

Jan-Michel Colombo Farias

**ANÁLISE DE SENSIBILIDADE TOPOLÓGICA  
APLICADA AO MODELO DE DANO DE  
FRANCFORT-MARIGO**

Dissertação submetida ao Programa  
de Pós-Graduação em Engenharia  
Mecânica da Universidade Federal de  
Santa Catarina para obtenção do Grau  
de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: D.Sc. Eduardo Alberto  
Fancello

Coorientador: D.Sc. Antonio André  
Novotny

Florianópolis

2013

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Farias, Jan-Michel Colombo

Análise de sensibilidade topológica aplicada ao modelo de dano de Francfort-Marigo / Jan-Michel Colombo Farias ; orientador, Eduardo Alberto Fancello ; co-orientador, Antonio André Novotny. - Florianópolis, SC, 2013.  
88 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia Mecânica. 2. Análise de sensibilidade topológica. 3. Derivada topológica. 4. Modelo de dano de Francfort-Marigo. I. Fancello, Eduardo Alberto. II. Novotny, Antonio André. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.

Jan-Michel Colombo Farias

**ANÁLISE DE SENSIBILIDADE TOPOLÓGICA APLICADA AO  
MODELO DE DANO DE FRANCFORT-MARIGO**

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 06 de Maio de 2013

---

Júlio César Passos, Ph.D.

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

---

Eduardo Alberto Fancello, D.Sc.

Orientador

---

Antonio André Novotny, D.Sc.

Coorientador

**Banca Examinadora:**

---

Eduardo Alberto Fancello, D.Sc.

Presidente

---

Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D.

---

Eduardo Lenz Cardoso, Dr. Eng.

---

Rafael Holdorf Lopez, Dr.



## RESUMO

O conceito de análise de sensibilidade topológica foi formalmente introduzido em 1999, e por isto é um campo de pesquisa recente que vem crescendo rapidamente. Este fornece a variação de um funcional quando o domínio de análise tem a sua topologia alterada através de uma perturbação, por exemplo a introdução de um furo, com proporções infinitesimais. O resultado desta operação é um campo escalar denominado Derivada Topológica, que pode ser visto como uma correção de primeira ordem para o funcional quanto a introdução desta perturbação. Neste trabalho, a análise de sensibilidade topológica é aplicada ao modelo de dano de Francfort-Marigo, sendo este utilizado para a descrição de materiais frágeis em regime quasi-estático. As expressões para a derivada topológica deste modelo são desenvolvidas, e em seguida um algoritmo de evolução de dano é proposto com uso exclusivo das informações fornecidas pela derivada topológica. Alguns problemas numéricos são avaliados para verificar o desempenho do algoritmo proposto.

**Palavras-chave:** Análise de sensibilidade topológica, Derivada topológica, Modelo de Francfort-Marigo.



## ABSTRACT

The topological sensitivity analysis was formally introduced in 1999, and since then became a rapidly expanding research field. This analysis provides the variation of a given functional when the domain is topologically modified by an infinitesimal perturbation, for example by introducing a hole. The main result of this procedure is a scalar field named Topological Derivative that can be seen as a first order approximation of the value of the functional associated to the perturbed domain. In this dissertation the topological sensitivity analysis is applied to the Francfort-Marigo damage model, which is used to model brittle materials in quasi-static problems. The expressions for the Topological Derivative are developed and an algorithm is proposed to use this information on the study of damage propagation. Some numerical test cases are evaluated to verify the algorithm's performance.

**Keywords:** Topological sensitivity analysis, Topological derivative, Francfort-Marigo model.



# Lista de Figuras

1.1	Perturbação no domínio de referência $\Omega$ . . . . .	20
1.2	Representação alternativa para derivada topológica. . . . .	22
2.1	Representação do modelo mecânico. . . . .	26
2.2	Inclusão no domínio perturbado $\Omega_\epsilon$ . . . . .	29
3.1	Representação do dano (LEMAITRE; DESMORAT, 2005). . . . .	44
3.2	Esquema utilizado para avaliação numérica. . . . .	51
3.3	Convergência da estimativa para o valor teórico da derivada topológica. . . . .	52
4.1	Exemplo de uma sequência de inclusões e a malha associada. . . . .	57
5.1	. . . . .	60
5.2	Campo derivada topológica a frente da região danificada e curva de nível $D_T\psi = 0$ para o Modo I. . . . .	62
5.3	Influência do tamanho da inclusão na evolução do funcional de Francfort-Marigo. . . . .	62
5.4	Análise de convergência do carregamento crítico. . . . .	63
5.5	Resultado final para propagação do dano no Modo I. . . . .	65
5.6	Histórico da energia de deformação. . . . .	65
5.7	Valor do Funcional de Francfort-Marigo ao longo do processo de propagação para o Modo I. . . . .	66
5.8	Geometria Modo 2. . . . .	67
5.9	Campo derivada topológica a frente da região danificada e curva de nível $D_T\psi = 0$ para o Modo II. . . . .	68
5.10	Resultado final para propagação do dano no Modo II. . . . .	69
5.11	Valor do Funcional de Francfort-Marigo ao longo do processo de propagação para o Modo II. . . . .	69
5.12	Geometria do experimento de Bittencourt. . . . .	71
5.13	Resultado para experimento Bittencourt I $c = 4,0mm$ e $h = 1,5mm$ . . . . .	72
5.14	Resultado para experimento Bittencourt II $c = 5,0mm$ e $h = 1,5mm$ . . . . .	73
5.15	Resultado para experimento Bittencourt III $c = 6,0mm$ e $h = 1,0mm$ . . . . .	74
5.16	Resultado para experimento Bittencourt IV $c = 6,0mm$ e $h = 2,5mm$ . . . . .	74
5.17	Decaimento do funcional ao longo do processo de criação de novas inclusões. . . . .	75



# Lista de Símbolos

$\cdot$	Produto interno entre vetores ou tensores
$\ \cdot\ $	Norma euclidiana
$\otimes$	Produto tensorial
$(\cdot)_\epsilon$	Relativo ao problema perturbado
$(\cdot)^i$	Relativo ao instante de tempo $i$
$[\cdot]$	Operador salto
$\Lambda$	Subdomínio danificado de $\Omega$
$a(\cdot, \cdot)$	Operador bilinear
$B_\epsilon(\hat{\boldsymbol{x}})$	Bola de raio $\epsilon$ centrada em $\hat{\boldsymbol{x}}$
$\partial B_\epsilon$	Fronteira de $B_\epsilon$
$c$	Parâmetro associado à geometria do experimento de Bittencourt
$\mathbb{C}_0$	Tensor constitutivo do material não danificado
$\mathbb{C}_1$	Tensor constitutivo do material danificado
$\mathbb{C}_\gamma$	Tensor constitutivo no domínio perturbado
$\mathbb{C}$	Tensor isotrópico de quarta ordem
$\mathbb{D}$	Tensor isotrópico de quarta ordem
$D$	Variável de dano escalar
$D_n$	Dano associado a um plano de normal $\boldsymbol{n}$
$D_T\psi$	Derivada topológica do funcional $\psi$
$\delta$	Espessura do dano inicial
$\delta S$	Área total de um plano em um RVE
$\delta S_D$	Área danificada em um RVE
$\delta V$	Volume total do RVE
$\delta V_D$	Volume danificado em um RVE

$\Delta x$	Tamanho característico da malha
$div(\cdot)$	Operador divergente
$\varepsilon$	Tensor deformação de Green linearizado
$\epsilon$	Tamanho da perturbação, raio da perturbação
$E_1, E_0$	Módulo de elasticidade dos materiais danificado e não danificado, respectivamente
$\eta$	Elemento de $V$
$\mathcal{F}$	Funcional de Francfort-Marigo
$\Gamma$	Contorno de $\Omega$
$\gamma$	Contraste
$\Gamma_D$	Fronteira de Dirichlet
$\Gamma_N$	Fronteira de Neumann
$\nabla(\cdot)$	Operador gradiente
$\nabla^s \mathbf{u}$	Parcela simétrica do gradiente de $\mathbf{u}$
$h$	Comprimento do dano inicial
$H^1$	Espaço de Hilbert de primeira ordem
$\mathbf{I}$	Tensor identidade de segunda ordem
$\mathbb{I}$	Tensor identidade de quarta ordem
$\mathcal{I}$	Segunda parcela do funcional de Francfort-Marigo
$\mathcal{J}$	Funcional da energia potencial total
$K$	Conjunto dos deslocamentos admissíveis
$\kappa$	Parâmetro de liberação de energia volumétrico
$\kappa^*$	Parâmetro de liberação de energia corrigido
$l(\cdot)$	Operador Linear
$\lambda$	Propriedade do material
$l$	Diâmetro da inclusão (algorítmico)

$\mu, \zeta$	Coeficientes de Lammé
$\mathbf{n}$	Vetor normal a uma superfície
$\mathbf{n}_{in}$	Vetor normal a $\partial B_\epsilon$ apontando para o centro de $B_\epsilon$
$\mathbf{n}_{out}$	Vetor normal a $\partial B_\epsilon$ apontando para fora de $B_\epsilon$
$\nu$	Coeficiente de Poisson
$o(\cdot)$	Resíduo
$\boldsymbol{\omega}_\epsilon$	Primeira correção de $\mathbf{u}$
$\Omega$	Domínio não perturbado
$\Omega_\epsilon$	Domínio perturbado
$\Omega^{mat}$	Subdomínio de $\Omega$ que apresenta material
$\mathbb{P}$	Tensor de polarização
$\psi$	Funcional
$\bar{\mathbf{q}}$	Força de superfície
$\mathbb{R}^2$	Espaço euclidiano bidimensional
$r, \theta$	Sistema de coordenadas polar
$\rho$	Densidade material associado ao SIMP
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor tensão de Cauchy
$\boldsymbol{\sigma}_\gamma$	Tensor tensão no domínio perturbado
$\mathbf{t}$	Vetor tração
$t_i$	$i$ -ésimo instante de tempo
$\mathbf{u}$	Campo de deslocamentos
$\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon$	Segunda correção de $\mathbf{u}$
$\bar{\mathbf{u}}$	Deslocamento prescrito
$\bar{\mathbf{u}}_c$	Deslocamento crítico
$\bar{\mathbf{u}}_{c0}$	Estimativa inicial do deslocamento crítico

$V$	Conjunto das variações admissíveis
$\chi$	Função característica
$\hat{x}$	Centro da perturbação

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>19</b>
1.1	MOTIVAÇÃO . . . . .	22
1.2	OBJETIVO . . . . .	23
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO . . . . .	23
<b>2</b>	<b>DERIVADA TOPOLÓGICA EM ELASTICIDADE LI- NEAR</b>	<b>25</b>
2.1	MODELO MECÂNICO . . . . .	25
2.2	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE TOPOLÓGICA PARA O FUNCIONAL DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL	28
2.2.1	Efeito de uma inclusão . . . . .	31
2.2.2	Análise assintótica . . . . .	33
2.2.3	Cálculo da Derivada Topológica . . . . .	40
<b>3</b>	<b>MODELO DE DANO DE FRANCFORT-MARIGO</b>	<b>43</b>
3.1	MODELO DE FRANCFORT-MARIGO . . . . .	43
3.1.1	Carga Crítica . . . . .	46
3.1.2	Relação com Otimização Estrutural . . . . .	47
3.2	DERIVADA TOPOLÓGICA PARA O FUNCIONAL DE FRANCFORT-MARIGO . . . . .	49
3.3	AVALIAÇÃO NUMÉRICA . . . . .	50
<b>4</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL</b>	<b>53</b>
4.1	ASPECTOS COMPUTACIONAIS . . . . .	53
4.2	ALGORITMO . . . . .	53
4.3	IMPLEMENTAÇÃO . . . . .	54
<b>5</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS</b>	<b>59</b>
5.1	EXEMPLO 1: MODO I . . . . .	59
5.2	EXEMPLO 2: MODO II . . . . .	66
5.3	EXPERIMENTOS DE BITTENCOURT . . . . .	70
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>77</b>
6.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS . . . . .	79
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>79</b>
	<b>APÊNDICE A CÁLCULO DO TENSOR <math>\mathbb{D}</math></b>	<b>85</b>



# 1 INTRODUÇÃO

A análise de sensibilidade quantifica de que forma uma dada grandeza de interesse sofre mudanças com relação a perturbações nas variáveis que a definem. Particularmente, a análise de sensibilidade estrutural foca a relação existente entre as variáveis de projeto e a resposta estrutural, ou resposta das variáveis de estado determinadas pelas leis da mecânica (HAUG; CHOI; KOMKOV, 1986). Esta informação é de grande importância uma vez que fornece dados de maneira confiável e sistemática, que em contrapartida somente seriam obtidos mediante consecutivas tentativas e experimentações.

Partindo do conceito apresentado anteriormente, a Análise de Sensibilidade Topológica relaciona a variação de um funcional quando o domínio no qual este está definido sofre modificações em sua topologia, por exemplo através da criação de um furo (ver Figura 1.1).

Atribui-se a Eschenauer, Kobelev e Schumacher (1994) as primeiras formalizações do conceito de perturbação topológica, quando propuseram o *bubble method* dentro do contexto da Otimização Estrutural. Os autores desenvolveram um algoritmo iterativo que alterna entre a Otimização de Forma de uma topologia fixa, e a nucleação de novos furos (i.e. alteração da topologia) através do cálculo de uma função que denominaram “função característica”. Esta nova função determina como varia um funcional caso seja introduzido um furo de tamanho infinitesimal, ou “bolha” como chamaram os autores, com condição de Neumann homogênea em sua fronteira. Entretanto, foi somente após cinco anos que Sokolowski e Żochowski (1999a) começaram a desenvolver as bases matemáticas para o método. A “função característica” passaria a ser chamada de “Derivada Topológica” e a Análise de Sensibilidade Topológica começaria a ser definida.

No caso de um furo, o domínio topologicamente perturbado é obtido da seguinte forma

$$\Omega_\epsilon(\hat{\mathbf{x}}) = \Omega \setminus \overline{B_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})}, \quad (1.1)$$

onde  $B_\epsilon(\hat{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| \leq \epsilon\}$  é uma bola de raio  $\epsilon$  centrada na posição  $\hat{\mathbf{x}}$ , conforme representado pela Figura 1.1. Partindo de um dado funcional  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , suponha que seu valor associado a um domínio perturbado  $\Omega_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})$  (i.e.  $\psi[\Omega_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})]$ ) admite a seguinte representação:

$$\psi[\Omega_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})] = \psi(\Omega) + D_T\psi(\hat{\mathbf{x}})f(\epsilon) + o[f(\epsilon)], \quad (1.2)$$

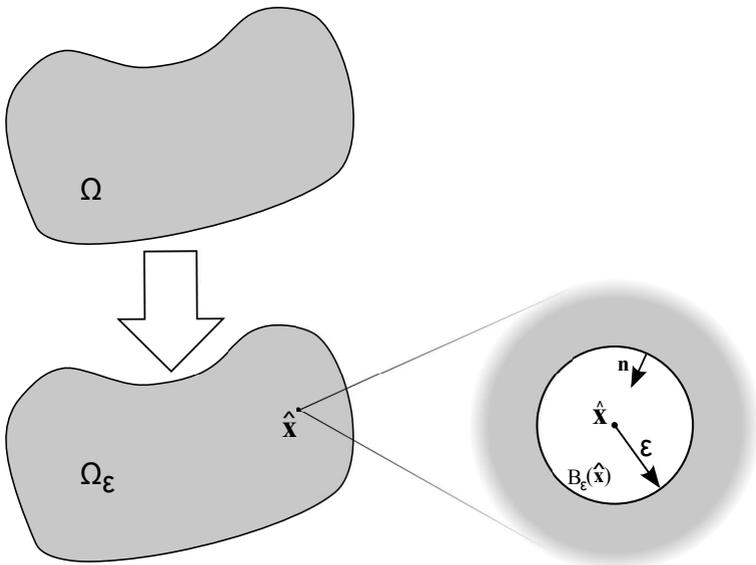


Figura 1.1: Perturbação no domínio de referência  $\Omega$ .

onde  $\psi(\Omega)$  é o funcional avaliado no domínio de referência  $\Omega$ ,  $f(\epsilon)$  é uma função positiva associada à perturbação, e o resíduo  $o[f(\epsilon)]$  tem a propriedade

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{o[f(\epsilon)]}{f(\epsilon)} = 0. \quad (1.3)$$

Caso isto seja possível, define-se o campo escalar  $D_T\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  denominado *Derivada Topológica do funcional*  $\psi$  como

$$D_T\psi(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi[\Omega_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})] - \psi(\Omega)}{f(\epsilon)}. \quad (1.4)$$

Através da expressão (1.2), a derivada topológica pode ser vista como uma correção de primeira ordem para o valor do funcional  $\psi[\Omega_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})]$  associado à uma perturbação no domínio  $\Omega$ , de forma análoga a primeira derivada em uma expansão em série de Taylor.

A definição clássica apresentada por Sokolowski e Źochowski (1999a) utiliza a medida da perturbação como função  $f(\epsilon)$ . Como naquele caso o domínio bidimensional foi perturbado com um furo circular, a função  $f(\epsilon)$  é dada por  $f(\epsilon) = |B_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})| = \pi\epsilon^2$ . No mesmo ano, Sokolowski e Źochowski (1999b) desenvolveram o cálculo da derivada topológica

para a equação de Laplace tridimensional no contexto de problemas inversos.

Uma das grandes dificuldades em avaliar a expressão (1.4) reside no fato que os termos no numerador apresentam topologias distintas. Isto é, não é possível construir um mapeamento contínuo que transforma o domínio  $\Omega$  em  $\Omega_\epsilon$ , e por isto a sua avaliação não é direta.

Apesar de alguns pesquisadores relacionarem a derivada topológica com conceitos de análise de sensibilidade a mudança de forma (CÉA et al., 2000; SOKOLOWSKI; ŻOCHOWSKI, 1999a), somente em 2003 que uma justificativa matemática para esta correlação foi apresentada (NOVOTNY et al., 2003). Desta forma, o cálculo da derivada topológica pode ser executado utilizando todo o ferramental de análise de sensibilidade a mudança de forma, que se encontra fundamentado na literatura (SOKOLOWSKI; ZOLÉSIO, 1992). Assim, Novotny et al. (2003) introduziram uma definição alternativa para a derivada topológica:

$$D_T\psi(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\epsilon)} \frac{d}{d\epsilon} \psi[\Omega_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})]. \quad (1.5)$$

Nesta expressão, partindo de um domínio perturbado  $\Omega_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})$ , calcula-se a sensibilidade do funcional devido a uma expansão uniforme da perturbação quando a medida desta tende a ser nula (Fig. 1.2). Portanto a análise de sensibilidade à mudança de forma pode ser vista como um passo intermediário no cálculo da derivada topológica, que é finalmente obtida avaliando-se o limite  $\epsilon \rightarrow 0$  em (1.2). Cabe mencionar que a passagem do limite no cálculo da derivada topológica requer uma análise assintótica do funcional em relação ao parâmetro  $\epsilon$ . Logo, a definição alternativa resulta em um método construtivo para o cálculo da derivada topológica, e as dificuldades relacionadas a diferença de topologia entre os domínios não estão mais presentes.

O conceito de derivada topológica pode ser estendido se a perturbação por meio de um furo infinitesimal for substituída por uma inclusão com propriedades diferentes a da matriz e com geometria adequada ao caso em estudo.

A partir desta ideia, o número de trabalhos relacionadas a análise de sensibilidade topológica vem crescendo intensamente com aplicações nas mais diferentes áreas, como por exemplo em acústica no contexto de problemas inversos (BONNET, 2006; GUZINA; BONNET, 2006; AMSTUTZ; DOMINGUEZ, 2008), problemas de elasticidade linear tridimensional (NOVOTNY et al., 2007), desenvolvimento de novos algoritmos (AMSTUTZ; ANDRÄ, 2006), análise de inclusões em elasticidade

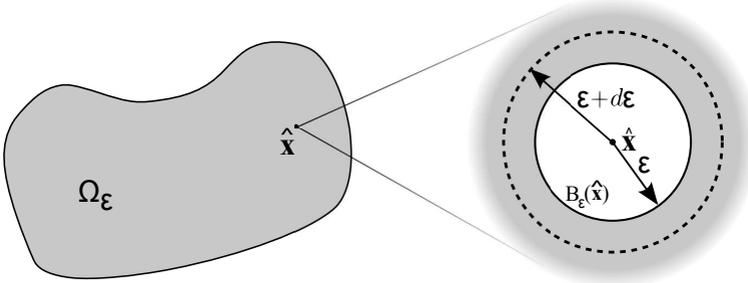


Figura 1.2: Representação alternativa para derivada topológica.

bidimensional (GIUSTI; NOVOTNY; PADRA, 2008), otimização topológica com restrições de tensão (AMSTUTZ; NOVOTNY, 2010), modelos constitutivos multiescala (GIUSTI, 2009), processamento de imagens (LARRABIDE, 2007), e modelos de dano (ALLAIRE; JOUVE; VAN GOETHEM, 2011).

## 1.1 MOTIVAÇÃO

A caracterização de falha em componentes mecânicos e o estudo de seus motivos estão presentes na engenharia desde a sua concepção. O desenvolvimento de novos produtos ou a manutenção de sistemas depende do entendimento de tais conceitos. O estudo de trincas e regiões danificadas e de como elas afetam o comportamento geral de um componente, ou ainda, a simulação e controle de sua propagação têm suscitado grande interesse na engenharia e na matemática aplicada devido ao seu impacto econômico.

Em um trabalho recente, Allaire, Jouve e Van Goethem (2011) utilizaram o método *level set* em conjunto com o modelo de dano de Francfort-Marigo para estudar a propagação de dano. Como será visto no Capítulo 3, o citado modelo (FRANCFORT; MARIGO, 1993) é utilizado como critério de propagação de falha para materiais frágeis em regime quasi-estático. O funcionamento do método proposto depende da presença de uma região danificada inicial, especificada no começo do algoritmo. Assim, é possível expandir esta região utilizando informações provenientes da análise de sensibilidade à mudança de forma. Entretanto, caso o domínio não esteja danificado previamente, os autores utilizam a análise de sensibilidade topológica como meio de introduzir um dano inicial no problema. Em seguida, ignoram as informações fornecidas pela derivada topológica e retomam a sua proposta original

utilizando o método *level set*.

Partindo desta observação, o presente trabalho pretende verificar a tese que admite ser possível formular um algoritmo mais simples do que o utilizado pelos citados autores, que faça uso exclusivo das informações fornecidas pela análise de sensibilidade topológica para o tratamento da nucleação e propagação de regiões danificadas.

## 1.2 OBJETIVO

O objetivo principal do presente trabalho é formular e testar numericamente um algoritmo que utilize a informação da análise de sensibilidade topológica do modelo de Francfort-Marigo para estimar o processo de propagação de trincas em materiais frágeis. Como objetivos secundários citam-se

- Estudo da técnica de análise de sensibilidade topológica em problemas de elasticidade,
- Verificar este cálculo para o funcional proposto por Francfort e Marigo (1993),
- Avaliar diversas heurísticas numéricas para o uso eficiente da informação da derivada topológica no processo de propagação do dano.

## 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O conteúdo deste trabalho é organizado como segue. O presente capítulo apresenta a motivação e objetivo do trabalho. No Capítulo 2 é feita uma breve revisão da formulação do problema de elasticidade linear em domínios bidimensionais com o objetivo de introduzir a notação e os operadores necessários. Em seguida, o problema perturbado através de uma inclusão é apresentado juntamente com as correspondentes formas forte e fraca. Como procedimento intermediário no cálculo da derivada topológica, a análise assintótica é executada de forma detalhada. Desta maneira, o cálculo da derivada topológica para o funcional da energia potencial total pode ser apresentado.

O modelo de dano de Francfort-Marigo é apresentado no Capítulo 3 juntamente com uma discussão relacionada a carga crítica e aspectos teóricos do mesmo. Na sequência a análise de sensibilidade topológica do funcional é feita e verificada numericamente.

O Capítulo 4 é destinado a apresentar um algoritmo que utilize as informações fornecidas pela análise de sensibilidade topológica e discutir os aspectos computacionais relacionados à este.

No Capítulo 5 são feitos alguns testes numéricos em problemas retirados do artigo de referência para avaliar o desempenho global do algoritmo proposto. Em seguida as considerações finais são apresentadas e feitas algumas sugestões para aprimorar o trabalho decorrentes dos resultados obtidos.

## 2 DERIVADA TOPOLÓGICA EM ELASTICIDADE LINEAR

Neste capítulo é feita uma breve revisão dos conceitos da mecânica do contínuo aplicados a elasticidade linear com o objetivo de introduzir a notação e definição de alguns operadores que serão fundamentais no desenvolvimento deste trabalho. Em seguida todas as etapas de cálculo para a derivada topológica do funcional da energia potencial total são apresentadas.

### 2.1 MODELO MECÂNICO

Considera-se um meio elástico  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  de contorno regular  $\Gamma$ , livre de forças de corpo, sujeito a forças de superfície  $\bar{\mathbf{q}}$  em  $\Gamma_N$ , e a um conjunto prescrito de deslocamentos  $\bar{\mathbf{u}}$  em  $\Gamma_D$ , com a condição de  $\Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$  (ver Figura 2.1). É suposto que sejam válidas as hipóteses de estado plano de tensão. De posse das condições mencionadas objetiva-se determinar o campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$  que satisfaz o equilíbrio do sistema, em conjunto com campos tensoriais relacionados à este. Uma das grandezas de interesse corresponde ao tensor tensão de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ , que efetua a transformação de um versor associado à uma direção  $\mathbf{n}$  no correspondente vetor tração atuante, i.e.,  $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{t}$ .

O princípio da conservação da quantidade de movimento linear origina a relação de divergência nula para o tensor tensão de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$

$$\operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})] = \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

enquanto a conservação da quantidade de movimento angular, na ausência de binários distribuídos, resulta na condição de simetria do tensor tensão  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$  (MALVERN, 1969).

Uma das hipóteses adotadas na elasticidade linear é a de que o gradiente do campo de deslocamentos  $\nabla \mathbf{u}$  é pequeno. Assim, utiliza-se como medida de deformação a parcela simétrica do gradiente de deslocamentos

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \nabla^s \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (2.2)$$

A segunda hipótese adota o uso de uma relação constitutiva linear conhecida como Lei de Hooke Generalizada

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbb{C} \nabla^s \mathbf{u}, \quad (2.3)$$

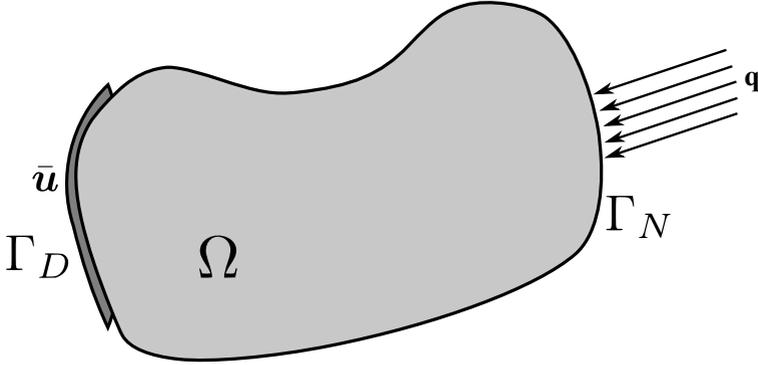


Figura 2.1: Representação do modelo mecânico.

onde o tensor isotrópico de quarta ordem  $\mathbb{C}$  é expresso como

$$\mathbb{C} = 2\mu\mathbb{I} + \zeta\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (2.4)$$

e as constantes  $\mu$ ,  $\zeta$  são propriedades materiais denominadas coeficientes de Lamé (MALVERN, 1969).

A forma forte para o problema de elastostática linear pode ser encontrada em diversos livros de mecânica do contínuo (ver por exemplo (GURTIN, 1981)), e consiste em resolver o conjunto de equações apresentado acima:

$$\begin{cases} \text{Encontre } \mathbf{u} \in C^2(\Omega) & \text{tal que} \\ \text{div}[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})] = \mathbf{0} & \text{em } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbb{C}\nabla^s\mathbf{u} & \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} & \text{em } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} = \bar{\mathbf{q}} & \text{em } \Gamma_N \end{cases} \quad (2.5)$$

A forma fraca pode ser obtida diretamente da formulação forte, através do Método dos Resíduos Ponderados (MWR) ou ainda através de métodos variacionais (REDDY, 1984). Neste contexto, o princípio da mínima energia potencial total torna-se conveniente. Este estabelece que o campo de deslocamentos que satisfaz o equilíbrio corresponde ao minimizador do funcional da energia potencial total

$$\mathcal{J}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \cdot \nabla^s \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{v} d\Gamma, \quad (2.6)$$

isto é,

$$\mathbf{u} = \arg \min_{\mathbf{v} \in K} \mathcal{J}(\mathbf{v}),$$

onde  $K$  corresponde ao conjunto dos deslocamentos cinematicamente admissíveis, i.e.,  $K = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) \mid \mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}} \text{ em } \Gamma_D\}$ . Buscando a condição de estacionariedade do funcional, a derivada direcional em uma direção arbitrária  $\boldsymbol{\eta}$  deve ser nula

$$D\mathcal{J}(\mathbf{u})[\boldsymbol{\eta}] = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in V, \quad (2.7)$$

onde  $V$  corresponde ao conjunto das variações admissíveis,  $V = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) \mid \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_D\}$ .

Desenvolvendo a expressão acima, chega-se em

$$\int_{\Omega} \mathbb{C} \nabla^s \mathbf{u} \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} d\Omega = \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in V. \quad (2.8)$$

Desta forma, pode-se definir a forma fraca do problema de elasticidade linear como:

Encontrar  $\mathbf{u} \in K$  tal que

$$\int_{\Omega} \mathbb{C} \nabla^s \mathbf{u} \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} d\Omega = \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in V. \quad (2.9)$$

Assim, as condições de regularidade da solução  $\mathbf{u}$  tornam-se mais fracas, o que permite o tratamento de uma classe mais ampla de problemas no que se refere, por exemplo, a tipos de carregamentos. Além de possibilitar o uso direto de ferramentas de análise funcional para verificar a existência e a unicidade de solução.

A equivalência entre as formas forte e fraca não é aparente. Para demonstrá-la considere um caso em que o grau de regularidade da solução é tal que a formulação forte seja satisfeita. Desta maneira, integre-se por partes o primeiro membro da expressão (2.9) resultando em

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma - \int_{\Omega} \operatorname{div}[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})] \cdot \boldsymbol{\eta} d\Omega = \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in V \quad (2.10)$$

Lembrando que  $\boldsymbol{\eta} \in V$ , e portanto  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$  em  $\Gamma_D$ ,

$$\int_{\Gamma_N} [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} - \bar{\mathbf{q}}] \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma + \int_{\Omega} \operatorname{div}[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})] \cdot \boldsymbol{\eta} d\Omega = 0 \quad \boldsymbol{\eta} \in V \quad (2.11)$$

Como  $\boldsymbol{\eta}$  é arbitrário, o teorema fundamental do cálculo variacional fornece (REDDY, 1984)

$$\begin{cases} \operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})] = \mathbf{0} & \text{em } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} - \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0} & \text{em } \Gamma_N \end{cases}$$

enquanto a condição de Dirichlet é obtida diretamente da definição do conjunto  $K$ . Assim, verifica-se a equivalência entre as formulações.

A forma fraca do problema de elasticidade linear pode ser convenientemente expressa através de operadores lineares (CHEN, 2005). Definindo o operador bilinear  $a(\cdot, \cdot)$ , simétrico, contínuo e coercivo

$$a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\Omega} \mathbb{C} \nabla^s \mathbf{u} \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} d\Omega, \quad (2.12)$$

e o operador linear  $l(\cdot)$

$$l(\boldsymbol{\eta}) = \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma, \quad (2.13)$$

a expressão (2.8) pode ser escrita de forma abstrata como

$$a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = l(\boldsymbol{\eta}) \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in V. \quad (2.14)$$

A formulação fraca e a sua derivação a partir do princípio da mínima energia potencial tornam-se atrativas para o desenvolvimento deste trabalho, especialmente quando for necessário trabalhar com o aparecimento de inclusões no domínio de referência.

## 2.2 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE TOPOLÓGICA PARA O FUNCIONAL DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL

O problema perturbado consiste em introduzir uma inclusão com propriedades materiais distintas em relação ao material base ao seu redor. Geometricamente, esta inclusão é definida por uma bola de raio  $\epsilon$ , centrada em uma posição arbitrária  $\hat{\mathbf{x}}$  interior ao domínio, simbolicamente denotada por  $B_{\epsilon}(\hat{\mathbf{x}})$ . Diferentemente da relação (1.1) que define um domínio perturbado  $\Omega_{\epsilon}$  topologicamente distinto do domínio de referência  $\Omega$ , torna-se redundante utilizar a simbologia  $\Omega_{\epsilon}$  no caso de uma inclusão, uma vez que  $\Omega_{\epsilon} = \Omega$ . Entretanto o subíndice  $\epsilon$  é mantido como forma de diferenciar os problemas associados e de facilitar a leitura das equações.

A variação das propriedades do material não é suave e passa a ser representada por um parâmetro  $\gamma$  denominado contraste. Assim, o tensor constitutivo ao longo do domínio é dado por

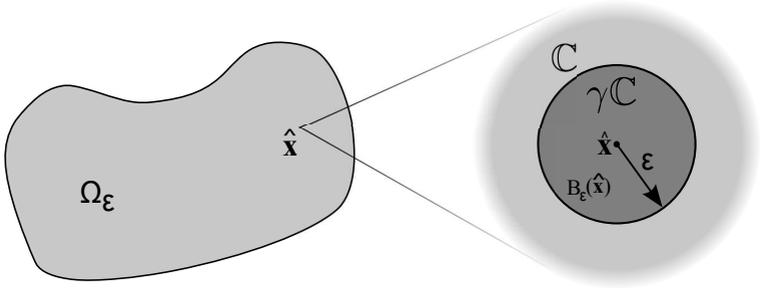


Figura 2.2: Inclusão no domínio perturbado  $\Omega_\epsilon$ .

$$\mathbb{C}_\gamma(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega_\epsilon \setminus \overline{B_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})} \\ \gamma\mathbb{C} & \text{se } \mathbf{x} \in B_\epsilon(\hat{\mathbf{x}}) \end{cases}, \quad (2.15)$$

onde  $\mathbb{C}$  corresponde ao tensor constitutivo do material de base (ver Figura 2.2).

De forma análoga à seção 2.1, onde foi apresentada a formulação do problema de elasticidade infinitesimal, as formas forte e fraca associadas ao problema perturbado podem ser obtidas através do Princípio da Mínima Energia Potencial, i.e, o campo de deslocamento  $\mathbf{u}_\epsilon$  que satisfaz o equilíbrio é aquele que minimiza o funcional da energia potencial

$$\mathbf{u}_\epsilon = \arg \min_{\mathbf{v} \in K} \mathcal{J}_\epsilon(\mathbf{v}), \quad (2.16)$$

onde

$$\mathcal{J}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\epsilon} \boldsymbol{\sigma}_\gamma(\mathbf{u}_\epsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{u}_\epsilon d\Omega - \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{u}_\epsilon d\Gamma, \quad (2.17)$$

e

$$\boldsymbol{\sigma}_\gamma(\mathbf{u}_\epsilon) = \mathbb{C}_\gamma \nabla^s \mathbf{u}_\epsilon. \quad (2.18)$$

Buscando a sua estacionariedade, a derivada direcional do funcional (2.17) em uma direção  $\boldsymbol{\eta}$  arbitrária deve ser nula

$$D\mathcal{J}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon)[\boldsymbol{\eta}] = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in V, \quad (2.19)$$

resultando em

$$\int_{\Omega_\epsilon} \boldsymbol{\sigma}_\gamma(\mathbf{u}_\epsilon) \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} d\Omega = \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in V. \quad (2.20)$$

Pode-se definir um novo operador bilinear  $a_\epsilon(\cdot, \cdot)$  associado ao problema perturbado

$$a_\epsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_\epsilon} \mathbb{C}_\gamma \nabla^s \mathbf{u} \cdot \nabla^s \mathbf{v} d\Omega, \quad (2.21)$$

e portanto a forma fraca do problema perturbado pode ser anunciada de forma compacta como

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \mathbf{u}_\epsilon \in K \quad \text{tal que} \\ a_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon, \boldsymbol{\eta}) = l(\boldsymbol{\eta}) \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in V \end{array} \right. \quad (2.22)$$

A forma forte do problema perturbado é obtida através de algumas manipulações algébricas sobre a formulação fraca. Utilizando a relação  $\text{div}(\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\eta}) = \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \boldsymbol{\eta}$  em (2.20), e lembrando que o tensor tensão é simétrico

$$\int_{\Omega_\epsilon} \text{div}[\boldsymbol{\sigma}_\gamma(\mathbf{u}_\epsilon) \boldsymbol{\eta}] d\Omega - \int_{\Omega_\epsilon} \text{div}[\boldsymbol{\sigma}_\gamma(\mathbf{u}_\epsilon)] \cdot \boldsymbol{\eta} d\Omega = \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in V. \quad (2.23)$$

Distinguindo o domínio  $\Omega_\epsilon$  da bola  $B_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})$  na primeira integral,

$$\int_{\Omega_\epsilon \setminus B_\epsilon} \text{div}[\boldsymbol{\sigma}_\gamma(\mathbf{u}_\epsilon) \boldsymbol{\eta}] d\Omega + \int_{B_\epsilon} \text{div}[\boldsymbol{\sigma}_\gamma(\mathbf{u}_\epsilon) \boldsymbol{\eta}] d\Omega - \int_{\Omega_\epsilon} \text{div}[\boldsymbol{\sigma}_\gamma(\mathbf{u}_\epsilon)] \cdot \boldsymbol{\eta} d\Omega = \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in V, \quad (2.24)$$

e utilizando o teorema da divergência, obtém-se

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\sigma}_\gamma(\mathbf{u}_\epsilon) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma + \int_{\partial B_\epsilon} \boldsymbol{\sigma}_\gamma(\mathbf{u}_\epsilon) \mathbf{n}_{in} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma \\ & - \int_{\Omega_\epsilon \setminus B_\epsilon} \text{div}[\boldsymbol{\sigma}_\gamma(\mathbf{u}_\epsilon)] \cdot \boldsymbol{\eta} d\Omega + \int_{\partial B_\epsilon} \boldsymbol{\sigma}_\gamma(\mathbf{u}_\epsilon) \mathbf{n}_{out} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma \\ & - \int_{B_\epsilon} \text{div}[\boldsymbol{\sigma}_\gamma(\mathbf{u}_\epsilon)] \cdot \boldsymbol{\eta} d\Omega = \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in V, \quad (2.25) \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_N} [\boldsymbol{\sigma}_\gamma(\mathbf{u}_\epsilon) \mathbf{n} - \bar{\mathbf{q}}] \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma + \int_{\partial B_\epsilon} [\boldsymbol{\sigma}_\gamma(\mathbf{u}_\epsilon) \mathbf{n}_{in} + \boldsymbol{\sigma}_\gamma(\mathbf{u}_\epsilon) \mathbf{n}_{out}] \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma - \int_{\Omega_\epsilon} \operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma}_\gamma(\mathbf{u}_\epsilon)] \cdot \boldsymbol{\eta} d\Omega = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in V, \quad (2.26)$$

onde  $\mathbf{n}_{in}$  e  $\mathbf{n}_{out}$  representam os versores normais a superfície  $\partial B_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})$ , e que apontam para dentro e para fora de  $B_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})$ , respectivamente.

Como  $\boldsymbol{\eta}$  é arbitrário, o teorema fundamental do cálculo das variações pode ser utilizado (REDDY, 1984) e o problema forte associado ao problema perturbado pode ser anunciado:

Encontrar  $\mathbf{u}_\epsilon \in C^2(\Omega_\epsilon)$  tal que

$$\operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma}_\gamma(\mathbf{u}_\epsilon)] = \mathbf{0} \quad \text{em } \Omega_\epsilon \quad (2.27)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\gamma(\mathbf{u}_\epsilon) \mathbf{n} = \bar{\mathbf{q}} \quad \text{em } \Gamma_N \quad (2.28)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\gamma(\mathbf{u}_\epsilon) \mathbf{n}_{in} + \boldsymbol{\sigma}_\gamma(\mathbf{u}_\epsilon) \mathbf{n}_{out} = \mathbf{0} \quad \text{em } \partial B_\epsilon \quad (2.29)$$

$$\mathbf{u}_\epsilon^{in} - \mathbf{u}_\epsilon^{out} = \mathbf{0} \quad \text{em } \partial B_\epsilon \quad (2.30)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{em } \Gamma_D \quad (2.31)$$

Verifica-se o aparecimento da condição de transmissão (Eq. 2.29) e de continuidade de  $\mathbf{u}_\epsilon$  (Eq. 2.30) sobre a fronteira da inclusão  $\partial B_\epsilon$ . A forma forte para o problema perturbado é essencial, uma vez que esta descrição irá auxiliar na construção da expansão da solução perturbada na análise assintótica.

### 2.2.1 Efeito de uma inclusão

O funcional de energia associado ao domínio não perturbado  $\Omega$  pode ser representado como

$$\psi(\Omega) := \mathcal{J}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - l(\mathbf{u}). \quad (2.32)$$

Após a introdução da inclusão na matriz, o sistema entra em equilíbrio novamente e adquire uma nova energia potencial

$$\psi[\Omega_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})] := \mathcal{J}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) = \frac{1}{2} a_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{u}_\epsilon) - l(\mathbf{u}_\epsilon), \quad (2.33)$$

com os mesmos operadores  $a(\cdot, \cdot)$ ,  $a_\epsilon(\cdot, \cdot)$ , e  $l(\cdot)$  definidos anteriormente.

A variação de energia potencial associada a esta perturbação pode ser obtida através das relações (2.32), (2.33)

$$\psi [\Omega_\epsilon (\hat{\boldsymbol{x}})] - \psi (\Omega) = \frac{1}{2} a_\epsilon (\mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{u}_\epsilon) - l(\mathbf{u}_\epsilon) - \frac{1}{2} a (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + l(\mathbf{u}) . \quad (2.34)$$

Como os dois campos ( $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{u}_\epsilon$ ) satisfazem o equilíbrio, cada qual em sua configuração (original e perturbada), tem-se

$$\mathbf{u}_\epsilon \in K : \quad a_\epsilon (\mathbf{u}_\epsilon, \boldsymbol{\eta}) = l(\boldsymbol{\eta}) \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in V , \quad (2.35)$$

$$\mathbf{u} \in K : \quad a (\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = l(\boldsymbol{\eta}) \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in V . \quad (2.36)$$

Tomando uma variação particular  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{u}$  nas equações (2.35 e 2.36), multiplicando pelo fator  $\frac{1}{2}$  e adicionando as mesmas na relação (2.34), obtêm-se

$$\begin{aligned} \psi [\Omega_\epsilon (\hat{\boldsymbol{x}})] - \psi (\Omega) &= \frac{1}{2} a_\epsilon (\mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{u}_\epsilon) - l(\mathbf{u}_\epsilon) - \frac{1}{2} a (\mathbf{u}, \mathbf{u}) \\ &+ l(\mathbf{u}) - \frac{1}{2} a_\epsilon (\mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{u}) + \frac{1}{2} l(\mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{u}) \\ &- \frac{1}{2} a (\mathbf{u}, \mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{u}) + \frac{1}{2} l(\mathbf{u}_\epsilon - \mathbf{u}) , \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\psi [\Omega_\epsilon (\hat{\boldsymbol{x}})] - \psi (\Omega) = \frac{1}{2} a_\epsilon (\mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{u}) - \frac{1}{2} a (\mathbf{u}, \mathbf{u}_\epsilon) . \quad (2.38)$$

O operador bilinear perturbado  $a_\epsilon (\cdot, \cdot)$  pode ser reescrito separando as contribuições individuais da inclusão  $B_\epsilon$  e do restante do domínio  $\Omega_\epsilon \setminus B_\epsilon$

$$a_\epsilon (\cdot, \cdot) = \int_{\Omega_\epsilon} \mathbb{C}_\gamma \nabla^s (\cdot) \cdot \nabla^s (\cdot) d\Omega , \quad (2.39)$$

$$a_\epsilon (\cdot, \cdot) = \int_{\Omega_\epsilon \setminus B_\epsilon} \mathbb{C} \nabla^s (\cdot) \cdot \nabla^s (\cdot) d\Omega + \int_{B_\epsilon} \gamma \mathbb{C} \nabla^s (\cdot) \cdot \nabla^s (\cdot) d\Omega , \quad (2.40)$$

e uma manipulação algébrica pode ser feita através da operação de soma e subtração do termo  $\int_{B_\epsilon} \mathbb{C} \nabla^s (\cdot) \cdot \nabla^s (\cdot) d\Omega$

$$a_\epsilon(\cdot, \cdot) = \int_{\Omega_\epsilon \setminus B_\epsilon} \mathbb{C} \nabla^s(\cdot) \cdot \nabla^s(\cdot) d\Omega + \int_{B_\epsilon} \gamma \mathbb{C} \nabla^s(\cdot) \cdot \nabla^s(\cdot) d\Omega \\ \pm \int_{B_\epsilon} \mathbb{C} \nabla^s(\cdot) \cdot \nabla^s(\cdot) d\Omega, \quad (2.41)$$

$$a_\epsilon(\cdot, \cdot) = \int_{\Omega} \mathbb{C} \nabla^s(\cdot) \cdot \nabla^s(\cdot) d\Omega + \int_{B_\epsilon} (\gamma - 1) \mathbb{C} \nabla^s(\cdot) \cdot \nabla^s(\cdot) d\Omega, \quad (2.42)$$

$$a_\epsilon(\cdot, \cdot) = a(\cdot, \cdot) + \int_{B_\epsilon} (\gamma - 1) \mathbb{C} \nabla^s(\cdot) \cdot \nabla^s(\cdot) d\Omega. \quad (2.43)$$

Portanto a relação (2.38) torna-se

$$\psi[\Omega_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})] - \psi(\Omega) = \frac{\gamma - 1}{2} \int_{B_\epsilon} \mathbb{C} \nabla^s \mathbf{u}_\epsilon \cdot \nabla^s \mathbf{u} d\Omega, \quad (2.44)$$

onde foi utilizada a simetria do operador bilinear.

Através do resultado acima, verifica-se que a variação da energia potencial é um efeito local, no sentido que ela depende apenas de uma integral ao longo da inclusão. A dependência explícita com a solução do problema perturbado  $\mathbf{u}_\epsilon$ , torna o cálculo da expressão acima impraticável se o objetivo do problema é conseguir uma estimativa da variação da energia. Desta forma, ferramentas da análise assintótica devem ser utilizadas com o objetivo de obter uma expansão da solução perturbada em termos que envolvam apenas a solução não perturbada do problema.

### 2.2.2 Análise assintótica

A análise assintótica da solução perturbada  $\mathbf{u}_\epsilon$  é realizada através da proposta de uma construção que envolva a solução não perturbada. Desta forma, propõe-se que o campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$  seja corrigido através de dois novos campos

$$\mathbf{u}_\epsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\omega}_\epsilon(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{u}}_\epsilon(\mathbf{x}). \quad (2.45)$$

Através da formulação forte do problema perturbado (Eqs. 2.27-2.33) é possível determinar as condições necessárias que os novos campos propostos devem satisfazer. Desta forma, aplicando o operador tensão e tomando o divergente em (2.45), obtém-se

$$\operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma}_\gamma (\mathbf{u}_\epsilon)] = \operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma}_\gamma (\mathbf{u})] + \operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma}_\gamma (\boldsymbol{\omega}_\epsilon)] + \operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma}_\gamma (\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon)] . \quad (2.46)$$

Como o termo esquerdo à igualdade representa o equilíbrio em  $\Omega_\epsilon$ , este é nulo. Da mesma forma,

$$\operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma}_\gamma (\mathbf{u})] = \begin{cases} \operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma} (\mathbf{u})] = \mathbf{0} & \text{em } \Omega_\epsilon \setminus \overline{B_\epsilon (\hat{\mathbf{x}})} \\ \gamma \operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma} (\mathbf{u})] = \mathbf{0} & \text{em } B_\epsilon (\hat{\mathbf{x}}) \end{cases} . \quad (2.47)$$

Logo,

$$\operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma}_\gamma (\boldsymbol{\omega}_\epsilon)] + \operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma}_\gamma (\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon)] = \mathbf{0} . \quad (2.48)$$

Portanto, os divergentes associados aos campos  $\boldsymbol{\omega}_\epsilon$  e  $\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon$  devem ser opostos. Para tratar a condição de Neumann (2.28) na fronteira  $\Gamma_N$ , aplica-se a projeção normal do operador tensão na relação (2.45)

$$\boldsymbol{\sigma}_\gamma (\mathbf{u}_\epsilon) \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_\gamma (\mathbf{u}) \mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma}_\gamma (\boldsymbol{\omega}_\epsilon) \mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma}_\gamma (\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon) \mathbf{n} \quad \text{em } \Gamma_N , \quad (2.49)$$

$$\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\sigma}_\gamma (\boldsymbol{\omega}_\epsilon) \mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma}_\gamma (\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon) \mathbf{n} \quad \text{em } \Gamma_N , \quad (2.50)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\gamma (\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon) \mathbf{n} = -\boldsymbol{\sigma}_\gamma (\boldsymbol{\omega}_\epsilon) \mathbf{n} \quad \text{em } \Gamma_N . \quad (2.51)$$

Logo, a projeção normal do tensor tensão para o campo  $\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon$  deve compensar a discrepância introduzida pelo campo  $\boldsymbol{\omega}_\epsilon$  na fronteira de Neumann.

Para verificar a diferença que ocorre entre as tensões na fronteira da inclusão (2.29), verifica-se que a normal que aponta para fora da bola ( $\mathbf{n}_{out}$ ) é oposta à que aponta para dentro ( $\mathbf{n}_{in}$ ) e por isso a relação (2.29), pode ser escrita de forma mais compacta através do operador salto definido como

$$\llbracket \cdot \rrbracket = (\cdot)_{\Omega_\epsilon \setminus B_\epsilon} - (\cdot)_{B_\epsilon} . \quad (2.52)$$

Assim,

$$\boldsymbol{\sigma}_\gamma (\mathbf{u}_\epsilon) \mathbf{n}_{in} + \boldsymbol{\sigma}_\gamma (\mathbf{u}_\epsilon) \mathbf{n}_{out} = \llbracket \boldsymbol{\sigma}_\gamma (\mathbf{u}_\epsilon) \rrbracket \mathbf{n}_{in} = \mathbf{0} . \quad (2.53)$$

De volta à proposta de expansão (2.45), após aplicar o operador tensão obtém-se

$$\boldsymbol{\sigma}_\gamma (\mathbf{u}_\epsilon) = \boldsymbol{\sigma}_\gamma (\mathbf{u}) + \boldsymbol{\sigma}_\gamma (\boldsymbol{\omega}_\epsilon) + \boldsymbol{\sigma}_\gamma (\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon) . \quad (2.54)$$

Projetando a relação acima na normal  $\mathbf{n}_{in}$  e tomando o operador salto definido anteriormente

$$\llbracket \sigma_\gamma(\mathbf{u}_\epsilon) \rrbracket \mathbf{n}_{in} = \llbracket \sigma_\gamma(\mathbf{u}) \rrbracket \mathbf{n}_{in} + \llbracket \sigma_\gamma(\boldsymbol{\omega}_\epsilon) \rrbracket \mathbf{n}_{in} + \llbracket \sigma_\gamma(\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon) \rrbracket \mathbf{n}_{in}. \quad (2.55)$$

Da condição de contorno (2.29), segue que o termo ao lado esquerdo da relação acima deve ser nulo. Após explicitar o salto da solução  $\mathbf{u}$  tem-se

$$\mathbf{0} = (1 - \gamma) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}_{in} + \llbracket \sigma_\gamma(\boldsymbol{\omega}_\epsilon) \rrbracket \mathbf{n}_{in} + \llbracket \sigma_\gamma(\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon) \rrbracket \mathbf{n}_{in}. \quad (2.56)$$

Pode-se expandir  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$  em série de Taylor em torno do centro da inclusão  $\hat{\mathbf{x}}$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}})] + \nabla \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}(\mathbf{y})](\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}), \quad (2.57)$$

onde  $\mathbf{y}$  é um ponto intermediário à  $\mathbf{x}$  e  $\hat{\mathbf{x}}$ . Na expressão acima é evidente o abuso de notação, na forma  $\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}})]$ , com a intenção de expressar  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})(\hat{\mathbf{x}})$ , entretanto esta será mantida pois torna as expressões mais legíveis.

Como a condição de salto é operada sobre  $\partial B_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})$ , tem-se  $(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = \epsilon \mathbf{n}_{out} = -\epsilon \mathbf{n}_{in}$ . Portanto a condição de salto na fronteira da inclusão pode ser expressa em sua forma final

$$(1 - \gamma) \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}})] \mathbf{n}_{in} - \epsilon (1 - \gamma) \{ \nabla \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}(\mathbf{y})] \mathbf{n}_{in} \} \mathbf{n}_{in} + \llbracket \sigma_\gamma(\boldsymbol{\omega}_\epsilon) \rrbracket \mathbf{n}_{in} + \llbracket \sigma_\gamma(\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon) \rrbracket \mathbf{n}_{in} = \mathbf{0}. \quad (2.58)$$

As condições de salto  $\llbracket \mathbf{u}_\epsilon \rrbracket$  sobre  $\partial B_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})$  e de contorno  $\mathbf{u}_\epsilon = \bar{\mathbf{u}}$  em  $\Gamma_D$  são tratadas diretamente. Partindo de (2.45) e tomando o salto de  $\mathbf{u}_\epsilon$

$$\llbracket \mathbf{u}_\epsilon \rrbracket = \llbracket \mathbf{u} \rrbracket + \llbracket \boldsymbol{\omega}_\epsilon \rrbracket + \llbracket \tilde{\mathbf{u}}_\epsilon \rrbracket. \quad (2.59)$$

Como a solução  $\mathbf{u}$  é contínua em  $\partial B_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})$ ,  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = 0$  e portanto

$$\llbracket \tilde{\mathbf{u}} \rrbracket = -\llbracket \boldsymbol{\omega}_\epsilon \rrbracket \quad \text{em } \partial B_\epsilon. \quad (2.60)$$

De forma análoga para  $\Gamma_D$

$$\mathbf{u}_\epsilon = \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}_\epsilon + \tilde{\mathbf{u}}_\epsilon \quad em \Gamma_D, \quad (2.61)$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\omega}_\epsilon + \tilde{\mathbf{u}}_\epsilon \quad em \Gamma_D, \quad (2.62)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon = -\boldsymbol{\omega}_\epsilon \quad em \Gamma_D, \quad (2.63)$$

ou seja, os campos e os seus saltos devem ser opostos em  $\partial B_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})$  e  $\Gamma_D$ .

Resumidamente, os campos  $\boldsymbol{\omega}_\epsilon$  e  $\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon$  devem ser tais que

$$div[\boldsymbol{\sigma}_\gamma(\boldsymbol{\omega}_\epsilon)] + div[\boldsymbol{\sigma}_\gamma(\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon)] = \mathbf{0} \quad em \Omega_\epsilon, \quad (2.64)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\gamma(\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon) \mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma}_\gamma(\boldsymbol{\omega}_\epsilon) \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad em \Gamma_N, \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} & (1 - \gamma) \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}})] \mathbf{n}_{in} \\ -\epsilon(1 - \gamma) \{ \nabla \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}(\mathbf{y})] \mathbf{n}_{in} \} \mathbf{n}_{in} \\ & + \llbracket \boldsymbol{\sigma}_\gamma(\boldsymbol{\omega}_\epsilon) \rrbracket \mathbf{n}_{in} + \llbracket \boldsymbol{\sigma}_\gamma(\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon) \rrbracket \mathbf{n}_{in} = \mathbf{0} \quad em \partial B_\epsilon, \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\llbracket \tilde{\mathbf{u}}_\epsilon \rrbracket + \llbracket \boldsymbol{\omega}_\epsilon \rrbracket = \mathbf{0} \quad em \partial B_\epsilon, \quad (2.67)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon + \boldsymbol{\omega}_\epsilon = \mathbf{0} \quad em \Gamma_D. \quad (2.68)$$

Assim, surgem várias possibilidades de propostas para os campos  $\boldsymbol{\omega}_\epsilon$  e  $\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon$ , desde que as relações (2.64-2.68) sejam satisfeitas. A seguir são feitas algumas considerações específicas sobre o campo  $\boldsymbol{\omega}_\epsilon$ , com o objetivo de facilitar a construção assintótica, e que devem ser posteriormente compensadas pelo campo  $\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon$ .

Portanto, pode-se atribuir individualmente em (2.64) que o divergente associado a  $\boldsymbol{\omega}_\epsilon$  seja nulo, i.e.  $div[\boldsymbol{\sigma}_\gamma(\boldsymbol{\omega}_\epsilon)] = \mathbf{0}$ , e solicitar que  $\boldsymbol{\sigma}_\gamma(\boldsymbol{\omega}_\epsilon)$  tenha um decaimento assintótico a zero quanto  $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ . Pode-se ainda escolher que o primeiro termo em (2.66) compense o salto de  $\boldsymbol{\omega}_\epsilon$ , i.e.,  $\llbracket \boldsymbol{\sigma}_\gamma(\boldsymbol{\omega}_\epsilon) \rrbracket \mathbf{n}_{in} = -(1 - \gamma) \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}})] \mathbf{n}_{in}$ . Assim, tem-se o seguinte problema associado à  $\boldsymbol{\omega}_\epsilon$ :

$\mathcal{P}1$  - Encontrar  $\boldsymbol{\sigma}_\gamma(\boldsymbol{\omega}_\epsilon)$  tal que

$$div[\boldsymbol{\sigma}_\gamma(\boldsymbol{\omega}_\epsilon)] = \mathbf{0} \quad em \mathbb{R}^2, \quad (2.69)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\gamma(\boldsymbol{\omega}_\epsilon) \rightarrow \mathbf{0} \quad em \infty, \quad (2.70)$$

$$\llbracket \boldsymbol{\sigma}_\gamma(\boldsymbol{\omega}_\epsilon) \rrbracket \mathbf{n}_{in} = -(1 - \gamma) \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}})] \mathbf{n}_{in} \quad em \partial B_\epsilon. \quad (2.71)$$

Desta maneira, como consequência direta das atribuições acima, o problema associado ao campo  $\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon$  fica determinado:

$\mathcal{P}2$  - Encontrar  $\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon$  tal que

$$\operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma}_\gamma (\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon)] = \mathbf{0} \quad \text{em } \Omega_\epsilon, \quad (2.72)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\gamma (\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon) \mathbf{n} = -\boldsymbol{\sigma}_\gamma (\boldsymbol{\omega}_\epsilon) \mathbf{n} \quad \text{em } \Gamma_N, \quad (2.73)$$

$$\llbracket \boldsymbol{\sigma}_\gamma (\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon) \rrbracket \mathbf{n}_{in} = \epsilon (1 - \gamma) \{ \nabla \boldsymbol{\sigma} [\mathbf{u}(\mathbf{y})] \mathbf{n}_{in} \} \mathbf{n}_{in} \quad \text{em } \partial B_\epsilon, \quad (2.74)$$

$$\llbracket \tilde{\mathbf{u}}_\epsilon \rrbracket = -\llbracket \boldsymbol{\omega}_\epsilon \rrbracket \quad \text{em } \partial B_\epsilon, \quad (2.75)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon = -\boldsymbol{\omega}_\epsilon \quad \text{em } \Gamma_D. \quad (2.76)$$

É importante ressaltar que não existe nenhuma aproximação nas escolhas feitas e que, uma vez resolvidos os subproblemas, a expansão é exata. O problema  $\mathcal{P}1$  foi arquitetado desta maneira, pois o mesmo admite solução explícita, que uma vez calculada, pode ser utilizada diretamente para compor a expansão do campo de tensão perturbado

$$\boldsymbol{\sigma}_\gamma (\mathbf{u}_\epsilon) = \boldsymbol{\sigma}_\gamma (\mathbf{u}) + \boldsymbol{\sigma}_\gamma (\boldsymbol{\omega}_\epsilon) + \boldsymbol{\sigma}_\gamma (\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon). \quad (2.77)$$

Pode-se demonstrar que a contribuição do termo associado ao campo  $\tilde{\mathbf{u}}_\epsilon$ , resultado do problema  $\mathcal{P}2$ , é de ordem  $O(\epsilon^2)$ . Assim, a sua influência no cálculo da derivada topológica de primeira ordem não é relevante (NOVOTNY; SOKOLOWSKI, 2013), e portanto o problema  $\mathcal{P}2$  não precisa ser resolvido.

Conforme comentado anteriormente, o problema  $\mathcal{P}1$  admite solução explícita (ver por exemplo (NOVOTNY; SOKOLOWSKI, 2013; GIUSTI, 2009) para o caso de inclusões circulares, ou (NOVOTNY, 2003) para o caso de furos circulares). Considera-se um sistema de coordenadas polar  $(r, \theta)$  local centrado na inclusão e alinhado com os autovetores de  $\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}})]$ , e desta forma, a composição de  $\boldsymbol{\sigma}_\gamma(\boldsymbol{\omega}_\epsilon)$  na relação (2.77) torna-se:

Fora da inclusão ( $r \geq \epsilon$ )

$$\begin{aligned}
\sigma_{\gamma}^{rr}(\mathbf{u}_{\epsilon})(r, \theta) &= \left[ 1 - \frac{(1-\gamma)}{(1+\gamma\alpha)} \frac{\epsilon^2}{r^2} \right] \phi_1 \\
&+ \left[ 1 - 4 \frac{(1-\gamma)}{(1+\gamma\beta)} \frac{\epsilon^2}{r^2} + 3 \frac{(1-\gamma)}{(1+\gamma\beta)} \frac{\epsilon^4}{r^4} \right] \phi_2 \cos(2\theta) \\
&+ O(\epsilon^2), \tag{2.78}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\gamma}^{\theta\theta}(\mathbf{u}_{\epsilon})(r, \theta) &= \left[ 1 + \frac{(1-\gamma)}{(1+\gamma\alpha)} \frac{\epsilon^2}{r^2} \right] \phi_1 \\
&- \left[ 1 + 3 \frac{(1-\gamma)}{(1+\gamma\beta)} \frac{\epsilon^4}{r^4} \right] \phi_2 \cos(2\theta) + O(\epsilon^2), \tag{2.79}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\gamma}^{r\theta}(\mathbf{u}_{\epsilon})(r, \theta) &= - \left[ 1 + 2 \frac{(1-\gamma)}{(1+\gamma\beta)} \frac{\epsilon^2}{r^2} - 3 \frac{(1-\gamma)}{(1+\gamma\beta)} \frac{\epsilon^4}{r^4} \right] \phi_2 \sin(2\theta) \\
&+ O(\epsilon^2), \tag{2.80}
\end{aligned}$$

e no interior da inclusão ( $0 < r < \epsilon$ )

$$\begin{aligned}
\sigma_{\gamma}^{rr}(\mathbf{u}_{\epsilon})(r, \theta) &= \left[ \frac{2\gamma}{(1-\nu)(1+\gamma\alpha)} \right] \phi_1 \\
&+ \left[ \frac{4\gamma}{(1+\nu)(1+\gamma\beta)} \right] \phi_2 \cos(2\theta) + O(\epsilon^2), \tag{2.81}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\gamma}^{\theta\theta}(\mathbf{u}_{\epsilon})(r, \theta) &= \left[ \frac{2\gamma}{(1-\nu)(1+\gamma\alpha)} \right] \phi_1 \\
&- \left[ \frac{4\gamma}{(1+\nu)(1+\gamma\beta)} \right] \phi_2 \cos(2\theta) + O(\epsilon^2), \tag{2.82}
\end{aligned}$$

$$\sigma_{\gamma}^{r\theta}(\mathbf{u}_{\epsilon})(r, \theta) = - \left[ \frac{4\gamma}{(1+\nu)(1+\gamma\beta)} \right] \phi_2 \sin(2\theta) + O(\epsilon^2), \tag{2.83}$$

onde  $\phi_1$  e  $\phi_2$  estão relacionados com as tensões principais ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ) associadas ao problema não perturbado

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \{ \sigma_1(\mathbf{u})(\hat{\mathbf{x}}) + \sigma_2(\mathbf{u})(\hat{\mathbf{x}}) \}, \tag{2.84}$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2} \{ \sigma_1(\mathbf{u})(\hat{\mathbf{x}}) - \sigma_2(\mathbf{u})(\hat{\mathbf{x}}) \}, \tag{2.85}$$

e as constantes envolvidas são expressas em função do coeficiente de poisson  $\nu$

$$\alpha = \frac{1 + \nu}{1 - \nu}, \quad (2.86)$$

$$\beta = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}. \quad (2.87)$$

Como o cálculo da derivada topológica depende apenas de uma integral ao longo da inclusão (ver Eq. 2.44), somente a solução no interior desta é relevante. O tensor  $\sigma_\gamma(\mathbf{u}_\epsilon)$  (Eqs. 2.81-2.83) pode ser expresso em coordenadas cartesianas através de uma transformação de sistemas de coordenadas,

$$\sigma_\gamma^{xx}(\mathbf{u}_\epsilon) = \left[ \frac{2\gamma}{(1 - \nu)(1 + \gamma\alpha)} \right] \phi_1 \quad (2.88)$$

$$+ \left[ \frac{4\gamma}{(1 + \nu)(1 + \gamma\beta)} \right] \phi_2 + O(\epsilon^2),$$

$$\sigma_\gamma^{yy}(\mathbf{u}_\epsilon) = \left[ \frac{2\gamma}{(1 - \nu)(1 + \gamma\alpha)} \right] \phi_1 \quad (2.89)$$

$$- \left[ \frac{4\gamma}{(1 + \nu)(1 + \gamma\beta)} \right] \phi_2 + O(\epsilon^2),$$

$$\sigma_\gamma^{xy}(\mathbf{u}_\epsilon) = O(\epsilon^2). \quad (2.90)$$

Ainda, com o objetivo de tornar os cálculos subsequentes mais legíveis, pode-se definir uma transformação sobre o tensor tensão não perturbado  $\sigma(\mathbf{u})(\hat{\mathbf{x}})$  de modo a originar o tensor tensão perturbado  $\sigma_\gamma(\mathbf{u}_\epsilon)$ , dado pelas relações (2.88-2.90),

$$\sigma_\gamma(\mathbf{u}_\epsilon) = \mathbb{D}\sigma(\mathbf{u})(\hat{\mathbf{x}}) + O(\epsilon^2), \quad (2.91)$$

onde o tensor isotrópico de quarta ordem  $\mathbb{D}$ , demonstrado no Apêndice A, é dado por

$$\mathbb{D} = \frac{4\gamma}{(1 + \gamma\beta)(1 + \nu)} \mathbb{I} + \left[ \frac{\gamma}{(1 + \gamma\alpha)(1 - \nu)} - \frac{2\gamma}{(1 + \gamma\beta)(1 + \nu)} \right] \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}. \quad (2.92)$$

Assim, a expansão assintótica do campo de tensões perturbado  $\sigma_\gamma(\mathbf{u}_\epsilon)$  é constituída de informações sobre o tensor tensão não perturbado  $\sigma(\mathbf{u})$  avaliado na posição  $\hat{\mathbf{x}}$  da perturbação, e de termos que apresentam ordem mais elevada, isto é,  $O(\epsilon^2)$ .

### 2.2.3 Cálculo da Derivada Topológica

De posse da análise assintótica e do comportamento da solução perturbada em torno da inclusão (2.91), torna-se possível avaliar a expressão (2.44)

$$\psi [\Omega_\epsilon (\hat{\mathbf{x}})] - \psi (\Omega) = \frac{\gamma - 1}{2} \int_{B_\epsilon} \mathbb{C} \nabla^s \mathbf{u}_\epsilon \cdot \nabla^s \mathbf{u} \, d\Omega, \quad (2.93)$$

$$= \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \int_{B_\epsilon} \boldsymbol{\sigma}_\gamma (\mathbf{u}_\epsilon) \cdot \nabla^s \mathbf{u} \, d\Omega, \quad (2.94)$$

$$= \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \int_{B_\epsilon} [\mathbb{D}\boldsymbol{\sigma} [\mathbf{u} (\hat{\mathbf{x}})] + \mathbf{O} (\epsilon^2)] \cdot \nabla^s \mathbf{u} \, d\Omega, \quad (2.95)$$

$$= \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \int_{B_\epsilon} \mathbb{D}\boldsymbol{\sigma} [\mathbf{u} (\hat{\mathbf{x}})] \cdot \nabla^s \mathbf{u} \, d\Omega + o (\epsilon^2). \quad (2.96)$$

A partir da relação acima é possível mostrar que a integral pode ser expressa como o produto entre a medida de  $B_\epsilon$  e do integrando avaliado no ponto  $\hat{\mathbf{x}}$ , gerando também um resíduo  $o (\epsilon^2)$  (NOVOTNY; SOKOLOWSKI, 2013)

$$\psi [\Omega_\epsilon (\hat{\mathbf{x}})] - \psi (\Omega) = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \mathbb{D}\boldsymbol{\sigma} [\mathbf{u} (\hat{\mathbf{x}})] \cdot \nabla^s \mathbf{u} (\hat{\mathbf{x}}) \pi \epsilon^2 + o (\epsilon^2). \quad (2.97)$$

Portanto a expansão assintótica do funcional  $\psi [\Omega_\epsilon (\hat{\mathbf{x}})]$  pode ser escrita como

$$\psi [\Omega_\epsilon (\hat{\mathbf{x}})] - \psi (\Omega) = \pi \epsilon^2 \mathbb{P} \boldsymbol{\sigma} [\mathbf{u} (\hat{\mathbf{x}})] \cdot \nabla^s \mathbf{u} (\hat{\mathbf{x}}) + o (\epsilon^2). \quad (2.98)$$

onde o tensor de quarta ordem  $\mathbb{P}$ , denominado tensor de polarização, é expresso por

$$\mathbb{P} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \mathbb{D} = \frac{1}{2} \frac{\gamma - 1}{1 + \gamma\beta} \left[ (1 + \beta) \mathbb{I} + \frac{(\alpha - \beta)}{2} \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma\alpha} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right]. \quad (2.99)$$

Assim, escolhendo como função do parâmetro  $\epsilon$ ,  $f (\epsilon) = \pi \epsilon^2$  a medida do tamanho da inclusão, identifica-se diretamente a derivada topológica de primeira ordem associada ao funcional da energia potencial total como

$$D_T \psi(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbb{P} \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}})] \cdot \nabla^s \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}). \quad (2.100)$$

Com relação ao contraste  $\gamma$ , alguns casos limite podem ser identificados. Caso  $\gamma \rightarrow 0$ , a inclusão torna-se um furo com condição de contorno de Neumann homogênea e assim o tensor de polarização pode ser simplificado para

$$\mathbb{P} = \frac{2}{1 + \nu} \mathbb{I} + \frac{3\nu - 1}{2(1 + \nu)(1 - \nu)} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}. \quad (2.101)$$

Caso  $\gamma \rightarrow \infty$ , a inclusão torna-se rígida e

$$\mathbb{P} = \frac{2}{\nu - 3} \mathbb{I} + \frac{3\nu - 1}{2(1 + \nu)(3 - \nu)} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}. \quad (2.102)$$

Cabe ressaltar que as expressões obtidas ao longo do cálculo correspondem à uma inclusão circular, e caso uma geometria diferente fosse escolhida a expansão assintótica deveria ser reavaliada resultando em uma derivada topológica distinta.



### 3 MODELO DE DANO DE FRANCFORT-MARIGO

O termo dano foi introduzido em 1972 por J. Hult para prever a formação de trincas em estruturas (LEMAITRE; DESMORAT, 2005). No sentido mecânico, dano corresponde à criação de microvazios e microtrincas, ou seja, ao aparecimento de descontinuidades em um meio que é considerado contínuo em uma escala macroscópica. Assim, as descontinuidades do dano são pequenas com relação a um volume representativo de material (RVE), porém são grandes em relação ao nível atômico.

Existem diferentes proposições para a avaliação numérica do dano. Uma destas define uma variável de dano escalar  $D$ , cuja interpretação corresponde à fração volumétrica de microvazios em um volume representativo

$$D = \frac{\delta V_D}{\delta V}. \quad (3.1)$$

Uma abordagem mais geral, enquadra o dano como a fração danificada em um plano microscópico de orientação  $\mathbf{n}$

$$D_n = \left. \frac{\delta S_D}{\delta S} \right|_{\mathbf{n}}. \quad (3.2)$$

Desta maneira, o dano pode apresentar direções com maior ou menor intensidade, o que sugere o aparecimento de definições que envolvam tensores.

Alguns dos efeitos macroscópicos associados ao aparecimento do dano em estruturas são; o decréscimo da rigidez, dureza, velocidade de propagação de ondas e aumento da resistência elétrica. Estas alterações no comportamento dos materiais em escala macroscópica podem ser utilizadas para detectar regiões de dano inicial através de métodos inversos (LEMAITRE; DESMORAT, 2005).

#### 3.1 MODELO DE FRANCFORT-MARIGO

Apresentado em 1993, o modelo de Francfort-Marigo é utilizado na descrição do comportamento de materiais frágeis em regime quasi-estático, juntamente com a evolução do dano existente em seu interior (FRANCFORT; MARIGO, 1993). Diferentemente dos materiais dúcteis, os materiais perfeitamente frágeis não apresentam nenhuma deformação irreversível e nenhuma dissipação de energia imediatamente antes da pro-

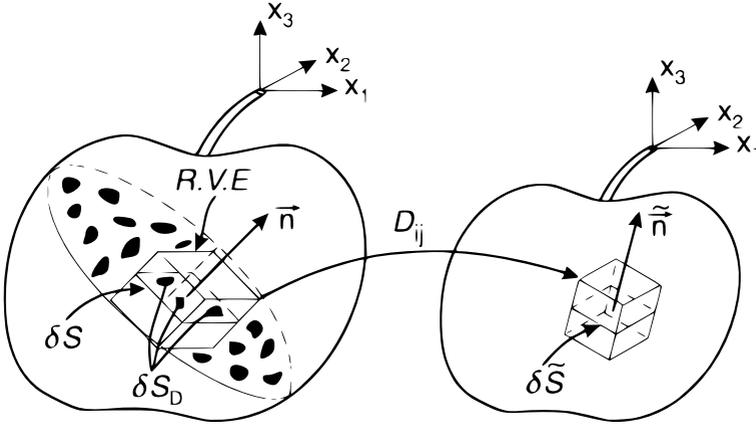


Figura 3.1: Representação do dano (LEMAITRE; DESMORAT, 2005).

pagação de trinca, e portanto, a falha é geralmente catastrófica. Baseado nesta evidência, o modelo de dano de Francfort-Marigo propõe que pontualmente deve existir uma mudança abrupta de comportamento do material.

A proposta deste modelo de dano é a de introduzir um par de materiais, aqui representados através de seus tensores constitutivos  $\mathbb{C}_0$  e  $\mathbb{C}_1$ , de forma que a mudança do material original  $\mathbb{C}_0$  para o material danificado  $\mathbb{C}_1$  ocorra somente se a liberação da energia elástica associada a esta transição superar um determinado valor, característico do material. Assim, a ocorrência do dano é determinada por

$$\frac{1}{2}\mathbb{C}_0\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2}\mathbb{C}_1\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} > \kappa, \quad (3.3)$$

onde  $\kappa$  é uma propriedade material que representa a densidade de liberação de energia associada à perda de rigidez.

De forma geral, Francfort e Marigo (1993) classificam os modelos de dano como segue. Se a transição entre o material base e a fase danificada for dada de forma contínua e gradativa, diz-se que o dano é progressivo. Caso contrário, se esta transição ocorrer de forma que em um instante de tempo possa aparecer somente uma fase ou outra, diz-se que o dano é abrupto. Especificamente em relação ao dano, se a fase danificada ainda apresentar alguma rigidez, diz-se que o dano foi parcial. Em contrapartida, caso a fase danificada não apresente rigidez alguma, diz-se que o dano foi total. Neste sentido, o modelo de Francfort-Marigo é um modelo de dano parcial de transição abrupta.

Surgem duas condições naturais associadas à este modelo. Primeiramente o material base  $\mathbb{C}_0$  deve ser mais “rígido” que o material danificado, i.e.,

$$(\mathbb{C}_0 - \mathbb{C}_1) \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} > 0 \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.4)$$

de forma a caracterizar a perda da rigidez associada ao dano. Segundo, o dano é permanente, ou seja, uma vez danificado ( $\mathbb{C}_0 \rightarrow \mathbb{C}_1$ ), o material não é capaz de retornar ao seu estado original ( $\mathbb{C}_1 \not\rightarrow \mathbb{C}_0$ ). Desta forma, a condição de irreversibilidade impõe uma restrição na evolução do fenômeno.

Após longa exposição e discussão, os autores Francfort e Marigo propõem um funcional que deve ser minimizado em cada instante de tempo  $t_i$ , cujo argumento corresponde justamente à distribuição de dano presente  $\chi^i(\mathbf{x})$ . O campo  $\chi(\mathbf{x})$ , denominado função característica<sup>1</sup>, corresponde a um campo escalar  $\chi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{0, 1\}$  que efetua o mapeamento do tensor constitutivo  $\mathbb{C}_0$  para  $\mathbb{C}_1$  através de

$$\mathbb{C}(\chi) = (1 - \chi) \mathbb{C}_0 + \chi \mathbb{C}_1, \quad (3.5)$$

ou seja, caso  $\chi = 0$  recupera-se o material de base  $\mathbb{C}_0$ , e caso  $\chi = 1$  obtém-se o dano total representado pelo material  $\mathbb{C}_1$ .

O funcional  $\mathcal{F}$  a ser minimizado é representado pela energia potencial do sistema  $\mathcal{J}$  juntamente com uma medida de dissipação de energia  $\mathcal{I}$

$$\mathcal{F}(\chi^i, \mathbf{u}^i) = \mathcal{J}(\chi^i, \mathbf{u}^i) + \mathcal{I}(\chi^i), \quad (3.6)$$

onde

$$\mathcal{J}(\chi^i, \mathbf{u}^i) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbb{C}(\chi^i) \nabla^s \mathbf{u}^i \cdot \nabla^s \mathbf{u}^i d\Omega - \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{q}}^i \cdot \mathbf{u}^i d\Gamma, \quad (3.7)$$

$$\mathcal{I}(\chi^i) = \kappa \int_{\Omega} \chi^i(\mathbf{x}) d\Omega, \quad (3.8)$$

e  $\mathbf{u}^i$  é solução do problema variacional:

Para cada instante  $t_i$  determinar  $\mathbf{u}^i \in K$  tal que

$$\int_{\Omega} \mathbb{C}(\chi^i) \nabla^s \mathbf{u}^i \cdot \nabla^s \boldsymbol{\eta} d\Omega = \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{q}}^i \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in V. \quad (3.9)$$

---

<sup>1</sup>O nome dado a esta função pelos autores não apresenta qualquer relação com a função característica definida anteriormente no *bubble method*.

Este modelo é puramente energético, ou seja, baseado somente na distribuição da densidade de energia para avaliação do dano. Como consequência direta é incapaz de discernir entre estados de tração e compressão, sendo falho na descrição do fenômeno do fechamento de trinca (“*Crack Closure*”) (GDOUTOS, 2005). Este fenômeno prevê que, uma vez nucleado o dano, um estado de compressão recupera totalmente, ou quase totalmente, a rigidez original associada à região danificada, de forma análoga à uma condição de contato unilateral.

### 3.1.1 Carga Crítica

Outro fato importante do modelo refere-se a caracterização de um carregamento crítico ou de inicialização. Adotando a definição apresentada por Allaire, Jouve e Van Goethem (2011), carregamento de inicialização seria aquele em que a nucleação ou propagação do dano tem início, enquanto o carregamento crítico é aquele que leva a falha do componente. Em problemas com ausência de singularidades, a carga de inicialização é dada pelo valor do carregamento que eleva a densidade de energia até um valor crítico. Por outro lado, em problemas com singularidades de tensão qualquer carga aplicada já é suficiente para elevar a densidade de energia acima do valor limite, pois em teoria, a densidade de energia de deformação tende para valores infinitamente altos no ponto de singularidade. Experimentos como os de Griffith indicam a existência de uma carga de inicialização finita mesmo na presença de tais singularidades, o que revela uma limitação do modelo de Francfort-Marigo. Entretanto, algumas estratégias podem ser adotadas na tentativa de contornar este problema. Allaire, Jouve e Van Goethem (2011) alteraram o modelo em nível numérico através da introdução de uma nova propriedade material  $\lambda$ , que é utilizada juntamente com um fator de escala dado pelo tamanho  $\Delta x$  da malha utilizada pelo MEF. Assim, um novo parâmetro de liberação de energia volumétrico  $\kappa^*$  (ver Equação 3.3) pode ser definido mediante o seguinte quociente

$$\kappa^* = \frac{\lambda}{\Delta x}, \quad (3.10)$$

desta forma, a medida que a malha de elementos finitos é refinada e o campo singular melhor representado, o parâmetro  $\kappa^*$  cresce de forma semelhante a densidade de energia, e o valor da carga crítica converge para um valor finito não nulo. Esta estratégia mostrou ser eficaz em problemas onde existe somente a propagação de regiões previamente danificadas, buscando tipicamente mimetizar uma trinca inicial através de uma região danificada de espessura  $\delta$ . Entretanto, esta abordagem

torna-se inconsistente em problemas que apresentam os mecanismos de nucleação e de propagação atuando de forma conjunta. Nestes casos o fator de escala afeta de forma artificial o processo de nucleação. Isto é, em regiões livres de dano e de singularidades, a nucleação do dano torna-se dependente do tamanho  $\Delta x$  da malha. Isto porque a resistência à nucleação, dada por  $\kappa^*$ , cresce a medida que a malha é refinada, e portanto em um caso limite ( $\Delta x \rightarrow 0$ ) o processo de nucleação seria ausente. No trabalho de Allaire, Jouve e Van Goethem (2011) não foi encontrada referência a este fato, e a utilização da derivada topológica para inicializar a função *level set* em regiões não danificadas é feita sem mencionar a utilização ou não deste fator de escala. Uma alternativa para eliminar esta inconsistência seria a de introduzir uma outra relação, ou talvez, outra propriedade material separadamente para o fenômeno de nucleação.

### 3.1.2 Relação com Otimização Estrutural

Ao tratar do modelo dano de Francfort-Marigo não é possível deixar de mencionar a área de conhecimento de otimização estrutural, especialmente otimização topológica. Apesar de apresentarem interpretações físicas distintas, ambos compartilham as mesmas propriedades matemáticas. Em problemas de otimização topológica, como o próprio nome sugere, o objetivo principal é a determinação da topologia que extremiza um determinado funcional sujeito a restrições de projeto (BENDSØE; SIGMUND, 2004).

A formulação mecânica mais tradicional neste contexto consiste em maximizar a rigidez de um domínio elástico utilizando um volume limitado de material. Assim, deve ser verificado quais regiões do domínio devem ser preenchidas com um material isotrópico  $\mathbb{C}_0$ , e quais não o devem, enquanto o equilíbrio estático do sistema é mantido (Eq. 2.14).

Paralelamente à relação (3.5), no problema de otimização topológica descrito a parametrização material é dada como

$$\mathbb{C}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbb{C}_0 & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega^{mat} \\ \mathbf{0} & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega^{mat} \end{cases}, \quad (3.11)$$

onde  $\Omega^{mat}$  representa o subconjunto de  $\Omega$  que possui material. Ainda, em termos da função característica  $\chi(\mathbf{x})$ ,

$$\mathbb{C}(\chi) = \chi \mathbb{C}_0, \quad (3.12)$$

onde neste caso o tensor  $\mathbb{C}_1$  corresponde ao tensor nulo, e  $\Omega^{mat} = \{\mathbf{x} \in \Omega | \chi = 1\}$ .

Uma das características matemáticas desta classe de problemas é a sua natureza mal posta, no sentido que esta não admite um minimizador. Dada uma sequência de funções características  $\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n\}$  tal que  $\psi_1(\chi_1) > \psi_2(\chi_2) > \dots > \psi_n(\chi_n)$ , esta não converge para uma função  $\chi_0$  que também seja característica. Em outras palavras, a solução do problema consiste em uma mistura cada vez mais fina entre os materiais  $\mathbb{C}_0$  e  $\mathbb{C}_1$ , de forma a originar uma microestrutura específica para a classe do problema analisado e para o ponto  $\mathbf{x}$  em questão. Esta microestrutura, formada pelos materiais isotrópicos  $\mathbb{C}_0$  e  $\mathbb{C}_1$ , apresentaria um comportamento anisotrópico em uma macroescala. Assim, a solução ótima para o problema prevê o uso de uma classe mais ampla de materiais, de características anisotrópicas, e que não está definida a priori, uma vez que somente está disponível a utilização de materiais isotrópicos.

Este efeito, algumas vezes denominado de instabilidade (FRANCFORT; MARIGO, 1993), pode ser verificado em implementações numéricas. Em conjunto com o Método dos Elementos Finitos, verifica-se que refinamentos sucessivos de malha geram soluções cada vez mais detalhadas e eficientes, mas que podem ser significativamente diferentes umas das outras.

Historicamente, a relação direta deste problema com a microescala acabou incorporando a Teoria da Homogeneização no contexto da otimização estrutural (BENDSØE; KIKUCHI, 1988). Esta poderosa teoria permite obter o comportamento macroscópico de uma estrutura modelada em microescala, como se fosse um meio homogêneo. Desta forma, ao propor uma microcélula específica e parametrizá-la através de grandezas que envolvam a sua geometria, o problema de otimização topológica é convertido em um problema de *sizing*, e consiste em determinar os valores dos parâmetros característicos da microestrutura em cada ponto do domínio.

Se o objetivo principal do problema é a obtenção de uma topologia ótima em macroescala, não existe motivação em introduzir uma microestrutura específica. Sendo assim, Bendsøe (1989) propõe a utilização de materiais artificiais, ou seja, pseudo materiais em que o único parâmetro envolvido torna-se a densidade deste material. Neste contexto o termo “densidade” não se refere à definição usual de quantidade de matéria por unidade de volume, mas sim a proporção entre o uso de material (*solid*) e de vazios (*void*). Denominado como SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), este modelo de Bendsøe é escrito como

$$\mathbb{C}(\rho)(\mathbf{x}) = [\rho(\mathbf{x})]^p \mathbb{C}_0, \quad (3.13)$$

onde  $\rho : \mathbb{R}^{\{2,3\}} \rightarrow [0, 1]$  é denominado de “densidade material”, e  $p$  corresponde à um parâmetro de penalização que tem como objetivo a redução do aparecimento de densidades intermediárias no domínio. Apesar de não definidas por Bendsøe (1989), mais tarde Bendsøe e Sigmund (1999) mostram possíveis microestruturas que atendem à parametrização SIMP. Uma propriedade do modelo é que a medida que  $p \rightarrow \infty$ , recupera-se a parametrização original (3.11).

Na busca por soluções estáveis, Francfort e Marigo (1993) relaxam o problema original estendendo a função característica para o intervalo unitário  $\chi \in [0, 1]$ , cuja interpretação corresponde justamente à fração de mistura entre os materiais danificado  $\mathbb{C}_1$  e de base  $\mathbb{C}_0$ , de forma análoga à parametrização SIMP com expoente  $p = 1$ . Ainda, utilizam argumentos da teoria da homogeneização, porém sem introduzir uma microestrutura específica. Ao contrário de sua proposta original, concluem que o problema relaxado torna-se um modelo de dano progressivo.

### 3.2 DERIVADA TOPOLÓGICA PARA O FUNCIONAL DE FRANCFORT-MARIGO

O funcional de Francfort-Marigo é composto de duas parcelas, uma dada pelo funcional da energia potencial total e outra associada a uma medida de dissipação energética. O cálculo da derivada topológica para a primeira parcela já foi executado no capítulo anterior e sua forma final é dada pela equação (2.100). A segunda parcela não depende da solução do problema de elasticidade e a sua avaliação é dada exclusivamente através das características geométricas da inclusão, e portanto o cálculo da derivada topológica não necessita da estratégia utilizada anteriormente. Tomando a segunda parcela do funcional de Francfort-Marigo associada a dissipação de energia

$$\psi(\Omega) := \mathcal{I}(\chi) = \kappa \int_{\Omega} \chi(\mathbf{x}) d\Omega, \quad (3.14)$$

verifica-se que esta depende apenas do subdomínio  $\Lambda \in \Omega$  que está danificado, i.e. a região em que  $\chi = 1$ . Logo,

$$\psi(\Omega) = \kappa \int_{\Lambda} 1 d\Omega. \quad (3.15)$$

Introduzindo a perturbação, dada pela inclusão  $B_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})$  que não intercepta a antiga região danificada, ou seja  $\Lambda_\epsilon = \Lambda \cup B_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})$  e  $B_\epsilon(\hat{\mathbf{x}}) \cap \Lambda = \emptyset$ , o funcional associado ao domínio perturbado torna-se

$$\psi[\Omega_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})] := \mathcal{I}_\epsilon(\chi_\epsilon) = \kappa \int_{\Lambda_\epsilon} 1 d\Omega, \quad (3.16)$$

$$\psi[\Omega_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})] = \kappa \int_{\Lambda} 1 d\Omega + \kappa \int_{B_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})} 1 d\Omega, \quad (3.17)$$

$$\psi[\Omega_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})] = \psi(\Omega) + \pi\epsilon^2\kappa. \quad (3.18)$$

Logo, separando a medida da bola e comparando com a expansão (1.2), a derivada topológica associada a este funcional corresponde a

$$D_T\psi(\hat{\mathbf{x}}) = \kappa. \quad (3.19)$$

Portando a forma final da derivada topológica para o funcional de Francfort-Marigo corresponde a composição das parcelas individuais (2.100) e (3.19)

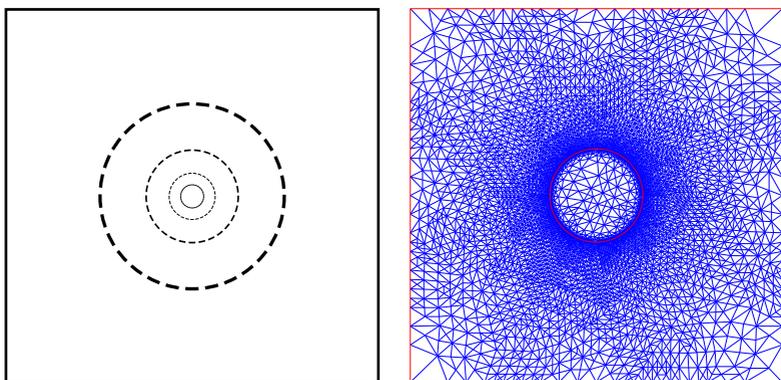
$$D_T\psi(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbb{P}\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}})] \cdot \nabla^s \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) + \kappa. \quad (3.20)$$

É importante ressaltar que todos os termos envolvidos na expressão (3.20) referem-se apenas à solução do problema no domínio não perturbado  $\Omega$ . Portanto a sua utilização em métodos numéricos depende apenas de um pós-processamento, e desta forma torna-se atraente devido, principalmente, à sua facilidade de implementação.

### 3.3 AVALIAÇÃO NUMÉRICA

O processo de obtenção da derivada topológica envolve várias manipulações algébricas e por isto é importante fazer uma verificação do seu cálculo. Este procedimento pode ser feito de forma análoga ao método das diferenças finitas, onde o problema é modificado através de uma perturbação finita e a diferença com o problema não perturbado fornece uma estimativa do valor da sensibilidade. Portanto uma seqüência de inclusões circulares com raio decrescente  $\epsilon \in \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128} \right\}$  é criada no centro de um quadrado unitário  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  (ver Figura 3.2). Em analogia a relação (1.4), a derivada topológica é aproximada mediante a seguinte operação de diferença finita:

$$d\tau = \frac{\psi[\Omega_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})] - \psi(\Omega)}{\pi\epsilon^2}. \quad (3.21)$$



(a) Sequência de inclusões.

(b) Exemplo de malha.

Figura 3.2: Esquema utilizado para avaliação numérica.

Foram utilizados valores unitários para o módulo de elasticidade  $E_0$  e coeficiente de liberação de energia  $\kappa$ , coeficiente de poisson  $\nu = 0,3$ , dois valores de contraste  $\gamma = 0,001$  e  $\gamma = 10$ , e condição de contorno biaxial. A convergência da aproximação (3.21) pode ser vista na Figura 3.3, onde são apresentadas as curvas com resultados numéricos que se aproximam monotonicamente do valor analítico calculado.

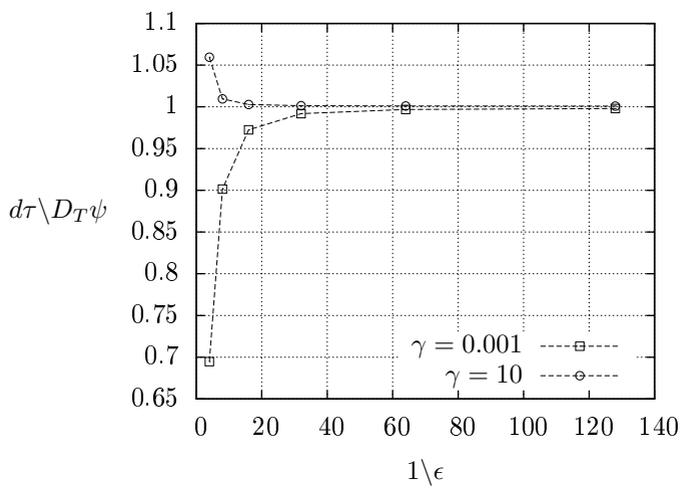


Figura 3.3: Convergência da estimativa para o valor teórico da derivada topológica.

## 4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Nesta seção é proposto um algoritmo que utiliza as informações da análise de sensibilidade topológica para a evolução do dano no modelo de Francfort-Marigo. Em seguida são discutidos alguns aspectos computacionais pertinentes ao algoritmo proposto.

### 4.1 ASPECTOS COMPUTACIONAIS

O código computacional foi implementado no Matlab devido a sua portabilidade e disponibilidade de inúmeros pacotes pré-instalados, denominados *toolbox*, que facilitam o processo de implementação. Entre estes, foi amplamente utilizado o pacote denominado *pdetool*. O *pdetool* é um conjunto de ferramentas para solução de equações diferenciais parciais (EDP) através do Método dos Elementos Finitos (MEF), e contempla a análise de problemas de Mecânica Estrutural, Eletrostática, Magnetostática, Transferência de Calor, Difusão, ou ainda, um conjunto de EDP genérico especificado pelo usuário. O tratamento somente é dado para problemas cujo domínio de representação é bidimensional, e para este fim, o pacote disponibiliza um gerador de malhas triangular e ainda uma interface para criação de geometrias. Apesar de utilizar o MEF para solução do problema, a sua implementação no *toolbox* não segue o padrão utilizado em muitos livros sobre o assunto (BATHE, 1996). Desta forma torna-se necessário especificar parâmetros seguindo uma notação especial exposta no manual do pacote, e portanto a sua utilização requer atenção, especialmente no tratamento dos coeficientes em relações constitutivas. O *pdetool* dispõe de apenas um tipo de elemento, o CST (*Constant Strain Triangle*) (BATHE, 1996; CHEN, 2005).

### 4.2 ALGORITMO

A análise do problema é feita de forma incremental, isto é, o carregamento é dividido em incrementos de carga aplicados de forma progressiva sendo que a cada incremento é necessário verificar se existe propagação e/ou nucleação do dano. Esta informação é fornecida pela derivada topológica do funcional proposto por Francfort-Marigo.

A análise de sensibilidade topológica para este funcional fornece uma correção de primeira ordem quando é introduzida uma perturbação infinitesimal no domínio. Assim, nas regiões que apresentam valores negativos para derivada topológica existe a possibilidade de redução do

funcional através da criação de inclusões, sendo estas em escala infinitesimal. Desta maneira, após avaliação do campo derivada topológica, propõe-se um algoritmo que introduz uma inclusão de tamanho finito centrada na posição em que este campo é mais negativo. Caso o tamanho desta inclusão seja pequeno o suficiente, mas que possa ser tratado numericamente, espera-se que o valor do funcional em análise decresça. Neste contexto verifica-se que a derivada topológica pode ser interpretada como uma direção de descida para o funcional, e o tamanho da inclusão visto como um passo ou incremento nesta direção, de forma análoga aos algoritmos tradicionais de otimização, como por exemplo o *Steepest Descent* (ARORA, 2004).

É interessante notar que a introdução de uma inclusão de tamanho finito levanta a discussão em relação à regularização do problema, no sentido que o modelo de dano de Francfort-Marigo é mal posto com a parametrização  $\chi \in \{0, 1\}$ . De forma análoga à discussão feita por Allaire, Jouve e Van Goethem (2011), o aparecimento de uma inclusão de proporções predefinidas limita de certa forma a escala do problema, e não permite que estruturas menores do que esta possam aparecer. Embora sem provas matemáticas, conjectura-se que a minimização do funcional de Francfort-Marigo através da abordagem proposta ocorre em direção a um mínimo local.

O algoritmo pode ser esquematizado como segue. Dado um incremento de carga e solução do problema de elasticidade linear associado, o campo da derivada topológica é calculado (Eq. 3.20). Caso todo o campo seja positivo, uma perturbação em qualquer ponto do domínio aumentaria o valor do funcional, e por isto não existe indicação para que o dano se propague. Assim é possível incrementar a carga e executar uma nova análise. Caso a derivada topológica em alguma região não danificada seja negativa, uma inclusão é criada na posição em que o seu valor é mínimo. Em seguida, a malha é atualizada para acomodar a nova inclusão, uma nova solução é obtida para o problema de elasticidade linear e a análise dos valores da derivada topológica é refeita. O algoritmo escrito em pseudocódigo pode ser visualizado na página 58.

### 4.3 IMPLEMENTAÇÃO

Na seção anterior foram apresentadas as ideias centrais do algoritmo proposto. Um aspecto crítico desta proposta encontra-se na operação de criação de uma nova inclusão a cada iteração do *loop* interno do algoritmo.

A utilização de elementos CST permite a obtenção de um campo

de deformações constante por partes na malha e, como consequência, arbitrou-se por avaliar a derivada topológica (DT) apenas no centroide de cada elemento. Desta maneira, a localização das regiões que apresentam os menores valores de derivada topológica torna-se limitada a um conjunto finito de pontos (centroide dos triângulos), e que acabam por depender da disposição da malha. Em implementações iniciais esta dependência resultava em soluções muito sensíveis aos parâmetros do gerador de malha, dado que estes determinam a disposição dos elementos na frente da região danificada.

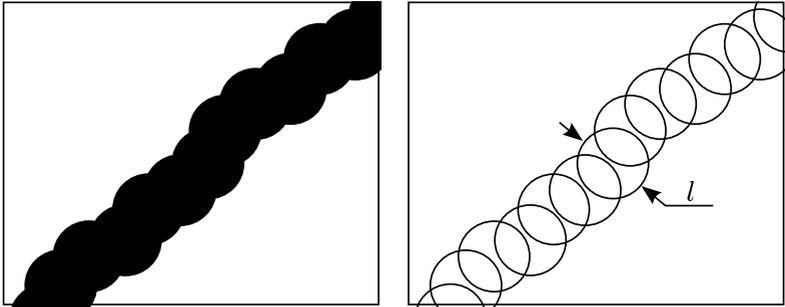
Outro detalhe referente à implementação consiste em caracterizar a natureza da inclusão. Algumas opções foram estudadas, como por exemplo a simples troca de material do elemento ( $E_1 = \gamma E_0$ ) com valor de DT mais negativa, e também a troca de material de uma vizinhança em torno do elemento com valor de DT mais negativa. Infelizmente estas propostas agravaram ainda mais a dependência com a malha, pois introduziram algumas dificuldades relacionadas a qualidade da solução do problema de elasticidade. Verificou-se que, após esta mudança, uma solução somente seria adequada caso um refino de malha ocorresse, e se este fosse feito, dificuldades com a transferência das propriedades de material de uma malha para outra surgiriam. Desta maneira, a caracterização de uma inclusão através de elementos da malha foi abandonada.

Ao invés disto, optou-se por especificar a região na qual a propriedade do material será alterada a partir de uma definição geométrica. Através desta escolha a inclusão passa a ser um elemento geométrico do problema. Neste caso em particular, a geometria da inclusão foi escolhida de forma a concordar com a análise de sensibilidade topológica feita para o funcional de Francfort-Marigo, isto é, utilizando uma inclusão de formato circular. Portanto, a caracterização da inclusão é feita através da posição do seu centro, coincidente com o centroide do elemento cuja DT é mais negativa, e de um diâmetro  $l$  especificado no começo do algoritmo. O gerador de malha efetua o remalhamento em conformidade com as fronteiras das inclusões (ver Figura 4.1a) facilitando o processo de transferência e evolução das propriedades de material de uma malha para a seguinte. A Figura 4.1b ilustra uma sequência de inclusões de diâmetro  $l$ , de forma a caracterizar a propagação de uma região danificada. O tamanho  $l$  desta inclusão pode ser tratado como um comprimento característico do problema, pois define a menor porção de material danificado com representação macroscópica.

Esta nova definição geométrica permitiu aliviar a dependência da solução com a malha, pois normalmente os elementos triangulares ao

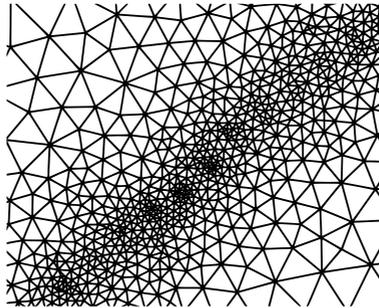
redor da inclusão são muito menores do que o diâmetro  $l$ . Assim, pequenas variações na solução numérica do problema de elasticidade, ou pequenas alterações na malha não têm grande impacto na localização de novas inclusões. Seguindo esta proposta, a malha torna-se um meio utilizado apenas para a obtenção da solução do Método dos Elementos Finitos. A Figura 4.1c mostra a malha utilizada para representar a geometria dada na Figura 4.1b.

Como as características geométricas do problema são atualizadas a cada iteração, a malha deve ser refeita pelo menos nas regiões que sofreram alterações. Na presente implementação, o gerador de malhas disponível não apresenta nenhuma opção de remalhamento localizado ou opção de preservar porções da malha, e por isto, esta deve ser inteiramente refeita a cada iteração. Este aspecto deverá ser aprimorado quando for necessário obter performance numérica do processo.



(a) Região danificada.

(b) Sequência de inclusões.



(c) Malha.

Figura 4.1: Exemplo de uma sequência de inclusões e a malha associada.

---

**Algoritmo 1** Algoritmo proposto para evolução do dano no modelo de Francfort-Marigo.

---

1. (a) Enquanto houver incremento ( $i$ ) de carga faça
    - (b) Loop interno
      - i. Análise de Elementos Finitos para solução do problema de elasticidade
      - ii. Cálculo do campo da derivada topológica
      - iii. Se todo o campo da derivada topológica for positivo
        - A. Atualizar Incremento ( $i = i + 1$ )
        - B. Ir para (a)
      - iv. Verificar a posição em que a derivada topológica é mais negativa
      - v. Criar uma inclusão nesta posição
      - vi. Atualizar malha e variáveis dependentes
      - vii. Ir para (b)
    - (c) Finalizar
-

## 5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Os casos que seguem foram retirados de um recente artigo escrito por Allaire, Jouve e Van Goethem (2011) e alguns de seus resultados foram utilizados como base para comparar a eficácia do algoritmo proposto. De forma análoga, também foram utilizados alguns dos resultados experimentais da mecânica da fratura apresentados em 1990 através de um relatório pela Universidade de Cornell (INGRAFFEA; GRIGORIU, 1990). Existe entretanto uma pequena confusão na literatura atual em relação a nomenclatura dada a estes experimentos. Bittencourt et al. (1996) propuseram um algoritmo para reproduzir estes mesmos resultados, e por isto é comum encontrar referência a estes experimentos como “Experimentos de Bittencourt”. Apesar deste adendo, a discussão em relação a designação dada aos experimentos não é relevante e, por isto, estes serão também referenciados da mesma forma que a literatura atual.

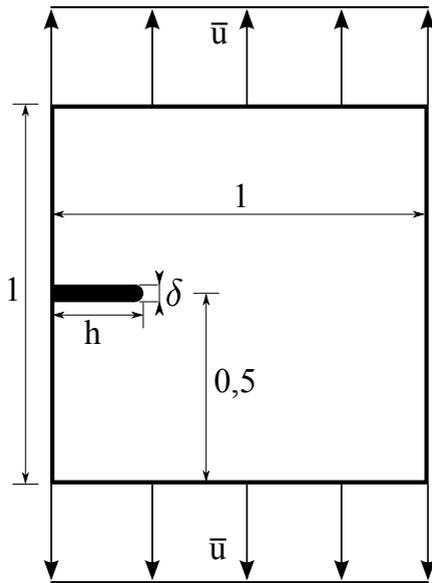
### 5.1 EXEMPLO 1: MODO I

O primeiro exemplo analisa um caso denominado pelo modo de abertura de trinca de tipo I (GDOUTOS, 2005). Este caso será utilizado como referência para calibrar os parâmetros necessários e verificar o desempenho geral do algoritmo.

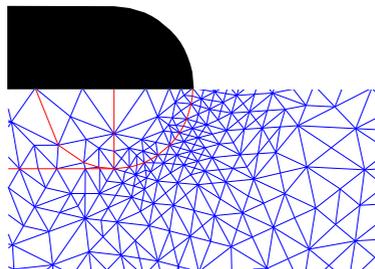
O domínio consiste em um quadrado unitário  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  de espessura também unitária (unidades em milímetros), com um dano inicial de comprimento  $h$  e espessura  $\delta$ , localizado na meia altura da face esquerda (ver Figura 5.1a). O dano inicial apresenta extremidade arredondada de diâmetro  $\delta$ , e os elementos da sua interface possuem um tamanho aproximado de 5% do valor de  $\delta$ , conforme Figura 5.1b.

A condição de contorno imposta é de tração uniaxial, com controle de deslocamento nas faces inferior e superior de intensidade máxima  $\bar{u}$ . O experimento foi dividido em 100 incrementos de carga (*nincr*). As propriedades do material correspondem ao módulo de elasticidade  $E_0$ , coeficiente de Poisson  $\nu$ , e coeficiente de liberação de energia  $\kappa$ . A inclusão é dada por um material de mesmo coeficiente de Poisson e um módulo de elasticidade  $E_1 = \gamma E_0$ , onde  $\gamma$  corresponde ao contraste. O seu diâmetro é especificado através do parâmetro  $l$ , conforme comentado na Seção 4.3.

O primeiro teste realizado neste exemplo cumpre a função de obter uma estimativa do tamanho característico  $l$  necessário para que o funcional de Francfort-Marigo decresça (ver Seção 4.2). Para ilustrar



(a) Geometria Modo I.



(b) Detalhe da extremidade e malha.

Figura 5.1

o procedimento, a Figura 5.2 mostra o campo da derivada topológica na vizinhança de uma região danificada juntamente com a curva de nível  $D_T\psi = 0$ . Em outras palavras, a DT indica que uma perturbação a frente da extremidade danificada proporciona o decréscimo do funcional de Francfort-Marigo. Entretanto, e como já comentado, a análise de sensibilidade topológica é feita a partir do conceito de perturbação infinitesimal, enquanto a introdução de uma perturbação finita, por exemplo uma inclusão de diâmetro  $l$ , pode ocasionar o efeito contrário, isto é, o aumento do valor do funcional. Desta maneira, foram testados três valores diferentes de tamanho de inclusão  $l \in \{0,05; 0,03; 0,01\}$  [mm], enquanto a espessura inicial da região danificada é fixada em  $\delta = 0,05$  mm. Os resultados da evolução do funcional  $\psi$  para os três diâmetros analisados durante 30 iterações são apresentados na Figura 5.3. Nesta figura pode ser observado que apenas o caso com diâmetro 0,01 mm (20% da espessura inicial  $\delta$ ) resulta em uma evolução de decréscimo do funcional. Desta maneira, os testes subsequentes foram feitos com um tamanho de inclusão de  $l = 0,01$  mm. Cabe ressaltar que este valor serve apenas para orientação e evidentemente pode apresentar variações dependendo do caso em análise. Neste aspecto a definição de alguma metodologia para escolha *a priori* do tamanho da inclusão  $l$  constitui um tema aberto para pesquisa futura.

Podemos ainda ser feito um teste referente a caracterização de uma carga crítica do sistema. Conforme comentado na Seção 3.1.1, o modelo de Francfort-Marigo é falho na determinação de uma carga crítica em problemas com singularidades, como por exemplo no caso limite do Modo I de abertura de trinca. Neste caso qualquer carregamento é suficiente para elevar indefinidamente o valor da densidade de energia na ponta da trinca. No presente trabalho foi escolhida uma estratégia semelhante à utilizada por Allaire, Jouve e Van Goethem (2011) com o objetivo de tentar caracterizar um carregamento crítico em problemas que apresentam dano inicial. Ao invés de utilizar o tamanho da malha  $\Delta x$ , optou-se por utilizar como fator de escala uma dimensão associada a geometria, dada pela espessura inicial  $\delta$  da região danificada. Assim

$$\kappa^* = \frac{\lambda}{\delta}, \quad (5.1)$$

e a malha continua sendo utilizada apenas como meio intermediário na obtenção da solução do problema de elasticidade. É importante ressaltar que a estratégia adotada não elimina a inconsistência associada ao fenômeno de nucleação, conforme discutido na Seção 3.1.1.

Para verificar esta proposta foram feitos cinco testes com diferentes

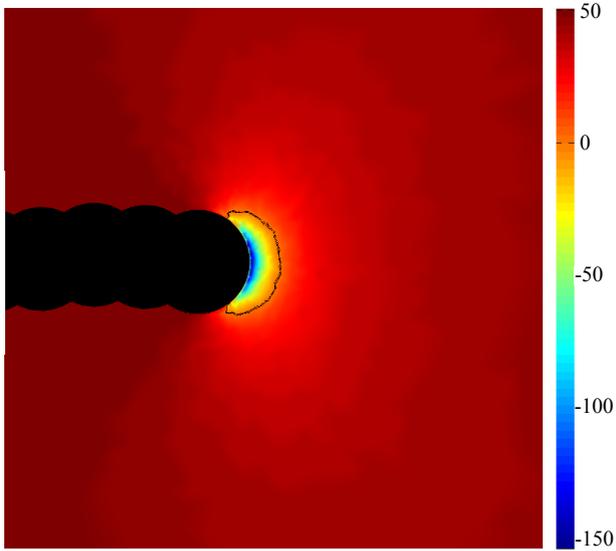


Figura 5.2: Campo derivada topológica a frente da região danificada e curva de nível  $D_T\psi = 0$  para o Modo I.

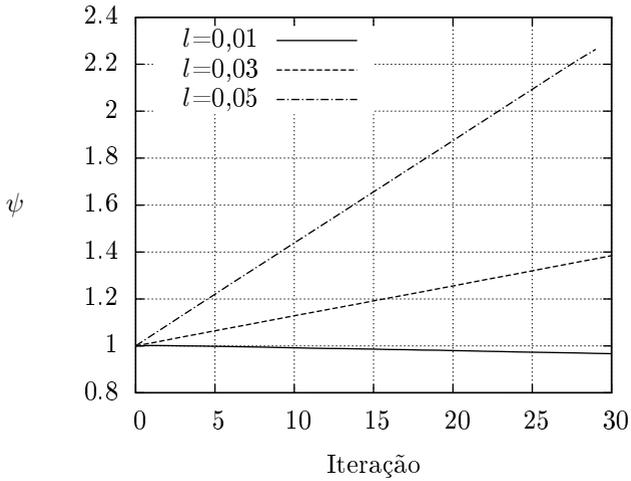


Figura 5.3: Influência do tamanho da inclusão na evolução do funcional de Francfort-Marigo.

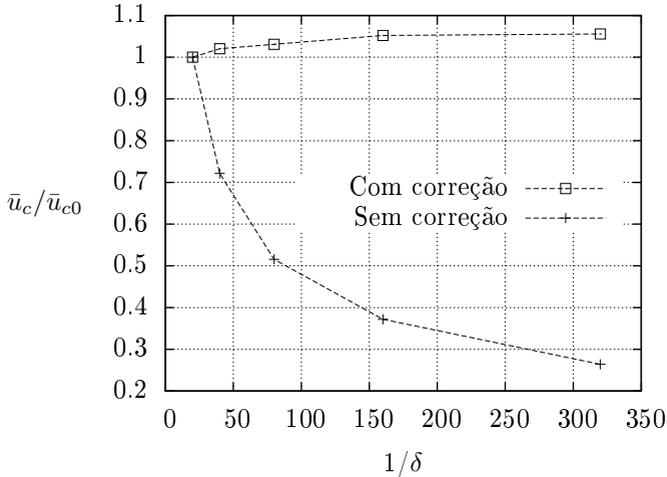


Figura 5.4: Análise de convergência do carregamento crítico.

valores para a espessura inicial  $\delta \in \left\{ \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{80}, \frac{1}{160}, \frac{1}{320} \right\}$  [mm]. O novo parâmetro foi especificado como  $\lambda = 1,0 J/mm^2$  enquanto os outros foram mantidos segundo a Tabela 5.1. A Figura 5.4 ilustra o carregamento crítico obtido para os diferentes experimentos, sendo estes normalizados segundo a primeira estimativa encontrada para a carga crítica. Como esperado, a medida que a espessura  $\delta$  diminui, a densidade de energia na extremidade danificada aumenta. Nota-se que, com a ausência de um fator de correção de escala, a carga crítica calculada decresce em direção ao valor nulo. Em contrapartida, a utilização deste fator,  $\delta$ , apresentou um aparente comportamento assintótico em carregamento crítico, com  $\bar{u}_c/\bar{u}_{c0} = 1,052$  para  $1/\delta = 160$  e  $\bar{u}_c/\bar{u}_{c0} = 1,055$  para  $1/\delta = 320$ . Desta forma, para descrição do modelo resta apenas a calibração do parâmetro  $\lambda$  em função de dados experimentais.

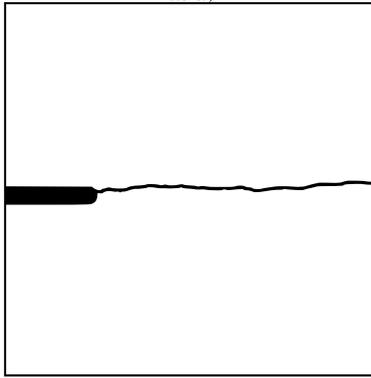
Após esta análise prévia, o caso foi simulado utilizando os parâmetros apresentados na Tabela 5.1. A distribuição do dano ao final do processo iterativo pode ser encontrado na Figura 5.5a. Apesar do dano ter se propagado segundo um caminho irregular, o resultado é semelhante ao obtido por Allaire, Jouve e Van Goethem (2011) (Fig. 5.5b). O histórico da energia de deformação pode ser visualizado na Figura 5.6. Verifica-se que a região danificada permanece inalterada até o incremento de carga  $incr = 49$ , ou de forma equivalente, até um deslocamento nas extremidades de aproximadamente  $u = 0,017 mm$ . Em se-

Parâmetros	Valor
$h$	0,25 mm
$\delta$	0,05 mm
$l$	0,01 mm
$E_0$	1,0 MPa
$E_1$	$10^{-6}$ MPa
$\nu$	0,30
$\kappa$	50,5 J/mm <sup>3</sup>
$nincr$	100
$\bar{u}$	0,035 mm

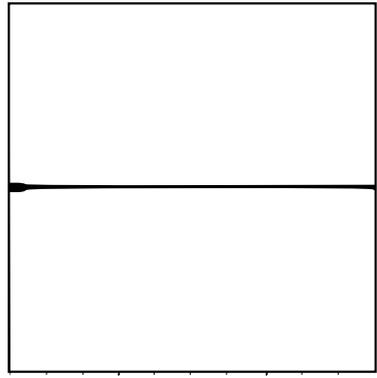
Tabela 5.1: Parâmetros utilizados no caso Modo I.

guida surgem regiões a frente do dano inicial que apresentam valores de derivada topológica negativos, o que justifica a sua propagação. Desta forma ocorre a propagação do dano entre os incrementos de carga 49 e 50, e a correspondente minimização do funcional de Francfort-Marigo é apresentada na Figura 5.7. Em relação à esta figura, foi admitida uma pequena tolerância quanto ao acréscimo do funcional, observado nas primeiras iterações. O valor crescente do funcional decorre da escolha de um diâmetro  $l$  que ainda não é pequeno o suficiente, por mais que o valor da derivada topológica seja negativo. Esta tolerância foi admitida em função dos recursos computacionais disponíveis, uma vez que o número de iterações e o tempo de cálculo aumentariam com um diâmetro  $l$  menor.

Como o dano se propaga até a extremidade direita do domínio de análise, criando duas regiões disjuntas e não danificadas, pode-se também denominar esta carga de inicialização como a carga crítica. Nota-se a queda abrupta da energia de deformação entre os incrementos de carga citados. Nos incrementos de carga seguintes (51 ao 100), o componente ainda adquire uma energia de deformação devido a rigidez remanescente, embora imperceptível devido ao seu baixo valor.



(a) Resultado obtido.



(b) Retirado de (ALLAIRE; JOUVE; VAN GOETHEM, 2011)

Figura 5.5: Resultado final para propagação do dano no Modo I.

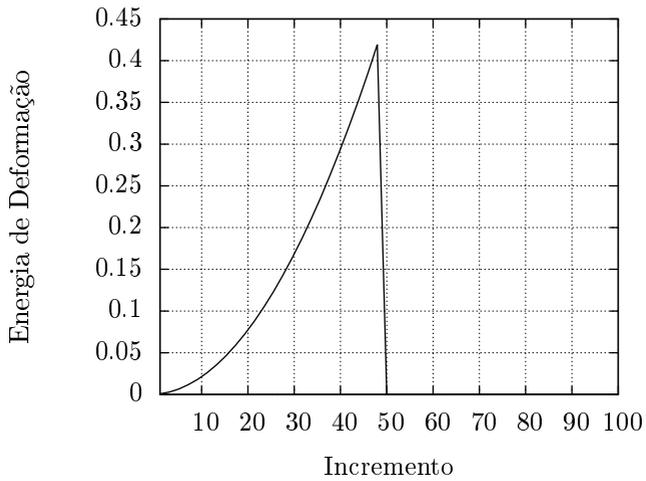


Figura 5.6: Histórico da energia de deformação.

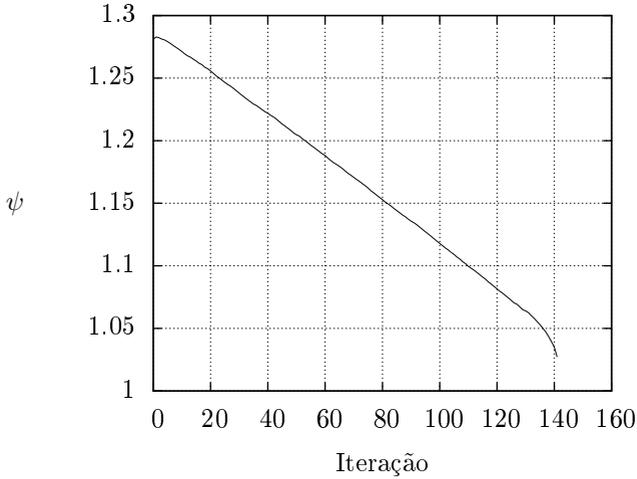


Figura 5.7: Valor do Funcional de Francfort-Marigo ao longo do processo de propagação para o Modo I.

## 5.2 EXEMPLO 2: MODO II

O próximo caso tem como objetivo apresentar a capacidade do algoritmo proposto de criar ramificações das regiões danificadas. O modo II possui a mesma geometria do modo I, diferindo apenas no tipo de condição de contorno imposta. Neste caso existem condições de deslocamento opostas e tangentes as faces superior e inferior (ver Figura 5.8). De forma análoga ao primeiro caso, os parâmetros utilizados encontram-se na Tabela 5.2.

É interessante notar que uma das características deste problema reside na simetria da densidade de energia de deformação. Sendo o modelo de Francfort-Marigo baseado exclusivamente nos valores de densidade de energia, torna-se evidente a divisão do dano em dois ramos simétricos, um em compressão e outro em tração. A Figura 5.9 apresenta o campo da derivada topológica na extremidade da região danificada juntamente com a curva de nível  $D_T\psi = 0$ . Pode ser visto que existem duas regiões distintas a frente do dano em que a derivada topológica é negativa, o que confirma as expectativas para o caso.

A distribuição de dano final pode ser visualizada na Figura 5.10a e, para fins de comparação, o resultado obtido por Allaire, Jouve e Van Goethem (2011) foi reproduzido na Figura 5.10b. Cabe ressaltar que

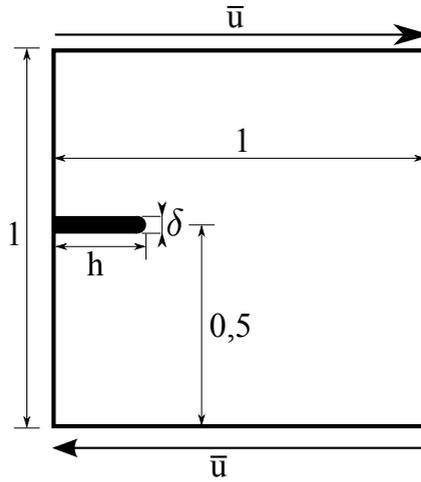


Figura 5.8: Geometria Modo 2.

Parâmetros	Valor
$h$	0,25 mm
$\delta$	0,05 mm
$l$	0,01 mm
$E_0$	1,0 MPa
$E_1$	$10^{-6}$ MPa
$\nu$	0,3
$\kappa$	50,5 J/mm <sup>3</sup>
$nincr$	100
$\bar{u}$	0,1 mm

Tabela 5.2: Parâmetros utilizados no caso Modo II.

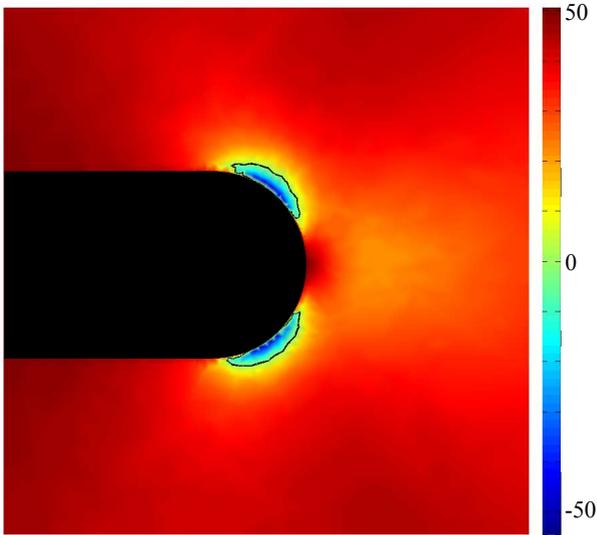


Figura 5.9: Campo derivada topológica a frente da região danificada e curva de nível  $D_T\psi = 0$  para o Modo II.

neste caso a propagação não chega à extremidade direita do domínio, e que este processo acontece naturalmente, dado que neste instante toda a derivada topológica torna-se positiva.

Utilizando as mesmas considerações feitas no exemplo anterior, pode ser observado na Figura 5.11 que o valor do funcional decresce ao longo do processo de propagação do dano, a menos das primeiras iterações.

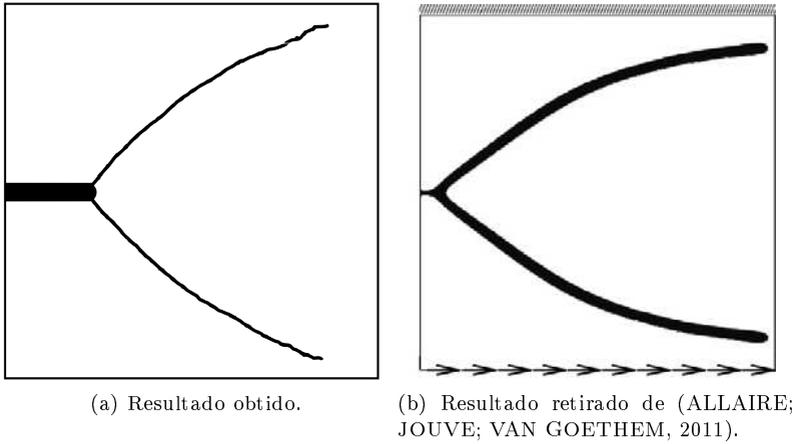


Figura 5.10: Resultado final para propagação do dano no Modo II.

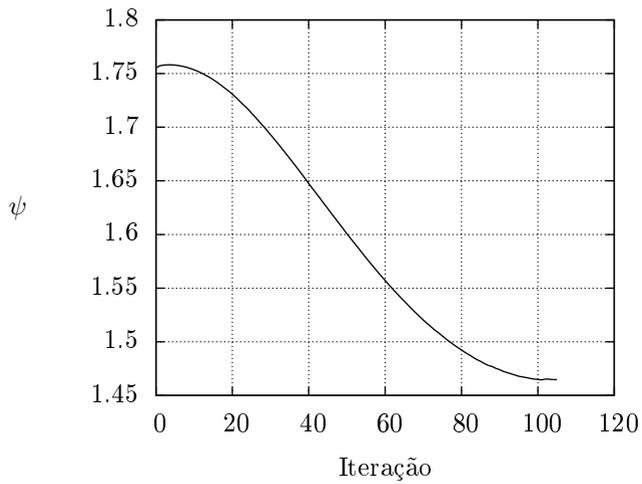


Figura 5.11: Valor do Funcional de Francfort-Marigo ao longo do processo de propagação para o Modo II.

### 5.3 EXPERIMENTOS DE BITTENCOURT

Os resultados experimentais para estes casos podem ser encontrados no relatório (INGRAFFEA; GRIGORIU, 1990), e serão utilizados para avaliar o algoritmo proposto. A geometria de interesse é mostrada na Figura 5.12 onde todas as dimensões são dadas em milímetros. Em particular, destacam-se os três furos dispostos entre a carga e a trinca inicial. Desta forma, torna-se alvo de estudo a influência destes furos na trajetória descrita pela trinca. Os diferentes casos tratados por esta geometria diferem no posicionamento da trinca em relação a carga aplicada, fornecido pela dimensão  $c$ , e o comprimento inicial da trinca fornecido pela dimensão  $h$  (Tabela 5.3). Em todos os experimentos foram utilizados as mesmas propriedades materiais: módulo de elasticidade  $E_0 = 30.000MPa$ , coeficiente de poisson  $\nu = 0,35$ , coeficiente de liberação de energia  $\kappa = 50,5J/mm^3$ . A espessura adotada para o dano inicial é de  $\delta = 0,10mm$ . O tamanho da inclusão foi ajustado para  $l = 0,03mm$  e seu módulo de elasticidade  $E_1 = 0,003MPa$ . O deslocamento prescrito foi dividido em  $nincr = 100$  incrementos de carga com valor total de  $\bar{u} = 0,20mm$ . Os parâmetros encontram-se na Tabela 5.4.

Para o primeiro caso a trinca inicial encontra-se posicionada imediatamente abaixo dos furos ( $c = 4,0mm$ ) com um comprimento inicial de  $1,5mm$ , e o resultado obtido apresenta grande concordância com o experimental (Fig. 5.13).

O próximo experimento apresenta o mesmo tamanho de trinca do anterior ( $h = 1,5mm$ ), porém esta é deslocada em um milímetro ( $c = 5,0mm$ ). Neste caso, a trajetória experimental não entra em contato com o primeiro furo e logo em seguida é desviada diretamente para o segundo (Fig. 5.14). O algoritmo proposto não foi capaz de reproduzir este resultado experimental, onde a região de dano intercep-

	$c$ (mm)	$h$ (mm)
Bittencourt I	4,0	1,5
Bittencourt II	5,0	1,5
Bittencourt III	6,0	1,0
Bittencourt IV	6,0	2,5

Tabela 5.3: Posicionamento das trincas nos experimentos de Bittencourt.

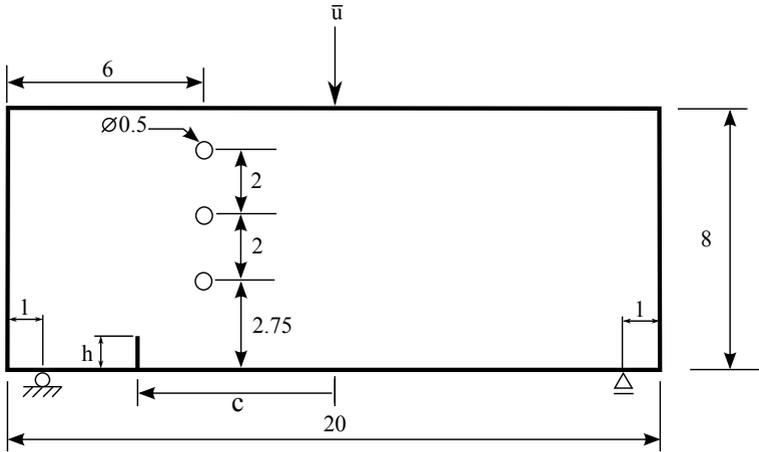


Figura 5.12: Geometria do experimento de Bittencourt.

Parâmetros	Valor
$l$	0,03 mm
$\delta$	0,10 mm
$E_0$	30.000 MPa
$E_1$	0,003 MPa
$\nu$	0,35
$\kappa$	50,5 J/mm <sup>3</sup>
$nincr$	100
$\bar{u}$	0,20 mm

Tabela 5.4: Parâmetros utilizados nos experimentos de Bittencourt.

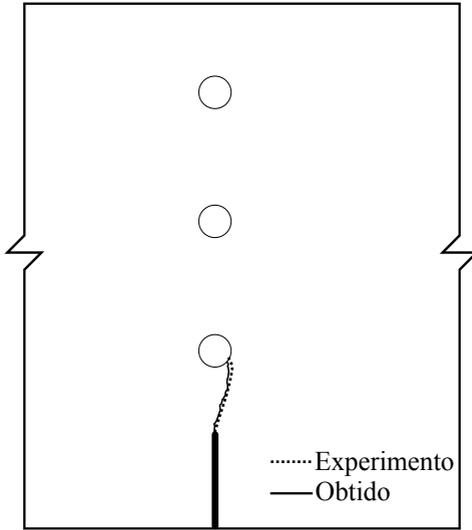


Figura 5.13: Resultado para experimento Bittencourt I  $c = 4,0mm$  e  $h = 1,5mm$ .

tou o primeiro furo, e em um incremento de carga posterior nucleou um novo ramo danificado. O algoritmo foi então interrompido pois a continuação da trajetória não teria efeito sobre a interpretação final do resultado, além do alto custo computacional associado. Através deste caso pode ser verificado que o algoritmo proposto foi capaz de atuar no mecanismo de nucleação de dano, independentemente de qualquer região danificada prévia ao redor do furo.

No terceiro problema a trinca inicial é deslocada também em um milímetro ( $c = 6,0mm$ ), porém o seu comprimento inicial é reduzido para  $h = 1,0mm$ . Neste caso também houve concordância com o resultado experimental, onde a região danificada propagou-se em direção ao furo intermediário (Fig. 5.15).

O quarto experimento é análogo ao segundo, onde o terceiro furo é atingido após passar imediatamente ao lado do segundo (Fig. 5.16). O resultado obtido com a derivada topológica interceptou o segundo furo e, em um próximo incremento de carga, propagou-se a partir deste. O algoritmo também foi finalizado logo em seguida, pelos mesmos motivos apresentados no segundo caso.

Para justificar o processo de propagação do dano, a Figura 5.17 ilustra o decaimento do funcional de Francfort-Marigo a medida que as

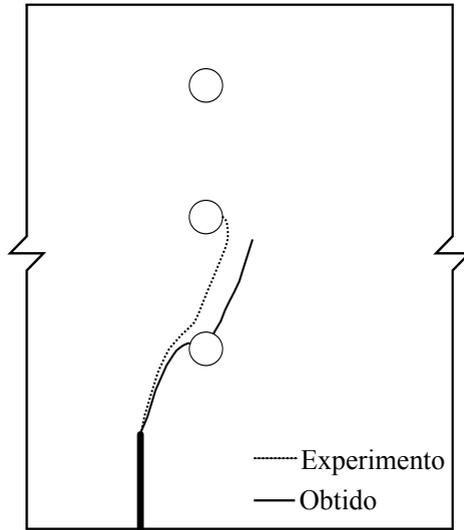


Figura 5.14: Resultado para experimento Bittencourt II  $c = 5,0mm$  e  $h = 1,5mm$ .

novas inclusões são criadas.

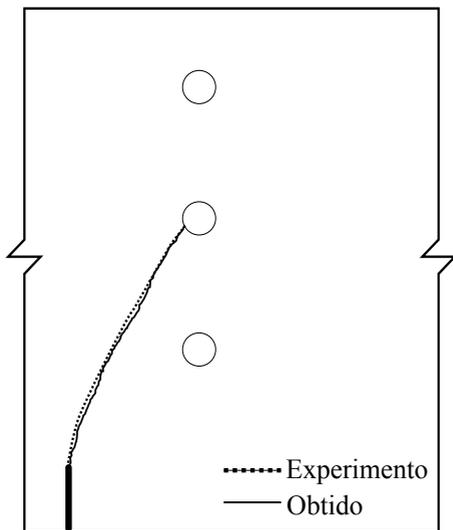


Figura 5.15: Resultado para experimento Bittencourt III  $c = 6,0mm$  e  $h = 1,0mm$

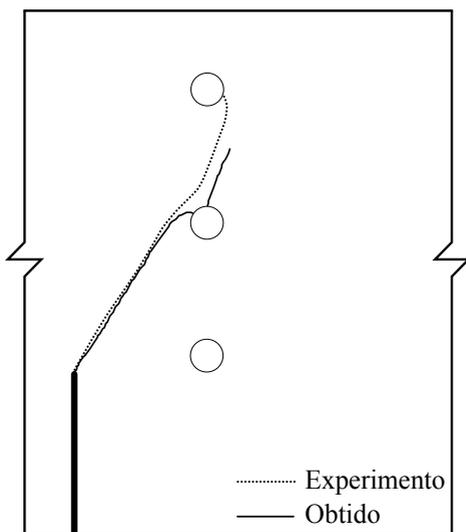


Figura 5.16: Resultado para experimento Bittencourt IV  $c = 6,0mm$  e  $h = 2,5mm$ .

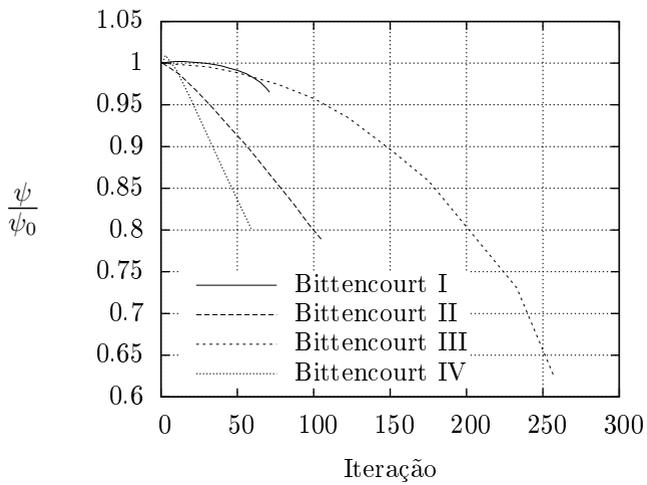


Figura 5.17: Decaimento do funcional ao longo do processo de criação de novas inclusões.



## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho o conceito de análise de sensibilidade topológica foi explorado e aplicado ao problema de evolução do dano em materiais frágeis, mais especificamente tratado do modelo de Francfort-Marigo. Para este fim foi desenvolvida a expressão da derivada topológica contemplando todos os passos necessários, desde a simples manipulação das relações até a apresentação do desenvolvimento da análise assintótica. O objetivo de tal procedimento é o de mostrar que apesar da simplicidade em sua forma final, a sua obtenção depende de vários procedimentos e de resultados oriundos das mais diferentes áreas da matemática e que foram simplesmente referenciadas ao longo do texto.

A proposta original do trabalho é a de propor uma formulação mais simples do que a empregada por Allaire, Jouve e Van Goethem (2011), onde toda a complexidade associada a utilização do método *level set* foi apresentada e avaliada. Deve ser enfatizado que o uso da derivada topológica associada ao modelo de Francfort-Marigo já foi utilizada pelos autores citados, mas apenas para inicializar a função *level set*. A sua utilização como ferramenta de propagação foi alvo desta dissertação.

Basicamente três ingredientes compõem este trabalho: o modelo de dano, a análise de sensibilidade topológica e o algoritmo de evolução. É importante verificar que os dois primeiros são definidos ainda no meio contínuo. Entretanto o seu uso em aplicações numéricas depende da solução do problema de elasticidade linear, que é obtida de forma aproximada mediante a introdução de um problema discretizado. Conforme comentado anteriormente, nos resultados apresentados foi utilizada uma malha de elementos CST e, conseqüentemente, o gradiente da solução é constante no interior de cada triângulo da malha. Desta maneira a representação de regiões com gradiente de módulo elevado torna-se difícil, como é o caso próximo à frente das regiões danificadas. Portanto são esperados desvios numéricos razoáveis na solução e, em problemas simétricos como o Modo II onde existe a ramificação do dano, o cálculo da derivada torna-se numericamente assimétrico. Este fato é particularmente relevante pois pode comprometer o algoritmo de evolução proposto, onde a criação de uma ou de múltiplas inclusões advém do valor da derivada topológica.

Uma das dificuldades compartilhadas em muitas técnicas de evolução reside na dependência da malha. Em virtude do tipo de elemento utilizado, foi arbitrado que o centro das novas inclusões deve coincidir com o centroide dos elementos candidatos. Portanto, o processo de localização acaba dependendo da disposição destes. A solução encontrada

para contornar esta dependência encontra-se na caracterização geométrica da inclusão. Sendo um elemento da geometria do problema, a inclusão é representada por um conjunto de elementos razoavelmente menores do que esta. Desta maneira, a proposta feita revelou ser eficiente, dado que pequenas variações da solução ou da malha deixaram de ter grande impacto na evolução do problema.

A obtenção de uma carga crítica através da proposta de Francfort-Marigo torna-se problemática devido limitações do próprio modelo. A proposta utilizada para contornar esta limitação encontra-se na utilização de um fator de escala associado ao parâmetro de liberação de energia volumétrico  $\kappa$ . Esta estratégia mostrou ser eficaz em problemas onde existe somente a propagação de regiões previamente danificadas, buscando tipicamente mimetizar uma trinca inicial através de uma região danificada de espessura  $\delta$ . Entretanto, esta abordagem torna-se inconsistente em problemas que apresentam os mecanismos de nucleação e de propagação atuando de forma conjunta. Nestes casos o fator de escala afeta de forma artificial o processo de nucleação. Isto é, em regiões livres de dano e de singularidades, como é o caso no contorno dos furos nos experimentos de Bittencourt, a nucleação do dano torna-se dependente da espessura inicial da região danificada. Entretanto, este fato não afeta a capacidade do algoritmo proposto de atuar no mecanismo de nucleação, sendo alvo de discussão a validade do critério para nucleação em uma região completamente isenta de dano. Este tema encontra-se aberto para novas propostas, e uma alternativa para eliminar esta inconsistência seria a de introduzir uma outra relação, ou talvez, outra propriedade material separadamente para o fenômeno de nucleação.

Não pode deixar de ser feita a distinção entre a natureza do modelo de dano e a natureza dos experimentos. A abordagem utilizada procura mimetizar uma trinca através de um material com rigidez muito baixa, e que apresenta uma espessura não nula. Ainda, a singularidade na ponta da trinca é removida, e a geometria desta substituída por uma extremidade arredondada de diâmetro  $l$ , e no caso de um dano inicial com diâmetro  $\delta$ . Portanto, rigorosamente, os problemas não são equivalentes e a aproximação das trajetórias, como mostradas nos experimentos de Bittencourt, podem apresentar divergências. Ainda, verificam-se as limitações do modelo de Francfort-Marigo que não é capaz de distinguir entre os estados de tração e de compressão, e consequentemente aos diferentes mecanismos de propagação/nucleação associados a estes.

No ambiente computacional, a análise de sensibilidade topológica

revela ser extremamente eficiente e poderosa. Pois fornece informações relacionadas a alteração de topologia e/ou perturbação não suave no domínio, sem de fato fazê-las, ao custo extremamente baixo de um pós-processamento.

## 6.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Algumas modificações e sugestões podem ser feitas para melhorar o desempenho do algoritmo e da abordagem utilizada:

- Melhorar e avaliar a qualidade da solução do problema de elasticidade linear, utilizando elementos de ordem mais elevada ou empregando métodos numéricos mais robustos para esta classe de problemas.
- Aprimorar o esquema de evolução para que não exista a necessidade de remalhamento a cada nova inclusão. Com isto o custo computacional do algoritmo seria drasticamente reduzido.
- Reavaliar os critérios de nucleação e propagação do dano. Avaliar a possibilidade de utilizar diferentes expressões para os dois mecanismos ou introduzir novos parâmetros materiais.
- Aprimorar o modelo para distinguir entre estados de tração e compressão, e conseqüentemente separar mecanismos de ação baseados nestes. Transferir esta distinção no cálculo da derivada topológica.
- Propor metodologias para escolha a *priori* de um tamanho de inclusão  $l$ .



## REFERÊNCIAS

- ALLAIRE, G.; JOUVE, F.; VAN GOETHEM, N. Damage and fracture evolution in brittle materials by shape optimization methods. *Journal of Computational Physics*, 2011. v. 230, p. 5010–5044, 2011.
- AMSTUTZ, S.; ANDRÄ, H. A new algorithm for topology optimization using a level-set method. *Journal of Computational Physics*, 2006. v. 216, p. 573–588, 2006.
- AMSTUTZ, S.; DOMINGUEZ, N. Topological sensitivity analysis in the context of ultrasonic non-destructive testing. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2008. v. 32, p. 936–947, 2008.
- AMSTUTZ, S.; NOVOTNY, A. A. Topological optimization of structures subject to von mises stress constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2010. v. 41, p. 407–420, 2010.
- ARORA, J. S. *Introduction to Optimum Design*. 2. ed. San Diego, California: Elsevier Academic Press, 2004.
- BATHE, K.-J. *Finite Element Procedures*. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
- BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural Optimization*, 1989. v. 1, p. 193–202, 1989.
- BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1988. v. 71, p. 197–224, 1988.
- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of Applied Mechanics*, 1999. v. 69, p. 635–654, 1999.
- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. *Topology Optimization Theory, Methods and Applications*. New York: Springer, 2004.
- BITTENCOURT, T. N. et al. Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2D LEFM problems. *Engineering Fracture Mechanics*, 1996. v. 55, p. 321–334, 1996.
- BONNET, M. Topological sensitivity for 3D elastodynamic and acoustic inverse scattering in the time domain. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2006. v. 195, p. 5239–5254, 2006.

CÉA, J. et al. The shape and topological optimizations connection. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2000. v. 188, p. 713–726, 2000.

CHEN, Z. *Finite Element Methods and their applications*. New York: Springer, 2005.

ESCHENAUER, H. A.; KOBELEV, V. V.; SCHUMACHER, A. Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Structural Optimization*, 1994. v. 8, p. 42–51, 1994.

FRANCFORT, G. A.; MARIGO, J. J. Stable damage evolution in a brittle continuous medium. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 1993. v. 12, p. 149–189, 1993.

GDOUTOS, E. E. *Fracture Mechanics An Introduction*. 2. ed. The Netherlands: Springer, 2005.

GIUSTI, S. M. *Análise de sensibilidade topológica em modelos constitutivos multi-escalas*. Tese (Doutorado) — Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, RJ-Brasil, Abril 2009.

GIUSTI, S. M.; NOVOTNY, A. A.; PADRA, C. Topological sensitivity analysis of inclusion in two-dimensional linear elasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2008. v. 32, p. 926–935, 2008.

GURTIN, M. E. *An Introduction to Continuum Mechanics*. New York: Academic Press, Inc, 1981.

GUZINA, B. B.; BONNET, M. Small-inclusion asymptotic of misfit functionals for inverse problems in acoustics. *Inverse Problems*, 2006. v. 22, p. 1761–1785, 2006.

HAUG, E. J.; CHOI, K. K.; KOMKOV, V. *Design sensitivity analysis of structural systems*. Orlando, Florida: Academic Press, Inc, 1986.

INGRAFFEA, A. R.; GRIGORIU, M. *Probabilistic Fracture Mechanics A validation of predictive capability*. Cornell University. Ithaca, New York, 1990. Relatório Interno.

LARRABIDE, I. *Processamento de imagens via derivada topológica e suas aplicações na modelagem e simulação computacional do sistema cardiovascular humano*. Tese (Doutorado) — Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, RJ, Março 2007.

LEMAITRE, J.; DESMORAT, R. *Engineering Damage Mechanics*. New York: Springer, 2005.

MALVERN, L. E. *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1969.

NOVOTNY, A. A. *Análise de Sensibilidade Topológica*. Tese (Doutorado) — Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, RJ-Brasil, Fevereiro 2003.

NOVOTNY, A. A. et al. Topological sensitivity analysis. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2003. v. 192, p. 803–829, 2003.

NOVOTNY, A. A. et al. Topological sensitivity analysis for three-dimensional linear elasticity problem. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2007. v. 196, p. 4354–4364, 2007.

NOVOTNY, A. A.; SOKOLOWSKI, J. *Topological Derivatives in Shape Optimization*. -: Springer, 2013. (Interaction of Mechanics and Mathematics Series).

REDDY, J. N. *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*. New York: John Wiley & sons, Inc., 1984.

SOKOLOWSKI, J.; ŻOCHOWSKI, A. On the topological derivative in shape optimization. *SIAM Journal on Control & Optimization*, 1999. v. 37, p. 1251–1272, 1999.

SOKOLOWSKI, J.; ŻOCHOWSKI, A. Topological derivatives for elliptic problems. *Inverse Problems*, 1999. v. 15, p. 123–134, 1999.

SOKOLOWSKI, J.; ZOLÉSIO, J. P. *Introduction to Shape Optimization*. New York: Springer-Verlag, 1992.



# APÊNDICE A CÁLCULO DO TENSOR $\mathbb{D}$

O tensor isotrópico de quarta ordem  $\mathbb{D}$  é utilizado na relação (2.91) para transformar o tensor tensão não perturbado  $\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}})]$  nas componentes (2.88-2.90). Desta maneira, é proposto que o tensor  $\mathbb{D}$  tenha a seguinte representação

$$\mathbb{D} = k_1 \mathbb{I} + k_2 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \quad (\text{A.1})$$

onde as constantes  $k_1$  e  $k_2$  devem ser determinadas de forma que a Eq. (2.91) seja satisfeita. Assim, a operação sobre  $\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}})]$  resulta em

$$\mathbb{D}\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}})] = k_1 \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}})] + k_2 \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}})]) \mathbf{I}, \quad (\text{A.2})$$

onde  $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}})])$  representa o traço do tensor tensão não perturbado. Para tornar as equações subsequentes mais legíveis, o tensor  $\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}})]$  será representado apenas como  $\boldsymbol{\sigma}$ . A relação (A.2) pode ser expressa em termos de suas componentes,

$$(\mathbb{D}\boldsymbol{\sigma})_{11} = (k_1 + k_2) \sigma_{11} + k_2 \sigma_{22} + k_2 \sigma_{33}, \quad (\text{A.3})$$

$$(\mathbb{D}\boldsymbol{\sigma})_{22} = k_2 \sigma_{11} + (k_1 + k_2) \sigma_{22} + k_2 \sigma_{33}, \quad (\text{A.4})$$

$$(\mathbb{D}\boldsymbol{\sigma})_{33} = k_2 \sigma_{11} + k_2 \sigma_{22} + (k_1 + k_2) \sigma_{33}, \quad (\text{A.5})$$

$$(\mathbb{D}\boldsymbol{\sigma})_{ij} = k_1 \sigma_{ij} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \text{ e } i \neq j, \quad (\text{A.6})$$

lembrando que são consideradas válidas as hipóteses de estado plano de tensão.

Em contrapartida, o conjunto de equações (2.88-2.90) pode ser reescrito de forma análoga às equações apresentadas acima. Com o objetivo de facilitar a leitura das equações, pode-se definir

$$a = \frac{2\gamma}{(1-\nu)(1+\gamma\alpha)}, \quad (\text{A.7})$$

$$b = \frac{4\gamma}{(1+\nu)(1+\gamma\beta)}, \quad (\text{A.8})$$

de forma que as equações (2.88-2.90) tornam-se

$$\sigma_{\gamma}^{xx}(\mathbf{u}_{\epsilon}) = \frac{a}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{b}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) + O(\epsilon^2), \quad (\text{A.9})$$

$$\sigma_{\gamma}^{yy}(\mathbf{u}_{\epsilon}) = \frac{a}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{b}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) + O(\epsilon^2), \quad (\text{A.10})$$

$$\sigma_{\gamma}^{xy}(\mathbf{u}_{\epsilon}) = O(\epsilon^2). \quad (\text{A.11})$$

onde  $\phi_1$  e  $\phi_2$  foram substituídos por suas definições,  $\phi_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$  e  $\phi_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ . Assim,

$$\sigma_\gamma^{xx}(\mathbf{u}_\epsilon) = \frac{a+b}{2}\sigma_1 + \frac{a-b}{2}\sigma_2 + O(\epsilon^2), \quad (\text{A.12})$$

$$\sigma_\gamma^{yy}(\mathbf{u}_\epsilon) = \frac{a-b}{2}\sigma_1 + \frac{a+b}{2}\sigma_2 + O(\epsilon^2), \quad (\text{A.13})$$

$$\sigma_\gamma^{xy}(\mathbf{u}_\epsilon) = O(\epsilon^2), \quad (\text{A.14})$$

evidenciando a semelhança com as equações (A.3-A.6). Nota-se que as componentes do tensor  $\boldsymbol{\sigma}$  estão escritas segundo uma base alinhada com os seus autovetores e, portanto, tem-se que  $\sigma_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ . Para que as equações (A.3-A.6) sejam equivalentes às relações (A.12-A.14),  $k_1$  e  $k_2$  devem ser tais que

$$k_1 + k_2 = \frac{a+b}{2}, \quad (\text{A.15})$$

$$k_2 = \frac{a-b}{2}, \quad (\text{A.16})$$

resultando em

$$k_1 = b, \quad (\text{A.17})$$

$$k_2 = \frac{a-b}{2}. \quad (\text{A.18})$$

Portanto,

$$k_1 = \frac{4\gamma}{(1+\nu)(1+\gamma\beta)}, \quad (\text{A.19})$$

$$k_2 = \frac{\gamma}{(1-\nu)(1+\gamma\alpha)} - \frac{2\gamma}{(1+\nu)(1+\gamma\beta)}, \quad (\text{A.20})$$

e a proposta (A.1) torna-se

$$\mathbb{D} = \frac{4\gamma}{(1+\nu)(1+\gamma\beta)} \mathbb{I} + \left[ \frac{\gamma}{(1-\nu)(1+\gamma\alpha)} - \frac{2\gamma}{(1+\nu)(1+\gamma\beta)} \right] \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}. \quad (\text{A.21})$$