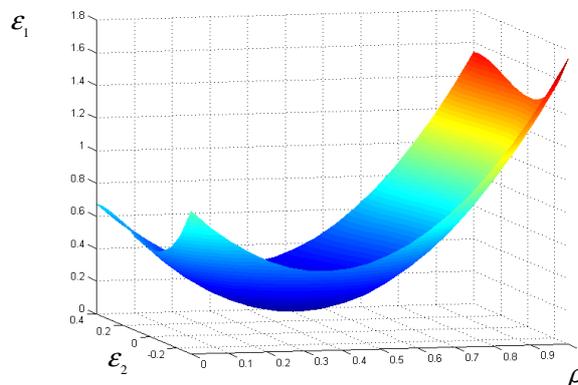


Figura 5.5b - Exemplo de uma CLC não linear.

Em análises preliminares os melhores resultados foram obtidos com uma CLC dividida em 3 partes: a primeira sendo um polinômio $F_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ representando a CLC para o material com $\rho = 0$, a segunda parte, um outro polinômio $F_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ representando a CLC para o material 2 ($\rho = 1$) e a região intermediária com sendo uma função linear plana denominada de P , como mostra a Figura 5.6. Esta região plana nas densidades intermediárias foi o método mais eficiente para penalizar as densidades intermediárias, como será visto com mais detalhes no Capítulo 6.

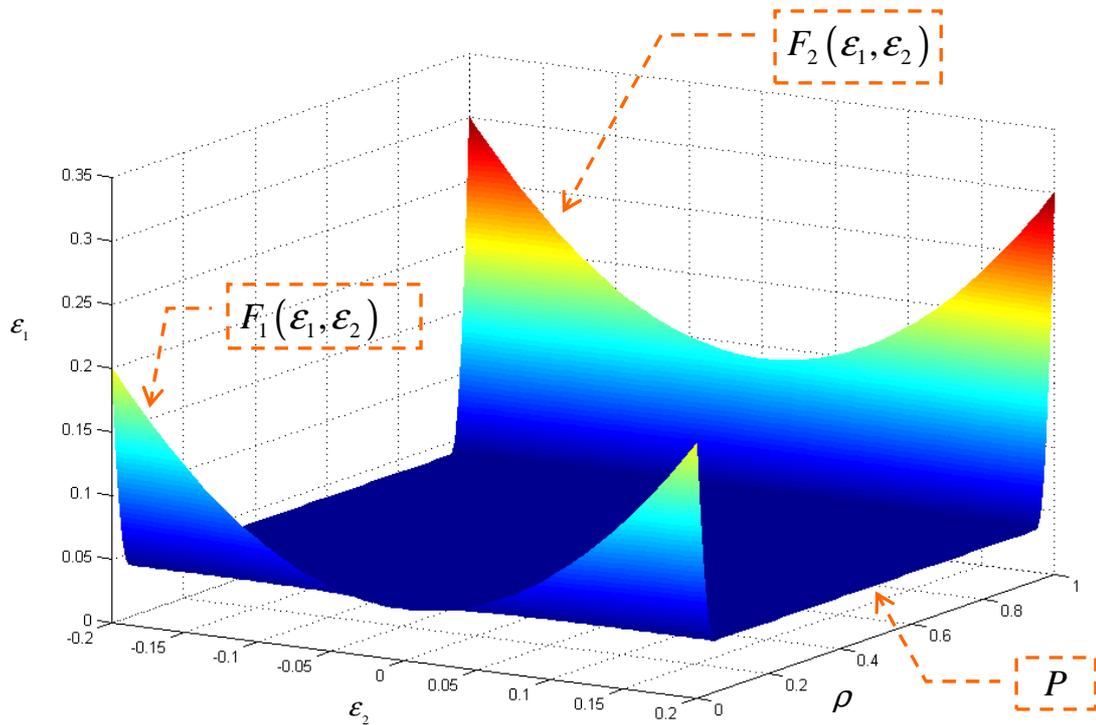


Figura 5.6 - Curva CLC proposta.

Na curva $CLC(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho)$ acima foi necessário manter a continuidade entre as curvas F_1 e P , e entre P e F_2 , de modo a ser diferenciável em todo o domínio. Assim, foram criados os limites entre F_1 e P como sendo ρ_a e entre P e F_2 como sendo ρ_b , e a CLC montada da seguinte forma:

- se $\rho \leq \rho_a$:

$$CLC(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho) = P \cdot (1 - \beta(\rho)) + F_1 \cdot \beta(\rho);$$
- se $\rho_a < \rho < \rho_b$:

$$CLC(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho) = P;$$

- se $\rho \geq \rho_b$,

$$CLC(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho) = P \cdot (1 - \beta(\rho)) + F_2 \cdot \beta(\rho);$$

onde $\beta(\rho)$ é uma polinômio em função de ρ que garante continuidade C^0 e C^1 entre F_1 e P , e entre P e F_2 .

Observa-se que nesta proposta, a restrição está em função das deformações e, portanto não é preciso utilizar conceitos de tensão local equivalente, característico da formulação SIMP com restrição em tensão [Pereira, 2001]. E também não haverá problemas em relação à singularidade de tensões que ocorre quando a espessura tende a zero, pois neste caso, a espessura estará limitada entre $h_1 \leq h \leq h_2$.

É importante observar também, que neste trabalho, as propriedades materiais específicas do cordão de solda não estão sendo incluídas explicitamente no modelo, visto que a solda e zona termicamente afetada (ZTA) têm características e propriedades de estampabilidades próprias que diferem dos dois metais base [Dry, 2001], Figura 5.7. A inclusão das propriedades materiais do cordão de solda seria mais viável numa otimização de forma, onde já se poderia ter um leiaute do posicionamento inicial das linhas de solda, obtidas a partir de uma otimização topológica.

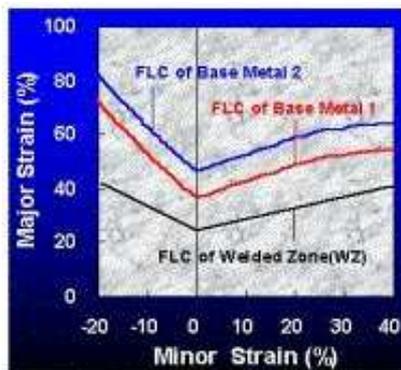


Figura 5.7 - Comparação entre as CLC obtidas experimentalmente de cada parte de um *tailored blank*: chapa t_1 , chapa t_2 e cordão de solda. (Fonte: <http://world.hanyang.ac.kr/~ytkeum/TWB.HTML>)

5.2.2 - Regularização de *Checkerboard*

As soluções numéricas em problemas de otimização topológica baseados em técnicas de homogeneização frequentemente apresentam a distribuição de densidades aparentando um "tabuleiro de xadrez", fenômeno conhecido como *checkerboard*, onde as densidades oscilam entre 0-1 (ver capítulo 4). Este comportamento é causado principalmente pela presença do parâmetro $p > 1$, que faz com que um corpo, com uma distribuição de densidade somente

com valores limites 0 - 1, seja mais rígido que um corpo com densidade constante intermediária. O procedimento utilizado aqui para aliviar este fenômeno é o mesmo que foi utilizado em Pereira [2001], onde foi introduzido um limite para a norma do gradiente das densidades, através de uma penalização. O problema de otimização fica da forma:

$$\begin{aligned}
\text{Min}_{\rho \in W_{\rho}^{1,2}(\Omega)} \quad m(\rho) &= \overbrace{\int_{\Omega} \rho^p d\Omega}^{(a)} + \overbrace{\frac{1}{2} r_p \int_{\Omega} f_{\rho}(\rho) d\Omega}^{(b)} + \overbrace{r_m \int_{\Omega} f_m(\rho) d\Omega}^{(c)} \\
\text{Sujeito a:} \quad F_{conf}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho) &\leq 0 \quad \text{em } \Omega \\
\text{sendo que:} \quad f_{\rho}(\rho) &= (\nabla \rho)^T (\nabla \rho), \\
f_m(\rho) &= \rho(1-\rho), \\
W_{\rho}^{1,2}(\Omega) &= \{\rho \mid \rho \in W^{1,2}(\Omega); 0 \leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1, \forall \mathbf{x} \in \Omega\}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Na função objetivo $m(\rho)$, o termo (a) representa a massa propriamente dita, o termo (b) a penalização para minimizar o efeito de *checkerboard*, e o termo (c) a penalização explícita das densidades intermediárias. r_p e r_m são constantes positivas associadas a estes funcionais de penalização e p é um parâmetro penalizador da massa. Neste trabalho, por se tratar de um problema de otimização de massa com deslocamento prescrito, o fenômeno de *checkerboard* bem como as técnicas de regularização tiveram pouco efeito, como será visto nos resultados apresentados no próximo capítulo.

5.2.3 - Solução pelo Método do Lagrangeano Aumentado

Devido a sua natureza local, as restrições da eq. (5.11) podem ser comparadas com restrições do tipo plasticidade, ou restrições de contato unilateral. O método do Lagrangeano Aumentado (MLA) tem mostrado ser uma eficiente aproximação para resolver este tipo de problema. Aplicando este método sobre o problema proposto na eq. (5.11), obtém-se o seguinte funcional:

$$\begin{aligned}
L(\rho; \lambda; r) &= m(\rho) + m_{\varepsilon}(\rho; \lambda, r), \\
&= m(\rho) + \frac{1}{r} \max \left\{ \begin{aligned} &\int_{\Omega} F_{conf}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho) \left[r\lambda + \frac{1}{2} F_{conf}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho) \right] d\Omega; \\ &-\int_{\Omega} \frac{(r\lambda)^2}{2} d\Omega; \end{aligned} \right\}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

onde F_{conf} é uma restrição local em conformação, $r > 0$ é um parâmetro de penalização e $\lambda(\mathbf{x})$ é a função multiplicador de Lagrange. Assim, o problema de otimização com restrição de desigualdade local em deformação, torna-se um problema de otimização com restrições laterais das variáveis de projeto, do tipo:

$$\text{Min}_{\rho \in W_{\rho}^{1,2}(\Omega)} L(\rho; \lambda; r) \quad (5.13)$$

onde a função multiplicador de Lagrange λ (transformada em um número finito de multiplicadores após discretização por Elementos Finitos) bem como o fator de penalização r são atualizados convenientemente durante o processo de iteração.

A função de falha (F_{conf}) é avaliada no centróide de cada elemento. Assim, o número de variáveis de projeto é proporcional ao número de nós enquanto o número de restrições em deformações é proporcional ao de elementos (que no caso de malha triangular é aproximadamente duas vezes o número de nós). No problema de otimização, um conjunto de multiplicadores de Lagrange e fatores de penalização (λ^k, r^k) é definida na k -ésima iteração e a minimização da função objetivo $L(\rho; \lambda^k, r^k)$ sujeito a restrições laterais, é feita. A sequência destes passos é descrita abaixo:

1. Define $k = 0$, η^k , r_m , r_{ρ} , λ^k e r^k ;
2. Minimiza o funcional $L(\rho; \lambda^k, r^k)$, $0 \leq \rho(x) \leq 1$;
3. Verifica a convergência dentro de uma tolerância η^k . Se satisfeita, pára o processo.
4. Atualiza η^k, λ^k, r^k ;
5. $k = k + 1$, retorna ao Passo 2.

O algoritmo utilizado no Passo 2 é um algoritmo de regiões de confiança não-linear proposto por [Friedlander *et al.*, 1994]. Este algoritmo foi generalizado por [Bielschowsky *et al.*, 1997], e é baseado na construção de um subproblema quadrático definido na região viável. Uma estratégia adaptativa é também utilizada baseada na qualidade do subproblema aproximado que modifica o tamanho da região viável para acelerar a convergência. O resultado deste trabalho foi obtido com uma implementação deste algoritmo, chamado BOX-QUACAN fornecido por estes autores, e atualizados parametricamente para este presente caso. Esta estratégia já foi utilizada por outros autores, obtendo bom desempenho em problemas de otimização semelhante, [Pereira, 2001], [Fancello *et al.*, 2003], [Fancello, 2006].

A convexidade deste problema de otimização pode levar a não convergência do problema, ou a resultados de mínimos locais. Como será visto no Capítulo 6, a malha pode exercer uma forte influência nos resultados.

5.3 - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Para a análise de sensibilidade, é necessário calcular o gradiente da função objetivo, eq. (5.12), para valores fixos de λ e r :

$$\frac{d(L(\rho; \lambda; r))}{d\rho} = \frac{d(m(\rho))}{d\rho} + \frac{d(m_\varepsilon(\rho; \lambda, r))}{d\rho} \quad (5.14)$$

O primeiro termo, $d(m(\rho))/d\rho$, depende apenas do campo de densidades ρ e sua sensibilidade é determinada diretamente da eq. (5.11):

$$\frac{d(m(\rho))}{d\rho} = \int_{\Omega} \left[p\rho^{p-1} + \frac{1}{2}r_p \frac{df_p(\rho)}{d\rho} + r_m \frac{df_m(\rho)}{d\rho} \right] d\Omega \quad (5.15)$$

Porém, o segundo termo do lagrangiano, m_ε , é implicitamente dependente de ρ e suas derivadas implicam na diferenciação do campo de deformações. Assim, o método adjunto (ver Apêndice A) foi o escolhido para a análise de sensibilidade contínua deste termo, ficando da forma:

$$\left\{ \frac{dm_\varepsilon(\rho; \lambda, r)}{d\rho} \right\} = \left\{ \frac{\partial m_\varepsilon}{\partial \rho} \right\} - \left[\frac{\partial R}{\partial \rho} \right]^T \{U_a\} \quad (5.16)$$

onde $\{R\}$ é o resíduo, e sua derivada parcial dada por:

$$\left[\frac{\partial R}{\partial \rho} \right] = \left[\frac{\partial F_{\text{int}}}{\partial \rho} \right] - \left[\frac{\partial F_{\text{ext}}}{\partial \rho} \right] \quad (5.17)$$

Substituindo a eq.(5.17) na eq.(5.16), tem-se:

$$\left\{ \frac{dm_\varepsilon(\rho; \lambda, r)}{d\rho} \right\} = \left\{ \frac{\partial m_\varepsilon}{\partial \rho} \right\} - \underbrace{\left[\frac{\partial F_{\text{int}}}{\partial \rho} \right]^T \{U_a\}}_{\text{determinado por elemento}} + \underbrace{\left[\frac{\partial F_{\text{ext}}}{\partial \rho} \right]^T \{U_a\}}_{\text{determinado por nó}} \quad (5.18)$$

A derivada das forças internas em relação à densidade intermediária determinada por elemento é calculada como:

$$\left[\frac{\partial F_{\text{int}}(u, \rho)}{\partial \rho} \right] = [T]^T [\Phi]^T \lambda_3 A_e \left\{ \left\{ \sigma(u, \rho) \right\} \left\{ \frac{\partial h(\rho)}{\partial \rho} \right\}^T + h(\rho) \left[\frac{\partial \sigma(u, \rho)}{\partial \rho} \right] \right\} \quad (5.19)$$

onde:

$$\left\{ \frac{\partial h(\rho)}{\partial \rho} \right\} = (h_2 - h_1) \left\{ \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} \right\} \quad (5.20)$$

$$\left[\frac{\partial \sigma(u, \rho)}{\partial \rho} \right] = [P]^{-1} \{\varepsilon\} \left\{ \frac{\partial E_s(\rho)}{\partial \rho} \right\}^T \quad (5.21)$$

sendo que o módulo secante $E_s(\rho)$ é função de $\sigma_y(\rho)$, como foi visto anteriormente (ver Figura 5.2). A derivada das forças externas em relação às densidades intermediária determinada por nó é:

$$\left[\frac{\partial F_{\text{ext}}(u, \rho)^k}{\partial \rho} \right] = \{nf\} \{nf\}^T \left[\frac{\partial F_{\text{int}}(u, \rho)^k}{\partial \rho} \right] \quad (5.22)$$

O vetor U_a está relacionado à solução do problema adjunto:

$$\left[K^{\text{Tang}} \right]^T \{U_a\} = \left\{ \frac{\partial m_\varepsilon}{\partial u} \right\} \quad (5.23)$$

sendo que a matriz tangente $[K^{\text{Tang}}]$ é conhecida da solução do método de Newton para a solução do problema de análise inversa.

A derivada do primeiro termo do lado direito da eq. (5.16) fica da forma:

$$\left\{ \frac{\partial m_\varepsilon}{\partial \rho} \right\} = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \frac{\partial F_{conf}}{\partial \rho} \right\} \left[r\lambda + \frac{1}{2} F_{conf} \right] + \frac{1}{2} F_{conf} \left\{ \frac{\partial F_{conf}}{\partial \rho} \right\} \\ 0 \end{array} \right\} d\Omega, \quad \begin{array}{l} \text{se } F_{conf} \left[r\lambda + \frac{1}{2} F_{conf} \right] > -\frac{(r\lambda)^2}{2} \\ \text{se } F_{conf} \left[r\lambda + \frac{1}{2} F_{conf} \right] \leq -\frac{(r\lambda)^2}{2} \end{array} \quad (5.24)$$

onde o termo $\partial F_{conf}/\partial \rho$ pode ser determinado explicitamente. Para o caso de se usar a curva proposta na Figura 5.6, tem-se este termo determinado em 3 partes, dependendo da região da curva:

- se $\rho \leq \rho_a$:

$$\left\{ \frac{\partial F_{conf}}{\partial \rho} \right\} = -P \left\{ \frac{\partial \beta(\rho)}{\partial \rho} \right\} + F_1 \left\{ \frac{\partial \beta(\rho)}{\partial \rho} \right\}$$

- se $\rho_a < \rho < \rho_b$:

$$\left\{ \frac{\partial F_{conf}}{\partial \rho} \right\} = \{0\}$$

- se $\rho \geq \rho_b$

$$\left\{ \frac{\partial F_{conf}}{\partial \rho} \right\} = -P \left\{ \frac{\partial \beta(\rho)}{\partial \rho} \right\} + F_2 \left\{ \frac{\partial \beta(\rho)}{\partial \rho} \right\}$$

A derivada $\partial m_\varepsilon/\partial u$ do problema adjunto da eq. (5.23) terá forma semelhante à eq. (5.24),

$$\left\{ \frac{\partial m_\varepsilon}{\partial u} \right\} = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \frac{\partial F_{conf}}{\partial u} \right\} \left[r\lambda + \frac{1}{2} F_{conf} \right] + \frac{1}{2} F_{conf} \left\{ \frac{\partial F_{conf}}{\partial u} \right\} \\ 0 \end{array} \right\} d\Omega, \quad \begin{array}{l} \text{se } F_{conf} \left[r\lambda + \frac{1}{2} F_{conf} \right] > -\frac{(r\lambda)^2}{2} \\ \text{se } F_{conf} \left[r\lambda + \frac{1}{2} F_{conf} \right] \leq -\frac{(r\lambda)^2}{2} \end{array} \quad (5.25)$$

onde a derivada $\partial F_{conf}/\partial u$ pode ser determinada explicitamente como:

$$\left\{ \frac{\partial F_{conf}}{\partial u} \right\} = \left\{ \frac{\partial F_{conf}}{\partial \varepsilon_{1,2}} \right\}^T \left[\frac{\partial \varepsilon_{1,2}}{\partial u} \right] \quad (5.26)$$

sendo que a derivada $\left[\frac{\partial \varepsilon_{1,2}}{\partial u} \right]$ já foi determinada para a solução do problema não-linear durante o cálculo da matriz tangente $[K^{Tang}]$ (ver Capítulo 3), e a derivada $\left\{ \frac{\partial F_{conf}}{\partial \varepsilon_{1,2}} \right\}$ é calculada explicitamente, que no caso da curva proposta da Figura 5.6 fica da forma:

- se $\rho \leq \rho_a$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_{Conf}}{\partial \varepsilon_1} \\ \frac{\partial F_{Conf}}{\partial \varepsilon_2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_1} \cdot (1 - \beta(\rho)) + \frac{\partial F_1}{\partial \varepsilon_1} \\ \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_2} \cdot (1 - \beta(\rho)) + \frac{\partial F_1}{\partial \varepsilon_2} \end{array} \right\}$$

- se $\rho_a < \rho < \rho_b$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_{Conf}}{\partial \varepsilon_1} \\ \frac{\partial F_{Conf}}{\partial \varepsilon_2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_1} \\ \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_2} \end{array} \right\}$$

- se $\rho \geq \rho_b$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_{Conf}}{\partial \varepsilon_1} \\ \frac{\partial F_{Conf}}{\partial \varepsilon_2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_1} \cdot (1 - \beta(\rho)) + \frac{\partial F_2}{\partial \varepsilon_1} \\ \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_2} \cdot (1 - \beta(\rho)) + \frac{\partial F_2}{\partial \varepsilon_2} \end{array} \right\}$$

Neste capítulo, foi vista a formulação proposta deste trabalho que consistiu em utilizar otimização topológica de chapas metálicas com restrição somente no processo de conformação, através das curvas limites de conformação. No capítulo seguinte, serão apresentados os resultados e comentários alcançados por esta proposta.

6 Resultados

6.1 - INTRODUÇÃO

Este trabalho teve os resultados divididos em duas etapas. A primeira foi a aferição e verificação dos resultados da aproximação inversa proposta neste trabalho com os obtidos por softwares comerciais já disponíveis no mercado para simulação de estampagem. Para isso, foram utilizados os seguintes softwares:

- Abaqus/Explícito: software que utiliza técnicas de integração explícita no tempo. É um software robusto que possui uma carta de comando bem semelhante à usada neste trabalho, o que facilitou a conversão de um para outro.
- Hyperform: software comercial da Altair Hyperworks que apesar de utilizar técnicas de aproximação inversa, tem desempenho satisfatório entre os softwares *one-step* disponíveis no mercado.

Numa segunda etapa, foi acrescentada a técnica de otimização topológica proposta no Capítulo 5 junto ao problema de aproximação inversa. A curva limite de conformação (CLC) foi interpolada primeiramente de forma linear, e em seguida, com a proposta de uma curva não linear.

6.2 - AFERIÇÃO DO PROBLEMA DE APROXIMAÇÃO INVERSA

Para a aferição dos resultados do problema de estampagem, foi simulado o exemplo da Figura 6.1 (com simetria nos eixos x e y global) utilizando além do método *one-step* proposto neste trabalho, os softwares comerciais Hyperform (que também utiliza técnica de aproximação inversa) e o Abaqus que utiliza técnicas de integração explícita no tempo. Primeiramente, os resultados foram simulados no Abaqus Explícito (utilizando elementos de casca), e a partir do resultado obteve-se a configuração deformada, que é necessária para a simulação nos métodos por aproximação inversa. A espessura inicial da chapa é de 1 mm e o material tem as seguintes propriedades: $K=620MPa$, coeficiente de atrito $\nu = 0,1$, $n = 0,22$ e

$\bar{r} = 1$. A força do prensa-chapas para este exemplo (embutimento simples) foi considerada nula.

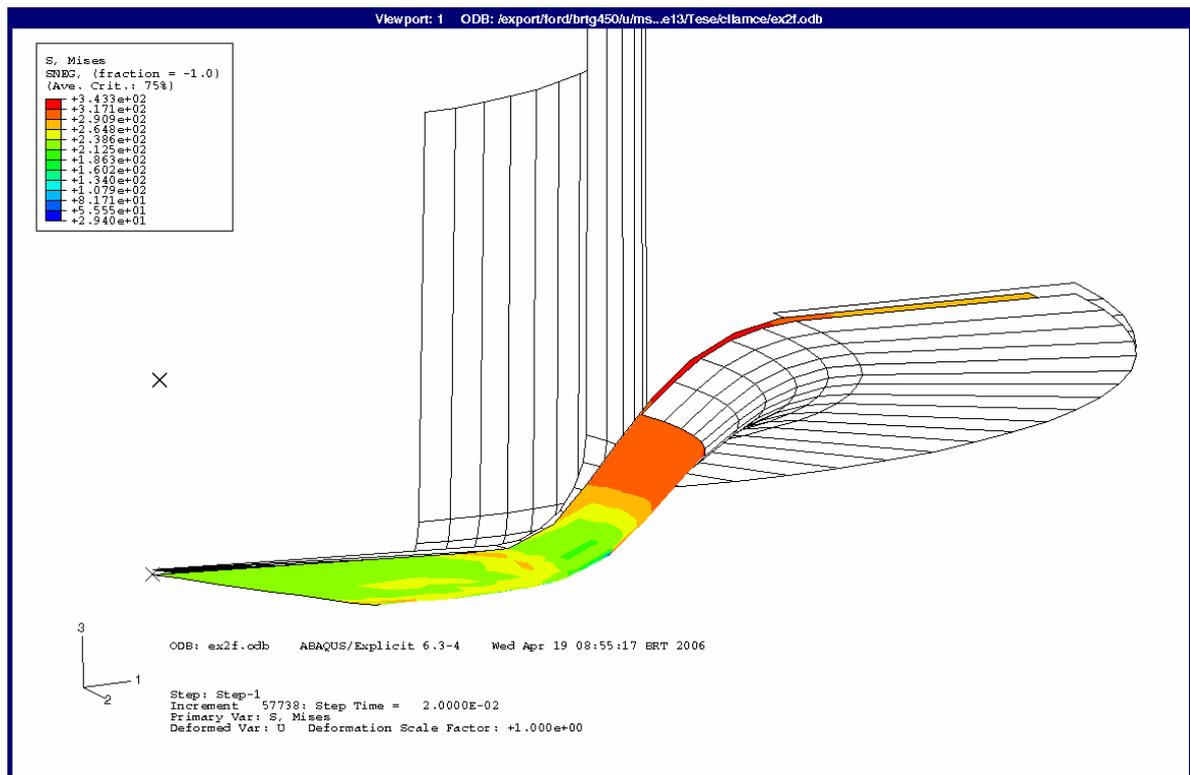


Figura 6.1 - Exemplo simulado utilizando o Abaqus explícito,

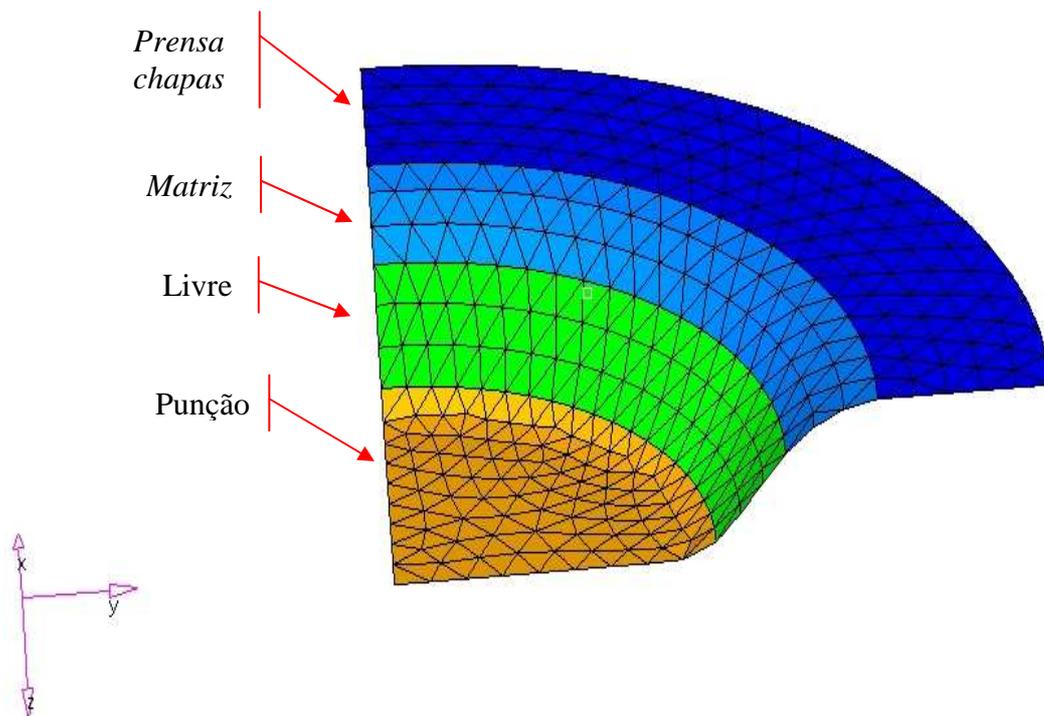


Figura 6.2 - Configuração deformada utilizada no problema de aproximação inversa.

Nas Figuras 6.3, 6.4 e 6.5, são apresentados os resultados da deformação principal I e das espessuras finais da peça conformada pelos softwares Hyperform e Abaqus, como também pelo método aqui apresentado.

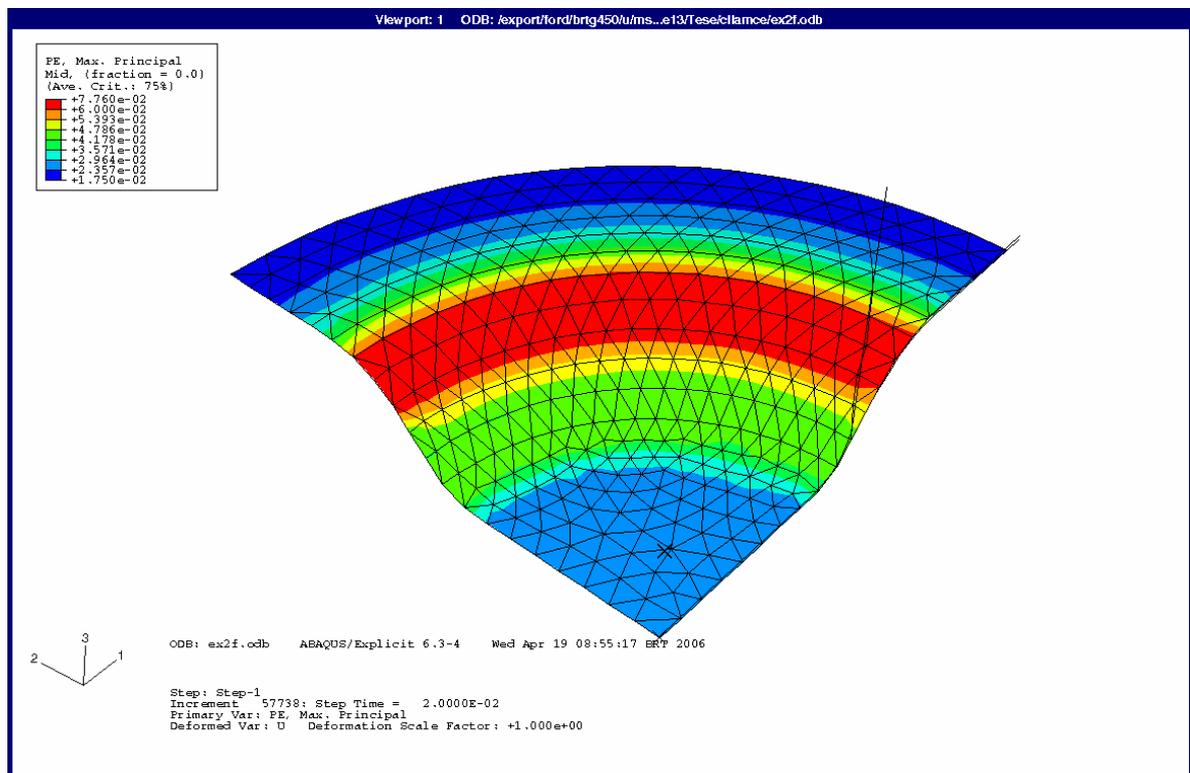


Figura 6.3 - Resultados do Abaqus explícito; (a) deformação principal I

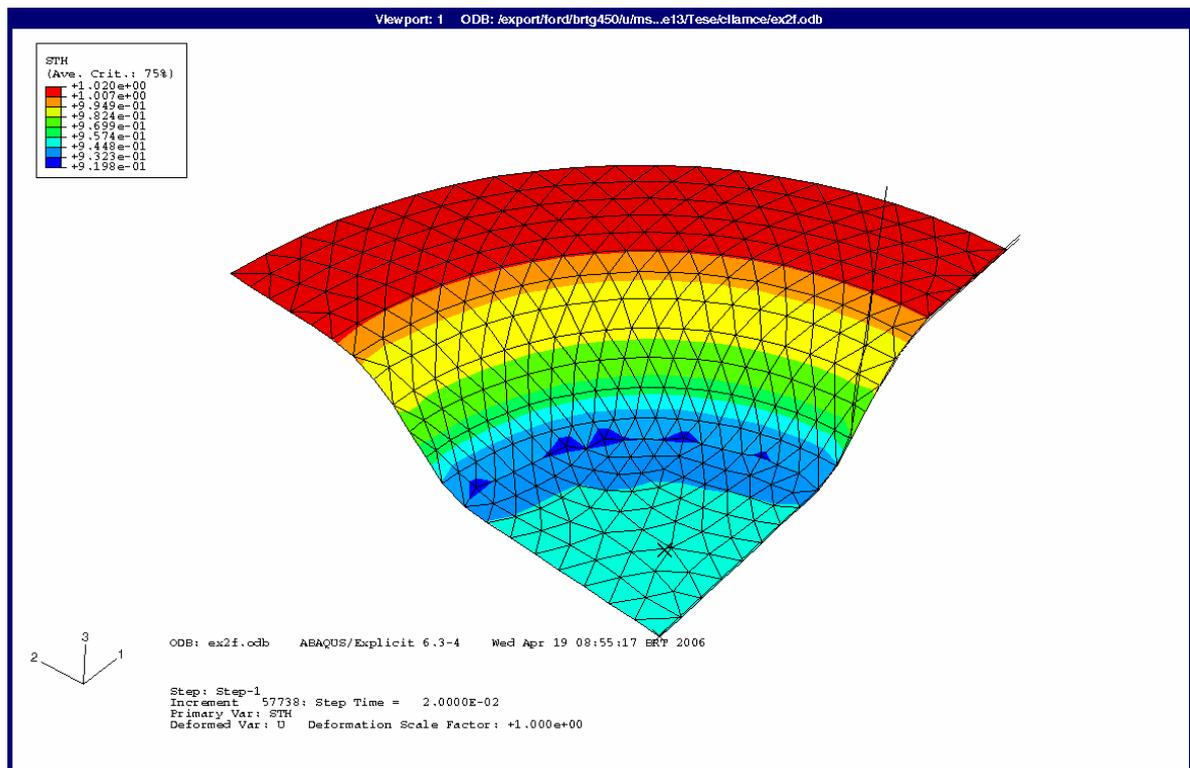


Figura 6.3 - Resultados do Abaqus explícito; (b) espessura final.

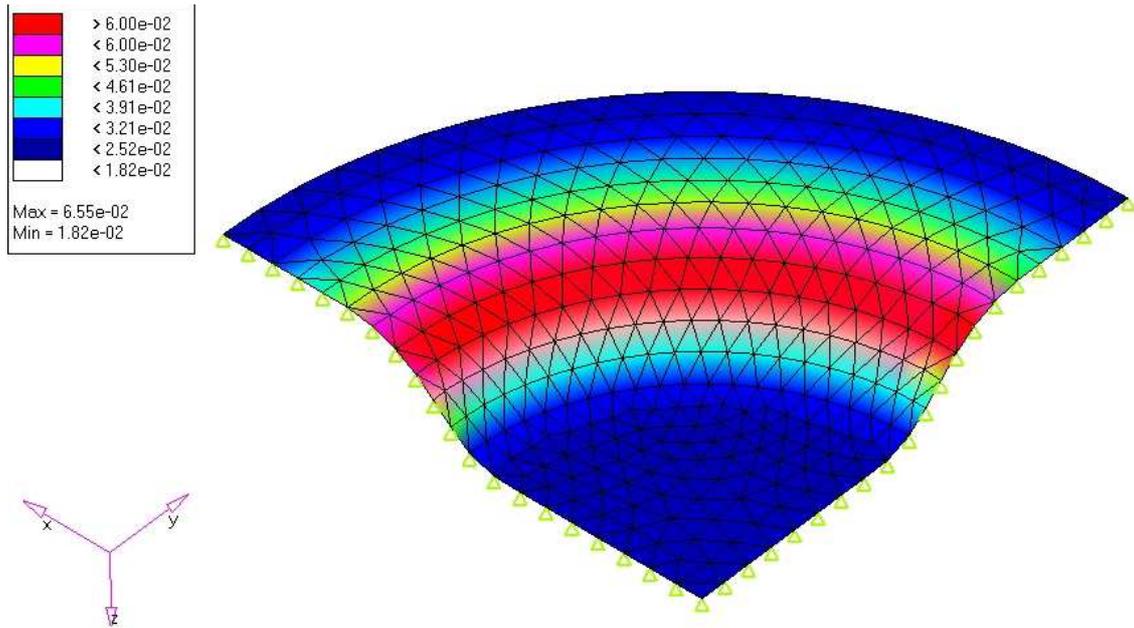


Figura 6.4 - Resultados da aproximação inversa (Hyperform) ; (a) deformação principal I

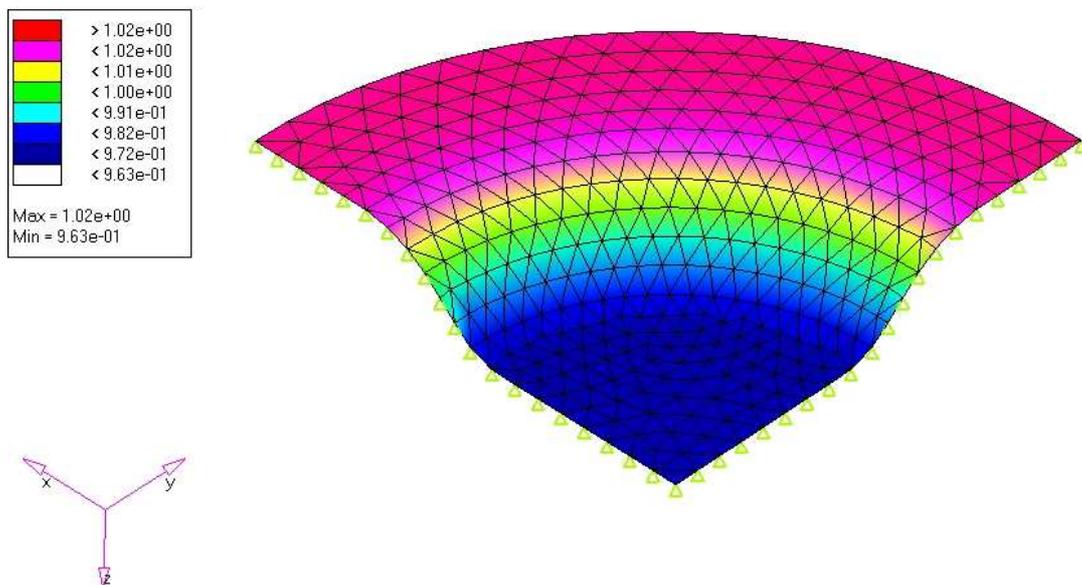


Figura 6.4 - Resultados da aproximação inversa (Hyperform); (b) espessura final.

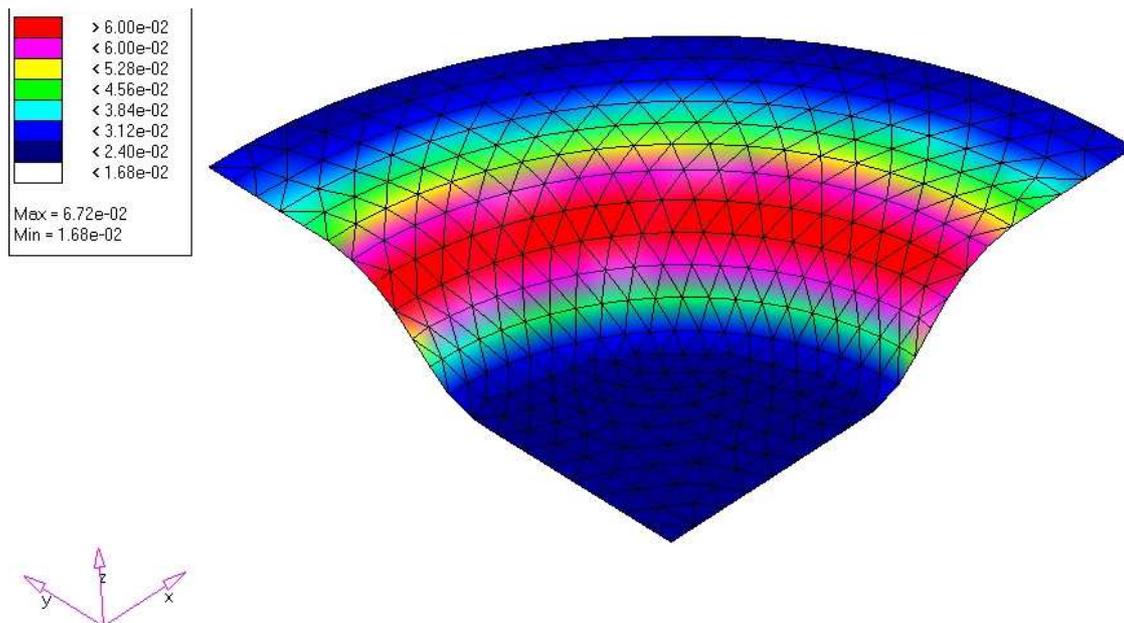


Figura 6.5 - Resultados da aproximação inversa implementada pelo autor; (a) deformação principal I.

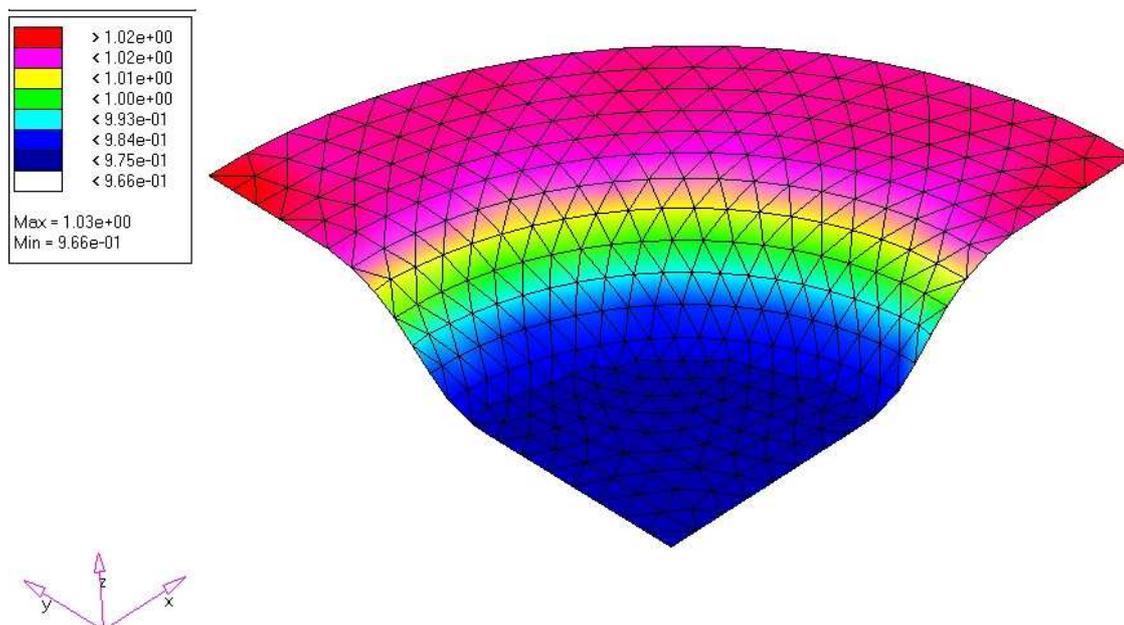


Figura 6.5 - Resultados da aproximação inversa implementada pelo autor; (b) espessura final.

Nas Figuras 6.6 e 6.7, apresenta-se o gráfico com os valores das deformações principais e espessuras para os três métodos ao longo dos nós situados no eixo de simetria x (o método de aproximação inversa proposto neste trabalho está descrito na legenda das figuras como "*one step*", para diferenciar do método de aproximação inversa do Hyperform). Observa-se que os valores obtidos por ambos os métodos de aproximação inversa estão bem próximos, enquanto

que o obtido pelo método explícito tem uma pequena diferença, que provavelmente se deve aos efeitos de flexão ignorados pelo elemento triangular de membrana, e pelas simplificações e considerações inerentes aos métodos de aproximação inversa. Por outro lado, o tempo de processamento do método explícito foi de aproximadamente 600 segundos (em uma Workstation Sun 2500), enquanto que nos métodos por aproximação inversa o tempo foi torno de 1 segundo, sendo que o Hyperform foi ligeiramente mais rápido (décimos de segundos) que o proposto neste trabalho. Esta pequena diferença entre os dois métodos de aproximação inversa se deve provavelmente à falta de ajustes de otimização nas rotinas do problema implementado.

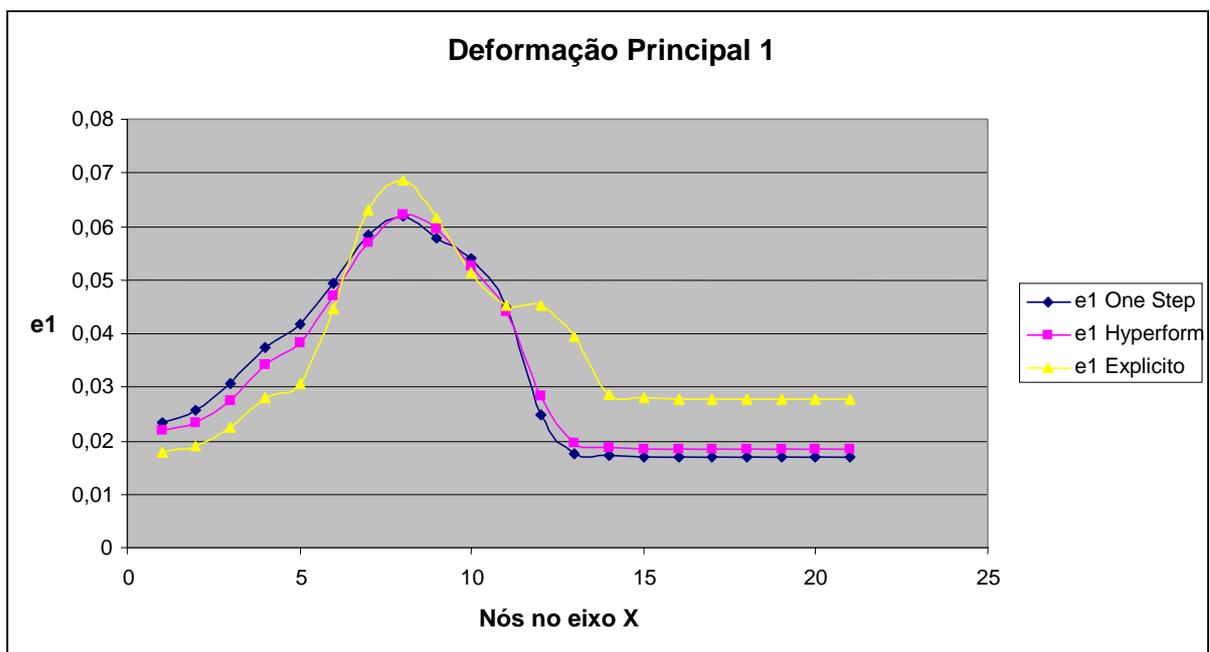


Figura 6.6 - Deformação principal I ao longo dos nós do eixo de simetria x

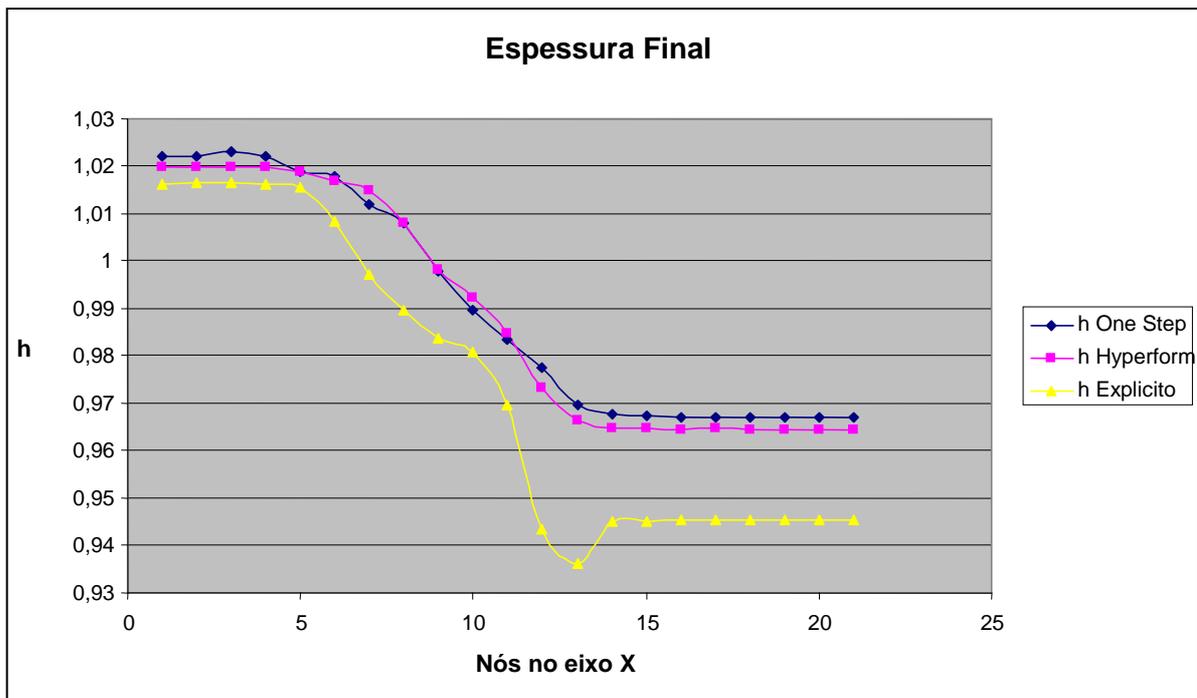


Figura 6.7 - Espessura final ao longo dos nós do eixo de simetria x .

6.3 - RESULTADOS DA OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Tendo a aferição da simulação do processo de estampagem por aproximação inversa feita, o próximo passo foi aplicar os conceitos de otimização topológica ao problema a fim de se obter uma peça (*blank*) com a mínima massa, mas que não falhasse durante o processo de conformação. Dados estes requisitos de entrada, a solução, entretanto, tende a caminhar para o conceito conhecido na indústria automobilística de *tailored blanks*, onde pode-se ter em um único *blank* peças com diferentes espessuras e propriedades materiais. Porém neste trabalho, a definição do leiaute do *tailored blank* foi definida baseada apenas no processo de fabricação da peça, e não no uso da peça em si. Os resultados, entretanto podem resultar em formas não viáveis do ponto de vista da manufatura e aplicabilidade. No Capítulo 7 (Conclusão) há uma abordagem sobre as perspectivas futuras sobre este trabalho de forma a adicionar a restrição de uso da peça junto com a restrição de conformação, de forma a obter uma peça funcional tanto em manufatura quanto na sua aplicação prática.

6.3.1 - Exemplo I - Tira Metálica

A princípio, tomou-se como primeiro exemplo, a estampagem de uma pequena tira metálica com 313 elementos e 185 nós, com condições de simetria nos eixos x e y da peça, conforme mostra a Figura 6.8. Lembrando que o problema de aproximação inversa parte da

configuração deformada da peça, é necessário já nesta configuração definir onde serão as regiões que terão contato com o punção, com o prensa-chapas / matriz e as regiões que porventura ficarão livres de contato. Neste exemplo, atribuiu-se a parte "azul" da Figura 6.8 como sendo a região em que o prensa-chapas estará atuando, e ao resto da peça como sendo de contato com o punção.

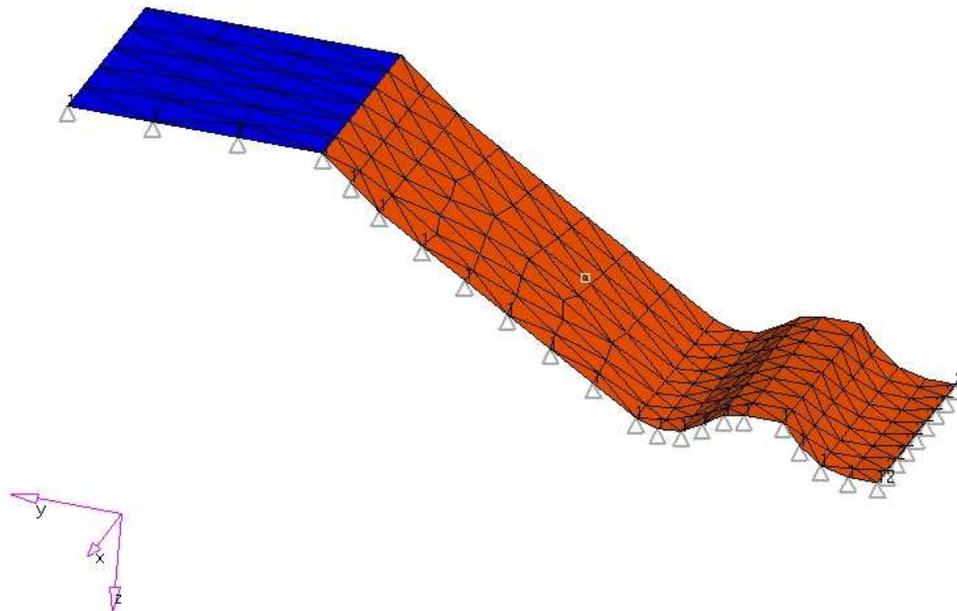


Figura 6.8 - Configuração deformada da tira metálica, com condições de simetria em x e y .

A chapa tem inicialmente 1 mm de espessura, constante de proporcionalidade $K = 500\text{MPa}$, coeficiente de encruamento $n = 0,2$. A força do prensa-chapas é 10000N e o coeficiente de atrito igual a $0,12$. Para se conhecer as deformações principais e espessura final da peça antes do processo de otimização, uma simulação do processo de estampagem foi feita nesta peça. Os resultados da deformação principal I e da espessura final são mostrados nas Figuras 6.10 e 6.11.

Nestes primeiros testes do processo de otimização, utilizou-se como curva limite de conformação (CLC) uma função linear dependentes de e_1 e ρ , e constante em relação à e_2 (Figura 6.9). Para problemas mais simples como no caso desta tira metálica, uma CLC linear em função das densidades se mostrou satisfatório, como será visto mais adiante. Para $\rho = 0$, a espessura é igual a 1, e para $\rho = 1$, a espessura é igual a 2 (conforme relação apresentada no Capítulo 5).

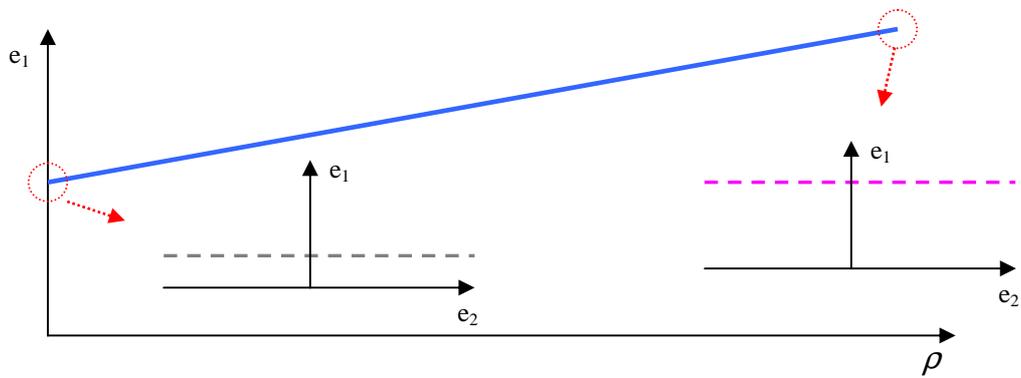


Figura 6.9 - Esquema ilustrativo da curva limite de conformação utilizada na otimização da tira metálica.

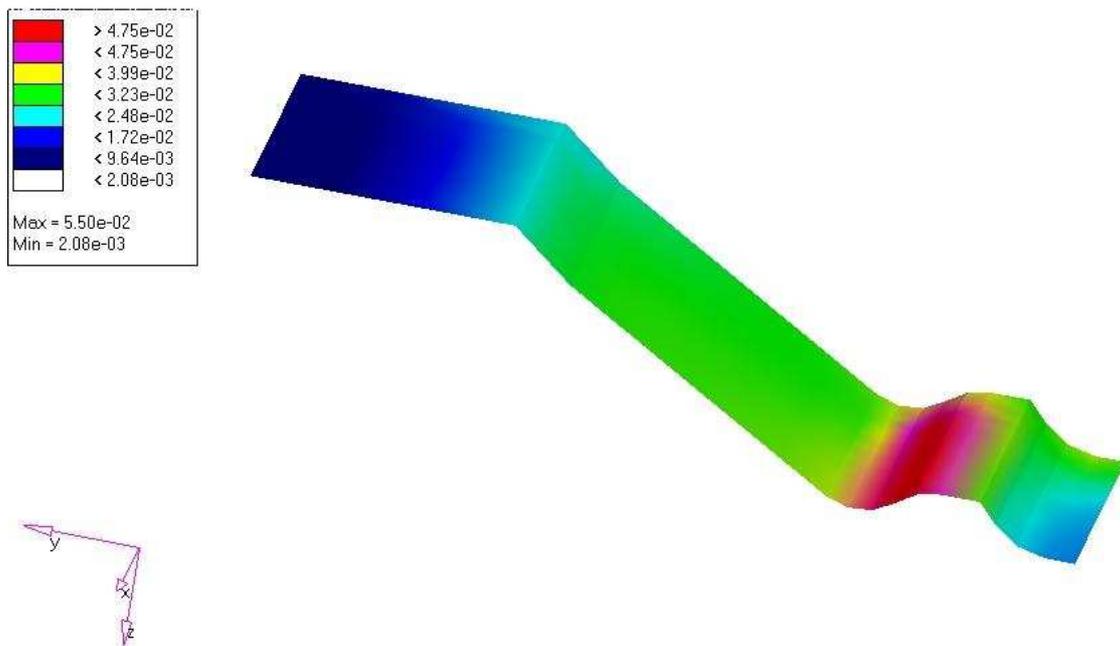


Figura 6.10 - Deformação principal I da peça.

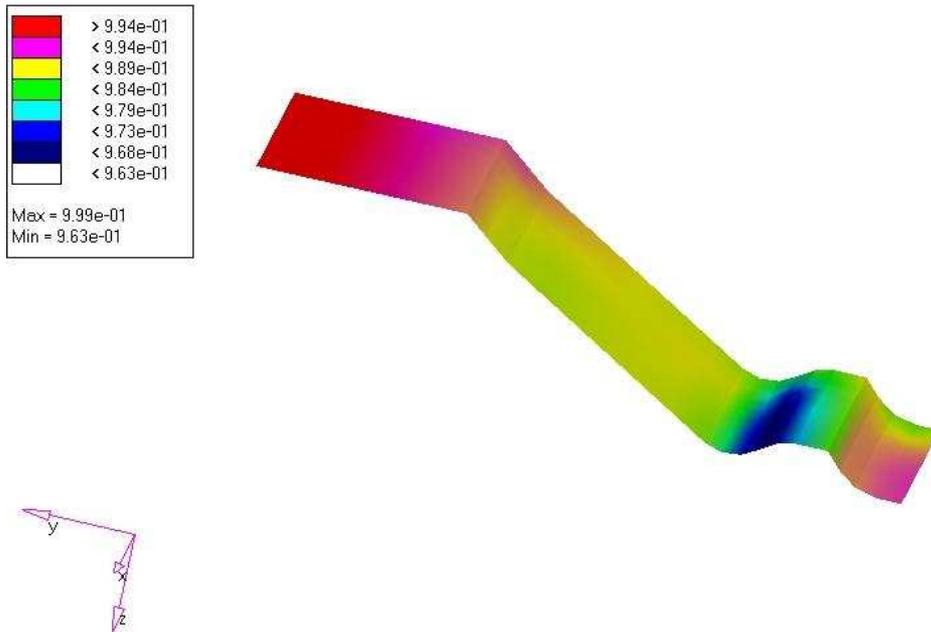


Figura 6.11 - Espessura final da peça após a conformação.

Para $\rho = 0$ na curva CLC da Figura 6.9 foi atribuído o valor de 0,03 como deformação principal mínima (CLC_0), e para $\rho = 1$, o valor foi de 0,06. Foram necessárias 15 iterações do problema até a sua convergência. Os resultados das densidades ótimas por nós, obtido pelo processo de otimização topológica, são mostrados na Figura 6.12. Na Figura 6.13, tem-se os resultados das espessuras ótimas determinadas por elemento, bem como o resultado da configuração indeformada da peça.

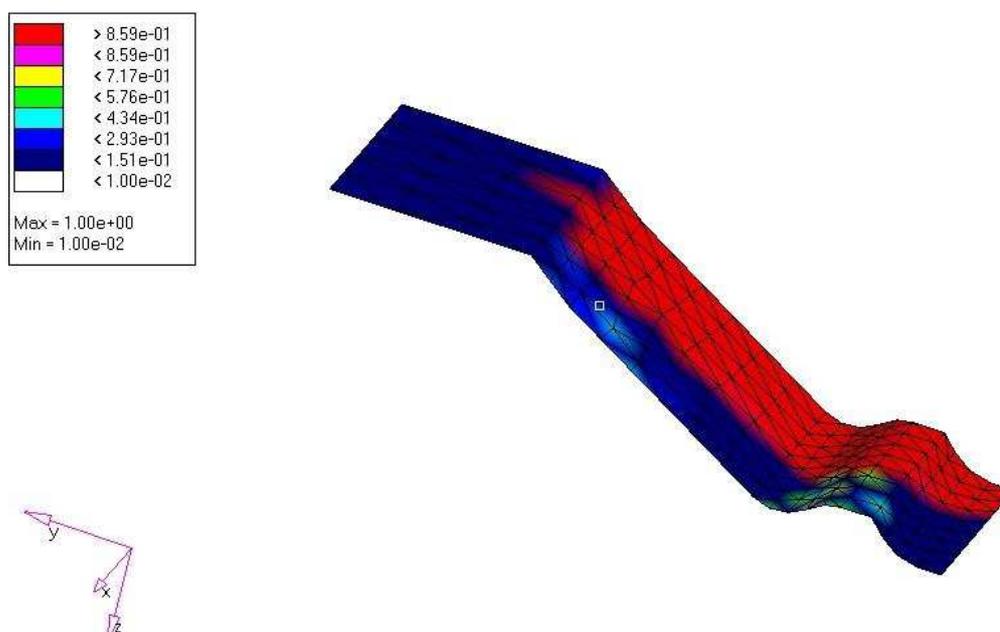


Figura 6.12 - Resultados das densidades nodais ótimas por nó.

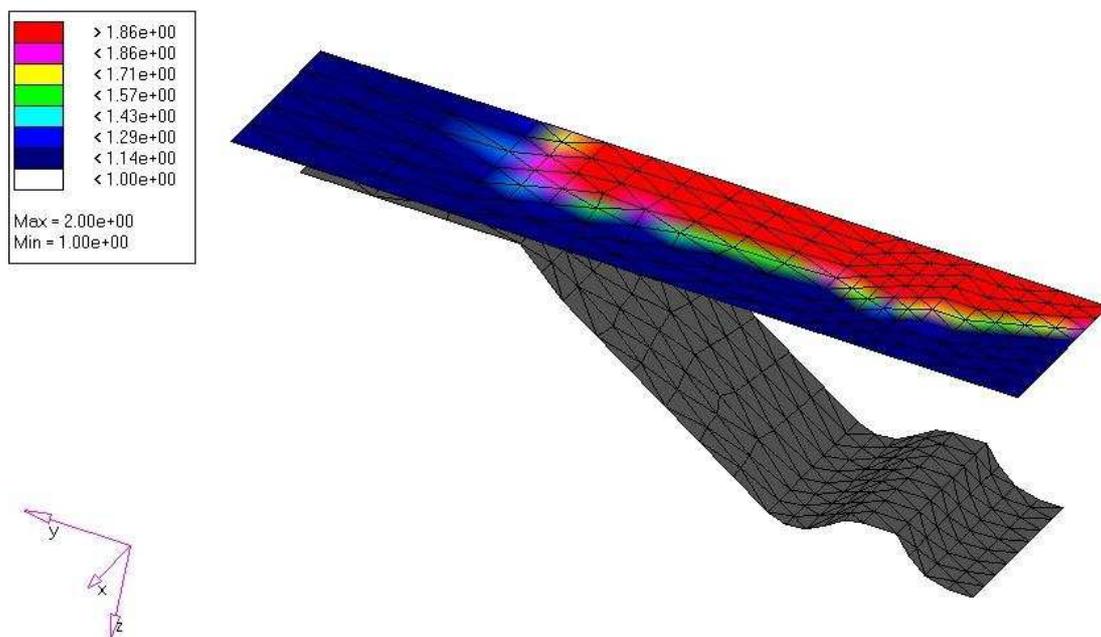


Figura 6.13 - Resultados das espessuras ótimas determinada por elementos mostrados na configuração indeformada da peça.

Na Figura 6.14 tem-se o gráfico com os valores pontuais das densidades médias ótimas na curva CLC. Observa-se que toda a peça foi penalizada pelo contorno da curva CLC.

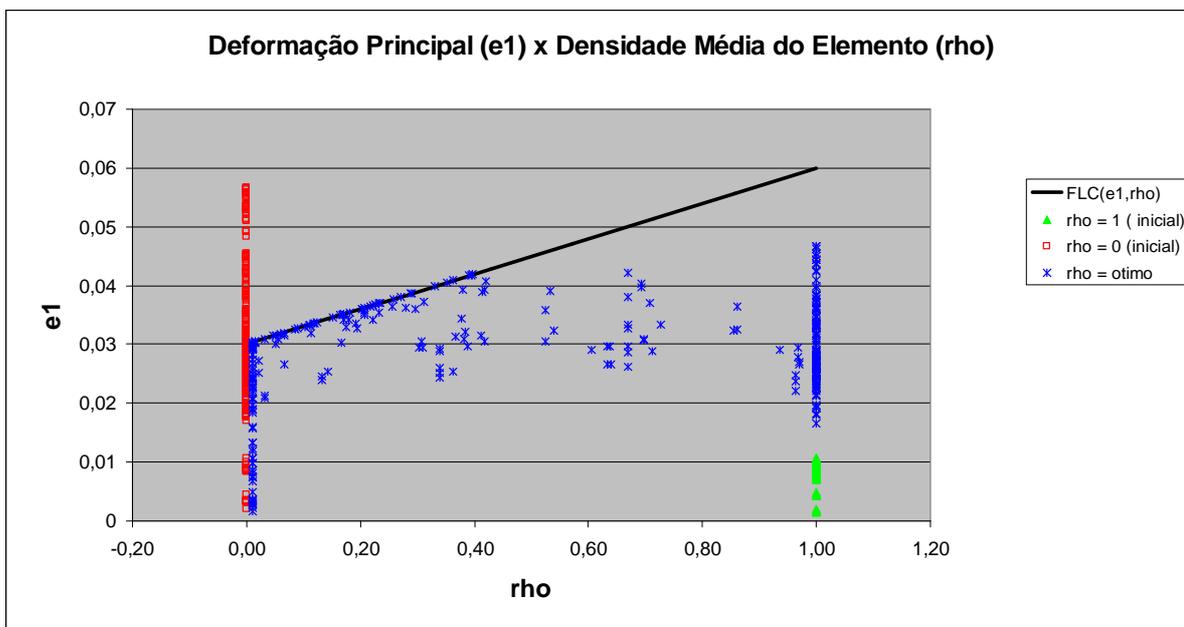


Figura 6.14 - Gráfico com das deformações principais versus densidade ótima média.

Observa-se no gráfico da Figura 6.14 que alguns pontos continuam em situação intermediária, e não foram penalizados nem pela curva CLC e nem pelo conceito de penalização das densidades intermediárias da formulação SIMP apresentada no Capítulo 4. Um motivo para estas densidades intermediárias é que muitas delas correspondem às regiões de interface entre as regiões com densidade máxima, e regiões com densidade mínima. Como o resultado é calculado no ponto de integração central do elemento, é normal que ocorra elementos com densidades intermediárias nestas regiões. Desta forma, pode-se observar neste exemplo que a formulação SIMP teve efeito penalizador sobre as densidades intermediárias, visto que as deformações para $\rho = 0$ e para $\rho = 1$ são bem diferentes, havendo assim uma maior sensibilidade para este problema, que é caracterizado por ter "deformação prescrita".

Há algumas pequenas diferenças entre os valores obtidos das densidades ótimas (Figura 6.12) e espessura ótimas (Figura 6.13). Isto porque o controle das variáveis de projeto (densidade ρ) é feito por nó, porém os resultados das deformações (e conseqüentemente, a restrição de falha) são calculados e visualizados por elementos (no ponto médio de integração).

6.3.2 - Exemplo II - Casca Metálica.

Neste exemplo, tomou-se uma casca metálica da forma mostrada na Figura 6.15. Nesta modelo, procurou-se definir três regiões distintas de carregamento: região sujeita a ação do prensa-chapas, região sujeita ao punção, e região livre de carregamento (ou "quase-livre", pois durante a maior parte do processo estaria sem contato com as ferramentas, somente no final ter-se-ia um contato com a matriz). O modelo foi discretizado em elementos de membrana (Figura 6.16) e, devido a sua simetria em x e y , foi selecionado somente um quarto de sua malha para a análise (Figura 6.17), com condições de contorno de simetria nestes eixos.

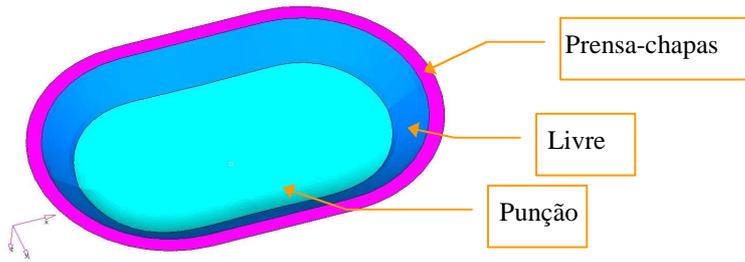


Figura 6.15 - Casca metálica a ser otimizada.

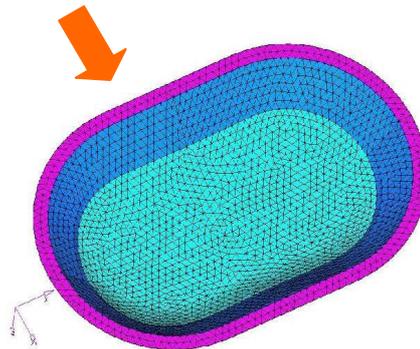


Figura 6.16 - Casca metálica discretizada em elementos triangulares de membrana.

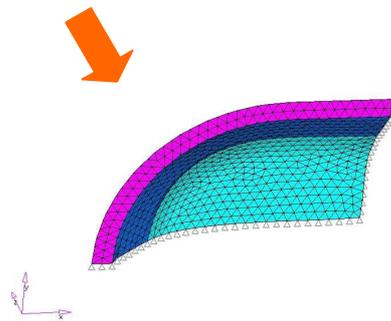


Figura 6.17 - Casca metálica discretizada com condições de contorno de simetria.

Para uma análise preliminar, foi feita uma simulação simples do processo de estampagem, através do método de aproximação inversa proposto neste trabalho, para a determinação do nível de deformação em que a casca metálica com a espessura de 1 mm ($\rho = 0$) estaria sujeita após o processo de estampagem. Para esta análise, foram atribuídos os seguintes parâmetros materiais e de processo (baseados em dados da literatura): força do prensa-chapas = 10000 N; coeficiente de atrito = 0,12; constante de proporcionalidade $K = 720$ MPa; coeficiente de encruamento $n = 0,28$; coeficiente de anisotropia $R = 1,0$; tensão de escoamento = 150 MPa; módulo de elasticidade = 210000MPa, constante de suavização do atrito = 0,05. Nas Figuras 6.18 e 6.19 tem-se o resultado da distribuição das deformações principais I e II respectivamente, e na Figura 6.20 o resultado da configuração indeformada.

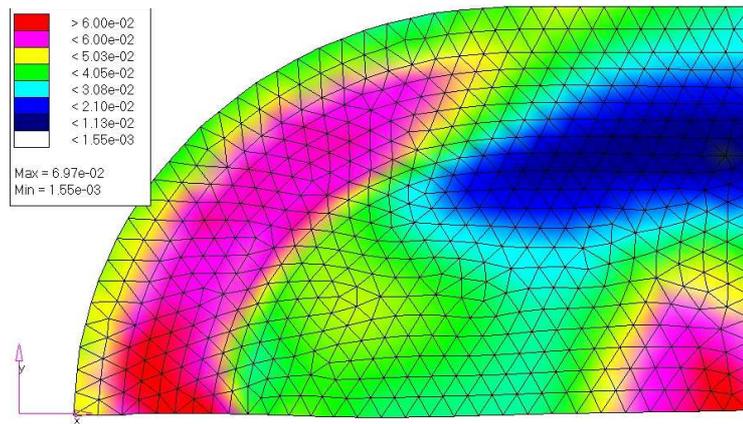


Figura 6.18 - Deformações principais I para a peça com espessura de 1 mm.

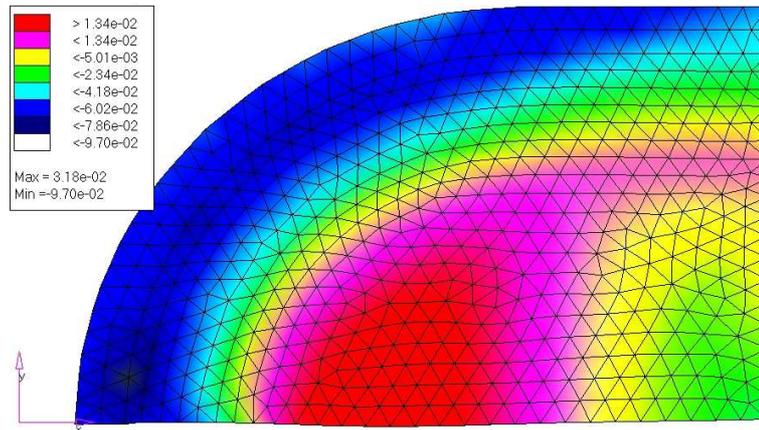


Figura 6.19 - Deformações principais II para a peça com espessura de 1 mm.

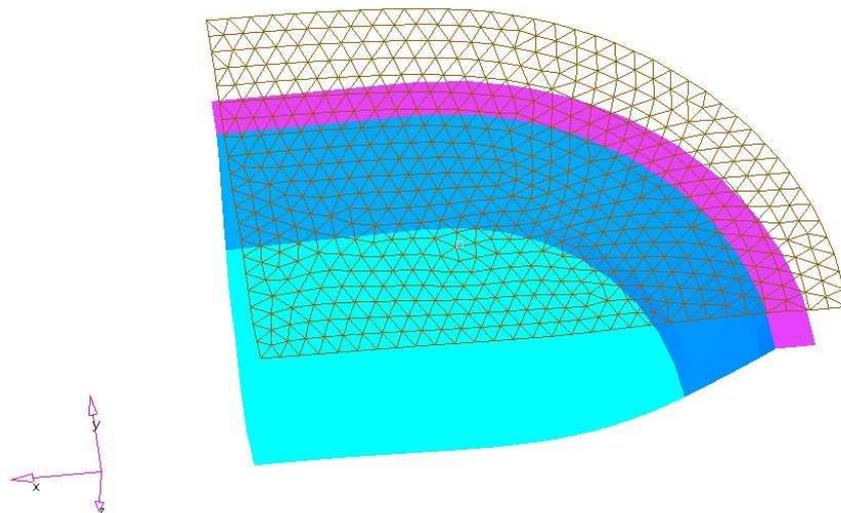


Figura 6.20 - Configuração indeformada e deformada da peça.

Para o problema de otimização, adicionou-se à formulação do problema, a dependência da tensão de escoamento σ_e em função da variável de projeto conforme foi proposto no Capítulo 5. Neste exemplo, a tensão de escoamento para $\rho = 1$ é duas vezes a tensão de escoamento para $\rho = 0$, conforme os dados da tabela abaixo:

Tabela 6.1 - Limites da tensão de escoamento e da espessura em função de ρ

	$\rho = 0$	$\rho = 1$
Tensão de Escoamento	σ_e	$2 \cdot \sigma_e$
Espessura	1 mm	2 mm

A restrição de falha neste exemplo é uma interpolação linear entre as CLCs para $\rho = 0$ (curva F1) e $\rho = 1$ (curva F2), conforme foi apresentado no Capítulo 5. Os parâmetros de otimização e da CLC são dados na Tabela 6.2. A variável de projeto ρ inicial foi considerada 1,0 para todos os nós (que foi o mesmo resultado obtido com ρ inicial igual a 0)

Tabela 6.2 - Dados do exemplo da casca com a CLC linear sem controle de *checkerboard*.

<u>CLC</u>		<u>Fatores de Penalização do Lagrangeano</u>	
CLC₀	0,04	Penalização da restrição	0,00001
F1	$\varepsilon_1 = 4,0 \varepsilon_2^2$	Penalização de <i>checkerboard</i>	0,0
F2	$\varepsilon_1 = 4,0 \varepsilon_2^2 + 2,5 \text{ CLC}_0$	Penalização das densidades intermediárias	0,8

No gráfico da Figura 6.21 tem-se a CLC linear⁴ com resultado da simulação inicial (para $\rho = 0$) das deformações principais por elemento, conforme visto nas Figuras 6.21 e 6.22. Pode-se observar que há alguns pontos acima da restrição de falha (curva CLC), que devem ser penalizados durante o processo de otimização.

⁴ Linear em função de ρ apenas, pois ela é não linear em função de ε_1 e ε_2 .

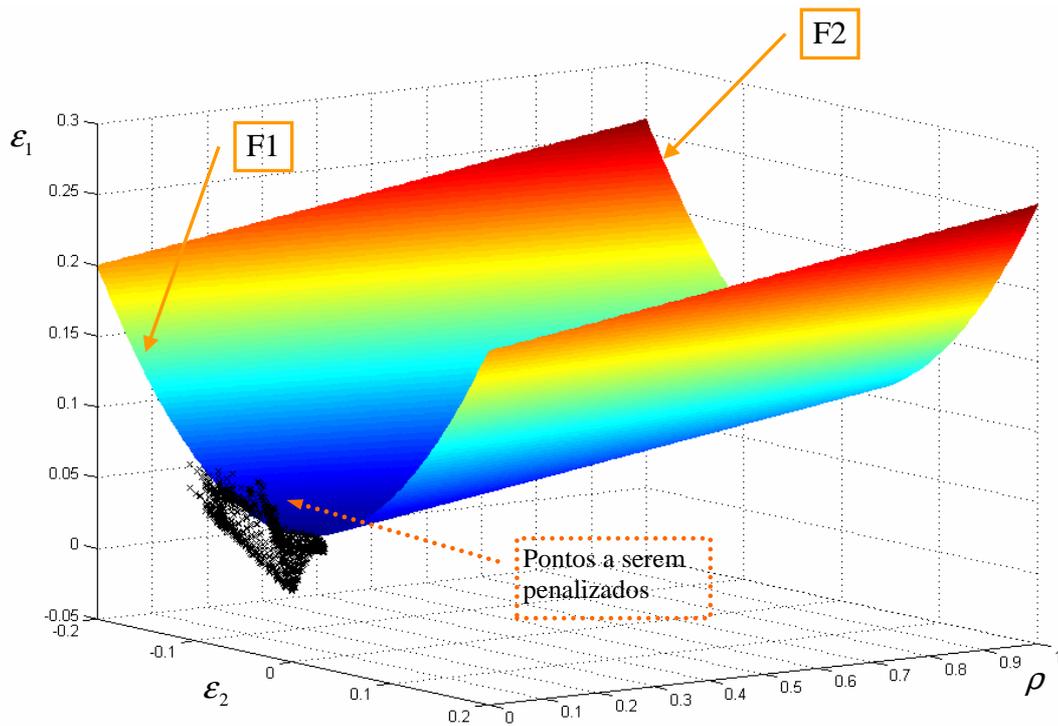


Figura 6.21 - $CLC(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho)$ linear para $\rho = 0$.

O resultado da otimização topológica com a CLC linear não surtiu o efeito desejado, pois como se pode ver no gráfico da Figura 6.23, as densidades intermediárias não foram penalizadas, apesar das deformações acima da CLC terem sido penalizados. Este resultado também pode ser visualizado na Figura 6.22 onde se tem a casca com as espessuras ótimas por elemento, onde a diferença de espessura é muito pequena, quase imperceptível visualmente.

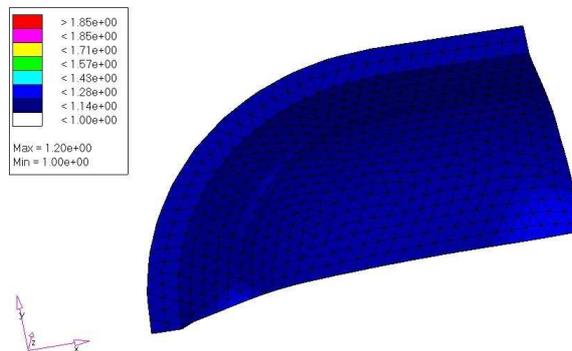


Figura 6.22 -Espessura ótima por elemento.

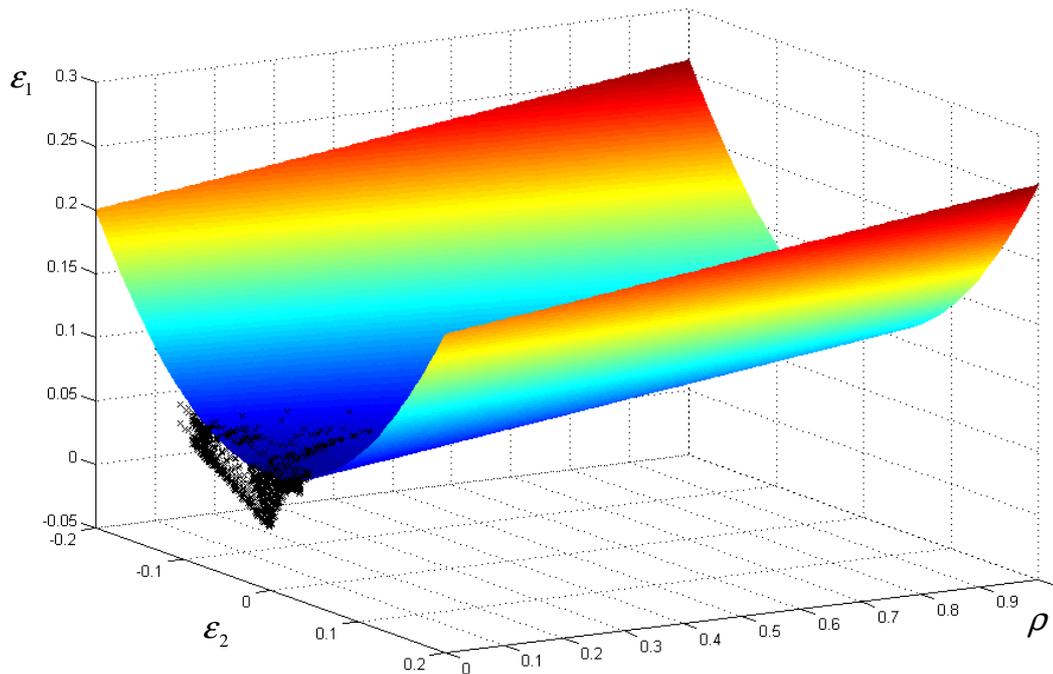


Figura 6.23 - $CLC(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho)$ linear com o resultado das densidades ótimas.

Foram feitas alterações nos parâmetros de otimização (de *checkerboard*, de densidades intermediárias e da penalização da restrição) e novas simulações foram feitas sem obter alterações significativas nos resultados.

Como foi descrito no Capítulo 5, este problema de otimização, por ter restrição do tipo "deslocamento prescrito" (ou deformação prescrita), a formulação SIMP não causa o efeito desejado de penalização das densidades intermediárias. Para isso, foi necessário introduzir um novo modo de penalizar as densidades intermediárias. Desta forma, adotou-se a estratégia de usar a própria curva de conformação (CLC) como principal agente responsável pela penalização. Esta foi construída de forma a manter as características de uma curva limite de conformação para $\rho = 0$ e para $\rho = 1$, sendo que para $0 < \rho < 1$, a curva se tornaria plana ao nível do seu limite inferior (CLC_0) em quase a sua totalidade, a fim de inibir elementos com densidade neste intervalo. No Capítulo 5, foi mostrado mais detalhes da construção desta nova $CLC(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho)$. Os dados para o exemplo da casca, porém com uma CLC não-linear, são mostrados nas Tabelas 6.4 e 6.5. O efeito de *checkerboard* não foi introduzido nesta análise.

Tabela 6.4 - Tensão de escoamento e espessura limites em função de ρ para CLC não linear

	$\rho = 0$	$\rho = 1$
Tensão de Escoamento	σ_e	$3 \cdot \sigma_e$
Espessura	1 mm	2 mm

Tabela 6.5 - Dados do exemplo da casca com a CLC não linear sem controle de *checkerboard*.

<u>CLC</u>		<u>Fatores de Penalização do Lagrangeano</u>	
CLC₀	0,04	Penalização da restrição	0,00001
F1	$\varepsilon_1 = 4,0 \varepsilon_2^2$	Penalização de <i>checkerboard</i>	0,0
F2	$\varepsilon_1 = 4,0 \varepsilon_2^2 + 2,5 \text{CLC}_0$	Penalização das densidades intermediárias	0,8

Os resultados finais da otimização são mostrados nas Figuras 6.24 e 6.25, com as densidades ótimas por nó e espessuras ótimas por elementos, respectivamente.

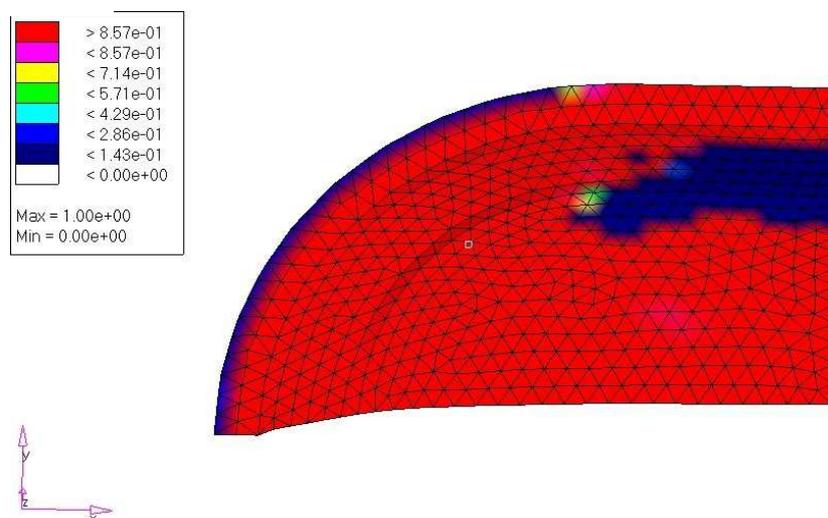


Figura 6.24 -Densidade ótima por nó para a casca com CLC não linear.

Como foi visto no primeiro exemplo (tira metálica), devido à estratégia de otimização utilizada neste trabalho, as variáveis de projetos são definidas por nó (densidades nodais), enquanto a restrição do problema é por elemento (deformações principais no centróide do elemento). Da mesma forma, tem-se a espessura do elemento, que é calculada através da média das densidades de cada nó que compõe o elemento. Devido a isso, tem-se esta pequena diferença entre os resultados das densidades ótimas por nó e as espessuras ótimas por elemento. Nota-se que os resultados obtidos aqui estão condizentes com a Figura 6.18, onde a

região com deformação principal I maior que 0,04 (CLC_0) foi toda penalizada para espessura máxima, a fim de evitar a falha deste material durante o processo de estampagem.

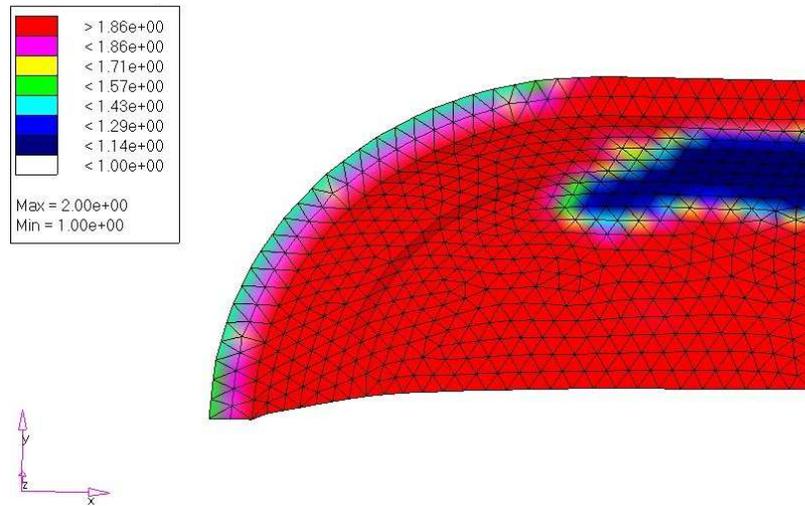


Figura 6.25 - Espessura ótima por elemento para a casca com CLC não linear.

Na Figura 6.26, tem-se o gráfico do resultado das densidades ótimas (aqui calculada no ponto médio do elemento), junto com as respectivas deformações principais. Observa-se que as densidades intermediárias foram penalizadas pela parte plana da curva CLC. Na Figura 6.27, tem-se o mesmo gráfico visualizando a parte inferior da superfície de falha, onde se pode observar uma concentração de densidades em aproximadamente 0,33 e 0,66 ($1/3$ e $2/3$ da densidade máxima). Isto se deve ao fato já mencionado da espessura ser determinada por nó, pois quando se tem um elemento com dois nós com densidade máxima ($\rho = 1$) e um com densidade mínima ($\rho = 0$), resulta numa densidade média do elemento igual $2/3$. Da mesma forma, quando se tem dois nós com densidade mínima e um com densidade máxima, irá resultar em uma densidade média igual a $1/3$.

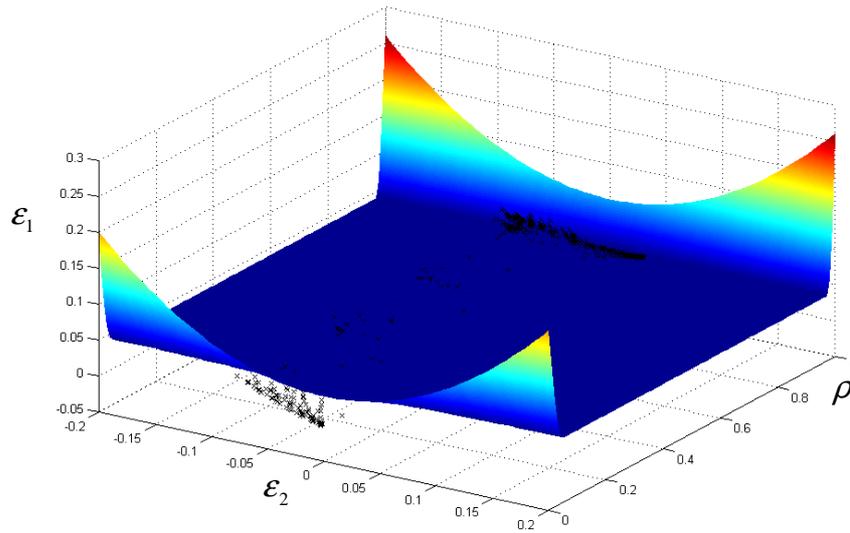


Figura 6.26 - $CLC(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho)$ com as densidades ótimas por elemento.

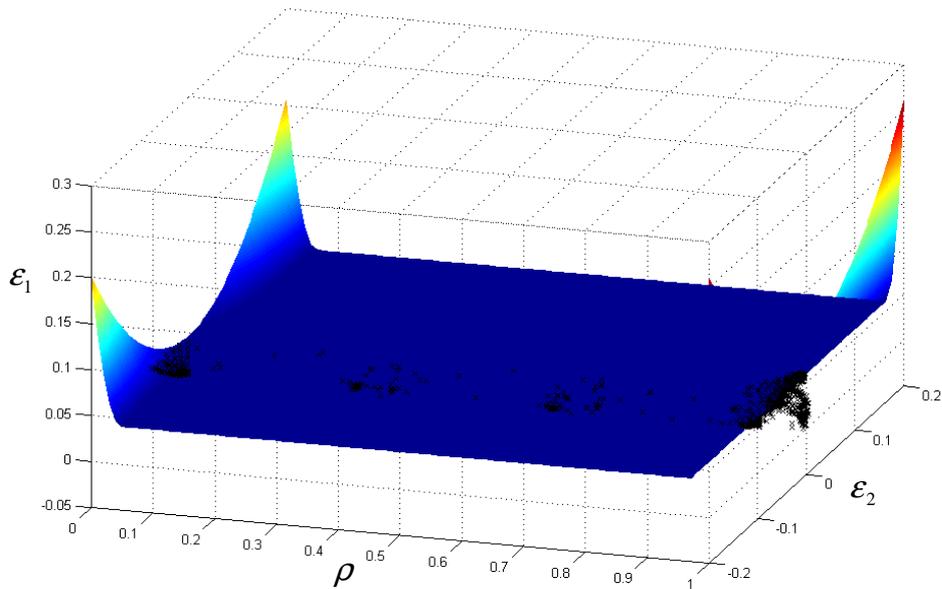


Figura 6.27 - $CLC(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho)$ com as espessura ótimas por elemento (vista da parte inferior da superfície de falha).

Introduzindo um fator de penalização de *checkerboard* no exemplo acima de 0,2 e mantendo os demais parâmetros inalterados, os resultados tiveram pouca variação, como pode ser visto nas Figuras 6.28 e 6.29. Porém, pode-se notar comparando as Figuras 6.24 e 6.28, que no segundo caso, a presença do parâmetro de *checkerboard* tornou o contorno interno mais "suave".

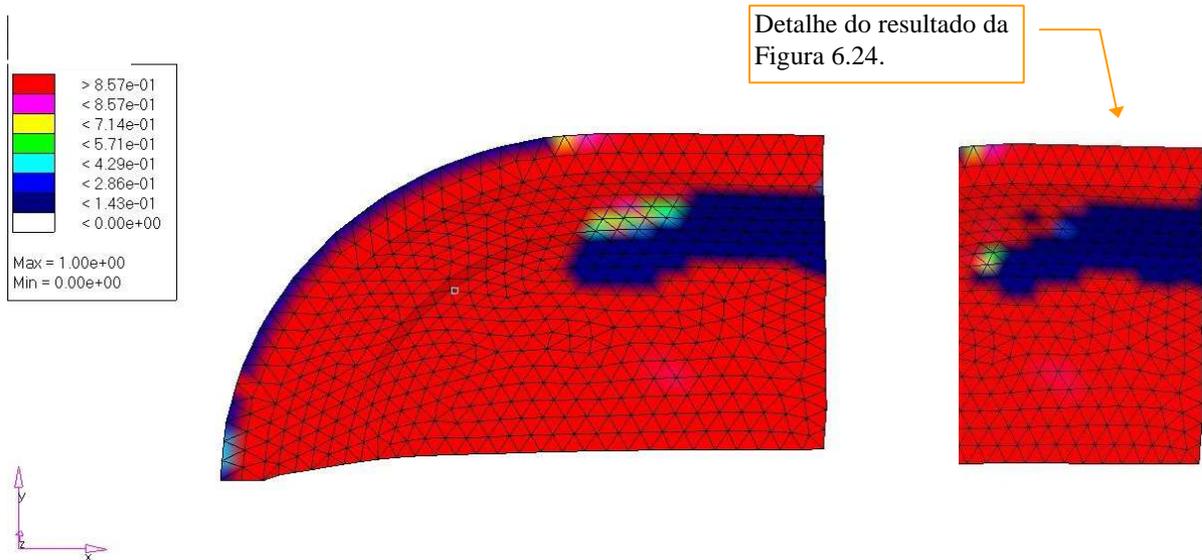


Figura 6.28 -Densidade ótima por nó para a casca com CLC não linear com fator de penalização de *checkerboard* (a esquerda) e detalhe do resultado da Figura 6.24 sem o fator de *checkerboard*.

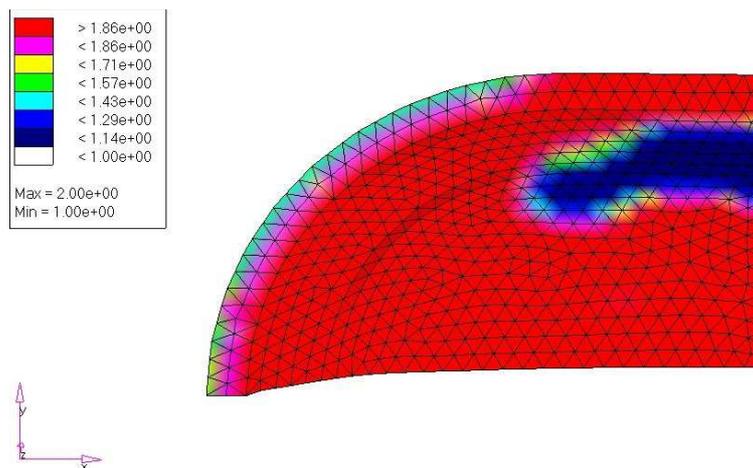


Figura 6.29 -Espessura ótima distribuída por para a casca com CLC não linear com fator de penalização de *checkerboard*.

Um aspecto importante a ser citado é a sensibilidade dos resultados ao ponto de projeto inicial, principalmente pelo tipo de curva de restrição imposta, com alta rejeição de densidades intermediárias. Na grande maioria dos exemplos rodados e deste exemplo em particular, resultados praticamente idênticos foram obtidos para configurações iniciais partindo de $\rho = 0$ e $\rho = 1$. Interpreta-se que este comportamento seja devido a que a restrição de falha é imposta em forma progressiva, própria da técnica de Lagrangeano Aumentado. Neste sentido, a técnica se comporta como um processo de “continuação” onde cada iteração do Lagrangeano Aumentado corresponde a uma minimização do problema partindo da configuração inicial dada na solução da iteração anterior.

6.3.3 - Exemplo III - Reforço Estrutural.

Neste exemplo, a peça a ser otimizada é baseada num reforço da "coluna A" de um automóvel. A Figura 6.30 mostra o reforço dividido em 3 regiões: de contato com o prensa-chapas, de contato com o punção e região livre de contato. Os dados materiais foram considerados os mesmos do exemplo anterior. A peça possui restrições de simetria nos eixos x e y .

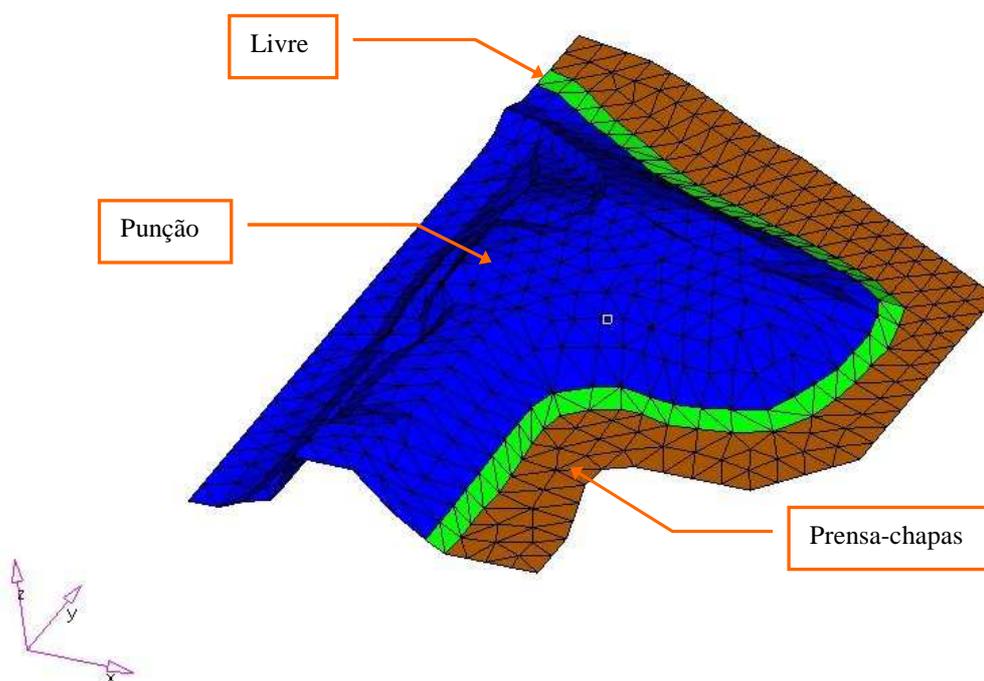


Figura 6.30 - Reforço estrutural discretizado em elementos triangulares de membrana.

A fim de estimar o estado de deformação inicial da peça, foi feita uma simulação da estampagem com a espessura inicial de 1 mm ($\rho = 0$). A Figura 6.31 mostra a distribuição das deformações principais I bem como o resultado da configuração indeformada. E na Figura 6.32 tem-se a $CLC(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho)$ para o estado inicial do problema, com o $CLC_0 = 0,05$. Os parâmetros da otimização deste problema são dados nas Tabelas 6.6 e 6.7.

Tabela 6.6 - Tensão de escoamento e espessura limites em função de ρ para o exemplo do reforço.

	$\rho = 0$	$\rho = 1$
Tensão de Escoamento	σ_e	$2 \cdot \sigma_e$
Espessura	1 mm	2 mm

Tabela 6.7 - Dados de otimização do exemplo do reforço com a CLC não linear sem controle de *checkerboard*.

<u>CLC</u>		<u>Fatores de Penalização do Lagrangeano</u>	
CLC₀	0,05	Penalização da restrição	0.000004
F1	$\varepsilon_1 = 4,0 \varepsilon_2^2$	Penalização de <i>checkerboard</i>	0,0
F2	$\varepsilon_1 = 4,0 \varepsilon_2^2 + 2,5 \text{CLC}_0$	Penalização das densidades intermediárias	0,5

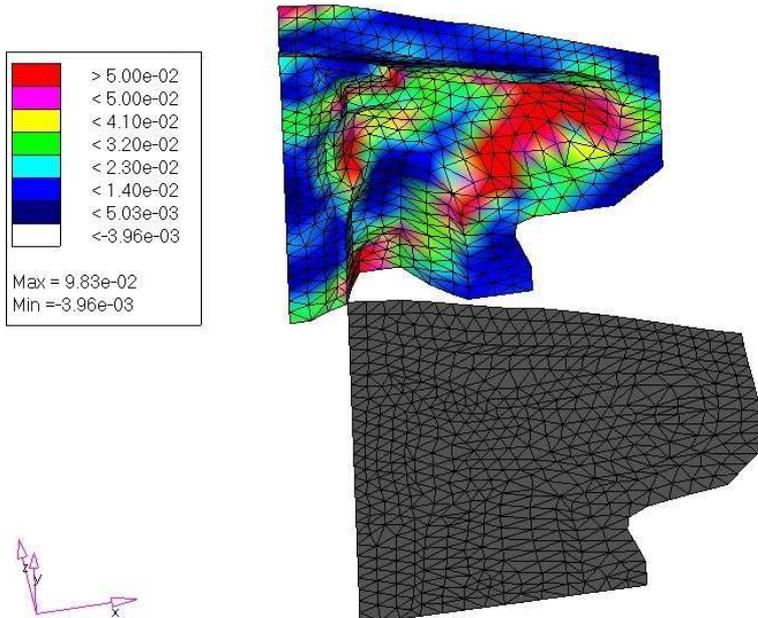


Figura 6.31 - Deformações principais I e configuração indeformada do reforço a ser otimizado.

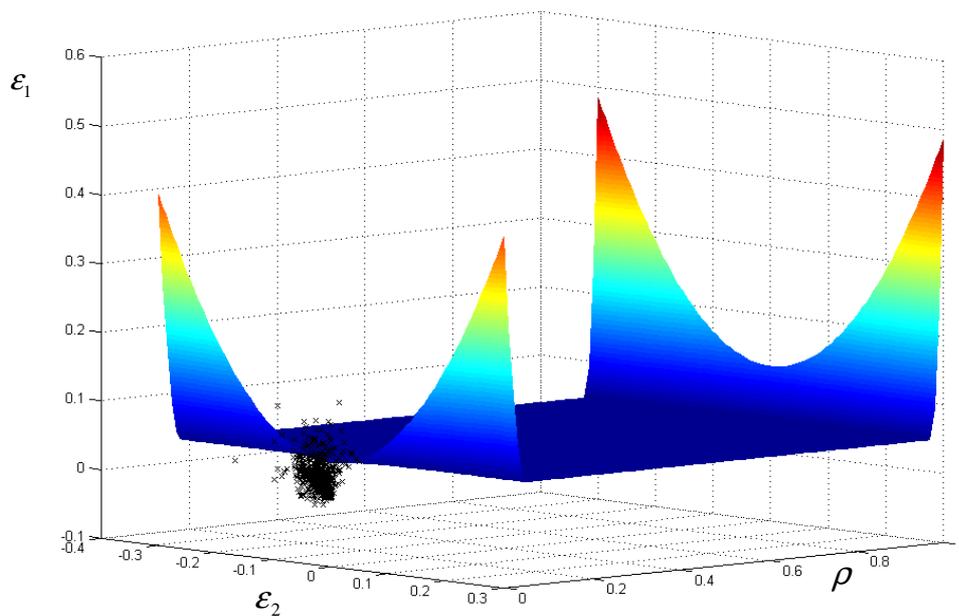


Figura 6.32 - CLC para o estado inicial do reforço ($\rho = 0$).

O gráfico dos resultados da CLC com as densidades ótimas é mostrado na Figura 6.33. Na Figura 6.34, tem-se o gráfico visto da parte inferior da superfície de falha, para melhor visualizar a distribuição das densidades ótimas. Pode-se notar que também há uma concentração de pontos na região correspondente a 1/3 e 2/3 da densidade máxima ($\rho = 1$). Porém, observa-se que neste exemplo há mais pontos situados na região intermediária.

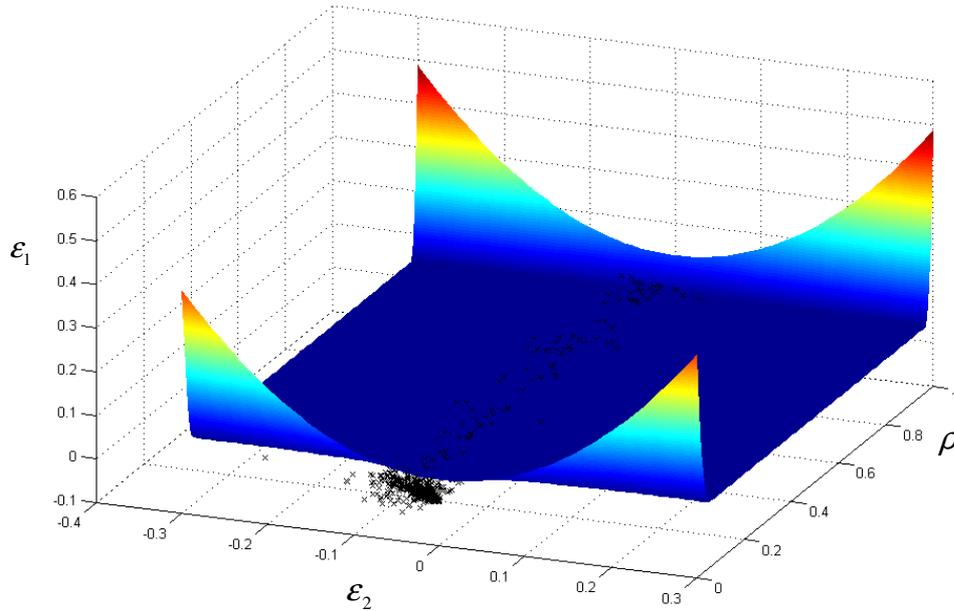


Figura 6.33 - $CLC(\epsilon_1, \epsilon_2, \rho)$ com as espessuras ótimas por elemento.

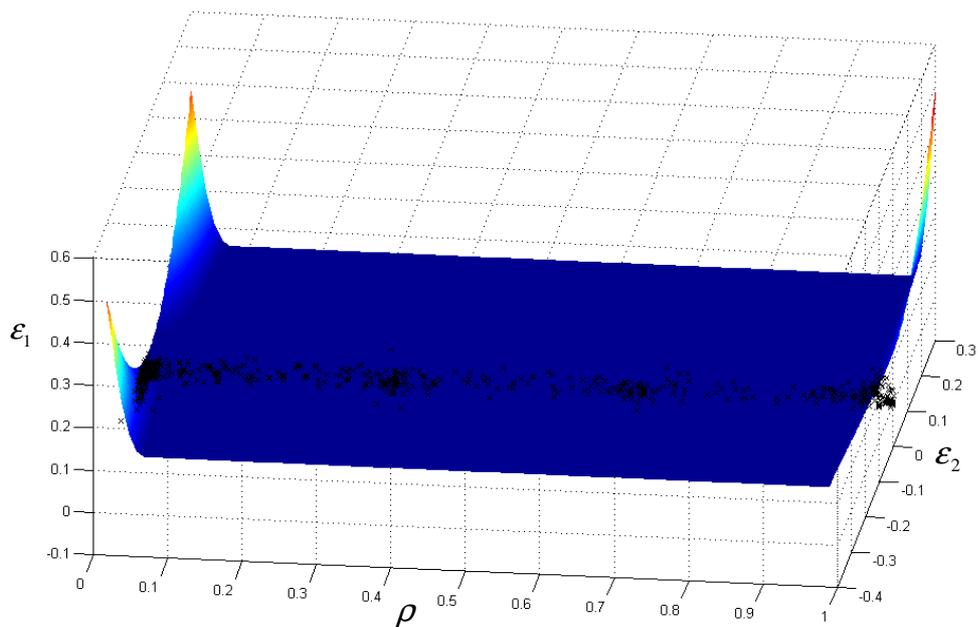


Figura 6.34 - $CLC(\epsilon_1, \epsilon_2, \rho)$ com as espessuras ótimas por elemento (vista da parte inferior da superfície de falha).

Na Figura 6.35, tem-se o reforço com as densidades ótimas por nó, e na Figura 6.36, com as espessuras ótimas por elemento. Comparando com o resultado das deformações iniciais da Figura 6.31, pode-se observar uma relação direta das regiões mais solicitadas durante o processo de conformação, com as regiões com densidades/espessura máximas. Na Figura 6.36, há vários elementos com densidades intermediárias (vide também gráfico da Figura 6.34), que são correspondentes aos elementos de contorno limites entre as espessuras máximas e mínimas.

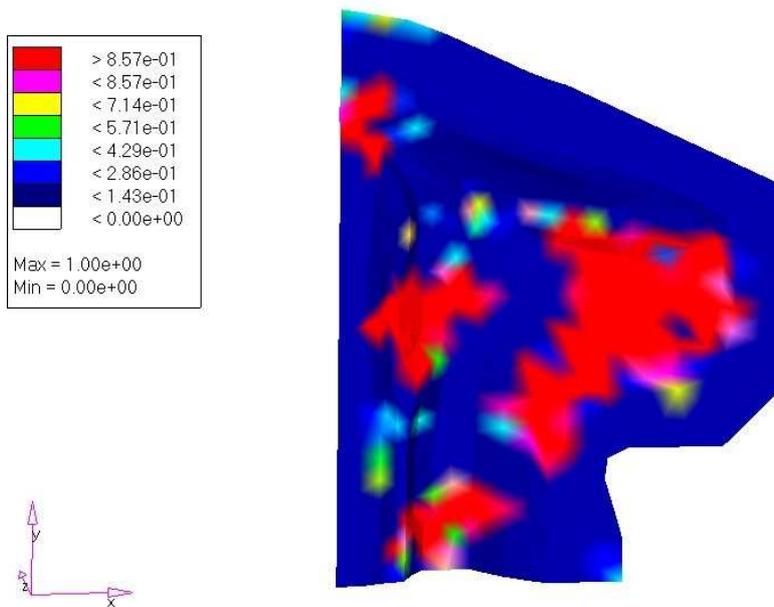


Figura 6.35 - Densidade ótica por nó para o reforço com $CLC_0 = 0,05$.

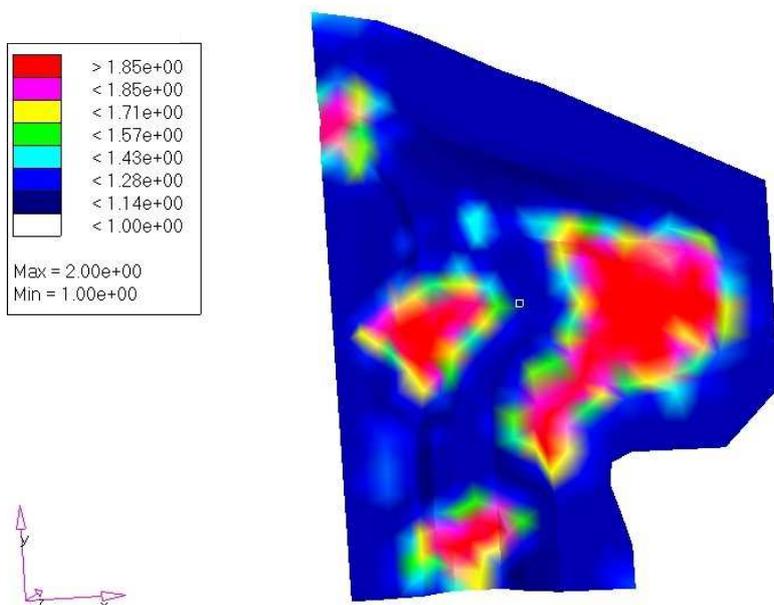


Figura 6.36 - Espessura ótica por elemento para o reforço com $CLC_0 = 0,05$.

Ainda neste exemplo, mudou-se o limite inferior (CLC_0) da CLC, passando de 0,05 para 0,035. Ou seja, a restrição CLC agora está menos permissiva e deverá penalizar mais elementos. Na Figura 6.37 tem-se a simulação com as deformações principais I para o estado inicial, e na Figura 6.38 o gráfico com a distribuição das deformações principais para $\rho = 0$.

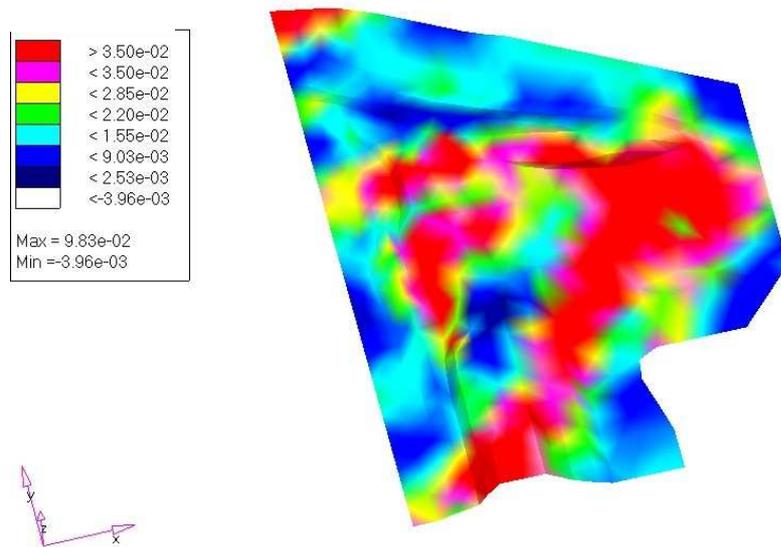


Figura 6.37 - Deformações principais I para $CLC_0 = 0,035$.

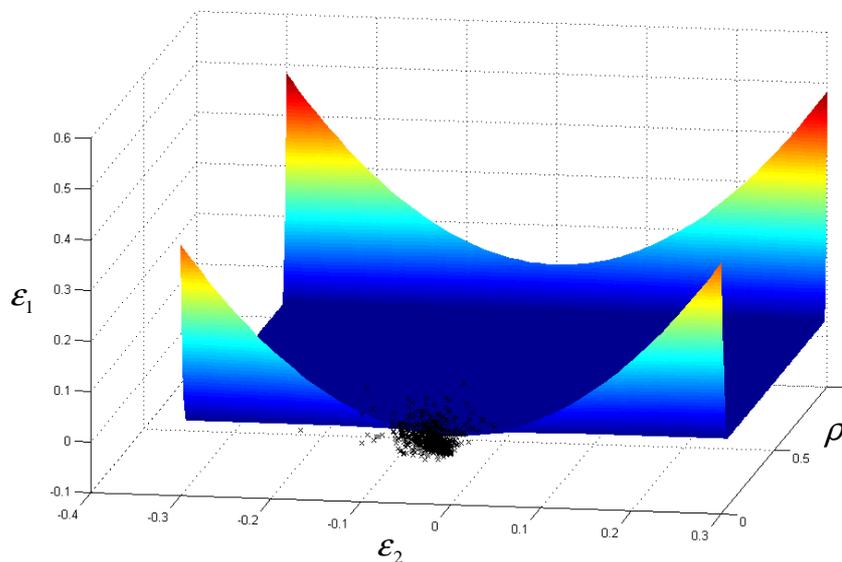


Figura 6.38 - $CLC(\epsilon_1, \epsilon_2, \rho)$ inicial ($\rho = 0$) para $CLC_0 = 0,035$.

Os resultados com a distribuição das densidades ótimas na CLC podem ser vistos nos gráficos das Figuras 6.39 e 6.40. Pode-se observar comportamento semelhante aos obtidos com a $CLC_0 = 0,05$.

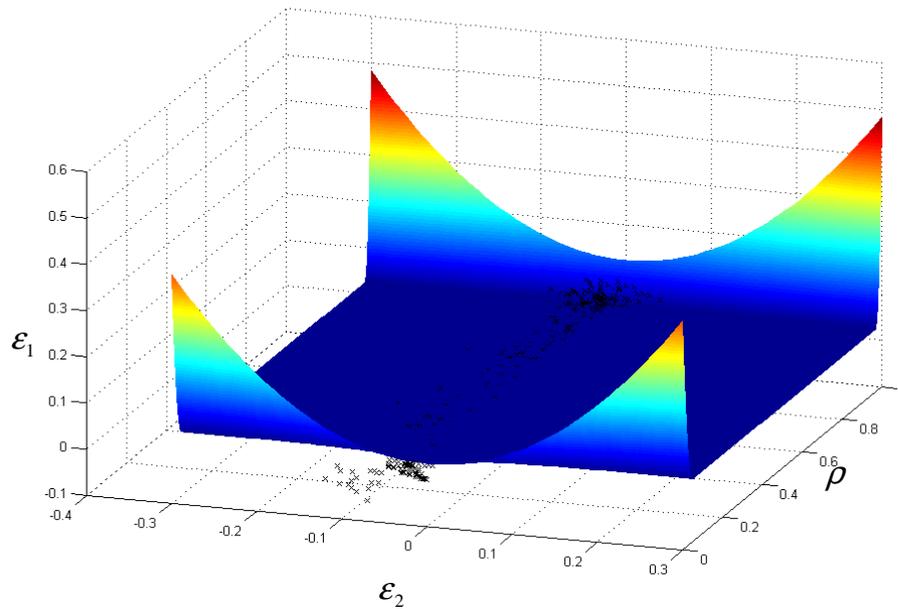


Figura 6.39 - $CLC(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho)$ com as espessuras ótimas por elemento ($CLC_0 = 0,035$).

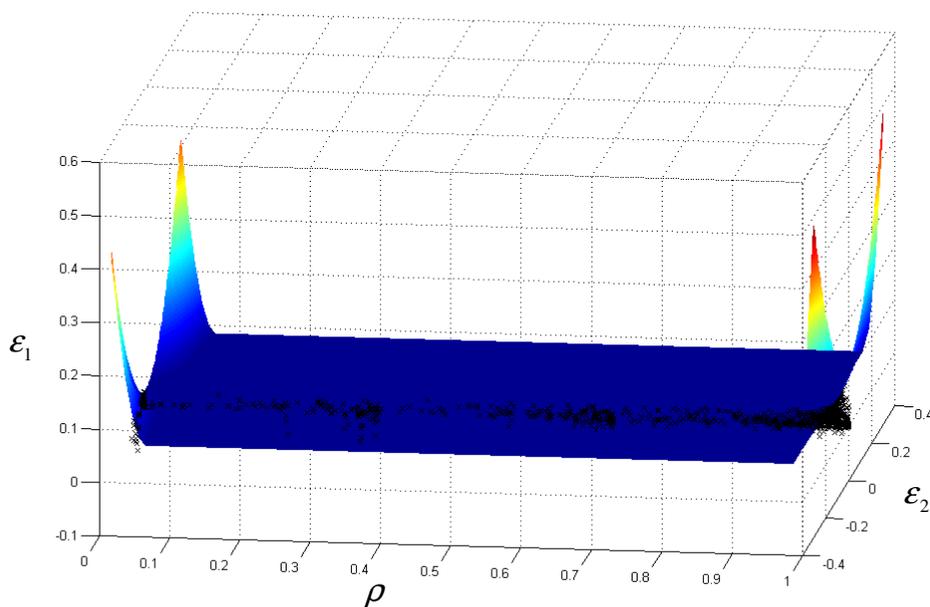


Figura 6.40 - Outro ponto de vista da $CLC(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho)$ com as espessuras ótimas por elemento ($CLC_0 = 0,035$).

Na Figura 6.41a, tem-se o reforço com o resultado das densidades ótimas por nó, e na Figura 6.42a, o resultado das espessuras ótimas por elemento. Observa-se na Figura 6.42a que algumas regiões possuem densidades intermediárias, devido principalmente ao tamanho dos elementos utilizados.

Mantido os mesmos parâmetros de conformação e de otimização, uma nova simulação foi realizada com uma malha mais refinada na região de punção, Figura 6.43. Os resultados

das densidades e espessuras ótimas são mostrados nas Figuras 6.41b e 6.42b, respectivamente. Pode-se observar que o refino da malha teve uma influência considerável na definição do leiaute da peça, se aproximando mais do estado de deformação inicial (Figura 6.37).

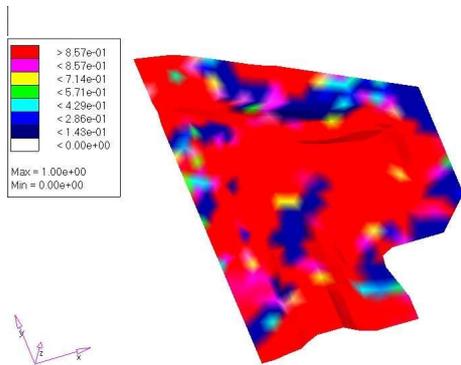


Figura 6.41a - Densidade ótima por nó para o reforço com $CLC_0 = 0,035$. (malha original)

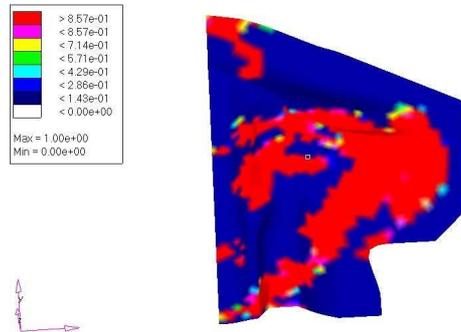


Figura 6.41b - Densidade ótima por nó para o reforço com $CLC_0 = 0,035$. (malha refinada)

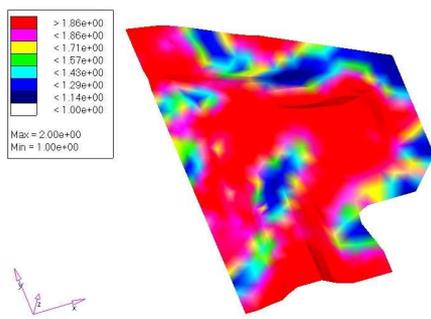


Figura 6.42a - Espessura ótima por elemento para o reforço com $CLC_0 = 0,035$. (malha original)

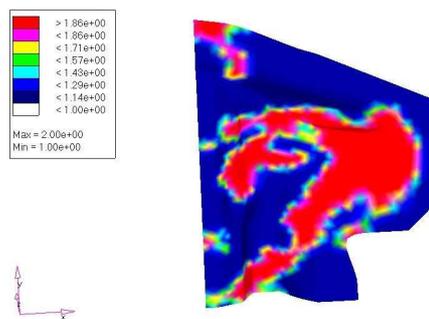


Figura 6.42b - Espessura ótima por elemento para o reforço com $CLC_0 = 0,035$. (malha refinada)

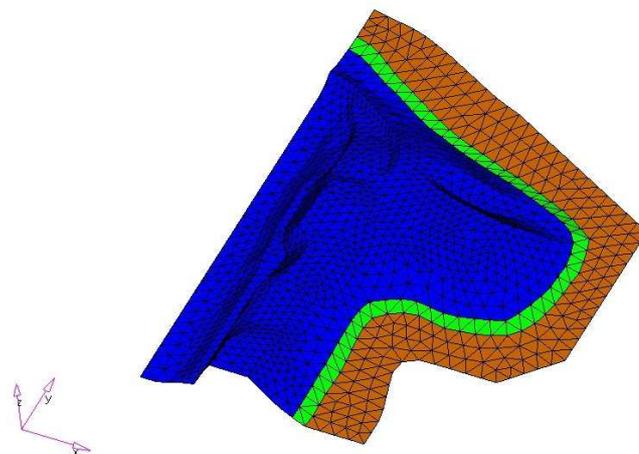


Figura 6.43 - Reforço estrutural com refinamento da malha na região de punção.

6.3.4 - Exemplo IV - Reforço Estrutural B.

Neste exemplo, tomou-se uma variação (proposta pelo autor) de parte de um reforço da coluna de direção, chamada aqui de "Reforço Estrutural B", Figura 6.44. Os dados materiais foram considerados os mesmos do exemplo anterior. A peça possui restrições de simetria somente no eixo y.

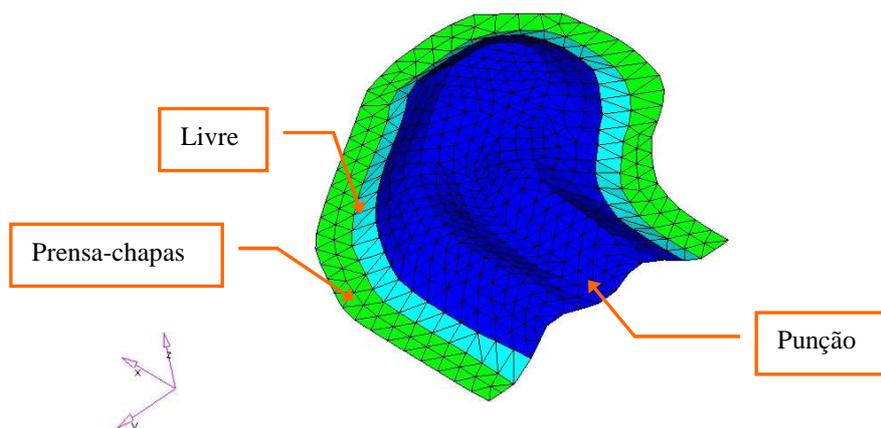


Figura 6.44 - Reforço Estrutural B.

Os parâmetros de otimização são dados nas Tabelas 6.8 e 6.9. A Figura 6.45 mostra a distribuição das deformações principais I ao longo da peça.

Tabela 6.8 - Tensão de escoamento e espessura limites em função de ρ para o exemplo da peça.

	$\rho = 0$	$\rho = 1$
Tensão de Escoamento	σ_e	$2,5 \cdot \sigma_e$
Espessura	0,7 mm	1,5 mm

Tabela 6.9 - Dados de otimização do exemplo do reforço estrutural B.

<u>CLC</u>		<u>Fatores de Penalização do Lagrangeano</u>	
CLC₀	0,03	Penalização da restrição	0,000001
F1	$\varepsilon_1 = 4,0 \varepsilon_2^2$	Penalização de checkerboard	0,0
F2	$\varepsilon_1 = 4,0 \varepsilon_2^2 + 4,5 \text{CLC}_0$	Penalização das densidades intermediárias	0,6

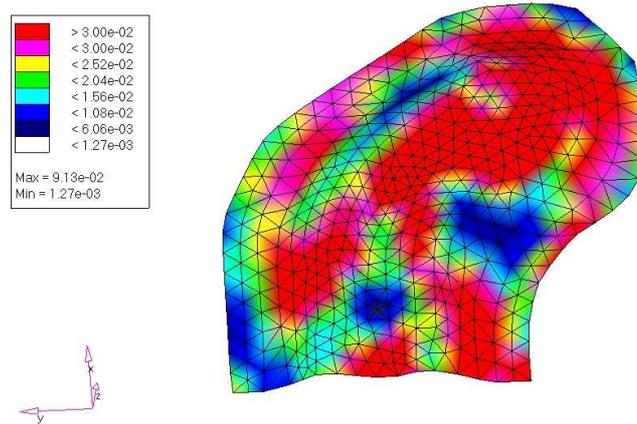


Figura 6.45 - Deformação Principal I - inicial.

As Figuras 6.46 e 6.47 mostram os resultados das densidades e espessuras ótimas respectivamente. Pode-se observar que o leiaute final corresponde razoavelmente bem ao leiaute das Deformações Principais I iniciais, Figura 6.45.

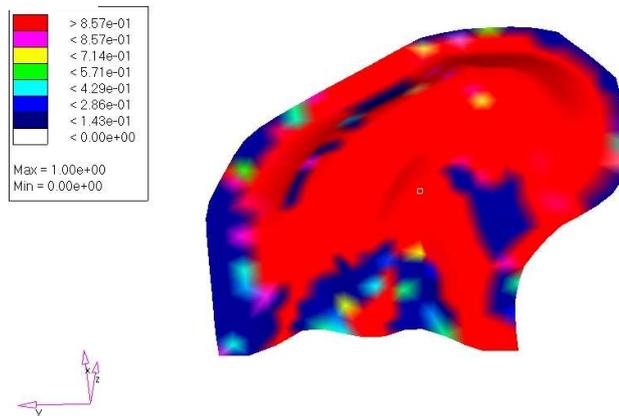


Figura 6.46 - Densidades ótimas por nó do reforço estrutural B

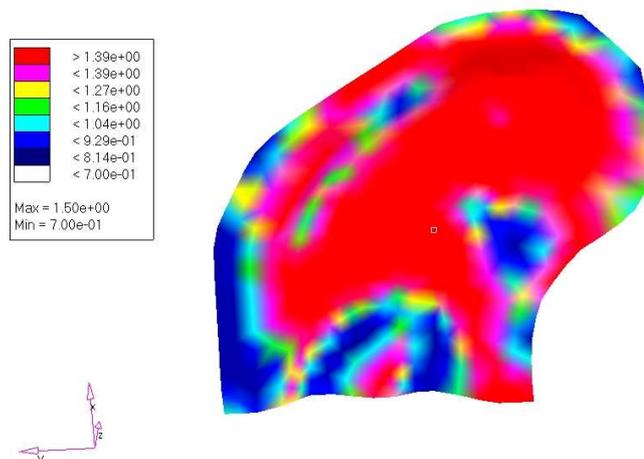


Figura 6.47 - Espessuras ótimas por elemento do reforço estrutural B.

Os resultados com a distribuição das densidades ótimas na CLC podem ser vistos nos gráficos das Figuras 6.48 e 6.49. Pode-se observar comportamento semelhante aos obtidos nos exemplos anteriores, com a concentração de densidades em ρ igual 1/3 e 2/3.

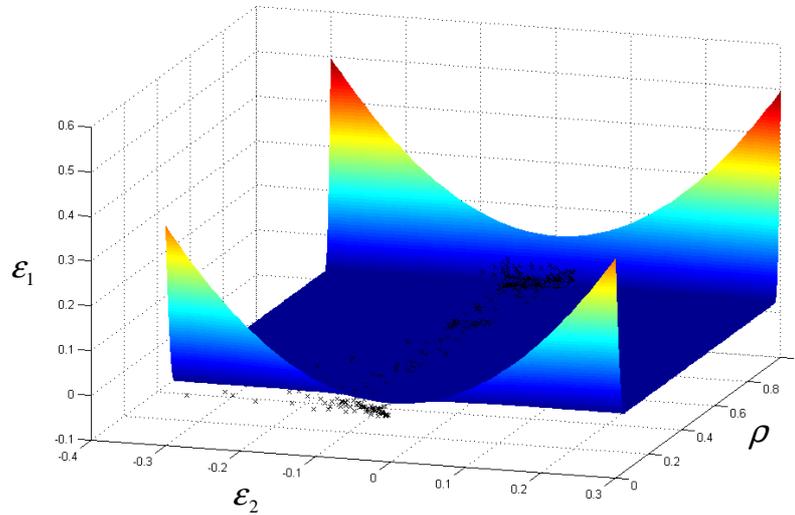


Figura 6.48 - $CLC(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho)$ com as espessuras ótimas por elemento ($CLC_0 = 0.03$).

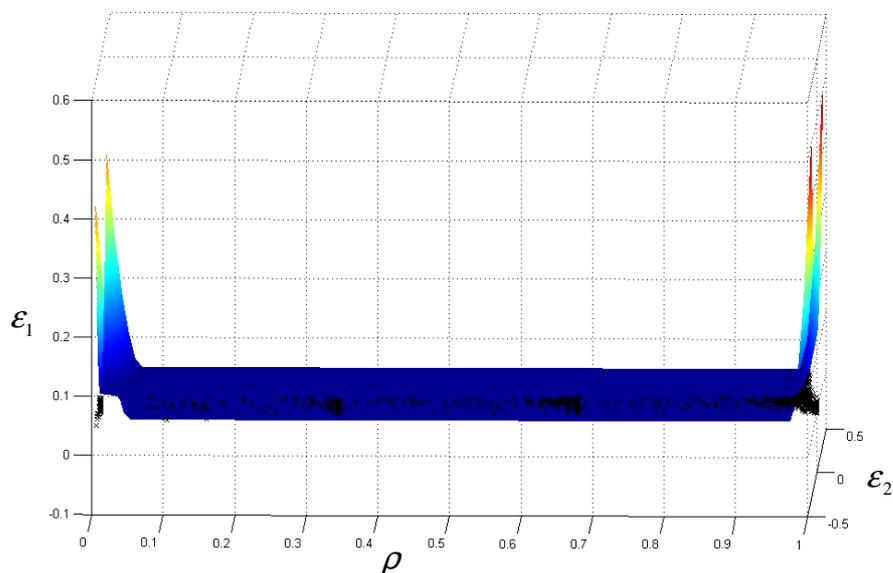


Figura 6.49 - $CLC(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho)$ com as espessuras ótimas por elemento (vista da parte inferior da superfície de falha).

A fim de avaliar a influência do valor inicial de ρ neste exemplo, foram feitas duas análises de otimização, uma com ρ inicial = 0 e outra com ρ inicial = 1 (ambos somente até a 12ª iteração). As Figuras 6.50 e 6.51 mostram os resultados das espessuras ótimas do Reforço

Estrutural B com $\rho_{\text{inicial}} = 0$ e 1, respectivamente. Pode-se observar que os resultados são bem similares. Nas Figuras 6.52 e 6.53 tem-se a evolução do Lagrangeano e da massa⁵ respectivamente ao longo das iterações para o problema com $\rho_{\text{inicial}} = 0$ e 1.

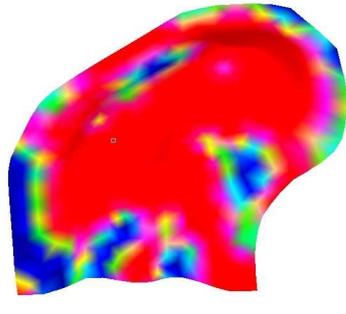
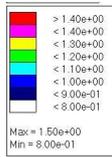


Figura 6.50 - Espessura ótima na 12ª iteração com $\rho_{\text{inicial}} = 0$.

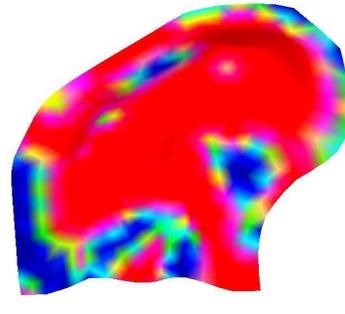
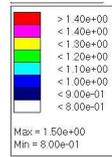


Figura 6.51 - Espessura ótima na 12ª iteração com $\rho_{\text{inicial}} = 1$.

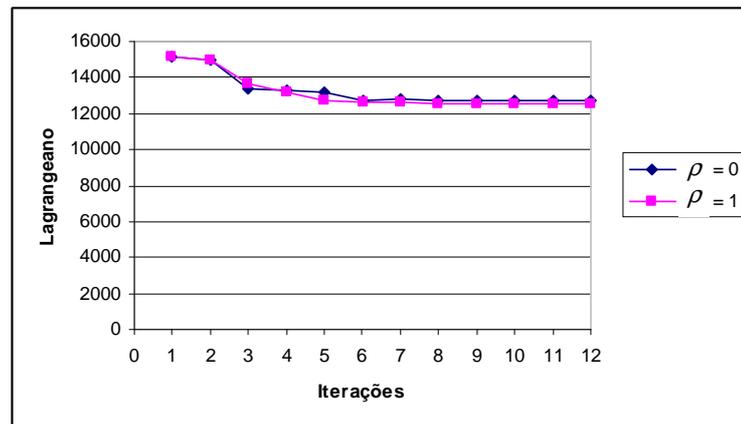


Figura 6.52 - Evolução do Lagrangeano para o Reforço B com ρ_{inicial} igual a 0 e 1 (até a 12ª iteração).

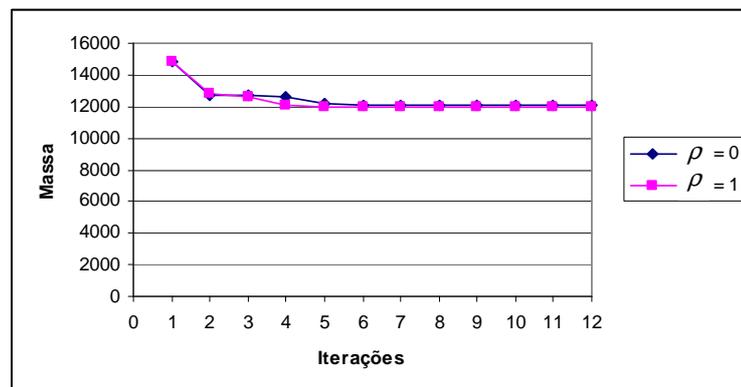


Figura 6.53 - Evolução do massa para o Reforço B com ρ_{inicial} igual a 0 e 1 (até a 12ª iteração).

⁵ O valor da massa está fora de unidade, pois usou-se a densidade do metal variando entre 0 e 1.

7 Conclusão

Na primeira etapa deste trabalho, foi apresentado o método por Aproximação Inversa para simulação de estampagem de chapas finas. Foram utilizados elementos triangulares de membrana com função de forma linear e os resultados comparados com softwares comerciais. Os resultados se mostraram satisfatórios principalmente em etapas iniciais de projeto, onde é importante ter uma ferramenta numérica de simulação de estampagem de baixo custo computacional a fim de se ter uma estimativa da variação da espessura e níveis de deformação presentes no processo. Efeitos de flexão podem ainda ser adicionados aos elementos de membrana a fim de se ter uma melhor correlação. Por ser uma técnica com custo de operação significativamente inferior às incrementais (implícita e explícita) e por estar baseada na solução de um problema não linear com matriz tangente analítica, esta abordagem é atrativa para seu uso em processos de otimização de projeto, como foi verificado na segunda etapa deste trabalho.

A sensibilidade do problema foi obtida em forma analítica através do Método Adjunto com custo computacional inferior a uma análise estática, dado que se utiliza a matriz tangente já triangularizada na solução de convergência. Sua aferição com o cálculo numérico via diferenças finitas foi conferida. Vale destacar que a correção deste cálculo é determinante para a convergência do problema de otimização.

A técnica de Lagrangeano Aumentado mostrou-se uma proposta satisfatória para a incorporação das restrições locais de falha fornecidas pelas curvas CLC, fornecendo bons resultados de viabilidade mesmo em condições críticas como as fornecidas pelas superfícies de restrição utilizadas neste trabalho.

A definição do leiaute da chapa, porém, resultou num ponto crítico deste trabalho, principalmente nas ações necessárias para a imposição de diferenciação de material (eliminação de material intermediário). Tanto formulações baseadas em maximização de rigidez com restrição de volume ou minimização de massa com restrição de falha (dentre outras) respondem adequadamente à proposta de comportamento constitutivo fornecida por SIMP, penalizando o material intermediário. Todos estes casos compartilham o fato de que o problema estrutural consiste em satisfazer o equilíbrio para um estado de carga prescrita. A

equação de estado aqui estudada, porém, corresponde a um caso de equilíbrio para deslocamento prescrito, definindo fortemente o nível de deformações a ser atingido em cada região. Neste contexto, a técnica utilizada pelo SIMP deixa de ter efeito para a penalização das regiões intermediárias de material. Os resultados do processo, como proposto nas primeiras tentativas numéricas correspondem assim à otimização das propriedades locais da chapa (por exemplo, definição de espessura ótima), mas não na diferenciação em duas chapas como pretendido.

Com o objetivo de contornar esta dificuldade foi proposta uma alteração da superfície de restrição, cuja geometria reforça a eliminação do material intermediário. Os resultados obtidos foram satisfatórios neste quesito, porém menos óbvios de interpretação e de caracterização geométrica que o desejado.

É importante destacar como qualidade que a sensibilidade dos resultados em relação ao ponto inicial de projeto foi pequena, como consequência da imposição progressiva da restrição através de penalização inicial e posterior atualização dos multiplicadores de Lagrange locais. Esta seqüência, inerente a técnica de Lagrangeano Aumentado, é comparável às seqüências denominadas de “continuação”.

Como antecipado no Capítulo de Introdução, a proposta aqui estudada insere-se num contexto mais amplo onde a busca de um leiaute ótimo está vinculada a objetivos de desempenho (cuja equação de estado corresponde a análises do componente já estampado) e a restrições de falha de fabricação (cuja equação de estado está dada pelo desempenho na estampagem). Dado que a otimização estrutural de peças já é objeto de inúmeras pesquisas, o estudo aqui proposto teve o intuito de verificar a capacidade de se tratar apenas a segunda parte deste problema amplo, arbitrando uma função objetivo simples, vinculada a massa de material.

Assim, como sugestões e aprimoramentos futuros para este trabalho, destacam-se:

- ✓ Reformulação da função objetivo em função do desempenho da peça já estampada e incorporação de restrições de falha em conformação como apresentadas neste trabalho. Desta forma, espera-se obter peças adequadas em uso e viáveis do ponto de vista da manufatura.
- ✓ Implementar os efeitos de flexão nos elementos de membrana, de modo a obter uma melhor correlação dos resultados da Aproximação Inversa.
- ✓ Buscar formas alternativas de tratar o problema de penalização das densidades intermediárias para o caso de deslocamentos prescritos, típicos de problemas de Aproximação Inversa. Pois como foi visto, a penalização do problema pela CLC ainda não penaliza por completo o problema, deixando alguns elementos com densidades

intermediárias. Incrementar uma restrição do tipo *compliance* junto com a restrição de conformação poderia ser uma boa alternativa.

- ✓ Utilização de técnicas combinadas de definição de leiaute com otimização de forma para re-posicionamento do cordão de solda.

Referências Bibliográficas

- Ahn., D. C., Lee, K. D., Kim, J. H. & Nam, H., "Virtual tryout of stretch flange type parts in tailored blank stamping", World Automotive Congress 2000 FISITA, Seoul, 2000.
- Andrade, S. L., Pereira, J. F., Tais, E. J. M. & Rosa, L. K., "ULSAC - ultra light steel auto closures: principais resultados e o programa da Usiminas na disseminação dos conceitos", 38º Seminário de Laminação - Processos e Produtos Laminados e Revestidos, Florianópolis, 2001.
- Araújo, C. S., Borges, R. N. & Carneiro, R. A., "Soldabilidade a laser de aços para aplicação em tailored blanks na indústria automobilística", 38º Seminário de Laminação - Processos e Produtos Laminados e Revestidos, Florianópolis, 2001.
- Banabic, D. & Dannenmann, E., "Prediction of the influence of yield locus on the limit strains in sheet metals", Journal of Materials Processing Technology, Vol. 109, pp. 9-12, 2001.
- Banabic, D., "Limit strains in the sheet metals by using the new Hill's yield criterion (1993)", Journal of Materials Processing Technology, Vol. 92-93, pp. 429-432, 1999.
- Banabic, D., Cazacu, O., Barlat, F., Comsa, D. S., Wagner, S. & Siegert, K., "Recent anisotropic yield criteria for sheet metals", Proceedings of the Romanian Academy, Serie A, Vol. 3, No. 3, pp. 1-8, 2002.
- Batoz, J. L., Guo, . Q. & Mercier, F., " The inverse approach including bending effects for the analysis and design of sheet metal forming parts", Simulation of Materials Processing: Theory, Methods and Applications, Balkema - Rotterdam, 1995.
- Batoz, J.-L., Detraux, & Durox, P., "Finite element procedures for strain estimations of sheet metal forming parts", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 30, pp. 1385 - 1401, 1990.
- Batoz, J.-L., Guo, Y.-Q. & Mercier, F., "Simple triangular shell elements for large strain estimations of sheet metal forming parts", American Mathematical Society, Vol 21, pp 21 - 35, 1999.

- Batoz, J.-L., Guo, Y.-Q. & Mercier, F., "The inverse approach including bending effects for the analysis and design of sheet metal forming parts", *Simulation of Materials Processing: Theory, Methods and Applications*, pp 661 - 667, 1995.
- Bendsoe, M. P., "Optimization of Structural Topology, Shape, and Material", Springer, 1995.
- Bielschowsky, R., Friedlander, A., Gomes, F., Martínez, J. & Raydan, M., "An adaptive algorithm for bound constrained quadratic minimization.", *Investigación Operativa*, Vol. 7, pp. 67 - 102, 1997.
- Borrvall, T. & Petersson, J., "Topology optimization using regularized intermediate density control", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, pp. 4911-4928, 2001.
- Bourdin, B., "Filter in topology optimization", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.50, No. 9, pp. 2143-2158, 2001.
- Cao, J., Kinsey, B. L., Yao, H., Viswanathan, V. & Song, N., "Next generation stamping dies - controllability and flexibility", *Robotics and Computers Integrated Manufacturing*, Vol. 17, pp. 49-56, 2001.
- Chen, W. F. & Han, D. J., "Plasticity for Structural Engineers", Springer-Verlag, New York, 1988.
- Chou, I-N. & Hung, C., "Finite element analysis and optimization on springback reduction", *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, Vol. 39, pp. 517-536, 1999.
- Delamézière, A., Naceur, H., Breitkopf, P., Knopf-Lenoir, C., Batoz, J.-L. & Villon, P., "Faisabilité en emboutissage: optimisation du matériau par surface de réponse", *Mécanique & Industries*, Vol. 3, pp. 93-98, 2002.
- Dhatt, G., Touzot, G. & Cantin, G., "The Finite Element Method Displayed", John Wiley & Sons, 1984.
- Doege, E. & Elend, L.-E., "Design and application of pliable blank holder systems for the optimization of process conditions in sheet metal forming", *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 111, pp. 182 - 187, 2001.
- Dry, D., "The Processing and Dormability of Laser Welded Tailored Blanks for Automotive Applications", Thesis for Doctor of Engineering Degree, Wales, 2001.

- Eschenauer, H. A. & Olhoff, N., "Topology optimization of continuum structures: a review", *Applie Mechanics Reviews*, Vol. 54, No. 4, pp. 331-389, 2001.
- Fancello, E. A., "Topology optimization for minimum mass design considering local failure constraints and contact boundary conditions". *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2006.
- Fancello, E. A.; Pereira, J. T., "Structural topology optimization considering material failure constraints and multiple load conditions". *Latin American Journal Of Solids And Structures*, Brazil, v. 1, n. 1, p. 3-25, 2003.
- Friedlander, A., Martínez, J. & Santos, S., "A new trust-region algorithm for bound constrained minimization", *Applied Mathematic and Optimization*, Vol. 30. No. 3, pp 235 - 266, 1994
- Graf, A. & Hosford, W. F., "Calculations of forming limit diagrams", *Metallurgical Transactions A*, Vol. 21A, pp. 87-94, 1990.
- Guo, Y. Q., Batoz, J. L., Detraux, J. M. & Duroux, P., "Finite element procedures for strain estimations of sheet metal forming parts", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 30, pp. 1385-1401, 1990.
- Guo, Y.-Q., Batoz, J.-L., Naceur, H., Bouabdallah, S., Mercier, F. & Barlet, O., "Recent developments on the analysis and optimum design of sheet metal forming parts using a simplified inverse approach", *Computers & Structures*, Vol. 78, pp. 133 - 148, 2000.
- Haber, R., Jog, C., & Bendsoe, M., "The perimeter method - a new approach to variable topology shape design", *WCSMO I*, pp. 153-160, 1995.
- Hassani, B & Hinton, E., "Homogenization and Structural Topology Optimization - Theory, Practice and Software", Springer, 1999.
- Heo, Y., Choi, Y., Kim, H. Y. & Seo, D., "Characteristics of weld line movements for the deep drawing with drawbeads of tailor-welded blanks", *Journal of Materials Processing Thechnology*, Vol. 111, pp. 164-169, 2001.
- Keeler, S.P., "Enhanced Forming Limit Diagram - Project Team Technology Report", Auto/Steel Partnership, Southfield, Mi, 2002^a.
- Keeler, S.P., "The Bead Correction Factor", Auto/Steel Partenership, Southfield, MI, 2002.
- Khan, A. S. & Huang, S., "Continuum Theory of Plasticity", John Wiley & Song, 1995.

- Kim, J.-Y., Kim, N. & Huh, M.S., "Optimum blank design of an automobile sub-frame", *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 101, pp. 31-43, 2000.
- Kim, S. H., Kim, S. H. & Huh, H., "Finite element inverse analysis for the design of intermediate dies in multi-stage deep-drawing processes with large aspect ratio", *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 113, pp. 779-785, 2001.
- Kinsey, B., Liu, Z. & Cao, J., "A novel forming technology for tailored welded blanks", *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 99, pp. 145-153, 2000.
- Kinsey, B., Song, N., & Cao, J., "Analysis of clamping mechanism for tailor welded blank forming", *Society of Automotive Engineers, Inc*, 1999.
- Kleinermann, J.-P., "Identification Parametrique et Optimisation des Procèdes de Mise a Forme par Problemes Inverses", *Université de Liège, Thèse de Doctorat*, Septembre, 2000.
- Kok, S. & Stander, N., "Optimization of a sheet metal forming process using successive multipoint approximations", *Structural Optimization*, Vol. 18, pp. 277-295, 1999.
- Kusuda, H., Takasago, T. & Natsumi, F., "Formability of tailored blank", *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 71, pp. 134-140, 1997.
- Lee, C. & Cao, J., "Shell element formulation of multi-step inverse analysis for axisymmetric deep drawing process", *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, pp. 681-706, 2001.
- Lee, C. H. & Huh, H., "Blank design and strain estimates for sheet metal forming processes by a finite element inverse approach with initial guess of linear deformation", *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 82, pp. 145-155, 1998.
- Lee, H. L., Huh, H., Han, S. S. & Kwon, O., "Optimum design of tailored blanks in sheet metal forming processes by inverse finite element analysis", *Metals and Materials*, Vol. 4, No. 3, pp. 458-463, 1998^a.
- Lemaitre, J. & Chaboche, J. L., "Mechanics of Solids Materials", *Cambridge University Press, Cambridge*, 1990.
- Lobão, M.C., "Determinação da curva limite de conformação de aços por procedimento experimental e simulação numérica do processo de conformação", *Dissertação de Mestrado - UFSC, Florianópolis*, 2003.
- Lubliner, J., "Plasticity Theory", *Macmillan Publishing Company, Macmillan*, 1990.

- Malvern, L.E., "Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium", Prentice-Hall, 1969.
- Marciniak, Z., & Kuczynski, K., "Limit strains in the processes of stretch-forming sheet metal", International Journal of Mechanics Science, Vol. 9, pp. 609-620, 1967.
- Mattiasson, K., " On finite element simulation of sheet metal forming processes in industry", European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering - ECCOMAS 2000, Barcelona, 2000.
- Meinders, T., van den Berg, A. & Huétink, J., "Deep drawing simulations of tailored blanks and experimental verification", Journal of Materials Processing Technology, Vol. 103, pp. 65-73, 2000.
- Moreno, M. E., "Desenvolvimento e Implementação de Metodologia de Otimização da Geometria do Blank em Processos de Conformação de Chapas Metálicas", Dissertação de Mestrado - USP, São Carlos, 2000.
- Naceur, H., Guo, Y.-Q., Batoz, J.-L. & Knopf-Lenoir, C., "Optimization of drawbead restraining forces and drawbead design in sheet metal forming process", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 43, pp. 2407 - 2434, 2001.
- Narasimhan, K., Wagoner, R.H., "Finite element modeling simulation of in-plane forming limit diagrams of sheets containing finite defects", Metallurgical Transactions A, Vol. 22A, pp. 2655-2665, 1991.
- Ohata, T., Nakamura, Y., Katayama, T., Nakamachi, E. & Nakano, K., "Development of optimum process design system by numerical simulation", Journal of Materials Processing Technology, Vol. 60, pp. 543-548, 1996.
- Olhoff, N. & Taylor, J. E., "On structural optimization", Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, pp. 1139-1151, 1983.
- Pallett, R. J. & Lark, R. J., "The use of tailored blank in the manufacture of construction components", Journal of Materials Processing Technology, Vol. 117, pp. 249-254, 2001.
- Park, S. H., Yoon, J. W., Yang, D. Y., Kim, Y. H., "Optimum blank design in sheet metal forming by the deformation path iteration method", International Journal of Mechanical Science, Vol. 41, pp. 1217-1232, 1999.

- Pepelnjak, T., Gantar, G. & Kuzman, K., "Numerical simulations in optimisation of product and forming process", *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 115, pp. 122 - 126, 2001.
- Pereira, J. F. B., Andrade, S. L. & Rosa, L. K., "Projeto ULSAB - ajudando a construir o carro do futuro", II WORKSHOP FINEP-RECOPE - Qualificação de Chapas para a Indústria Automobilística, São Paulo, 1999.
- Pereira, J. T., "Otimização Topológica de Componentes Mecânicos com Restrição sobre o Critério de Falha Material", Tese de Doutorado, Florianópolis, 2001.
- Petersson, J. & Sigmund, O., "Slope constrained topology optimization", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.41, pp.1417-1434, 1998
- Picinini Filho, M., Sampaio, A. P., Azambuja, S., Carvalho, J. E. R., Campbel, C. H., Carvalho, C. C., Suzuki, L. M., Santos, J. C. & Venturinnen, C., "Desenvolvimento pioneiro de blank soldado na América Latina: o projeto da CSN para a GMB e a Ford", II Workshop Qualificação de Chapas para a Indústria Automobilística - Laminação, Conformação e Pintura, EPUSP, São Paulo, 1999.
- Sala, G., "A numerical and experimental approach to optimise sheet stamping technologies - Part I: mild steel press-forming", *Materials and Design*, Vol. 22, pp. 285 - 298, 2001.
- Shi, X., Wei, Y. & Ruan, X., "Simulation of sheet metal forming by a one-step approach: choice of element", *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 108, pp. 300-306, 2001.
- Shin, J.-K, Lee, K.-H, Song, S.-I. & Park, G.-J., "Industrial applications and design case studies - automotive door design with the ULSAB concept using structural optimization", *Structural Multidiscipline Optimization*, Vol. 23, 320-327, 2002.
- Shu, J.-S. & Hung, C., "Finite element analysis and optimization of springback reduction: the double-bend technique", *International Journal Machine Tools Manufacture*, Vol. 36, No. 4, pp. 423-434, 1996.
- Souza Neto, E. A., Peric, D. & Owen, D. R. J., "Computational Plasticity: Small and Large Strain Finite Element Analysis of Elastic and Inelastic Solids", *Curso de Mecânica Computacional Não Linear - USP*, São Paulo, 2002.
- Stoughton, T.B., "A general forming limit criterion for sheet metal forming", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 42, pp. 1-27, 2000.

- Tekkaya, A. E., "State-of-the-art of simulation of sheet metal forming", Journal of Materials Processing Technology, Vol. 103, pp. 14-22, 2000.
- Vogel, F., Mebus, H. & Muller, G., "Layout and thickness optimization of tailored blank designs with application in the automotive industry", Trends in Computational Structural Mechanics, Barcelona, 2001.
- Wrigger, P., "Computational Contact Mechanics", John Wiley & Sons, 2002.
- Xu, S. & Weinmann, K. J., "Prediction of forming limit curves of sheet metals using Hill's 1993 user-friendly yield criterion of anisotropic materials", International Journal of Mechanical Science, Vol. 9, pp. 913-925, 1998.
- Yang, S. & Nezu, K., "Application of an inverse FE approach in the concurrent design of sheet stamping", Journal of Materials Processing Technology, Vol. 79, pp. 86-93, 1998.
- Zhao, K. M., Chun, B. K. Lee, J. K., "Finite element analysis of tailor-welded blanks", Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 37, pp. 117-130, 2001.
- Zimniak, Z. & Piela, A., "Finite element of a tailored blanks stamping process", Journal of Materials Processing Technology, Vol. 106, pp. 254-260, 2000.

A Análise de Sensibilidade Não-Linear

Em Problemas *Path Independent*

Seja \mathbf{R} o resíduo de um sistema discreto não-linear em função apenas dos deslocamento \mathbf{u} . Considere as iterações no incremento de tempo $t \rightarrow t + \Delta t$. Desta forma, para cada iteração k , defini-se:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^k &= \mathbf{R}^k \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^k &= \mathbf{u}^k \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

O resíduo \mathbf{R} na iteração k é definido como:

$$\mathbf{R}^k = \mathbf{R}(\mathbf{u}^k) = \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}^k) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{u}^k) \quad (\text{A.2})$$

Expandindo \mathbf{R} em série de Taylor e desprezando os termos de ordem superior, tem-se:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}^{k+1}) \cong \mathbf{R}(\mathbf{u}^k) + \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{u}^k)}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u}^k = 0 \quad (\text{A.3})$$

onde

$$\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{u}^k)}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}^k)}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{u}^k)}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{K}^{\text{Tang}}(\mathbf{u}^k) \quad (\text{A.4})$$

Substituindo eq. (A.4) em (A.3), tem-se:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}^{k+1}) = \mathbf{R}(\mathbf{u}^k) + \mathbf{K}^{\text{Tang}}(\mathbf{u}^k) \Delta \mathbf{u}^k = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{K}^{\text{Tang}}(\mathbf{u}^k) \Delta \mathbf{u}^k = -\mathbf{R}(\mathbf{u}^k) = -\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}^k) + \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{u}^k) \quad (\text{A.6})$$

Resolvendo este sistema, obtém-se $\Delta \mathbf{u}^k$, e assim, atualiza-se \mathbf{u}^k :

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \Delta \mathbf{u}^k \quad (\text{A.7})$$

Este processo é repetido até a convergência do sistema, ou seja, $\mathbf{R}(\mathbf{u}^{k+1}) \simeq 0$, obtendo assim um $\mathbf{u}^{k(\text{convergado})}$, denominado de \mathbf{u}^{kc} que satisfaça:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}^{kc}) = \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}^{kc}) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{u}^{kc}) \simeq 0 \quad (\text{A.8})$$

Nesta última interação, tem-se a matriz tangente em função de \mathbf{u}^{kc} , denominada de $\mathbf{K}^{\text{Tang}}(\mathbf{u}^{kc})$.

Metodo Direto

Considere uma função desempenho explícita em termos de ambos os argumentos u e ρ :

$$G(\rho) = G(u(\rho), \rho) \quad (\text{A.9})$$

tal que,

$$\frac{dG}{d\rho} = \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial G}{\partial \rho} \quad (\text{A.10})$$

onde o único termo que não pode ser obtido explicitamente é $du/d\rho$. Para isto, é necessário reescrever a equação do resíduo em termos de ρ e de u , sendo este o valor final convergado (\mathbf{u}^{kc}):

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(\mathbf{u}^{kc}, \rho) &= \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}^{kc}, \rho) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{u}^{kc}, \rho) \simeq 0 \\
\frac{d\mathbf{R}(\mathbf{u}^{kc}, \rho)}{d\rho} &= \underbrace{\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}^{kc}, \rho)}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}^{kc}, \rho)}{\partial \rho} - \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{u}^{kc}, \rho)}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho} - \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{u}^{kc}, \rho)}{\partial \rho}}_{\mathbf{K}^{Tang}(\mathbf{u}^{kc}, \rho)} \quad (\text{A.11})
\end{aligned}$$

Assim, pode-se obter $du/d\rho$ através da eq. (A.11), que fica da forma:

$$\mathbf{K}^{Tang}(\mathbf{u}^{kc}, \rho) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho} = -\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}^{kc}, \rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{u}^{kc}, \rho)}{\partial \rho} = -\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{u}^{kc}, \rho)}{\partial \rho} \quad (\text{A.12})$$

Resumidamente, pode-se descrever o método direto da seguinte forma:

- a) Obten-se \mathbf{u}^{kc} e $\mathbf{K}^{Tang}(\mathbf{u}^{kc})$ através da última iteração do método de Newton para a solução do problema não-linear.
- b) Resolve a eq. (A.12), obtendo-se $du/d\rho$.
- c) Obtem a sensibilidade $dG/d\rho$ através da eq. (A.10).

Método Adjunto

Considere o seguinte problema adjunto:

$$\mathbf{K}^{Tang}(\mathbf{u}^{kc}, \rho)^T \vartheta = \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \quad (\text{A.13})$$

onde ϑ é uma variável adjunta. Transpondo ambos os lados e pós-multiplicando por $\partial \mathbf{u} / \partial \rho$, tem-se:

$$\left[\mathbf{K}^{Tang}(\mathbf{u}^{kc}, \rho)^T \vartheta \right]^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho} = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho} \quad (\text{A.14})$$

Tomando a eq. (A.12), pre-multiplicando por ϑ^T , tem-se:

$$\vartheta^T \mathbf{K}^{Tang}(\mathbf{u}^{kc}, \rho) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho} = \vartheta^T \left(-\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{u}^{kc}, \rho)}{\partial \rho} \right) \quad (\text{A.15})$$

$$\left(\mathbf{K}^{Tang}(\mathbf{u}^{kc}, \rho)^T \vartheta \right)^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho} = \left(-\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{u}^{kc}, \rho)}{\partial \rho} \right)^T \vartheta \quad (\text{A.16})$$

Substituindo a eq. (A.16) em (A.14) e (A.10), chega-se à sensibilidade:

$$\frac{dG}{d\rho} = \frac{\partial G}{\partial \rho} - \left(\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{u}^{kc}, \rho)}{\partial \rho} \right)^T \vartheta \quad (\text{A.17})$$

Resumidamente, pode-se descrever o método ajunto da seguinte forma:

- a) Obten-se \mathbf{u}^{kc} e $\mathbf{K}^{Tang}(\mathbf{u}^{kc})$ através da última iteração do método de Newton para a solução do problema não-linear.
- b) Resolve o problema ajunto da eq. (A.13), obtendo-se ϑ .
- c) Obtem sensibilidade $dG/d\rho$ através da eq. (A.17).